

# Modélisation par éléments finis de l'endommagement de composites laminés à fibres tissées soumis à impact

G. Deliége<sup>1</sup>, S. Hannay<sup>1</sup>, J.-P. Ponthot<sup>1</sup>

<sup>1</sup> MN2L, Université de Liège, Belgique, {geoffrey.deliege,s.hannay,jp.ponthot}@ulg.ac.be

**Résumé** — Un modèle 3D de pli composite à fibres tissées est présenté. Ce modèle se base sur l'ap-proche mésoscopique développée à l'ENS Cachan et sur des lois de comportement 2D pour plis tissés mises au point au LMA de Marseilles. L'implantation de ces lois constitutives dans un code éléments finis est décrite et des résultats de simulations sont présentés.

**Mots clés** — éléments finis, composite, fibres tissées

## 1 Introduction

Les matériaux composites deviennent incontournables dans de nombreux secteurs industriels, où leur exceptionnel rapport poids/résistance permet théoriquement d'alléger les structures de façon significative. Toutefois, pour exploiter pleinement le potentiel de ces matériaux, il est indispensable de faire évoluer en parallèle les outils de simulation numérique largement utilisés en conception. Les composites, du fait leur nature hétérogène et non isotrope, constituent cependant un défi pour les modélisateurs : la mise au point de lois de comportement décrivant avec précision les mécanismes d'endommagement s'avère extrêmement complexe. Cet article décrit un modèle comportemental pour des laminés à fibres tissées et son implantation dans un code éléments finis implicite, en vue de la simulation d'impacts à basse énergie sur des structures composites.

## 2 Modèle de pli tissé

Pour modéliser l'endommagement des laminés, les approches macroscopiques s'avèrent trop peu précises tandis que la simulation directe des fibres et de la matrice polymère n'est envisageable que pour des volumes élémentaires. La méthode adoptée ici, développée initialement à l'Ecole Nationale Supérieure (ENS) de Cachan, consiste à travailler à une méso-échelle intermédiaire entre les échelles microscopique et macroscopique. Le méso-modèle résultant se décompose en un modèle de pli homogène et une interface séparant les plis du laminé. La majorité des modèles de plis décrits dans la littérature sont toutefois conçus pour des composites unidirectionnels. Cet article décrit la mise au point d'un mod-èle tridimensionnel de pli tissé sur base des modèles existant pour les plis unidirectionnels 3D d'une part [1][2], et les plis tissés 2D mis au point au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA) de Marseilles d'autre part [3][4][5].

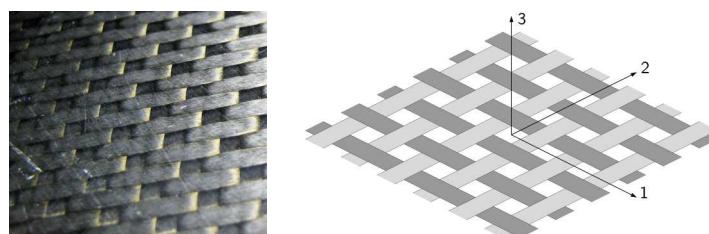


FIG. 1 – Photo de la surface du laminé (à gauche) et représentation des axes d'orthotropie du pli tissé (à droite).

## 2.1 Lois de comportement

Les lois de comportement du pli sont définies par la densité d'énergie de déformation

$$E_d = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{11}^2}{E_1(1-d_{11})} - 2 \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{11} \sigma_{22} - 2 \frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_{11} \sigma_{33} \right. \\ \left. + \frac{\sigma_{22}^2}{E_2(1-d_{22})} - 2 \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_{22} \sigma_{33} + \frac{\sigma_{33}^2}{E_3} \right. \\ \left. + \frac{\sigma_{12}^2}{G_{12}(1-d_{12})} + \frac{\sigma_{13}^2}{G_{13}(1-\lambda d_{12})} + \frac{\sigma_{23}^2}{G_{23}(1-\lambda d_{12})} \right), \quad (1)$$

où les  $\sigma_{ij}$  sont les composantes du tenseur de contraintes exprimé dans les axes d'orthotropie (Fig. 1) et les  $E_i$ ,  $G_{ij}$  et  $\nu_{ij}$  sont les neuf paramètres élastiques classiques des matériaux orthotropes. Les variables d'endommagement  $d_{11}$  et  $d_{22}$  représentent l'endommagement du pli en direction des fibres et  $d_{12}$  l'endommagement en cisaillement. Le paramètre  $\lambda$  introduit un couplage entre l'endommagement en cisaillement plan et les contraintes de cisaillement hors-plan.

On suppose un comportement élastique fragile en direction des fibres et un comportement élastoplastique à écrouissage isotrope en cisaillement. Les contraintes effectives et la vitesse effective de déformation plastique correspondante s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma}_{11} = \frac{\sigma_{11}}{1-d_{11}}, \quad \tilde{\dot{\epsilon}}_{11}^p = 0, \\ \tilde{\sigma}_{22} = \frac{\sigma_{22}}{1-d_{22}}, \quad \tilde{\dot{\epsilon}}_{22}^p = 0, \\ \tilde{\sigma}_{33} = \sigma_{33}, \quad \tilde{\dot{\epsilon}}_{33}^p = 0, \\ \tilde{\sigma}_{12} = \frac{\sigma_{12}}{1-d_{12}}, \quad \tilde{\dot{\epsilon}}_{12}^p = \dot{\epsilon}_{12}^p (1-d_{12}), \\ \tilde{\sigma}_{23} = \frac{\sigma_{23}}{1-\lambda d_{12}}, \quad \tilde{\dot{\epsilon}}_{23}^p = \dot{\epsilon}_{23}^p (1-\lambda d_{12}), \\ \tilde{\sigma}_{31} = \frac{\sigma_{31}}{1-\lambda d_{12}}, \quad \tilde{\dot{\epsilon}}_{31}^p = \dot{\epsilon}_{31}^p (1-\lambda d_{12}), \end{array} \right. \quad (2)$$

et la surface de plasticité, fonction des contraintes effectives, est donnée par la relation

$$f(\tilde{\sigma}, \tilde{\epsilon}^p) = \sqrt{\tilde{\sigma}_{12}^2 + \tilde{\sigma}_{23}^2 + \tilde{\sigma}_{31}^2} - R_0 - R(\tilde{\epsilon}^p), \quad (3)$$

où  $R_0$  est la limite d'élasticité et  $R(\tilde{\epsilon}^p)$  la courbe d'écrouissage, fonction de la déformation plastique équivalente  $\tilde{\epsilon}^p$ .

## 2.2 Endommagement

On suppose un endommagement fragile en direction des fibres et un endommagement fragile en cisaillement plan et hors-plan. Les variables d'endommagement statiques  $d_{ij}^s$  sont exprimées en fonction de forces thermodynamiques  $Y_{ij}$ ,

$$Y_{11} = \frac{\sigma_{11}^2}{2E_1(1-d_{11})^2}, \quad (4)$$

$$Y_{22} = \frac{\sigma_{22}^2}{2E_2(1-d_{22})^2}, \quad (5)$$

$$Y_{12} = \frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}(1-d_{12})^2} + \lambda \frac{\sigma_{13}^2}{2G_{13}(1-\lambda d_{12})^2} + \lambda \frac{\sigma_{23}^2}{2G_{23}(1-\lambda d_{12})^2}. \quad (6)$$

En définissant les valeurs critiques en traction ( $Y_{11}^{c+}$ ,  $Y_{22}^{c+}$ ) et en compression ( $Y_{11}^{c-}$ ,  $Y_{22}^{c-}$ ), on obtient l'expression de l'endommagement statique en direction des fibres,

$$d_{11}^s = \begin{cases} 0 & \text{si } (Y_{11} < Y_{11}^{c+} \text{ et } \sigma_{11} > 0) \text{ ou } (Y_{11} < Y_{11}^{c-} \text{ et } \sigma_{11} < 0) \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}, \quad (7)$$

$$d_{22}^s = \begin{cases} 0 & \text{si } (Y_{22} < Y_{22}^{c+} \text{ et } \sigma_{22} > 0) \text{ ou } (Y_{22} < Y_{22}^{c-} \text{ et } \sigma_{22} < 0) \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}, \quad (8)$$

En cisaillement, on définit comme dans [5] une force équivalente  $\underline{Y}(t)$  qui exprime le couplage entre les contraintes selon les fibres et l'endommagement en cisaillement,

$$\underline{Y}(t) = \sup_{\tau \leq t} (\alpha_1 Y_{11}^+ + \alpha_2 Y_{22}^+ + Y_{12}) , \quad (9)$$

$$Y_{ii}^+ = \begin{cases} Y_{ii} & \text{si } \sigma_{ii} > 0 , \\ 0 & \text{sinon ,} \end{cases} \quad (10)$$

$\alpha_1$  et  $\alpha_2$  étant des paramètres additionnels du matériau. L'endommagement statique en cisaillement s'écrit alors

$$d_{12}^s = \min \left( 1, \left\langle \frac{\sqrt{\underline{Y}} - \sqrt{Y_0}}{\sqrt{Y_{12}^c} - \sqrt{Y_0}} \right\rangle_+ \right) , \quad (11)$$

où  $Y_0$  est un seuil que l'on considère généralement comme nul et  $Y_{12}^c$  une valeur critique à déterminer à l'aide de tests de chargement cyclique. Il faut noter que la définition (9) de  $\underline{Y}(t)$  est légèrement différente de l'expression proposée dans [5]. Dans leur article, les auteurs précisent en effet que  $\underline{Y}(t)$  ne doit pas dépendre des efforts en compression, ce qui est effectivement le cas dans leur modèle, où les forces thermodynamiques  $Y_{11}$  et  $Y_{22}$  sont nulles en compression. Dans le modèle décrit ici, le choix a été fait de ne pas distinguer les comportements en traction et en compression. Il en découle que  $Y_{11}$  et  $Y_{22}$  dépendent également des valeurs négatives de  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$ , d'où la modification apportée.

Afin d'éviter le problème de dépendance des résultats au maillage, typique des simulations d'endommagement, un effet retard est introduit via la définition d'une loi d'évolution de l'endommagement [6],

$$d_{ij} = \frac{1}{\tau_c} \left( 1 - e^{-a_c (d_{ij}^s - d_{ij})_+} \right) , \quad (12)$$

où  $\tau_c$  est un temps caractéristique qui borne la vitesse d'endommagement.

### 3 Implantation

Le modèle comportemental décrit ci-dessus a été implanté dans le logiciel *Metafor*, un code éléments finis grandes déformations, implicite/explicite, développé dans le service MN2L de l'Université de Liège. L'algorithme implicite se base sur le principe d'équivalence en déformations de Lemaître, qui permet d'écrire la loi d'élasticité linéaire du matériau endommagé [7]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^e &= \mathbb{H}^{-1} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\ &= \mathbb{H}_d^{-1} : \boldsymbol{\sigma} , \end{aligned} \quad (13)$$

où  $\mathbb{H}$  est le tenseur de Hooke d'ordre 4 et  $\mathbb{H}_d$  le tenseur endommagé dont les composantes non-nulles sont données, pour le modèle défini par l'expression (1), par les relations

$$\begin{bmatrix} \mathbb{H}_{d,1111} & \mathbb{H}_{d,1122} & \mathbb{H}_{d,1133} \\ \mathbb{H}_{d,2211} & \mathbb{H}_{d,2222} & \mathbb{H}_{d,2233} \\ \mathbb{H}_{d,3311} & \mathbb{H}_{d,3322} & \mathbb{H}_{d,3333} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1(1-d_{11})} & -\frac{v_{12}}{E_1} & -\frac{v_{13}}{E_1} \\ -\frac{v_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2(1-d_{22})} & -\frac{v_{23}}{E_2} \\ -\frac{v_{13}}{E_1} & -\frac{v_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} \end{bmatrix}^{-1} , \quad (14)$$

$$\mathbb{H}_{d,1212} = \mathbb{H}_{d,2121} = 2G_{12}(1-d_{12}) , \quad (15)$$

$$\mathbb{H}_{d,1313} = \mathbb{H}_{d,3131} = 2G_{13}(1-\lambda d_{12}) , \quad (16)$$

$$\mathbb{H}_{d,2323} = \mathbb{H}_{d,3232} = 2G_{23}(1-\lambda d_{12}) . \quad (17)$$

L'intégration temporelle se fait selon le formalisme Lagrangien actualisé. Partant de (13), les contraintes au temps  $t_1$  s'expriment en fonction des grandeurs au pas de temps précédent  $t_0$ ,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t_1) &= \mathbb{H}_d(t_1) : (\boldsymbol{\varepsilon}^e(t_0) + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e) \\ &= \mathbb{H}_d(t_1) : \left( (\mathbb{H}_d(t_0))^{-1} : \boldsymbol{\sigma}(t_0) + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e \right) . \end{aligned} \quad (18)$$

En exprimant l'incrément de déformation élastique comme la différence entre l'incrément de déformation total et l'incrément de déformation plastique,

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e = \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad (19)$$

on obtient

$$\boldsymbol{\sigma}(t_1) = \mathbb{H}_d(t_1) : \left( (\mathbb{H}_d(t_0))^{-1} : \boldsymbol{\sigma}(t_0) + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \right). \quad (20)$$

L'hypothèse du retour radial conduit à l'expression suivante de l'incrément de déformation plastique,

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \Gamma \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (21)$$

où  $\Gamma$  correspond à l'incrément de déformation plastique équivalente  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ . La dérivée de la surface de plasticité, dans le cas du matériau endommagé, s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2\sigma_{eq}} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\tilde{\sigma}_{12}}{1-d_{12}} & \frac{\tilde{\sigma}_{13}}{1-\lambda d_{12}} \\ \frac{\tilde{\sigma}_{21}}{1-d_{12}} & 0 & \frac{\tilde{\sigma}_{23}}{1-\lambda d_{12}} \\ \frac{\tilde{\sigma}_{31}}{1-\lambda d_{12}} & \frac{\tilde{\sigma}_{32}}{1-\lambda d_{12}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

En définissant le prédicteur élastique des contraintes

$$\boldsymbol{\sigma}_{tr}(\mathbb{D}(t_1)) = \mathbb{H}_d(t_1) : \left( (\mathbb{H}_d(t_0))^{-1} : \boldsymbol{\sigma}(t_0) + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \right), \quad (23)$$

l'égalité (20) devient

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t_1) &= \boldsymbol{\sigma}_{tr}(\mathbb{D}(t_1)) - \mathbb{H}_d(t_1) : \left( \Gamma \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \\ &= \boldsymbol{\sigma}_{tr}(\mathbb{D}(t_1)) - \Gamma \boldsymbol{\sigma}_n, \end{aligned} \quad (24)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}_n$  est le tenseur normal à la surface de plasticité,

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbb{H}_d(t_1) : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (25)$$

En chaque point de Gauss, il faut donc déterminer simultanément l'incrément de déformation plastique équivalente  $\Gamma$  et les variables d'endommagement en  $t_1$ , que l'on notera globalement  $\mathbf{D}(t_1)$ . On procède de manière itérative, en définissant deux boucles imbriquées : soit une boucle sur les variables d'endommagement  $\mathbf{D}^j$  à l'intérieur de laquelle se trouve une boucle sur la variable plastique  $\Gamma^{j,k}$ , calculée par Newton-Raphson. L'algorithme a la forme suivante :

Tant que  $\mathbf{D}^j$  n'a pas convergé :

• Calculer :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{tr}^j &= \mathbb{H}(\mathbf{D}^j) : (\boldsymbol{\varepsilon}^e(t_0) + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}), \\ f^{j,0} &= \sigma_{eq} \left( \boldsymbol{\sigma}_{tr}^j, \mathbf{D}^j \right) - R(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(t_0)) - R_0. \end{aligned}$$

• Si  $f^{j,0} > 0$  :

– Calculer :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_n^j &= \left( \mathbb{H}(\mathbf{D}^j) : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left( \mathbf{D}^j, \boldsymbol{\sigma}_{tr}^j \right) \right), \\ \boldsymbol{\sigma}^{j,0} &= \boldsymbol{\sigma}_{tr}^j, \\ k &= 0. \end{aligned}$$

– Tant que  $f^{j,k} \neq 0$  :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \sigma} \Big|^{j,k} &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} \left( \mathbf{D}^j, \sigma^{j,k} \right), \\
\frac{\partial \sigma_{\text{eq}}}{\partial \Gamma} \Big|^{j,k} &= - \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \Big|^{j,k} : \mathbb{H}(\mathbf{D}^j) : \frac{\partial f}{\partial \sigma} \Big|^{j,k} \right), \\
\frac{\partial f}{\partial \Gamma} \Big|^{j,k} &= \frac{\partial \sigma_{\text{eq}}}{\partial \Gamma} \Big|^{j,k} - \frac{\partial R(\bar{\epsilon}^p(t_0) + \Gamma^{j,k})}{\partial \Gamma}, \\
\Gamma^{j,k+1} &= \Gamma^{j,k} - \frac{f^{j,k}}{\frac{\partial f}{\partial \Gamma} \Big|^{j,k}}, \\
\sigma^{j,k+1} &= \sigma_{\text{tr}}^j - \Gamma^{j,k+1} \sigma_{\text{n}}^j, \\
f^{j,k+1} &= \sigma_{\text{eq}} \left( \sigma^{j,k+1}, \mathbf{D}^j \right) \\
&\quad - R \left( \bar{\epsilon}^p(t_0) + \Gamma^{j,k+1} \right) - R_0, \\
k &= k + 1.
\end{aligned}$$

• Calculer :

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^{j+1} &= \mathbf{D} \left( \sigma^{j,k} \right), \\
j &= j + 1.
\end{aligned}$$

## 4 Applications

### 4.1 Traction d'une éprouvette trouée

Afin de tester l'implantation du modèle dans le code, la traction jusqu'à rupture d'une éprouvette percée en son centre (Fig. 2) a été simulée. Le laminé se compose de 12 plis superposés, d'empilement  $[(+45^\circ, 0^\circ)_3]_S$ , mais un huitième seulement de l'éprouvette est modélisé grâce aux symétries. Les plis du laminé sont tous maillés à l'aide d'éléments de volume tandis que des éléments d'interface sont intercalés entre les plis d'orientations différentes. La Fig. 3 montre l'endommagement se développant d'abord dans les plis à  $0^\circ$  selon un plan perpendiculaire à la direction de traction, et le délaminage qui se produit entre les plis d'orientations différentes à partir des bords de la perforation.

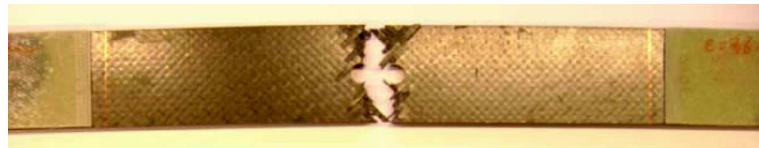


FIG. 2 – Eprouvette trouée en laminé d'empilement  $[(+45^\circ, 0^\circ)_3]_S$  après un test en traction jusqu'à rupture.

### 4.2 Impact sur une plaque

L'objectif final étant l'étude de l'endommagement d'un laminé suite à un impact d'énergie fixée, une simulation d'impact sur une plaque rectangulaire a été réalisée. Les conditions aux limites reproduisent aussi fidèlement que possible le dispositif réel de test (Fig. 4), où la plaque repose sur un cadre et est maintenue en place à l'aide de quatre fixations. Le cadre et les fixations sont représentés à l'aide de contacts définis entre les zones correspondantes de la surface de la plaque et des plans fixes. L'impacteur est représenté par une sphère indéformable de masse donnée, dont la vitesse initiale est fixée à une valeur dépendant de l'énergie d'impact souhaitée. La Fig. 5 montre le bilan d'énergie du modèle éléments finis au cours de la simulation : l'énergie cinétique de la sphère, les énergies cinétique et de déformation

de la plaque et l'énergie dissipée en raison de la plasticité et de l'endommagement. En fin de calcul, l'énergie dissipée numériquement représente environ 0.5% du total. La force exercée sur l'impacteur et le déplacement du point central de la plaque (Fig. 6) sont des grandeurs mesurées expérimentalement, qui seront nécessaires pour les comparaisons entre les simulations et l'expérience. La Fig. 7 montre la propagation de l'endommagement dans les plis au cours de l'impact.

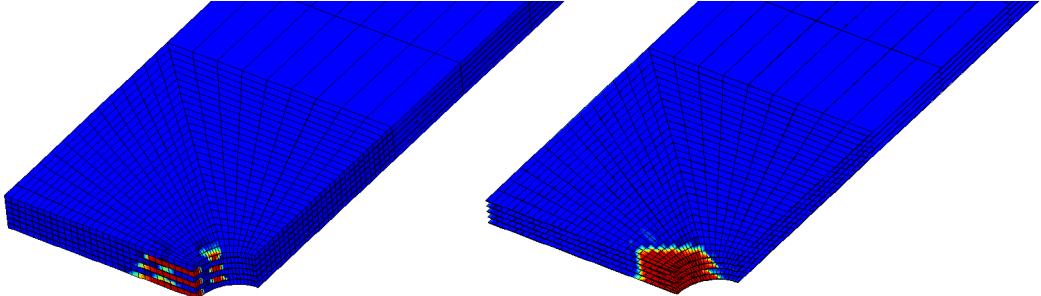


FIG. 3 – Endommagement dans les plis (à gauche) et au niveau de l'interface (à droite) calculés par éléments finis pour un modèle représentant un huitième du laminé.

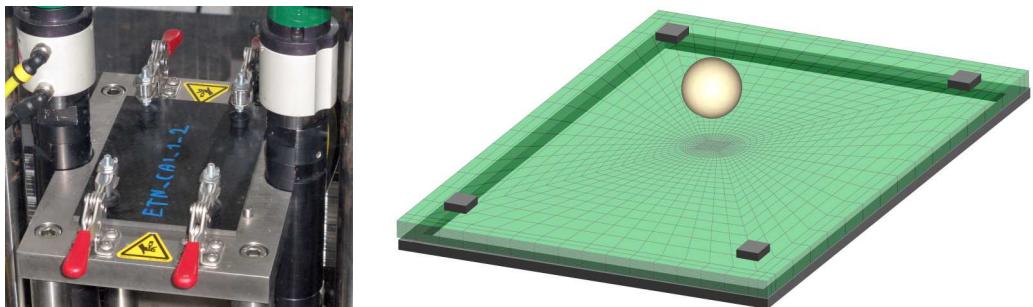


FIG. 4 – A gauche, dispositif expérimental du test d'impact à basse énergie sur une plaque en composite (Université Catholique de Louvain, UCL-IMAP) ; à droite, modèle éléments finis de la plaque et représentation schématique des conditions aux limites.

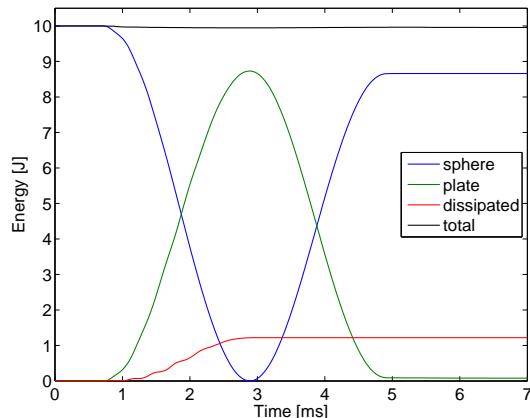


FIG. 5 – Bilan énergétique de l'impact à 10 J sur une plaque en composite tissé : énergie cinétique de la sphère, énergie de la plaque et énergie dissipée.

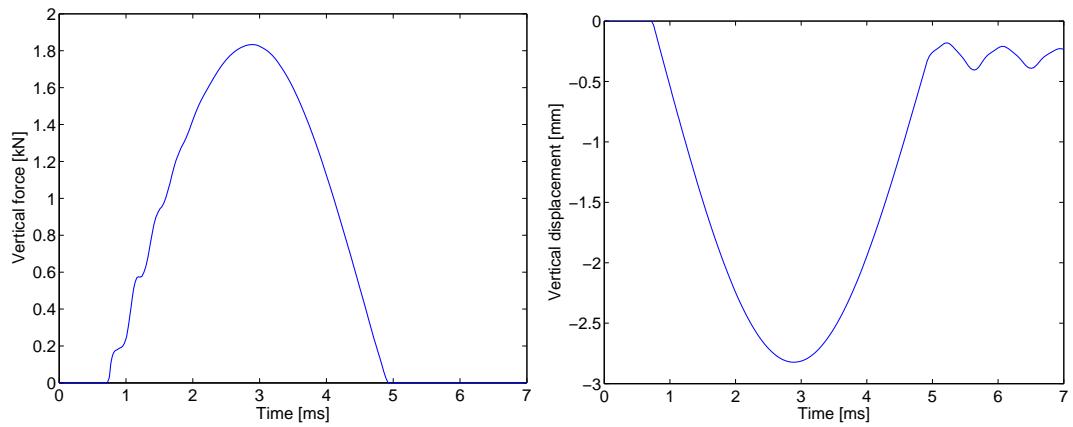


FIG. 6 – A gauche, force verticale exercée sur l’impacteur en fonction du temps ; à droite, déplacement du point central de la plaque au cours du temps.

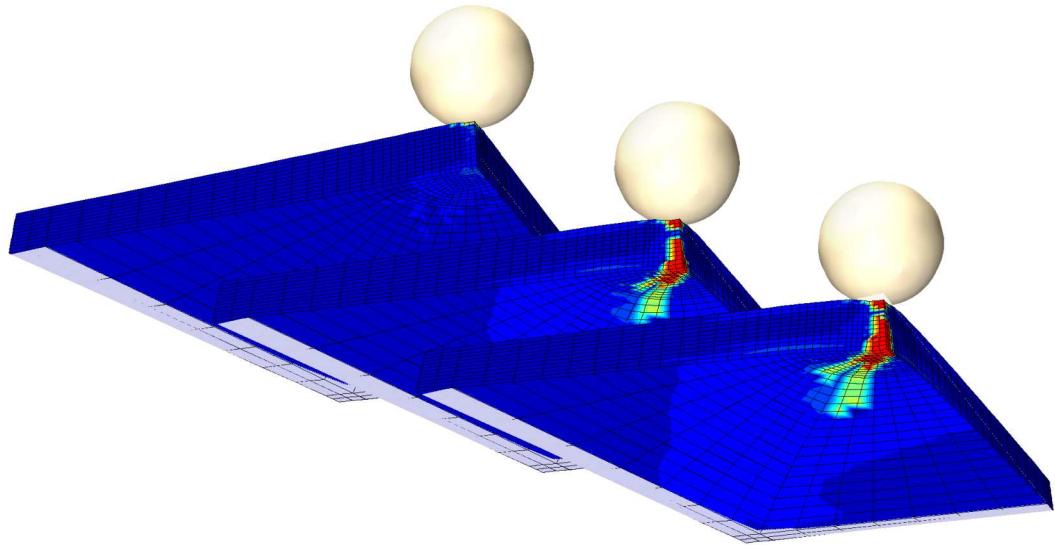


FIG. 7 – Niveau d’endommagement, tous modes confondus, dans un quart de la plaque à trois moments différents de l’impact.

## 5 Conclusions

Un modèle comportemental tridimensionnel pour des laminés à fibres tissées a été présenté. Son implantation dans un code éléments finis implicite a été décrite, en particulier l'algorithme de calcul des contraintes, des variables de plasticité et des variables d'endommagement en chaque point de Gauss. Les tests d'identification des paramètres étant en cours, des simulations ont été réalisées avec des paramètres de la littérature afin de tester le modèle : d'abord une traction simple d'éprouvette perforée en son centre, puis un impact à faible énergie sur une plaque rectangulaire.

## Références

- [1] P. Ladevèze, E. Le Dantec. *Damage modelling of the elementary ply for laminated composites*, Composites Science and Technology, vol. 43, 257-267, 1992.
- [2] O. Allix, P. Ladevèze. *Interlaminar interface modeling for the prediction of laminate delamination*, Composite Structures, vol. 22, 235-242, 1992.
- [3] C. Bordreuil, C. Hochard. *Finite element computation of woven ply laminated composite structures up to rupture*. Applied Composite Materials, vol. 11, 127-143 , 2004.
- [4] C. Hochard, S. Miot, N. Lahellec, F. Mazerolle, M. Herman, J.P. Charles. *Behaviour up to rupture of woven ply laminate structures under static loading conditions*, Composites : Part A, vol. 80, 321-326, 2008.
- [5] C. Hochard, P.-A. Aubourg, J.-P. Charles. *Modelling of the mechanical behaviour of woven-fabric CFRP laminates up to failure*. Composites Science and Technology, vol. 61, 221-230, 2001.
- [6] O. Allix, P. Feissel, P. Thévenet. *A delay damage mesomodel of laminates under dynamic loading : basic aspects and identification issues*, Computers and Structures, vol. 81, 1177-1191, 2003.
- [7] P.-P. Jeunechamps. *Simulation numérique, à l'aide d'algorithmes thermomécaniques implicites, de matériaux endommageables pouvant subir de grandes vitesses de déformation*, PHD, Université de Liège, 2008.