

UNIVERSITÉ DE LIÈGE



FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE

**Extension du modèle de
Cascade Intranucléaire de Liège
aux énergies comprises entre 2 et 10 GeV**

Pedoux Sophie

Travail présenté en vue de
l'obtention du grade de
Diplômé d'Études Approfondies en Sciences

Année académique 2005-2006

Remerciements

Je tiens à remercier monsieur Cugnon, sans qui je n'aurais pas eu l'occasion de faire ce travail. Je voudrais le remercier pour son aide, ses relectures attentives et ses nombreux conseils.

Je remercie Jean-Paul, pour sa présence, son soutien et ses encouragements.

Je voudrais également remercier Alice, pour nos ragots, nos discussions techniques sur L^AT_EX ou sur les problèmes rencontrés lors des « pause café » qui ont ponctué cette année.

Un grand merci aussi à Marraine, pour avoir accepté de relire ce travail, malgré son allergie à la physique.

Merci à Papa, Maman et Mamy, qui m'ont donné la chance d'en arriver là.

Merci à Cédric, Christophe, Denis, Julien, Yann, Nicolas, Jean-Philippe, Sylvia et Luc, je suis sûre que vous savez pourquoi.

Enfin, merci à tous ceux qui pourraient se sentir oubliés et qui, de près ou de loin, m'ont apporté leur soutien.

À Grand-Papa et Papy, je vous remercie de veiller sur moi et pense souvent à vous.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Position du problème	5
2.1	Introduction	5
2.2	Les réactions de spallation	5
2.3	Description du modèle de cascade intranucléaire de Liège	7
2.3.1	Historique du modèle de cascade intranucléaire de Liège	7
2.3.2	Caractéristiques principales de la version actuelle du code	8
2.4	Description de la dernière version du code : INCL4	9
2.5	Description de la sous-routine COLLIS	13
2.6	Extension du modèle de cascade intranucléaire entre les énergies de 2 GeV à 10 GeV	15
3	Détermination des sections efficaces	17
3.1	Introduction	17
3.2	Principe de la prise de décision incorporée à COLLIS	18
3.3	Modélisation des sections efficaces	18
3.4	Raisonnement basé sur l'isospin pour déterminer les sections efficaces de production de pions	21
3.5	Paramétrisation des sections efficaces	25
3.5.1	Ajustement selon Bystricky <i>et al.</i>	25
3.5.2	Ajustement à plus haute énergie	26
3.5.3	Application à la paramétrisation de $\sigma(pp \rightarrow pp\pi^0)$	27
3.6	Calcul des probabilités à associer à chaque répartition de charge possible	28
3.6.1	États d'isospin pour les systèmes composés de deux pions	29
3.6.2	Modèle de répartition des charges pour la production de deux pions	30
3.6.3	Répartition des charges pour les réactions $pn \rightarrow NN\pi\pi$	32
3.6.4	Tableaux récapitulatifs des répartitions de charges utilisées	32
4	Modèle de répartition des impulsions	34
4.1	Détermination de la distribution de l'espace des phases	35
4.2	La sous-routine FOUL1	37
4.2.1	Choix d'une variable aléatoire obéissant à une distribution donnée	37
4.3	Description de FOUL1	39

5	Résultats obtenus	41
5.1	Introduction	41
5.2	Programmation des changements dans INCL	41
5.2.1	Modifications relatives aux sections efficaces	41
5.2.2	Modifications relatives à la répartition des charges	43
5.3	Comparaison des résultats donnés par INCL avant et après modification	44
5.3.1	Comparaison de l'histogramme montrant le paramètre d'impact du projectile	46
5.3.2	Comparaison des histogrammes se rapportant aux noyaux résiduels	46
5.3.3	Comparaison des histogrammes se rapportant au processus de fission	47
5.3.4	Comparaison des histogrammes se rapportant à l'émission de par- ticules	48
5.3.5	Comparaison des histogrammes se rapportant à l'émission de neu- trons	50
5.4	Comparaison des histogrammes se rapportant à l'émission de pions . . .	52
6	Conclusions	55
A	Coefficients de Clebsch-Gordan	57
B	Invariant de l'espace des phases : Définition	58
C	Exemple de fichier .out donné par INCL	61

Chapitre 1

Introduction

Les réactions de spallation bénéficient à l'heure actuelle d'un regain d'intérêt très marqué. Par « réactions de spallation », on désigne aussi bien l'interaction d'une particule de haute énergie (dont nous préciserons le domaine d'énergie sous peu) avec une cible macroscopique (un bloc de matière appelé parfois cible de spallation) que l'interaction d'une particule de haute énergie avec un noyau atomique. Le premier processus est en quelque sorte une itération du second, la première interaction particule-noyau générant d'autres particules qui interagissent à leur tour avec d'autres noyaux, et ainsi de suite.

Le terme « spallation » vient du latin « spallare », qui signifie « faire sortir », « extraire » avec une connotation d'abondance. Les processus de spallation macroscopiques, mentionnés ci-dessus, ont été appelés ainsi parce qu'ils permettent d'« extraire » de la cible macroscopique un grand nombre de particules : neutrons et photons, les particules chargées étant largement stoppées dans la cible de spallation elle-même.

Le terme « spallation » a été attribué au processus microscopique d'interaction particule rapide-noyau parce que celui-ci permet également d'« extraire » des particules du noyau (cette fois également des particules chargées, essentiellement des protons) avec une certaine efficacité.

Le regain d'intérêt pour les réactions de spallation provient des applications possibles de la spallation macroscopique. Citons-en deux : la mise sur pied de « cible de spallation » de haute intensité, dont le but principal est d'utiliser les neutrons « extraits » pour des études de structure en matière condensée [1] et les projets d'ADS (Accelerator Driven System) pour l'incinération des déchets radioactifs [2]. Un ADS résulte du couplage d'un accélérateur de protons de haute énergie et d'un réacteur sous-critique contenant une cible de spallation. Les protons bombardent la cible de spallation qui émet un certain nombre de neutrons. Ces neutrons sont multipliés dans le cœur sous-critique et finalement utilisés pour « transmuter » les déchets radioactifs par des réactions nucléaires adéquates (par exemple par des réactions de fission pour les actinides).

Bien sûr, le nombre de neutrons « extraits », par proton incident, d'une « cible de spallation » augmente avec l'énergie du proton. Cependant le paramètre intéressant est le nombre de neutrons émis par proton incident et divisé par l'énergie du proton parce qu'il représente le « coût » du neutron produit, le « coût » de l'accélération d'un proton étant essentiellement proportionnel à l'énergie du proton accéléré. Il se fait que

ce paramètre présente un maximum autour d'une énergie de proton incident à peu près égale à 1 GeV. Bien sûr, la valeur exacte dépend de la géométrie et de la taille de la « cible de spallation ». Ce maximum fixe le domaine d'énergie qui fait l'objet du regain d'« intérêt » pour les réactions de spallation. La « spallation macroscopique » résultant d'un ensemble d'interactions élémentaires particule-noyau où l'énergie de la particule peut avoir n'importe quelle valeur entre l'énergie initiale du proton et zéro (et où la nature de la particule peut être un proton, un neutron, un pion ou un photon), on a besoin de disposer d'une bonne connaissance et/ou d'une bonne modélisation de la « spallation microscopique » pour des énergies allant de 0 à 2 GeV et pour des projectiles du type mentionné ci-dessus. Ceci est une exigence très forte car les mécanismes de réaction peuvent varier notablement dans le domaine d'énergie mentionné ci-dessus. Cependant, il est relativement clair maintenant que le mécanisme de réaction peut être décrit par le modèle de cascade intranucléaire (INC) + évaporation dans le domaine énergétique allant de ≈ 200 MeV à une énergie au moins supérieure à 2 GeV.

Récemment, il a été évoqué que ce modèle pourrait être valable jusqu'à des énergies très basses, de l'ordre de 20 MeV (en-deçà, le mécanisme de réaction résulte essentiellement de la formation d'un noyau composé [3]). Dans ce modèle, le mécanisme de réaction peut-être vu comme un processus en deux étapes, l'une assez rapide ($\approx 10^{-22}$ s), la cascade intranucléaire (INC), correspondant à une suite de collisions nucléon-nucléon, l'autre assez lente ($\approx 10^{-20}$ s), l'évaporation, correspondant à l'émission de particules lentes par un noyau encore légèrement excité et agissant comme une source chaude (c'est-à-dire caractérisé par son énergie d'excitation et sa densité de niveaux seulement).

Les modèles de cascade qui sont des modèles semi-classiques de diffusion multiple sont traduits en codes numériques de simulation. Ils diffèrent par les aspects de physique nucléaire mis en jeu, par les méthodes de simulation ou encore par les sections efficaces élémentaires utilisées. Le modèle de cascade intranucléaire développé à Liège (INCL) semble être un des modèles INC les plus performants. Son développement a été largement motivé par les projets d'ADS et il a été largement testé et « validé » dans le domaine d'énergie allant de ≈ 40 MeV à ≈ 2 GeV. Cette gamme d'énergie étant caractéristique, en moyenne, du rayonnement cosmique (constitué à 87 % de protons, de 12 % de particules α , le reste étant des noyaux plus lourds avec des abondances relatives comparables à celles de notre soleil), le modèle INCL peut être potentiellement appliqué, en première approximation à la description des réactions nucléaires induites par le rayonnement cosmique dans la haute atmosphère ou dans les objets, satellites ou missions spatiales, habitées ou non, utilisés par la recherche spatiale. Ici, les questions importantes relèvent de la radioprotection et de la gestion du matériel (en particulier électronique) embarqué.

L'énergie des protons du rayonnement cosmique est en moyenne de 1 GeV mais peut atteindre des valeurs énormes. Le spectre décroît très vite au delà d'un GeV, mais on estime que pour décrire valablement l'effet du rayonnement cosmique, il convient d'utiliser des modèles valables jusqu'à une énergie d'environ 10 GeV. Il serait donc hautement désirable d'étendre le modèle INCL jusqu'à cette énergie. Mais de façon plus fondamentale, il serait fort intéressant de savoir jusqu'où la dynamique des collisions nucléon-nucléon (ou plus généralement baryon-baryon) est valable et à partir de quelle énergie on doit faire intervenir les degrés de liberté des quarks.

Pour étendre le modèle INCL entre 2 et 10 GeV, il faut (au moins) introduire les voies de réactions inélastiques nucléon-nucléon qui s'ouvrent dans cette région. Les plus importantes impliquent la production multiple de pions. Bien que de moindre importance, il faut également mentionner la production de particules étranges (kaons et hyperons). Enfin, il faut également introduire les canaux inélastiques dans la voie pion-nucléon. Ceci constitue essentiellement le programme de notre thèse de doctorat. Le travail que nous avons réalisé cette année porte sur le premier volet, à savoir l'introduction de la production multiple de pions dans les collisions nucléon-nucléon.

La première étape de ce travail fut donc de comprendre les mécanismes d'INCL afin de déterminer ce que l'extension du modèle pouvait impliquer. Nous pouvons d'ores et déjà dire que les changements impliqués par l'extension du modèle concernaient l'ajout de nouvelles réactions dans le processus de collision. L'éventail des réactions accessibles par le programme couvre très bien le domaine d'énergie allant jusqu'à 2 GeV mais, à plus haute énergie, nous avons ajouté les réactions de production de plusieurs pions, en nous limitant à la production de trois pions maximum.

Le premier chapitre de ce mémoire, après cette introduction, présentera d'une manière assez succincte le modèle de cascade intranucléaire de Liège. Le processus de collision nucléon-nucléon, qui devra être modifié, est géré par la sous-routine COLLIS. Nous décrirons celle-ci en détail. A la fin du chapitre, nous pourrons alors expliciter un peu plus les changements qu'il va falloir introduire dans le code INCL pour y inclure les réactions de production de un, deux et trois pions.

Afin de déterminer la voie finale dans les collisions nucléon-nucléon simulées, la sous-routine COLLIS est basée sur la méthode de Monte-Carlo, appliquée aux paramétrisations des sections efficaces de toutes les réactions possibles. Cependant, il n'y a pas suffisamment de données expérimentales sur les sections efficaces de toutes les nouvelles réactions que nous souhaitons prendre en compte. Pour résoudre ce problème, nous avons groupé les réactions supplémentaires en fonction du nombre de pions produits et en utilisant un modèle pour la répartition des charges, il est possible de déterminer quelle est la réaction qui a lieu. Il nous reste alors à paramétriser les sections efficaces de production d'un, de deux et de trois pions. Cela a pu être réalisé en se basant sur le raisonnement présenté dans l'article de Bystricky *et al.* [4].

Le troisième chapitre commence par rappeler la manière dont COLLIS détermine quelle est la réaction élémentaire qui va se produire. Nous verrons qu'il faut pour cela pouvoir paramétriser les sections efficaces des réactions possibles. Or, les sections efficaces des réactions que nous souhaitons ajouter ne sont pas directement mesurables. Nous allons alors expliquer le raisonnement de l'article [4] qui permet de les évaluer. Les sections efficaces de production d'un et de deux pions pourront être évaluées à partir d'une combinaison de sections efficaces de réactions particulières, qu'il nous faudra donc paramétriser. Une section du chapitre sera consacrée à la présentation des paramétrisations que nous avons utilisées pour ces réactions particulières et nous les appliquerons à la réaction $pp \rightarrow pp\pi^0$ en guise d'exemple. Au terme de cette section, nous pourrons paramétriser les sections efficaces de production d'un et de deux pions. Nous serons donc en mesure de programmer toute la partie de COLLIS qui déterminera le nombre de pions produits. Une fois ce nombre connu, il faut encore donner aux pions une charge, une énergie et une impulsion. La première caractéristique permet, contrairement aux deux autres, de fixer complètement la réaction en cours et de pouvoir écrire la réaction

particulière qui a effectivement lieu. De plus, le modèle que nous avons établi et qui permet de connaître les probabilités à associer à chaque réaction, pour un nombre de pion fixé, fait intervenir des paramètres qui ont déjà été discutés au début du troisième chapitre. Voilà pourquoi nous présentons le modèle de répartition des charges sur les particules de la voie de sortie à la fin de ce chapitre alors que le modèle de répartition des impulsions et de l'énergie sur ces mêmes particules sera exposé dans le chapitre quatre.

La loi de conservation d'énergie-impulsion doit être respectée lors de la répartition des impulsions et de l'énergie entre les particules de la voie de sortie. Jusqu'à présent, la sous-routine COLLIS ne créait jamais plus de deux particules dans la voie de sortie et, comme les coordonnées du centre de masses sont utilisées dans celle-ci, répartir les impulsions et l'énergie ne posait pas de difficultés particulières. L'ajout des réactions de production de plusieurs pions a modifié ceci et la répartition des impulsions n'est plus aussi aisée. Par conséquent, nous avons dû modéliser celle-ci et l'avons implémentée dans une sous-routine supplémentaire appelée FOUL1.

Le quatrième chapitre présente le modèle qui a été implémenté dans FOUL1. Il se base sur l'hypothèse selon laquelle les particules peuplent uniformément l'espace des phases [5, 6]. Pour appliquer ce modèle, il nous faut tirer au hasard un ensemble d'impulsions pour les particules mais une des contraintes sur cet ensemble d'impulsions est trop contraignante et nous devons effectuer un changement de coordonnées afin qu'elle soit automatiquement satisfaite. Ce changement de coordonnées fait apparaître un poids ω à appliquer à leur espace de variation. Le début du chapitre présentera le changement de coordonnées dont nous venons de parler et le raisonnement qui nous conduira à la détermination du poids ω . Nous finirons le chapitre en décrivant la sous-routine FOUL1 et la façon dont elle fonctionne.

Ensuite, le cinquième chapitre sera divisé en deux parties. Dans la première, nous reviendrons sur la programmation proprement dite. Le but n'est pas de donner tous les détails des parties du code que nous avons modifiées ou ajoutées mais plutôt d'en donner un aperçu général. Nous y décrirons la partie de COLLIS qui détermine la réaction qui va avoir lieu, après toutes les modifications que nous y avons apportées. Par le biais d'un exemple, nous verrons comment fonctionne la sous-routine REPART, dans laquelle est implémentée la répartition des charges sur les particules de la voie de sortie, en fonction de leur nombre. Dans la deuxième partie du cinquième chapitre, nous comparerons les résultats obtenus lors de l'exécution d'INCL, pour un proton incident ayant une énergie cinétique de 5 GeV et un noyau de bismuth comme cible, avant et après l'ajout des réactions de production d'un, de deux et de trois pions. Nous comparerons des caractéristiques concernant le noyau résiduel, les particules émises et plus particulièrement tous les paramètres qui concernent la production de pions.

Enfin, le dernier chapitre contient nos conclusions.

Chapitre 2

Position du problème

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons expliquer ce que sont les réactions de spallation. Nous verrons aussi comment INCL a évolué depuis sa conception et quelles sont les principales caractéristiques d'INCL4, la version actuelle du code. Ensuite, nous décrirons la sous-routine appelée COLLIS, car elle gère le processus de collision et nous verrons que c'est cette sous-routine que nous serons amenés à modifier pour étendre le modèle. Enfin, une fois que les capacités et la méthode de fonctionnement d'INCL seront fixées, nous expliquerons les différentes étapes que nous avons suivies pour étendre le modèle.

2.2 Les réactions de spallation

Une réaction de spallation est une réaction nucléaire au cours de laquelle un hadron de haute énergie¹ interagit avec une cible. Ce terme désigne le mécanisme par lequel une particule légère de haute énergie peut, au cours d'une collision, éjecter du noyau cible des nucléons ou des particules légères. Après cette éjection, il reste soit un noyau résiduel froid (aussi appelé résidu de spallation), soit des fragments de fission, si une fission se produit lors de la collision. Parfois, le terme « spallation » est étendu à des collisions impliquant deux noyaux massifs.

Le terme « spallation » (voir le vocable « les réactions de spallation ») s'utilise aussi bien pour dénommer le processus microscopique (l'interaction particule-noyau à haute énergie) que pour faire référence au processus macroscopique (interaction d'une particule de haute énergie avec une « cible de spallation », morceau macroscopique de matière).

Dès le début de leur étude, les réactions de spallation avaient été remarquées pour leur capacité à générer un grand nombre de neutrons. Mais les accélérateurs de l'époque ne permettaient pas de donner une énergie suffisante à la particule incidente pour que la spallation soit exploitable, en tant que source intense de neutron. Cependant, les avancées technologiques de ces dernières années, et particulièrement celles dans le domaine des accélérateurs, ont contribué à réveiller l'intérêt que suscitaient jadis les réactions de spallation.

En utilisant un accélérateur de haute énergie et de grande puissance pour bombarder une cible de spallation, on obtient une source de neutrons très intense, grâce à la quantité

¹Par haute énergie, nous entendons une énergie comprise entre ≈ 100 MeV et quelques GeV.

de neutrons libérés lors de la spallation. Ce flux de neutrons peut être utilisé pour entretenir un réacteur nucléaire sous-critique², mais il pourrait également être utilisé pour transmuter (ou incinérer) les déchets nucléaires dans le but de générer des noyaux résiduels plus « propres » (moins radiotoxiques, avec un temps de demi-vie moindre, etc.) que les déchets de départ.

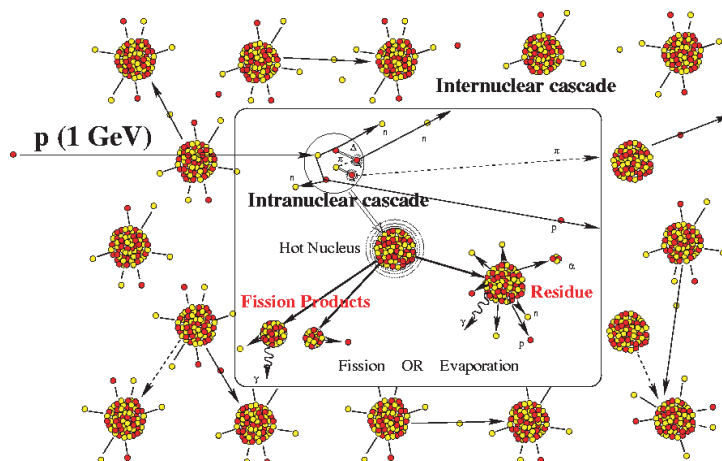


FIG. 2.1: Exemple de réactions de spallation macroscopiques [10].

La spallation a été initialement décrite par Serber en 1947 [7]. En se basant sur le spectre en énergie des neutrons, il proposa une description en deux étapes :

- La première, très rapide, au cours de laquelle le nucléon incident transfère une partie de son énergie au noyau cible.
- La seconde, plus lente, au cours de laquelle le noyau résiduel évacue son énergie d'excitation en évaporant des particules légères.

Les particules détectées au sol et issues du rayonnement cosmique sont les produits de réactions de spallation. Ces réactions se produisent naturellement, au sommet de l'atmosphère terrestre, lors de la rencontre entre le rayonnement cosmique et les atomes de notre atmosphère.

Le rayonnement cosmique est aussi à l'origine de réactions de spallation dans les matériaux qui constituent les satellites envoyés dans l'espace. Les dégradations que causent ces réactions de spallation limitent la durée de vie de nos satellites. En comprenant mieux ces réactions, il serait possible d'améliorer les mesures de protection de nos satellites.

On peut voir sur la figure 2.2, qui représente le spectre énergétique du rayonnement cosmique, que le nombre de particules ayant une énergie de 1 GeV est important et, à une énergie de 10 GeV, le nombre de particules a déjà diminué d'un facteur 100. Il continue de décroître quand l'énergie augmente. Aussi l'énergie moyenne des particules issues du rayonnement cosmique est-elle de plus ou moins 1 GeV.

Le modèle de cascade intranucléaire de Liège, qui permet de modéliser ces réactions, a été testé et validé dans le domaine d'énergie allant de 40 MeV à 2 GeV environ.

²Dans ce type de réacteur, la réaction en chaîne aurait un bilan négatif et tendrait à s'arrêter. Mais le flux de neutrons de spallation permet d'entretenir la réaction et, en cas de problème, l'arrêt de la réaction de spallation arrête automatiquement le réacteur. Un tel système porte le nom de système piloté par accélérateur (Accelerator Driven System ou ADS)

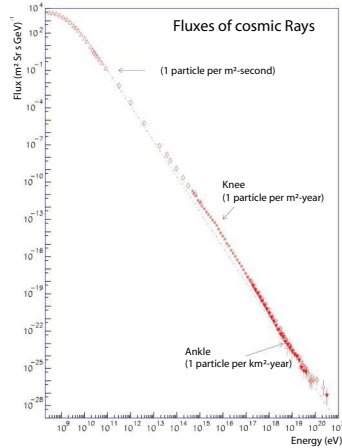


FIG. 2.2: *Spectre énergétique du flux de rayonnement cosmique [40].*

Or, nous venons de voir que pour l'appliquer au rayonnement cosmique, il faudrait pouvoir l'utiliser à plus haute énergie. Mais d'un point de vue plus physique, cette extension pourrait permettre de déterminer à partir de quelles énergies les degrés de liberté des quarks deviennent importants et devraient être pris en compte dans le modèle.

2.3 Description du modèle de cascade intranucléaire de Liège

2.3.1 Historique du modèle de cascade intranucléaire de Liège

Le modèle de cascade intranucléaire de Liège a été créé en 1980 pour étudier les collisions entre deux ions relativistes. Les baryons peuvent entrer en collision, deux à deux, et sont considérés comme étant relativistes. Certaines des caractéristiques de cette version ont été conservées jusque dans les versions les plus récentes du programme :

- le traitement classique des nucléons entre deux collisions,
- le code envisage chronologiquement les différentes collisions élémentaires,
- le traitement des collisions inélastiques via la création d'une résonance Δ suivie de l'émission d'un pion,
- l'interdiction des collisions entre deux nucléons dont l'énergie totale dans le centre de masse est inférieure à 1925 MeV.

Cinq ans plus tard, le code a été adapté pour permettre l'étude des réactions entre un anti-proton et un noyau et, en 1987, une nouvelle adaptation a permis d'étudier également les réactions entre un proton et un noyau à haute énergie. Pour cette dernière, des effets de champ moyen avaient été pris en compte et la modélisation des résonances Δ et des pions avait été améliorée.

Parce qu'INCL envisage chronologiquement chaque collision binaire, une séparation en deux phases lors des réactions a pu être mise en évidence : une phase de cascade pendant laquelle ont lieu les collisions binaires (baryon-baryon) et une phase d'évaporation au cours de laquelle le noyau restant se désexcite lentement en émettant des particules lentes. Il est alors suggéré de coupler INCL à un modèle d'évaporation, mais cette idée ne sera vraiment appliquée que lorsque le programme aura été adapté à la modélisation

des réactions de spallation.

Par après, le code a été utilisé pour l'étude des effets de milieux dans la production de pions. Pour cette étude, il y a été introduit une dépendance en isospin, la prise en charge de la surface diffuse, le gel des nucléons spectateurs et une première implémentation statistique du principe de Pauli.

Depuis les années 80, des théories capables de rendre compte de la dynamique du champ moyen se sont développées considérablement. Ces théories ont rendu INCL moins adapté pour le traitement des collisions entre ions lourds. Mais, pour les réactions dans lesquelles le champ moyen peut être considéré comme statique, le modèle de cascade intranucléaire reste indiqué avec comme avantage sa rapidité de calcul.

Lors de chacune de ces modifications, un effort a toujours été fait pour ne pas se contenter d'ajouter des paramètres empiriques permettant d'obtenir de bons résultats mais, au contraire, d'améliorer la physique sous-jacente au programme pour que celui-ci se rapproche au mieux du déroulement réel de la réaction. Les adaptations qui ont alors été apportées au code étaient les suivantes :

- le branchement d'une routine d'évaporation après la cascade et l'établissement d'un critère d'arrêt auto-consistant pour cette dernière ;
- la prise en compte du champ moyen en utilisant un potentiel attractif de type vectoriel ;
- l'introduction d'une barrière coulombienne pour calculer le coefficient de transmission des particules lorsqu'elles s'approchent de la surface ;
- une nouvelle paramétrisation des sections efficaces, décrite dans l'article [11].

Les premiers résultats donnés par cette version étaient encourageants, mais présentaient quelques défauts systématiques. Plusieurs modifications supplémentaires ont pu être envisagées. Le modèle de cascade intranucléaire de Liège est donc un modèle en perpétuelle évolution. Et nous en arrivons à la version INCL4 qui est la dernière version « officielle » distribuée dans le monde du modèle de cascade intranucléaire de Liège.

2.3.2 Caractéristiques principales de la version actuelle du code

Pour cette version du modèle, les changements qui sont intervenus concernent principalement l'initialisation du noyau : des corrélations entre les positions \vec{r} et les impulsions initiales \vec{p} des nucléons ont été ajoutées et la surface du noyau, auparavant abrupte, a été remplacée par une surface diffuse. Parmi les autres modifications apportées, nous pouvons citer :

- les collisions peuvent être empêchées par un principe de Pauli désormais dynamique (Consistent Dynamical Pauli Blocking) ;
- les collisions entre nucléons spectateurs ont été supprimées,
- la dynamique des pions a été améliorée,
- la possibilité pour la particule incidente d'être un noyau composite léger (par exemple un noyau de ${}^3_2\text{He}$),
- la calcul du moment angulaire du résidu,
- une nouvelle méthode de calcul pour l'énergie d'excitation,
- et enfin, compte-tenu de tous ces changements, l'adaptation du critère d'arrêt de la cascade.

Encore aujourd'hui, de nouvelles améliorations y sont ajoutées afin de le rendre plus performant. Les travaux en cours sur le modèle concernent l'ajout d'une sous-routine de coalescence pour permettre l'émission de composites légers, l'instauration

d'une dépendance en énergie et en isospin du potentiel V_0 , l'introduction d'un potentiel moyen pour les pions et des modifications pour améliorer le caractère prédictif du modèle à basse énergie.

La dernière version du code INCL4 peut être soit utilisée seule (« stand-alone »), soit être incluse dans un autre code. Citons par exemple le code de transport MCNPX [12]. Une description extensive de cette dernière version se trouve dans la référence [13].

Enfin, précisons qu'étant donné ses origines, INCL est toujours implémenté en Fortran 77. Mais ses concepteurs envisagent de le traduire bientôt dans un langage de programmation orientée objet qui sera probablement le C++.

2.4 Description de la dernière version du code : INCL4

Pour être exécuté, INCL4 nécessite un fichier de données dans lequel l'utilisateur pourra préciser les informations concernant la réaction à simuler ; c'est-à-dire qu'on trouvera dans ce fichier des informations telles que la nature du projectile, son énergie cinétique, la nature de la cible, etc.

INCL4 est basé sur le processus de Monte-Carlo. Cela signifie que la réaction que nous voulons étudier est simulée plusieurs fois pour que les caractéristiques que nous souhaitons connaître soient le reflet d'un large éventail de possibilités. Chaque simulation individuelle est appelée un « run » ou « évènement ». Le nombre total d'évènements qui sera effectué par INCL4 devra être, lui aussi, précisé dans le fichier de données.

Au lancement d'INCL4, un programme d'appel va lire le fichier de données que nous venons de mentionner pour connaître toutes les caractéristiques de la réaction à étudier. Ensuite, la sous-routine principale est appelée, elle gère la cascade, la première phase de la réaction, et est appelée PNU. Nous allons voir à présent de manière plus détaillée les étapes successives de cette cascade et nous en profiterons pour repréciser les principales caractéristiques du modèle dans sa version actuelle.

Lors de chaque évènement, le programme commence par générer aléatoirement une configuration du noyau avec lequel le projectile pourra entrer en collision. Pour cela, les positions initiales des nucléons sont générées au hasard dans le volume de la cible. Ce volume est délimité par une surface qui était abrupte dans les premières versions du modèle, mais qui a été changée en une surface diffuse : le volume nucléaire correspond à une distribution de densité de Saxon-Woods. La distance maximum entre un nucléon appartenant au noyau et le centre de ce noyau est donnée par R_{max} , qui est fixée à $R_0 + 8a$. Ces deux paramètres dépendent du nombre de masse du noyau A_T comme :

$$R_0 = (2,745 \times 10^{-4} A_T + 1,063) A_T^{1/3} \quad \& \quad a = 0,510 + 1,63 \times 10^{-4} A_T$$

La distribution de densité $\rho(r)$ est définie par :

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)} & \text{pour } r < R_{max} \\ 0 & \text{pour } r > R_{max} \end{cases} \quad (2.1)$$

Les valeurs de R_0 et a proviennent de mesures réalisées par diffusion d'électrons et sont paramétrisées pour les éléments depuis l'aluminium jusqu'à l'uranium. La valeur de ρ_0 est déterminée par le fait que la distribution doit être normalisée à A_T , la masse de la cible.

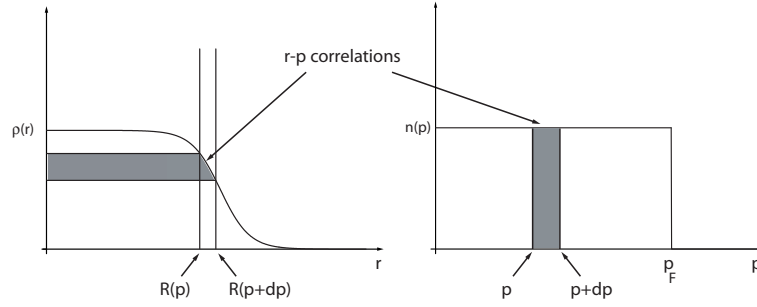


FIG. 2.3: Corrélations entre les distributions $\rho(r)$ et $n(p)$. Les zones grisées des deux graphiques contiennent le même nombre de nucléons [13].

Chaque nucléon se voit donner une impulsion. La distribution des impulsions est une sphère de Fermi uniforme dont l'impulsion de Fermi est p_F . On s'attend à ce que les nucléons qui ont les plus grandes impulsions voyagent plus loin que ceux qui ont une faible impulsion. Aussi, des corrélations ont été introduites pour refléter ceci. Ces corrélations empêchent de générer les distributions $\rho(r)$ et $n(p)$ (la distribution des impulsions) indépendamment.

De plus, si on fait l'hypothèse que les nucléons se déplacent librement dans un potentiel nucléaire moyen, ces distributions devraient rester constantes quand le noyau n'est pas perturbé. Ces exigences peuvent être comblées en plaçant les nucléons d'impulsion p dans un puits de potentiel carré, de profondeur V_0 et dans un puits de potentiel de rayon $R(p)$, dépendant de l'impulsion, comme le montre la figure 2.3.

Les nucléons qui ont une impulsion comprise entre p et $p + dp$ seront caractérisés par une probabilité constante et uniforme dans une sphère de rayon $R(p)$. Ils contribuent au profil de densité montré par la zone grisée de la figure 2.3. Cela implique que le nombre de nucléons ayant une impulsion comprise entre p et $p + dp$ est le même que celui des nucléons remplissant cette couche. On peut dès lors écrire :

$$A_T \frac{4\pi p^2 dp}{\frac{4\pi}{3} p_F^3} = \frac{4\pi}{3} R^3(p) dp = -\frac{4\pi}{3} R^3(p) \left. \frac{d\rho(r)}{dr} \right|_{r=R(p)} R'(p) dp,$$

où dp est l'épaisseur de la couche de densité. Si $R(0) = 0$, on peut voir en intégrant de 0 à p que cette relation est équivalente à

$$\left(\frac{p}{p_F} \right)^3 = -\frac{4\pi}{3A_T} \int_0^{R(p)} \frac{d\rho(r)}{dr} r^3 dr \quad (2.2)$$

Les positions et impulsions initiales des nucléons sont générées comme suit : \vec{p} est choisi au hasard dans une sphère de rayon p_F et $R(p)$ est calculé par 2.2. Ensuite, \vec{r} est choisi aléatoirement dans une sphère de rayon $R(p)$.

Une fois que le noyau cible est généré, le processus de cascade commence et la particule incidente (dont l'énergie cinétique a été précisée par le fichier de données) arrive sur le noyau avec un paramètre d'impact b . Celui-ci est choisi aléatoirement au moyen d'une loi linéaire en b ; ce qui exprime l'hypothèse selon laquelle le faisceau de particules incidentes est supposé présenter une densité homogène dans la section droite du faisceau incident. La valeur maximale b_{max} du paramètre d'impact est égale à R_{max} (au-delà duquel il y a peu de chance d'y avoir des interactions).

Toutes les particules sont mises en mouvement selon des trajectoires rectilignes. INCL4 suit chacune des particules et le temps auquel une particule atteint l'extrémité du noyau ou auquel deux particules atteignent leur distance minimale d'approche (notons-la \vec{d}_{min}) peut être prédit. C'est pourquoi toutes les particules sont propagées jusqu'à ce temps en une seule étape.

Si une particule atteint l'extrémité du noyau, et si son énergie est plus petite que le seuil d'émission, la particule est réfléchiée. Dans le cas contraire, la particule pourrait être transmise aléatoirement avec une probabilité T [8]. Si le test de transmission échoue, la particule sera, une fois encore, réfléchiée mais s'il réussit, elle sera transmise et continuera sa trajectoire.

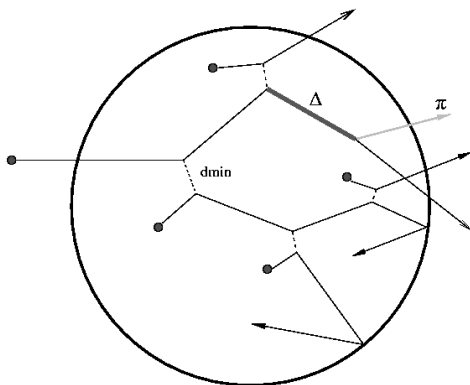


FIG. 2.4: Agrandissement de la partie concernant la cascade intra-nucléaire de la figure 2.2 [10]

Si deux particules atteignent leur distance minimale d'approche, le programme va calculer le carré du paramètre d'impact du système des deux nucléons dans le référentiel du centre de masse b_{min}^2 , grâce à la relation 2.3.

$$b_{min}^2 = d_{min}^2 + \frac{(\vec{d}_{min} \cdot \vec{\beta}_{cm})^2}{1 - \beta_{cm}^2}, \quad (2.3)$$

où \sqrt{s} est l'énergie totale du centre de masse des deux particules et $\vec{\beta}_{cm}$ est la vitesse du centre de masse par rapport au référentiel du laboratoire. En fonction de la valeur de b_{min}^2 , il pourrait y avoir deux possibilités. Si $\sigma(\sqrt{s})$ est la section efficace de réaction totale pour l'énergie du centre de masse \sqrt{s} , elles sont :

Si $\pi b_{min}^2 > \sigma(\sqrt{s})$ alors le mouvement des particules n'est pas modifié.

Si $\pi b_{min}^2 < \sigma(\sqrt{s})$ alors les deux particules peuvent entrer en collision si l'exclusion de Pauli ne l'empêche pas (voir ci-dessous). Si la collision peut avoir lieu, alors le programme appelle la sous-routine COLLIS qui gère le processus de collision (elle est décrite à la section 2.5). Après avoir été exécutée, COLLIS renvoie au programme les caractéristiques des produits de la collision, parmi lesquelles leurs trajectoires.

INCL4 vérifie le temps auquel aura lieu le prochain évènement à considérer (une transmission, une réflexion ou deux particules qui ont atteint \vec{d}_{min}). Les particules sont propagées jusqu'à ce moment et INCL4 va répéter le raisonnement que nous venons de décrire et qui est illustré par la figure 2.4.

Nous avons mentionné le fait qu'une collision pouvait être interdite par le principe d'exclusion de Pauli. Voyons à présent comment ce principe, qui agit dans l'espace des phases, est implémenté dans INCL4 : si deux nucléons i et j peuvent entrer en collision, à la position $\vec{r}_{i(j)}$, et acquièrent dans l'état final une impulsion $\vec{p}_{i(j)}$, le programme évalue les probabilités d'occupation f_i en comptant les nucléons voisins dans un petit volume de l'espace des phases, en se limitant aux nucléons k qui ont le même isospin que les particules i et j :

$$f_i = \frac{1}{2} \frac{(2\pi\hbar)^3}{\frac{4\pi}{3}r_{PB}^3 \frac{4\pi}{3}p_{PB}^3} \sum_{k \neq i} \theta(r_{PB} - |\vec{r}_k - \vec{r}_i|) \theta(p_{PB} - |\vec{p}_k - \vec{p}_i|), \quad (2.4)$$

où on a introduit un facteur $1/2$ parce que nous n'avons pas tenu compte du spin. La réaction entre i et j est alors autorisée ou interdite suite à la comparaison entre un nombre aléatoire et le produit $(1 - f_i)(1 - f_j)$. En raison de leur densité très faible, les résonances Δ sont exemptes de l'exclusion de Pauli.

Une procédure supplémentaire intervient dans l'exclusion de Pauli : une évaluation de l'énergie contenue dans la sphère de Fermi est réalisée et les collisions au cours desquelles cette énergie deviendrait inférieure à l'énergie minimale d'un gaz de Fermi sont interdites. En principe, cette procédure fait double emploi avec la précédente dans le cas où $f_i = 1$ pour $\vec{p}_i \leq \vec{p}_F$. Cependant, elle est rendue nécessaire parce que le processus de simulation introduit des inhomogénéités dans le remplissage de la mer de Fermi.

Si aucune collision n'a lieu au cours d'un run, que ce soit parce que l'exclusion de Pauli les interdit ou parce que le paramètre d'impact n'a permis à aucune collision d'avoir lieu, le run est considéré comme transparent.

La cascade continue jusqu'à ce que le temps d'arrêt t_{stop} soit atteint. C'est le modèle de cascade lui-même qui détermine ce temps. Sa valeur est calculée juste après l'initialisation du projectile. Il est exprimé comme une fonction du paramètre d'impact b , de l'énergie E_{inc} de la particule incidente, de la masse du noyau A_T et du rayon maximum du noyau R_{max} . La modélisation de la surface du noyau est importante pour le calcul de la valeur de t_{stop} .

Dans le cas d'une surface diffuse, seule la masse du noyau A_T intervient dans le calcul de t_{stop} [13] :

$$t_{stop} = f_{stop} t_0 \left(\frac{A_T}{208} \right)^0 .16,$$

où $f_{stop} = 1$ et $t_0 = 70$ fm/c.

Quand le temps d'arrêt est atteint, INCL4 bascule vers la sous-routine d'évaporation. Une fois que l'évaporation a été simulée, les caractéristiques des éjectiles et du résidu sont enregistrées dans un fichier du type *hbook*³ pour pouvoir ensuite être exploitées. Le programme va également écrire un fichier texte (dont l'extension est *.out*, un exemple est donné à l'annexe C) dans lequel nous aurons accès à certaines informations parmi lesquelles :

- un rappel des caractéristiques de la réaction,
- le nombre de runs effectués,
- le nombre de runs qui sont transparents,

³Ce type de fichier peut être lu avec Paw, logiciel fourni avec certaines distributions linux, dont *Scientific Linux*, qui est la distribution Linux du CERN [14].

- des éventuels messages d’erreurs,
- des observables,
- etc.

Les observables qui apparaissent dans ce fichier comprennent la section efficace totale de réaction, la section efficace de production de pions et la section efficace d’émission pour un éjectile $d\sigma_{\acute{e}j.}/dEd\Omega$. Nous allons expliquer comment elles sont obtenues mais pour cela, nous avons besoin de connaître les grandeurs suivantes :

- le nombre d’évènements (ou de runs) N_{ev} ,
- le nombre d’évènements non-transparents N_{n-t} ,
- le nombre d’évènements au cours desquels au moins un pion a été produit N_{prod}^{π} ,
- le nombre d’éjectiles total $\Delta n_{\acute{e}j.}(E, \Omega)$ obtenus dans un angle solide $\Delta\Omega$ autour de la direction Ω et pour une énergie comprise entre E et $E + \Delta E$,
- la section efficace géométrique, elle est donnée par $\sigma_{geom.} = \pi b_{max}^2$ où b_{max} est la valeur maximale du paramètre d’impact.

Et les sections efficaces sont calculées à l’aide des relations :

$$\begin{aligned}\sigma_R &= \sigma_{geom.} \frac{N_{n-t}}{N_{ev}} \\ \sigma_{prod. \pi} &= \sigma_{geom.} \frac{N_{prod}^{\pi}}{N_{ev}} \\ \frac{d\sigma}{dEd\Omega} &= \frac{\sigma_{geom.}}{N_{ev}} \frac{\Delta n_{\acute{e}j.}(E, \Omega)}{\Delta E \Delta \Omega}\end{aligned}$$

La précision sur ces observables dépend du nombre d’évènements qui seront simulés par INCL4. En effectuant une simulation sur 100000 runs, la précision relative sur σ_R était de 0.46% et celle sur les $\sigma_{prod. \pi}$ d’environ 1.25%. Généralement, la simulation de plus de 150000 à 200000 évènements donne donc une bonne statistique sur la plupart de ces grandeurs.

2.5 Description de la sous-routine COLLIS

Lorsque toutes les conditions sont réunies pour que deux baryons entrent en collision, la sous-routine PNU fait appel à COLLIS, la sous-routine qui gère les collisions. Nous allons, dans cette section, décrire cette sous-routine de manière plus détaillée, puisque c’est principalement celle-ci que nous serons amenés à modifier pour étendre le modèle à plus haute énergie.

Lors d’une collision, les réactions qui sont envisagées par la sous-routine sont les suivantes :



Les collisions réalisées par COLLIS sont envisagées dans le centre de masse des particules, alors qu’à l’extérieur de la sous-routine, le référentiel du laboratoire est utilisé. Comme on le voit dans les équations 2.5, COLLIS n’envisage pas de réactions qui

ont plus de deux particules dans la voie de sortie. Dans le système du centre de masse de deux particules, leurs impulsions sont toujours de même direction, de même intensité et de sens opposé. L'utilisation de ces coordonnées simplifie donc l'attribution des impulsions \vec{p}_i aux deux particules de la voie de sortie.

Des transformations de Lorentz seront appliquées aux quadrivecteurs qui sont transmis à COLLIS pour qu'ils soient tous exprimés dans le référentiel du centre de masse. De même, tous les quadrivecteurs à la sortie de la sous-routine subiront une transformation de Lorentz pour passer du référentiel du centre de masse au référentiel du laboratoire.

Décrivons les paramètres qui sont transmis à COLLIS lors de son appel :

E1, P1, P2 et P3 qui sont les composantes du quadrivecteur énergie-impulsion d'une des particules qui entrent en collision, E1 étant l'énergie totale de la particule.

EOUT1, POUT11, POUT12 et POUT13 qui sont les composantes du quadrivecteur énergie-impulsion de la deuxième particule qui participe à la collision, EOUT1 étant l'énergie totale de la particule.

K2 qui est la clef qui indique si le régime est relativiste (K2=0) ou non (K2=1).

K3 qui est la clef qui autorise (K3=0) ou non (K3=1) la production de Δ .

K4 qui est la clef qui indique au programme comment calculer les temps de vie des résonances Δ . K4 peut prendre les valeurs 0 (les Delta se désintègrent au bout d'un temps donné), 1 (ils survivent jusqu'à la fin du run et sont désintégrés à ce moment-là) et 2 (ils se désintègrent après un temps exponentiel déterminé aléatoirement).

K5 qui est la clef qui régit les interactions que peuvent avoir les Δ , si K5=0 ils ne peuvent pas interagir, si K5=1 il le peuvent et on utilise alors $\sigma_{\Delta N} = \sigma_{\Delta\Delta} = \sigma_{\text{Élas. } NN}$.

M1 et M2 qui indiquent si la particule est un nucléon ou un Δ . Ces paramètres prennent la valeur 0 si la particule est un nucléon et 1 si c'est un Δ .

IS1 et IS2 sont les isospins des deux nucléons incidents multipliés par deux (ce qui permet de n'utiliser que des nombres entiers).

Quand elle est appelée, COLLIS commence par analyser les caractéristiques des nucléons qui entrent en collision. Elle regarde pour cela les valeurs des isospins et vérifie si les particules sont des nucléons ou des résonances Δ .

Elle vérifie aussi les clefs K2, K3, K4 et K5 pour pouvoir déterminer quelles sont les possibilités qu'elle doit envisager. Parmi les différentes possibilités, citons la recombinaison pour le système N- Δ (si K5=1), la diffusion élastique ou inélastique, la production de résonance, etc.

En fonction de tous ces paramètres et en utilisant la méthode de Monte-Carlo (elle sera expliquée dans la section 3.2), la sous-routine pourra déterminer quelle réaction a lieu.

Dans le cas de la diffusion élastique, le programme va générer de nouvelles impulsions pour les particules en respectant la conservation de l'impulsion et de l'énergie. L'angle polaire selon lequel la particule sera diffusée est déterminé en rapport avec les sections efficaces expérimentales $d\sigma/d\Omega$ (elles sont données dans la référence [11]) et leur angle azimuthal est choisi aléatoirement.

Dans le cas d'une collision inélastique, il y aura production d'une résonance Δ . Le programme va alors générer la masse de la particule (les détails concernant la masse des

résonances sont donnés dans la référence [15]), il va également calculer la distribution angulaire des impulsions et en attribuer une aux différentes particules (ces distributions peuvent être trouvées dans les articles [15, 11]). Enfin, en fonction de la valeur de la clé K4, le temps de vie de la résonance sera calculé :

- si K4=0, la résonance sera désintégrée immédiatement en un nucléon et un pion,
- si K4=1, la résonance sera conservée jusqu'à la fin du run et sera désintégrée à ce moment là,
- si K4=2, la résonance sera désintégrée après un temps aléatoire tiré selon la loi

$$\rho(\tau) = \exp\left(\frac{-\Gamma_0\tau}{\hbar}\right)$$

où Γ_0 est la largeur caractéristique de la résonance Δ et vaut 115 MeV.

Dans le cas d'une collision entre un nucléon et un Δ , COLLIS peut envisager une recombinaison, c'est-à-dire la réaction inverse de la production de Δ , soit : $N\Delta \rightarrow NN$.

Après son exécution, la sous-routine COLLIS va renvoyer à PNU les paramètres suivants :

E1, P1, P2 et P3 qui sont les composantes du quadrivecteur énergie-impulsion d'une particule (nucléon ou résonance) après la collision, E1 étant l'énergie totale de la particule.

EOUT1, POUT11, POUT12 et POUT13 sont les composantes du quadrivecteur énergie-impulsion de la deuxième particule (nucléon ou résonance) qui participe à la collision, EOUT1 étant l'énergie totale de la particule.

IS1 et IS2 contiennent les isospins des deux nucléons incidents. Ils prennent comme valeur le double de l'isospin de la particule, soit les valeurs 1 pour un proton et -1 pour un neutron.

Q1, Q2, Q3 et Q4 désignent les composantes du quadrivecteur énergie-impulsion d'un éventuel pion produit.

NP peut prendre les valeurs 1 si un pion est produit et 0 si aucun pion n'est produit.

IP contient l'isospin du pion produit. Comme pour les nucléons, il prend comme valeur le double de l'isospin du pion : -2 pour un π^- , 2 pour un π^+ et 0 pour un π^0 .

Étant donné que l'extension du modèle à plus haute énergie implique l'accès à de nouvelles réactions lors de la collision entre deux particules, c'est la sous-routine COLLIS qui devra être modifiée.

2.6 Extension du modèle de cascade intranucléaire entre les énergies de 2 GeV à 10 GeV

La sous-routine COLLIS permet la production d'un pion, en passant par la création d'une résonance Δ , lors de la collision entre deux nucléons. Pour les énergies allant jusqu'à 2 GeV environ, cela semble être la contribution dominante. Au-delà de cette énergie, la production de plus d'un pion lors d'une collision entre deux nucléons devient de plus en plus importante.

La production de plusieurs pions sera traitée de façon directe⁴ et la sous-routine sera étendue de manière à ce qu'il puisse y avoir jusqu'à trois pions produits au cours d'une

⁴sans faire intervenir de résonances

seule collision. Mais l'intervention des résonances Δ sera conservée pour la production d'un pion et ceci, uniquement dans le cas où l'isospin des nucléons de la voie d'entrée $T = 1$. En effet, la production de résonances Δ domine largement cette voie mais, dans le cas où l'isospin des nucléons de la voie d'entrée T est égal à zéro, la conservation de l'isospin empêche la production des résonances Δ et il ne peut y avoir que la production directe d'un pion.

A plus haute énergie, les résonances qui pourraient apparaître sont larges et se recouvrent mutuellement. Par conséquent, nous pouvons considérer en première approximation que les pions produits peuplent uniformément l'espace des phases.

Au final, les réactions supplémentaires que nous avons considérées sont les suivantes :

$$\begin{aligned} NN(T=0) &\rightarrow NN\pi \\ NN &\rightarrow NN\pi\pi \\ NN &\rightarrow NN\pi\pi\pi \end{aligned}$$

Pour introduire ces réactions dans la sous-routine, il faut connaître les sections efficaces qui s'y rapportent. Nous n'avons pas pu les trouver directement, mais nous nous sommes inspirés de l'article [4] qui expose un moyen d'obtenir les sections efficaces équivalentes, pour une valeur de l'isospin connue, à partir des résultats expérimentaux dans diverses voies. Ceci nous permettra de paramétriser les sections efficaces de production d'un, de deux et de trois pions, en fonction de l'isospin des 2 nucléons dans la voie d'entrée.

Le chapitre 3 expliquera quel raisonnement permet d'obtenir les sections efficaces que nous venons de mentionner et quelles paramétrisations peuvent être utilisées pour les modéliser. La fin du chapitre exposera le modèle utilisé pour la répartition des charges des pions, une fois leur nombre fixé.

Jusqu'à présent, COLLIS ne devait jamais répartir une impulsion sur plus de deux particules. Mais dorénavant, COLLIS devra répartir les impulsions entre trois, quatre ou cinq particules (deux nucléons et trois pions au maximum). Pour ce faire, elle aura recours à une sous-routine que nous avons ajoutée au code, appelée FOUL1, et qui est une extension de la sous-routine FOUL du CERN pour répartir uniformément un nombre fixé de particules dans l'espace des phases. Le chapitre 4 exposera la façon dont s'y prend FOUL1 pour répartir les impulsions entre les particules.

Chapitre 3

Détermination des sections efficaces de production à 1, 2 et 3 pions

3.1 Introduction

Nous venons d'expliquer la démarche que nous allons suivre pour introduire dans la sous-routine *COLLIS* les nouvelles réactions :

$$\begin{aligned} NN(T=0) &\rightarrow NN\pi \\ NN &\rightarrow NN\pi\pi \\ NN &\rightarrow NN\pi\pi\pi \end{aligned}$$

Remarquons que l'ajout de celles-ci correspond, toutes possibilités de charges confondues, à une trentaine de réactions supplémentaires.

En groupant ces réactions en fonction du nombre de pions produits, cela évitait au programme de tester chacune des possibilités tour à tour. De plus, cette manière de procéder pourrait faciliter toute modification postérieure du processus de collision.

Le paramètre qui permet à la sous-routine de choisir la réaction à effectuer est, comme auparavant, la section efficace. L'idéal serait donc de pouvoir évaluer les sections efficaces de production d'un, de deux et de trois pions. Pour ce faire, la connaissance d'autres sections efficaces, difficilement mesurables (voir non-mesurables), était nécessaire. L'article [4] offrait une alternative pour arriver à évaluer les sections efficaces dont nous avons besoin, sous la condition de distinguer l'état d'isospin des nucléons dans la voie d'entrée. La méthode exposée dans cet article permet d'évaluer les sections efficaces à partir d'autres, pour lesquelles il existe des données et, de surcroît, dont une paramétrisation est fournie dans l'article.

Dans ce chapitre, la première section est consacrée à l'explication de la manière dont INCL applique la méthode de Monte-Carlo lors du choix de la réaction. La section 3.3 expose comment, en se basant sur l'article [4], il est possible d'obtenir les sections efficaces dont nous avons besoin. Ensuite, nous expliquerons comment réaliser la paramétrisation des réactions pour en permettre l'évaluation et, après avoir présenté les fonctions qui seront utilisées, la section efficace $\sigma(pp \rightarrow pp\pi^0)$ sera évaluée, à titre d'exemple.

Enfin, pouvoir déterminer le nombre de pions produits ne cible pas encore complètement la réaction que COLLIS va réaliser. Le nombre de combinaisons de charges

possibles augmente avec le nombre de particules émises. Nous avons pu associer une probabilité à chacune de ces combinaisons en nous basant sur la symétrie d'isospin. Nous terminerons donc ce chapitre en présentant le raisonnement qui nous a permis de spécifier ces probabilités.

3.2 Principe de la prise de décision incorporée à COLLIS

La sous-routine COLLIS doit d'abord déterminer si la collision en cours est élastique ou inélastique. Pour ce faire, elle utilise les sections efficaces suivantes :

- la section efficace totale $\sigma_{Tot.}$,
- la section efficace élastique $\sigma_{Él.}$,
- la section efficace inélastique $\sigma_{Inel.}$.

où $\sigma_{Tot.}$ est la somme des deux autres. Les paramétrisations utilisées, basées sur l'ensemble des résultats expérimentaux existants, sont décrites dans la référence [11]. En comparant le rapport $\sigma_{Él.}/\sigma_{Tot.}$ à un nombre aléatoire r , COLLIS peut déterminer si la réaction est élastique ou non, la collision sera :

- élastique si $r < \sigma_{Él.}/\sigma_{Tot.}$,
- inélastique sinon.

selon la procédure « de Monte-Carlo » habituelle. La figure 3.1 montre à titre d'exemple les sections efficaces $\sigma_{Tot.}$, $\sigma_{Él.}$ et $\sigma_{Inel.}$ pour une collision pn .

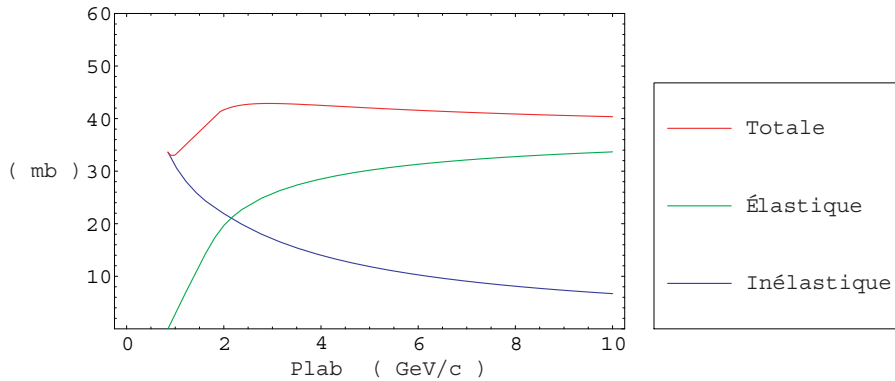


FIG. 3.1: Sections efficaces totale, élastique et inélastique d'une collision pn , au-dessus du seuil inélastique.

Comme nous considérons les réactions entre deux nucléons (notées symboliquement NN), il y a 3 possibilités : la collision entre deux protons, la collision entre deux neutrons et la collision entre un proton et un neutron. Par la suite, nous désignerons ces réactions par pp , nn et pn , respectivement.

3.3 Modélisation des sections efficaces

Nous avons besoin de décomposer $\sigma_{Inel.}$ comme nous venons de le faire pour $\sigma_{Tot.}$, en ses « composantes » :

- la section efficace de production d'un pion $\sigma(NN\pi)$ si l'isospin de la voie d'entrée $T=0$,

- la section efficace de production d'une résonance $\sigma(N\Delta)$ si l'isospin de la voie d'entrée $T=1$,
- la section efficace de production de deux pions $\sigma(NN\pi\pi)$,
- la section efficace de production de trois pions $\sigma(NN\pi\pi\pi)$.

Or, les mesures expérimentales portent sur des voies particulières. Nous nous sommes basés sur l'article de Bystricky *et al.* [4], qui présente un moyen de calculer les sections efficaces de production d'un et de deux pions à l'aide des sections efficaces des voies particulières.

Il est nécessaire d'explicitier la dépendance des sections efficaces σ_T suivant l'isospin T de la voie d'entrée ($T=0$ ou 1). Ceci permettra d'utiliser la symétrie d'isospin. Ainsi, les réactions pp et nn se trouvent dans l'état d'isospin $T = 1$ alors que les réactions pn procèdent soit dans la voie $T = 1$, soit dans la voie $T = 0$, avec des probabilités égales. Ce qui donne :

$$\begin{aligned}\sigma_{Inel}(pp) &= \sigma_{Inel}(nn) = \sigma_1 \\ \sigma_{Inel}(pn) &= \frac{\sigma_1 + \sigma_0}{2}\end{aligned}$$

où nous notons σ_T la section efficace de réaction dans la voie où l'état d'isospin à l'entrée vaut T . En inversant ces relations, nous voyons qu'il est possible de calculer les σ_T à partir des σ_{Inel} déjà paramétrisées dans INCL :

$$\sigma_1 = \sigma_{Inel}(pp) \quad \text{et} \quad \sigma_0 = 2 \sigma_{Inel}(pn) - \sigma_{Inel}(pp) \quad (3.1)$$

Les sections efficaces que nous devons paramétriser pour que COLLIS puisse décider du nombre de pions produits sont donc :

- $\sigma_1(NN\pi)$,
- $\sigma_1(NN\pi\pi)$,
- $\sigma_0(NN\pi)$,
- $\sigma_0(NN\pi\pi)$.

Quand l'énergie augmente, le système peut créer de plus en plus de particules au cours d'une seule collision. Nous avons limité COLLIS à la production de trois pions, mais rien n'exclut de préciser davantage le modèle par la suite.

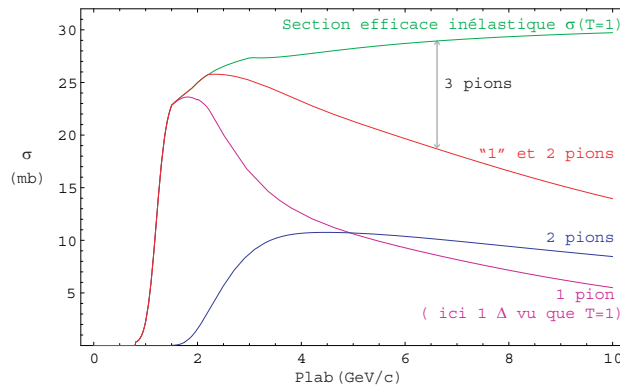


FIG. 3.2: Décomposition de σ_1 en 3 contributions : $\sigma_1(NN\pi)$, $\sigma_1(NN\pi\pi)$ et le reste est identifié à $\sigma_1(NN\pi\pi\pi)$.

La paramétrisation explicite de la section efficace de la réaction de production de trois pions n'est, pour le moment, pas nécessaire. En effet, nous l'avons identifiée comme

étant le « reste » de la section efficace σ_T . Ceci est montré sur la figure 3.2. la notation $\sigma_T(NN\pi\pi\pi)$ est donc abusive puisque, par définition, le reste comprend également les sections efficaces de production de plus de 3 pions (σ_T étant défini à partir des σ_{Inel} , il prend en compte toutes les contributions). Nous pouvons estimer qu'au-delà de 7 GeV, une légère erreur apparaît sur $\sigma_T(NN\pi\pi\pi)$.

Nous avons le choix entre plusieurs paramétrisations pour calculer $\sigma_T(NN\pi)$, parmi lesquels, en plus de celles déjà mentionnées de [4], les paramétrisations proposées par Cucinotta *et al.* [16]. Les imprécisions sur les mesures expérimentales de σ_{Inel} expliquent ces différentes possibilités. Nous avons donc commencé par comparer ces différentes paramétrisations entre-elles et avec les σ_T calculées à partir des sections efficaces inélastiques utilisées dans INCL4 [11].

La figure 3.3 montre les sections efficaces σ_T , évaluées à partir des paramétrisations utilisées dans INCL [11] et désignées dans la légende par « INCL » ; la figure montre également les sections efficaces $\sigma_T(NN\pi)$, évaluées à partir de l'article de Bystricky [4] (désignée alors par « Bystricky » dans la légende) et de l'article de Cucinotta [16] (désignée par « Cucinotta » dans la légende).

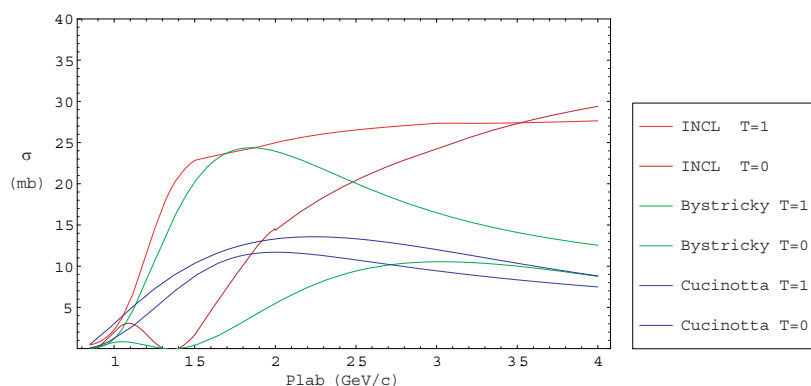


FIG. 3.3: Comparaison entre les paramétrisations pour les sections efficaces $\sigma_T(NN\pi)$ (celles désignées par « Bystricky » proviennent de la référence [4] tandis que celles désignées par « Cucinotta » proviennent de la référence [16]) et ceux des sections efficaces σ_T (désignés par « INCL ») dans les états d'isospins $T = 1$ et $T = 0$.

Les sections efficaces σ_T semblent être basées sur un set de données plus précises et plus fiables sous 2 GeV (où la production de deux pions est encore négligeable) ; nous souhaitons donc les conserver. Au-delà, les ajustements proposés par Bystricky [4] semblent plus adéquats. En effet, les arguments qui mènent à leur élaboration¹ sont plus convaincants et ces ajustements sont effectués sur plus de données expérimentales que ceux qui proviennent de l'article de Cucinotta *et al.* [16]. On voit sur la figure 3.3 que les paramétrisations « Bystricky » sont effectivement plus proches des paramétrisations « INCL » que ne le sont les paramétrisations « Cucinotta ». Nous utiliserons donc les ajustements proposés par Bystricky *et al.* [4].

A partir de 2 GeV environ, on voit que la composante $\sigma_T(NN\pi)$ s'éloigne de plus en plus de σ_T ; cela signifie que la composante $\sigma_T(NN\pi\pi)$ gagne en importance. En deçà des énergies pour lesquelles les $\sigma_T(NN\pi)$ croisent les σ_T , nous considérons qu'il n'y a aucune production de 2 pions et nous identifions $\sigma_T(NN\pi)$ à σ_T .

¹Nous expliquons comment arriver à ces sections efficaces dans la section 3.4.

A présent, expliquons le raisonnement suivi dans l'article [4] qui permet de paramétrer les sections efficaces que nous cherchons.

3.4 Raisonnement basé sur l'isospin pour déterminer les sections efficaces de production de pions

Le raisonnement permettant de dériver $\sigma_T(NN\pi)$ est basé sur la conservation de l'isospin. Le même raisonnement peut être appliqué à la production de deux pions. Nous n'exposerons cependant dans ce mémoire que le cas à un pion et donnerons simplement les résultats intéressants pour la production de deux pions. Le tableau 3.1 reprend les valeurs de l'isospin des différentes particules dont nous aurons besoin, ainsi que celle d'un système composé de deux nucléons.

	Particules seules					Système de particules			
	n	p	π^+	π^0	π^-	p p	p n	n p	n n
T	1/2	1/2	1	1	1	1	1 ou 0	1 ou 0	1
m_T	-1/2	1/2	1	0	-1	1	0	0	-1

TAB. 3.1: *Isospin rencontrés, avec leurs projections.*

Les états $|T, m_T\rangle$ dans lequel peut se trouver un système composé de deux particules, dont les états individuels possibles sont $|T_1, m_{T,1}\rangle$ et $|T_2, m_{T,2}\rangle$ sont donnés par

$$\begin{aligned}
 |T_1 m_{T,1}\rangle \otimes |T_2 m_{T,2}\rangle &= |T_1 m_{T,1} T_2 m_{T,2}\rangle \\
 &= \sum_{T m_T} (T m_T |T_1 m_{T,1} T_2 m_{T,2}) |T m_T\rangle \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Le coefficient $(T m_T |T_1 m_{T,1} T_2 m_{T,2})$ est un coefficient de Clebsch-Gordan. Ces coefficients peuvent être calculés mais on utilise généralement des tables pour les trouver (voir dans l'annexe A).

En utilisant la relation 3.2, nous pouvons vérifier les états d'isospin pour les systèmes de deux nucléons donnés dans le tableau 3.1. Ces états s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 |pp\rangle &= |11\rangle \\
 |pn\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle + |00\rangle) \\
 |np\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle - |00\rangle) \\
 |nn\rangle &= |1-1\rangle \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

Définissons des amplitudes de transition M_T pour des collisions élastiques entre deux

nucléons comme suit :

$$\begin{aligned}
\langle pp | M | pp \rangle &= \langle 11 | M | 11 \rangle = M_1^{el} \\
\langle nn | M | nn \rangle &= \langle 1-1 | M | 1-1 \rangle = M_1^{el} \\
\langle np | M | np \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 10 | - \langle 00 |) M (|10 \rangle - |00 \rangle) \\
&= \frac{1}{2} (\langle 10 | M | 10 \rangle - \langle 10 | M | 00 \rangle - \langle 00 | M | 10 \rangle + \langle 00 | M | 00 \rangle) \\
&= \frac{1}{2} (M_1^{el} - 0 - 0 + M_0^{el}) = (M_1^{el} + M_0^{el}) / 2 \\
\langle pn | M | np \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 10 | + \langle 00 |) M (|10 \rangle - |00 \rangle) \\
&= \frac{1}{2} (\langle 10 | M | 10 \rangle - \langle 10 | M | 00 \rangle + \langle 00 | M | 10 \rangle - \langle 00 | M | 00 \rangle) \\
&= \frac{1}{2} (M_1^{el} - 0 + 0 - M_0^{el}) = (M_1^{el} - M_0^{el}) / 2
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la symétrie d'isospin : l'isospin total doit être conservé et M ne dépend pas de la projection de l'isospin sur l'axe de la quantification. Pour la réaction de production d'un pion, il faut donc écrire l'état des trois particules de la voie de sortie. Nous considérons la composition entre le système constitué des deux nucléons et du pion, si bien que les transitions pourront être écrites en fonction d'amplitudes de transition de la manière suivante :

$$\langle T_f \ m_{T_f} \ T_\pi \ m_{T_\pi} | M | T_i \ m_{T_i} \rangle = (T_f \ m_{T_f} \ T_\pi \ m_{T_\pi} | T_i \ m_{T_i}) M_{T_f T_i} \quad (3.4)$$

où T_f et m_{T_f} se rapportent aux nucléons de la voie de sortie, T_π et m_{T_π} au pion de la voie de sortie et T_i et m_{T_i} aux nucléons de la voie d'entrée. Ces amplitudes de transitions sont reliées aux sections efficaces par la relation

$$\sigma_{T_f T_i} = \frac{1}{1 + \delta_{ij}} \int |M_{T_f T_i}|^2 d\Omega \quad (3.5)$$

où δ_{ij} vaut 1 si les deux nucléons de la voie de sortie sont identiques et 0 sinon.

À nouveau, la symétrie d'isospin impose que l'amplitude de diffusion ne dépende pas de m_{T_i} et m_{T_f} et nous pouvons distinguer 4 cas :

- Lors d'une transition depuis 1 vers 0 : M_{10} ,
- Lors d'une transition depuis 1 vers 1 : M_{11} ,
- Lors d'une transition depuis 0 vers 1 : M_{01} ,
- Les transitions depuis 0 vers 0 sont interdites par la conservation de l'isospin².

Écrivons à l'aide de M_{10} , M_{11} et M_{01} , les amplitudes de transitions pour toutes les réactions où un pion peut être produit. Signalons que la distinction entre np et pn doit

²La présence de l'isospin du pion devrait être nulle; ce qui est impossible lorsqu'un seul pion est produit

ici être faite et nous en arrivons aux relations 3.6 :

$$\begin{aligned}
\langle pp\pi^0 | M | pp \rangle &= -\langle nn\pi^0 | M | nn \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} M_{11} \\
\langle pn\pi^+ | M | pp \rangle &= -\langle np\pi^- | M | nn \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} M_{01} - \frac{1}{2} M_{11} \\
\langle np\pi^+ | M | pp \rangle &= -\langle pn\pi^- | M | nn \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} M_{01} - \frac{1}{2} M_{11} \\
\langle np\pi^0 | M | pn \rangle &= \frac{1}{2} M_{01} - \frac{1}{2\sqrt{3}} M_{10} \\
\langle np\pi^0 | M | np \rangle &= -\frac{1}{2} M_{01} - \frac{1}{2\sqrt{3}} M_{10} \\
\langle pp\pi^- | M | pn \rangle &= -\langle nn\pi^+ | M | np \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} M_{10} + \frac{1}{2} M_{11} \\
\langle pp\pi^- | M | np \rangle &= -\langle nn\pi^+ | M | pn \rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}} M_{10} + \frac{1}{2} M_{11}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Les amplitudes M_{10} , M_{11} et M_{01} nous donnent accès aux sections efficaces σ_{10} , σ_{11} et σ_{01} (les indices ont la même signification que pour les amplitudes, voir l'équation 3.4). Par conséquent, la section efficace de réaction dans l'état d'isospin T que nous cherchons ($\sigma_T(NN\pi)$) s'obtient en sommant les sections efficaces dont l'état initial des nucléons a T pour isospin, c'est-à-dire :

$$\sigma_1(NN \rightarrow NN\pi) = \sigma_{01} + \sigma_{11} \quad \sigma_0(NN \rightarrow NN\pi) = \sigma_{10} \tag{3.7}$$

Nous devons dès lors trouver une combinaison linéaire de réactions parmi 3.6 pour arriver à 3.7. Nous avons utilisé les mêmes relations que celles données dans [4] :

$$\begin{aligned}
\sigma_1(NN\pi) &= \sigma(pp \rightarrow pp\pi^0) + \sigma(pp \rightarrow pn\pi^+) \\
\sigma_0(NN\pi) &= 2[\sigma(np \rightarrow np\pi^0) + 2\sigma(np \rightarrow pp\pi^-)] - \sigma_1(NN\pi)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Vérifions que ces relations sont correctes. Pour cela, calculons les différents termes qui apparaissent dans les relations 3.8

- Commençons par calculer la section efficace de la réaction $pp \rightarrow pp\pi^0$. $\sigma(pp \rightarrow pp\pi^0)$ est calculée à partir de $\langle pp\pi^0 | M | pp \rangle$. En utilisant la relation 3.5, nous trouvons directement :

$$\sigma(pp \rightarrow pp\pi^0) = \frac{1}{2} \int |M_{11}|^2 d\Omega = \frac{\sigma_{11}}{2}$$

- Calculons ensuite $\sigma(pp \rightarrow pn\pi^+)$. Pour cela, nous devons utiliser $\langle pn\pi^+ | M | pp \rangle$ et $\langle np\pi^+ | M | pp \rangle$. En effet, lors de la mesure de $\sigma(pp \rightarrow pn\pi^+)$ il est impossible de distinguer si, après réaction, nous avons pn ou np nous devons donc tenir compte des deux contributions. Ce qui donne :

$$\sigma(pp \rightarrow pn\pi^+) = \int \left| \frac{1}{\sqrt{2}} M_{01} - \frac{1}{2} M_{11} \right|^2 d\Omega + \int \left| -\frac{1}{\sqrt{2}} M_{01} - \frac{1}{2} M_{11} \right|^2 d\Omega,$$

les termes croisés disparaissent lors de l'intégration en laissant :

$$\sigma(pp \rightarrow pn\pi^+) = \frac{1}{2}\sigma_{01} + \frac{1}{4}\sigma_{11} + \frac{1}{2}\sigma_{01} + \frac{1}{4}\sigma_{11} = \sigma_{01} + \frac{\sigma_{11}}{2}$$

- De même, pour calculer $\sigma(np \rightarrow np\pi^0)$, nous avons besoin de $\langle np\pi^0 | M | np \rangle$ et $\langle pn\pi^0 | M | np \rangle$. La section efficace cherchée vaut alors :

$$\begin{aligned}\sigma(np \rightarrow np\pi^0) &= \int \left| \frac{1}{2}M_{01} - \frac{1}{2\sqrt{3}}M_{10} \right|^2 d\Omega + \int \left| -\frac{1}{2}M_{01} - \frac{1}{2\sqrt{3}}M_{10} \right|^2 d\Omega \\ &= \frac{1}{4} \sigma_{01} + \frac{1}{12} \sigma_{10} + \frac{1}{4} \sigma_{01} + \frac{1}{12} \sigma_{10} \\ &= \frac{1}{2} \sigma_{01} + \frac{1}{6} \sigma_{10}\end{aligned}$$

- Il reste à calculer $\sigma(np \rightarrow pp\pi^-)$, à partir de $\langle pp\pi^- | M | np \rangle$:

$$\begin{aligned}\sigma(np \rightarrow pp\pi^-) &= \int \left| -\frac{1}{\sqrt{6}}M_{10} + \frac{1}{2}M_{11} \right|^2 d\Omega \\ &= \frac{\sigma_{10}}{6} + \frac{\sigma_{11}}{4}\end{aligned}$$

En remplaçant ces termes par leurs expressions dans 3.8, nous trouvons :

$$\begin{aligned}\sigma_1(NN\pi) &= \sigma_{11}/2 + \sigma_{11}/2 + \sigma_{01} = \sigma_{01} + \sigma_{11} \\ \sigma_0(NN\pi) &= 2[\sigma_{01}/2 + \sigma_{10}/6 + 2\sigma_{10}/6 + 2\sigma_{11}/4] - \sigma_{01} + \sigma_{11} \\ &= 2[\sigma_{01}/2 + \sigma_{10}/2 + \sigma_{11}/2] - \sigma_{01} + \sigma_{11} = \sigma_{10}\end{aligned}$$

Ces relations correspondent bien aux définitions 3.7, donc les relations 3.8 sont correctes. En appliquant le même raisonnement au cas où deux pions sont produits dans un état d'isospin total T , nous pouvons trouver les relations équivalentes à 3.8 et qui sont :

$$\begin{aligned}\sigma_1(NN\pi\pi) &= \sigma(pp \rightarrow pp\pi^+\pi^-) + \sigma(pp \rightarrow pp\pi^0\pi^0) \\ &\quad + \sigma(pp \rightarrow pn\pi^+\pi^0) + \sigma(pp \rightarrow nn\pi^+\pi^+) \quad (3.9)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_0(NN\pi\pi) &= 3[\sigma(np \rightarrow np\pi^+\pi^-) + \sigma(np \rightarrow pp\pi^-\pi^0) \\ &\quad - 1/2\sigma(pp \rightarrow np\pi^+\pi^0)] - \sigma(pp \rightarrow pp\pi^0\pi^0) \quad (3.10)\end{aligned}$$

Il est intéressant de constater qu'avec 6 sections efficaces, qui ont été mesurées avec plus ou moins de précision, il est possible de reconstruire les sections efficaces $\sigma_T(NN\pi\pi)$ alors qu'il existe plus de 6 réactions de production de deux pions.

La figure 3.4 récapitule les relations qui existent entre les différentes sections efficaces. Elle montre lesquelles sont nécessaires pour calculer les principales sections efficaces que nous utilisons effectivement dans le programme.

En observant cette figure, nous voyons que :

- les sections efficaces déjà paramétrisées dans INCL (cadre gris clair) nous permettent de calculer les σ_T ,
- le calcul des $\sigma_T(NN\pi)$ et $\sigma_T(NN\pi\pi)$ est possible lorsqu'on connaît les sections efficaces des réactions mentionnées dans la figure,
- la décision quant au nombre de pions produits peut alors être effectuée. Pour cela, COLLIS va générer un nombre aléatoire et le comparer aux sections efficaces. Si ce nombre ne correspond ni à la production d'un pion, ni à celle de deux, alors il y aura production de 3 pions.

Nous allons à présent expliquer comment sont paramétrisées les sections efficaces de réactions.

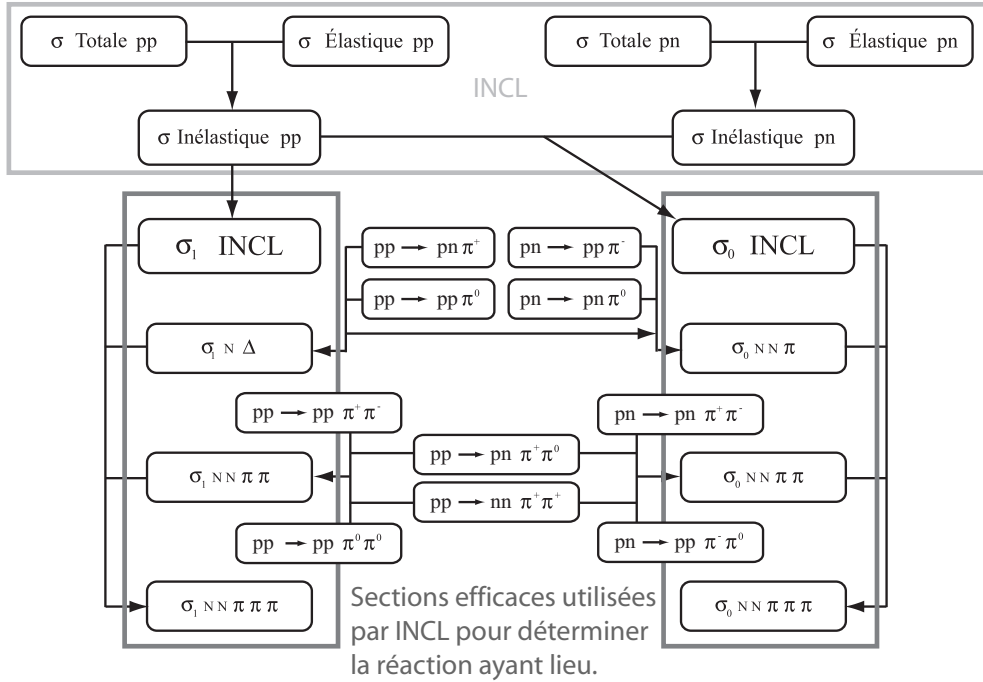


FIG. 3.4: Récapitulatif des sections efficaces. Le cadre gris clair indique les sections efficaces déjà paramétrisées dans le modèle et le cadre gris foncé indique les sections efficaces utilisées pour décider du nombre de pions produits.

3.5 Paramétrisation des sections efficaces

Les ajustements que nous avons utilisés proviennent de la référence [4]. Ils ont tous été effectués à l'aide de combinaisons linéaires de polynômes de Laguerre généralisés. Ces ajustements sont très performants dans la zone où il y a des données expérimentales mais divergent tous après cette zone. L'énergie à partir de laquelle ils divergent est différente pour chaque ajustement, mais la plupart du temps, ils divergent dans la gamme d'énergie qui nous intéresse. Pour pallier cet inconvénient, nous avons raccordé d'autres ajustements à ceux-ci à plus haute énergie. Le recueil de données expérimentales [23] nous en a fourni une partie (présentée dans la section 3.5.2) et, pour le reste, nous avons imposé une décroissance. Les sections efficaces étant modélisées en fonction de l'impulsion p dans le laboratoire, les décroissances que nous avons imposées ont un comportement en p^{-2} [24].

3.5.1 Ajustement selon Bystricky et al.

Dans leur article, Bystricky et ses collègues utilisent pour leurs ajustements des polynômes généralisés de Laguerre, notés $\mathcal{L}_n^\alpha(x)$. Avant de voir les ajustements plus en détail, rappelons l'expression de ces polynômes :

$$\mathcal{L}_n^\alpha(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} {}_1F_1(-n; \alpha+1; x)$$

Où ${}_1F_1(-n; \alpha + 1; x)$ est la fonction hypergéométrique confluyente, sa définition est :

$${}_1F_1(-n; \alpha + 1; x) = 1 + \frac{-n}{\alpha + 1}x + \frac{-n(-n+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k} \frac{x^k}{k!}$$

La notation $(z)_j$ est le symbole de Pochhammer et équivaut à :

$$(z)_j = \frac{\Gamma(z+j)}{\Gamma(z)} = (z+j-1)(z+j-2)\dots(z+1)z$$

La paramétrisation des sections efficaces utilisées dans [4] est la suivante :

$$\sigma_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } T \leq T_k \\ |F^k(x)|^2 & \text{si } T > T_k \end{cases} \quad (3.11)$$

Où l'amplitude effective $F(x)$ peut être développée en une série de fonctions orthonormées $L^\alpha(x)$ qui font intervenir les polynômes de Laguerre. Soit :

$$F^k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^\alpha(x) \quad (3.12)$$

$$L_n^\alpha(x) = e^{-x/2} x^{\alpha/2} \mathcal{L}_n^\alpha(x) \quad (3.13)$$

$$x = \ln(T/T_s) \quad (3.14)$$

En pratique cependant, les amplitudes effectives que nous utilisons ne vont jamais au-delà de huit termes. La plus grande valeur de n utilisée sera donc $n = 7$. La variable x fait intervenir T_s , qui est le seuil énergétique de la réaction considérée (T_s est précisé dans l'article pour chaque réaction) et l'énergie cinétique T de la particule incidente. La relation qui existe entre l'énergie cinétique et l'impulsion dans le laboratoire (rappelons que nous voulons exprimer toutes les sections efficaces en fonction de l'impulsion) s'écrit, si m est la masse du projectile :

$$T = \sqrt{m^2 + p_{lab}^2} - m \quad (3.15)$$

Pour que le comportement au seuil soit correct, il faut que le paramètre α soit positif [4]. Ce paramètre sert également à assurer que le comportement soit à la fois doux près du seuil, via la continuité de $x^{\alpha/2}$ (grandes valeurs de α) et que les variations puissent être rapides pour un nouveau canal (faibles valeurs de α). Pour toutes les réactions étudiées dans [4] et que nous utilisons dans ce travail, les meilleurs ajustements ont été obtenus pour $\alpha = 2$. C'est également la valeur que nous utiliserons.

3.5.2 Ajustement à plus haute énergie

Les ajustements à plus haute énergie provenant du recueil de données [23] que nous avons utilisé sont de la forme :

$$\sigma = A + B \times p^n + C \times \text{Log}^2(p) + D \times \text{Log}(p) \quad (3.16)$$

Ils font directement intervenir les impulsions dans le laboratoire. Mais, si les données sont insuffisantes à plus haute énergie que pour obtenir ces ajustements, nous avons

utilisé un autre moyen pour modéliser les sections efficaces. Toutes les sections efficaces dont nous avons besoin étaient modélisées dans l'article de Bystricky, aussi avons-nous raccordé ces ajustements à une fonction de la forme :

$$\sigma = \frac{A}{(Bp + C)^2} \quad (3.17)$$

La continuité de la courbe, de sa dérivée et de sa dérivée seconde fournissent les conditions nécessaires pour déterminer les 3 inconnues cherchées.

3.5.3 Application à la paramétrisation de $\sigma(pp \rightarrow pp\pi^0)$

Nous allons à présent appliquer les ajustements que nous venons de présenter à la section efficace de la réaction $pp \rightarrow pp\pi^0$. Comme il s'agit ici d'un exemple, nous effectuerons les ajustements jusqu'à des énergies plus élevées que ce que nous prévoyons d'utiliser dans INCL.

La section efficace que nous souhaitons calculer se trouvait dans l'article [4]. Sept termes sont nécessaires pour calculer l'amplitude effective 3.12 et les coefficients a_n sont donnés dans le tableau 3.2, la première colonne précise la valeur du seuil énergétique de la réaction T_s .

T_s	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
279.63 MeV	203.19	-538.55	906.90	-980.89	665.17	-258.19	43.649

TAB. 3.2: Paramètres pour l'ajustement de $\sigma(pp \rightarrow pp\pi^0)$ selon [4]

En utilisant la relation 3.15, nous pouvons voir que le seuil T_s correspond à une impulsion $p_{lab} \approx 0.7765$ GeV/c en dessous de laquelle $\sigma(pp \rightarrow pp\pi^0)$ est nulle, conformément à l'équation 3.11. Cet ajustement est valable jusqu'aux environs de 15 GeV.

Dans la référence [23], il existe un ajustement pour cette réaction. Nous avons pu déterminer que les deux ajustements se croisaient pour $p_{lab} = 13.9$ GeV/c. Nous utiliserons donc l'ajustement provenant de [23] au-delà de cette valeur. Les paramètres de ce dernier (voir équation 3.16) sont donnés par la table 3.3.

A	B	n	C	D
6.67	-13.3	-6.18	0.456	-3.29

TAB. 3.3: Paramètres pour l'ajustement de $\sigma(pp \rightarrow pp\pi^0)$ selon [23]

Cet ajustement n'est plus valable au-delà de 18 GeV/c, mais la section efficace doit décroître et nous avons imposé cette décroissance suivant l'équation 3.17. Les paramètres que nous avons calculés grâce aux conditions de continuité de l'ajustement, de sa dérivée et de sa dérivée seconde sont les suivants :

A	B	C
55.185	0.1412	5

TAB. 3.4: Paramètres pour l'ajustement de $\sigma(pp \rightarrow pp\pi^0)$ selon l'équation 3.17

Au final, la paramétrisation de la section efficace s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \sigma(pp \rightarrow pp\pi^0) &= 0 && \text{si } p_{lab} < 0.7765 \text{ GeV/c} \\
 &= \left| \sum_{i=0}^6 a_i L_i^\alpha(x) \right|^2 && \text{si } 0.7765 < p_{lab} < 13.9 \text{ GeV/c} \\
 &= A + B \times p_{lab}^n + C \times \text{Log}^2(p_{lab}) + D \times \text{Log}(p_{lab}) && \text{si } 13.9 < p_{lab} < 18 \text{ GeV/c} \\
 &= 55.185 / (0.1412 p_{lab} + 5)^2 && \text{si } p_{lab} > 18 \text{ GeV/c}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

La figure 3.5 montre $\sigma(pp \rightarrow pp\pi^0)$ ainsi que les différentes fonctions qui la constituent. La courbe désignée par « Bystricky » provient de la référence [4], sa fonction est donnée par 3.11 et elle utilise les paramètres du tableau 3.2. La courbe désignée par « Bornstein » provient de la référence [23], sa fonction est donnée par 3.16 et elle utilise les paramètres du tableau 3.3. La dernière courbe est désignée par son équation, les valeurs des paramètres sont données dans le tableau 3.4.

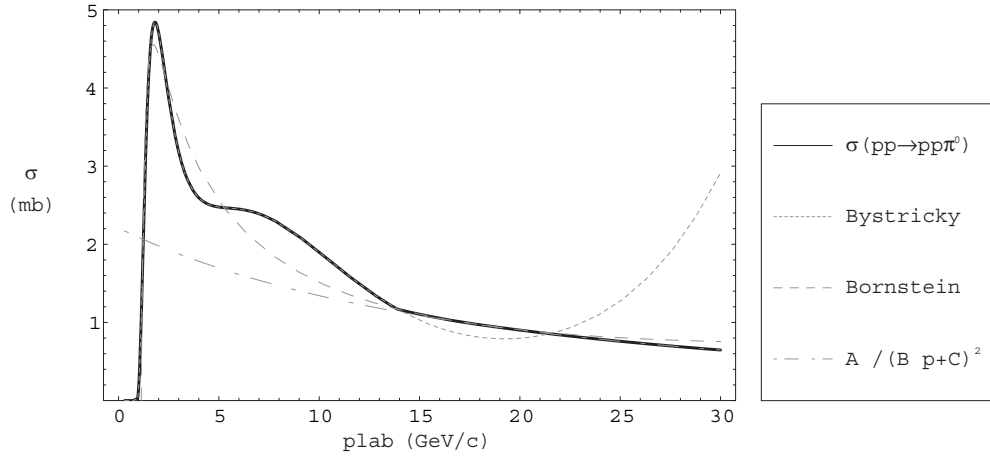


FIG. 3.5: Ajustement 3.18 pour la section efficace $\sigma(pp \rightarrow pp\pi^0)$ selon différentes sources.

3.6 Calcul des probabilités à associer à chaque répartition de charge possible

Maintenant, nous sommes en mesure de déterminer quelle réaction va avoir lieu : production d'une résonance Δ , de un, deux ou trois pions. Mais, si lors de la réaction $NN \rightarrow N\Delta$ les possibilités de combinaison de charges sont restreintes, dans un système à 3, 4 voir 5 particules, ces possibilités se multiplient.

Les coefficients de Clebsch-Gordan ayant déjà été utilisés pour calculer les probabilités à associer à chaque répartition possible des charges sur les particules de la voie de sortie, nous continuerons à les utiliser. En déterminant la probabilité qu'a chaque réaction de se produire, en renormalisant ces probabilités et en les introduisant dans INCL, nous serons à même de choisir une des répartitions de charge par la méthode de Monte-Carlo.

Nous allons, dans cette section, effectuer le calcul des probabilités à associer à chaque réaction dans les cas où il y a production de 2 et 3 pions.

3.6.1 États d'isospin pour les systèmes composés de deux pions

Nous aurons besoin d'écrire les états d'isospin dans lequel se trouve un système composé de 2 pions, comme nous l'avons fait pour les pions dans la section 3.4. Mais avant cela, écrivons la fonction d'onde à attribuer à ce système :

$$\Psi = u(r)Y_L(\Omega)\Xi_T^{M_T}$$

Où $u(r)$ est une fonction radiale, $Y_L(\Omega)$ une harmonique sphérique, L étant le moment angulaire du système et $\Xi_T^{M_T}$ rendant compte de la symétrie d'isospin. Tâchons de déterminer si cette fonction d'onde est invariante lors de la permutation des deux pions. Lors d'une permutation, la fonction Ξ va devenir :

$$\begin{aligned}\Xi_T^{M_T}(1, 2) &= \sum_{m_1} \sum_{m_2} (1m_1 1m_2 | TM_T) \chi_1^{m_1}(1) \chi_1^{m_2}(2) \\ \Xi_T^{M_T}(2, 1) &= \sum_{m_1} \sum_{m_2} (1m_1 1m_2 | TM_T) \chi_1^{m_1}(2) \chi_1^{m_2}(1)\end{aligned}$$

Et si nous réécrivons à présent cette relation en renommant m_1 en m_2 et vice versa, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\Xi_T^{M_T}(2, 1) &= \sum_{m_1} \sum_{m_2} (1m_2 1m_1 | TM_T) \chi_1^{m_2}(2) \chi_1^{m_1}(1) \\ &= \sum_{m_1} \sum_{m_2} (-)^{T-2} (1m_1 1m_2 | TM_T) \chi_1^{m_1}(1) \chi_1^{m_2}(2) \\ &= (-)^T \Xi_T^{M_T}(1, 2)\end{aligned}$$

Dans la fonction d'onde Ψ , la permutation des deux pions fera apparaître un facteur supplémentaire provenant de l'harmonique sphérique. La fonction d'onde est donc devenue :

$$\Psi(2, 1) = (-)^{L+T} \Xi(1, 2)$$

Nous voyons que la fonction d'onde est invariante lors de la permutation des deux pions si $L + T$ est pair. Comme les deux pions sont produits depuis un volume de l'espace des phases très petit, il est raisonnable de faire l'hypothèse que leur moment angulaire se trouve dans l'état $L = 0$. L'isospin T des deux pions doit alors être pair pour que la fonction d'onde ait la bonne symétrie.

Les fonctions Ξ permises sont donc les suivantes :

$$\begin{aligned}\Xi_2^2 &= \pi^+ \pi^+ = |22\rangle \\ \Xi_2^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi^+ \pi^0 + \pi^0 \pi^+) = |21\rangle \\ \Xi_2^0 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \pi^+ \pi^- + \sqrt{\frac{2}{3}} \pi^0 \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \pi^- \pi^+ = |20\rangle \\ \Xi_2^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi^- \pi^0 + \pi^0 \pi^-) = |2-1\rangle \\ \Xi_2^{-2} &= \pi^- \pi^- = |2-2\rangle \\ \Xi_0^0 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \pi^+ \pi^- - \frac{1}{\sqrt{3}} \pi^0 \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \pi^- \pi^+ = \frac{1}{\sqrt{3}} |00\rangle\end{aligned}\tag{3.19}$$

En inversant ces relations, nous pourrions savoir quels sont les états d'isospin accessibles par les combinaisons de pions dont nous aurons besoin pour calculer les probabilités associées à chaque réaction :

$$\begin{aligned}
|\pi^+ \pi^+\rangle &= |22\rangle \\
\frac{1}{\sqrt{2}} (|\pi^+ \pi^0\rangle + |\pi^0 \pi^+\rangle) &= |21\rangle \\
|\pi^0 \pi^0\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |20\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |00\rangle \\
\frac{1}{\sqrt{2}} (|\pi^+ \pi^-\rangle + |\pi^- \pi^+\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{3}} |20\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |00\rangle \\
\frac{1}{\sqrt{2}} (|\pi^0 \pi^-\rangle + |\pi^- \pi^0\rangle) &= |2-1\rangle \\
|\pi^- \pi^-\rangle &= |2-2\rangle
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Les deuxième, quatrième et cinquième équations sont écrites de manière symétrique. Il est impossible de différencier, lors d'une mesure de section efficace, deux états dans lesquels les ordres des charges sont inversés. Il faut donc tenir compte des deux possibilités. Par la suite, nous désignerons ces états par le terme « état physique » et nous les noterons :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}} (|\pi^+ \pi^0\rangle + |\pi^0 \pi^+\rangle) &\Rightarrow |\pi^+ \pi^0\rangle_\varphi \\
\frac{1}{\sqrt{2}} (|\pi^+ \pi^-\rangle + |\pi^- \pi^+\rangle) &\Rightarrow |\pi^+ \pi^-\rangle_\varphi \\
\frac{1}{\sqrt{2}} (|\pi^0 \pi^-\rangle + |\pi^- \pi^0\rangle) &\Rightarrow |\pi^0 \pi^-\rangle_\varphi
\end{aligned}$$

3.6.2 Modèle de répartition des charges pour la production de deux pions

Nous allons maintenant présenter le modèle de répartition des charges sur les particules de la voie de sortie. Pour ce faire, nous allons calculer explicitement les probabilités à associer aux réactions. Nous n'appliquerons ce calcul qu'au cas le plus délicat : la collision entre un proton et un neutron (c'est le seul cas où le système de nucléons à accès à deux états d'isospin différents). Les probabilités à associer aux autres réactions, qui peuvent être trouvées en suivant le même raisonnement, seront simplement données par les tableaux 3.7 pour la collision entre deux protons et 3.8 pour la collision entre deux neutrons.

En supposant que le système de nucléons dans la voie d'entrée se trouve dans l'état d'isospin $|T m_T\rangle$. En supposant également que dans la voie de sortie on a pour caractéristiques des nucléons dans l'état $|T_N m'\rangle$, et des pions dans l'état $|T_\pi m_\pi\rangle$ (où m_π est obligatoirement $m_T - m'$), alors nous modéliserons la probabilité P comme étant indépendante de T , T_N et T_π sauf dans le coefficient de Clebsch-Gordan. Cela revient à dire que :

$$P \propto C |(T_N m' T_\pi m_\pi | T m_T)|^2, \tag{3.21}$$

où C est un facteur de normalisation. Pour T et m_T fixés, il est donné par la relation :

$$C \sum_{m_T, T_\pi} |(T_N \ m' \ T_\pi \ m_\pi | T \ m_T)|^2 = C \sum_{T_\pi} 1 = 1,$$

et vu que nous considérons les deux possibilités $T_\pi = 0$ et $T_\pi = 2$, il doit prendre la valeur $C = 1/2$.

Revenons à la relation 3.21. Dans le cas d'une collision entre un proton et un neutron, nous devons considérer les cas suivants :

$$\begin{aligned} pn \ (T = 1) &\rightarrow NN \ (T = 1) \ \pi\pi \ (T = 2) \quad \text{avec } m' = 1, \ m' = 0 \text{ et } m' = -1 \\ &\rightarrow NN \ (T = 1) \ \pi\pi \ (T = 0) \quad \text{avec } m' = 0 \\ &\rightarrow NN \ (T = 0) \ \pi\pi \ (T = 1) \quad \text{non autorisé} \\ pn \ (T = 0) &\rightarrow NN \ (T = 0) \ \pi\pi \ (T = 0) \quad \text{avec } m' = 0 \end{aligned}$$

Le troisième cas n'est pas autorisé parce que nous avons fait l'hypothèse que le système des deux pions doit se trouver dans un état d'isospin pair. Dans le premier cas, nous pouvons calculer les probabilités des réactions :

$$\begin{aligned} pn(T = 1) &\rightarrow pp \ (\pi^- \pi^0)_\varphi & P &\propto |(112 - 1 | 10)|^2 = 3/10 \\ pn(T = 1) &\rightarrow pn(T = 1) \ (\pi^+ \pi^-)_\varphi & P &\propto \frac{1}{3} \times |(1020 | 10)|^2 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = 2/15 \\ pn(T = 1) &\rightarrow pn(T = 1) \ (\pi^0 \pi^0)_\varphi & P &\propto \frac{2}{3} \times |(1020 | 10)|^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = 4/15 \\ pn(T = 1) &\rightarrow nn \ (\pi^+ \pi^0)_\varphi & P &\propto |(1 - 121 | 10)|^2 = 3/10 \end{aligned}$$

Les facteurs $2/3$ et $1/3$ apparaissent à cause de la composition de l'état $|20\rangle$. Les états $|20\rangle$ et $|00\rangle$ sont constitués de $|\pi^+ \pi^- \rangle_\varphi$ et de $|\pi^0 \pi^0 \rangle$, cela est montré par les équations 3.19 et 3.20.

Dans le cas où l'isospin des pions est nul, les probabilités que nous cherchons sont :

$$\begin{aligned} pn(T = 1) &\rightarrow pn(T = 1) \ (\pi^+ \pi^-)_\varphi & P &\propto \frac{2}{3} \times |(1000 | 10)|^2 = 2/3 \\ pn(T = 1) &\rightarrow pn(T = 1) \ (\pi^0 \pi^0)_\varphi & P &\propto \frac{1}{3} \times |(1000 | 10)|^2 = 1/3 \end{aligned}$$

La probabilité à associer à chacune des réactions est donc, si les nucléons dans la voie d'entrée ont un isospin $T = 1$ et si on tient compte du facteur C :

$$\begin{aligned} pn &\rightarrow pp \pi^- \pi^0 & P &= \frac{3}{20} & &= 3/20 \\ pn &\rightarrow pn \pi^+ \pi^- & P &= \frac{2}{30} + \frac{10}{30} & &= 8/20 \\ pn &\rightarrow pn \pi^0 \pi^0 & P &= \frac{4}{30} + \frac{5}{30} & &= 6/20 \\ pn &\rightarrow nn \pi^+ \pi^0 & P &= \frac{3}{20} & &= 3/20 \end{aligned}$$

Considérons maintenant le dernier cas, dans lequel les nucléons dans la voie d'entrée ont un isospin $T = 0$:

$$\begin{aligned} pn(T = 0) &\rightarrow pn(T = 0) \ (\pi^+ \pi^-)_\varphi & P &= \frac{2}{3} |(0000 | 00)|^2 = 2/3 \\ pn(T = 0) &\rightarrow pn(T = 0) \ (\pi^0 \pi^0)_\varphi & P &= \frac{1}{3} |(0000 | 00)|^2 = 1/3 \end{aligned}$$

Les probabilités calculées pour les collisions pp et nn , lorsqu'il y a production de deux pions, sont données dans les tableaux 3.7 et 3.8 respectivement.

Remarquons que 3.21 représente un modèle. En toute généralité, et en conformité avec la symétrie d'isospin, C peut dépendre de T . Le choix que nous avons fait implique des relations entre des sections efficaces pour des voies particulières. Ainsi, on doit avoir :

$$\frac{\sigma(np \rightarrow np\pi^+\pi^-)}{\sigma(np \rightarrow pp\pi^-\pi^0)} = \frac{120}{45}$$

En fait, les résultats expérimentaux sont plus ou moins compatibles avec cette relation [4].

3.6.3 Répartition des charges pour les réactions $pn \rightarrow NN\pi\pi\pi$

Nous allons maintenant présenter le modèle que nous avons utilisé pour attribuer une probabilité à chaque répartition de charges possibles entre les particules de la voie de sortie.

Étant donné que toutes les réactions que nous considérons ont deux nucléons à la fois dans la voie d'entrée et dans la voie de sortie, les charges qui seront réparties sur les trois pions sont : +2, +1, 0, -1, et -2. Or toutes ces possibilités étaient déjà accessibles lors des réactions de production de deux pions.

En notant Q la charge totale donnée aux pions ($Q = +2, +1, 0, -1$, ou -2), le modèle que nous avons utilisé peut s'exprimer ainsi : la probabilité pour que la charge totale Q que porte l'ensemble des pions est la même quel que soit le nombre de pions produits, en tenant compte des combinaisons possibles sur les charges.

Par exemple, pour la réaction $pn \rightarrow pn\pi\pi\pi$ la charge totale sur les pions $Q = 0$. La probabilité que nous cherchons peut être reprise du cas à deux pions. Il faut alors additionner les possibilités, à savoir les deux probabilités associées aux réactions $pn \rightarrow pn\pi^+\pi^-$ et $pn \rightarrow pn\pi^0\pi^0$. C'est à dire :

$$P = \frac{8}{20} + \frac{6}{20} = \frac{7}{10}$$

Ensuite, il nous faut différencier les deux réactions $pn \rightarrow pn\pi^0\pi^0\pi^0$ et $pn \rightarrow pn\pi^0\pi^+\pi^-$. Dans ce cas, un des pions est forcément de charge nulle, les deux autres sont soit $\pi^0\pi^0$, soit $\pi^+\pi^-$, soit $\pi^-\pi^+$. Lors d'une mesure expérimentale, ces deux derniers cas ne sont pas discernables. C'est pourquoi nous allons répartir la probabilité $P = 7/10$ dans les proportions suivantes : 1/3 pour la réaction $pn \rightarrow pn\pi^0\pi^0\pi^0$ et 2/3 pour la réaction $pn \rightarrow pn\pi^0\pi^+\pi^-$.

Nous aurons donc les probabilités suivantes :

$$\begin{array}{ll} pn \rightarrow pn\pi^0\pi^0\pi^0 & P = \frac{7}{10} \times \frac{1}{3} = 7/30 \\ pn \rightarrow pn\pi^0\pi^+\pi^- & P = \frac{7}{10} \times \frac{2}{3} = 14/30 \end{array}$$

Les probabilités calculées par ce modèle pour toutes les réactions entre deux nucléons sont données par les tableaux récapitulatifs 3.5 à 3.8.

3.6.4 Tableaux récapitulatifs des répartitions de charges utilisées

Les tableaux récapitulatifs ci-dessous présentent les probabilités que nous avons associées aux nouvelles réactions incluses dans INCL. Les réactions de production d'un pion, lorsque l'isospin $T = 1$ n'y figurent pas parce qu'elles entraînent la formation d'une résonance Δ et non d'un pion (sauf dans le cas où $T = 0$, dans le tableau 3.6).

pn (T=1) \rightarrow	2 π		3 π	
	Réaction	Probabilité	Réaction	Probabilité
pp	$\pi^- \pi^0$	(3/20)	$\pi^- \pi^+ \pi^-$	(6/60)
			$\pi^- \pi^0 \pi^0$	(3/60)
pn	$\pi^+ \pi^-$	(8/20)	$\pi^+ \pi^- \pi^0$	(28/60)
	$\pi^0 \pi^0$	(6/20)	$\pi^0 \pi^0 \pi^0$	(14/60)
nn	$\pi^+ \pi^0$	(3/20)	$\pi^+ \pi^+ \pi^-$	(6/60)
			$\pi^0 \pi^0 \pi^0$	(3/60)

TAB. 3.5: Tableau des probabilités pour les collisions pn dans l'état $T=1$

pn (T=0) \rightarrow	1 π	2 π		3 π	
		Réaction	Probabilité	Réaction	Probabilité
pp	π^- (1/3)	/		$\pi^- \pi^+ \pi^-$	(6/60)
				$\pi^- \pi^0 \pi^0$	(3/60)
pn	π^0 (1/3)	$\pi^+ \pi^-$	(2/3)	$\pi^0 \pi^+ \pi^-$	(28/60)
		$\pi^0 \pi^0$	(1/3)	$\pi^0 \pi^0 \pi^0$	(14/60)
nn	π^+ (1/3)	/		$\pi^+ \pi^+ \pi^-$	(6/60)
				$\pi^+ \pi^0 \pi^0$	(3/20)

TAB. 3.6: Tableau des probabilités pour les collisions pn dans l'état $T=0$

pp \rightarrow	2 π		3 π	
	Réaction	Probabilité	Réaction	Probabilité
pp	$\pi^+ \pi^-$	(7/20)	$\pi^+ \pi^- \pi^0$	(22/60)
	$\pi^0 \pi^0$	(4/20)	$\pi^0 \pi^0 \pi^0$	(11/60)
pn	$\pi^+ \pi^0$	(3/20)	$\pi^+ \pi^+ \pi^-$	(6/60)
			$\pi^+ \pi^0 \pi^0$	(3/60)
nn	$\pi^+ \pi^+$	(6/20)	$\pi^+ \pi^+ \pi^0$	(18/60)

TAB. 3.7: Tableau des probabilités pour les collisions pp

nn \rightarrow	2 π		3 π	
	Réaction	Probabilité	Réaction	Probabilité
pp	$\pi^- \pi^-$	(6/20)	$\pi^- \pi^- \pi^0$	(18/60)
pn	$\pi^- \pi^0$	(3/20)	$\pi^+ \pi^- \pi^-$	(6/60)
			$\pi^- \pi^0 \pi^0$	(3/60)
nn	$\pi^+ \pi^-$	(7/20)	$\pi^+ \pi^- \pi^0$	(22/60)
	$\pi^0 \pi^0$	(4/20)	$\pi^0 \pi^0 \pi^0$	(11/60)

TAB. 3.8: Tableau des probabilités pour les collisions nn

Chapitre 4

Modélisation de la répartition des impulsions dans l'espace des phases

Jusqu'à présent, dans INCL, lors de la collision entre deux nucléons, il n'y avait jamais plus de deux particules dans la voie de sortie. Donner à ces particules une impulsion ne posait pas de problèmes puisque COLLIS travaille dans le référentiel du centre de masse et que la contrainte de satisfaire aux lois de conservation de l'impulsion et de l'énergie est alors appliquée avec facilité.

Les changements que nous avons introduits permettent de traiter la production d'un, deux ou trois pions :

$$NN \rightarrow NN \, z \, \pi \quad \text{avec } z = 1, 2 \text{ ou } 3$$

Il a donc fallu généraliser COLLIS pour permettre la répartition des impulsions sur plus de deux particules dans la voie de sortie, tout en satisfaisant à la loi de conservation énergie-impulsion. Nous supposons que les particules peuplent uniformément l'espace des phases ($\langle S \rangle$ est constante, voir équation B.1) ; ce qui est le modèle le plus simple et qui semble être le plus proche de la réalité quand l'énergie est de l'ordre de quelques GeV [5, 6]. Nous devons donc tirer au hasard les impulsions \vec{p}_i en respectant les contraintes :

$$\sum_i \vec{p}_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_i \varepsilon_i = \sqrt{s}$$

Ces contraintes vont se manifester sous la forme d'un facteur $\delta^4 \left(\sum_{j=1}^n p_j - P \right)$. Comme nous allons le voir, il vaut mieux utiliser un autre set de variables que les impulsions, pour lesquelles la contrainte en $\delta^4 \left(\sum_{j=1}^n p_j - P \right)$ est automatiquement satisfaite. Mais, à cause de l'utilisation de cet autre ensemble de variables, il faudra attacher un poids ω à leur espace.

La première section de ce chapitre montrera le développement qui permet de déterminer l'expression de ω . Nous décrirons ensuite la sous-routine FOUL1 qui permet de générer les impulsions des particules en satisfaisant aux lois de conservation.

4.1 Détermination de la distribution de l'espace des phases

La distribution que nous cherchons est reliée à l'invariant de l'espace des phases R_n . L'indice n est constant et indique le nombre de particules de la voie de sortie. Commençons par rappeler¹ l'expression de l'invariant de l'espace des phases[25] :

$$R_n(P, m_1 \dots m_n) = \int \dots \int \prod_{i=1}^n d^4 p_i \delta(p_i^2 - m_i^2) \theta_+(p_i^2) \delta^4\left(\sum_{j=1}^n p_j - P\right) \quad (4.1)$$

où le facteur $\theta_+(p_i^2)$ est là pour assurer que la valeur de l'impulsion soit donnée par la solution positive de $\delta(p_i^2 - m_i^2)$. La quantité $R_n(P, m_1 \dots m_n)$ est bien un invariant, elle est indépendante du référentiel choisi : elle ne dépend pas explicitement du quadrivecteur P , mais plutôt de l'invariant P^2 qui lui est associé et qui n'est rien d'autre que l'énergie totale du système dans son centre de masse.

La présence du facteur $\delta^4\left(\sum_{j=1}^n p_j - P\right)$ nous indique que la distribution prend la forme d'une hyper surface de l'espace des phases. D'un point de vue pratique, il est difficile de générer un ensemble d'impulsions p_i qui appartiennent à une hyper surface ; il serait plus efficace de pouvoir utiliser une distribution qui ait la forme d'une portion de volume continue.

En effectuant un changement de coordonnées nous pourrions y parvenir. Les coordonnées que nous allons utiliser sont les masses invariantes M_i des sous-ensembles des i premières particules et les angles qui définissent la direction des quadrivecteurs impulsions. Il est possible de réécrire R_n dans ces coordonnées. Commençons par écrire :

$$R_n(P, m_1, \dots, m_n) = \int dM_{12}^2 R_{n-1}(P, M_{12}, m_3, \dots, m_n) R_2(M_{12}, m_1, m_2) \quad (4.2)$$

Nous allons vérifier cette relation en écrivant explicitement R_{n-1} et R_2 :

$$\begin{aligned} & \int dM_{12}^2 R_{n-1}(P, M_{12}, m_3, \dots, m_n) R_2(M_{12}, m_1, m_2) = \\ & \int dM_{12}^2 \int d^4 p'_2 \int d^4 p_3 \dots d^4 p_n \delta(p_2'^2 - M^2) \theta_+(p_2'^2) \prod_{i=3}^n \delta(p_i^2 - m_i^2) \\ & \times \prod_{i=3}^n \theta_+(p_i^2) \delta(p_2' + p_3 + \dots + p_n - P) \int d^4 p_1 \int d^4 p_2 \delta(p_1^2 - m_1^2) \theta_+(p_1^2) \\ & \times \delta(p_2^2 - m_2^2) \theta_+(p_2^2) \delta(p_1 + p_2 - p') \quad (4.3) \end{aligned}$$

Étant donné l'invariance de R_2 , on peut l'évaluer dans le référentiel particulier où $\vec{p}' = \vec{p}_2$. Le facteur $\delta(p_2'^2 - M_{12}^2) \theta_+(p_2'^2)$ implique que l'on ait l'égalité $p' = p_2'$ après avoir intégré sur M_{12}^2 . La relation 4.2 devient donc :

$$\begin{aligned} & \int d^4 p'_2 d^4 p_3 \dots d^4 p_n \prod_{i=3}^n \delta(p_i^2 - m_i^2) \theta_+(p_i^2) \theta_+(p_2'^2) \delta(p_2' + p_3 + \dots + p_n - P) \\ & \times \int d^4 p_1 \int d^4 p_2 \delta(p_1^2 - m_1^2) \delta(p_2^2 - m_2^2) \theta_+(p_1^2) \theta_+(p_2^2) \delta(p_1 + p_2 - p_2') \quad (4.4) \end{aligned}$$

¹Sa démonstration se trouve dans l'annexe B.

qui est effectivement équivalent à la définition 4.1.

En utilisant l'invariance relativiste, nous pouvons nous placer dans le référentiel où $p' = (p'_0, \vec{0})$. Calculons l'expression de $R_2(M_{12}, m_1, m_2)$:

$$\begin{aligned}
R_2(M_{12}, m_1, m_2) &= \int d^4 p_1 \int d^4 p_2 \delta(p_1^2 - m_1^2) \delta(p_2^2 - m_2^2) \theta_+(p_1^2) \theta_+(p_2^2) \\
&\quad \times \delta(p_1 + p_2 - p') \delta(p'^2 - M_{12}^2) \theta_+(p'^2) \\
&= \int d^4 p_1 \int d^4 p_2 \delta(p_1^2 - m_1^2) \delta(p_2^2 - m_2^2) \theta_+(p_1^2) \theta_+(p_2^2) \\
&\quad \times \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \delta(p_1^0 + p_2^0 - M_{12}) \\
&= \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \frac{1}{2\epsilon_1} \frac{1}{2\epsilon_2} \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - M_{12}) \\
&= \int d^3 p_1 \frac{1}{4\epsilon_1 \epsilon_2} \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - M_{12})
\end{aligned}$$

Où $\epsilon_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2}$. Rappelons la propriété suivante du δ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(g(x)) dx = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

Où les x_i sont les racines de $g(x)$. Si p^* est l'impulsion des particules 1 et 2 dans leur centre de masse, elle annule l'argument $\epsilon_1 + \epsilon_2 - M_{12}$ et nous trouvons :

$$\begin{aligned}
R_2(M_{12}, m_1, m_2) &= \pi \int_0^{+\infty} p_1^2 dp_1 \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2} \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - M_{12}) \\
&= \pi \frac{p^{*2}}{\epsilon_1 \epsilon_2} \left(\frac{1}{2} \frac{2p^*}{\epsilon_1} + \frac{1}{2} \frac{2p^*}{\epsilon_2} \right)^{-1} \\
&= \pi \frac{p^{*2}}{\epsilon_1 \epsilon_2} \frac{1}{p^*} \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \\
&= \frac{\pi}{M_{12}} p^*(M_{12}, m_1, m_2)
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant remplacer R_2 dans 4.2. En tenant compte du fait que $dM^2 = 2M dM$, nous pouvons simplifier et, au final, trouver :

$$R_n(P, m_1, \dots, m_n) = 2\pi \int dM_{12} R_{n-1}(P; M_{12}, m_3, \dots, m_n) p^*(M_{12}, m_1, m_2) \quad (4.5)$$

En appliquant $n - 2$ fois la relation de récurrence successivement nous arrivons à l'expression :

$$\begin{aligned}
R_n(P, m_1, \dots, m_n) &= 2\pi \int dM_{12} R_{n-1}(P, M_{12}, m_3, \dots, m_n) p^*(M_{12}, m_1, m_2) \\
&= (2\pi)^2 \int dM_{12} \int dM_3 R_{n-2}(P, M_{12}, m_3, \dots, m_n) \\
&\quad \times p^*(M_3, M_{12}, m_3) p^*(M_{12}, m_1, m_2) \\
&= (2\pi)^{n-1} \int dM_{12} \int dM_3 \dots dM_{n-1} p^*(M_{12}, m_1, m_2) \\
&\quad \times p^*(P, M_{n-1}, m_n) \dots p^*(M_3, M_{12}, m_3)
\end{aligned} \quad (4.6)$$

Les masses $M_{12}, M_3, \dots, M_{n-1}$ utilisées ci-dessus sont limitées aux domaines suivants :

$$\begin{aligned}
 m_1 + m_2 &\leq M_{12} \leq (\sqrt{s} - \sum_{j=1}^n m_j) + m_1 + m_2 \\
 m_3 + M_{12} &\leq M_3 \leq (\sqrt{s} - \sum_{j=1}^n m_j) + m_1 + m_2 + m_3 \\
 &\vdots \\
 m_{n-1} + M_{n-2} &\leq M_{n-1} \leq (\sqrt{s} - \sum_{j=1}^n m_j) + m_1 + \dots + m_{n-1}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Au lieu de tirer au hasard un ensemble de p_i en imposant la conservation de l'impulsion \vec{p} et de l'énergie, on peut donc tirer aléatoirement les masses $M_{12}, M_3, \dots, M_{n-1}$ et les angles des quadrvecteurs dans un certain domaine de l'espace des phases, et la contrainte $\delta^4 \left(\sum_{j=1}^n p_j - P \right)$ disparaît alors. Mais le changement de coordonnées nous oblige alors à appliquer le poids ω à l'espace de ces nouvelles variables :

$$\omega = p^*(M_{12}, m_1, m_2) p^*(M_3, M_{12}, m_3) \dots p^*(P, M_{n-1}, m_n) \tag{4.8}$$

4.2 La sous-routine FOUL1

Cette sous-routine donne des impulsions à un certain nombre n de particules, en respectant les lois de conservation. Nous venons de voir qu'il était préférable de générer d'autres variables que les p_i pour effectuer cette tâche, mais qu'il nous fallait alors tenir compte du poids ω de l'espace des phases.

Nous allons commencer par expliquer comment s'opère le choix d'une grandeur, quand celle-ci obéit à une distribution donnée, ensuite nous décrirons le fonctionnement de la sous-routine FOUL1.

4.2.1 Choix d'une variable aléatoire obéissant à une distribution donnée

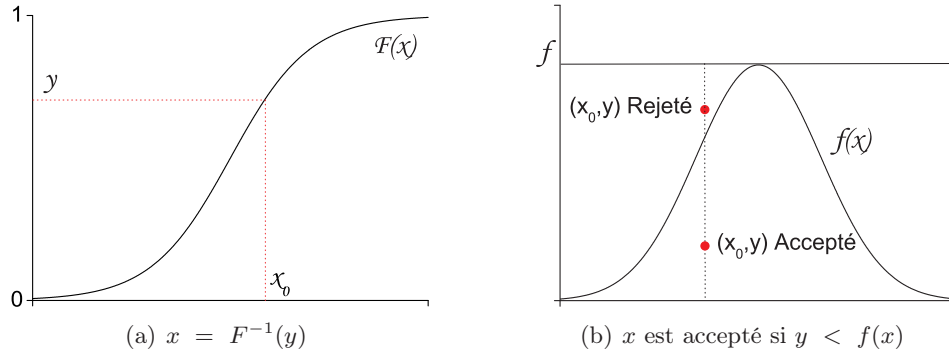
D'une manière générale, si une grandeur x est distribuée selon la fonction $f(x)$, pour choisir des valeurs de x en accord avec $f(x)$ on peut commencer par calculer :

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx$$

Si $F(x)$ est telle que son image varie entre 0 et 1 ($F(x)$ peut être renormalisée pour que ce soit le cas), alors en choisissant un nombre y au hasard, compris entre 0 et 1, la valeur de x recherchée est donnée par la relation :

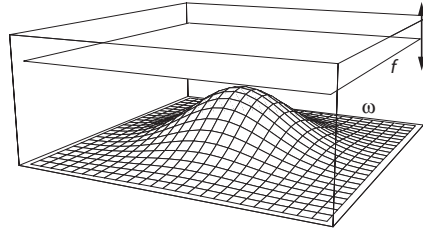
$$x = F^{-1}(y)$$

Dans les cas où la fonction de répartition n'est pas intégrable, ou qu'elle est de dimension élevée, il peut s'avérer plus efficace d'opérer de manière légèrement différente (voir la figure 4.1.b).

FIG. 4.1: Choix d'une grandeur x en connaissant sa distribution $f(x)$

Nous allons en illustrer le principe à l'aide d'un exemple à deux dimensions : le choix d'un point (x, y) qui obéit à une fonction de répartition notée $\omega(x, y)$. Pour plus de facilité, nous appellerons « évènement » tout choix d'un point de coordonnée (x, y) .

La première étape consiste à définir un volume (dont la dimension sera supérieure de celle de ω de 1). Pour cela, il faut choisir la valeur de la constante f , comme le montre la figure 4.2.

FIG. 4.2: On définit un volume qui contient ω par un choix adéquat de la constante f .

Le choix de f est important. D'un côté, si f est trop élevé, alors ω risque d'occuper une partie du volume trop peu importante. Nous voulons éviter ce phénomène parce qu'il conduit au rejet trop fréquent de l'évènement. D'un autre côté, si f venait à être plus petit que ω_{max} alors la fonction de répartition serait tronquée. Ce que nous tenons également à éviter. Dans la sous-routine FOUL1, la valeur qui est attribuée à f correspond au maximum de la distribution : ω_{max} .

Pour tester l'évènement (x, y) , nous devons choisir aléatoirement un nombre supplémentaire compris entre 0 et f , notons-le z_0 . Les conditions suivantes nous permettent alors de déterminer si l'évènement (x, y) est accepté ou non :

- Si $z_0 < \omega(x, y)$ alors le choix (x, y) est accepté.
- Si $z_0 \geq \omega(x, y)$ alors le choix (x, y) est rejeté.

4.3 Description de FOUL1

La sous-routine FOUL1, qui a été ajoutée dans INCL, a pour but d'attribuer statistiquement leurs états finaux aux n particules. Elle est utilisée dans les collisions où le nombre de particules dans la voie de sortie est supérieur à deux ; ce qui n'était jamais le cas auparavant. Nous allons ici décrire la façon dont FOUL1 détermine les impulsions de n particules. L'acceptation ou le rejet d'un évènement est basé sur le procédé que nous venons d'exposer à la section 4.2. Rappelons que dans sa version actuelle, COLLIS peut générer jusqu'à 5 particules (2 nucléons et 3 pions).

La sous-routine commence par générer aléatoirement les masses $M_{12}, M_3, \dots, M_{n-1}$, en veillant à respecter les conditions 4.7.

Dans le cas où il ne faut générer l'impulsion que de deux particules, la conservation de l'impulsion simplifie considérablement le problème. En effet, il suffit dans ce cas de donner aux particules des impulsions ayant même module (disons p^*), même direction et émises à 180° , c'est-à-dire dans des sens opposés.

FOUL1 utilise cette simplification pour générer les impulsions de n particules, elle procède comme suit :

1 Elle commence par générer aléatoirement les masses $M_{12}, M_3, \dots, M_{n-1}$ en respectant les conditions sur chacune d'entre elles.

2 Le choix de M_{12} permet de calculer $p^*(M_{12}, m_1, m_2)$ et d'ainsi pouvoir déterminer \vec{p}_1 et \vec{p}_2 de la manière suivante : $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = p^*(M_{12}, m_1, m_2)$. Dans le référentiel du centre de masse, les impulsions \vec{p}_1 et \vec{p}_2 ont même orientation, et leurs sens sont opposés. L'orientation est déterminée aléatoirement (la figure 4.3 illustre cette étape).

3 Ensuite, la sous-routine considère une particule supplémentaire, soit la 3^{ème}. Le choix de M_3 permet de calculer $|\vec{p}_3| = p^*(M_3, M_{12}, m_3)$. En se plaçant cette fois dans le référentiel du centre de masse des 3 particules, FOUL1 considère l'émission de deux « particules » : le système 1 – 2 et la 3^{ème} particule. Ainsi, les deux impulsions sont une fois encore de même orientation et de sens opposé. La transformation de Lorentz $\vec{\beta} = -\vec{p}_3/M_{12}$ permet de générer les impulsions \vec{p}_1 et \vec{p}_2 dans ce référentiel, tout en garantissant que $\sum_{i=1}^3 \vec{p}_i = 0$.

4 La sous-routine recommence l'étape précédente jusqu'à ce que l'avant-dernière particule soit prise en compte.

5 Pour la dernière particule, la masse utilisée est l'énergie de tout le système \sqrt{s} et permet de calculer l'impulsion de la $n^{\text{ème}}$ particule : $|\vec{p}_n| = p^*(\sqrt{s}, M_{n-1}, m_n)$. La transformation de Lorentz à appliquer aux impulsions calculées dans le référentiel du centre de masse des $n - 1$ particules est : $\vec{\beta} = -\vec{p}_n/M_{n-1}$.

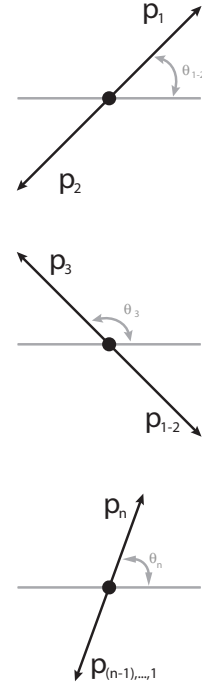


FIG. 4.3

L'exécution de FOUL1 nécessite l'appel à d'autres sous-routines. Voyons quelles sont celles-ci et leur rôle jouent-elles par rapport à la méthode que nous venons d'expliquer :

RUNGEN : Lors du premier appel, des nombres aléatoires sont générés et rangés dans le vecteur SHUFF. Lors des appels suivants, le vecteur RNO est rempli en

choisissant aléatoirement parmi les composantes SHUFF.

GENEVE : Génère l'évènement et peut le rejeter s'il ne satisfait pas la distribution ω . C'est au cours de cette sous-routine que les masses M_2, M_3, \dots, M_{n-1} sont déterminées. Ensuite, GENEVE calcule $f = 1/\omega_{max}$ pour pouvoir comparer un nombre choisi au hasard, compris entre 0 et 1, au produit ωf , compris lui aussi entre 0 et 1. Si le nombre aléatoire est plus grand que ωf , l'évènement est rejeté, et vice versa.

ROTES : Opère deux rotations autour de \vec{e}_y et \vec{e}_z .

SURVEY : Permet de vérifier les poids.

Chapitre 5

Modifications apportées à INCL et résultats obtenus

5.1 Introduction

Pour étendre INCL à plus haute énergie, nous avons dû déterminer de nouvelles réactions qui vont être utilisées par le programme. Il s'agit des réactions de production d'un, de deux et de trois pions. Nous avons dû paramétriser les sections efficaces de ces dernières et nous avons établi un modèle pour la répartition des charges entre les particules. Il ne nous reste qu'à programmer tous ces éléments dans INCL.

La première partie de ce chapitre sera consacrée à la programmation des réactions de production d'un, deux et trois pions dans le code INCL. Nous présenterons les étapes suivies par le programme pour déterminer quelle réaction a lieu.

Ensuite, nous comparerons les résultats donner par INCL avant et après les modifications que nous lui avons apportées. Pour cela, nous montrerons les histogrammes issus des fichiers *hbook* pour une énergie donnée. Nous terminerons avec l'histogramme concernant la production de pions, car il est naturellement le plus affecté par les modifications que nous avons apportées au code.

5.2 Programmation des changements dans INCL

5.2.1 Modifications relatives aux sections efficaces

Les sections efficaces déjà paramétrisées dans INCL étaient programmées sous forme de fonctions. Il y en avait cinq :

SEL : La section efficace élastique (paramétrisée d'après [11]).

STOT : La section efficace totale. Elle est définie comme étant la somme des sections efficaces élastique SEL et inélastique SINE (selon [13]. Mais STOT n'est pas programmée directement : elle est égale à SPRO dans le cas d'une collision entre deux nucléons, à SREC pour une collision entre un nucléon et un Δ et elle est nulle pour une collision entre deux résonances.

SREC : La section efficace de réaction (paramétrisée selon [17]).

SPRO : La section efficace de production d'un pion (paramétrisée selon [11]).

SPN : La section efficace de réaction pour une collision entre un pion et un nucléon.

La section efficace inélastique n'étant plus uniquement utilisée pour produire les résonances Δ , nous avons renommé SPRO en SINEL. Nous avons également étendu les sections efficaces STOT et SEL aux plus hautes énergies en utilisant les ajustements 3.16, ceux utilisés jusque là n'étant valables que jusqu'à quelques GeV (voir [11])

Les nouvelles sections efficaces que nous avons introduites ont également été programmées sous forme de fonctions. La figure 3.4 à la page 25, donne un aperçu des sections efficaces que nous allons devoir paramétriser. Nous les avons toutes programmées de façon à ce que COLLIS n'ait que trois fonctions à appeler. Elles ne sont utilisées que dans le cas d'une collision inélastique entre deux nucléons et sont :

SINCL : Dans le chapitre 3, cette section efficace était notée σ_T . L'isospin des particules qui entrent en collision sont parmi les variables de la fonction. Ainsi, le programme sait s'il doit évaluer σ_1 ou σ_0 . Cette évaluation se fait à l'aide des équations 3.1, en utilisant donc les sections efficaces inélastiques.

SNNPI : La section efficace de production d'un pion $\sigma(NN\pi)$. La valeur de l'isospin des nucléons dans la voie d'entrée permet au programme de déterminer s'il va calculer $\sigma_1(NN\pi)$ ou $\sigma_0(NN\pi)$.

SNN2PI : La section efficace de production d'un pion $\sigma(NN\pi\pi)$. La valeur de l'isospin des nucléons dans la voie d'entrée permet au programme de déterminer s'il va calculer $\sigma_1(NN\pi\pi)$ ou $\sigma_0(NN\pi\pi)$.

C'est en comparant un nombre aléatoire à $SNNPI/SINCL$ et à $(SNNPI+SNN2PI)/SINCL$ que le programme va décider du nombre de pions produits au cours de la réaction (comme le montre la figure 3.2). La portion de code correspondant est montrée par la figure 5.1. Nous avons indiqué au moyen de « (...) » le fait qu'il manquait une partie du code à certains endroits, nous expliquerons plus loin ces parties.

```

      G=SINCL(ECM,0,ISO,IS)
      H=SNNPI(ECM,0,ISO,IS)/G
      H2=SNN2PI(ECM,ISO)/G
      H3=H+H2
      CALL RIBM(RNDM,IY1)
      IF (RNDM.GE.H3) THEN
C 3 pions's production
      NP = 3
      (...)
      ELSE
      IF (RNDM.LT.H) THEN
C Delta production :
      IF (ISO*ISO.EQ.4.OR.IS.EQ.1) GO TO 104
C 1 pion's production :
      NP=1
      (...)
      RETURN
      ENDIF
C 2 pions's production :
      NP=2
      (...)

```

FIG. 5.1

On peut voir sur la figure 3.2 que le nombre de pions NP peut prendre les valeurs 2 et 3. Par conséquent, il a fallu modifier les variables Q1, Q2, Q3 et Q4 pour les adapter au nombre plus élevé de pions (ces variables contiennent les composantes du quadrivecteur énergie impulsion du pion et sont définies à la section 2.5). Maintenant, elles ont été remplacées par des vecteurs dont les premières composantes correspondent au premier pion produit, les secondes au deuxième, etc. Il a également été nécessaire de modifier légèrement INCL en dehors de COLLIS pour prendre ces changements en compte.

5.2.2 Modifications relatives à la répartition des charges

Dans les parties de codes signalées par « (...) » sur la figure 5.1, le programme appelle la sous-routine FOUL1 (décrite à la section 4.2) pour donner aux particules une impulsion et une énergie et la sous-routine REPART qui répartit les charges sur les particules. Voyons comment fonctionne cette dernière.

La sous-routine commence par générer un nombre aléatoire RNDM (la première ligne de la figure 5.2) puis, en testant la valeur de NP, elle va se rendre dans la partie du code correspondante. Elle va ensuite identifier l'état d'isospin de la voie d'entrée pour savoir à quelle collision elle a affaire. Les états d'isospin dans la voie d'entrée sont identifiés par la variable ISO (qui est la somme d'IS1 et d'IS2, définies à la section 2.5). La variable ISO vaut 2 si c'est une collision pp , elle vaut -2 si c'est une collision nn et 0 si c'est une collision pn . En considérant la réaction $pp \rightarrow pn\pi^+\pi^+\pi^-$ le programme se rendra dans la partie du code correspondante à la condition $ISO=2$.

	CALL RIBM(RNDM,IY2)
	IF (NP-2) 300,310,350
	(...)
C	
CCC	3 PIONS PRODUCTION
C	
350	IF (ISO.EQ.2) THEN
	(...)
	ELSE

FIG. 5.2

Une fois dans cette partie du code, REPART va utiliser RNDM et le comparer aux probabilités que nous avons calculées précédemment et qui ont été précisées dans les tableaux 3.5 à 3.8. En fonction de celles-ci, REPART va se rendre à l'endroit correspondant à la réaction et attribuer les isospins aux particules (un exemple est donné par la figure 5.3). Le vecteur IQCH contient l'isospin des pions, chaque composante étant relative à un pion différent, comme c'était le cas des vecteurs Q1, Q2, Q3 et Q4.

La sous-routine INTER est appelée dans le cas où les nucléons de la voie de sortie sont différents l'un de l'autre : REPART leur laisse par ce biais l'occasion d'être intervertis avec une probabilité $1/2$. Au cours de la réaction $pp \rightarrow pn\pi^+\pi^+\pi^-$, REPART permet au premier nucléon de la voie de sortie d'être un proton ou un neutron, avec une chance sur deux, cela revient à dire que le programme permet à IS1 et IS2 d'être intervertis.

```

C pp-> pn Pi+ Pi+ Pi-
353 IQCH(1)=2
      IQCH(2)=2
      IQCH(3)=-2
      IS1=1
      IS2=-1
      CALL INTER(0.5 , IS1 , IS2 )
      RETURN

```

FIG. 5.3

Par contre, nous avons estimé qu'étant donné que les orientations des impulsions des particules étaient attribuées aléatoirement, il n'était pas nécessaire de prendre la même précaution vis-à-vis des pions parce qu'ils viennent d'être créés dans le programme.

5.3 Comparaison des résultats donnés par INCL avant et après modification

Afin de mieux comprendre les conséquences des changements que nous avons introduits dans INCL, nous avons exécuté le programme pour simuler la collision entre un proton ayant une énergie cinétique de 5 GeV et un noyau de bismuth. À cette énergie, la production de deux et de trois pions sera prise en compte par INCL. Les paramètres de la réaction, que nous avons dû entrer dans le fichier de données, sont repris dans le tableau 5.1.

Type de projectile :	Proton
Énergie cinétique du projectile :	5 GeV
Noyau cible :	Bismuth
A du noyau cible :	209
Z du noyau cible :	83
Nombre de runs :	100000

TAB. 5.1

Une des simulations que nous allons comparer a été réalisée à partir de la version d'INCL sur laquelle nous nous étions basés pour introduire les réactions de production de plusieurs pions. L'autre a été réalisée à partir de la version modifiée d'INCL.

Les histogrammes que nous avons obtenus concernent les paramètres suivants :

BIMPACT : Le paramètre d'impact du projectile sur le noyau cible.

JREMNI : Le spin intrinsèque du résidu.

EXINI : L'énergie d'excitation du noyau résiduel.

MASSINI : Le nombre de nucléons A du noyau résiduel.

MZINI : La charge Z du noyau résiduel.

KFIS : Prend la valeur 1 s'il y a eu fission et 0 dans le cas contraire. KFIS indique donc le nombre de fissions qui ont eu lieu au cours de l'exécution d'INCL.

ESTFIS : L'énergie d'excitation du noyau lors de la fission.

- IAFIS** : Le nombre de masse A du noyau lors de la fission.
- IZFIS** : La charge Z du noyau lors de la fission.
- NTRACK** : Le nombre de particules émises au cours d'un run.
- ITYP** : Prend la valeur 0 pour une particule émise pendant la cascade et 1 pour une particule émise pendant l'évaporation.
- AVV** : Le nombre de masse A des particules émises. Si la particule est un pion, **AVV** prend la valeur -1 .
- ZVV** : La charge Z des particules émises.
- ENERJ** : L'énergie cinétique des particules émises.
- PLAB** : L'impulsion des particules émises.
- TETLAB, PHILAB** : Les angles (orbital et azimuthal, respectivement) selon lesquels est émise la particule.
- MULNTOT** : Le nombre de neutrons émis au cours d'un run.
- MULNEVAP** : Le nombre de neutrons émis pendant la phase d'évaporation.
- MULNCASC** : Le nombre de neutrons émis pendant la phase de cascade.
- NUMPI** : Le nombre de pions émis au cours d'un run.
- PPION** : L'impulsion des pions émis.
- NUMPIP** : Le nombre de pions positifs π^+ émis.
- NUMPIZ** : Le nombre de pions neutres π^0 émis.
- NUMPIM** : Le nombre de pions négatifs π^- émis.

Le tableau 5.2 donne les valeurs des sections efficaces définies dans la section 2.4 et calculées par INCL. Les valeurs que nous donnons dans ce tableau proviennent des fichiers de sortie (qui portent l'extension *.out*) dont un exemple est donné dans l'annexe C. Dans ce tableau, comme par la suite, nous désignerons par « Avant » les valeurs obtenues par l'exécution d'INCL avant l'ajout des réactions de production de plusieurs pions alors que nous désignerons par « Après » les valeurs obtenues lors de l'exécution du programme après l'avoir modifié.

Sections efficaces (mb)	Avant	Après
$\sigma_{geom} =$	3802.25	3802.25
$\sigma_R =$	1764.36	1773.1
$\sigma_{prod. \pi^+} =$	633.8 ± 4.9	1667.8 ± 7.9
$\sigma_{prod. \pi^0} =$	828.1 ± 5.6	2079.1 ± 8.8
$\sigma_{prod. \pi^-} =$	633.9 ± 4.9	1667.7 ± 7.9
Nombre de fissions	11251	10372

TAB. 5.2

Comme on pouvait le penser, les sections efficaces géométrique et de réaction n'ont pas été affectées par les modifications que nous avons apportées à INCL. Par contre, pour une énergie de 5 GeV, les sections efficaces de production de pions sont quasiment triplées. On constate également que le nombre de fission a diminué.

Pour chaque paramètre, il y a donc deux histogrammes et celui qui est situé à gauche provient toujours de l'ancienne version d'INCL tandis que celui situé à droite provient de la version d'INCL qui prend en compte la production de plusieurs pions.

Dans les prochaines pages, nous allons présenter ces histogrammes et les commenter. Nous aurons besoin pour cela des valeurs moyennes de certains des paramètres que nous discuterons. Le tableau 5.3 reprend l'ensemble de ces valeurs moyennes.

Valeurs moyennes de		
	Avant	Après
Énergie d'excitation du noyau résiduel (MeV)	193.1	225.4
Énergie d'excitation du noyau lors de la fission (MeV)	37.34	36.99
Énergie cinétique des particules émises (MeV)	197.7	158.8
Nombre de masse A des noyaux résiduels	201	200
Charge Z des noyaux résiduels	80.44	80.56
Spin intrinsèque du noyau résiduel	26.74	25.8
Impulsions des particules émises (MeV/c)	454	395.2
Impulsions des pions émis (MeV/c)	771.4	697.6
Nombre de particules émises lors d'un run	25.18	29.82
Nombre de neutrons émis lors d'un run	17.21	19.09
Nombre de neutrons émis lors de la cascade	5.4	6.11
Nombre de neutrons émis lors de l'évaporation	11.81	12.98
Nombre de pions émis lors d'un run	1.19	3.05
Nombre de pions positifs émis lors d'un run	0.36	0.94
Nombre de pions neutres émis lors d'un run	0.47	1.17
Nombre de pions négatifs émis lors d'un run	0.36	0.94

TAB. 5.3

5.3.1 Comparaison de l'histogramme montrant le paramètre d'impact du projectile

Le premier paramètre que nous allons comparer est le paramètre d'impact b (défini à la page 10) du projectile sur le noyau de bismuth. On ne constate aucune différence significative entre les résultats donnés par l'ancienne version d'INCL et la nouvelle.

5.3.2 Comparaison des histogrammes se rapportant aux noyaux résiduels

Discutons des paramètres qui se rapportent aux noyaux résiduels. Les figures 5.5 montrent leur nombre de masse A et leur charges Z .

Sur la figure 5.5, on constate une légère augmentation du nombre de noyaux ayant une masse d'environ 200 et une diminution du nombre de noyaux ayant 210 nucléons. La valeur moyenne pour le nombre de masse a quant à elle diminué d'une unité. Cependant, on n'observe pas de différences de comportement au niveau des charges des noyaux résiduels ; ce qui suggère que le nombre de neutrons émis pendant la phase de cascade doit avoir légèrement augmenté suite à l'ajout des nouvelles réactions.

L'énergie d'excitation du noyau résiduel et son spin intrinsèque est montrée par la figure 5.6. On y voit que le nombre de noyaux résiduels ayant une énergie d'excitation

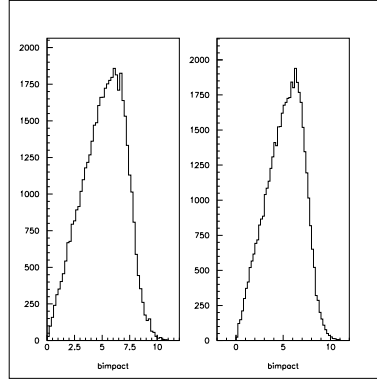


FIG. 5.4: Paramètre d'impact du proton incident sur le noyau de bismuth.

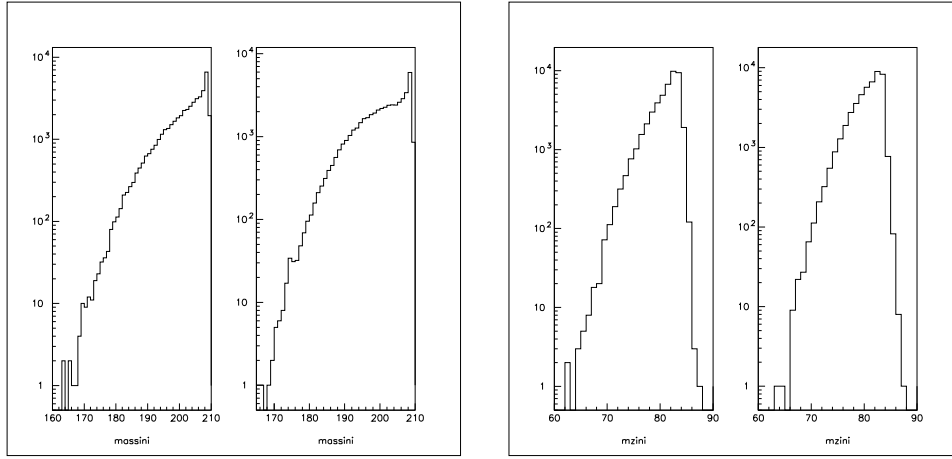
(a) Comptage du nombre de noyaux résiduels en fonction de leur nombre de masse A (b) Comptage du nombre de noyaux résiduels en fonction de leur charge Z

FIG. 5.5

d'environ 300 MeV a augmenté. De plus, la valeur moyenne de l'énergie d'excitation a aussi augmenté. Elle passe de 193.1 à 225.4 MeV.

Sur la figure 5.6(b), on voit que le spin intrinsèque du résidu diminue légèrement, ce qui est confirmé par leurs valeurs moyennes.

5.3.3 Comparaison des histogrammes se rapportant au processus de fission

Les histogrammes de la figure 5.7(a) montrent le paramètre KFIS. Rappelons que celui-ci prend la valeur 1 lorsqu'une fission se produit et la valeur 0 dans le cas contraire. Avec l'ancienne version d'INCL, le nombre de fission était de 11251 et il est passé à 10372 avec la nouvelle version du code. L'énergie d'excitation du noyau lors de la fission n'a, en moyenne, presque pas varié, mais on observe une diminution du nombre de noyaux de très basse énergie (environ 50 MeV) subissant la fission. Il semblerait donc que le déficit du nombre de fissions provient plus particulièrement des noyaux de basse énergie.

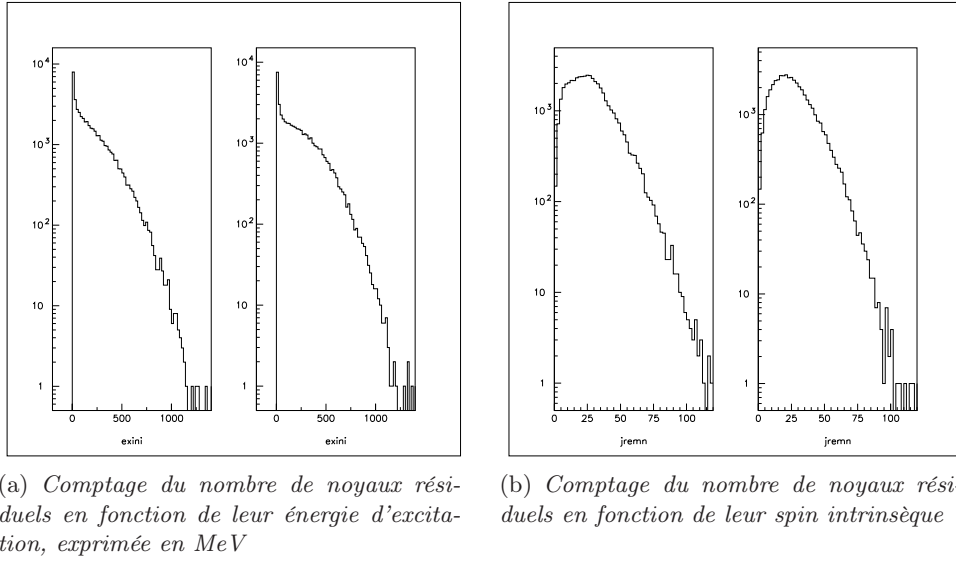


FIG. 5.6

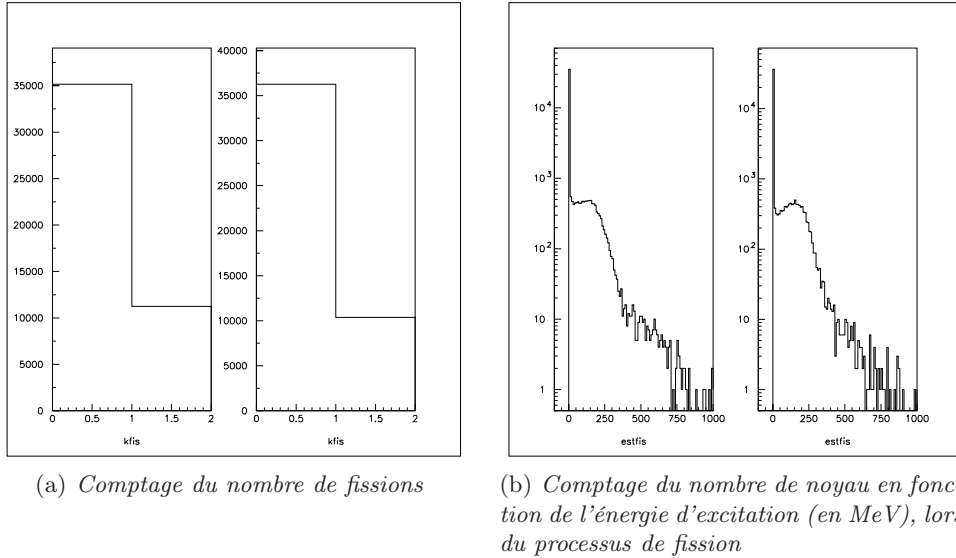


FIG. 5.7

Sur les figures 5.8(a) et 5.8(b), on ne constate pas de comportements différents selon la version du code utilisée.

5.3.4 Comparaison des histogrammes se rapportant à l'émission de particules

Nous voyons sur la figure 5.9(a) que le nombre de particules émises en cours de réaction augmente sensiblement d'une version à l'autre d'INCL. La valeur moyenne de ce paramètre passe de 25.18 à 29.82; ce qui paraît naturel puisque nous avons permis à INCL de créer plus de pions à chaque collision binaire. Nous allons comparer, dans les deux prochaines sous-sections, les évolutions du nombre de neutrons émis et du nombre

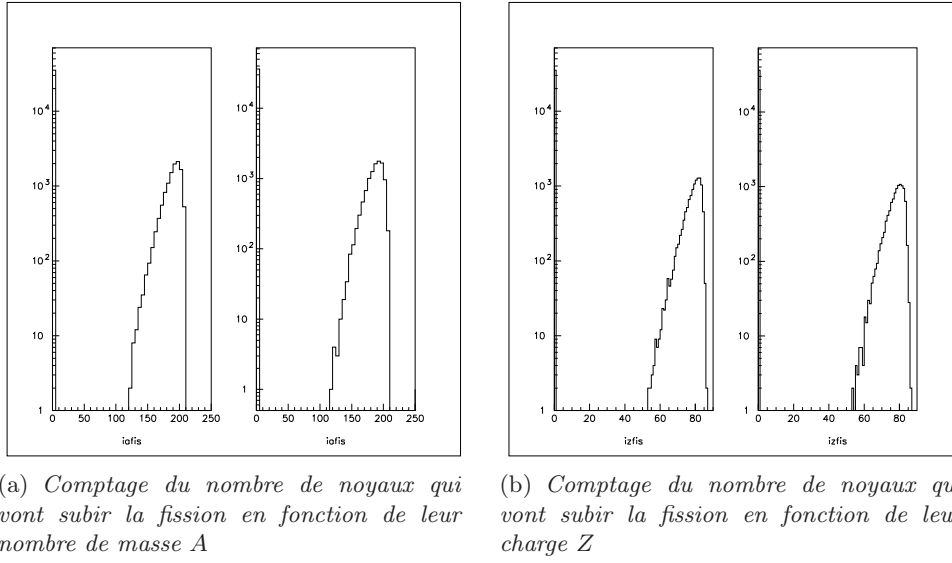


FIG. 5.8

de pions émis afin de déterminer quelle proportion de cette augmentation provient effectivement des pions. En effet, nous avons constaté une augmentation de l'énergie d'excitation du noyau résiduel et celle-ci peut conduire à l'émission d'un nombre plus élevé de neutrons.

La figure 5.9(b) montre les histogrammes du paramètre ITYP. Rappelons que celui-ci prend la valeur 0 si la particule est émise pendant la cascade et prend la valeur 1 pour une particule émise pendant l'évaporation. Nous voyons que la proportion de particules émises au cours de la cascade a légèrement diminué avec l'ajout des nouvelles réactions. Encore une fois, cela peut être dû à l'augmentation de l'énergie d'excitation du noyau résiduel.

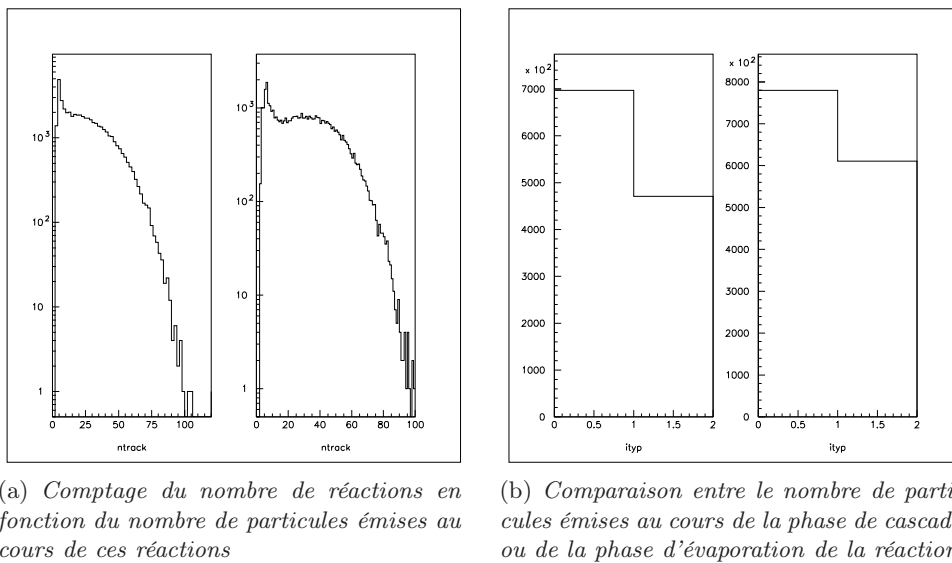
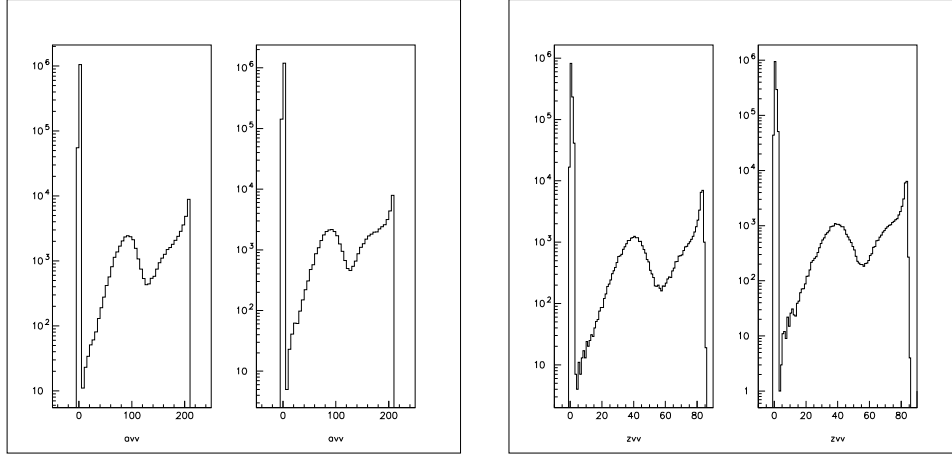


FIG. 5.9

La « bosse » qui apparaît sur les figures 5.10(a) et 5.10(b) (aux environs de 90 pour A et aux environs de 35 pour Z) est causée par le processus de fission. Elle montre donc les fragments de fissions. Le paramètre A prend la valeur -1 si la particule émise est un pion. Nous voyons que le nombre de pions émis augmente sensiblement dans l'histogramme provenant de la nouvelle version d'INCL. Nous aurons accès à plus de détails en consultant les histogrammes se rapportant directement aux pions de la sous-section 5.4.



(a) Comptage du nombre de particules qui sont émises en fonction de leur nombre de masse A

(b) Comptage du nombre de particules qui sont émises en fonction de leur charge Z

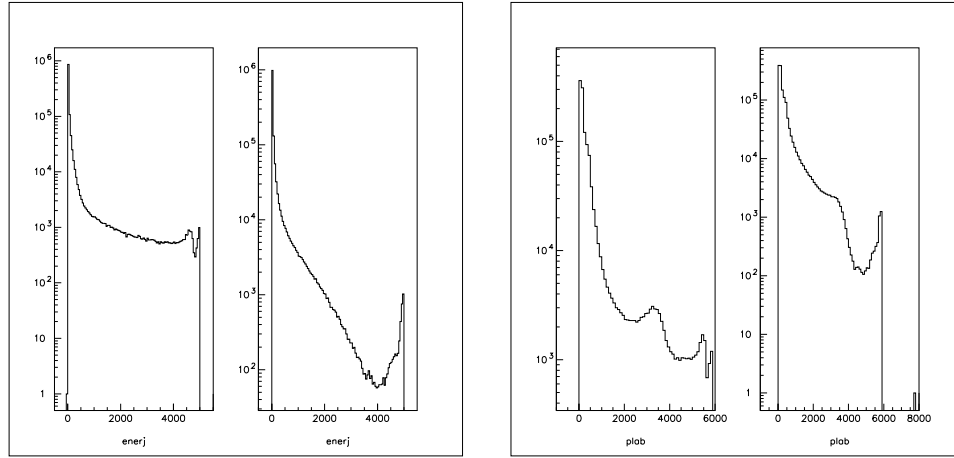
FIG. 5.10

Les figures 5.11(a) et 5.11(b) montrent le nombre de particules émises en fonction de leur énergie cinétique et de leur impulsion, respectivement. On peut voir sur la première que le creux entre les énergies inélastique et élastique s'est apparemment déplacé vers les énergies plus basses dans la nouvelle version d'INCL. On peut voir sur la seconde que la « bosse » présente aux environs de 3 GeV/c est fortement atténuée dans la nouvelle version d'INCL.

Les figures 5.12 montrent le nombre de particules émises en fonction de leurs angles d'émission. Les allures entre les deux angles sont très différentes parce que l'angle orbital est attribué aux particules en suivant une distribution alors que l'angle azimuthal est complètement aléatoire, d'où son allure constante. On peut constater sur la figure 5.12(a) que le défaut qui apparaissait aux petits angles a disparu. De plus, la distribution de l'angle orbital voit sa valeur moyenne diminuer de quelques degrés.

5.3.5 Comparaison des histogrammes se rapportant à l'émission de neutrons

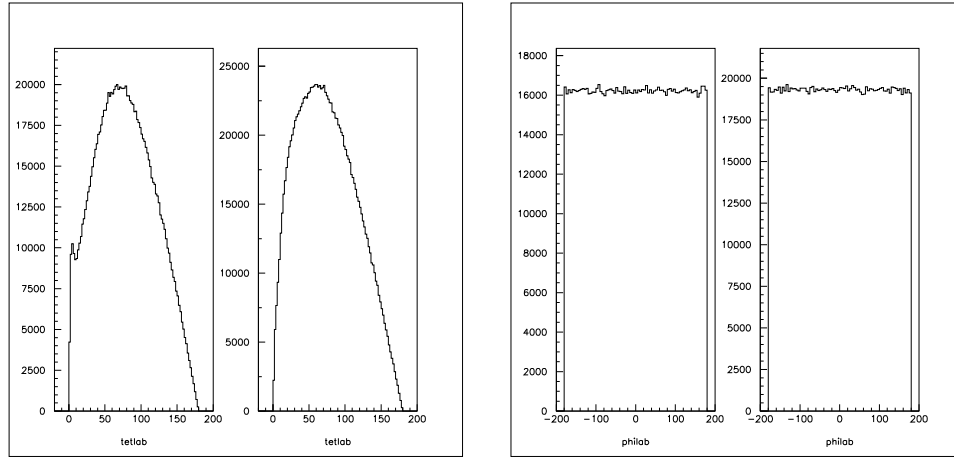
Les valeurs moyennes indiquées dans le tableau 5.3 nous apprennent que le nombre de neutrons émis pendant un run a augmenté. Toujours sur le tableau 5.3, on peut voir que cette augmentation provient surtout de la phase d'évaporation (la valeur moyenne du nombre de neutrons émis pendant la phase d'évaporation a augmenté plus que celle des neutrons émis pendant la phase de cascade intranucléaire). Nous avons déjà signalé le fait que l'augmentation de l'énergie d'excitation du noyau résiduel pouvait conduire



(a) Comptage du nombre de particules qui sont émises en fonction de leur énergie cinétique

(b) Comptage du nombre de particules qui sont émises en fonction de leur impulsion

FIG. 5.11



(a) Comptage du nombre de particules qui ont été émises en fonction de leur angle d'émission orbital θ

(b) Comptage du nombre de particules qui ont été émises en fonction de leur angle d'émission azimuthal φ

FIG. 5.12

à l'émission d'un plus grand nombre de neutrons d'évaporation et nous vérifions ici que c'est effectivement le cas.

Le comportement observé à la figure 5.13 et qui montre 2 maxima provient de l'émission de neutrons dans la phase d'évaporation (pour s'en convaincre, il suffit de regarder 5.14(b)).

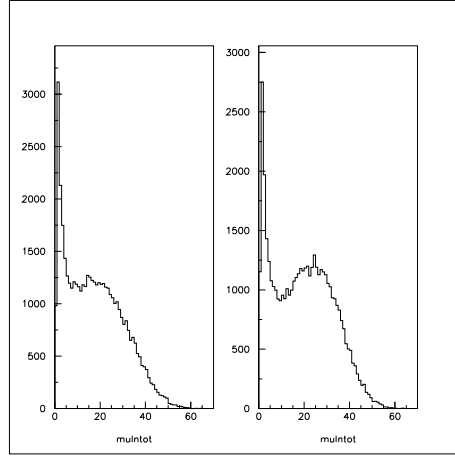
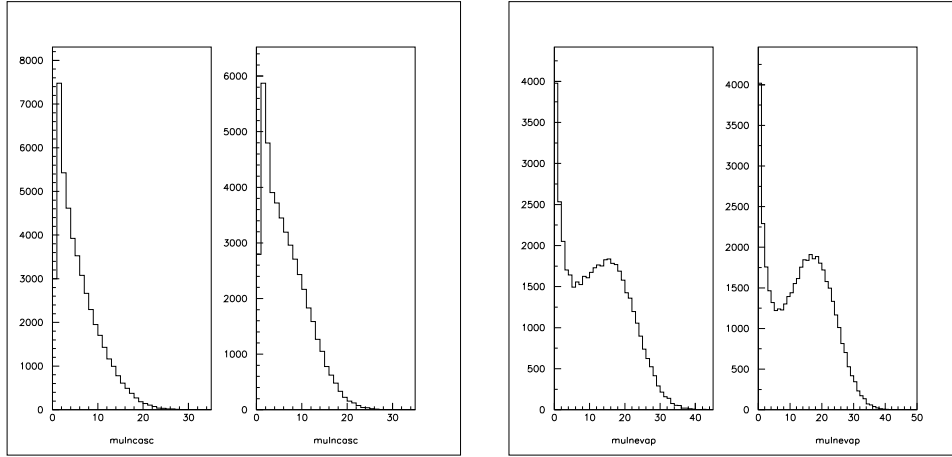
FIG. 5.13: *Comptage du nombre de neutrons émis au total au cours d'un run*(a) *Comptage du nombre de neutrons émis au total au cours de la phase de cascade intranucléaire*(b) *Comptage du nombre de neutrons émis au total au cours de la phase d'évaporation*

FIG. 5.14

5.4 Comparaison des histogrammes se rapportant à l'émission de pions

Les derniers histogrammes que nous comparons reprennent le nombre de pions produit au cours d'un seul run (sur la figure 5.15(a)) et le nombre de pions émis en fonction de leur impulsion.

La valeur moyenne du nombre de pions produits a pratiquement triplé. Comme l'énergie disponible doit être répartie entre plus de particules, la diminution de l'impulsion moyenne des pions semble naturelle. Il n'y a pas de grandes différences de comportement entre les deux histogrammes de la figure 5.15(b).

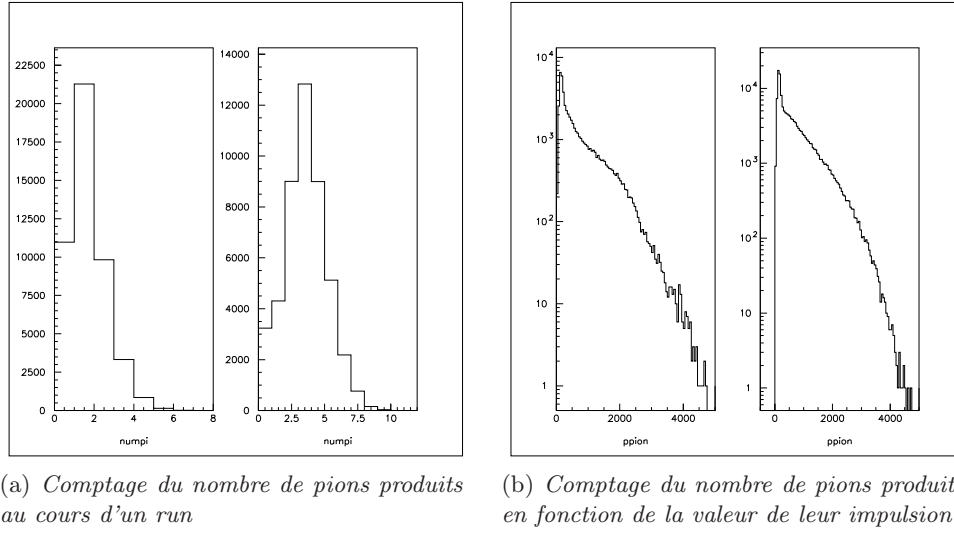


FIG. 5.15

Nous pouvons séparer le paramètre NUMPI, représenté à la figure 5.15(a) en fonction de la charge portée par les pions. Nous obtenons alors les histogrammes montrés par 5.16.

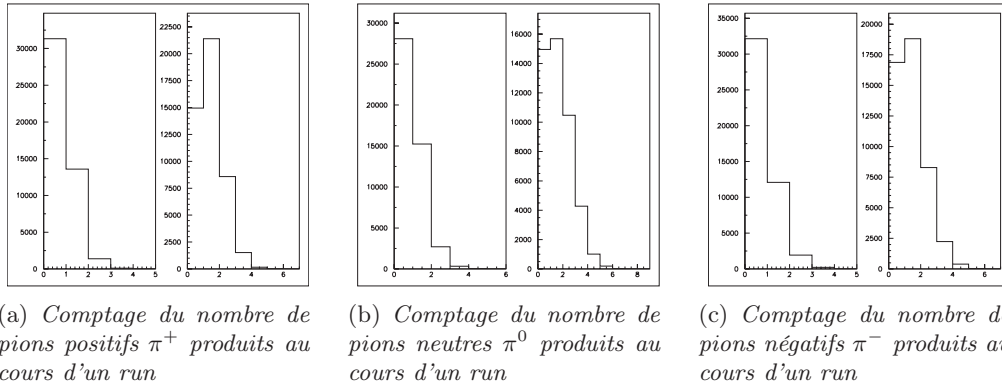


FIG. 5.16

On voit sur ces figures que le nombre de pions positifs émis est supérieur au nombre de pions négatifs émis, lui-même supérieur au nombre de pions neutres émis. L'émission de pions chargés semble donc l'emporter sur l'émission de pions neutres.

Enfin, la figure 5.17 montre l'évolution du nombre moyen de pions produits avec l'énergie du projectile pour l'ancienne et la nouvelle version d'INCL. Cette courbe a été obtenue en simulant la réaction dont les caractéristiques ont été données par le tableau 5.1. Il y a une différence entre les deux courbes dès que l'énergie du projectile dépasse 770 MeV, qui est le seuil énergétique pour la production de deux pions. On voit que cette différence s'accroît avec l'énergie.

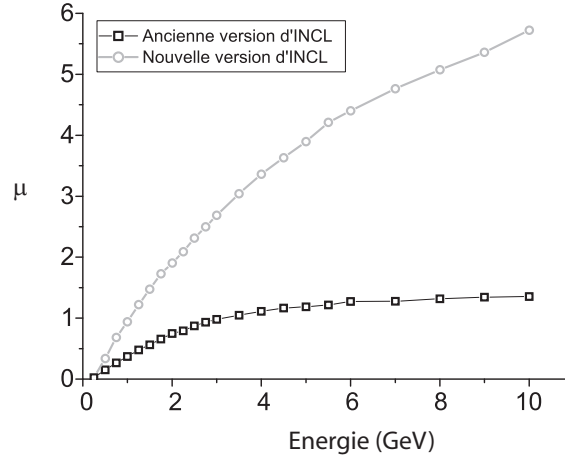


FIG. 5.17: Moyenne du nombre de pions produits au cours d'un run en fonction de l'énergie du projectile (exprimée en GeV)

Chapitre 6

Conclusions

Au cours de cette année, notre travail a consisté à introduire dans le modèle de cascade intranucléaire de Liège les réactions de production de plusieurs pions et ce, dans le cadre de l'extension du code INCL jusqu'aux énergies de 10 GeV.

Pour effectuer cette tâche, nous avons dû utiliser de nouvelles sections efficaces qui ne correspondaient pas à une voie de sortie particulière : les sections efficaces de production d'un, de deux et de trois pions. En nous basant sur l'article de Bystricky *et al.* [4], nous avons pu paramétriser ces dernières.

Pour caractériser complètement la voie de sortie de la réaction, nous avons utilisé, en plus des sections efficaces de production d'un, de deux et de trois pions, un modèle de répartition des charges. Ce dernier, qui a été exposé dans le troisième chapitre de ce mémoire, nous a permis d'évaluer les probabilités à associer aux différentes voies de sortie, pour un nombre de pions produits fixé. Les valeurs que nous avons calculées pour ces probabilités sont reprises dans les tableaux 3.5 à 3.8 et sont implémentées dans INCL par le biais de la nouvelle sous-routine REPART.

Pour les voies où deux ou trois pions sont produits (c'est-à-dire les voies finales à plus de deux particules), nous avons utilisé un modèle statistique de peuplement uniforme dans l'espace des phases. Aussi, avons-nous ajouté la sous-routine FOUL1 au code INCL, cette dernière étant capable de répartir des impulsions sur plus de deux particules. Nous avons expliqué le raisonnement sur lequel est basé cette sous-routine dans le quatrième chapitre de ce mémoire.

Les premiers résultats que nous avons obtenus avec le code modifié d'INCL ont également été présentés. Ils ont été comparés avec des résultats obtenus grâce à une ancienne version d'INCL, exécutée avec les mêmes paramètres de réaction. Nos premiers résultats peuvent être caractérisés par une multiplicité accrue de pions au-dessus de 2 GeV et par une assez grande stabilité des propriétés des nucléons émis (multiplicité, énergie moyenne, spectre) et des résidus formés. Ceci n'est pas vraiment surprenant étant donné que la section efficace inélastique nucléon-nucléon n'a pas été modifiée. Grosso modo, l'inélasticité (c'est-à-dire l'énergie déposée par la particule entrante) est restée à peu près la même, mais elle s'est répartie sur un plus grand nombre de pions.

Il convient de rappeler que l'ajout des réactions de production multiple de pions n'est que la première partie du travail à réaliser pour étendre le modèle de cascade intranucléaire. C'est la raison pour laquelle nous n'avons pas présenté, dans le présent

travail, de comparaison avec l'expérience.

Forts du succès que constitue la réalisation de la première étape de notre travail, nous pouvons nous tourner vers la suite de notre projet. C'est-à-dire que nous pouvons envisager l'ajout de canaux inélastiques dans la voie pion-nucléon et envisager aussi l'ajout de voies de sortie relatives à la production de particules étranges (kaons et hyperons) pour les collisions nucléon-nucléon. Les premiers sont actuellement négligés dans INCL, car ils ne deviennent importants que pour des pions ayant une impulsion supérieure à 0.7 GeV/c. La production de particules étranges, quant à elle, est un ordre de grandeur plus petite que celle des pions dans le domaine d'énergie qui nous intéresse.

Annexe A

Coefficients de Clebsch-Gordan

Voici les tables qui permettent de trouver la valeur des coefficients de Clebsch-Gordan. Nous n'avons repris que les tables qui sont utilisées au cours de ce travail. On peut trouver les tables manquantes dans [32].

Notation:	$\begin{matrix} J & J & \dots \\ M & M & \dots \end{matrix}$
$\begin{matrix} m_1 & m_2 \\ m_1 & m_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}$	$\begin{matrix} \text{Coefficients} \end{matrix}$

1×1	$\begin{matrix} 2 & 1 \\ +1 & +1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & 1 \\ +1 & +1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & 1 \\ +1 & +1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & 1 \\ +1 & +1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & 1 \\ +1 & +1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$
2×1	$\begin{matrix} 3 & 2 \\ +2 & +1 \\ +1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 & 2 \\ +2 & +1 \\ +1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 & 2 \\ +2 & +1 \\ +1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 & 2 \\ +2 & +1 \\ +1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 & 2 \\ +2 & +1 \\ +1 & 0 \end{matrix}$
$1/2 \times 1/2$	$\begin{matrix} 1 & 0 \\ +1/2 & -1/2 \\ -1/2 & +1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 \\ +1/2 & -1/2 \\ -1/2 & +1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 \\ +1/2 & -1/2 \\ -1/2 & +1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 \\ +1/2 & -1/2 \\ -1/2 & +1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 \\ +1/2 & -1/2 \\ -1/2 & +1/2 \end{matrix}$
$3/2 \times 1/2$	$\begin{matrix} 2 & 1 \\ +3/2 & +1/2 \\ +1/2 & -1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & 1 \\ +3/2 & +1/2 \\ +1/2 & -1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & 1 \\ +3/2 & +1/2 \\ +1/2 & -1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & 1 \\ +3/2 & +1/2 \\ +1/2 & -1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & 1 \\ +3/2 & +1/2 \\ +1/2 & -1/2 \end{matrix}$

$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 j_1 j_2 J M \rangle$	$= (-1)^{j_1 - j_1 - j_2} \langle j_2 j_1 m_2 m_1 j_2 j_1 J M \rangle$
---	--

FIG. A.1: *Coefficients de Clebsch-Gordan*

Un radical est sous-entendu dans les tables de coefficients, e.g. $-\frac{3}{10}$ doit se lire $-\sqrt{\frac{3}{10}}$.

Nous conseillons également la référence [31] pour de plus amples détails sur ces coefficients.

Annexe B

Invariant de l'espace des phases : Définition

En mécanique quantique, on peut déterminer la probabilité pour un système, qui se trouvait initialement dans l'état $|i\rangle$, de subir une transition vers l'état final $|f\rangle$. Il faut pour cela connaître l'évolution que l'état $|i\rangle$ va subir par le biais des interactions, représentées à l'aide de la matrice unitaire S . Ensuite, la probabilité est donnée par la projection de l'état ainsi créé $|i'\rangle$ sur l'état final considéré. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\text{probabilité}(i \rightarrow f) &= |\langle f | i' \rangle|^2 \\ &= |\langle f | S | i \rangle|^2\end{aligned}$$

Dans la plupart des réactions, l'état initial $|i\rangle$ est un état comprenant deux particules. Pour la suite, nous considérerons que l'état $|i\rangle$ représente deux nucléons qui entrent en collision. L'état final $|f\rangle$, quant-à-lui, peut représenter un nombre de particules n qui peut-être plus élevé que 2.

Rappelons qu'un état quantique est entièrement défini par l'ensemble des nombres quantiques de chacune des particules qu'il contient. On peut donc le définir en précisant les grandeurs suivantes telles que le quadri-vecteur impulsion p , l'isospin T , le nombre de nucléons, etc.

Écrivons les différents états pour une collision entre deux particules neutres. Si la voie de sortie comprend n particules neutres, les états vont s'écrire :

$$\begin{aligned}|i\rangle &= |p_1 p_2\rangle \\ |i'\rangle &= S |p_1 p_2\rangle \\ |f\rangle &= |p'_1 p'_2 \dots p'_n\rangle\end{aligned}$$

La probabilité d'une transition depuis l'état $|i\rangle$ vers l'état $|f\rangle$ peut dès lors être réécrite comme :

$$P(i \rightarrow f) = |\langle p'_1 \dots p'_n | S | p_1 p_2 \rangle|^2$$

Nous savons que la matrice S est Lorentz-invariante. Ce qui revient à dire que le quadri-vecteur impulsion p est conservé lors de la transition. Remarquons qu'une autre façon d'indiquer cette conservation est l'utilisation du facteur : $\delta^4(P_i - P_f)$.

Si nous définissons un ensemble d'états finaux $|f\rangle$ pour lesquels le système a un nombre de particules fixé, soit n . Si nous notons cet ensemble F (donc $F = \{|f\rangle\}$) et si nous négligeons les facteurs de normalisation, la probabilité pour qu'un état initial $|i\rangle$ aille dans un des états finaux $|f\rangle$ appartenant à F est :

$$P(i \rightarrow F) \propto \sum_{f \in F} |\langle f | S | i \rangle|^2 \quad (\text{B.1})$$

On peut choisir les états finaux pour qu'ils puissent être décrits par les quadri-vecteurs impulsion p'_i des particules. Dans ce cas la somme $\sum_{f \in F}$ représente une intégration restreinte à ces impulsions finales. On peut définir la fonction :

$$S(p'_1 \dots p'_n | p_1 p_2) = \delta^4(p'_1 + p'_2 + \dots + p'_n - p_1 - p_2) |\langle p'_1 \dots p'_n | S | p_1 p_2 \rangle|^2$$

On considère un modèle statistique où, pour un nombre de particules n fixé, n'importe quel état $|f\rangle$ peut être atteint avec la même probabilité. Par conséquent la fonction $S(p'_1 \dots p'_n | p_1 p_2)$ est constante et on peut écrire la probabilité de transition sous la forme :

$$\begin{aligned} P(i \rightarrow f) &\propto \overbrace{\int d^4 p'_1 \int d^4 p'_2 \dots \int d^4 p'_n}^{\text{Intégration sur } F} \delta^4(p'_1 + p'_2 + \dots + p'_n - p_1 - p_2) \\ &\times \prod_{i=1}^n \delta(p_i'^2 - m_i^2) S(p'_1 \dots p'_n | p_1 p_2) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Comme la probabilité de transition est invariante et S est constante, le reste des facteurs doit être, lui aussi, invariant, c'est pourquoi on définit « *Invariant de l'espace des phases* » :

$$R_F \equiv \underbrace{\int \dots \int}_F \prod_{i=1}^n \delta(p_i'^2 - m_i^2) \delta^4(p'_1 + p'_2 + \dots + p'_n - p_1 - p_2) d^4 p'_1 \dots p'_n$$

On peut alors appeler F une « région de l'espace des phases ». Si F est invariant, alors R_F est un invariant relativiste. En utilisant la relation B.2, on peut maintenant écrire la probabilité pour que n particules soient présentes dans l'état final :

$$P_n \propto \underbrace{\int \dots \int \prod_{i=1}^n d^4 p'_i \delta(p_i'^2 - m_i^2) \delta^4(\sum_{j=1}^n p'_j - p_1 - p_2)}_{R_n} S(p'_1 \dots p'_n | p_1 p_2) \quad (\text{B.3})$$

Et réécrire l'*Invariant de l'espace des phases* :

$$R_n(P, m_1 \dots m_n) = \int \dots \int \prod_{i=1}^n d^4 p_i \delta(p_i^2 - m_i^2) \delta^4\left(\sum_{j=1}^n p_j - P\right) \quad (\text{B.4})$$

Il est également possible de factoriser P_n pour ne plus avoir d'intégration que sur les coordonnées spatiales. Mais il convient alors de remarquer que les facteurs ainsi obtenus ne sont pas Lorentz-invariants. On peut alors définir *Invariant de l'espace des phases* dont l'expression est :

$$\rho_n(E, m_1 \dots m_n) = \int \dots \int \delta \left(E - \sum_{i=1}^n \epsilon_i \right) \delta^3 \left(\sum p_i \right) d^3 p_1 \dots d^3 p_n \quad (\text{B.5})$$

Annexe C

Exemple de fichier .out donné par INCL

Après l'exécution d'INCL, voici le fichier rendu par le programme et qui est décrit à la section 2.4.

Calculation starts : 08/07/2006 17:33:41

Thin_Target_Monte-Carlo_Spallation_Code (TT_MSC)

on est parti pour 100000 runs
type projectile, energie projectile 1. 5000.
Masse, Charge cible 209. 83.

```
***** VERSION INCL 4.2*****
* stopping time and potential can be changed      ****
* input of first random numbers                   ****
* bimpact is output instead of sepa as in INCL 3.0 **
* implementation of surface W.S.                  4/2000 ***
* interaction only with "participants"            4/2000 ***
* CDPP:Coherent Dynamical Pauli Principle 5/2001 ***
* Paris momentum density for the deuteron 4/2001 ***
* ND-NN (*3) and phase space Delta width 4/2001 ***
***** INCL 4.0 -> INCL4.1 *****
* No lower cut on pi-N interaction                 2/2002 ****
* Init of first avatars for participants 2/2002 ***
* Output of excit energy for absorption 2/2002 ***
***** INCL 4.1 -> INCL4.2 *****
* Increased absorption below 100 MeV 5/2002 ****
* Coulomb transmis. on projo from LAHET 5/2002 ****
* light targets(gaussian A<5 MHO 4<A<19) 6/2002 ****
*****
* Corrections 11/2003 numerical from J Hendricks *
*          L of the remnant (from actual c.m.) *
V0 nuclear potential (A>5) 45.(MeV) and scaling stopping time factor: 1.
Fermi momentum: 270.339355 Binding energy: 6.83093262
R*P cell for pauli stat: 3.18479991 200.
Pauli strict (1) or statistic (0): YOUR CHOICE: 0
```

Your choice, NOSURF= -2 means

```

NOSURF=-2, with W.S. density and INCL4 stopping time
NOSURF=1, sharp surface
NOSURF=0, with W.S. density, time without B dep
NOSURF=-1, with W.S. density, time with B dep.
RMAXWS=R0+XFOISA*A, XFOISA= 8. above A=19

K1,K2,K3,K4,K5,K6 5 0 0 2 1 0
  Meaning: K1=5, REFERENCE FRAME=LAB SYSTEM
           K2=0, RELATIVISTIC KINEMATICS
           K3=0, DELTAS ARE PRODUCED
           K4=2, DELTA HAS A EXPONENTIALLY RANDOM LIFETIME
           K5=1, DELTA-NUCLEON=DELTA-DELTA=NUCLEON-NUCLEON ELASTIC X-SECTION

*****
Nuclear density for nucleus Z,A: 83 209 imat= 1
Wood-Saxon density, R0= 6.649 A= 0.544
FOR INCIDENT Nucleons OR Pions, RMAX= 11.001
and geometrical (PI*RMAXws**2) reaction cross section (mb) is: 3802.256
RMAXws for d/t/3He/4He: 13.101 12.801 12.801 12.631

*****
Deuteron density in q space from PARIS potential
77 exact values from 0 to 3.19 fm-1
*****
PARAMETERS of KHSv3p (fission-evapo)

IFIS 1
OPTSHP 0
OPTEMD 1
OPTCHA 1
AKAP 10.
BET 1.5
HOMEGA 1.
KOEFF 1.
OPTCOL 0
OPTLES 0
EEFAC 2.
OPTAFAN 0
AV 0.073
AS 0.095
AK 0.
*****
Output file for NTUPLE:
memold.hbk
icoup, proba_trans 99775 0.997744024

END OF SHOTS
      11251 fissions
      53372 transp nuclear      225 transp coulomb
      0 absorptions
      0 retirages cascade (nopart=-100)
Geometrical cross section (mb) 3802.25269
React. cross section (mb): 1764.35925

```

```
Bad momentum conservation without fission: 653 0 0
Bad momentum conservation with fission: 10985 1 0
(number of evts above respect. 0.01, 2 and 5 MeV/c)

last random 1825168475

3.254+/- 0.008 neutrons (0-2 MeV) per interaction
          3.576 MeV = Mean energy carried by ALL of them
9.483+/- 0.014 neutrons (2-20 MeV) per interaction
          65.818 MeV = Mean energy carried by ALL of them
4.471+/- 0.010 neutrons (above 20 MeV) per interaction
          1832.472 MeV = Mean energy carried by ALL of them

sigma prod pions+ 633.873535 mb, +/- 4.90932512
sigma prod pions0 828.016541 mb, +/- 5.61099672
sigma prod pions- 633.949585 mb, +/- 4.90961981
Sigma (x,no pi) 1764.35925 mb, +/- 8.19056797
Calculation ends : 08/07/2006 17:53:01
Execution time is : 1159.43 sec
```

Bibliographie

- [1] T. E. Mason, *The spallation Neutron Source*, AccApp05 Conf., Venice (2005).
- [2] W. Gudowski, Nucl. Phys A 654 (1999) 436 C.
- [3] J. Cugnon et P. Henrotte, Eur. Phys. J. A16 (2003) 393.
- [4] J. Bystricky, P. La France, F. Lehar, F. Perrot, T. Siemiarczuk and P. Winternitz, J. Physique **48** (1987), 1901-1924.
- [5] R. Hagerdon, Nuovo Cimento, 15, 434 (1960)
- [6] R. Hagerdon, Nuovo Cimento, 25, 1017 (1962)
- [7] R. Serber, Phys. Rev. **72**, 1114 (1947).
- [8] J. Cugnon % P. Henrotte, proceedings of the SARE, OECD Publications (2000).
- [9] J. Cugnon ant P. Henrotte, *Nuclear Reaction Mechanisms : from Compound Nucleus to Multiple Scattering*, University of Louvain-la-Neuve (2002)
- [10] A. Boudard, communication privée (2006).
- [11] J. Cugnon, D. L'Hôte and J. Vandermeulen, Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B 111 (1996), 215-220.
- [12] D. Pelowitz (Ed.), *MCNPX User's Manual*. Version 2.5.0, Los Alamos report LA-CP-05-0369 (2005).
- [13] A. Boudard, J. Cugnon, S. Leray and C. Volant, Phys. Rev. C **66** (2002), 044615
- [14] <http://wwwasd.web.cern.ch/wwwasd/paw/>
- [15] J. Cugnon, S. Leray, E. Martinez, Y. Patin and S. Vuillier, Phys. Rev. C **56** (1997), 2431-2439.
- [16] F. A. Cucionotta, J. W. Wilson and J. W. Norbury, NASA/TM-1998-208722
- [17] J. Cugnon and M.C. Lemaire, Nucl. Phys A 489 (1988) 781
- [18] J. Cugnon, C. Volant and S. Vuillier, Nucl. Phys. A **620**, 475 (1997).
- [19] S. Leray *et al.*, Nucl. Instrum. Meth. A **562** (2006) 806.
- [20] B. J. VerWest and R. A. Arndt, Phys. Rev. C **25** (1982), 1979-1985.
- [21] A. H. Rosenfeld, Phys. Rev. **96** (1954), 139.
- [22] V. I. Borodulin, R. N. Rogalev and S. R. Slabospitsky, arXiv :hep-ph/9507456. CITATION = HEP-PH 9507456 ;
- [23] A. Baldini and al., *Numerical Data and Functional Relationships in Science and Technology, Total Cross-Sections for Reactions of High Energy Particles*, H. Schopper, Landolt-Bornstein, New Series, Group 1, Vol. 12, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (1988).
- [24] I. R. Kenyon, *Elementary particle physics*, Routledge and Kegan Paul, London, 1987.
- [25] R. Hagerdon, *Relativistic Kinematics, A guide to the kinematic problems of high-energy physics*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam (1963).
- [26] T. M. R. Ellis, *Fortran 77 Programming*, Addison-Wesley (1990).

- [27] A. Das and T. Ferbel, *Introduction to Nuclear and Particle Physics*, World Scientific Publishing, Singapore (2005).
- [28] J. L. Basdevant et J. Dalibard, *Mécanique quantique*, Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau (2002)
- [29] D. F. Jackson, *Nuclear Reactions*, Methuen, Netherlands (1970).
- [30] P. Fröbrich and R. Lipperheide, *Theory of Nuclear Reactions*, Clarendon Press, Oxford (1996).
- [31] F. Stancu, *Group Theory in Subnuclear Physics*, Clarendon Press, Oxford (1996).
- [32] C. Caso *et al.*, *Particle Physics Booklet*, Eur. Phys. J. **C3** (1998) 1.
- [33] P. Henrotte, Thèse de doctorat, Université de Liège (2005).
- [34] H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics*, Benjamin/Cummings (1982).
- [35] J. D. Walecka, *Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics*, Oxford University press (1995)
- [36] K. R. Gieck, *Formulaire Technique*, Gieck Verlag, Germering (1997).
- [37] B. Desgraupes, *L^AT_EX Apprentissage, guide et référence*, Vuibert, Paris (2003).
- [38] [http ://fr.wikipedia.org/wiki/Accueil](http://fr.wikipedia.org/wiki/Accueil)
- [39] [http ://scienceworld.wolfram.com/](http://scienceworld.wolfram.com/)
- [40] [http ://www.europhysicsnews.com/full/17/article2/article2.html](http://www.europhysicsnews.com/full/17/article2/article2.html)