

Table des matières

1	Introduction	5
2	Etat de la question	7
2.1	Le modèle de Black et Scholes	7
2.2	Résolution analytique du modèle de Black et Scholes	9
2.3	Résolution par la méthode de Monte-Carlo du modèle de Black et Scholes . .	11
2.4	Résolution par la méthode des éléments finis du modèle de Black et Scholes .	12
2.4.1	Idées générales	12
2.4.2	Approximation aux éléments finis	12
2.4.3	Obtention de la forme faible	13
2.4.4	Fonctions d'interpolation	14
2.4.5	Modèle aux éléments finis	15
3	Objectifs du travail	17
4	Développement de la discrétisation aux éléments finis du modèle de Black et Scholes	19
4.1	Formulation du problème	19
4.2	Discrétisation spatiale du problème	20
4.3	Discrétisation temporelle du problème	21
4.4	Remarques sur la forme du système linéaire	23
4.5	Remarques sur le calcul des intégrales	23
4.6	Remarques sur les conditions aux limites	24
5	Application de la méthode des éléments finis au pricing d'options européennes	25
5.1	Présentation du cas étudié	25
5.2	Présentation des codes de calcul	27
5.3	Etude de la convergence de la méthode des éléments finis	27

5.3.1	Nombre d'éléments	28
5.3.2	Degré des polynômes d'interpolation	29
5.3.3	Valeur de S_{max}	31
5.3.4	Taille des pas de temps	32
5.4	Comparaison de la méthode des éléments finis et de la méthode de Monte-Carlo	32
6	Application de la méthode des éléments finis au calcul des grecques	39
6.1	Introduction	39
6.2	Développement de l'équation du Delta (Δ)	39
6.3	Développement des équations des autres grecques	40
6.3.1	Gamma (Γ)	40
6.3.2	Vega (ν)	40
6.3.3	Theta (Θ)	40
6.3.4	Rho (ρ)	41
6.4	Applications	41
7	Application de la méthode des éléments finis au pricing des options exotiques	45
7.1	Introduction	45
7.2	Obtention du modèle aux éléments finis	46
7.3	Démarche	46
7.4	Résultats	46
8	Conclusions	48
9	Bibliographie	50

Nomenclature

E	Strike (\$)
ES	Erreur standard
\vec{f}	Vecteur source
$[K]$	Matrice de raideur
M	Changement de variable pour la résolution de l'équation de Black et Scholes
$N(\bar{X}, \sigma)$	Loi normale de moyenne \bar{X} et d'écart-type σ
n	Nombre de noeuds dans un maillage aux éléments finis
n_{int}	Nombre de points d'intégration
\vec{Q}	Vecteur des conditions de Neumann
R	Résidu
r	Taux d'intérêt sans risque (%)
S	Prix de l'action sous-jacente (\$)
S_d	Barrière inférieure d'une option double barrière (\$)
S_u	Barrière supérieure d'une option double barrière (\$)
t	Temps (années)
T	Maturité (années)
u	Changement de variable pour la résolution de l'équation de Black et Scholes
U	Forme générale de la solution d'une équation aux dérivées partielles
U_h	Forme approchée de la solution d'une équation aux dérivées partielles
V	Valeur de l'option (\$)
W	Processus de Wiener
w_l	Poids de Gauss
x	Changement de variable pour la résolution de l'équation de Black et Scholes
Y	Suite de nombres aléatoires
Lettres grecques	
Δ	Delta d'une option
Γ	Gamma d'une option

ν	Vega d'une option
ρ	Rho d'une option
ϵ	Axe unitaire de l'élément parent
ϵ_l	Points de Gauss
τ	Changement de variable pour la résolution de l'équation de Black et Scholes
$\phi_i(x)$	Valeur de la fonction de forme associée au noeud i au point x
π	Valeur d'un portefeuille (\$)
σ	Volatilité (\$)
μ	Trend

Chapitre 1

Introduction

Les équations aux dérivées partielles sont omniprésentes dans le domaine des sciences. Les équations de Navier-Stokes en mécanique des fluides [10], les équations de Maxwell en électromagnétisme [11], l'équation de Fourier en conduction de chaleur [5] ou l'équation de Fick en diffusion [4] n'en sont que quelques exemples.

En finance, l'équation de Black et Scholes est certainement l'équation aux dérivées partielles la plus connue. Elle permet de calculer le prix d'options européennes sur actions, mais est également à la base de modèles plus complexes tels que les modèles à volatilité stochastique, les modèles avec sauts, les modèles d'options sur taux d'intérêt ou de change, tous le domaine des options exotiques, les options sur plusieurs sous-jacents,...

La résolution des équations aux dérivées partielles est un domaine des mathématiques très ancien et pourtant toujours en plein développement. Si, dans certaines conditions, des solutions analytiques existent à ces équations, il est la plupart du temps nécessaire de recourir à des méthodes numériques de résolution dès que la complexité du problème augmente.

Parmi les méthodes numériques de résolution des équations aux dérivées partielles, la méthode des éléments finis s'est affirmée dès son invention comme une méthode de premier choix. Elle présente en effet plusieurs avantages tels que l'utilisation de maillages non-structurés (ce qui permet de résoudre les modèles sur des géométries complexes), l'utilisation de polynômes d'interpolation d'ordre non limité (ce qui permet d'obtenir de bonnes approximations de solutions parfois très complexes), ou encore la capacité de gérer un grand nombre de conditions aux limites différentes.

La complexité de la méthode des éléments finis, comparée par exemple à la méthode des différences finies, fait qu'elle a longtemps été réservée à des domaines très spécifiques tels que la résistance des matériaux ou la mécanique des fluides. Cependant, ses avantages indéniables poussent de plus en plus de scientifiques de toutes disciplines à dépasser les difficultés d'apprentissage pour évaluer ce que la méthode des éléments finis peut leur apporter. La finance ne fait pas exception.

Dans ce travail, la méthode des éléments finis sera appliquée à quelques problèmes courants des mathématiques financières. Quand ce sera possible, les résultats obtenus seront comparés à ceux fournis par une méthode largement utilisée en finance, la méthode de Monte-Carlo. L'objectif n'est évidemment pas d'être exhaustif, mais de tenter de dégager les forces et les faiblesses de la méthode pour ce qui est du domaine des mathématiques financières.

Chapitre 2

Etat de la question

2.1 Le modèle de Black et Scholes

Le modèle le plus connu de pricing d'options a été présenté par Black et Scholes [1]. Ce modèle est basé sur les hypothèses suivantes :

1. Le sous-jacent de l'option évolue suivant un mouvement brownien géométrique ;

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW \quad (2.1)$$

2. Le taux d'intérêt sans risque r est constant ;
3. Les échanges se font de manière continue et sans frais de transactions ;
4. Le marché est sans opportunité d'arbitrage ;
5. Les ventes à découvert sont permises.

Le prix d'une option sur un sous jacent décrit par l'équation 2.1 est une fonction de S et de t . En appliquant le lemme d'Itô il est obtenu :

$$dV = \left(\frac{\delta V}{\delta S} \mu S + \frac{\delta V}{\delta t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} \right) dt + \frac{\delta V}{\delta S} \sigma S dW \quad (2.2)$$

où dV et dS sont des changements infinitésimaux de la valeur de l'option et du sous-jacent sur l'incrément de temps dt . Pour en incrément de temps court mais non infinitésimal Δt , les équations 2.1 et 2.2 deviennent :

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta W \quad (2.3)$$

$$\Delta V = \left(\frac{\delta V}{\delta S} \mu S + \frac{\delta V}{\delta t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} \right) \Delta t + \frac{\delta V}{\delta S} \sigma S \Delta W \quad (2.4)$$

Le but est maintenant de trouver un portefeuille contenant une certaine quantité d'options et de sous-jacents rendant ce portefeuille sans risque, c'est-à-dire faisant disparaître les termes ΔW dans les équations ci-dessus. Ce portefeuille est composé d'une position courte sur l'option et de l'achat de $\frac{\delta V}{\delta S}$ sous-jacents. La valeur Π de ce portefeuille est

$$\Pi = \frac{\delta V}{\delta S} S - V \quad (2.5)$$

Une équation décrivant un petit changement de valeur de ce portefeuille peut être écrite à partir des équations précédentes :

$$\Delta\Pi = \frac{\delta V}{\delta S} \Delta S - \Delta V \quad (2.6)$$

$$= - \left(\frac{\delta V}{\delta t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} \right) \Delta t \quad (2.7)$$

Comme ce portefeuille est sans-risque, il doit rapporter le même montant qu'un placement de Π sur un actif sans risque.

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t \quad (2.8)$$

$$= r \left(\frac{\delta V}{\delta S} S - V \right) \Delta t \quad (2.9)$$

Et en égalant les deux expressions pour $\Delta\Pi$

$$- \left(\frac{\delta V}{\delta t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} \right) \Delta t = r \left(\frac{\delta V}{\delta S} S - V \right) \Delta t \quad (2.10)$$

$$\frac{\delta V}{\delta t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} = r \left(V - \frac{\delta V}{\delta S} S \right) \quad (2.11)$$

La forme finale du modèle de Black et Scholes est obtenue

$$\frac{\delta V}{\delta t} + \sigma^2 S^2 \frac{1}{2} \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} + rS \frac{\delta V}{\delta S} - rV = 0 \quad (2.12)$$

L'équation 2.12 est une équation aux dérivées partielles dont la forme est appelée "équation d'advection-diffusion-reaction" car elle présente :

- Un terme **d'advection** ou encore **de transport** $rS \frac{\delta V}{\delta S}$;
- Un terme **de diffusion** $\sigma^2 S^2 \frac{1}{2} \frac{\delta^2 V}{\delta S^2}$;
- Un terme **de réaction** rV

Les équations d'advection-diffusion-reaction font l'objet de nombreuses publications dans le domaine de l'analyse numérique, car dans certaines situations leur résolution s'avère très périlleuse.

Pour être résolue, l'équation ci-dessus devra être complétée par des **conditions initiales** et des **conditions aux limites**.

Les conditions initiales sont les valeurs de V au temps $t = 0$. Dans le cas du pricing d'options, les valeurs connues sont les pay-off de l'option à la maturité de celle-ci en fonction des valeurs possibles du sous-jacent. Il apparaît donc un premier problème dans le sens où V est connu non en $t = 0$ mais en $t = T$, cette forme d'équation est dénommée en anglais comme étant **backward in time**.

Les conditions aux limites sont les valeurs de V aux bornes du domaine étudié. Dans le cas du pricing d'une option européenne, le domaine est unidimensionnel et consiste dans les différentes valeurs possibles de S . La borne inférieure du domaine est $S = 0$ et à cet endroit il peut être supposé que $V = 0$. La borne supérieure est plus problématique car S n'est pas borné à droite. Il sera vu plus tard comment s'affranchir de cette difficulté.

Dans la suite du texte, trois méthodes de résolution de l'équation 2.12 seront présentées. Dans certaines situations (options simples), il est possible de transformer l'équation 2.12 en une forme semblable à l'équation de la chaleur, et d'en tirer une solution analytique. Cette approche sera présentée dans la section 2.2.

Quand une solution analytique n'est pas disponible, des méthodes numériques doivent être envisagées afin d'obtenir des solutions approchées du problème. La section 2.3 présentera la méthode de Monte-Carlo, qui est une méthode probabiliste basée sur la génération de "chemins" pris par le sous-jacent à l'aide de l'équation 2.1.

La section 2.4 présentera la méthode des éléments finis, qui est une méthode moderne de résolution des équations aux dérivées partielles basée sur une approximation polynomiale définie par morceaux de la solution de l'équation 2.12.

2.2 Résolution analytique du modèle de Black et Scholes

Les changements de variables suivants peuvent être appliqués à l'équation 2.12 [6] :

$$V = e^{-r(T-t)} u(x, \tau) \quad (2.13)$$

$$\tau = \frac{2M}{\sigma^2} (T - t) \quad (2.14)$$

$$M = r - \frac{\sigma^2}{2} \quad (2.15)$$

$$x = \frac{2M}{\sigma^2} \left(\log \left(\frac{S}{E} \right) + M(T - t) \right) \quad (2.16)$$

(2.17)

l'équation devient alors :

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = \frac{\delta u}{\delta \tau} \quad (2.18)$$

qui est connue comme étant l'équation de la chaleur. Dans le cas d'un call européen, le pay-off final $(S - K)^+$ devient, par le changement de variable :

$$u(x, 0) = E e^{x \frac{\sigma^2}{2M}} - E \quad (2.19)$$

et la solution de l'équation est

$$u(x, \tau) = EN \left(\frac{x_*}{\sqrt{2\tau}} \right) e^{-\frac{x_*^2 - x^2}{4\tau}} - EN \left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}} \right) \quad (2.20)$$

où

$$x^* = x + \frac{\tau \sigma^2}{M} \quad (2.21)$$

en repassant par les variables initiales, la solution analytique de l'équation de Black et Scholes dans le cas d'un call européen est obtenue :

$$V = S_0 N(d_1) - E e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (2.22)$$

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{E} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T - t))}{\sigma \sqrt{T - t}} \quad (2.23)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t} \quad (2.24)$$

2.3 Résolution par la méthode de Monte-Carlo du modèle de Black et Scholes

La méthode de Monte-Carlo est une des techniques les plus générales pour le pricing d'options [13]. Le principe de la méthode est essentiellement d'utiliser la loi des grands nombres pour évaluer l'espérance des gains à maturité de l'option.

La loi des grands nombres stipule que si Y_n est une séquence de variables aléatoires identiquement distribuées et indépendantes, la relation suivante est valide

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_j = E(Y) \quad (2.25)$$

Si le sous-jacent évolue selon un brownien géométrique, des "chemins" possibles de sa valeur au cours du temps peuvent être générés à partir de la solution de l'équation 2.1 (obtenue après changement de mesure de probabilité vers la mesure risque neutre)

$$S(t) = S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}N(0,1)} \quad (2.26)$$

La méthode de Monte-Carlo consiste donc à générer des nombres aléatoires selon une distribution normale, les insérer dans l'équation 2.26 et calculer la valeur du pay-off à maturité de l'option. En répétant cette opération un grand nombre de fois, la moyenne des valeurs obtenues va converger vers l'espérance des pay-off, qu'il suffira d'actualiser pour obtenir le prix initial de l'option.

L'erreur sur la valeur obtenue est d'ordre $\theta(\frac{1}{\sqrt{N}})$, ce qui impose l'utilisation d'un grand nombre de données (généralement plusieurs millions) pour obtenir une solution acceptable. L'erreur sur le résultat obtenu avec la génération de n "chemins" peut être évaluée par la relation

$$ES = \sqrt{\frac{\sigma}{n}} \quad (2.27)$$

ou ES est l'erreur standard de la solution et σ est la variance des solutions obtenues.

Les avantages de la méthode de Monte-Carlo sont certainement :

- sa simplicité ;
- sa facilité d'implémentation ;

- sa grande généralité (pratiquement tous les types d'options peuvent être prisés de cette manière).

Ses inconvénients sont :

- sa faible vitesse de convergence. Elle impose la génération d'un très grand nombre de "chemins" du sous-jacent pour obtenir des solutions précises, ce qui se traduit par des temps de calcul relativement longs ;
- elle ne permet pas de calculer de manière directe les grecques de l'option.

2.4 Résolution par la méthode des éléments finis du modèle de Black et Scholes

2.4.1 Idées générales

La méthode des éléments finis peut-être caractérisée par les 3 principes suivants [8] :

1. Le domaine de la solution est représenté comme un ensemble de sous-domaines appelés **éléments finis**.
2. Sur chaque élément, la solution est représentée par une combinaison linéaire de polynômes et de paramètres indéterminés. Les relations entre les paramètres sont établies à partir de l'équation aux dérivées partielles à résoudre.
3. Les relations algébriques de tous les éléments sont assemblées dans le modèle global, qui se matérialise en un système linéaire à résoudre.

Dans cette revue bibliographique, les principales étapes de la méthode des éléments finis seront décrites dans le cas de la résolution de l'équation de la chaleur (équation 2.28), en régime stationnaire. L'application de la méthode au pricing d'options sera présentée dans la partie résultats de ce travail.

$$-\frac{\delta}{\delta x} \left(a \frac{\delta u}{\delta x} \right) + cu = f \quad 0 < x < L \quad (2.28)$$

2.4.2 Approximation aux éléments finis

Le domaine (0,L) du problème consiste en tous les points entre $x = 0$ et $x = L$, ces deux valeurs étant les frontières du domaine. Dans la méthode des éléments finis, le domaine (0,L) est décomposé en un certain nombre d'intervallels appelés **éléments finis**. Chacun de ceux-ci est de longueur h_e et est localisé entre les points $x = x_a$ et $x = x_b$ qui sont les coordonnées

des frontières de l'élément selon l'axe x.

Dans la méthode des éléments finis, une solution approchée u_h^e de la solution u de l'équation 2.28 sur l'élément e est recherchée sous la forme :

$$u_h^e = \sum_{j=1}^n u_j^e \phi_j^e(x) \quad (2.29)$$

où $\phi_j^e(x)$ sont des fonctions à sélectionner, u_j^e sont des constantes à déterminer telles que l'équation 2.29 satisfasse l'équation 2.28 ainsi que les conditions aux limites spécifiées et n est le nombre de noeuds dans le domaine.

En introduisant l'équation 2.29 dans l'équation 2.28, il peut être défini un résidu généralement non nul :

$$-\frac{\delta}{\delta x} \left(a \frac{\delta u_h^e}{\delta x} \right) + cu_h^e - f = R^e \quad (2.30)$$

L'objectif est de déterminer les valeurs des constantes u_j^e telles que ce résidu soit nul sur l'élément. Plusieurs variantes de la méthode des éléments finis existent selon la façon dont cette condition est exprimée. La méthode de Galerkin [7] consiste à écrire :

$$\int_{x_a}^{x_b} \phi_i^e(x) R^e dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.31)$$

2.4.3 Obtention de la forme faible

Quelques modifications doivent être apportées à l'équation 2.31 afin d'obtenir le même degré de différentiation pour les fonctions u_h^e et ϕ_j^e .

L'équation 2.31 peut s'écrire :

$$0 = \int_{x_a}^{x_b} \phi_i^e \left(-\frac{\delta}{\delta x} \left(a \frac{\delta u_h^e}{\delta x} \right) + cu_h^e - f \right) dx \quad (2.32)$$

par intégration par partie cette équation devient :

$$0 = \int_{x_a}^{x_b} \left(a \frac{\delta \phi_i^e}{\delta x} \frac{\delta u_h^e}{\delta x} + c \phi_i^e u_h^e - \phi_i^e f \right) dx - \left[\phi_i^e a \frac{\delta u_h^e}{\delta x} \right]_{x_a}^{x_b} \quad (2.33)$$

où le terme $\left[\phi_i^e a \frac{\delta u_h^e}{\delta x} \right]_{x_a}^{x_b}$, représente ce qui est appelé les **conditions de Neumann** du système, c'est à dire des valeurs imposées à la variable dite secondaire $a \frac{\delta u_h^e}{\delta x}$ aux limites du

domaine. Ces conditions sont également appelées **naturelles** car elles apparaissent naturellement dans la forme aux éléments finis, contrairement aux conditions de type **Dirichlet** qui seront présentées plus tard.

2.4.4 Fonctions d'interpolation

Le choix des fonctions d'interpolation, appelées aussi **fonctions de forme** n'est pas anodin, et seuls les 2 types de fonction les plus simples et aussi les plus populaires seront présentés ici.

Les plus simples des fonctions d'interpolation sont définies par 2 polynômes du premier degré associés à chaque noeud de l'élément. Dès lors, l'approximation u_h^e de la solution u devient :

$$u_h^e(x) = \phi_1^e(x)u_1^e + \phi_2^e(x)u_2^e = \sum_{j=1}^2 \phi_j^e(x)u_j^e \quad (2.34)$$

où $u_1^e = u_a^e$ et $u_2^e = u_b^e$ sont les valeurs nodales de u_h^e et les fonctions ϕ sont définies par

$$\phi_1^e(x) = \frac{x_b - x}{x_b - x_a} \quad (2.35)$$

$$\phi_2^e(x) = \frac{x - x_a}{x_b - x_a} \quad (2.36)$$

Il peut être remarqué que les fonctions de forme satisfont à la propriété :

$$\sum_{j=1}^n \phi_j^e(x) = 1 \quad (2.37)$$

De la même manière, u_h^e peut être approximé par des polynômes du second degré.

$$u_h^e(x) = \phi_1^e(x)u_1^e + \phi_2^e(x)u_2^e + \phi_3^e(x)u_3^e = \sum_{j=1}^3 \phi_j^e(x)u_j^e \quad (2.38)$$

où $u_1^e = u_h^e(x_1)$, $u_2^e = u_h^e(x_2)$ et $u_3^e = u_h^e(x_3)$ avec $x_1 = x_a$, $x_2 = x_a + \frac{h_e}{2}$ et $x_3 = x_b$.

Les fonctions L sont définies par

$$\phi_1^e(x) = \left(\frac{x - x_2^e}{x_1^e - x_2^e} \right) \left(\frac{x - x_3^e}{x_1^e - x_3^e} \right) \quad (2.39)$$

$$\phi_2^e(x) = \left(\frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} \right) \left(\frac{x - x_3^e}{x_2^e - x_3^e} \right) \quad (2.40)$$

$$\phi_3^e(x) = \left(\frac{x - x_1^e}{x_3^e - x_1^e} \right) \left(\frac{x - x_2^e}{x_3^e - x_2^e} \right) \quad (2.41)$$

Il peut être remarqué que l'utilisation de fonctions de forme quadratiques impose l'utilisation d'un noeud supplémentaire sur l'élément, placé ici au centre de l'intervalle $[x_a, x_b]$.

La forme générale de la solution approchée de l'équation aux dérivées partielles, pour un degré n, est donc donnée par :

$$u_h^e(x) = \sum_{j=1}^n \phi_j^e(x) u_j^e \quad (2.42)$$

2.4.5 Modèle aux éléments finis

En remplaçant l'équation 2.42 dans l'équation 2.33, n équations algébriques de la forme suivante sont obtenues :

$$0 = \sum_{j=1}^n K_{ij}^e u_j^e - f_i^e - Q_i^e \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.43)$$

où :

$$K_{ij}^e = \int_{x_a}^{x_b} \left(a \frac{\delta \phi_i^e}{\delta x} \frac{\delta \phi_j^e}{\delta x} + c \phi_i^e \phi_j^e \right) dx \quad (2.44)$$

$$f_i^e = \int_{x_a}^{x_b} f \phi_i^e dx \quad (2.45)$$

$$Q_i^e = \left[\phi_i^e a \frac{\delta U_h^e}{\delta x} \right]_{x_a}^{x_b} \quad (2.46)$$

Au final, la méthode des éléments finis se réduit donc à un système linéaire de forme :

$$[K] \vec{u}_h = \vec{f} + \vec{Q} \quad (2.47)$$

où $[K]$ est la matrice des coefficients, appelée parfois matrice de raideur, \vec{u}_h est le vecteur des inconnues, \vec{f} est le vecteur source et \vec{Q} est le vecteur des contraintes de Neumann.

Chapitre 3

Objectifs du travail

L'objectif principal de ce travail est d'appliquer la méthode des éléments finis au pricing d'options, et d'étudier ses avantages et ses inconvénients par rapport à la méthode de Monte-Carlo.

Dans un premier temps, la dérivation complète d'un modèle aux éléments finis pour la résolution de l'équation de Black et Scholes dans le cas d'options européennes classiques sera présentée. Ce paragraphe permettra de décrire de manière précise les étapes nécessaires à la résolution d'une équation d'advection-diffusion-reaction en régime transitoire par la méthode des éléments finis.

Le paragraphe suivant sera dédié à l'application pratique du modèle développé précédemment. Le prix d'options européennes sur l'action Google pour deux maturités différentes et différents prix d'exercice seront établis par la méthode de Monte-Carlo et la méthode des éléments finis. Cette étape permettra de comparer les propriétés de convergence et de précision de ces deux méthodes, ainsi que leurs besoins respectifs en temps de calcul. Les prix obtenus seront également comparés à ceux obtenus à partir de la solution analytique de l'équation de Black et Scholes ainsi qu'aux prix pratiqués sur le marché.

Les grecques sont des paramètres importants des options. Elles interviennent aussi bien dans les stratégies de couverture que de trading, et à ce titre il est indispensable d'en obtenir des valeurs précises. L'application de la méthode des éléments finis à ce domaine sera explicitée. La méthode sera appliquée au calcul des grecques pour les options sur l'action Google présentées au chapitre précédent. Dans le cas des options européennes classiques, des solutions analytiques existent pour ces différents paramètres, ce qui permettra de vérifier la

précision des résultats obtenus.

La dernière partie de ce travail consistera à appliquer la méthode des éléments finis au pricing d'options exotiques. Il sera montré comment certaines de ces options peuvent être pricées en modifiant les conditions aux limites de l'équation de Black et Scholes. Les options exotiques étant tradées *over the counter*, il n'est pas possible de se baser sur des prix de marché pour vérifier l'exactitude du modèle. Les résultats seront donc comparés à d'autres solutions publiées dans la littérature.

Chapitre 4

Développement de la discréétisation aux éléments finis du modèle de Black et Scholes

4.1 Formulation du problème

L'équation de Black et Scholes pour un call européen de maturité T et de strike E est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{\delta V}{\delta t} + \sigma^2 S^2 \frac{1}{2} \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} + rS \frac{\delta V}{\delta S} - rV = 0 \\ V(S, T) = \max(0, S - E) \\ V(0, t) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

$$V(S, T) = \max(0, S - E) \quad (4.2)$$

$$V(0, t) = 0 \quad (4.3)$$

Un problème particulier lié à la résolution de cette équation est que le domaine de résolution est non-borné. En effet, aucune limite supérieure n'est pour l'instant donnée à S. La méthode des éléments finis étant développée pour des domaines bornés (Il existe une méthode appelée *éléments infinis* [2, 3], qui ne sera pas abordée ici), celui-ci devra donc être tronqué. Plusieurs solutions existent :

1. Plus l'option devient *in-the-money*, plus sa valeur se rapproche de celle du sous-jacent à laquelle on enlève la valeur actualisée du strike. Cela revient à choisir une valeur de S assez grande S_{max} pour laquelle il est fixé :

$$V(S_{max}, t) = S_{max} - Ee^{-r(T-t)} \quad (4.4)$$

2. Il peut également être postulé que pour des valeurs de S assez élevées, la valeur de l'option évolue au même rythme que le sous-jacent, ce qui revient à écrire :

$$\frac{\delta V(S_{max}, t)}{\delta S} = 1 \quad (4.5)$$

3. Une dernière possibilité est d'imposer la dérivée seconde de la valeur de l'option égale à zéro pour des valeurs de S assez élevées :

$$\frac{\delta^2 V(S_{max}, t)}{\delta S^2} = 0 \quad (4.6)$$

Dans ce travail, seule la première méthode sera utilisée, de part sa simplicité d'implémentation.

4.2 Discrétisation spatiale du problème

En remplaçant la dérivée temporelle $\frac{\delta V}{\delta t}$ par \dot{u} , les dérivées premières et secondes respectivement par u' et u'' , et en remplaçant les coefficients de l'équation 4.1 par les paramètres a_0 , a_1 et a_2 , celle-ci peut s'écrire de façon générale :

$$\dot{u} = a_0 u'' + a_1 u' + a_2 u + f \quad (4.7)$$

qui peut se réécrire¹

$$\dot{u} = (a_0 u')' + (a_1 - a_0') u' + a_2 u + f \quad (4.8)$$

En remplaçant u par sa forme approchée u_h , un résidu peut être calculé :

$$R = (a_0 u_h')' + (a_1 - a_0') u_h' + a_2 u_h + f - \dot{u}_h \quad (4.9)$$

Et la minimisation de ce résidu par la méthode de Galerkin donne :

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} \phi_i R dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.10)$$

où x_{min} et x_{max} sont les bornes de l'élément. En remplaçant R par son expression il est obtenu

1. $a_0 u'' = (a_0 u')' - a_0' u'$

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} \phi_i \left[(a_0 u'_h)' + (a_1 - a'_0) u'_h + a_2 u_h + f - u_h \right] dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.11)$$

Le premier terme de l'intégrale peut être intégré pour obtenir l'équation suivante

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} \phi_i (a_0 u'_h)' dx = [\phi_i a_0 u'_h]_{x_{min}}^{x_{max}} - \int_{x_{min}}^{x_{max}} \phi'_i a_0 u'_h dx \quad (4.12)$$

où le premier terme s'annule entre éléments adjacents et ne subsiste que pour les éléments frontières dans le cas où des conditions aux limites de type Neumann sont définies. Étant donné qu'il a été décidé en 4.1 d'utiliser des conditions aux limites de type Dirichlet ($V(S_{min}, t) = 0$ et $V(S_{max}, t) = S_{max} - Ee^{-r(T-t)}$), ce terme est tout simplement éliminé de la formulation.

Après ces modifications, l'équation 4.11 devient :

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} \left[\phi'_i a_0 u'_h - \phi_i (a_1 - a'_0) u'_h - \phi_i a_2 u_h - \phi_i f + \phi_i u_h \right] dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.13)$$

dans laquelle u_h peut être remplacé par sa définition pour donner :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left[\int_{x_{min}}^{x_{max}} \phi_i \phi_j dx \right] \dot{u}_j + \sum_{j=1}^n \left[\int_{x_{min}}^{x_{max}} \left(a_0 \phi'_i \phi'_j - (a_1 - a'_0) \phi_i \phi'_j - a_2 \phi_i \phi_j \right) dx \right] u_j \\ &= \int_{x_{min}}^{x_{max}} \phi_i f dx \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (4.14)$$

ou sous forme matricielle

$$[A]\vec{\dot{u}} + [B]\vec{u} = \vec{Q} \quad (4.15)$$

4.3 Discréétisation temporelle du problème

Le système 4.15 ne peut être résolu à ce stade, car sont inconnues les valeurs de u mais aussi de leurs dérivées temporelles \dot{u} . Tout comme la discréétisation spatiale, la méthode de discréétisation temporelle consistera à diviser le domaine $[0, T]$ en un certain nombre d'intervalles de temps pour lesquels le système pourra être résolu. L'algorithme de résolution consistera donc à parcourir le domaine temporel d'intervalle en intervalle en utilisant à chaque étape

les solutions obtenues à l'étape précédente.

De nombreuses formes de discréétisation temporelle existent, et présentent des propriétés différentes. Le domaine est trop vaste pour être étudié dans le cadre de ce travail, et seules les principales implications du choix seront présentées. Un schéma de discréétisation temporelle se caractérise par trois éléments importants :

1. *Son caractère explicite ou implicite* : les schémas explicites sont nommés de cette façon car les solutions aux temps $n+1$ y sont données en fonction des solutions aux temps n . Ces schémas présentent le gros avantage de ne pas nécessiter de résolution de système linéaire, et donc d'économiser une grosse quantité de temps de calcul. Les schémas implicites expriment par contre les solutions aux temps $n+1$ non seulement en fonction des solutions aux temps n , mais également en fonction des valeurs des autres noeuds aux temps $n+1$, ce qui impose la résolution à chaque pas de temps d'un système d'équations de taille égale au nombre de noeuds du domaine.
2. *Sa stabilité* : certains schémas (de manière générale les schémas explicites), imposent des restrictions quant à la taille des pas de temps utilisés. Pour des pas de temps supérieurs aux limites autorisées, les erreurs de calcul s'additionnent et mènent à des solutions complètement erronées. Le gain de temps réalisé par l'utilisation d'un schéma explicite (en ne résolvant pas de système d'équation à chaque pas de temps) peut donc être perdu par l'obligation d'utiliser des pas de temps extrêmement petits.
3. *Sa convergence* : la précision de la solution dépend fortement du degré de raffinement de la discréétisation spatiale, mais aussi temporelle. La vitesse avec laquelle la précision obtenue augmente quand le pas de temps diminue est appelée la propriété de convergence du schéma temporel.

Dans ce travail, le schéma dit de **Crank-Nickolson** sera utilisé. C'est un schéma implicite inconditionnellement stable présentant de bonnes propriétés de convergence.

Dans ce schéma, le système 4.15 est remplacé par le suivant :

$$[A] \frac{1}{\Delta t} (\vec{u}_n - \vec{u}_{n-1}) = \frac{(\vec{Q} - [B]\vec{u})_n - (\vec{Q} - [B]\vec{u})_{n-1}}{2} \quad (4.16)$$

qui se ramène à un système linéaire classique de type :

$$[M]\vec{x} = \vec{b} \quad (4.17)$$

4.4 Remarques sur la forme du système linéaire

Les fonctions de forme n'étant définies qu'à l'élément par élément, les seuls éléments non-nuls de la ligne i du système d'équations obtenu correspondent aux noeuds k appartenant au même élément que le noeud i . Les matrices obtenues par la méthode des éléments finis comportent donc un grand nombre d'éléments nuls. Ce type de matrice est appelé *matrice creuse*. La taille de stockage nécessaire et la complexité algorithmique des opérations matricielles pour ce type de matrice sont fortement réduits par rapport à ceux obtenus pour des matrices pleines.

4.5 Remarques sur le calcul des intégrales

Les coefficients des matrices obtenues par la méthode des éléments finis sont exprimés sous la forme d'intégrales. La précision des résultats dépendra fortement de la précision avec laquelle ces intégrales seront calculées. S'il est possible de calculer de façon analytique les intégrales correspondantes à chaque coefficient, cette façon de faire est très peu utilisée en pratique. En effet, le code obtenu serait entièrement dédié à un type de problème, et devrait être presque entièrement réécrit pour chaque petite modification du modèle à résoudre. Des méthodes numériques d'intégration sont donc le plus souvent utilisées, et particulièrement la méthode des quadratures de Gauss.

Dans cette méthode, soit à évaluer l'intégrale suivante

$$\int_{\Omega_e} f(x)dx \quad (4.18)$$

Cette intégrale, qui est définie sur un domaine quelconque (les dimensions de l'élément ne sont pas définies), est ramenée à une intégrale sur un *élément parent* par un changement de coordonnées

$$\int_{\Omega_e} f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x(\epsilon)) \frac{\delta x}{\delta \epsilon} d\epsilon = \int_{-1}^1 g(\epsilon)d\epsilon \quad (4.19)$$

et la méthode des quadratures de Gauss est définie de la manière suivante

$$\int_{-1}^1 g(\epsilon)d\epsilon = \sum_{l=1}^{n_{int}} g(\epsilon_l)W_l \quad (4.20)$$

où n_{int} est le nombre de points de Gauss, ϵ_l sont les points de Gauss et W_l sont les poids associés. Des tables sont disponibles donnant les valeurs de ces points de Gauss et poids en fonction de l'ordre des fonctions à intégrer.

Les exemples précédents, donnés en une dimension, se généralisent facilement aux cas à plusieurs dimensions.

4.6 Remarques sur les conditions aux limites

Au stade du système 4.17, aucune restriction n'est encore imposée aux valeurs de u aux noeuds $x = 0$ et $x = S_{max}$. L'algorithme suivant permet de contraindre le système tout en préservant le caractère symétrique de la matrice M [19].

Soit à imposer la k-ième valeur de u à la valeur T_k :

1. On multiplie la k-ième colonne de la matrice M par la valeur T_k , et on la soustrait au vecteur B ;
2. La k-ième ligne et la k-ième colonne de M sont remplacées par une ligne et une colonne de zéros ;
3. Le terme $M_{k,k}$ est remplacé par 1 ;
4. La composante B_k est remplacée par T_k .

Chapitre 5

Application de la méthode des éléments finis au pricing d'options européennes

5.1 Présentation du cas étudié

La méthode des éléments finis sera appliquée dans ce chapitre au pricing d'options européennes sur l'action Google, cotées le 20 et le 21 janvier 2011. Les prix historiques de l'action Google ont été trouvés sur le site internet Google Finance [18], et les prix des options associées sur la base de données en ligne CBOE [17]. Le taux sans risque en Dollars a été quant à lui trouvé sur le site de la réserve fédérale américaine [16].

La figure 5.1 présente l'évolution du prix journalier de clôture de l'action Google entre le 21 juin 2010 et le 19 janvier 2011. A partir de ces prix, la volatilité annuelle des rendements est évaluée à 29,4 %. Le taux sans risque en Dollars au 20 janvier 2011 était de 0,18%.

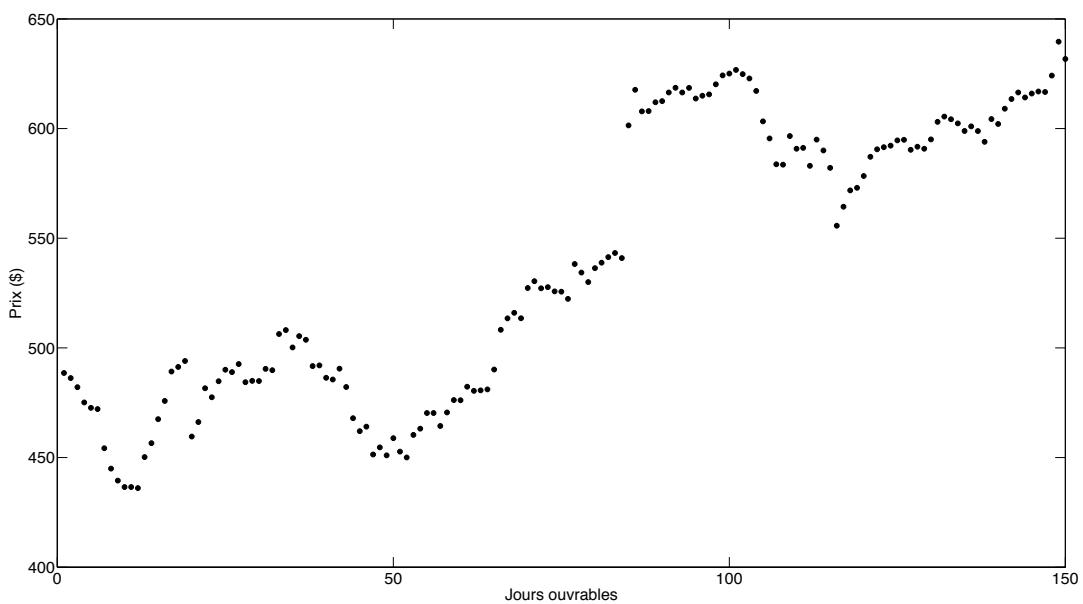


FIGURE 5.1 – Evolution du prix journalier de clôture de l'action Google entre le 21 juin 2010 et le 19 janvier 2011

5.2 Présentation des codes de calcul

Dans ce chapitre, les prix d'options call à un mois et un an sur l'action Google au 20 janvier 2011 seront calculés par la méthode de Monte-Carlo et des éléments finis.

Ces deux méthodes ont été implémentées en C++ en utilisant le paradigme de la programmation orientée objet [12].

La génération des nombres aléatoires pour la méthode de Monte-Carlo a été réalisée à l'aide des librairies Boost [15].

Les codes aux éléments finis ont été réalisés avec l'aide des librairies Getfem++ [14], ces dernières fournissent des interfaces permettant l'import/export de maillages dans différents formats, différentes méthodes d'intégration, des procédures génériques pour la constructions des matrices, des solveurs directs et itératifs pour la résolution de systèmes d'équations linéaires, . . .

5.3 Etude de la convergence de la méthode des éléments finis

Plusieurs paramètres influencent la précision avec laquelle la solution de l'équation de Black et Scholes est approchée par la méthode des éléments finis :

1. Le nombre d'éléments utilisés sur le domaine ;
2. Le degré des polynômes d'interpolation utilisés ;
3. La valeur de S_{max} utilisée pour tronquer le domaine ;
4. La taille des pas de temps utilisés.

Augmenter le nombre d'éléments, utiliser un degré de polynôme élevé, prendre une valeur de S_{max} élevée et un pas de temps le plus petit possible sont autant de solutions permettant d'améliorer la précision de la méthode. Cependant, toutes ces approches s'accompagnent également d'une augmentation significative du temps de calcul nécessaire à la résolution du modèle.

Dans cette section, ces différents "leviers" permettant d'améliorer la précision de la méthode seront comparés des points de vue de leur *convergence* et de leur *coût de calcul*. La

convergence est étudiée en réalisant un graphique donnant la précision obtenue en fonction des valeurs du paramètre étudié (toutes choses restant égales par ailleurs). Le coût de calcul est quand à lui estimé par le temps de calcul CPU nécessaire à la résolution du modèle en fonction des valeurs du paramètre étudié (toutes choses restant égales par ailleurs).

L'option modèle considérée dans les prochaines sections sera une option call européenne sur l'action Google, de maturité 1 an et cotée le 20 janvier 2011. La précision sera estimée en calculant la norme L2 de l'erreur de la manière suivante :

1. Un maillage de 10000 éléments entre $S = 0$ et $S = S_{max}$ est réalisé ;
2. La solution analytique de l'équation de Black et Scholes est utilisée pour calculer le prix de l'option sur chaque point du maillage ;
3. La solution approchée obtenue par éléments finis est interpolée sur le nouveau maillage à l'aide de l'équation

$$U(x) = \sum_{i=1}^n \tau_i(x) U_i \quad (5.1)$$

4. La norme L2 peut ensuite être calculée grâce à l'équation

$$L2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (U_{e,i} - U_{a,i})^2} \quad (5.2)$$

où $U_{e,i}$ et $U_{a,i}$ sont respectivement les solutions par éléments finis et analytique de l'équation de black et Scholes au noeud i .

5.3.1 Nombre d'éléments

Dans cette section, l'évolution de la convergence et du coût de calcul de la méthode des éléments finis en fonction du nombre d'éléments utilisé sera étudiée. Afin de mettre en évidence l'impact du nombre d'éléments, les autres paramètres ayant une influence sur les résultats obtenus seront constants et de :

- Nombre de pas de temps = 1000
- $S_{max} = 5000$
- Ordre des polynômes = 1

La figure 5.2 présente l'évolution de la norme L2 de l'erreur ainsi que le temps de calcul CPU nécessaire à la résolution du modèle pour un nombre d'éléments variant entre 10 et 1000.

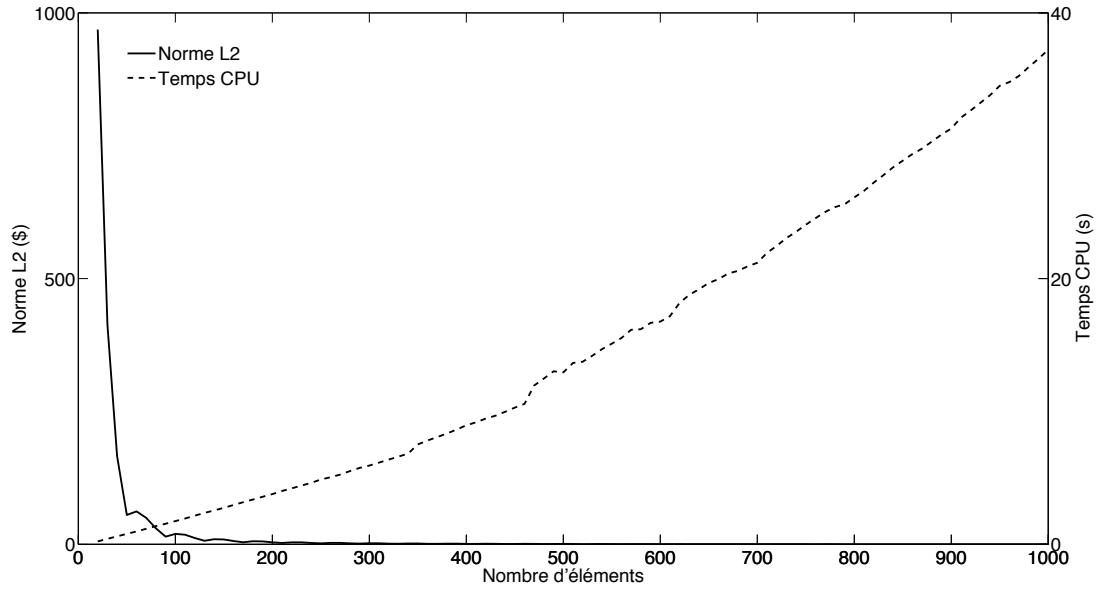


FIGURE 5.2 – Evolution de la norme L2 de l’erreur et du temps de calcul en fonction du nombre d’éléments utilisés.

Comme attendu, l’erreur diminue avec l’augmentation du nombre d’éléments tandis que le temps de calcul augmente. La norme L2 ne diminue plus de manière significative quand le nombre d’éléments est supérieur à 500, tandis que le temps de calcul augmente lui logiquement de façon constante.

5.3.2 Degré des polynômes d’interpolation

Afin d’étudier l’impact du degré des polynômes d’interpolation sur la convergence et le coût de calcul de la méthode des éléments finis, les paramètres utilisés sont les suivants :

- Nombre de pas de temps = 1000
- $S_{max} = 5000$

Le prix de l’option est ensuite calculé à l’aide de polynômes d’interpolation d’ordre 2, en faisant varier le nombre d’éléments entre 10 et 1000. La figure 5.3 présente les résultats obtenus. L’allure générale est identique au cas de l’utilisation de polynômes d’ordre 1, mais la comparaison des 2 méthodes permet d’identifier des différences. En effet, si la précision augmente de manière plus rapide avec des polynômes d’ordre élevé, il en est de même pour le temps de calcul. Pour la suite de ce travail, il a été choisi d’utiliser des polynômes d’ordre 1 avec un nombre d’éléments égal à 500. La raison en est que la précision obtenue avec ces

paramètres ne peut pas être améliorée de façon significative, même en augmentant l'ordre des polynômes ou le nombre d'éléments, et que le temps de calcul nécessaire avec ces paramètres est inférieur à celui demandé par l'utilisation de polynômes d'ordre 2 pour la même précision.

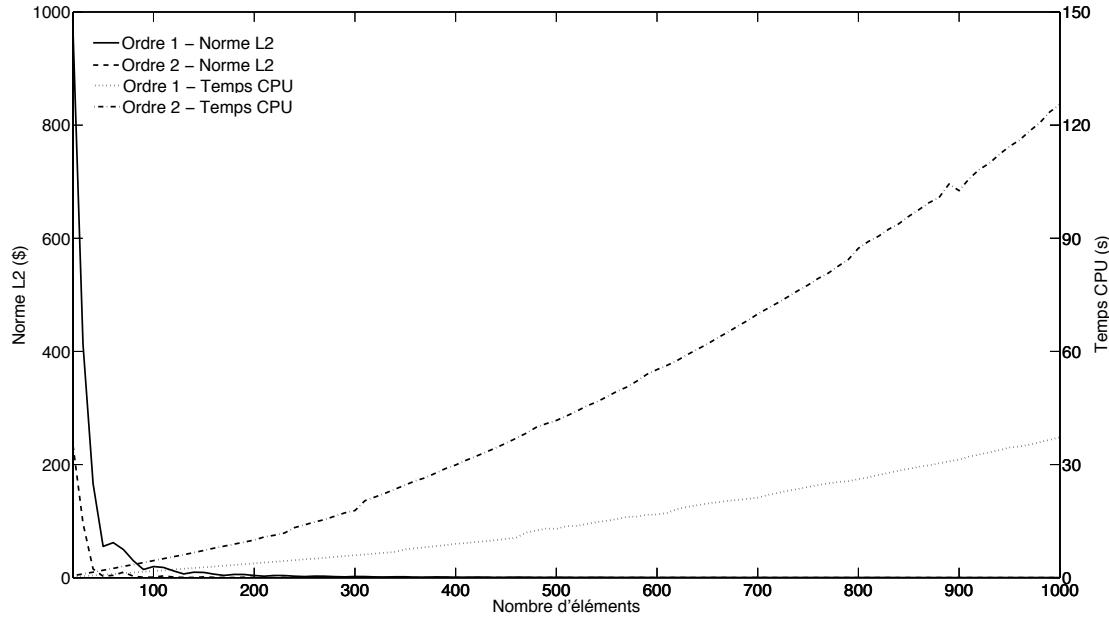


FIGURE 5.3 – Evolution de la norme L2 de l'erreur et du temps de calcul en fonction du nombre d'éléments utilisés en utilisant des polynômes d'ordre 1 et 2.

5.3.3 Valeur de S_{max}

Pour un nombre d'éléments égal à 500, des polynômes d'interpolation égaux à 1 et un nombre de pas de temps égal à 1000, la figure 5.4 présente la convergence et le coût de calcul de la méthode des éléments finis pour des valeurs de S_{max} variant entre 1000 et 5000.

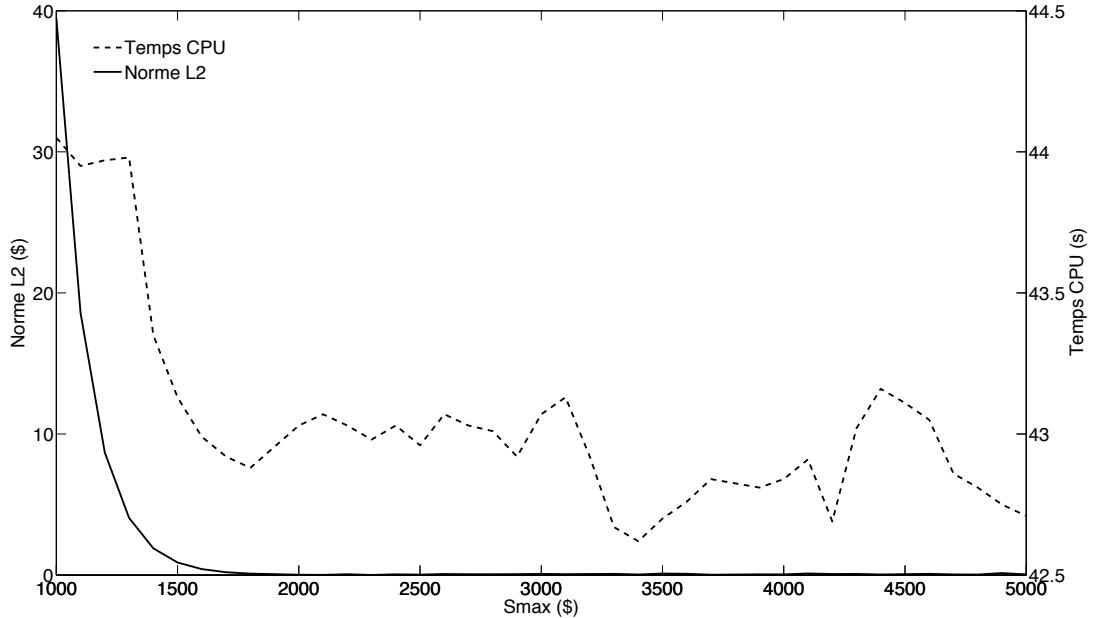


FIGURE 5.4 – Evolution de la norme L2 de l'erreur et du temps de calcul en fonction de la valeur de S_{max} .

Il peut être observé que la norme L2 de l'erreur n'évolue plus pour des valeurs de $S_{max} > 2500$$, qui sera donc la valeur utilisée pour les simulations suivantes. Le temps de calcul n'est quant-à-lui pas influencé par ce paramètre, puisqu'il n'influence ni la taille du système linéaire à résoudre à chaque étape (le nombre d'éléments est fixé), ni le nombre de pas de temps.

5.3.4 Taille des pas de temps

La figure 5.5 présente l'évolution de la convergence et du coût de calcul de la méthode des éléments finis pour des nombres de pas de temps variant entre 10 et 1000.

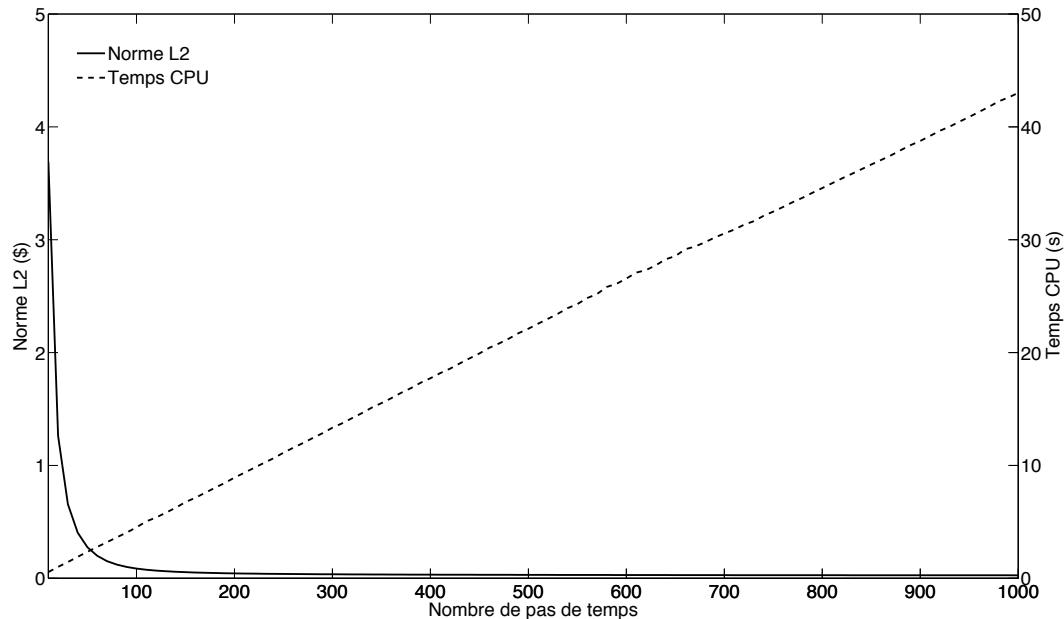


FIGURE 5.5 – Evolution de la norme L2 de l'erreur et du temps de calcul en fonction du nombre de pas de temps utilisé.

Le temps de calcul augmente de façon linéaire avec le nombre de pas de temps, la norme L2 peut quant-à-elle être considérée comme constante pour un nombre de pas de temps > 300 , c'est la valeur de ce paramètre qui sera utilisée pour les simulations suivantes.

5.4 Comparaison de la méthode des éléments finis et de la méthode de Monte-Carlo

En utilisant les paramètres déterminés précédemment, la méthode des éléments finis est comparée à la méthode de Monte-Carlo pour le pricing d'options call européennes de différents strikes et maturités.

Les résultats obtenus sont comparés sur base des critères suivants :

- La précision, qui sera estimée par le pourcentage d'erreur de prévision par rapport à la solution analytique ;
- Le temps de calcul nécessaire.

Les prix observés pour le marché sont également renseignés pour chacune des ces options.

Les tableaux 5.1 et 5.2 présentent respectivement les résultats obtenus pour des options de maturité 1 an et 1 mois. Pour des options de maturité d'un an, la précision de la méthode des éléments finis est systématiquement meilleure que celle de la méthode de Monte-Carlo, pour un temps de calcul CPU réduit d'un facteur 30. Par contre, pour une maturité d'un mois, la précision de la méthode des éléments finis est nettement inférieure à celle de la méthode de Monte-Carlo. Le temps de calcul CPU est quant-à-lui toujours à l'avantage de la première. Pour comprendre ce phénomène, il faut observer à la figure 5.6 l'allure de la solution de l'équation de Black et Scholes pour les deux maturités considérées. Il est clairement visible que la solution pour une maturité d'un mois présente une convexité plus forte que celle pour la maturité d'un an. Dès lors, il est nécessaire d'affiner la réponse obtenue par la méthode des éléments finis, par exemple en augmentant l'ordre d'intégration ou en utilisant un maillage plus fin. A titre d'exemple, le tableau 5.3 présente les mêmes calculs, mais en utilisant un ordre d'intégration de 2 et 1000 éléments. La précision obtenue avec la méthode des éléments finis devient en moyenne meilleure que celle obtenue par la méthode de Monte-Carlo, tout en nécessitant un temps de calcul 4 fois inférieur. Les résultats obtenus autour du strike, où la convexité de la solution est la plus forte, sont d'une précision semblable pour les deux méthodes.

TABLE 5.1 – Comparaison des prix (en Dollars) donnés par la solution analytique, la méthode de Monte-Carlo, la méthode des éléments finis et le marché pour une option européenne call de maturité 1 an sur l'action Google, le 20 janvier 2011. Les chiffres entre parenthèses sont les temps de calcul en temps CPU.

Strike	Marché	Analytique	Monte-Carlo	Erreur	Eléments-finis	Erreur
500	153,8	148,201	148,160 (135,609)	0,027952 %	148,206 (4,09)	0,00302189 %
510	144,75	140,977	140,936 (135,262)	0,0291415 %	140,982 (4,06)	0,00366402 %
540	123,5	120,680	120,639 (134,885)	0,0339987 %	120,689 (4,03)	0,00684363 %
550	115,0	114,381	114,340 (134,693)	0,0357378 %	114,391 (4,06)	0,00862017 %
580	98,0	96,893	96,854 (134,766)	0,0401916 %	96,9095 (4,02)	0,0172215 %
590	90,0	91,529	91,491 (136,483)	0,0418161 %	91,5483 (4,04)	0,021045 %
600	84,0	86,394	86,357 (134,978)	0,0437543 %	86,4159 (4,03)	0,0249643 %
610	78,8	81,485	81,448 (134,762)	0,0463770 %	81,5086 (4,03)	0,0285443 %
620	74,0	76,798	76,761 (135,725)	0,0489003 %	76,8221 (4,03)	0,0312817 %
625	72,8	74,536	74,536 (135,945)	0,0499597 %	74,524 (4,03)	-0,0164183 %
630	69,0	72,328	72,291 (134,876)	0,0511072 %	72,3517 (4,02)	0,0327176 %
635	66,11	70,173	70,136 (134,886)	0,0521586 %	70,1614 (4,03)	-0,0165838 %
640	65,53	68,070	68,034 (134,427)	0,0532193 %	68,0925 (4,03)	0,032566 %
645	61,60	66,019	65,984 (135,921)	0,0541049 %	66,0094 (4,02)	-0,0152095 %
650	61,47	64,020	63,984 (135,368)	0,0549343 %	64,0393 (4,05)	0,0308145 %
660	56,20	60,170	60,136 (134,821)	0,0564767 %	60,1866 (4,02)	0,0277501 %
665	56,3	58,319	58,285 (135,743)	0,0573997 %	58,3136 (4,03)	-0,00871047 %
670	53,25	56,516	56,482 (135,374)	0,0585349 %	56,529 (4,04)	0,0238909 %
680	48,63	53,050	53,018 (135,043)	0,0605617 %	53,0605 (4,05)	0,0198427 %
690	45,62	49,767	49,736 (134,783)	0,0633188 %	49,775 (4,04)	0,0161367 %
700	42,0	46,660	46,629 (139,751)	0,0665936 %	46,666 (4,09)	0,0131084 %
710	39,0	43,722	43,691 (136,433)	0,0704098 %	43,7269 (4,08)	0,0108599 %
720	36,4	40,947	40,916 (135,526)	0,0752807 %	40,9509 (4,05)	0,00930285 %
730	33,3	38,328	38,297 (134,024)	0,0811396 %	38,3311 (4,05)	0,00824512 %
740	30,2	35,858	35,827 (135,737)	0,0864107 %	35,8608 (4,07)	0,00747902 %
750	25,8	33,531	33,501 (135,641)	0,0904122 %	33,5332 (4,04)	0,00683662 %

TABLE 5.2 – Comparaison des prix (en Dollars) donnés par la solution analytique, la méthode de Monte-Carlo, la méthode des éléments finis et le marché pour une option européenne call de maturité 1 mois sur l'action Google, le 20 janvier 2011. Les chiffres entre parenthèses sont les temps de calcul en temps CPU.

Strike	Marché	Analytique	Monte-Carlo	Erreur	Eléments-finis	Erreur
590	34,5	37,632	37,624 (136,055)	0,0225596 %	37,6154 (4,17)	-0,0446411 %
595	30,2	34,112	34,103 (136,102)	0,0248684 %	34,1259 (3,91)	0,0416853 %
600	26,4	30,781	30,772 (133,777)	0,0274281 %	30,7657 (3,96)	-0,0480665 %
605	22,8	27,646	27,638 (135,151)	0,0300650 %	27,6625 (3,91)	0,0604765 %
610	19,1	24,713	24,705 (135,036)	0,0322981 %	24,6988 (3,89)	-0,0561074 %
615	16,2	21,984	21,977 (135,917)	0,0347544 %	22,002 (3,91)	0,081113 %
620	13,52	19,461	19,454 (135,861)	0,0385582 %	19,4467 (3,92)	-0,0736862 %
625	10,97	17,142	17,135 (135,237)	0,0428098 %	17,1592 (3,91)	0,101446 %
630	8,70	15,023	15,016 (135,942)	0,0461614 %	15,0069 (3,91)	-0,107752 %
635	7,00	13,099	13,093 (135,41)	0,0486541 %	13,115 (3,91)	0,11894 %
640	5,48	11,364	11,358 (134,852)	0,0524303 %	11,3446 (3,89)	-0,167655 %
645	4,2	9,807	9,802 (134,314)	0,0584245 %	9,82015 (3,92)	0,131205 %
650	3,2	8,420	8,415 (134,133)	0,0681372 %	8,39801 (3,91)	-0,265667 %
655	2,45	7,192	7,187 (140,04)	0,0784029 %	7,20208 (3,92)	0,136857 %
660	1,75	6,111	6,106 (134,309)	0,087942 %	6,08589 (3,89)	-0,417814 %
665	1,43	5,166	5,161 (134,563)	0,10005 %	5,17326 (3,91)	0,13687 %
670	1,08	4,345	4,339 (135,271)	0,119192 %	4,31659 (3,9)	-0,645222 %
675	0,70	3,634	3,630 (134,942)	0,13926 %	3,63987 (3,9)	0,136668 %
680	0,58	3,026	3,021 (134,526)	0,153515 %	2,99601 (3,91)	-0,976363 %
685	0,45	2,506	2,501 (134,437)	0,174225 %	2,50926 (3,91)	0,149404 %
690	0,35	2,064	2,060 (134,585)	0,192281 %	2,03441 (3,91)	-1,45077 %
695	0,31	1,692	1,689 (135,219)	0,214072 %	1,69574 (3,91)	0,201159 %
700	0,25	1,380	1,377 (141,969)	0,238728 %	1,35109 (3,89)	-2,12522 %
710	0,15	0,905	0,902 (143,065)	0,305286 %	0,877064 (3,91)	-3,0839 %
720	0,11	0,582	0,579 (142,699)	0,406767 %	0,555931 (3,91)	-4,45538 %
740	0,1	0,227	0,226 (135,164)	0,662846 %	0,206022 (3,94)	-9,36031 %
750	0,06	0,138	0,137 (134,793)	0,671 %	0,119246 (3,94)	-13,7324 %

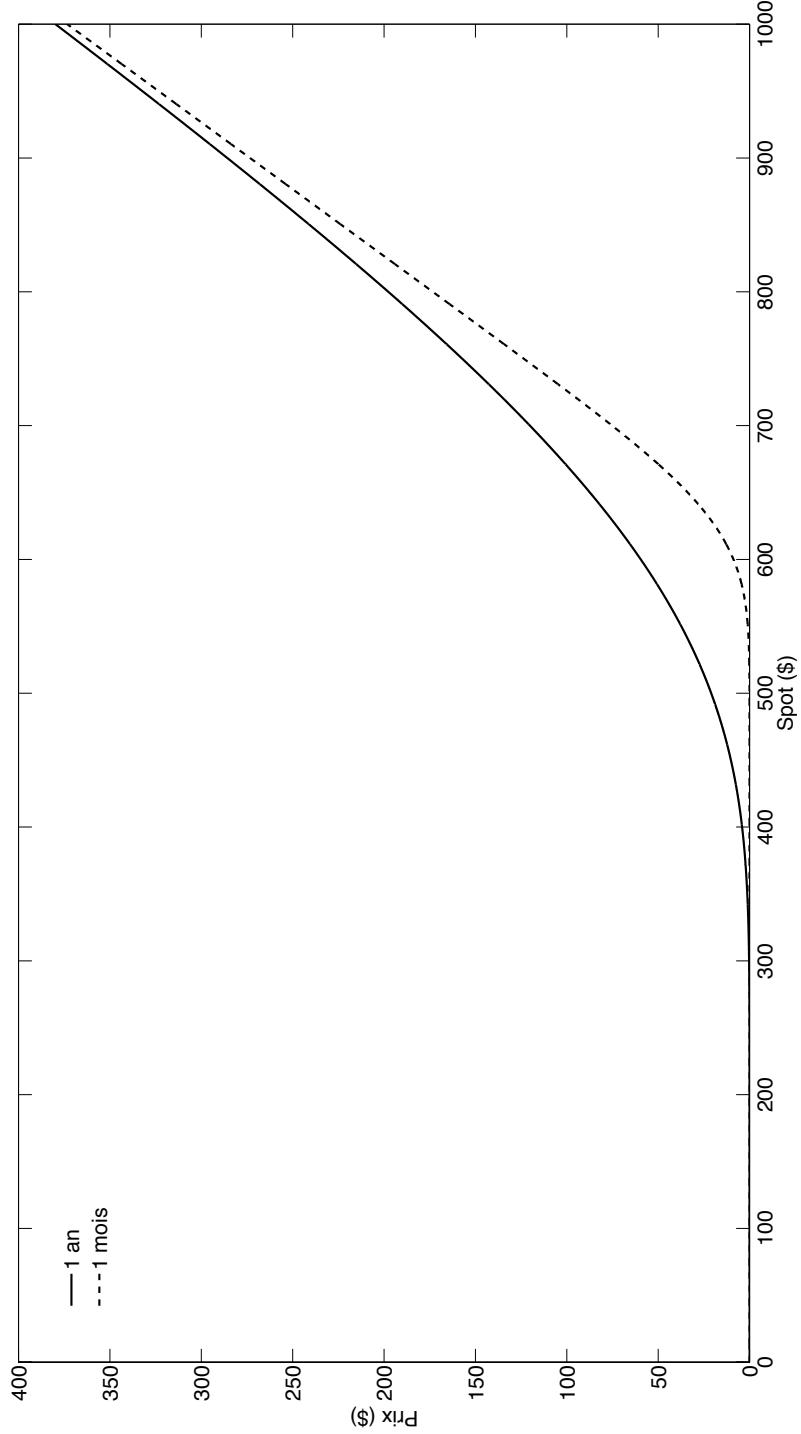


FIGURE 5.6 – Solutions analytiques de l'équation de Black et Scholes pour les options de maturité 1 an et 1 mois

TABLE 5.3 – Comparaison des prix (en Dollars) donnés par la solution analytique, la méthode de Monte-Carlo, la méthode des éléments finis avec maillage raffiné et le marché pour une option européenne call de maturité 1 mois sur l'action Google, le 20 janvier 2011. Les chiffres entre parenthèses sont les temps de calcul en temps CPU.

Strike	Marché	Analytique	Monte-Carlo	Erreur	Eléments-finis	Erreur
590	34,5	37,632	37,624 (136,055)	0,0225596 %	37,6313 (38)	-0,00223749 %
595	30,2	34,112	34,103 (136,102)	0,0248684 %	34,1098 (37,94)	-0,00548966 %
600	26,4	30,781	30,772 (133,777)	0,0274281 %	30,7769 (37,94)	-0,0118662 %
605	22,8	27,646	27,638 (135,151)	0,0300650 %	27,6396 (37,99)	-0,0224625 %
610	19,1	24,713	24,705 (135,036)	0,0322981 %	24,7036 (38)	-0,037081 %
615	16,2	21,984	21,977 (135,917)	0,0347544 %	21,9725 (37,78)	-0,0531816 %
620	13,52	19,461	19,454 (135,861)	0,0385582 %	19,4482 (38,06)	-0,0660266 %
625	10,97	17,142	17,135 (135,237)	0,0428098 %	17,1297 (38,16)	-0,0707049 %
630	8,70	15,023	15,016 (135,942)	0,0461614 %	15,0133 (38,05)	-0,0650657 %
635	7,00	13,099	13,093 (135,41)	0,0486541 %	13,0927 (38,13)	-0,0512603 %
640	5,48	11,364	11,358 (134,852)	0,0524303 %	11,3598 (37,94)	-0,0344345 %
645	4,2	9,807	9,802 (134,314)	0,0584245 %	9,80536 (37,93)	-0,0196345 %
650	3,2	8,420	8,415 (134,133)	0,0681372 %	8,41959 (37,94)	-0,00944441 %
655	2,45	7,192	7,187 (140,04)	0,0784029 %	7,19196 (38,03)	-0,00378649 %
660	1,75	6,111	6,106 (134,309)	0,087942 %	6,11135 (38,12)	-0,00121896 %
665	1,43	5,166	5,161 (134,563)	0,10005 %	5,16618 (38,1)	-0,000259832 %
670	1,08	4,345	4,339 (135,271)	0,119192 %	4,34462 (38,1)	3,71762 * 10 ⁻⁵ %
675	0,70	3,634	3,630 (134,942)	0,13926 %	3,63491 (38,17)	0,000115043 %
680	0,58	3,026	3,021 (134,526)	0,153515 %	3,02555 (38,19)	0,000134486 %
685	0,45	2,506	2,501 (134,437)	0,174225 %	2,50552 (38,2)	0,000142356 %
690	0,35	2,064	2,060 (134,585)	0,192281 %	2,06436 (38,13)	0,000152057 %
695	0,31	1,692	1,689 (135,219)	0,214072 %	1,69234 (38,28)	0,000164572 %
700	0,25	1,380	1,377 (141,969)	0,238728 %	1,38043 (38,18)	0,000183864 %
710	0,15	0,905	0,902 (143,065)	0,305286 %	0,904975 (38,26)	0,000254582 %
720	0,11	0,582	0,579 (142,699)	0,406767 %	0,581858 (38,13)	0,000393127 %
740	0,1	0,227	0,226 (135,164)	0,662846 %	0,2273 (38,25)	0,00103827 %
750	0,06	0,138	0,137 (134,793)	0,671 %	0,13823 (38,26)	0,00165492 %

Les différences entre les prix observés sur les marchés et les prix donnés par le modèle de Black et Scholes peuvent être importante, surtout pour les options largement in-the-money ou out-of-the-money. Cela s'explique par l'aspect "Skew" de la courbe de volatilité de l'option de maturité un an (figure 5.7) qui devient un "smile" pour l'option de maturité un mois (figure 5.8). Le modèle de Black et Scholes ne permet pas de rendre compte de tels phénomènes, seule l'utilisation de modèles à volatilité stochastique permet de le faire.

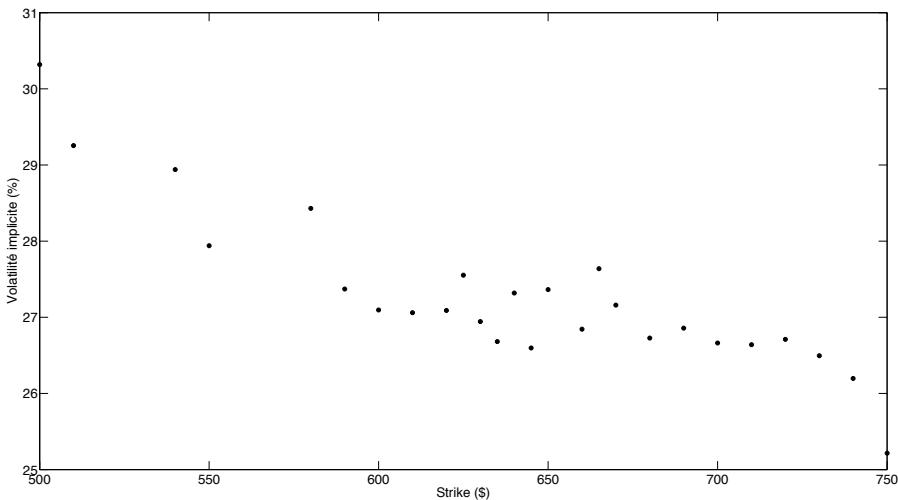


FIGURE 5.7 – Volatilité implicite de l'option call de maturité 1 an sur l'action Google en fonction du strike

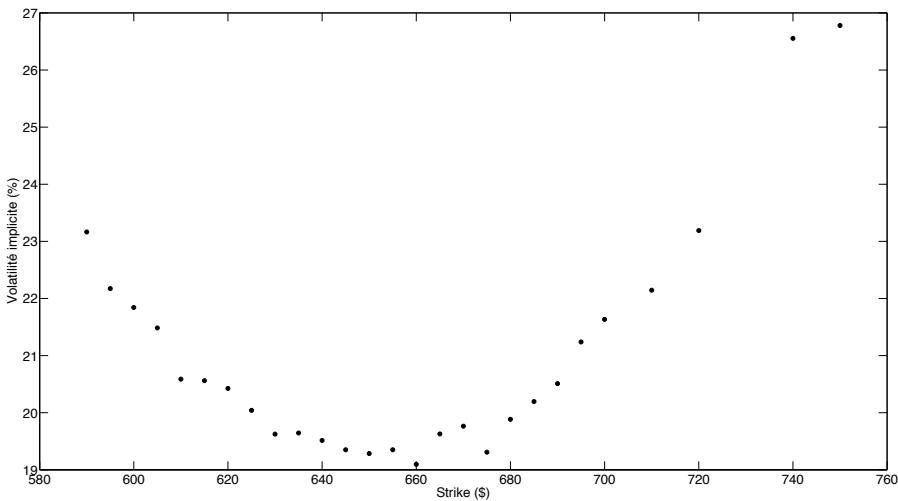


FIGURE 5.8 – Volatilité implicite de l'option call de maturité 1 mois sur l'action Google en fonction du strike

Chapitre 6

Application de la méthode des éléments finis au calcul des grecques

6.1 Introduction

Il est possible de construire une équation aux dérivées partielles pour chaque grecque en différentiant l'équation 2.12 par rapport à la variable correspondante p_i .

$$\frac{\delta}{\delta p_i} \left[\frac{\delta V}{\delta t} + \sigma^2 S^2 \frac{1}{2} \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} + rS \frac{\delta V}{\delta S} - rV \right] = 0 \quad (6.1)$$

6.2 Développement de l'équation du Delta (Δ)

$$\frac{\delta}{\delta S} \left[\frac{\delta V}{\delta t} + \sigma^2 S^2 \frac{1}{2} \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} + (r - D)S \frac{\delta V}{\delta S} - rV \right] = 0 \quad (6.2)$$

$$= \frac{\delta}{\delta S} \frac{\delta V}{\delta t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\delta}{\delta S} \left[S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} \right] + (r - D) \frac{\delta}{\delta S} \left[S \frac{\delta V}{\delta S} \right] - \frac{\delta}{\delta S} [rV] \quad (6.3)$$

$$= \frac{\delta \Delta}{\delta t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \left[2S \frac{\delta \Delta}{\delta S} + S^2 \frac{\delta^2 \Delta}{\delta S^2} \right] + (r - D) \left[\Delta + S \frac{\delta \Delta}{\delta S} \right] - r\Delta \quad (6.4)$$

$$= \underbrace{\frac{\delta \Delta}{\delta t} + \sigma^2 S^2 \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \Delta}{\delta S^2} + rS \frac{\delta \Delta}{\delta S}}_{\text{Opérateur de Black et Scholes sur } \Delta} - r\Delta + (r - D)\Delta + \sigma^2 S \frac{\delta \Delta}{\delta S} = 0 \quad (6.5)$$

$$(6.6)$$

L'équation 6.5 est donc l'équation aux dérivées partielles exprimant l'évolution de la valeur du Δ de l'option en fonction du temps et de la valeur du sous-jacent. Les conditions

aux limites de l'équation doivent également être modifiées selon l'option considérée. Les conditions initiales dans le cas d'un call européen sont :

$$\Delta(S, T) = \frac{\delta}{\delta S} \max(S - E, 0) = \begin{cases} 1 & S > E \\ 0 & S \leq E \end{cases} \quad (6.7)$$

Pour $S = 0$, $\Delta = 0$, et pour $S = S_{max}$, $\Delta = \frac{\delta}{\delta S} [S - Ee^{-r(T-t)}] = 1$.

6.3 Développement des équations des autres grecques

Les équations aux dérivées partielles décrivant l'évolution des différentes grecques en fonction de la valeur du sous-jacent et du temps peuvent être obtenues de la même manière. Les paragraphes suivant présenterons les formes finales de ces équations.

6.3.1 Gamma (Γ)

$$\underbrace{\frac{\delta\Gamma}{\delta t} + \sigma^2 S^2 \frac{1}{2} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta S^2} + rS \frac{\delta\Gamma}{\delta S} - r\Gamma + 2(r-D)\Gamma + 2\sigma^2 S \frac{\delta\Gamma}{\delta S} + \sigma^2 \Gamma}_{\text{Opérateur de Black et Scholes sur } \Gamma} = 0 \quad (6.8)$$

6.3.2 Vega (ν)

$$\underbrace{\frac{\delta\nu}{\delta t} + \sigma^2 S^2 \frac{1}{2} \frac{\delta^2\nu}{\delta S^2} + rS \frac{\delta\nu}{\delta S} - r\nu + \sigma S^2 \Gamma}_{\text{Opérateur de Black et Scholes sur } \nu} = 0 \quad (6.9)$$

Cette équation comprend Γ dans ses variables, il faut donc la résoudre en parallèle avec l'équation 6.8.

6.3.3 Theta (Θ)

$$\underbrace{\frac{\delta\Theta}{\delta t} + \sigma^2 S^2 \frac{1}{2} \frac{\delta^2\Theta}{\delta S^2} + rS \frac{\delta\Theta}{\delta S} - r\Theta}_{\text{Opérateur de Black et Scholes sur } \Theta} = 0 \quad (6.10)$$

6.3.4 Rho (ρ)

$$\underbrace{\frac{\delta\rho}{\delta t} + \sigma^2 S^2 \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \rho}{\delta S^2} + rS \frac{\delta\rho}{S} - r\rho}_{\text{Opérateur de Black et Scholes sur } \rho} + S \frac{\delta V}{\delta S} - V = 0 \quad (6.11)$$

Cette équation doit être résolue en parallèle avec l'équation 2.12

6.4 Applications

Les tableaux 6.1 et 6.2 présentent les valeurs de delta obtenues pour les options de maturités d'un an et de un mois pour différents strikes, données par la méthode des éléments finis et la solution analytique. L'erreur varie entre 0,1 % et 5%, avec une erreur maximale pour les options proche de la monnaie. Ce comportement s'explique aisément sur base de la figure 6.1, qui présente la solution analytique du calcul de Delta pour les 2 options at-the-money. Il est clairement visible qu'autour du spot la pente de la solution est très forte, ce qui impose l'utilisation d'un maillage plus fin à cet endroit si une précision plus élevée est nécessaire. L'avantage de la méthode des éléments est qu'il est tout à fait possible d'utiliser un maillage extrêmement fin dans certaines parties du domaine où la solution varie plus fortement, et un maillage plus grossier ailleurs.

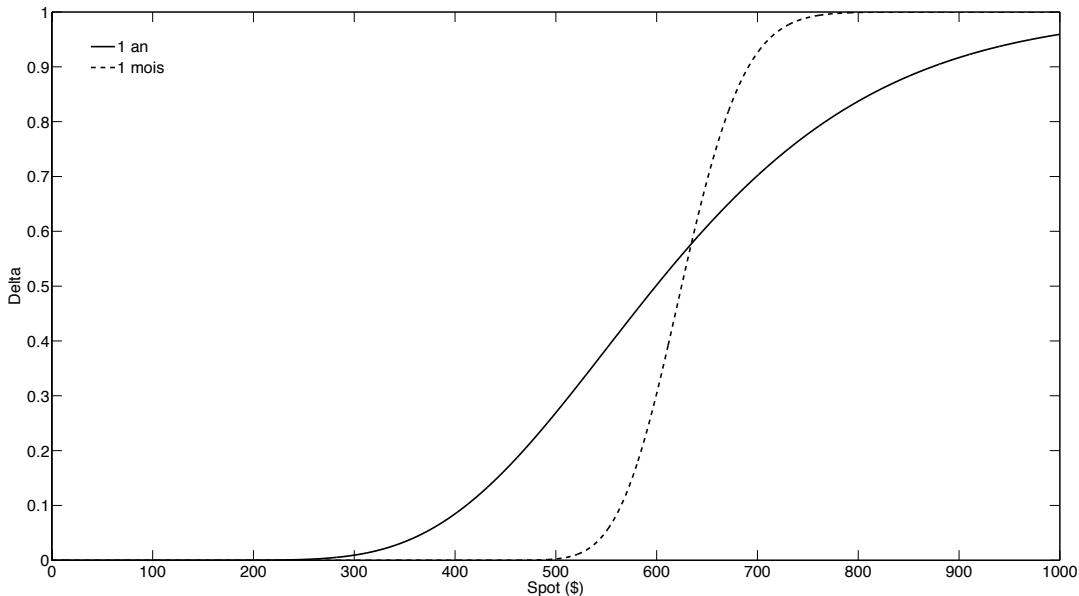


FIGURE 6.1 – Valeurs de Delta en fonction du spot pour les options de maturité 1 an et 1 mois

TABLE 6.1 – Comparaison des valeurs de Delta données par la solution analytique et la résolution par la méthode des éléments finis de l'équation de Black et Scholes pour une option européenne call de maturité 1 an sur l'action Google, le 20 janvier 2011. Les chiffres entre parenthèses sont les temps de calcul en temps CPU.

Strike	Eléments-finis	Analytique	Erreur
500	0,821666	0,822405 (36,8)	0,0899667 %
510	0,803552	0,804321 (36,8)	0,0957501 %
540	0,745361	0,746202 (36,91)	0,112955 %
550	0,72493	0,725789 (36,95)	0,118593 %
580	0,661625	0,662519 (36,97)	0,135054 %
590	0,640112	0,641011 (36,81)	0,140361 %
600	0,618518	0,619419 (36,79)	0,145567 %
610	0,596915	0,597813 (36,94)	0,150513 %
620	0,57537	0,570631 (37,3)	-0,823627 %
625	0,564639	0,536799 (36,82)	-4,93059 %
630	0,553947	0,547245 (36,8)	-1,20984 %
635	0,5433	0,546128 (36,83)	0,520591 %
640	0,532706	0,533645 (36,83)	0,176278 %
645	0,522171	0,523047 (36,94)	0,167732 %
650	0,511702	0,512572 (36,98)	0,169937 %
660	0,490988	0,491844 (37,11)	0,17446 %
665	0,480753	0,481603 (37,01)	0,176677 %
670	0,470608	0,47145 (37,08)	0,178864 %
680	0,450605	0,45143 (37,05)	0,183149 %
690	0,431016	0,431823 (37,03)	0,187314 %
700	0,411873	0,412661 (37,12)	0,19136 %
710	0,393204	0,393972 (37,06)	0,195288 %
720	0,375034	0,375781 (37,02)	0,1991 %
730	0,357382	0,358107 (37,04)	0,202797 %
740	0,340264	0,340966 (37,03)	0,20638 %
750	0,323692	0,324371 (37,02)	0,209851 %

TABLE 6.2 – Comparaison des valeurs de Delta données par la solution analytique et la résolution par la méthode des éléments finis de l'équation de Black et Scholes pour une option européenne call de maturité 1 mois sur l'action Google, le 20 janvier 2011. Les chiffres entre parenthèses sont les temps de calcul en temps CPU.

Strike	Eléments-finis	Analytique	Erreur
500	0,821666	0,822405 (36,8)	0,0899667 %
510	0,803552	0,804321 (36,8)	0,0957501 %
540	0,745361	0,746202 (36,91)	0,112955 %
550	0,72493	0,725789 (36,95)	0,118593 %
580	0,661625	0,662519 (36,97)	0,135054 %
590	0,640112	0,641011 (36,81)	0,140361 %
600	0,618518	0,619419 (36,79)	0,145567 %
610	0,596915	0,597813 (36,94)	0,150513 %
620	0,57537	0,570631 (37,3)	-0,823627 %
625	0,564639	0,536799 (36,82)	-4,93059 %
630	0,553947	0,547245 (36,8)	-1,20984 %
635	0,5433	0,546128 (36,83)	0,520591 %
640	0,532706	0,533645 (36,83)	0,176278 %
645	0,522171	0,523047 (36,94)	0,167732 %
650	0,511702	0,512572 (36,98)	0,169937 %
660	0,490988	0,491844 (37,11)	0,17446 %
665	0,480753	0,481603 (37,01)	0,176677 %
670	0,470608	0,47145 (37,08)	0,178864 %
680	0,450605	0,45143 (37,05)	0,183149 %
690	0,431016	0,431823 (37,03)	0,187314 %
700	0,411873	0,412661 (37,12)	0,19136 %
710	0,393204	0,393972 (37,06)	0,195288 %
720	0,375034	0,375781 (37,02)	0,1991 %
730	0,357382	0,358107 (37,04)	0,202797 %
740	0,340264	0,340966 (37,03)	0,20638 %
750	0,323692	0,324371 (37,02)	0,209851 %

La méthode de Monte-Carlo ne permet pas de calculer les valeurs des grecques de manière aussi directe. La seule possibilité est d'approximer les dérivées de la manière suivante :

$$\frac{\delta f(x)}{\delta x} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (6.12)$$

Ce qui donne par exemple, pour le calcul du Delta de l'option européenne de maturité 1 an et de strike à 625 \$, en utilisant une valeur de h de 1\$:

$$\Delta = \frac{75,0645 - 73,9355}{2} = 0,5645 \quad (6.13)$$

Soit une erreur de -0,025% et un temps de calcul de 338 s. Deux remarques peuvent être formulées :

- le temps de calcul nécessaire est très élevé, puisqu'il a fallu calculer 2 prix d'options européennes ;
- la méthode de Monte-Carlo ne donne la valeur du Delta que pour une valeur de sous-jacent, alors que la méthode des éléments finis la donne pour toutes les valeurs de sous-jacent comprises dans l'intervalle $[0, S_{max}]$.

Chapitre 7

Application de la méthode des éléments finis au pricing des options exotiques

7.1 Introduction

Dans ce chapitre, la méthode des éléments finis sera appliquée au pricing d'options exotiques particulières, les options barrières. Ces dernières sont des options dites "chemin-dépendantes" ou "path-dependent" en anglais, c'est-à-dire que leur valeur finale dépend de l'évolution réelle de la valeur du sous-jacent entre le moment de l'émission de l'option et sa maturité. Il peut être défini des options **knock-in** et **knock-out**. Les options barrières knock-in ont une valeur nulle tant que le sous-jacent n'a pas atteint une valeur égale à celle de la barrière. A l'inverse, les options knock-out ne valent plus rien une fois que le sous-jacent a atteint une valeur égale à celle de la barrière. Une option possédant deux barrières est appelée **double barrier option**. L'équation décrivant l'évolution de la valeur d'une telle option est identique à celle d'une option européenne classique, seules les conditions aux limites varient.

$$\begin{cases} \frac{\delta V}{\delta t} + \sigma^2 S^2 \frac{1}{2} \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} + rS \frac{\delta V}{\delta S} - rV = 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

$$V(S, T) = \max(0, S - E) \quad (7.2)$$

$$V(S_u, t) = 0 \quad (7.3)$$

$$V(S_d, t) = 0 \quad (7.4)$$

où S_d et S_u sont respectivement les valeurs des barrières inférieure et supérieure de l'option.

7.2 Obtention du modèle aux éléments finis

L'obtention de la forme aux éléments finis du problème est identique à celle obtenue pour le pricing d'options européennes, seule le stade des conditions aux limites diffère.

7.3 Démarche

Les options à deux barrières étant échangées *over-the-counter*, il n'est pas possible d'en trouver des prix sur des bases de données telles que Bloomberg.

Afin de pouvoir valider les résultats obtenus avec le code développé dans ce travail, un exemple tiré d'un livre récent [9] sera reproduit avec le code développé ici et les résultats qui en seront tirés seront comparés à ceux de l'auteur.

7.4 Résultats

Les paramètres de l'option étudiée sont présentés au tableau 7.1.

TABLE 7.1 – Paramètres de l'option barrière

Prix d'exercice (\$)	100
Limite basse (\$)	75
Limite haute (\$)	130
Taux d'intérêt (%)	10
Volatilité (%)	20
Maturité (années)	1

A la figure 7.1 est présentée la solution obtenue pour le prix de l'option. Le prix est nul pour des valeurs de sous-jacent égales aux barrières, et maximales pour des valeurs égales au strike.

Le prix pour une valeur de sous-jacent de 100 \$ obtenu avec le code développé dans ce travail est de 3,53137 \$. Le prix obtenu dans la littérature pour cette option est de 3,52533 \$, soit une différence de 0,17 %.

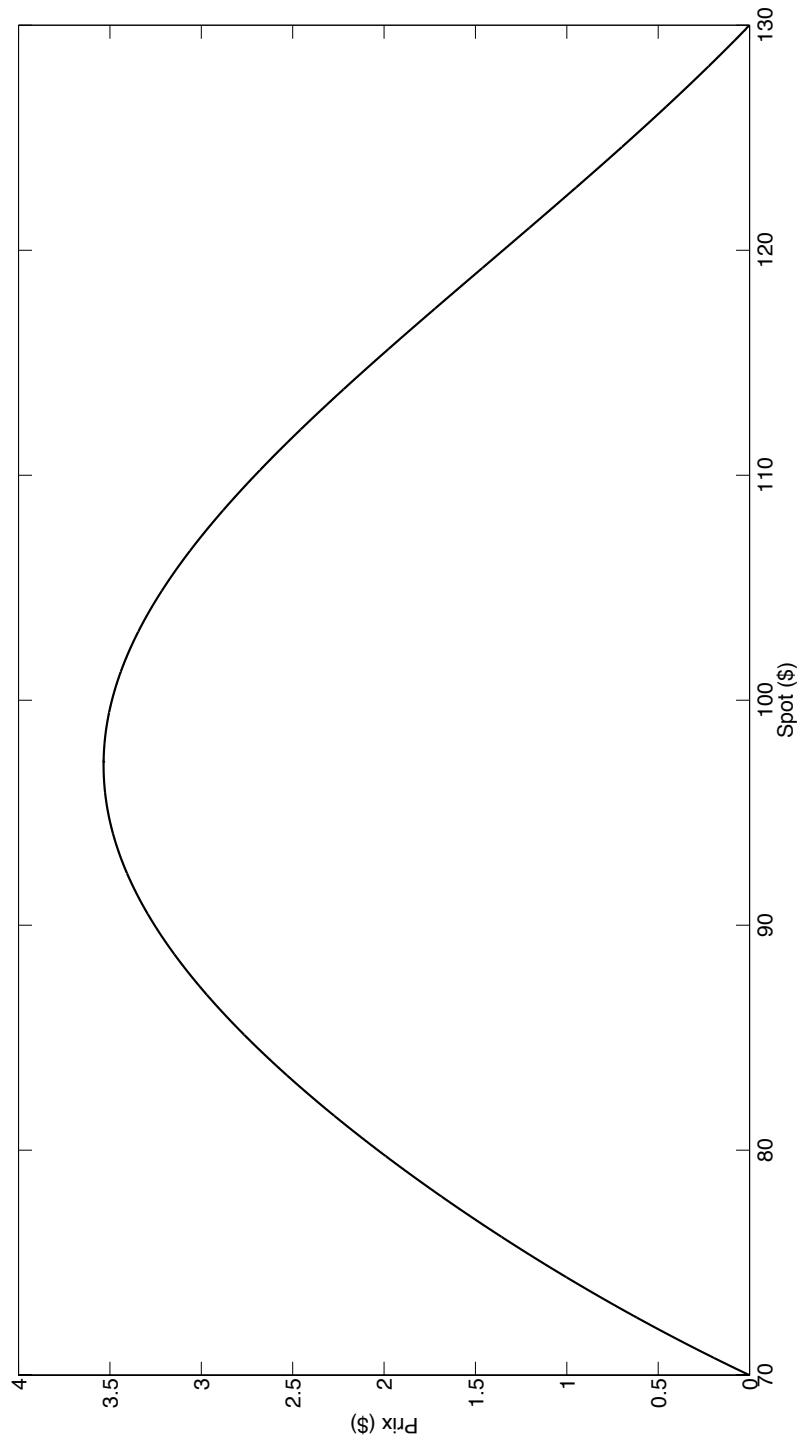


FIGURE 7.1 – Prix d'une option double barrière en fonction du spot.

Chapitre 8

Conclusions

Dans ce travail, la méthode des éléments finis a été appliquée à quelques problèmes classiques des mathématiques financières. Ont été étudié : le calcul des prix d'options européennes, le calcul des valeurs de Delta de ces options ainsi que le calcul du prix d'options exotiques particulières que sont les options à deux barrières.

Quand cela a été possible, les résultats obtenus ont été comparés à une méthode largement utilisée dans le domaine des mathématiques financières, la méthode de Monte-Carlo.

La méthode des éléments finis a montré plusieurs avantages :

1. Car elle est basée sur la résolution de l'équation de Black et Scholes, et non sur une génération de "chemins" comme la méthode de Monte-Carlo, elle fournit en un seul calcul les résultats souhaités pour toutes les valeurs de spot comprises dans le domaine considéré. La méthode de Monte-Carlo ne fournit quant-à-elle un résultat que pour la valeur de spot utilisée comme origine des chemins considérés ;
2. Elle permet d'affiner facilement la solution obtenue si nécessaire, soit en réduisant la taille des éléments utilisés, soit en élevant le degré des polynômes d'interpolation ;
3. Elle permet de calculer de manière directe les valeurs des grecques d'une option, ce que la méthode de Monte-Carlo ne permet de faire que d'une manière grossière ;
4. Elle permet de résoudre l'équation de Black et Scholes pour certaines options particulières, telles que les options à deux barrières, en ne modifiant qu'une seule ligne du programme de calcul (concernant les conditions aux limites du domaine). Le pricing d'une telle option par la méthode de Monte-Carlo nécessite la réécriture d'une part plus importante du programme original.

La méthode des éléments finis présente également des inconvénients :

1. Elle est plus complexe que la plupart des autres méthodes, telles que la méthode de Monte-Carlo ou la méthode des différences finies ;
2. L'implémentation de la méthode des éléments finis requiert de bonnes compétences en informatiques et en algorithmique. Un programme de calcul aux éléments finis représente également un nombre de lignes de code beaucoup plus important que pour les autres méthodes ;
3. La méthode des éléments finis est une méthode de résolution d'équations aux dérivées partielles. Elle n'est donc utilisable que si le problème peut s'écrire sous la forme d'une ou de plusieurs équations, avec des conditions aux limites définies. Certains problèmes de la finance ne peuvent s'écrire de cette manière, et requièrent donc l'utilisation de méthodes plus robustes telles que la méthode de Monte-Carlo.

En résumé, quand son application est possible, la méthode des éléments finis est certainement d'une grande utilité de part la grande précision qu'elle peut atteindre avec un temps de calcul réduit. Par contre, la méthode de Monte-Carlo reste indispensable à la résolution de problèmes qui ne peuvent être formulés sous la forme d'une équation aux dérivées partielles.

Chapitre 9

Bibliographie

Articles

- [1] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3), 1973.
- [2] A. Houmat. Mapped infinite p-element for two-dimensional problems of unbounded domains. *Computers and Geotechnics*, 35(4) :608–615, 2008.
- [3] Alberto Salvadori. Infinite boundary elements in 2d elasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 32(2) :122–138, 2 2008.

Livres

- [4] J Cranck. *The Mathematics of Diffusion*. Oxford, 1956.
- [5] H Carslaw and J Jaeger. *Conduction of heat in solids*. 1959.
- [6] P. Devolder. *Finance stochastique*. Université de Bruxelles, 1996.
- [7] T.J.R Hughes. *The Finite Element Method : Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications Inc., 2003.
- [8] J.N. Reddy. *An introduction to nonlinear finite element analysis*. OUP Oxford, 2004.
- [9] J. Topper. *Financial engineering with finite elements*. Wiley Finance, 2005.
- [10] R.E Meyer. *Introduction to Mathematical Fluid Dynamics*. Dover Publications, 2007.

- [11] R. Fitzpatrick. *Maxwell's Equations and the Principles of Electromagnetism*. Jones and Bartlett Publishers, 2008.
- [12] M.S. Joshi. *C++ Design Patterns and Derivatives Pricing*. Cambridge University Press, 2008.
- [13] M.S. Joshi. *The Concepts and Practice of Mathematical Finance*. Cambridge University Press, 2008.

Sites Web

- [14] Getfem++. [http ://download.gna.org/getfem/html/homepage/](http://download.gna.org/getfem/html/homepage/).
- [15] Boost. [http ://www.boost.org/](http://www.boost.org/).
- [16] FED. [http ://www.federalreserve.gov/](http://www.federalreserve.gov/).
- [17] CBOE. [http ://www.cboe.com/](http://www.cboe.com/).
- [18] Google Finance. [http ://www.google.com/finance](http://www.google.com/finance).

Notes de cours

- [19] V. Legat. *Introduction aux éléments finis*. UCL, 2008.