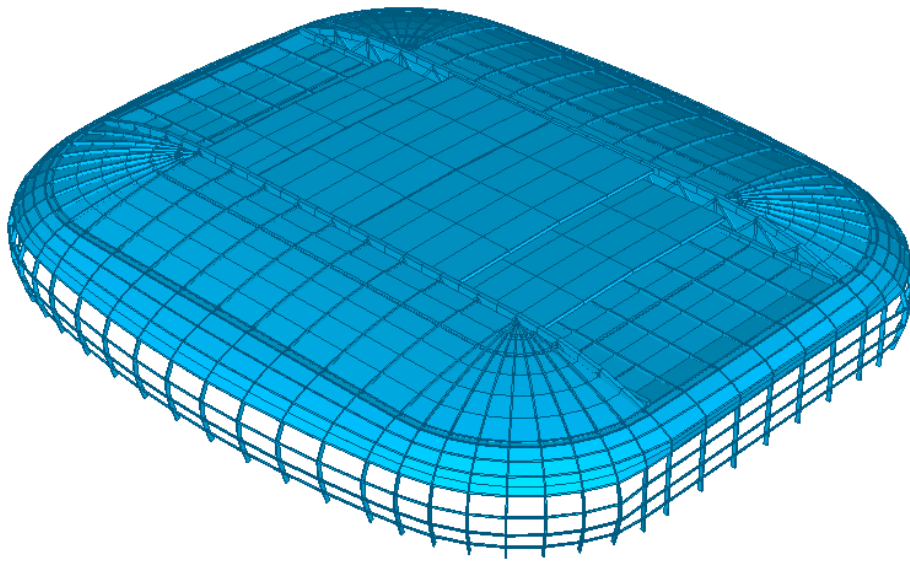


Étude du comportement d'une toiture de grandes dimensions soumise à un vent turbulent

Application : le Grand Stade de Lille Métropole



Composition du jury :
M. Vincent de Ville de Goyet
M. Vincent Denoël
M. Grigorios Dimitriadis
M. Gérard Grillaud

Mémoire de fin d'études réalisé par
Blaise Nicolas en vue de l'obtention
du grade d'Ingénieur civil construction
à finalité approfondie

*Je tiens à remercier le promoteur de ce travail de fin d'études
Monsieur le Professeur Vincent de Ville de Goyet du bureau d'études Greisch.*

*Je le remercie pour sa patience et les explications
qu'il m'a données tout au long de ce travail.*

*Merci également à Monsieur le Professeur Vincent Denoël, pour sa confiance,
sa disponibilité même depuis l'Australie et ses précieux conseils.*

*Au sein du bureau d'études Greisch, je remercie Monsieur Michaël Schepens
pour sa collaboration et Monsieur Yves Duchêne pour sa participation
et ses remarques lors des réunions.*

*Je remercie tout particulièrement mes parents et ma famille
pour leur soutien et le temps passé à la relecture.*

*Enfin, un dernier remerciement à Messieurs Vincent de Ville de Goyet,
Vincent Denoël, Grigorios Dimitriadis et Gérard Grillaud qui m'ont fait
l'honneur de lire et d'assister à la présentation de ce travail de fin d'études.*

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Motivations personnelles	1
1.2	Objectifs du travail de fin d'études	1
1.3	Plan du travail	2
1.4	Projet Grand Stade Lille Métropole	3
I	Partie théorique	5
1	Théorie des probabilités et théorie des processus aléatoires	6
1.1	Introduction	6
1.2	La théorie des probabilités	6
1.2.1	Caractérisation des variables aléatoires	6
1.2.2	Caractérisation des variables aléatoires conjointes	8
1.3	La théorie des processus aléatoires	9
1.3.1	Caractérisation des processus aléatoires	9
1.3.2	Caractérisation des processus aléatoires conjoints	12
1.3.3	Note sur la définition de la densité spectrale de puissance	15
1.3.4	Statistique des valeurs extrêmes	16
2	L'analyse dynamique	17
2.1	Introduction	17
2.1.1	Caractère déterministe ou stochastique de l'équation du mouvement	18
2.1.2	Base nodale, base modale	18
2.1.3	Domaine temporel, domaine fréquentiel	20
2.1.4	Les diverses possibilités d'analyse	21
2.2	Les méthodes déterministes	22
2.2.1	En base nodale	22
2.2.2	En base modale	22
2.3	La démarche stochastique	23
2.3.1	Implémentation numérique de l'analyse stochastique	24
2.3.2	Estimation de la matrice des moments spectraux d'ordre i des amplitudes modales	24

II Partie appliquée : calcul au vent turbulent du Grand Stade de Lille Métropole 28

1	Description statique de la structure	29
1.1	Introduction	29
1.2	Système d'axes	29
1.3	Description des éléments supportant la couverture du stade	30
1.3.1	Les méga-poutres	30
1.3.2	Les poutres transversales	32
1.3.3	Les fléaux	33
1.3.4	Les pannes	35
1.4	Description de la couverture du stade	35
1.5	Description du système de contreventements	38
1.5.1	Description du mode de reprise des charges verticales.	39
1.5.2	Description du mode de reprise des charges horizontales.	41
2	Hypothèses générales de calcul au vent	42
2.1	Introduction	42
2.2	Caractéristiques du vent sur le site	42
2.3	Simulation en veine d'essai	43
2.4	Exploitation des résultats du CSTB	45
2.4.1	Convention d'orientation pour les pressions	45
2.5	Méthodologie du calcul au vent	46
2.5.1	Méthodologie pour le dimensionnement	46
2.5.2	Établissement des extrema centrés	47
2.6	Liste des efforts étudiés	47
3	Analyse des signaux de pressions	51
3.1	Introduction	51
3.2	Vent à 75°	52
3.2.1	Analyse aérodynamique	52
3.2.2	Analyse statistique	53
3.3	Vent à 165°	56
3.3.1	Analyse aérodynamique	56
3.3.2	Analyse statistique	57
3.4	Vent à 120°	59
3.4.1	Analyse aérodynamique	59
3.4.2	Analyse statistique	59
3.4.3	Observation des densités spectrales unilatérales des pressions mesurées aux capteurs.	62
4	Analyse dynamique du stade de Lille	65
4.1	Introduction	65
4.2	Description du modèle éléments finis 3D	65
4.3	Description de l'analyse modale	66
4.3.1	Amortissement choisi au sein des modes	66
4.3.2	Troncature de la base des modes propres	66
4.3.3	Résultats de l'analyse modale	67

4.4	Décomposition d'un effort	69
4.5	Calcul de la contribution quasi-statique de l'effort	71
4.5.1	Méthodes déterministes en base nodale	71
4.6	Calcul de la contribution variable de l'effort	73
4.6.1	Introduction	73
4.6.2	Méthodes déterministes en base modale	73
4.7	Calcul des extrema centrés	74
4.7.1	Sur base de la réponse temporelle	74
4.7.2	Via la démarche stochastique	75
5	Mise en pratique des différentes méthodes — Leurs spécificités	76
5.1	Introduction	76
5.2	Clarification quant à la prise en compte ou non des fréquences parasites	76
5.3	Superposition modale avec résolution des équations découplées par Newmark	78
5.4	Démarche stochastique	79
5.4.1	Introduction	79
5.4.2	Calcul des densités spectrales des forces généralisées	79
6	Analyse et comparaison des résultats fournis par les différentes méthodes	85
6.1	Introduction	85
6.2	Calcul de l'effort moyen	86
6.2.1	En base nodale	86
6.2.2	En base modale	89
6.3	Calcul en base nodale	91
6.3.1	Contribution quasi-statique de l'effort	91
6.4	Calcul en base modale	93
6.4.1	Amplitudes modales	93
6.4.2	Résultats pour les douze efforts	99
6.5	Comparaison des contributions quasi-statiques et dynamiques aux moments spectraux des efforts d'ordre 0 et d'ordre 2	102
6.6	Évaluation des extrema centrés	106
III	Conclusions	109
IV	Annexe	112
	Bibliographie	121

UNIVERSITÉ DE LIÈGE - FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES

Promoteur : M. Vincent de Ville de Goyet

Titre : Étude du comportement d'une toiture de grandes dimensions soumise à un vent turbulent.

Énoncé :

Pour un certain nombre de structures, le vent est une sollicitation majeure. L'Eurocode EN 1991 1-4 définit les efforts à considérer pour des structures de dimensions "classiques" :

- pour des ouvrages d'art : longueur inférieure à 150-200 m ;
- pour des immeubles : hauteur inférieure à 100-150 m ;
- pour des toitures : longueur caractéristique inférieure à 100-150 m.

Dans ces limites, le calcul peut être réalisé en chargeant la structure par des efforts statiquement équivalents définis par la norme.

En dehors de ces limites, il est demandé de faire appel à des essais en soufflerie pour définir les sollicitations. Celles-ci ont une distribution spatiale et temporelle. Les pressions ont une distribution qui est :

- variable sur la longueur de la structure ;
- variable au cours du temps.

Les essais en soufflerie permettent de définir ces distributions spatiale et temporelle.

Pour le viaduc de Millau, un module de calcul a été développé pour prendre en compte ces caractéristiques du vent. A partir des coefficients aérodynamiques du tablier et les caractéristiques de turbulence du vent, il est possible de calculer les efforts internes du vent en prenant en compte la réponse dynamique de l'ouvrage. Ce module de calcul peut être utilisé pour toute structure "linéaire" : un pont, un immeuble de grande hauteur.

Dans le cas d'une toiture de grande surface, la couverture d'une gare, la toiture d'un stade, la problématique est la même avec la difficulté qu'il faut prendre en compte le fait que les pressions agissent cette fois sur une surface et non plus sur une "ligne". Il est proposé de développer un module de calcul au vent turbulent pour ce type de structure. L'approche théorique de ce type de calcul est aujourd'hui maîtrisée.

Le travail consistera à écrire un programme, soit sous Matlab, soit dans le logiciel FINELG. L'aboutissement du travail consistera à étudier le comportement du nouveau Stade de Lille pour lequel on disposera des mesures effectuées en soufflerie. Il sera alors possible de confronter les nouveaux résultats avec ceux obtenus avec un dimensionnement classique.

Messieurs les membres du jury :

V. de Ville de Goyet

V. Denoël

G. Dimitriadis

G. Grillaud

Étude du comportement d'une toiture de grandes dimensions soumise à un vent turbulent — Application : le Grand Stade de Lille Métropole.

Blaise Nicolas — section construction — Année académique 2009-2010.

Résumé. L'objectif de ce travail est de développer un module de calcul au vent turbulent via le logiciel Matlab. Les problèmes liés aux mesures de pressions en soufflerie (fréquences parasites, bruit...) sont abordés. Afin de résoudre l'équation de mouvement, plusieurs méthodes sont mises en œuvre : premièrement, une superposition modale en résolvant les équations découplées par Newmark (NK) et par transformée de Fourier (TF). Deuxièmement, une analyse stochastique (SRSS, CQC) est implémentée en appliquant l'approximation en bruit blanc (BB). Le but ultime étant le dimensionnement de la structure, le calcul d'extrema est effectué via une méthode simplifiée et via la statistique des valeurs extrêmes.

Les résultats sont : la méthode Newmark, avec le pas temps imposé, engendre une elongation de la période et est donc à proscrire ; la corrélation dynamique étant faible, l'analyse SRSS pour la contribution résonante est suffisante ; la méthode TF donne des résultats forts proches de la méthode CQC-BB de sorte qu'elles sont équivalentes. En ce qui concerne le calcul des valeurs extrêmes, la méthode simplifiée permet de mettre en évidence des facteurs de pointe positifs et négatifs ce qui n'est pas le cas pour la statistique des valeurs extrêmes appliquée en considérant le processus gaussien.

En conclusion, la démarche stochastique est recommandée car elle apporte une réponse vis-à-vis du traitement des fréquences parasites pour la contribution résonante.

Mots-clés : vent turbulent ; Newmark ; Fourier ; SRSS ; CQC ; BB ; valeurs extrême ; facteurs de pointe.

Abstract. The aim of this project is the development of a model allowing the calculation of the wind turbulence, using Matlab software. The problems associated wind tunnel pressure measurements (e.g. frequency noise, noise) are taken into account. In order to solve the equation of motion, several methods are applied. First, modal superposition solving decoupled equations by Newmark (NK) and by Fourier transform (FT). Secondly, a stochastic analysis (SRSS and CQC) is performed, using white noise approximation (BB). As an ultimate goal of designing the structure, the calculation of extreme values is realized using a simplified method as well as the statistic method of extreme values.

Results show that Newmark method, with fixed time step, produces an elongation of the period and is therefore not recommend. The modal correlation being low, the SRSS analysis is sufficient to determine the dynamic contribution. Results provided by the FT method are closer to the results obtain with CQC-BB method, thus these methods appear to be equivalent. Regarding the calculation of extreme values, the simplified method can calculate positive and negative peak factors, whereas the statistic method of extreme values, applied considering a Gaussian process, can't.

In conclusion, the stochastic methods is recommended because she had the advantage of treating appropriately the noise frequencies for the dynamic contribution.

Keywords : turbulent wind ; Newmark ; Fourier ; SRSS ; CQC ; BB ; extreme values ; peak factors.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Motivations personnelles

Pourquoi avoir choisi ce travail de fin d'études ? Pour expliquer ce choix, un petit bond dans le passé s'impose. En première master, j'ai¹ pu apprécier le cours de mécanique des structures II enseigné par les professeurs H. Degée et V. Denoël. Les séances d'exercices sur Matlab m'ont plu de même que la théorie expliquée (SDOF, MDOF, analyse en base modale, analyse sismique et dynamique aléatoire). La dynamique aléatoire a alors particulièrement retenu mon attention. Tout de suite, lorsque j'ai commencé à lire les propositions de TFE, une seule m'a captivé : "Étude du comportement d'une toiture de grandes dimensions soumise à un vent turbulent".

Premièrement, l'étude au vent turbulent devait se réaliser en utilisant, notamment, une démarche stochastique, ce qui représentait pour moi à la fois un challenge et une opportunité d'augmenter mes connaissances dans ce type de démarche. Deuxièmement, la structure sur laquelle je travaillerais est grandiose : un stade de football de 50000 places avec des toitures mobiles ! J'ai donc tout de suite accroché à ce travail de fin d'études. De plus, il était proposé par le bureau d'études Greisch, le promoteur étant Monsieur le Professeur V. de Ville de Goyet. Étudiant attentif au cours de méthodes numériques non linéaires enseigné par Monsieur le Professeur V. de Ville de Goyet j'avais déjà pu apprécier sa disponibilité afin d'éclairer des zones d'ombre.

Ainsi, avec Monsieur le Professeur V. de Ville de Goyet comme promoteur et Monsieur le Professeur V. Denoël comme personne de guidance, je savais que je serais efficacement suivi et que l'enseignement que je tirerais de ce TFE serait important.

1.2 Objectifs du travail de fin d'études

Pour des toitures ayant une longueur caractéristique inférieure à 100-150 mètres (selon le type d'ouvrage) l'Eurocode EN 1991 1-4 définit les efforts à considérer et permet de prendre en compte de façon simplifiée les effets dynamiques. **Le Grand Stade de Lille Métropole, de par ses dimensions** (230 mètres de longueur sur 200 mètres de largeur), **ne peut être étudié de façon simplifiée**. Des essais en soufflerie ainsi qu'une analyse plus poussée sont alors nécessaires pour quantifier les effets du vent turbulent.

L'objectif de ce travail est de développer un module de calcul au vent turbulent, adapté à ce type de structure, via le logiciel Matlab. **Plusieurs méthodes y sont mises en œuvre** : superposition modale avec résolution des équations découplées par Newmark, superposition

1. Je me suis permis le pronom "je" pour les motivations personnelles mais dans le corps du travail le pronom "nous" est employé comme il est d'usage lors de la rédaction d'un travail de fin d'études.

modale avec résolution des équations découplées par transformée de Fourier, analyse stochastique (SRSS et CQC).

Le but ultime étant le dimensionnement de la structure, le **calcul de valeurs extrêmes** est effectué suivant une méthode simplifiée et selon la statistique des valeurs extrêmes. Au final, les résultats obtenus à l'aide des différentes méthodes sont comparés entre eux mais également avec des résultats fournis par le bureau d'études Greisch.

1.3 Plan du travail

Le travail comporte trois parties, elles-mêmes subdivisées en chapitres.

La première partie regroupe deux théories essentielles pour l'étude au vent turbulent d'une structure.

Le premier chapitre est un rappel de la théorie des probabilités et des processus aléatoires. Ces théories sont les bases mathématiques nécessaires afin de mettre en œuvre une analyse stochastique de la structure.

Le deuxième chapitre traite de l'analyse dynamique des structures et reprend les diverses façons de résoudre l'équation du mouvement (en base nodale ou modale, en temporel ou en fréquentiel...).

La deuxième partie est l'application pratique, elle contient cinq chapitres.

Le premier chapitre permet de se familiariser avec la structure sur laquelle on travaille. Les éléments principaux supportant la couverture du stade (méga-poutres, poutres transversales...) sont décrits afin de comprendre la statique de la structure et par conséquent le cheminement des efforts au sein de celle-ci.

Le deuxième chapitre reprend les hypothèses générales de calcul au vent sur lesquelles reposent les essais en soufflerie et les principales caractéristiques du vent sur le site (vitesse de référence, intensité de turbulence...). La simulation en veine d'essai est expliquée et des caractéristiques techniques (facteurs d'échelles, fréquence d'échantillonnage...) sont reprises. La méthodologie utilisée par le bureau d'étude pour le dimensionnement de la structure est expliquée et les éléments étudiés au sein de ce travail sont décrits.

Le troisième chapitre concerne l'analyse des signaux de pressions mesurés en chaque capteur sur la toiture. Un traitement statistique est effectué (moyennes, écarts-types...) et les résultats sont analysés et expliqués en prenant en compte, dans une certaine mesure, l'interaction fluide-structure. Les problèmes liés aux mesures des pressions (fréquences parasites, bruit...) sont abordés.

Le quatrième chapitre est l'application au Stade de Lille de l'analyse dynamique des structures. Il comprend en premier lieu la description du modèle éléments finis 3D ainsi que les résultats de l'analyse modale de la structure (fréquences propres, déformées modales...). En second lieu, les différentes contributions (quasi-statique, dynamique) à un effort sont définies. Suivant la contribution calculée, les méthodes mises en œuvre sont expliquées. Au final, deux approches pour le calcul des extrema centrés sont développées : sur base de la réponse temporelle et via la statistique des valeurs extrêmes.

Le cinquième chapitre reprend les spécificités associées aux différentes méthodes lors de leur mise en pratique.

Le sixième chapitre compare l'ensemble des différentes étapes de calcul (amplitudes modales...) et les résultats obtenus par les différentes méthodes (écarts-types, facteurs de pointe...).

La troisième partie est la conclusion du travail. Les aspects positifs et négatifs des différentes méthodes mises en œuvre sont analysés. Pour les bureaux d'études intéressés par un calcul poussé

au vent turbulent d'une structure, quelques pistes de réflexion sont proposées (méthodes appropriées pour le calcul dynamique, étapes essentielles à contrôler, traitement des fréquences parasites éventuelles...).

1.4 Projet Grand Stade Lille Métropole

Le projet "Grand Stade Lille Métropole" répond aux nouveaux standards des stades modernes et notamment à la classification UEFA 5*. Sa capacité totale est de l'ordre de 50 000 places assises. Ce nouveau stade est implanté à Lille, en France, sur le site de la "Borne de l'Espoir".



FIG. 1.1 – Vue générale, Grand Stade de Lille Métropole. Source : [1].

Ce stade se différencie d'un stade classique par son toit rétractable en 30 minutes (le premier en France) permettant de créer un environnement clos. Une demi-pelouse mobile permet de mettre à jour une scène de spectacle (ouverture totale en 30 heures).

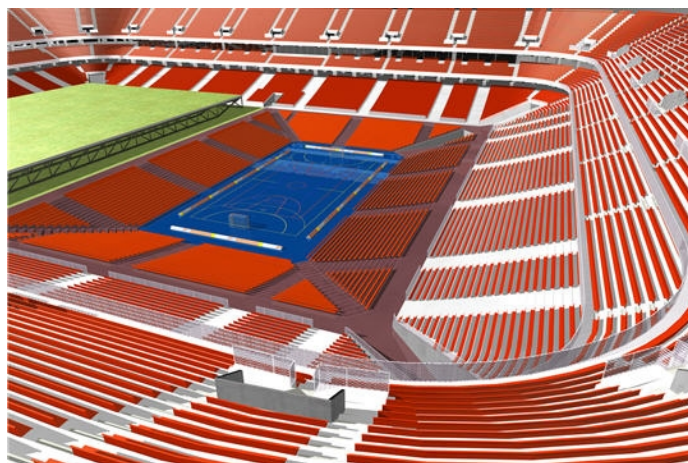


FIG. 1.2 – Vue du stade en configuration scène de spectacle. Source : [1].

Ces deux caractéristiques permettent au stade d'être une arène multi fonctionnelle. Ainsi, il ne s'agit pas seulement d'un stade de football mais aussi d'une salle de sports (basket-ball, hand-ball,

volley-ball, tennis...) et d'une salle de concert. Un des enjeux majeurs est de pouvoir accueillir des compétitions de natation (Championnat d'Europe), de tennis et bien entendu de football (candidature de la France à l'Euro 2016). Côté Nord, un écran géant occupe la façade extérieure.



FIG. 1.3 – Vue côté Nord, Grand Stade de Lille Métropole. Source : [2].

Le stade fait partie d'un complexe qui accueillera notamment des commerces, un restaurant ainsi que des hôtels. Dans son enceinte, il propose 3500 places de parking pour les voitures, 500 places de parking pour les motos, 20 places de parking pour les bus et 1000 places de stationnement pour les vélos.

L'accessibilité au site a bien entendu été étudiée (voir figure 1.4). Deux lignes de métro y mènent. Un nouvel échangeur autoroutier permet d'accéder directement aux parkings quelle que soit la provenance des spectateurs. De plus, des itinéraires cyclables continus et sécurisés seront aménagés le long des voies permettant un accès aisé aux places de parking pour les vélos.



FIG. 1.4 – Accessibilité au site de la "Borne de l'Espoir". Source [2].

Dans l'environnement proche du stade au Nord-Est se trouvent les bâtiments de la CPAM². A l'est, l'Université des Sciences et Technologies de Lille sera reliée au stade grâce à une passerelle enjambant l'autoroute.

Enfin, la construction est estimée à 440 millions d'euros que la communauté urbaine financera sur 31 ans.

2. Caisse primaire d'assurance maladie.

Première partie

Partie théorique

Chapitre 1

Théorie des probabilités et théorie des processus aléatoires

1.1 Introduction

Les rappels de la théorie des probabilités et des processus aléatoires sont largement inspirés des chapitres 2 et 3 de la référence [3]. Ces deux théories sont déjà très correctement synthétisées dans cet ouvrage et par conséquent le même canevas est suivi. Néanmoins, ce rappel des théories garde toute sa pertinence, étant donné que l'essentiel de la suite du travail repose sur ces notions de base. Nous avons donc jugé opportun de reporter au sein de ce travail ces notions élémentaires. Dans une moindre mesure, ce rappel est également échafaudé sur les chapitres 20 et 21 de la référence [4].

1.2 La théorie des probabilités

La théorie des probabilités est très utile en génie civil. En effet, elle permet de représenter des variables aléatoires telles que les déplacements, les accélérations ou encore les efforts extrêmes en un instant donné.

1.2.1 Caractérisation des variables aléatoires

Une **variable aléatoire** est un nombre, résultat d'une expérience aléatoire. La théorie des probabilités a pour but de caractériser statistiquement ces résultats scalaires d'expériences aléatoires. Ceci peut être entrepris à l'aide de la densité de probabilité mais aussi via la moyenne, la variance et l'écart-type.

Fonction de probabilité et densité de probabilité

L'étude d'une variable aléatoire discrète x passe par la connaissance de sa **probabilité d'occurrence**. Celle-ci est le rapport entre le nombre de résultats favorables N_{fav} et le nombre de résultats équiprobables N_{tot} :

$$p(x = x_i) = \frac{N_{fav}}{N_{tot}} \quad (1.1)$$

Ainsi, on définit la **fonction de probabilité** $p_x(x_i)$, qui attribue à chaque résultat possible x_i sa probabilité d'occurrence :

$$p_x(x_i) = p(x = x_i) \quad (1.2)$$

L'équation (1.2) implique que la somme des probabilités associées à chaque résultat possible soit égale à l'unité, cette condition est le **premier axiome de Kolmogorov** :

$$\sum_i p_x(x_i) = 1 \quad (1.3)$$

Une variable aléatoire discrète peut également être caractérisée par sa **fonction de répartition** qui attribue à chaque valeur x_i la probabilité que la variable aléatoire x lui soit inférieure :

$$F_x(x_i) = p(x \leq x_i) \quad (1.4)$$

Cette fonction est donc monotone croissante et prend les valeurs $F_x(x_i) = 0$ en $x_i = -\infty$ et $F_x(x_i) = 1$ en $x_i = +\infty$.

Lorsque la variable aléatoire est "continue", la définition donnée en (1.4) pour la fonction de répartition reste exacte. Cependant, la définition de la fonction de probabilité n'a plus de sens vu que le nombre de résultats équiprobables possibles devient infini. L'équivalent continu de la fonction de probabilité, appelé **densité de probabilité**, se définit à partir de la fonction de répartition :

$$p_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx} \text{ ou } F_x(x) = \int_{-\infty}^x p_x(x) dx \quad (1.5)$$

La fonction de répartition étant monotone croissante, la densité de probabilité est toujours positive.

A noter que la densité de probabilité n'est qu'un passage à la limite de la fonction de probabilité :

$$\begin{aligned} p_x(x_i) dx &= dF_x(x_i) &= F_x(x_i + dx_i) - F_x(x_i) \\ &= p(x \leq x_i + dx_i) - p(x \leq x_i) \\ &= p(x_i \leq x \leq x_i + dx_i) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Grandeurs scalaires : les moments

La densité de probabilité renferme une quantité importante d'informations qu'il est nécessaire de synthétiser au moyen de grandeurs scalaires qui en sont dérivées et appelées moments :

- d'ordre 1 : le **moyenne** $\mu = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_x(x) dx$
- d'ordre 2 : le **carré moyen** $\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_x(x) dx$

Il est également possible de travailler avec les **moments centrés** qui donnent une meilleure représentation physique de la dispersion (ordre 2) et de la symétrie (ordre 3) autour de la moyenne :

- **moment centré d'ordre 2** ou **variance** : $\sigma^2 = \overline{(x - \mu)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 p_x(x) dx = \overline{x^2} - \mu^2$. Cette grandeur positive est un indicateur de la dispersion autour de la moyenne.

L'écart-type $\sigma = \sqrt{\overline{x^2} - \mu^2}$ rapporté à la moyenne donne une idée de la dispersion : $d = \frac{\sigma}{\mu}$;

- **moment centré d'ordre 3** : $S = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^3 p_x(x) dx$. Ce moment centré rapporté au cube de l'écart-type est le **coefficient de dissymétrie** adimensionnel $\gamma_3 = \frac{S}{\sigma^3}$. Ce coefficient mesure l'asymétrie de la densité de probabilité autour de sa moyenne. Un coefficient négatif indique que les valeurs sont plutôt distribuées à gauche de la moyenne. Un coefficient positif indique que les valeurs sont plutôt distribuées à droite de la moyenne. **Notons que le coefficient de dissymétrie d'une distribution normale (ou de toute autre densité de probabilité symétrique) est nul.**

1.2.2 Caractérisation des variables aléatoires conjointes

Pour étudier une structure à plusieurs degrés de liberté il est nécessaire d'introduire la notion de densité de probabilité conjointe entre plusieurs variables aléatoires qui peuvent être, par exemple, les déplacements aux nœuds.

Fonction de probabilité conjointe et densité de probabilité conjointe

Le résultat d'une expérience aléatoire n'est maintenant plus un seul nombre mais plusieurs. Ces résultats peuvent toujours être discrets ou continus ce qui mène à la distinction entre fonction de probabilité et densité de probabilité conjointe.

Dans le cas de deux variables aléatoires continues x et y , la **densité de probabilité conjointe** se définit par :

$$p_{xy}(x_i, y_i) dx dy = p(x_i \leq x \leq x_i + dx_i \text{ et } y_i \leq y \leq y_i + dy_i) \quad (1.7)$$

Grandeurs scalaires : les moments

Afin de synthétiser l'information contenue dans la densité de probabilité conjointe, on définit à nouveau des grandeurs scalaires, appelées moments :

- la **moyenne selon x** :

$$\mu_x = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x p_{x,y}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_x(x) dx \quad (1.8)$$

- la **moyenne selon y** :

$$\mu_y = \bar{y} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y p_{x,y}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y p_y(y) dy \quad (1.9)$$

- la **variance selon x** :

$$\sigma_x^2 = \overline{(x - \mu_x)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 p_{x,y}(x, y) dx dy \quad (1.10)$$

- la **variance selon y** :

$$\sigma_y^2 = \overline{(y - \mu_y)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \mu_y)^2 p_{x,y}(x, y) dx dy \quad (1.11)$$

Afin de caractériser la corrélation existant entre deux variables aléatoires, il est judicieux de définir le **moment central croisé** entre les variables x et y :

$$\sigma_{xy} = \overline{(x - \mu_x)(y - \mu_y)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) p_{xy}(x, y) dx dy \quad (1.12)$$

On utilise souvent, afin de mieux apprécier la corrélation entre les deux variables aléatoires, le **coefficient de corrélation** ρ_{xy} adimensionnel défini par :

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (1.13)$$

et dont les valeurs sont comprises entre -1 et 1 (démontrable grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz).

Lorsque plus de deux variables aléatoires sont considérées en même temps, les variances et covariances sont reprises dans la matrice de covariance $[\sigma]$:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Dans le cadre d'une analyse stochastique, la définition de telles matrices pour les efforts internes d'un élément ou pour un effort interne entre différents éléments est très importante. Les termes hors diagonale permettent en effet d'apprécier la corrélation entre diverses variables aléatoires, et par exemple, les valeurs concomitantes aux efforts extrêmes.

1.3 La théorie des processus aléatoires

Le présent chapitre fournit les outils mathématiques nécessaires à la caractérisation des grandeurs probabilistes mises en jeu lors de l'analyse stochastique d'une structure. En effet, la théorie des processus aléatoires permet de passer de variables aléatoires à des fonctions d'une ou plusieurs variables.

Le passage par cette théorie, appliquée au chargement éolien, permet de savoir si le processus est stationnaire et comment se distribue son contenu fréquentiel. Ces deux informations sont déjà, à elles seules, capitales pour le dimensionnement au vent. Premièrement, le fait d'avoir un processus stationnaire permet de se fixer des **durées d'observation d'essais représentatives**. Deuxièmement, le contenu fréquentiel de la sollicitation étudiée permet de justifier, dans le cas d'une analyse en base modale, la **troncature de la base des modes propres**.

1.3.1 Caractérisation des processus aléatoires

Densités de probabilité

La **densité de probabilité de premier ordre** $p_x(x, t)$ est une fonction du temps puisque la densité peut éventuellement évoluer au cours du temps. Ainsi, $p_x(x, t)dx$ représente la probabilité que la fonction prenne une valeur comprise entre x et $x + dx$ à l'instant t .

Il est indispensable, afin de caractériser suffisamment le processus aléatoire, de considérer deux instants différents.

De fait, on introduit la **densité de probabilité d'ordre 2** :

$$p_x(x_1, t_1; x_2, t_2) \quad (1.15)$$

telle que :

$$p_x(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 = p(x_1 \leq x_{t_1} \leq x_1 + dx_1 \text{ et } x_2 \leq x_{t_2} \leq x_2 + dx_2) \quad (1.16)$$

Les fonctions moments

Au sein de la théorie des processus aléatoires, la définition des fonctions moments prend une forme semblable à celle des moments associés aux variables aléatoires :

- la **moyenne** :

$$\mu_x(t) = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_x(x, t) dx \quad (1.17)$$

- la **fonction d'autocorrélation** :

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[x(t_1), x(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p_x(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 \quad (1.18)$$

On définit également la **fonction d'autocovariance** qui est la fonction d'autocorrélation centrée.

Il est important de noter que si le processus est gaussien, les deux premiers moments suffisent à eux seuls à caractériser entièrement le processus. Dans le domaine de l'étude au vent des structures via une analyse stochastique, cette hypothèse de processus gaussien est généralement formulée. Ce sera également le cas dans le cadre de ce travail.

Si les **processus sont stationnaires**, ces deux fonctions sont indépendantes d'un changement de l'origine du temps : $\mu_x(t) = \mu_x$ est une constante et $R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(\Delta t)$ devient une fonction du décalage temporel $\Delta t = t_2 - t_1$.

Cependant, les définitions données de la moyenne et de la fonction d'autocorrélation font appel à des moyennes d'ensemble nécessitant le parcours d'un ensemble d'échantillons et le relevé de la valeur de la fonction en un instant choisi. Il serait plus aisé de ne considérer qu'un seul échantillon et de réaliser la moyenne en ne faisant varier cette fois que le temps. **Le théorème d'ergodicité**, illustré à la figure 1.1, postule que ces deux moyennes sont égales.

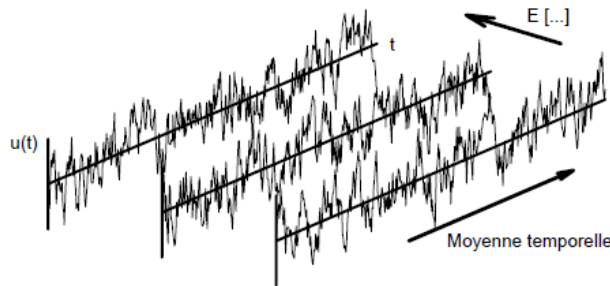


FIG. 1.1 – Illustration de l'Ergodicité. Source : [3].

La fonction d'autocorrélation calculée sur un échantillon d'un processus stationnaire :

$$R_{xx}(\Delta t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)x(t + \Delta t)dt \quad (1.19)$$

est donc supposée représenter la fonction d'autocorrélation du processus aléatoire. La fonction d'autocorrélation permet de définir une **échelle de temps** :

$$T_{xx} = \frac{1}{\sigma_{xx}^2} \int_0^{+\infty} R_{xx}(\Delta t)d\Delta t \quad (1.20)$$

qui représente un ordre de grandeur du temps de mémoire du processus aléatoire $x(t)$.

Les densités spectrales de puissance

La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation est la **densité spectrale de puissance (DSP)** :

$$S_{xx}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau)e^{-jw\tau}d\tau \quad (1.21)$$

Cette fonction est positive et réelle puisque la fonction d'autocorrélation est paire. **Cette fonction apporte une information capitale à savoir la distribution fréquentielle de l'énergie moyenne contenue dans le processus aléatoire.** Le théorème d'ergodicité suppose à nouveau que la densité spectrale de puissance peut être calculée à l'aide d'un seul échantillon :

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} |X_i(\omega, T)|^2 \quad (1.22)$$

Ceci est fort utile car en connaissant un échantillon du processus aléatoire, il est possible d'en calculer la fonction d'autocorrélation (1.19) et la densité spectrale de puissance (1.22).

La première **propriété fondamentale de la densité spectrale de puissance** :

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega)d\omega \quad (1.23)$$

est que son intégrale sur les pulsations est égale à la variance du processus considéré.

Il est intéressant de définir pour les processus aléatoires, l'équivalent des moments définis pour les variables aléatoires. Ces moments s'appellent les **moments spectraux** et sont définis par la relation :

$$m_i = \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^i S_{xx}(\omega)d\omega \quad (1.24)$$

On peut montrer que :

- le moment spectral d'ordre 0 est la variance du processus (déplacement) ;
- le moment spectral d'ordre 2 est la variance du processus dérivé (vitesse) ;
- le moment spectral d'ordre 4 est la variance du processus dérivé deux fois (accélération).

Ces notions sont essentielles lors du calcul des probabilités de franchissement de seuil et des valeurs maximales.

1.3.2 Caractérisation des processus aléatoires conjoints

Pour deux processus aléatoires différents, on définit également la **fonction de cross-corrélation** par :

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E[x(t_1), y(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 y_1 p_{xy}(x_1, t_1; y_1, t_2) dx_1 dy_1 \quad (1.25)$$

L'équation (1.25) est généralement remplacée par l'expression dérivée du théorème d'ergodicité qui permet un calcul plus simple :

$$R_{xy}(\Delta t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) y(t + \Delta t) dt \quad (1.26)$$

Cette fonction possède des propriétés semblables à celles de la fonction d'autocorrélation : la valeur de la fonction de cross-corrélation à l'origine est égale à la covariance :

$$R_{xy}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) y(t) dt = \sigma_{xy} \quad (1.27)$$

On définit également la **densité de puissance spectrale croisée** de deux processus aléatoires. Cette fonction caractérise la corrélation au même titre que la fonction de cross-corrélation. En effet, elle est définie comme étant sa transformée de Fourier :

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \leftrightarrow R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (1.28)$$

Elle est généralement complexe et satisfait la relation :

$$S_{xy}(\omega) = \overline{S_{yx}(\omega)} \quad (1.29)$$

puisque $R_{xy}(\Delta t) = R_{yx}(-\Delta t)$.

Tout comme le coefficient de corrélation défini pour les variables aléatoires ne peut varier que dans l'intervalle $[-1; 1]$ (conséquence de Cauchy-Schwartz), on peut démontrer une relation semblable pour la densité spectrale croisée :

$$|S_{xy}(\omega)|^2 \leq S_{xx}(\omega) S_{yy}(\omega) \quad (1.30)$$

On définit alors une **fonction de cohérence** entre les processus aléatoires x et y :

$$\Psi_{xy}(\omega) = \frac{S_{xy}(\omega)}{\sqrt{S_{xx}(\omega) S_{yy}(\omega)}} \quad (1.31)$$

Cette fonction complexe donne le sens physique de la cohérence car ses valeurs (en norme) sont comprises entre -1 et +1.

Notion de densité spectrale de puissance et matrice de corrélation

Pour les structures du génie civil, le nombre de processus aléatoires devient rapidement important. Il est alors pratique de les regrouper au sein d'un vecteur et d'obtenir un **processus aléatoire vectoriel** :

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} \quad (1.32)$$

Les n fonctions d'autocorrélation et les $n(n-1)$ fonctions de cross-corrélation sont regroupées dans ce qu'on appelle la **matrice de corrélation** $[R]$:

$$[R] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \{x(t)\} \{x(t + \Delta t)\}^T dt \quad (1.33)$$

De même, on peut définir dans le domaine fréquentiel, la **matrice de densité spectrale de puissance** $[S]$.

Sous l'hypothèse d'ergodicité, la matrice de densité spectrale peut également être calculée directement à partir de la réalisation de chacun des processus, sans passer par la matrice de covariance. Il suffit pour cela de considérer une relation semblable à l'équation (1.22) mais étendue à deux processus aléatoires :

$$S_{ij}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} |X_i(\omega, T) \overline{(X_j(\omega, T))}| \quad (1.34)$$

ou, sous forme matricielle :

$$[S(\omega)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} | \{X_i(\omega, T)\} \overline{\{(X_j(\omega, T))\}}^T | \quad (1.35)$$

Propriétés importantes de la matrice de densité spectrale de puissance

Toutes les notions vues permettent, en supposant les processus aléatoires gaussiens et stationnaires, de mettre en oeuvre de façon aisée l'analyse stochastique des structures. Deux propriétés importantes des matrices de densité spectrale de puissance sont encore à définir.

Propriété 1. Soient deux processus aléatoires vectoriels $\{y(t)\}$ et $\{x(t)\}$ reliés par le changement de variable affin :

$$\underbrace{\{y(t)\}}_{m \times 1} = \underbrace{[Z]}_{m \times n} \underbrace{\{x(t)\}}_{n \times 1} \quad (1.36)$$

La relation entre les matrices de densité spectrale de puissance de x et y est :

$$\begin{aligned} [S_y(\omega)] &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} | \{Y_i(\omega, T)\} \overline{\{(Y_j(\omega, T))\}}^T | \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} |[Z] \{X_i(\omega, T)\} \overline{[Z] \{(X_j(\omega, T))\}}^T | \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} |[Z] \{X_i(\omega, T)\} \overline{\{(X_j(\omega, T))\}}^T [Z]^T | \\ &= [Z] \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} | \{X_i(\omega, T)\} \overline{\{(X_j(\omega, T))\}}^T |[Z]^T \\ \underbrace{[S_y(\omega)]}_{m \times m} &= \underbrace{[Z]}_{m \times n} \underbrace{[S_x(\omega)]}_{n \times n} \underbrace{[Z]^T}_{n \times m} \end{aligned} \quad (1.37)$$

Exemple : Dans le cas d'une analyse en base modale, un changement de variable affin très utile est celui qui relie les amplitudes modales aux efforts internes :

$$\underbrace{\{F(t)\}}_{m \times 1} = \underbrace{[\phi^{(F)}]}_{m \times n} \underbrace{\{q(t)\}}_{n \times 1} \quad (1.38)$$

où :

$\{F(t)\}$ = vecteur des m efforts internes étudiés au cours du temps ;

$[\phi^{(F)}]$ = matrice des m efforts internes étudiés sous les n déformées de chaque mode propre ;

$\{q(t)\}$ = vecteur des amplitudes modales q des n modes propres au cours du temps.

Propriété 2. Soient deux processus aléatoires vectoriels $\{y(t)\}$ et $\{x(t)\}$ reliés dans le domaine fréquentiel par :

$$\underbrace{\{Y(\omega)\}}_{m \times 1} = \underbrace{[H(\omega)]}_{m \times n} \underbrace{\{X(\omega)\}}_{n \times 1} \quad (1.39)$$

La relation entre les matrices de densité spectrale de puissance est :

$$\begin{aligned} [S_y(\omega)] &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} | \{Y_i(\omega, T)\} \overline{\{(Y_j(\omega, T))\}}^T | \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} |[H(\omega)] \{X_i(\omega, T)\} \overline{[H(\omega)] \{(X_j(\omega, T))\}}^T | \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} |[H(\omega)] \{X_i(\omega, T)\} \overline{\{(X_j(\omega, T))\}}^T [H(\omega)]^T | \\ &= [H(\omega)] \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} | \{X_i(\omega, T)\} \overline{\{(X_j(\omega, T))\}}^T |[H(\omega)]^T \\ \underbrace{[S_y(\omega)]}_{m \times m} &= \underbrace{[H(\omega)]}_{m \times n} \underbrace{[S_x(\omega)]}_{n \times n} \underbrace{[H(\omega)]^T}_{n \times m} \end{aligned} \quad (1.40)$$

Exemple : Dans le cas d'une analyse en base modale et dans le domaine fréquentiel, les efforts généralisés exprimés dans le domaine fréquentiel, multipliés par la matrice de transfert nous donnent les déplacements modaux dans le domaine fréquentiel :

$$\underbrace{\{q(\omega)\}}_{n \times 1} = \underbrace{[H^*(\omega)]}_{n \times n} \underbrace{\{P^*(\omega)\}}_{n \times 1} \quad (1.41)$$

où :

- $\{q(\omega)\}$ = vecteur des n amplitudes modales dans le domaine fréquentiel ;
- $[H^*(\omega)]$ = matrice de transfert du système en base modale ;
- $\{P^*(\omega)\}$ = vecteur des n forces généralisées dans le domaine fréquentiel.

1.3.3 Note sur la définition de la densité spectrale de puissance

Revenons un instant sur l'équation (1.23) exprimant que l'intégrale sur les pulsations de la densité spectrale de puissance est égale à la variance du processus considéré.

En effet, **l'analyse au vent turbulent utilise des densités spectrales de puissance légèrement différentes. L'intégration se fait sur les fréquences (et non sur les pulsations) et de 0 à $+\infty$ (et non de $-\infty$ à $+\infty$).** Ainsi, avec cette nouvelle définition de densité spectrale de puissance, la variance se calcule suivant :

$$\sigma_x^2 = \int_0^{+\infty} S_{xx}^W(n) dn \quad (1.42)$$

Ainsi, la relation entre les deux définitions de densité spectrale de puissance est :

$$S_{xx}^W(n) = 4\pi S_{xx}(w) \quad (1.43)$$

L'influence sur les moments spectraux est :

$$m_i = \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^i S_{xx}(\omega) d\omega = 2(2\pi)^{i+1} \int_0^{+\infty} n^i S_{xx}(n) dn \quad (1.44)$$

En insérant la propriété (1.43) dans l'équation (1.45) :

$$m_i = \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^i S_{xx}(\omega) d\omega = (2\pi)^i \int_0^{+\infty} n^i S_{xx}^W(n) dn \quad (1.45)$$

il découle que :

- le moment spectral d'ordre 0 :

$$m_0 = \int_0^{+\infty} S_{xx}^W(n) dn \quad (1.46)$$

- le moment spectral d'ordre 2 :

$$m_2 = (2\pi)^2 \int_0^{+\infty} n^2 S_{xx}^W(n) dn \quad (1.47)$$

- le moment spectral d'ordre 4 :

$$m_4 = (2\pi)^4 \int_0^{+\infty} n^4 S_{xx}^W(n) dn \quad (1.48)$$

1.3.4 Statistique des valeurs extrêmes

Les outils mathématiques développés auparavant permettent le calcul des valeurs maximales des efforts et déplacements pour le dimensionnement d'une structure. Ceci est réalisé dans le cadre des statistiques des valeurs extrêmes. **L'extrema centré** se calcule en utilisant la formule :

$$\bar{z} \simeq \left(\sqrt{2 \ln n_0^+} + \frac{\Gamma}{\sqrt{2 \ln n_0^+}} \right) \sigma_x = g \sigma_x \quad (1.49)$$

avec :

$$n_0^+ = n \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \quad (1.50)$$

où :

T = période d'observation ;

n_0^+ = nombre de passages par zéro durant la période d'observation ;

n = nombre de passages par un maximum relatif durant la période d'observation ;

ε = paramètre spectral ;

Γ = constante d'Euler égale à 0,5772 ;

g = facteur de pointe.

L'équation (1.49) est valable pour autant que $\varepsilon < 0,9$ et $n > 50$. La figure 1.2 représente l'évolution du facteur de pointe en fonction du nombre de passages par zéro durant la période d'observation.

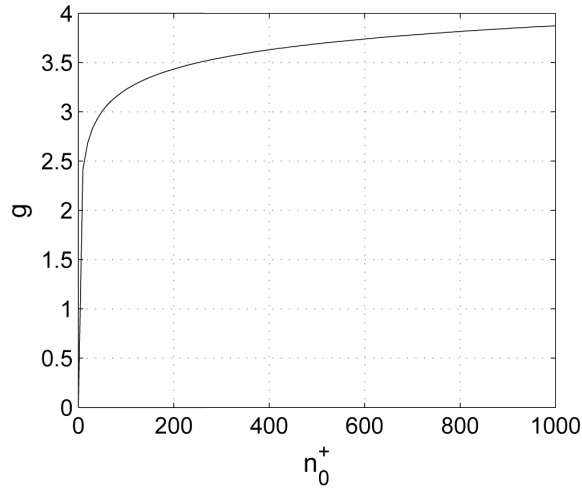


FIG. 1.2 – Évolution du facteur de pointe en fonction du nombre de passages par zéro durant la période d'observation.

Chapitre 2

L'analyse dynamique

2.1 Introduction

Cette introduction de l'analyse dynamique des structures se base sur la référence [3].

Le but de l'analyse dynamique d'une structure est de connaître au cours du temps les déplacements de ses nœuds (c'est-à-dire sa déformée) et ses éléments de réduction. Si les efforts appliqués sont constants au cours du temps, on réalise une **analyse linéaire statique au premier ordre**, qui en éléments finis, revient à résoudre le système suivant :

$$\underbrace{[K]}_{N \times N} \underbrace{\{x\}}_{N \times 1} = \underbrace{\{p\}}_{N \times 1} \quad (2.1)$$

où :

- N = nombre de degrés de liberté de la structure ;
- $[K]$ = matrice de raideur de la structure ;
- $\{x\}$ = vecteur des déplacements nodaux ;
- $\{p\}$ = vecteur des forces nodales statiques équivalentes.

Lorsque les efforts appliqués sur la structure la mettent en mouvement, l'équation (2.1) doit être complétée par les termes d'inertie et d'amortissement. **L'analyse dynamique linéaire au premier ordre** est alors entreprise en résolvant le système :

$$\underbrace{[M]}_{N \times N} \underbrace{\{\ddot{x}(t)\}}_{N \times 1} + \underbrace{[C]}_{N \times N} \underbrace{\{\dot{x}(t)\}}_{N \times 1} + \underbrace{[K]}_{N \times N} \underbrace{\{x(t)\}}_{N \times 1} = \underbrace{\{p(t)\}}_{N \times 1} \quad (2.2)$$

où :

- $\{x(t)\}$ = vecteur des déplacements nodaux de la structure en fonction du temps ;
- $\{\dot{x}(t)\}$ = vecteur des vitesses nodales de la structure en fonction du temps ;
- $\{\ddot{x}(t)\}$ = vecteur des accélérations nodales de la structure en fonction du temps ;
- $[M]$ = matrice de masse de la structure ;
- $[C]$ = matrice d'amortissement de la structure ;
- $\{p(t)\}$ = vecteur des forces nodales statiques équivalentes en fonction du temps.

Diverses méthodes de résolution de l'équation (2.2) existent. Avant de rentrer dans les détails de celles-ci, trois points importants sont abordés :

- le caractère déterministe ou stochastique de l'équation ;
- le domaine dans lequel elle peut être résolue (temporel ou fréquentiel) ;
- la base utilisée pour l'expression des inconnues (modale ou nodale).

2.1.1 Caractère déterministe ou stochastique de l'équation du mouvement

L'équation (2.2), telle que présentée, fait l'hypothèse que les caractéristiques géométriques et mécaniques de la structure sont connues et que les efforts appliqués sont déterminés (fonctions du temps connues). L'équation du mouvement a donc un caractère déterministe et on recourt donc à une analyse déterministe.

Néanmoins, dans le domaine du génie civil, un caractère aléatoire peut être attribué aux grandeurs mises en jeu :

- les caractéristiques du système peuvent ne pas être connues avec certitude ;
- les efforts appliqués proviennent de phénomènes naturels (tremblements de terre, vent, houle) indéterminés par essence.

De ce fait, on a recours à la théorie des probabilités et plus généralement à une analyse stochastique.

Dans le cadre de ce travail, **l'aspect probabiliste ne sera attribué qu'aux sollicitations extérieures**, en l'occurrence le vent. **L'hypothèse de caractéristiques structurelles parfaitement connues est donc formulée.**

2.1.2 Base nodale, base modale

L'équation (2.2) est écrite dans la base nodale. Cela signifie donc que les inconnues sont les déplacements, les vitesses et les accélérations nodales. Or, lorsque la structure comporte un grand nombre de nœuds, il peut être avantageux de réaliser un **changement de repère** dans l'expression de l'équation du mouvement :

$$\underbrace{\{x(t)\}}_{N \times 1} = \underbrace{[\phi]}_{N \times N} \underbrace{\{q(t)\}}_{N \times 1} \quad (2.3)$$

où :

- N = nombre de degrés de liberté de la structure ;
- $\{x(t)\}$ = déplacements nodaux de la structure en fonction du temps ;
- $[\phi]$ = matrice de forme ;
- $\{q(t)\}$ = nouvelles inconnues de la structure en fonction du temps.

L'équation du mouvement s'écrit alors sous la forme :

$$[M][\phi] \{\ddot{q}(t)\} + [C][\phi] \{\dot{q}(t)\} + [K][\phi] \{q(t)\} = \{p(t)\} \quad (2.4)$$

L'équation du mouvement dans la base q s'obtient en prémultipliant les deux membres de cette équation par $[\phi]^T$:

$$[\phi]^T [M] [\phi] \{\ddot{q}(t)\} + [\phi]^T [C] [\phi] \{\dot{q}(t)\} + [\phi]^T [K] [\phi] \{q(t)\} = [\phi]^T \{p(t)\} \quad (2.5)$$

soit :

$$[M^*] \{\ddot{q}(t)\} + [C^*] \{\dot{q}(t)\} + [K^*] \{q(t)\} = \{p^*(t)\} \quad (2.6)$$

où :

$$\begin{aligned} [M^*] &= [\phi]^T [M] [\phi] &&= \text{matrice de masse généralisée;} \\ [C^*] &= [\phi]^T [C] [\phi] &&= \text{matrice d'amortissement généralisé;} \\ [K^*] &= [\phi]^T [K] [\phi] &&= \text{matrice de raideur généralisée;} \\ [p^*(t)] &= [\phi]^T \{p(t)\} &&= \text{vecteur des forces généralisées en fonction du temps.} \end{aligned}$$

Il reste alors à décider du choix de $[\phi]$. Dans ce travail, $[\phi]$ est choisie comme la matrice des modes propres : chaque colonne de cette matrice, nommé $\{\phi_i\}$, satisfait le problème généralisé aux valeurs propres qui revient à résoudre le système suivant :

$$([K] - \omega_i^2 [M]) \{\phi_i\} = 0 \quad (2.7)$$

où les ω_i sont les N valeurs propres de la structure. Cette transformation porte le nom de **décomposition modale** et entraîne que les matrices $[M^*]$ et $[K^*]$ soient diagonales. L'équation du mouvement (2.6) est donc exprimée dans la base modale.

Troncature de la base des modes propres : Le premier avantage de ce changement de variable est la réduction du nombre d'inconnues : la taille du système à résoudre en base modale est réduite au nombre M de formes choisies $\{\phi_i\}$. Le système de N équations en base modale est donc remplacé par un système de M ($\ll$ N) équations en base modale. Formellement, on peut scinder la matrice $[\phi]$ en deux sous-matrices :

$$\underbrace{[\phi]}_{N \times N} = \left[\underbrace{\phi_s}_{N \times M} \quad \underbrace{\phi_d}_{N \times (N-M)} \right] \quad (2.8)$$

où :

$$\begin{aligned} [\phi_s] &= \text{contient les M modes propres choisis;} \\ [\phi_d] &= \text{contient les N-M modes propres négligés.} \end{aligned}$$

Les déplacements des noeuds de la structure se décomposent en deux contributions :

$$\{x(t)\} = [\phi_s] \{q(t)\} + [\phi_d] \{q(t)\} = \{x_s(t)\} + \{x_d(t)\} \quad (2.9)$$

En prenant M ($\ll$ N) formes choisies pour représenter les N déplacements des noeuds de la structure, on néglige donc le vecteur $\{x_d(t)\}$.

Systèmes d'équations découplés : Le deuxième avantage est la transformation du premier système d'équations en un nouveau système qui est découplé à condition que la matrice d'amortissement $[C^*]$ soit diagonalisable. Plusieurs modèles d'amortissement structural permettent d'obtenir une matrice d'amortissement généralisée $[C^*]$ diagonale. Dans ce cas, l'amortissement est dit proportionnel et plusieurs modèles permettent de rencontrer cette condition tel que l'amortissement de Rayleigh et l'amortissement par mode.

Établissement des efforts internes : Dans le cadre de ce travail, ce sont uniquement les efforts internes qui sont recherchés. Ces efforts sont reliés aux déplacements des degrés de liberté de l'élément via leur matrice de raideur élémentaire :

$$\{F\} = [K_{\text{élé}}] \{x_{\text{élé}}\} \quad (2.10)$$

Afin de simplifier la procédure de calcul, introduisons le changement de variable :

$$\underbrace{\{F(t)\}}_{E \times 1} = \underbrace{[\phi^{(F)}]}_{E \times N} \underbrace{\{q(t)\}}_{N \times 1} \quad (2.11)$$

où :

$\{F(t)\}$ = vecteur des E efforts internes étudiés ;
 $[\phi^{(F)}]$ = matrice des E efforts internes étudiés dans les N déformées de chaque mode.

Ainsi, lorsque que $q(t)$ est établi, au lieu de revenir en base nodale via (2.9) puis de calculer les efforts internes via (2.10), on utilise directement l'équation (2.11).

Synthèse de la procédure :

$$\begin{aligned} [K], [M] &\longrightarrow \{\phi_i\}, \omega_i \xrightarrow[\text{la base modale}]{\text{projection dans}} [M^*], [K^*], [C^*] \\ &\xrightarrow{\text{résolution}} [M^*] \{\ddot{q}(t)\} + [C^*] \{\dot{q}(t)\} + [K^*] \{q(t)\} = \{p^*(t)\} \longrightarrow \{q(t)\} \\ &\xrightarrow[\text{efforts internes}]{\text{calcul des}} \{F(t)\} = [\phi^{(F)}] \{q(t)\} \end{aligned}$$

2.1.3 Domaine temporel, domaine fréquentiel

Un autre changement de paramètre est la décomposition en série de Fourier. Dans ce cas, les nouvelles inconnues deviennent les amplitudes des harmoniques. La transformée de Fourier inverse permet la représentation des fonctions non périodiques :

$$\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \{X(n)\} e^{2j\pi nt} dn \quad (2.12)$$

La nouvelle inconnue, résultant du changement de paramètre, est donc la fonction $\{X(n)\}$, transformée de Fourier de la fonction $\{x(t)\}$. Quant au vecteur des forces extérieures, il est également associé à sa transformée de Fourier inverse :

$$\{p(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \{P(n)\} e^{2j\pi nt} dn \quad (2.13)$$

Les couples $(\{x(t)\}, \{X(n)\})$ et $(\{p(t)\}, \{P(n)\})$ sont des paires de Fourier. Dans chaque paire, les deux fonctions sont reliées d'une part par les relations (2.12) et (2.13) et d'autre part par la transformée directe :

$$\{X(n)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \{x(t)\} e^{-2j\pi nt} dt \quad (2.14)$$

$$\{P(n)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \{p(t)\} e^{-2j\pi nt} dt \quad (2.15)$$

Appliquons donc la transformée de Fourier inverse aux deux membres de l'équation du mouvement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [M] \{\ddot{x}(t)\} + [C] \{\dot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} e^{-2j\pi nt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \{p(t)\} e^{-2j\pi nt} dt \quad (2.16)$$

L'équation (2.16) représente l'équation du mouvement dans le domaine fréquentiel. Vu que :

$$\{\ddot{x}(t)\} = -4\pi^2 n^2 \{x(t)\} \quad \text{et} \quad \{\dot{x}(t)\} = 2j\pi n \{x(t)\} \quad (2.17)$$

On obtient :

$$(-4\pi^2 n^2 [M] + 2j\pi n [C] + [K]) \{X(n)\} = \{P(n)\} \quad (2.18)$$

Finalement, en introduisant la matrice de transfert :

$$[H(n)] = (-4\pi^2 n^2 [M] + 2j\pi n [C] + [K])^{-1} \quad (2.19)$$

$$\{X(n)\} = [H(n)] \{P(n)\} \quad (2.20)$$

Le gros avantage de travailler avec la fréquence comme paramètre principal est d'obtenir la réponse, en fréquentiel, par simple multiplication entre la fonction de transfert et la transformée directe du vecteur des charges extérieures.

Synthèse de la procédure :

$$\{p(t)\} \xrightarrow{\text{Fourier}} \{P(n)\} \xrightarrow{\times [H(n)]} \{X(n)\} \xrightarrow[\text{inverse}]{\text{Fourier}} \{x(t)\}$$

2.1.4 Les diverses possibilités d'analyse

Le changement de variables (2.9) permet la transcription de l'équation du mouvement dans la base modale. Le passage dans le domaine fréquentiel via une transformée directe permet la transcription de l'équation du mouvement dans le domaine fréquentiel. Le tableau 2.1 reprend les différentes possibilités d'analyse en dynamique linéaire.

Analyse déterministe				Analyse stochastique			
En base modale		En base nodale		En base modale		En base nodale	
Temporel	Fréquentiel	Temporel	Fréquentiel	Temporel	Fréquentiel	Temporel	Fréquentiel
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)

TAB. 2.1 – Différentes possibilités d'analyse en dynamique linéaire. Source : [3].

Dans le cadre de ce travail, les deux types d'analyse seront abordés. Une analyse déterministe se fera en base nodale afin de résoudre l'équation (2.1). Toutes les autres méthodes, au nombre de trois, auront pour but de résoudre l'équation (2.2) et sont :

- (1) analyse déterministe en base modale et en temporel : superposition modale avec résolution des équations découplées par **Newmark** ;
- (2) analyse déterministe en base modale et en fréquentiel : superposition modale avec résolution des équations découplées par **transformée de Fourier** ;
- (6) **analyse stochastique** en base modale et en fréquentiel.

2.2 Les méthodes déterministes

2.2.1 En base nodale

La résolution de l'équation (2.1) demande simplement l'inversion de la matrice de raideur :

$$\{x(t)\} = [K]^{-1} \{p(t)\} \quad (2.21)$$

et on calcule ensuite les efforts internes via l'équation (2.10).

2.2.2 En base modale

En temporel

La méthode mise en œuvre est une superposition modale avec résolution des équations découplées par Newmark.

Le but est donc la détermination des amplitudes modales $\{q(t)\}$ et ce calcul se réalise via l'algorithme de Newmark. Pour rappel, il se base sur les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} m + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} c + k \right) q_{t+\Delta t} &= p_{t+\Delta t} \\ &+ m \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} q_t + \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{q}_t + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{q}_t \right) \\ &+ c \left(\frac{\delta}{\alpha \Delta t} q_t + \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) \dot{q}_t + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \ddot{q}_t \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\dot{q}_{t+\Delta t} = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} (q_{t+\Delta t} - q_t) + \left(1 - \frac{\delta}{\alpha} \right) \dot{q}_t + \Delta t \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha} \right) \ddot{q}_t \quad (2.23)$$

$$\ddot{q}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} (q_{t+\Delta t} - q_t) - \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{q}_t - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{q}_t \quad (2.24)$$

où :

m, c, k = masse, amortissement et raideur modaux ;

$q, \dot{q}, \ddot{q}$ = amplitude, vitesse et accélération modales ;

p = force généralisée ;

α, δ = paramètres de Newmark ;

Δt = pas de temps pour la résolution numérique ;

N = nombre de pas de temps.

Lorsque les paramètres α et δ varient, l'algorithme peut devenir instable. Afin qu'il soit inconditionnellement stable, **l'accélération constante est choisie**, ce qui correspond aux paramètres de Newmark : $\alpha = 0,25$ et $\delta = 0,5$.

Synthèse de la procédure : elle est équivalente à celle présentée en (2.12).

Appellation simplifiée de la méthode : NK.

En fréquentiel

La méthode mise en œuvre est une superposition modale avec résolution des équations découplées par transformée de Fourier.

On cherche donc à résoudre l'équation (2.16) en base modale, soit :

$$(-4\pi^2 n^2 [M^\star] + 2j\pi n [C^\star] + [K^\star]) \{Q(n)\} = \{P^\star(n)\} \quad (2.25)$$

où :

$$\begin{aligned} \{Q(n)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \{q(t)\} e^{-2j\pi nt} dn = \text{transformées de Fourier des amplitudes modales;} \\ \{P^\star(n)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \{p(t)\} e^{-2j\pi nt} dn = \text{transformées de Fourier des forces généralisées.} \end{aligned}$$

En travaillant avec les modes propres et en faisant l'hypothèse d'amortissement proportionnel, la matrice de transfert en base modale est diagonale :

$$[H^\star(n)] = (-4\pi^2 n^2 [M^\star] + 2j\pi n [C^\star] + [K^\star])^{-1} \quad (2.26)$$

Le système à résoudre s'écrit alors :

$$\{Q(n)\} = [H^\star(n)] \{P^\star(n)\} \quad (2.27)$$

Synthèse de la procédure :

$$\begin{aligned} [K], [M] &\longrightarrow \{\phi_i\}, \omega_i \xrightarrow[\text{la base modale}]{\text{projection dans}} [M^\star], [K^\star], [C^\star] \longrightarrow [H^\star(n)] \\ \{p(t)\} &\xrightarrow[\text{la base modale}]{\text{projection dans}} \{p^\star(t)\} = [\phi]^T \{p(t)\} \xrightarrow[\text{domaine fréquentiel}]{\text{passage dans le}} \{P^\star(n)\} \\ &\xrightarrow{\text{résolution}} \{Q(n)\} = [H^\star(n)] \{P^\star(n)\} \xrightarrow[\text{domaine temporel}]{\text{retour dans le}} \{q(t)\} \\ &\xrightarrow[\text{efforts internes}]{\text{calcul des}} \{F(t)\} = [\phi^{(F)}] \{q(t)\} \end{aligned}$$

Appellation simplifiée de la méthode : TF.

2.3 La démarche stochastique

La démarche stochastique mise en œuvre dans ce travail est réalisée dans le domaine fréquentiel et en base modale. On repart donc de l'équation (2.27).

La matrice de densité spectrale de l'amplitude modale est reliée à la matrice de densité spectrale des forces généralisées¹ :

$$\{Q(n)\} = [H^\star(n)] \{P^\star(n)\} \rightarrow [S^{(q)}(n)] = [H^\star(n)] [S^{(p^\star)}(n)] [\overline{H^\star(n)}]^T \quad (2.28)$$

La matrice de densité spectrale des forces généralisées $[S^{(p^\star)}(n)]$ est calculée à partir de celle des forces nodales $[S^{(p)}(n)]$ qui sont les données de base² :

$$\{p^\star(t)\} = [\phi]^T \{p(t)\} \rightarrow [S^{(p^\star)}(n)] = [\phi]^T [S^{(p)}(n)] [\phi] \quad (2.29)$$

1. cf Chapitre 1 - Propriété 2 de la matrice de densité spectrale de puissance.

2. cf Chapitre 1 - Propriété 1 de la matrice de densité spectrale de puissance.

Revenons maintenant aux efforts internes via le changement de variable de l'équation (2.11) et calculons la matrice de densité spectrale³ :

$$\{F(t)\} = [\phi^{(F)}] \{q(t)\} \rightarrow [S^{(F)}(n)] = [\phi^{(F)}][S^{(q)}(n)][\phi^{(F)}]^T \quad (2.30)$$

En regroupant les équations (2.28), (2.29) et (2.30) :

$$[S^{(F)}(n)] = [\phi^{(F)}][H^*(n)][\phi]^T [S^{(p)}(n)][\phi][\overline{H^*(n)}]^T [\phi^{(F)}]^T \quad (2.31)$$

La dernière étape consiste alors à calculer les moments spectraux sur base de l'équation (1.45).

Synthèse de la procédure :

$$\begin{aligned} [K], [M] &\longrightarrow \{\phi_i\}, \omega_i \xrightarrow[\text{la base modale}]{\text{projection dans}} [M^*], [K^*], [C^*] \longrightarrow [H^*(n)] \\ \{p(t)\} &\xrightarrow[\text{la base modale}]{\text{projection dans}} \{p^*(t)\} = [\phi]^T \{p(t)\} \xrightarrow[\text{domaine fréquentiel}]{\text{passage dans le}} \{P^*(n)\} \\ &\xrightarrow[\text{des forces généralisées}]{\text{calcul de la MDSP}} [S^{(p^*)}(n)] \xrightarrow[\text{des amplitudes modales}]{\text{calcul de la MDSP}} [S^{(q)}(n)] = [H^*(n)][S^{(p^*)}(n)][\overline{H^*(n)}]^T \\ &\xrightarrow[\text{des efforts internes}]{\text{calcul de la MDSP}} [S^{(F)}(n)] = [\phi^{(F)}][S^{(q)}(n)][\phi^{(F)}]^T \end{aligned}$$

2.3.1 Implémentation numérique de l'analyse stochastique

L'obtention des moments spectraux d'ordre i associés à une matrice de densité spectrale impose son intégration numérique :

$$[m^i] = \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^i [S(\omega)] d\omega \quad (2.32)$$

Lorsque la matrice de densité spectrale des amplitudes modales est établie, on peut en calculer les moments spectraux et ne plus la garder en mémoire. De fait, la matrice des moments spectraux d'ordre i associés aux efforts internes se calcule :

$$\begin{aligned} [m^{i,(F)}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^i [S^{(F)}(\omega)] d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^i [\phi^{(F)}][S^{(q)}(\omega)][\phi^{(F)}]^T d\omega \\ &= [\phi^{(F)}] \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^i [S^{(q)}(\omega)] d\omega [\phi^{(F)}]^T = [\phi^{(F)}] [m^{i,(q)}] [\phi^{(F)}]^T \end{aligned} \quad (2.33)$$

2.3.2 Estimation de la matrice des moments spectraux d'ordre i des amplitudes modales

Dans ce travail, l'estimation de la matrice des moments spectraux d'ordre i des amplitudes modales est réalisée en utilisant l'approximation en bruit blanc.⁴

Avant de passer à l'estimation de la matrice des moments spectraux d'ordre i des amplitudes modales, une question s'impose : est-il nécessaire d'établir tous ses termes ?

3. cf Chapitre 1 - Propriété 1 de la matrice de densité spectrale de puissance.

4. L'intégration numérique a également été réalisée afin de contrôler les résultats obtenus par l'approximation en bruit blanc.

Au sein de la matrice $[m^{i,(F)}]$, on désire uniquement établir sa diagonale :

$$m_{mm}^{i,(F)} = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \phi_{mk}^{(F)} \phi_{ml}^{(F)} \rho_{kl}^{i,(q)} \sqrt{m_{kk}^{i,(q)} m_{ll}^{i,(q)}} \quad (2.34)$$

où $\rho_{kl}^{i,(q)} = \frac{m_{kl}^{i,(q)}}{\sqrt{m_{kk}^{i,(q)} m_{ll}^{i,(q)}}}$ est le coefficient de corrélation d'ordre i des amplitudes modales.

Pour $i=0$, l'équation (2.34) est appelée **combinaison quadratique complète**⁵. Cette combinaison demande l'établissement complet de la matrice $[m^{i,(q)}]$. Cependant, si la corrélation entre les modes est faible, c'est-à-dire $\rho_{kl}^{i,(q)} \ll 1$, l'équation (2.34) se réduit à :

$$m_{mm}^{i,(F)} = \sum_{k=1}^M \left(\phi_{mk}^{(F)} \sqrt{m_{kk}^{i,(q)}} \right)^2 \quad (2.35)$$

Cette combinaison revient à regarder l'écart-type de la réponse comme la **racine carrée de la somme des carrés**⁶.

Si la combinaison (2.35) est utilisée, seuls les éléments diagonaux de $[m^{i,(q)}]$ et donc de $[S^{(q)}(\omega)]$ doivent être établis. De plus, puisque :

$$[S^{(q)}(\omega)] = [H^*(\omega)] [S^{(p^*)}(\omega)] [\overline{H^*(\omega)}]^T \quad (2.36)$$

où $[H^*(\omega)]$ est une matrice diagonale, on obtient :

$$S_{kk}^{(q)}(\omega) = |H_{kk}^*(\omega)|^2 S_{kk}^{(p^*)}(\omega) \quad (2.37)$$

et ceci montre que la combinaison SRSS ne nécessite que l'estimation des $S_{kl}^{(p^*)}(\omega)$ pour $k = l$.

Le rapide rappel des deux types de combinaison possibles est réalisé sur base de la référence [5]. Pour être cohérent, les mêmes notations sont utilisées. Les explications et justifications menant aux résultats finaux ne sont pas reprises. Le seul but de ce rappel est donc de définir les notations afin de pouvoir y faire référence de manière univoque lors de l'analyse des résultats. Enfin, l'article [5] a essentiellement développé la méthode pour l'estimation de la matrice des moments spectraux d'ordre 0 des amplitudes modales. Il est possible d'étendre la méthode à l'estimation de la matrice des moments spectraux d'ordre 2 des amplitudes modales. Ceci est nécessaire en vue de calculer les extrema moyens. Afin d'être concis, les développements sont effectués en gardant l'ordre i en exposant.

Combinaison SRSS : pour les termes diagonaux de la matrice des moments spectraux d'ordre i des amplitudes modales :

$$\begin{aligned} m_{mm}^{i,(q)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^i S_{mm}^{(q)}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^i |H_{mm}^*(\omega)|^2 S_{mm}^{(p^*)}(\omega) d\omega \\ &\simeq \frac{1}{K_{mm}^{*2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^i S_{mm}^{(p^*)}(\omega) d\omega + S_{mm}^{(p^*)}(\omega_{nat}) \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^i |H_{mm}^*(\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (2.38)$$

5. En anglais : CQC (Complete quadratic combination).

6. En anglais : SRSS (Square root of the sum of the squares).

ce qui sépare $m_{mm}^{i,(q)}$ en deux contributions : une **quasi-statique**⁷ plus une **résonante**^{8 9} :

$$m_{mm}^{i,(q)} = B_m^i + R_m^i \quad (2.39)$$

avec :

$$B_m^0 = \frac{m_{mm}^{0,(p^*)}}{K_{mm}^{*2}} \quad B_m^2 = \frac{m_{mm}^{2,(p^*)}}{K_{mm}^{*2}} \quad (2.40)$$

et

$$R_m^0 = \frac{\pi \omega_{nat}}{2\xi} \frac{S^{(p^*)}(\omega_{nat})}{K^2} \quad R_m^2 = \omega_{nat}^2 R_m^0 \quad (2.41)$$

Pour l'explication de la démarche conduisant aux résultats finaux de l'équation (2.38) on peut se reporter à la référence [5].

Appellation simplifiée de la méthode : SRSS-BB.

Combinaison CQC : L'article [5] propose une estimation des coefficients de corrélation (d'ordre 0) des amplitudes modales. Cette méthode est appliquée dans le cadre de ce travail et est similaire à la méthode proposée en [6].

La méthode consiste à estimer $\rho_{mn}^{i,(q)}$ par :

$$\hat{\rho}_{mn}^{i,(q)} = \frac{m_{mn}^{i,(q)}}{\sqrt{m_{mm}^{i,(q)} m_{nn}^{i,(q)}}} = \frac{B_{mn}^i + R_{mn}^i}{\sqrt{B_{mm}^i + R_{mm}^i} \sqrt{B_{nn}^i + R_{nn}^i}} \quad (2.42)$$

avec :

$$B_{mn}^0 = \frac{m_{mn}^{0,(p^*)}}{K_{mm}^* K_{nn}^*} \quad B_{mn}^2 = \frac{m_{mn}^{2,(p^*)}}{K_{mm}^* K_{nn}^*} \quad (2.43)$$

$$R_{mn}^0 = \frac{\pi \sqrt{\omega_m \omega_n}}{2 \sqrt{\xi_m \xi_n}} \frac{S_{wn}^{(p^*)}}{K_{mm}^* K_{nn}^*} \phi(\omega_m, \omega_n, \xi_m, \xi_n) \quad R_{mn}^2 = \sqrt{\omega_m^2 \omega_n^2} R_{mn}^0 \quad (2.44)$$

où :

$$\phi(\omega_m, \omega_n, \xi_m, \xi_n) = \frac{8(\omega_m \omega_n)^{3/2} (\xi_m \omega_m + \xi_n \omega_n) \sqrt{\xi_m \xi_n}}{(\omega_m^2 - \omega_n^2)^2 + 4\omega_m \omega_n (\xi_m \omega_m + \xi_n \omega_n) (\xi_m \omega_n + \xi_n \omega_m)} \quad (2.45)$$

Le choix de la **sélection de l'intensité du bruit blanc équivalent**, $S_{wn}^{(p^*)}$, est expliquée dans l'article [5] et uniquement sa formulation est donnée ici :

$$S_{wn}^{(p^*)} = \bar{\Gamma}_{mn} \sqrt{S_{mm}^{(p^*)}(\omega_m) S_{nn}^{(p^*)}(\omega_n)} \quad (2.46)$$

avec :

$$\bar{\Gamma}_{mn} = \frac{\Gamma_{mn}(\omega_m) + \Gamma_{mn}(\omega_n)}{2} \quad (2.47)$$

7. La lettre choisie est B pour "Background" en anglais.

8. La lettre choisie est R pour "Resonant" en anglais.

9. On parlera également de manière équivalente de contribution dynamique.

Dans l'article [5], des coefficients sont introduits afin d'obtenir une formulation plus compréhensible de l'équation (2.42). Ceux-ci sont :

- le rapport entre la composante quasi-statique et la composante résonante pour les modes m et n :

$$b_m^i = \frac{B_{mm}^i}{R_{mm}^i} \quad b_n^i = \frac{B_{nn}^i}{R_{nn}^i} \quad (2.48)$$

Ces rapports mesurent l'importance de la composante quasi-statique vis-à-vis de la composante dynamique et sont sans dimension.

- les coefficients de poids de la composante quasi-statique et de la composante résonante :

$$\gamma_B^i = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{b_m^i}} \sqrt{1 + \frac{1}{b_n^i}}} \quad \gamma_R^i = \frac{1}{\sqrt{1 + b_m^i} \sqrt{1 + b_n^i}} \quad (2.49)$$

Ces deux coefficients prennent des valeurs dans l'intervalle $[0;1]$. Si les modes répondent de façon quasi-statique dans les modes m et n , γ_B^i tend vers 1. Inversément si les modes m et n répondent de façon dynamique, γ_B^i tend vers 0 et γ_R^i tend vers 1.

Avec ces nouvelles notations, l'équation (2.42) peut être réécrite sous la forme :

$$\hat{\rho}_{mn}^{i,(q)} = \gamma_B^i \rho_{mn}^{i,(p^*)} + \gamma_R^i \bar{\Gamma}_{mn} \phi(\omega_m, \omega_n, \xi_m, \xi_n) \quad (2.50)$$

L'équation (2.50) est la formulation proposée pour estimer les coefficients de corrélation d'ordre i des amplitudes modales. Ceux-ci se décomposent par une pondération entre les coefficients de corrélation d'ordre i des forces généralisées $\rho_{mn}^{i,(p^*)}$ ainsi que par une pondération des coefficients de corrélation dynamique $\bar{\Gamma}_{mn} \phi(\omega_m, \omega_n, \xi_m, \xi_n)$.

Appellation simplifiée de la méthode : CQC-BB.

Deuxième partie

Partie appliquée : calcul au vent turbulent du Grand Stade de Lille Métropole

Chapitre 1

Description statique de la structure

1.1 Introduction

Les explications ci-dessous sont inspirées des documents [7], [8] et [9]. Afin de pouvoir au mieux appréhender la structure et comprendre son fonctionnement, sa description se fera en plusieurs phases distinctes. Tout d'abord, le système d'axes global sera introduit afin de pouvoir facilement nommer les différentes coupes et vues nécessaires aux explications. Ensuite, les principaux éléments supportant la couverture du stade seront décrits successivement. Les différentes parties de la couverture du stade seront également identifiées. Finalement, la description du mode de reprise des charges verticales et horizontales assemblera tous les éléments décrits.

1.2 Système d'axes

Le système d'axes adopté a pour origine le centre du stade (plan de symétrie N-S). Le grand axe du stade z-y est incliné de 15° par rapport au Nord vers l'Ouest (voir Figure 1.1-a).

L'axe des x se trouve dans le sens transversal perpendiculairement au grand côté du terrain. L'axe des y est dans le sens longitudinal parallèlement au grand côté du terrain. L'axe des z est dirigé vers le haut avec une origine située à 6,45 m au dessus du niveau de la pelouse. La figure 1.1 présente différentes vues de la modélisation 3D de l'ossature du stade.

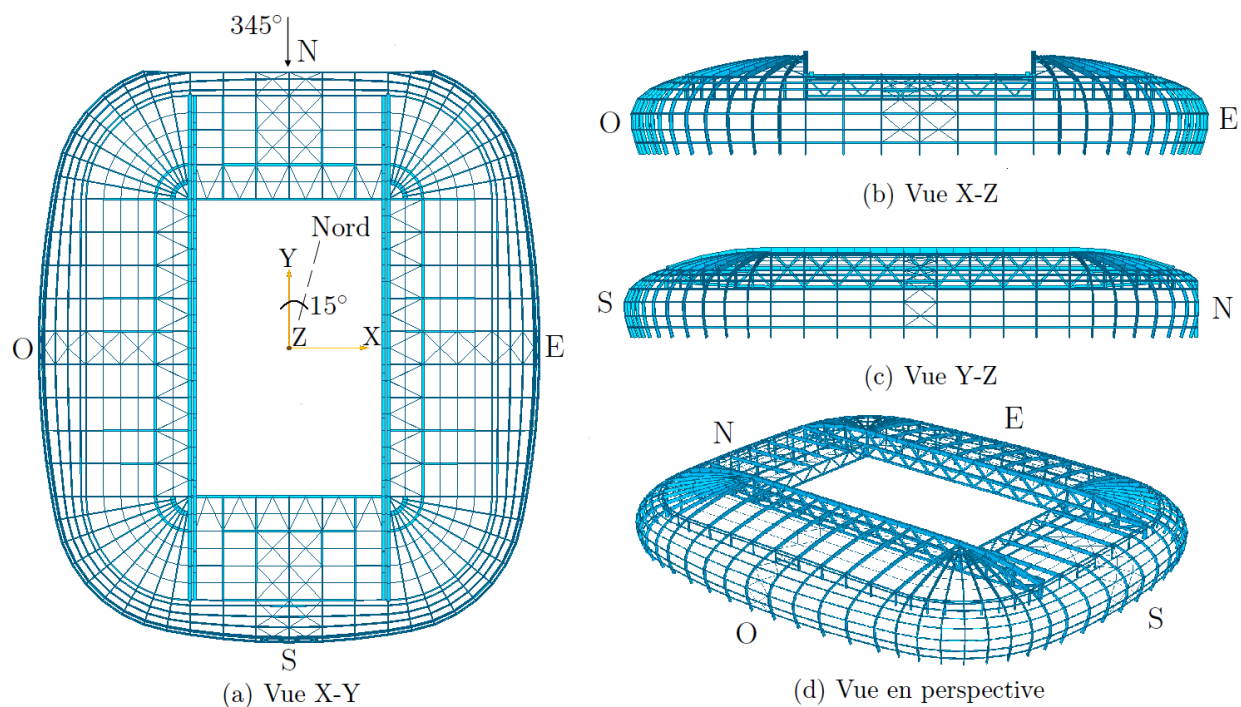


FIG. 1.1 – Différentes vues de la modélisation 3D de l'ossature du stade.

1.3 Description des éléments supportant la couverture du stade

1.3.1 Les méga-poutres

La toiture du stade s'articule autour de deux méga-poutres longitudinales de 205 m de portée. Ces méga-poutres sont des poutres treillis d'environ 15 m de hauteur. La figure 1.2 visualise en rouge les méga-poutres au sein du stade.

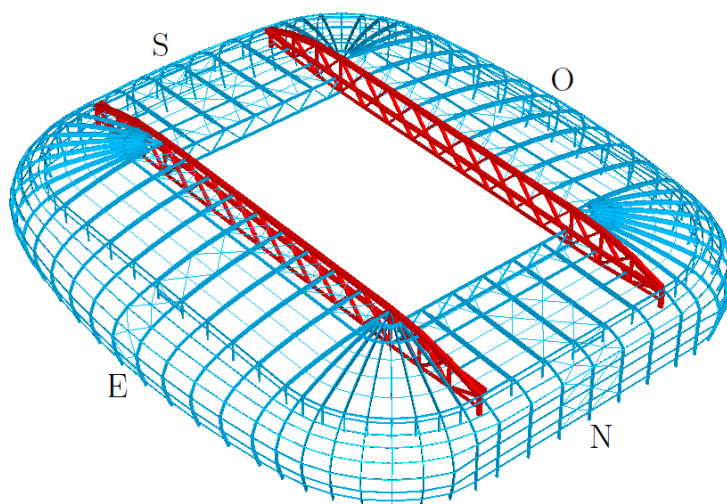


FIG. 1.2 – En rouge : les méga-poutres.

Une méga-poutre est constituée d'une membrure inférieure dédoublée et formée de deux plats parallèles entre eux, de diagonales en caisson formant un X et d'une membrure supérieure elle aussi en caisson. Les cellules constituées des diagonales formant un X sont espacées de 13,44 m. Les trois premières cellules sont quant à elles espacées de 14,06 m et possèdent un montant.

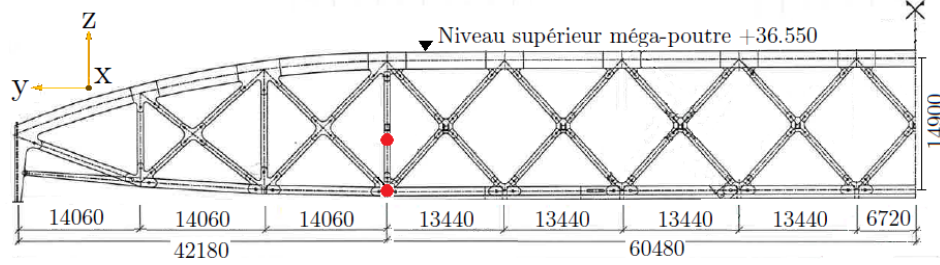


FIG. 1.3 – Vue en élévation d'une demi méga-poutre. Source : [9], modifiée.

Ces deux méga-poutres sont isostatiques. Leurs extrémités sont appuyées selon x et z (transversalement et verticalement) et le déplacement longitudinal horizontal selon y (dans le plan de la poutre) est libre. Les appuis sont des poteaux en béton de $1,8 \times 2,4$ m de section.

Au niveau de l'intersection des diagonales, une poutre de roulement est connectée à la méga-poutre. Cette poutre de roulement est représentée en rouge sur la figure 1.4. Les parties mobiles de la toiture se déplaceront sur cette poutre de roulement (voir 1.4).

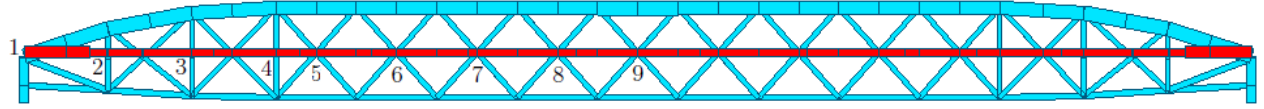


FIG. 1.4 – Méga-poutre. En rouge : la poutre de roulement.

Enfin, les méga-poutres ont pour spécificité d'être précontraintes au moyen de quatre câbles (en rouge sur la figure 1.5). Les configurations des câbles sont reprises à la figure 1.5.

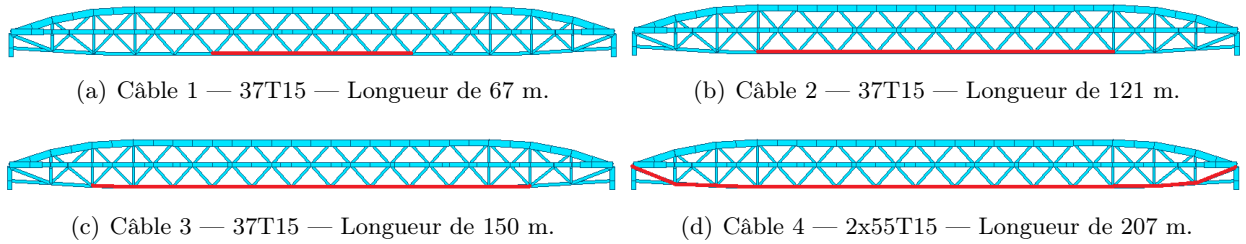


FIG. 1.5 – Dispositions, longueurs et nombre de torons associés à chaque câble.

1.3.2 Les poutres transversales

Les méga-poutres longitudinales sont reliées entre elles par deux poutres transversales, également de type treillis, et dont la hauteur atteint 8 m pour une portée de 80 m (voir figure 1.6).

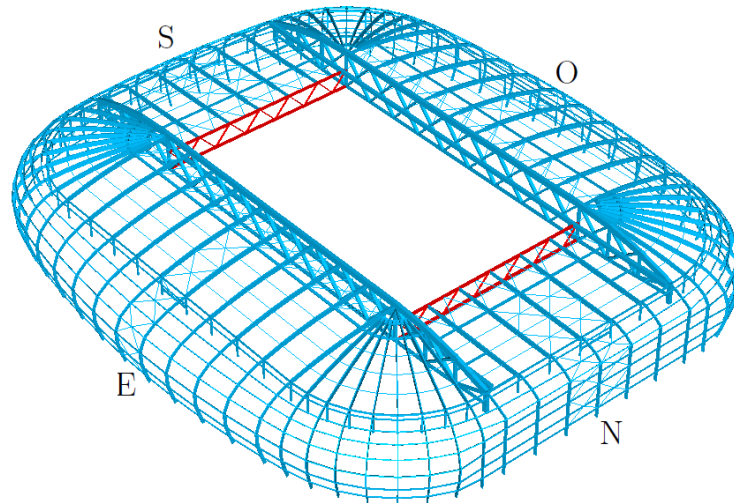


FIG. 1.6 – En rouge : les poutres transversales.

La connexion entre la poutre transversale et la méga-poutre se fait au niveau du dernier montant de cette dernière. Les points rouges sur la figure 1.3 et sur la figure 1.7 correspondent à des mêmes noeuds dans le modèle global. De ce fait, les poutres transversales s'appuient donc sur les méga-poutres à 42,18 m de leurs extrémités. Sur la figure 1.7, il est à noter que la poutre de roulement repose sur la membrure supérieure de la poutre transversale à une distance de 2,05 m de la ligne d'épure de la méga-poutre.

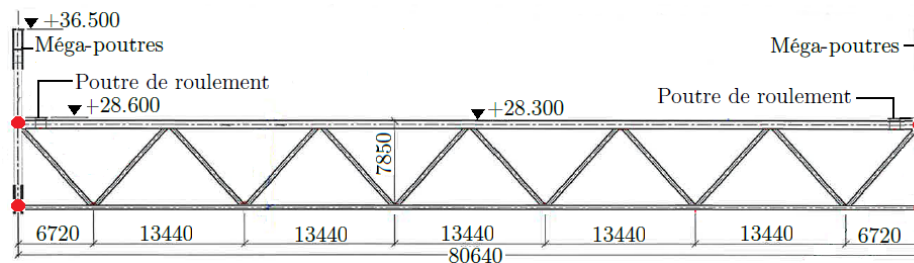


FIG. 1.7 – Vue en élévation de la poutre transversale, unité : mm. Source [9], modifiée.

1.3.3 Les fléaux

La figure 1.8 présente les différentes composantes de l'ossature supportant la couverture des tribunes ainsi que la couverture des déambulateurs.

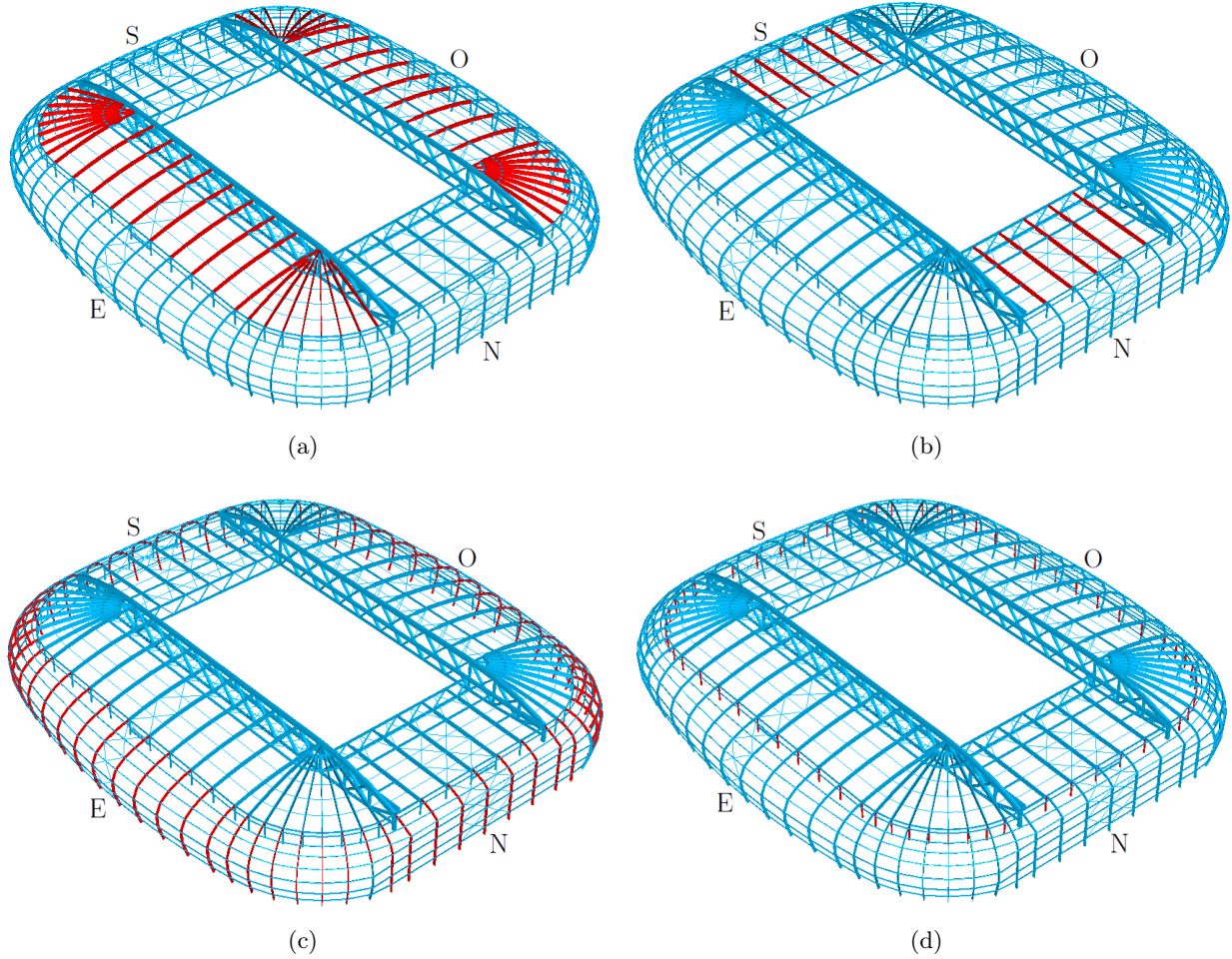


FIG. 1.8 – (a) Fléaux hauts Est et Ouest, (b) Fléaux hauts Nord et Sud, (c) Fléaux bas, (d) Potelets.

La couverture des tribunes Est et Ouest est assurée par un complexe de toitures reposant sur des pannes portées elles-mêmes par 52 fléaux (dit "fléaux hauts", voir figure 1.8-a). Ces fléaux sont des poutres isostatiques espacées transversalement de 13,44 m. Ces poutres, dont les sections sont des PRS en forme de "I" de 1300 mm de hauteur. Ils portent d'un côté sur les méga-poutres et de l'autre sur un potelet métallique (voir figure 1.8-d) qui ramène la charge en tête des gradins en béton. Pour les tribunes Nord et Sud, le système de couverture est identique, si ce n'est que les fléaux posent cette fois côté terrain sur les poutres transversales (voir figure 1.8-b).

La couverture des déambulateurs et l'enveloppe générale du stade est complétée par 66 éléments en forme d'arc appelés fléaux bas (voir figure 1.8-c). Ces éléments, dont les sections sont des PRS en forme de "I" de 900 mm de hauteur, portent en tête sur les mêmes potelets que les fléaux hauts assurant la couverture des tribunes, et sont directement reliés aux structures en béton en pied.

Les potelets sont des tubes métalliques de diamètre 457 mm et d'épaisseur variable en fonction de la position (potelet courant, potelet dans les angles, potelet de palée de contreventement, etc).

La figure 1.9-a présente l'ensemble fléaux hauts, bas et potelets.

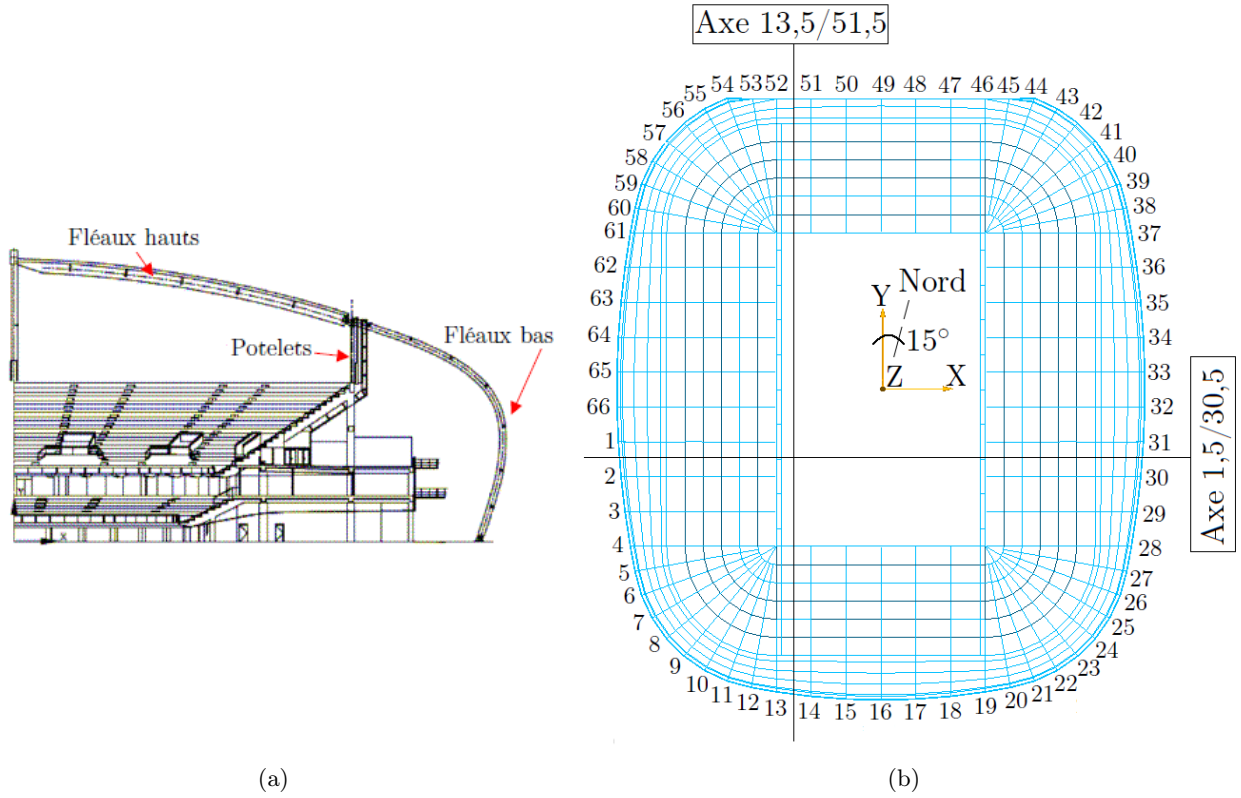


FIG. 1.9 – (a) Présentation du système structural : fléaux hauts, bas et potelets. Source : [7], modifiée.
(b) Numérotation des fléaux au sein du modèle numérique.

Afin de pouvoir facilement identifier des parties de la toiture, la figure 1.9-b donne le numéro de chaque fléau dans le modèle numérique. Ainsi il sera facile de parler d'une zone comprise entre deux fléaux. La notion d'axes sera également utilisée. Un axe se situe entre deux fléaux et deux exemples sont donnés sur la figure 1.9-b.

1.3.4 Les pannes

Il y a deux types de pannes au sein de l'ossature : les pannes basses en acier ①, et les pannes hautes ② ③ et ④). Les pannes ② (en bleu) sont des pannes en bois isostatique. Les pannes ④ (en vert) sont des pannes en acier nécessaires au système de contreventement (voir 1.5). Les pannes ③ (en rouge) sont des pannes qui supportent la poutre de roulement et sont donc également en acier.

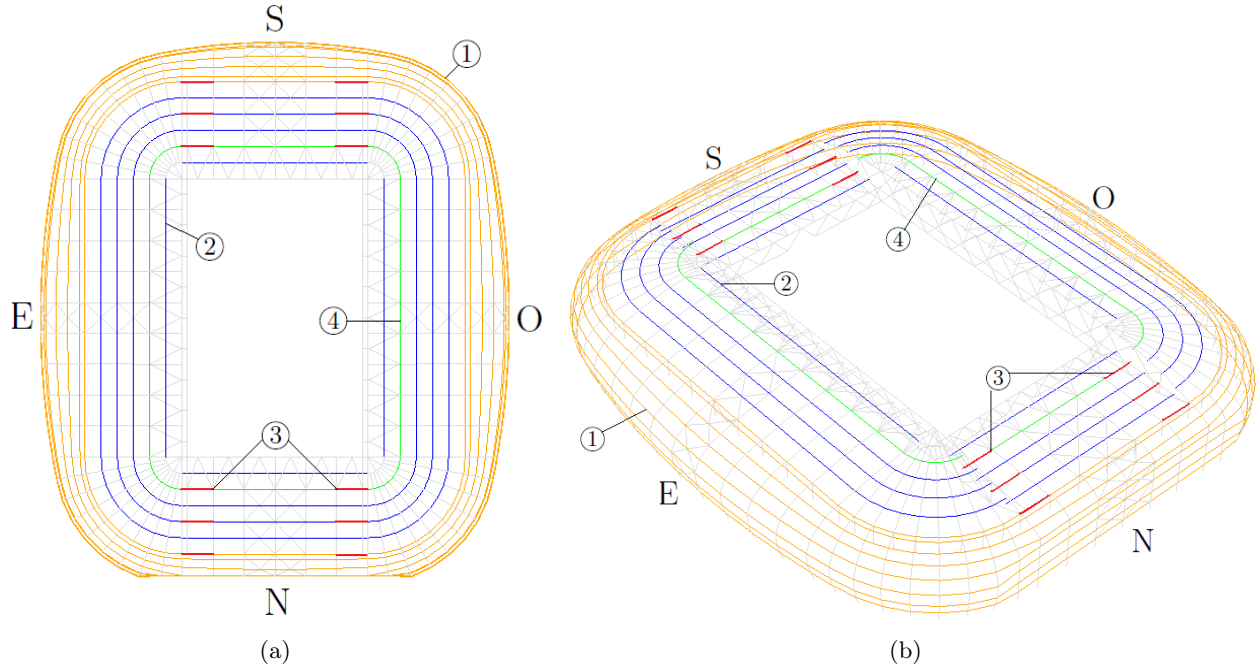


FIG. 1.10 – (a) Vue en plan, (b) Vue en perspective.

1.4 Description de la couverture du stade

La figure 1.11-a est une coupe selon l'axe 66/32 présentant les trois parties de la toiture, à savoir : toiture au-dessus des déambulateurs, toiture au-dessus des gradins et toiture mobile.

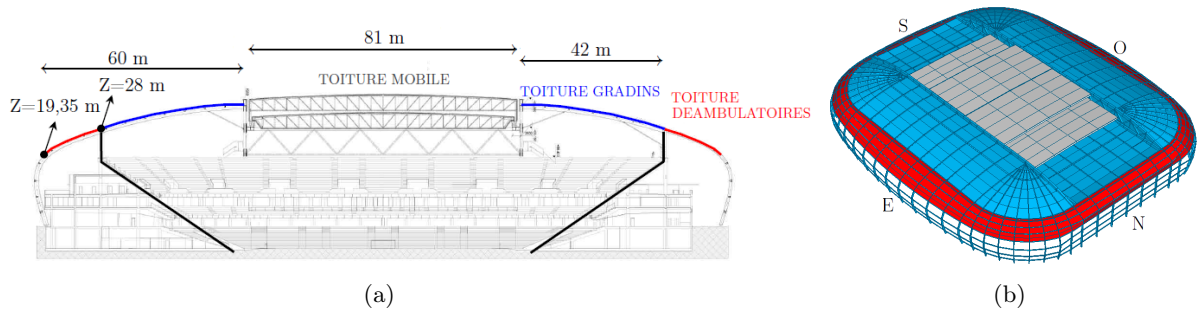


FIG. 1.11 – (a) Dimensions transversales de l'ossature. Source : [8], modifiée. (b) Différentes parties de la toiture.

Suivant le même code de couleur utilisé pour la figure 1.11-a, la figure 1.11-b présente en perspective les trois parties de la toiture. La figure 1.12 présente le système de couverture adopté pour les

fléaux bas. Tout d'abord, l'espace est libre sur une hauteur de 4,26 m. Ensuite, entre les cotes +4,26 et +19,35, des tubes en polycarbonate obturent partiellement l'espace. La répartition verticale de ces tubes observe une suite géométrique : l'espace entre les tubes est à chaque fois doublé en partant du premier tube. Ainsi à la cote de +4,24, l'espace entre les tubes est de 1 cm et à la cote de +19,35 m l'espace entre tubes est de 40 cm. De ce fait, cette partie de la couverture des fléaux bas présente une certaine porosité. Enfin, depuis la cote +19,35 jusqu'au sommet à la cote +27,26, les fléaux bas sont dotés d'une couverture étanche en plaques de polycarbonate (en rouge sur la figure 1.11).

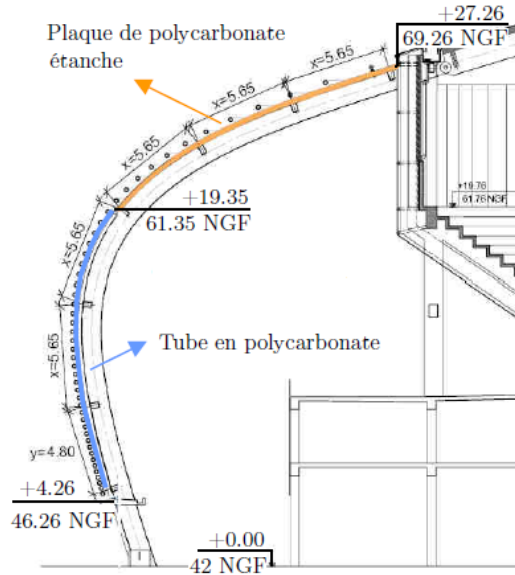


FIG. 1.12 – Description des fléaux bas. Source : [7], modifiée.

La toiture mobile est constituée de quatre caissons pouvant se mouvoir sur la poutre de roulement et dont l'agencement est repris à la figure 1.13.

Sur la figure 1.13, les deux caissons centraux (supérieurs) se déplacent au-dessus des deux caissons d'extrémités (inférieurs).

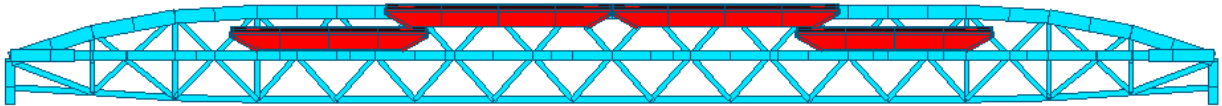


FIG. 1.13 – En rouge : les toitures mobiles en position fermée.

La figure 1.14 est une coupe réalisée perpendiculairement à une méga-poutre au droit de la poutre transversale. Les caissons supérieurs et inférieurs viennent s'appuyer sur la poutre de roulement.

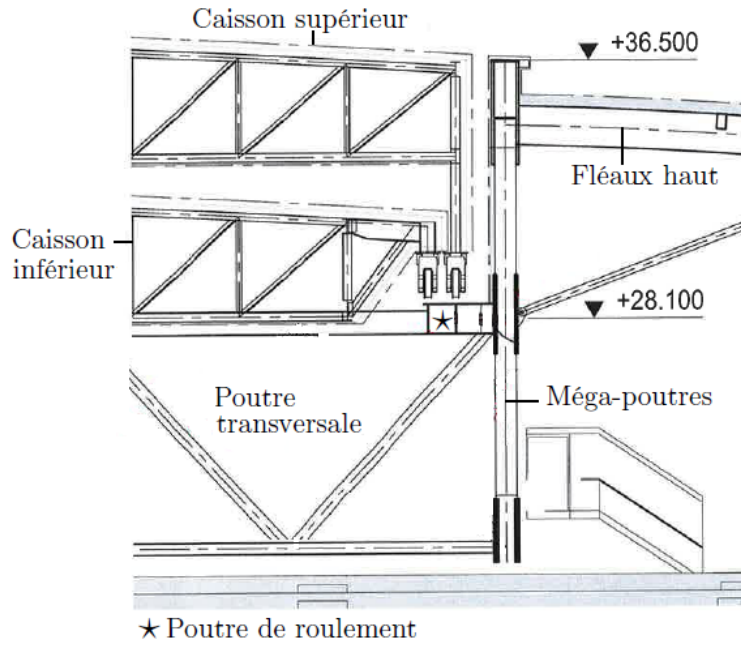


FIG. 1.14 – Coupe au cœur de la toiture mobile. Source : [9], modifiée.

La figure 1.15 présente deux vues de ces toitures mobiles. Selon la vue Y-Z, les faces fermant le caisson selon la direction X sont inclinées vers l'intérieur.

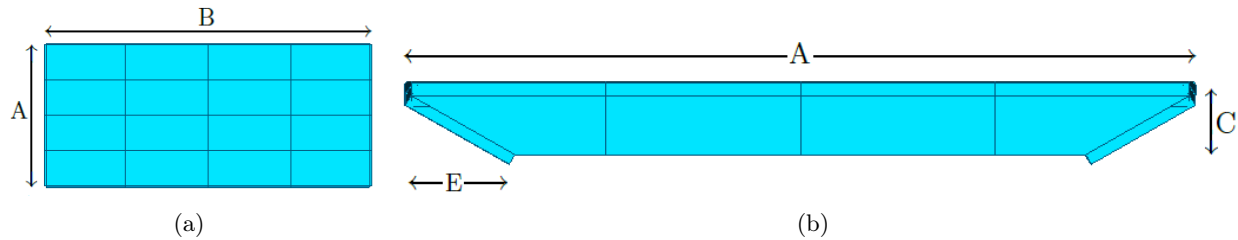


FIG. 1.15 – Toitures mobiles : (a) vue selon X-Y , (b) vue selon Y-Z.

Le tableau 1.1 reprend les différentes valeurs associées aux lettres des figures 1.15-a et 1.15-b. En effet, il existe quelques différences géométriques entre les caissons dits inférieurs et ceux dits supérieurs.

Caisson	A	B	C	D	E
Inférieur	33372	76740	25148	33808	4430
Supérieur	39319	78637	25359	33800	4459

TAB. 1.1 – Dimensions des caissons inférieurs et supérieurs. Unité : mm.

La dimension D est la hauteur du caisson à mi-largeur, hauteur plus grande que la dimension C afin d'avoir une pente nécessaire à l'écoulement des eaux de pluie. Les caissons supérieurs sont un peu plus longs et un peu plus larges que les caissons inférieurs.

Afin de faciliter l'analyse de la structure et de pouvoir faire référence de manière univoque à une partie précise, la toiture peut se décomposer en 12 parties (voir figure 1.16) nommées ci-après :

1. toiture Nord
2. toiture Nord-Est
3. toiture Est
4. toiture Sud-Est
5. toiture Sud
6. toiture Sud-Ouest
7. toiture Ouest
8. toiture Nord-Ouest
9. caisson Nord-inf
10. caisson Nord-sup
11. caisson Sud-sup
12. caisson Sud-inf

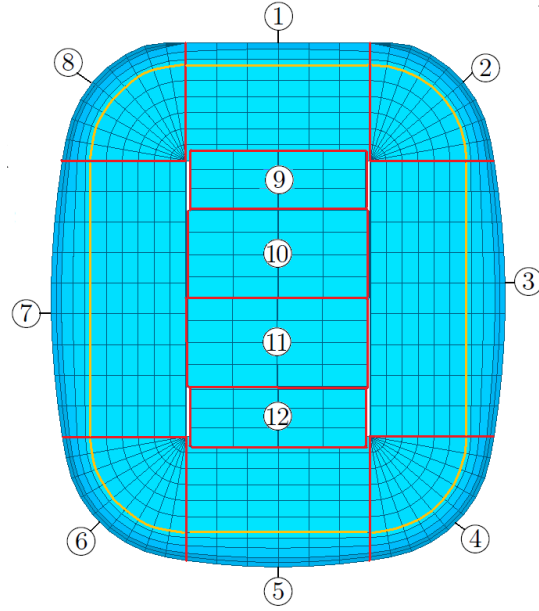


FIG. 1.16 – Douze zones.

La figure 1.16 permet d'introduire une numérotation des pannes supportant la couverture : ces pannes sont au nombre de 11 et sont numérotées depuis l'intérieur du stade vers l'extérieur. La panne 6 est donc la panne en orange.

1.5 Description du système de contreventements

La stabilité générale horizontale de la toiture est assurée par un système de contreventements présenté à la figure 1.17. Ce système permet de transférer l'ensemble des efforts horizontaux qui lui sont appliqués vers deux palées verticales de contreventements dans chaque direction principale. Ces deux palées sont elles-mêmes appuyées sur les structures en béton. Ces éléments de contreventements sont composés de tubes métalliques. Sur base de la figure 1.17, il apparaît qu'un contreventement est placé, par côté, à mi-longueur. Cette disposition n'est pas le fruit du hasard. En effet, cette configuration permet de ne pas avoir de bridage lors d'allongements ou de rétrécissements dus aux sollicitations thermiques au sein de la structure (pour un exemple concret voir [10]).

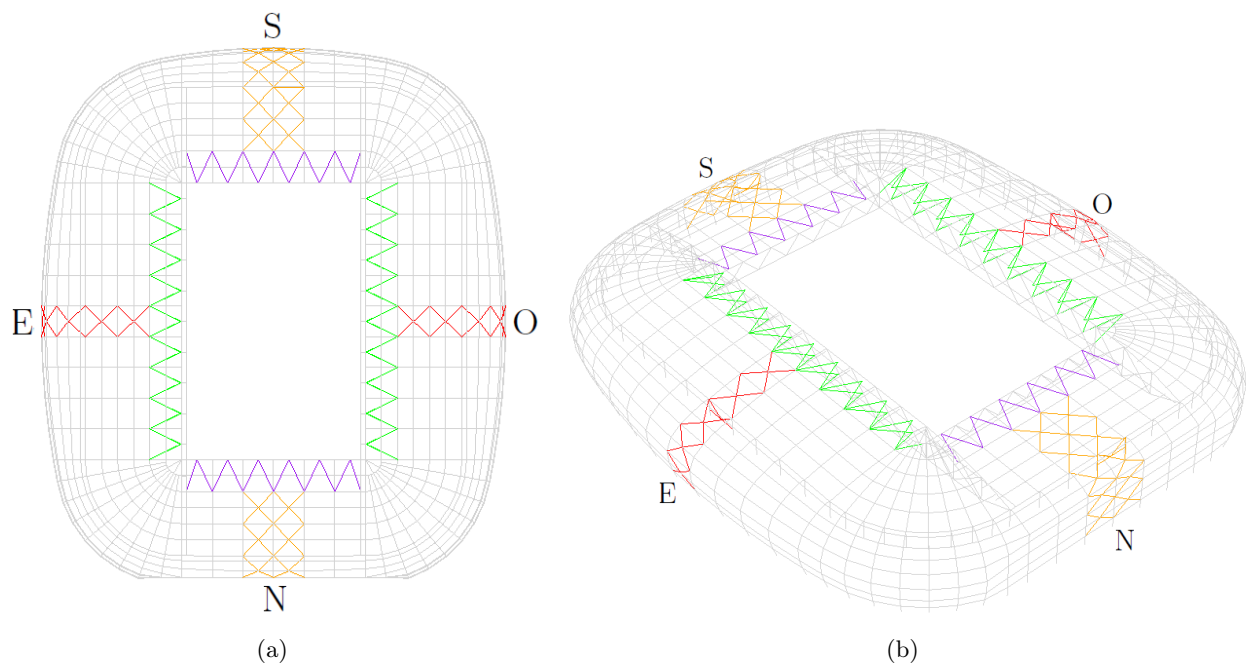


FIG. 1.17 – Système de contreventements : (a) vue en élévation, (b) vue en perspective.

1.5.1 Description du mode de reprise des charges verticales.

Pour rappel, les fléaux sont constitués de deux parties isostatiques appelées fléaux hauts et fléaux bas. Ces deux parties viennent s'appuyer en un même endroit au niveau des potelets situés en tête des gradins. Les fléaux bas répartissent donc les charges verticales entre leurs appuis en pied et les potelets.

Au niveau de la couverture des tribunes Est et Ouest, les charges verticales appliquées sont transférées par l'intermédiaire des fléaux hauts, d'une part sur les potelets et d'autre part sur les méga-poutres. Pour la couverture des tribunes Nord et Sud, les fléaux viennent s'appuyer sur les poutres transversales. Ces poutres transversales s'appuient quant à elles sur les méga-poutres.

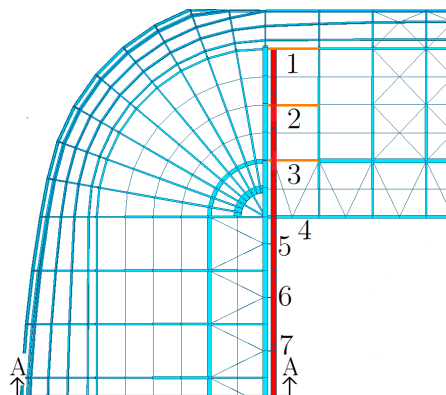


FIG. 1.18 – Vue en élévation. Côté Nord-Est.

Observons la méga-poutre en détails. Celle-ci supporte également la toiture mobile qui repose sur la poutre de roulement (voir figure 1.4). Les figures 1.18 & 1.19-a représentent les éléments sur lesquels repose la poutre de roulement. Les numéros correspondent aux numéros de la figure 1.4.

Du côté de la toiture Nord (de 1 à 3), cette poutre de roulement s'appuie directement sur les pannes (en orange) qui s'appuient elles-mêmes, sur les montants des méga-poutres et sur le premier fléau adjacent à la méga-poutre. Au droit de la poutre transversale (4), la poutre de roulement s'appuie sur elle au niveau de la membrure supérieure. La charge des toitures mobiles est donc introduite sur les méga-poutres dans l'axe de ces dernières.

Au droit du terrain (de 5 à 7), les poutres de roulement s'appuient sur les méga-poutres par l'intermédiaire de consoles encastrées dans les nœuds centraux des diagonales. Dans ce cas la charge des toitures mobiles est introduite avec un excentrement de 2,05 m. Cette excentricité introduit un moment de torsion dans la méga-poutre. Ce moment est équilibré par un couple d'efforts normaux dans les fléaux hauts et dans les bracons obliques connectés au nœud central des diagonales (voir 1.19-b). Les diagonales supérieures des méga-poutres assurent le transfert de ce moment de torsion. On a :

$$F e = N h$$

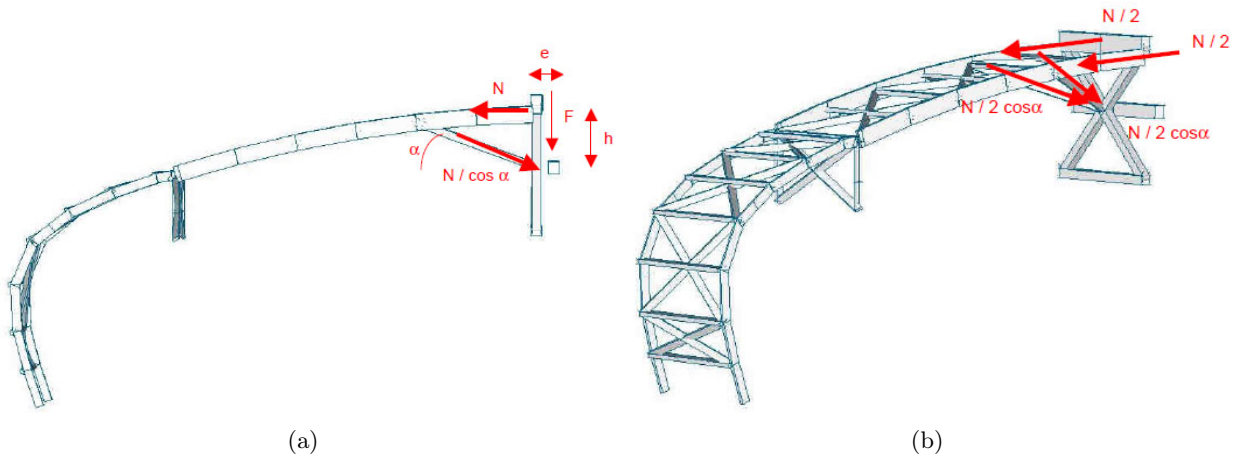


FIG. 1.19 – Diagramme statique des charges montrant la reprise de l'effort excentré par la poutre de roulement : (a) coupe A-A de la figure 1.18 (source [7]), (b) vue en perspective (source [7]).

1.5.2 Description du mode de reprise des charges horizontales.

Tout d'abord, les points fixes horizontaux par direction sont représentés à la figure 1.20.

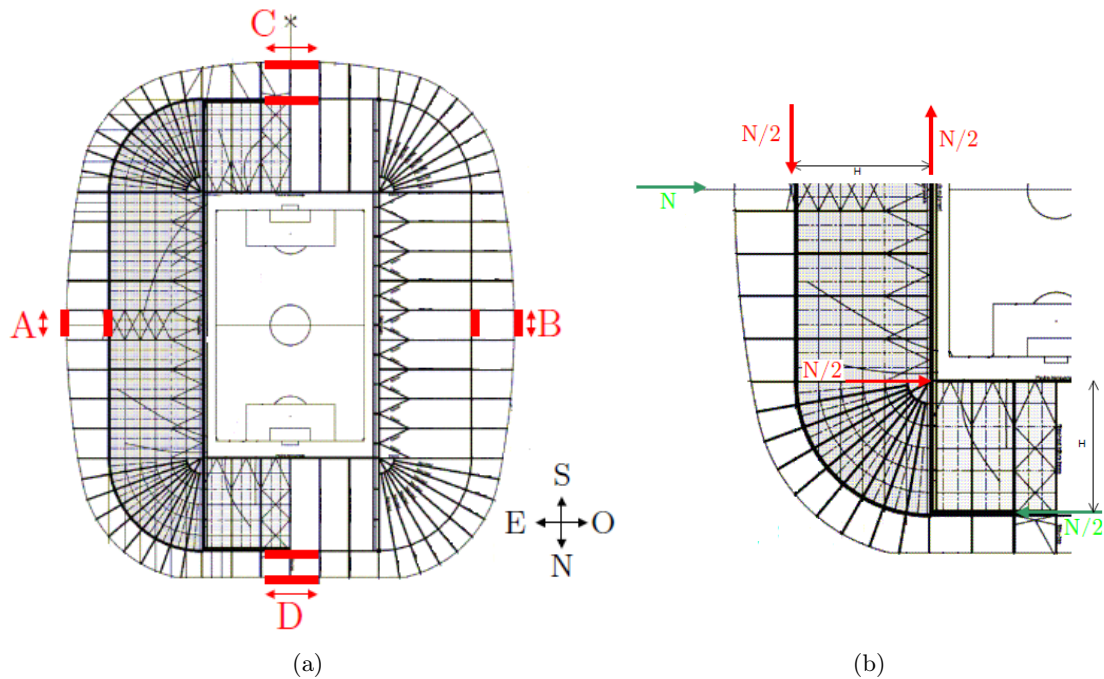


FIG. 1.20 – Contreventements : (a) points fixes horizontaux par direction, (b) mode de reprise des charges.

Lors de l'application d'un effort horizontal sur les fléaux bas de la façade Est, la reprise de l'effort se réalise suivant les étapes suivantes :

- A) une partie de celui-ci est transmise directement au béton par l'intermédiaire de l'appui inférieur des fléaux bas sur le béton ;
- B) le reste de l'effort remonte vers le sommet des fléaux bas et introduit un effort normal dans les fléaux hauts correspondants¹.
 1. par l'intermédiaire de la poutre de contreventement horizontale jouxtant la membrure supérieure de la méga-poutre, cet effort transite jusqu'à l'extrémité de cette poutre de contreventement correspondant à l'axe des poutres transversales ;
 2. un équilibrage interne entre les fléaux hauts de la zone de virage, la panne de ceinture qui relie toutes les têtes de potelet et la poutre de contreventement horizontale permet de renvoyer cet effort dans la poutre de ceinture au niveau des toitures Nord et Sud ;
 3. l'effort transite alors jusqu'aux contreventements verticaux C et D et peut alors descendre dans le béton en tête des gradins.

1. Les potelets sont considérés d'un point de vue statique comme des bielles bi-rotulées.

Chapitre 2

Hypothèses générales de calcul au vent

2.1 Introduction

Ce chapitre reprend les hypothèses générales de calcul au vent sur base des documents [8] et [11]. Étant donné que le présent travail se base sur les pressions mesurées en soufflerie sous écoulement turbulent, seule cette facette du calcul au vent est abordée.

2.2 Caractéristiques du vent sur le site

La caractérisation du vent sur le site est effectuée suivant la Norme EN 1991-1-4 ([12]) et l'Annexe Nationale Française ([13]). Le tableau 2.1 reprend les différentes étapes et valeurs associées de cette caractérisation.

Vitesse de référence	
Valeur de base de la vitesse de référence	$V_{b,0}=26$ m/s
Coefficient de direction	$C_{dir}=1$
Coefficient de saison	$C_{season}=1$
Période de retour	50 ans
Vitesse de référence	$V_b=26$ m/s
Vent moyen	
Catégorie de terrain 3a	$Z_0 = 0,2$ m, $Z_{min} = 5$ m
Hauteur de la structure	$Z_s = 36,43$ m
Coefficient de rugosité	$k_r = 0,209$, $c_r(Z_s) = 1,09$
Coefficient orographique	$c_0 = 1$
Vent moyen	$V_m(Z_s) = 28,3$ m/s
Turbulence du vent	
Coefficient de turbulence	$k_1 = 1$
Intensité de turbulence	$I_v(Z_s) = 19\%$
Pression dynamique de pointe	
Pression dynamique moyenne	$q_{moyen}(z_s) = 491,7$ N/m ²
Facteur de pointe	$g = 3,5$
Pression dynamique de pointe	$q_p(z_s) = 1133$ N/m ²

TAB. 2.1 – Résultats de la caractérisation du vent suivant la Norme EN 1991-1-4 et l'Annexe Nationale Française.

La catégorie de terrain qui est choisie est la IIIa (campagnes avec haies, bocages, habitats dispersés). Dans le cadre d'une méthode simplifiée, pour le calcul de l'état limite de service, l'Eurocode considère la pression dynamique de pointe $q_p(z_s) = 1133 \text{ N/m}^2$ que l'on multiplie par 1,5 pour obtenir l'état limite ultime, soit une pression de 1700 N/m^2 . **La démarche entreprise dans ce travail considère les pressions dynamiques p_d mesurées en soufflerie pour effectuer les calculs.**

2.3 Simulation en veine d'essai

Les essais sont effectués dans la soufflerie à couche limite atmosphérique du Centre Scientifique et Technique du Bâtiment. La figure 2.1 présente deux vues de la maquette du stade.



FIG. 2.1 – Vues de la maquette du stade : (a) côté Nord, (b) côté Sud.

La figure 2.1(a) présente le côté Nord où l'on distingue clairement la forme de l'écran géant. La figure 2.1(b) est une vue côté Sud avec un peu plus d'élévation et on peut voir que la toiture mobile supérieure côté Nord est ouverte.

Pour l'équipement du stade, pas moins de cinq cents prises de pressions synchrones sont nécessaires. La répartition entre les différentes parties est :

- 257 prises pour la toiture fixe ;
- 87 prises pour la couverture des déambulateurs ;
- 64 prises pour les caissons mobiles inférieurs ;
- 64 prises pour les caissons mobiles supérieurs ;
- 11 prises pour le gradin Est et 14 prises pour le gradin Sud ;
- 8 prises pour le voile de fermeture entre les gradins et la toiture fixe.

A noter qu'il existe des prises de pression dites extérieures et intérieures. Afin de générer l'intensité de turbulence calculée via l'Eurocode, des petits plots sont disposés en amont de la maquette (voir figure 2.2(b)).

Celle-ci est disposée sur une table ronde pouvant pivoter afin d'exposer la structure suivant différents angles d'attaque du vent. Pour la prise en compte de la rugosité à proximité du stade, son environnement proche dans un rayon de 300 mètres est modélisé. Sur base de la figure 2.2, on peut voir les hôtels et parkings intégrés au projet (d) les bâtiments de la CPAM situés au Nord-Est (c) ainsi que le bois avoisinant (e). La modélisation comprend également les principaux bâtiments de l'université situés au Sud-Est, non visibles sur la figure 2.2.

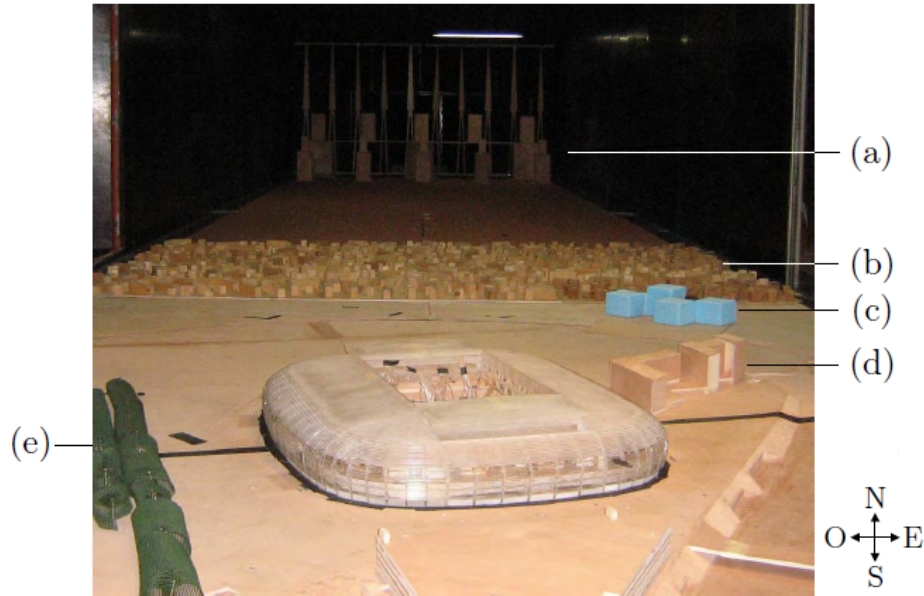


FIG. 2.2 – (a) Vue de la sortie des turbines, (b) plots disposés afin de créer le profil de vitesse, (c) bâtiments de la CPAM, (d) hôtels intégrés au projet, (e) bois avoisinant.

Le tableau 2.2 reprend les facteurs d'échelles utilisés.

Simulation en veine d'essai	
Échelle géométrique	1/200
Échelle des vitesses	1/2,98
Échelle des temps	1/67

TAB. 2.2 – Facteurs d'échelles.

La maquette a une hauteur de 18 cm et la vitesse moyenne à cette hauteur de référence est de 9,5 m/s. L'échelle de temps nous indique qu'une minute d'acquisition dans la veine d'essai correspond à environ 1h10 en temps réel.

La maquette est supposée infiniment rigide. Au sein de la soufflerie la fréquence d'échantillonnage est de 200 Hz. La durée d'un essai en soufflerie est d'environ 92 secondes (sans compter la mise en régime).

En temps réel, les pressions sont échantillonnées avec un pas de temps de l'ordre de 0,342 seconde donnant ainsi une **fréquence d'échantillonnage environ égale 2,924 Hz. Chaque essai dure, en temps réel, environ 105 minutes ce qui correspond à 12 échantillons d'un peu moins de 9 minutes.**

En tout, 24 directions de vent (de 0° à 345° avec un pas de 15°) et 10 configurations de toiture ont été mesurées.

2.4 Exploitation des résultats du CSTB

A chaque prise de pression est associée une facette sur laquelle on considère la pression mesurée comme étant uniforme. Les facettes définies par les prises de pression ne correspondent pas aux plaques du modèle éléments finis 3D (ELF3D). Pour s'en convaincre les deux modèles : facettes CSTB et modèle éléments finis 3D sont repris à la figure 2.3.

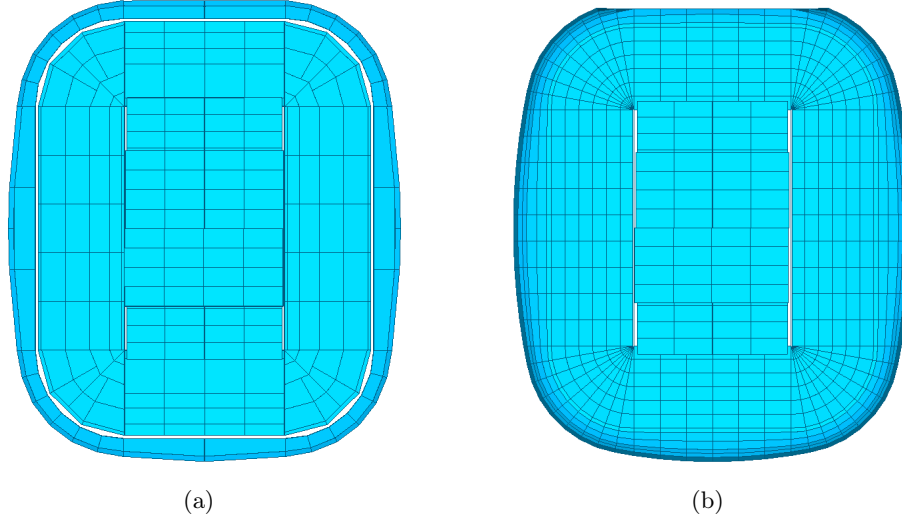


FIG. 2.3 – (a) Vue des facettes du CSTB, (b) vues des éléments plaques du modèle éléments finis 3D.

Pour la toiture mobile, les deux modèles sont identiques. En dehors de cette partie on remarque que le modèle éléments finis 3D a un maillage plus fin que le maillage associé aux facettes du CSTB. Ainsi à une facette du CSTB peut être associée un ou plusieurs éléments plaques du modèle éléments finis 3D.

2.4.1 Convention d'orientation pour les pressions

En soufflerie, des prises de pressions extérieures et intérieures sont disposées sur les facettes de la maquette. Les données reçues sont la différence de pression entre les deux prises. La surface est rattachée à la prise extérieure et la convention d'orientation des pressions est schématisée à la figure 2.4.

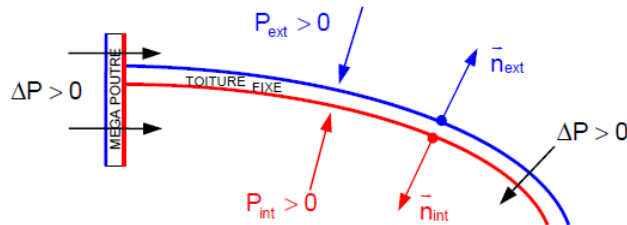


FIG. 2.4 – Convention d'orientation pour les pressions. La surface extérieure est en bleu et la surface intérieure est en rouge. Source : [8].

Ainsi :

- l'action d'une pression positive conduit à un effort d'écrasement (action opposée à la normale extérieure à la surface) ;
- l'action d'une pression négative conduit à un effort d'arrachement (action dans le sens de la normale extérieure à la surface).

2.5 Méthodologie du calcul au vent

La méthodologie du calcul au vent est décrite ci-après afin de bien cibler les objectifs du présent travail. La prise en compte des effets du vent sur le stade de Lille se déroule en deux temps :

1. une analyse simplifiée des essais en soufflerie et le recours aux normes permettant d'établir des cas de charges réalistes afin d'établir le plan de matière de la structure ;
2. le calcul des modes propres de vibration du stade et des surfaces d'influences d'efforts jugés dimensionnants. Sur cette base, une analyse détaillée des essais en soufflerie est réalisée pour déterminer le comportement dynamique de la structure.

Le but du présent travail se situe au niveau de la deuxième phase et plus particulièrement à l'étude dynamique poussée d'efforts jugés dimensionnants.

2.5.1 Méthodologie pour le dimensionnement

La détermination du plan de matière se base sur des cas de charges enveloppes obtenus à partir d'une interprétation simplifiée des essais :

- cinq directions de vent et trois configurations de toitures sont étudiées. Les directions de vent et les configurations de toiture sont choisies de manière à couvrir les situations les plus défavorables et sont reprises respectivement aux figures 2.5 et 2.6.

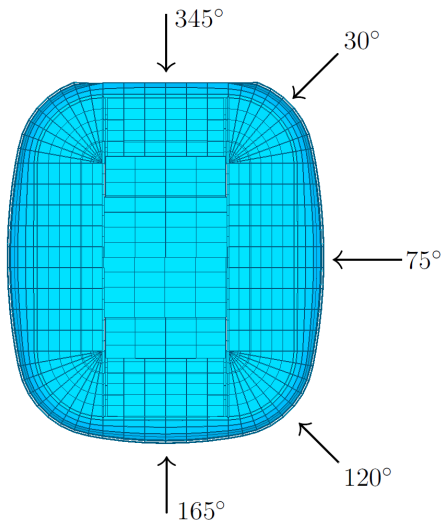
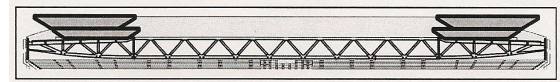
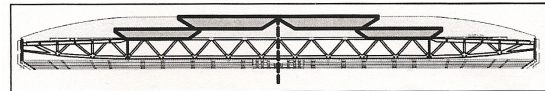


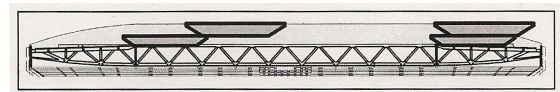
FIG. 2.5 – Directions de vent étudiées.



(a) Configuration 1 : 100 % Ouverte.



(b) Configuration 2 : 100 % Fermée.



(c) Configuration 7 : 50 % Fermée.

FIG. 2.6 – Configuration des toitures mobiles retenues. Source : [8].

Ce travail analyse les trois directions principales : 75°, 120° et 165° pour la configuration 2, 100% fermée (présentée à la figure 2.6-b).

2.5.2 Établissement des extrema centrés

Le but est de déterminer l'extremum centré, $\bar{z}$, pour chaque effort étudié. Si l'on effectue une analyse stochastique, la statistique des valeurs extrêmes vue en 1.3.4 permet de calculer cet extremum centré via les moments spectraux d'ordre 0 et d'ordre 2. Dans l'approche utilisée par le bureau d'études Greisch et le Centre Scientifique et Technique du Bâtiment cet extremum centré est calculé directement sur la réponse temporelle. Sur chaque échantillon (durée de 525 secondes), les extrema (minima et maxima) sont relevés et ensuite moyennés entre eux. Le résultat sont les extrema centrés. L'opération est effectuée pour chaque incidence et pour chaque configuration. On retient finalement le maximum des maxima centrés (et respectivement le minimum des minima centrés) et ce résultat est appelé le maximum (et respectivement le minimum) toutes incidences confondues.

2.6 Liste des efforts étudiés

Il n'est bien entendu pas réaliste de vouloir effectuer le calcul des extrema centrés pour chaque effort au sein de chaque élément de la structure. Ainsi, on choisit des éléments représentatifs d'un ensemble d'éléments adjacents. Pour être précis il faut avoir des éléments étudiés dans les différentes parties supportant la couverture du stade (décrit en 1.3) :

- **Les méga-poutres** : trois éléments sont choisis au sein de la méga-poutre côté Est et surlignés en rouge sur la figure 2.7.

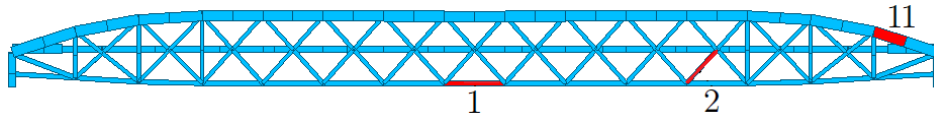


FIG. 2.7 – Étude poussée de trois éléments au sein de la méga-poutre côté Est.

L'élément 1 est un élément de la membrure inférieure, l'élément 2 est une diagonale et l'élément 11 est un élément de la membrure supérieure.

- **Les poutres transversales** : l'élément 5 étudié fait partie de la membrure supérieure de la poutre transversale côté Nord.

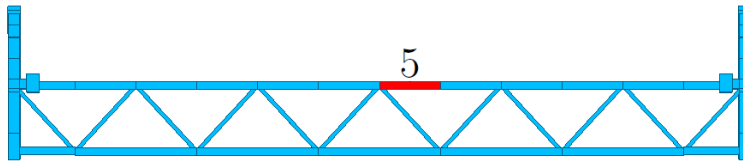


FIG. 2.8 – Étude poussée d'un élément au sein de la poutre transversale Nord.

- **Les fléaux et pannes** : deux éléments sont étudiés au sein du fléau 64. L'élément 3 correspond au fléau haut côté Est et l'élément 8 est un potelet (voir figure 2.9). Deux pannes sont étudiées entre les fléaux 2 et 3 et identifiées en rouge sur la figure 2.10.

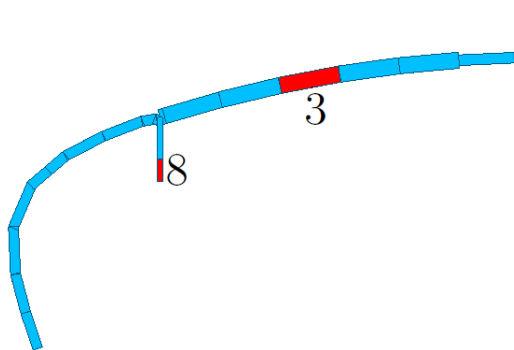


FIG. 2.9 – Étude poussée de deux éléments au sein du fléau 64.

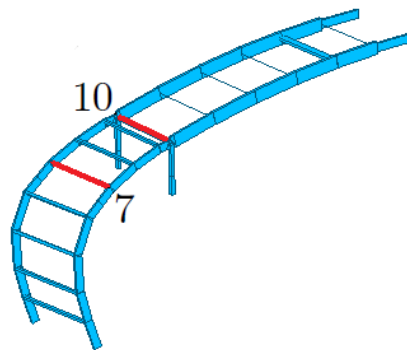


FIG. 2.10 – Étude poussée de deux pannes entre les fléaux 2 et 3.

L'élément 4 est une panne métallique côté Est intégrée au système de contreventement.

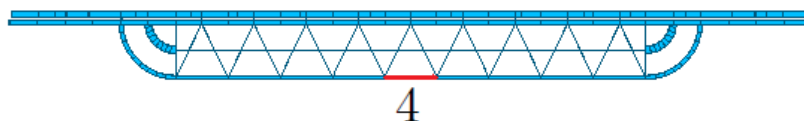


FIG. 2.11 – Étude poussée d'une panne métallique, vue en plan.

- **Reprise de l'effort excentré introduit sur la méga-poutre par la poutre de roulement** : le mode de reprise est décrit en 1.5.1 et l'on voit sur la figure 1.19 que la stabilité générale est assurée par des bracons obliques connectés au nœud central des diagonales des méga-poutres. L'élément 9 est un de ces bracons pour la méga-poutre côté Est. Sur la figure 2.12, la méga-poutre n'a pas été dessinée afin de clarifier la figure. Le point de rencontre des bracons (point noir sur la figure) correspond au nœud central des diagonales.

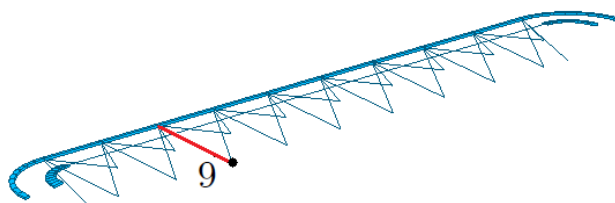


FIG. 2.12 – Etude poussée d'un bracon travaillant dans le système de reprise de l'effort excentré induit par la poutre de roulement.

- **Système de contreventements** : deux éléments sont étudiés. L'élément 6 est un des deux contreventements entre les deux potelets des fléaux 65 et 66. L'élément 12 est l'équivalent pour le côté Sud de la toiture du stade. Ces éléments participent au mode de reprise des charges horizontales expliqué en 1.5.2.

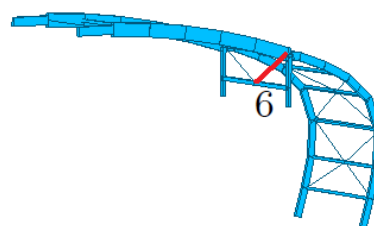


FIG. 2.13 – Étude poussée d'un contreventement entre deux potelets.

Par souci de clarté une annotation simplifiée est mise au point. Le premier niveau indique à quel élément de la couverture du stade l'élément appartient, le deuxième niveau fixe son orientation et le troisième niveau est un indice de l'élément étudié. La tableau 2.3 reprend les deux premiers niveaux.

Niveau 1	Niveau 2	Description
MP	E	Éléments de la méga-poutre côté Est
PT	N	Éléments de la poutre transversale côté Nord
Co	S	Éléments du système de contreventements côté Sud
	O	Éléments du système de contreventements côté Ouest
P	E	Pannes côté Est
	O	Pannes côté Ouest
F	O	Éléments du fléau n°64 côté Ouest

TAB. 2.3 – Annotations simplifiées.

Le tableau 2.4 reprend la liste des 12 éléments étudiés au sein de la toiture du stade de Lille. Un seul effort intérieur est étudié par élément : N correspondant à un effort normal, M_y à un moment selon l'axe y. L'annotation simplifiée est reprise pour chaque effort.

Effort n°	Code	Description	Effort intérieur
1	MP.E.I	Membrure inférieure de la méga poutre Est	N
2	MP.E.D	Diagonale de la méga poutre Est	N
3	F.O.M	Éléments du fléau haut n°64	M_y
4	P.E	Panne métallique de la toiture Est	N
5	PT.N.S	Membrure supérieure de la poutre transversale Nord	N
6	Co.O	Contreventement entre potelets pour la toiture Ouest	N
7	P.O.B	Panne basse de la toiture Ouest	N
8	F.O.Po	Potelet appartenant au fléau n°64	N
9	MP.E.B	Bracons connectés à la méga poutre Est	N
10	P.O.P	Panne périphérique de la toiture Ouest	N
11	MP.E.S	Extrémité membrure supérieure de la méga-poutre Est	N
12	CO.S	Contreventement entre potelets pour la toiture Sud	N

TAB. 2.4 – Liste des éléments étudiés.

Le positionnement des douze éléments au sein de la structure globale du stade est reprise sur la figure 2.14.

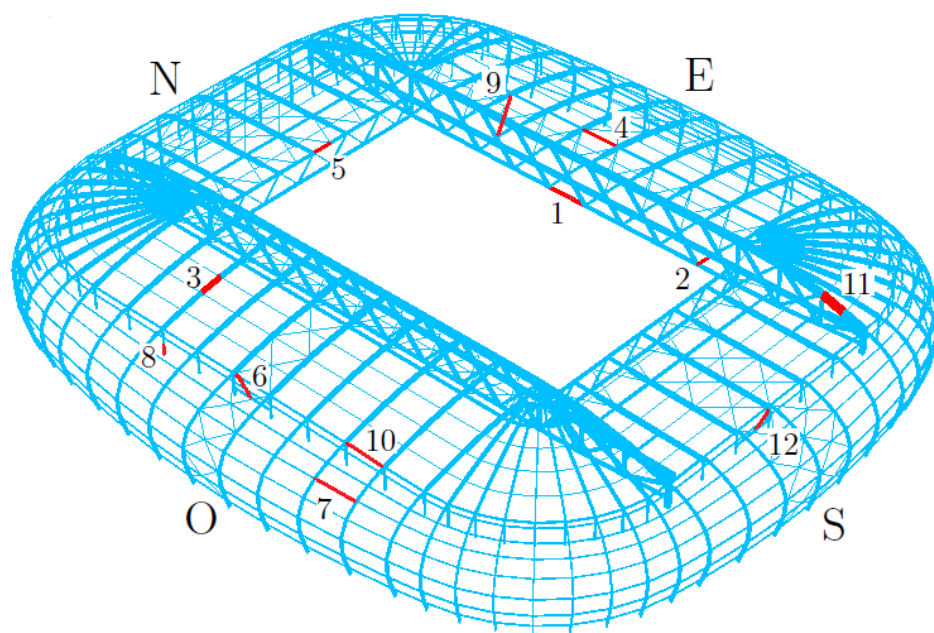


FIG. 2.14 – Identification des douze éléments au sein de la toiture du stade.

Chapitre 3

Analyse des signaux de pressions

3.1 Introduction

La caractérisation des pressions sur la structure passe d'une part par l'étude de sa composante moyenne et d'autre part par l'étude de sa composante fluctuante. Cette composante fluctuante est un processus aléatoire à moyenne nulle et la théorie vue au chapitre 1 peut donc être appliquée (en considérant le processus gaussien et stationnaire). Cette étude se réalise au moyen de caractérisation de premier rang tel que l'écart-type et via des caractérisations de second rang : échelle de temps et densité spectrale.

Pour la structure qui nous occupe, il est primordial d'identifier correctement ses caractéristiques aérodynamiques et toutes les irrégularités au sein de sa géométrie. Il est intéressant d'identifier les zones sensibles où le vent sera contrarié et donc où des zones de recirculation et de détachements tourbillonnaires pourront prendre naissance.

Cette caractérisation aérodynamique se fera en plusieurs parties depuis une vue globale de la structure jusqu'aux détails de cette dernière. Il est certain que ces caractéristiques changent suivant l'angle d'attaque du vent et qu'elles ne peuvent être, à proprement parler, dites intrinsèques. Un obstacle selon une direction peut devenir sans effet selon une autre. Ainsi cette description se fera pour deux directions de vent : 75° et 165° .

Pour l'explication de certaines valeurs, il sera parfois utilisé l'analogie avec une nappe d'eau sur un déversoir à seuil mince. En effet, les molécules d'eau emportent à l'interface air-eau des molécules d'air se trouvant sous la nappe. Ainsi la pression diminue et la nappe d'eau a tendance à se rapprocher du déversoir. Ce phénomène est à éviter et, pour ce faire, on place des déflecteurs sur le déversoir afin d'aérer la nappe. L'analogie peut être faite avec une masse d'air à l'abri derrière une paroi verticale et une masse d'air en mouvement passant au-dessus.

Au travers des valeurs présentées ci-après, on peut également observer le **phénomène de décollement de couche** au droit d'obstacles. Pour ce phénomène, les valeurs moyennes des pressions sont fortement négatives, $\mu \ll 0$, et les écarts-types associés sont élevées, $\sigma \gg$.

Sur les figures présentant des valeurs suivant des axes (voir figure 1.16), des lignes verticales de deux couleurs seront tracées afin de délimiter des zones. Les lignes rouges séparent différentes toitures. Les lignes noires font la transition entre fléaux bas et fléaux hauts.

Signification de l'échelle de temps Il est important de comprendre la signification de l'échelle de temps afin d'associer aux valeurs observées sur la structure, les phénomènes physiques sous-jacents. La définition de l'échelle de temps représente un ordre de grandeur du temps de mémoire des pressions appliquées sur la structure. Ce temps de mémoire des pressions peut être relié à une

taille de "tourbillon moyen".

Ainsi, les parties faisant face au vent de la structure subissent les tourbillons sans en avoir encore modifié l'allure. Ensuite, la structure présente dans le flux d'air en modifie les caractéristiques et par exemple, des gros tourbillons en amont se transforment en petits tourbillons suite à la rencontre de la structure, des obstacles sur cette dernière ou des irrégularités et décrochements au sein de sa géométrie.

Plus les tourbillons sont gros, plus ils chargent la structure de manière uniforme pendant un temps long et plus les pressions restent sensiblement les mêmes sur la durée de passage du tourbillon. Aux gros tourbillons sont donc associées des échelles de temps plus conséquentes¹ : le temps de mémoire des pressions est important. A contrario, des petits tourbillons chargent sur un même laps de temps la structure de manière différente avec des vitesses de vent modifiées de sorte que l'échelle de temps des pressions est faible. Ainsi, on peut s'attendre à observer des échelles de temps plus importantes pour les parties faisant face au vent d'une structure que pour les parties sous le vent.

Notes importantes :

- la caractérisation des pressions illustrée par la suite se base sur les pressions dynamiques p_d mesurées en soufflerie ;
- a une pression positive est associée un effort d'écrasement (surpression), à une pression négative un effort d'arrachement (dépression) ;
- les surfaces couvertes par les capteurs de prise de pressions de la maquette ne correspondent pas exactement aux plaques de chargement du modèle éléments finis 3D du stade. De ce fait, si les zones analysées deviennent étroites, des pressions peuvent être identiques sur plusieurs plaques du modèle ELF3D.

3.2 Vent à 75°

3.2.1 Analyse aérodynamique

La structure présente une symétrie selon la direction x. Cette symétrie n'est cependant pas parfaite à cause de la présence de l'écran géant côté Nord qui en modifie la géométrie.

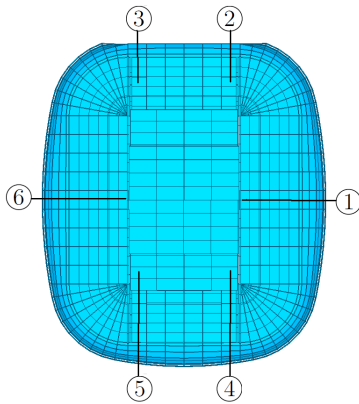


FIG. 3.1 – Identification de zones spéciales.

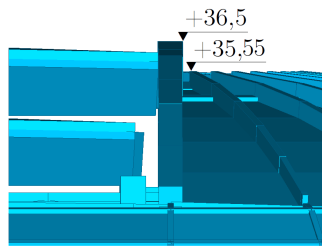


FIG. 3.2 – Coupe au niveau de la méga-poutre.

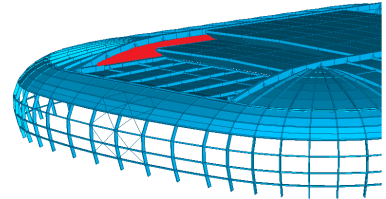


FIG. 3.3 – Vue du bardage de la méga-poutre.

1. Le cas extrême est un flux laminaire pour lequel l'échelle de temps des vitesses serait infinie.

L'écoulement de vent est fortement perturbé par la structure et on peut repérer quelques zones intéressantes à analyser et identifiées à la figure 3.1.

La zone 1 identifie l'irrégularité provoquée par la membrure supérieure de la méga-poutre qui se trouve à une hauteur de l'ordre d'un mètre de la toiture Ouest (voir figure 3.2). De plus, les toitures mobiles supérieures ne viennent pas non plus araser la membrure supérieure de la méga-poutre (voir figure 3.2). La zone 2 identifie une partie de la toiture protégée par la méga-poutre. La zone 4 correspond à une zone du caisson inférieur également protégée du vent. Les zones 3 et 5 correspondent respectivement à des zones où le vent est bloqué par le bardage de la méga-poutre (voir figure 3.3). La zone 6 correspond à une zone adjacente à la méga-poutre et protégée par cette dernière.

3.2.2 Analyse statistique

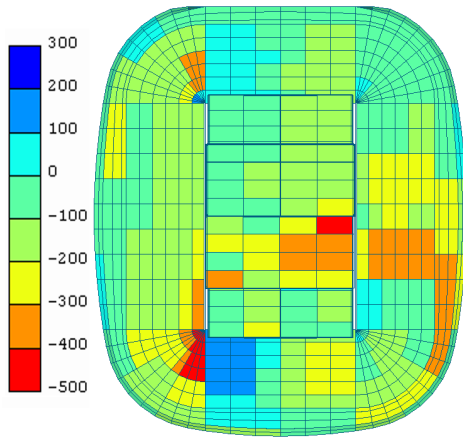


FIG. 3.4 – Moyenne [Pa]. Vent à 75°.

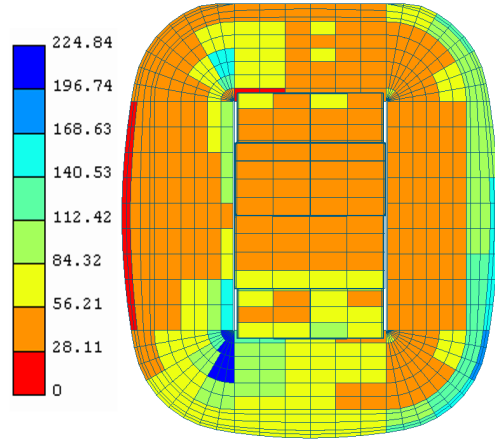


FIG. 3.5 – Écart-type [Pa]. Vent à 75°.

La figure 3.4 présente la moyenne des pressions. Premièrement, ces pressions ne sont pas symétriques par rapport à l'axe du vent : pour la toiture Est, sur la moitié Sud, les dépressions sont plus importantes que sur la moitié Nord. Ceci s'explique par la présence d'un hôtel intégré au projet se trouvant au Nord-Est et étant en obstacle pour la partie Nord. Cet hôtel est visible sur la figure 2.2-(d).

Une remarque générale est que l'essentiel de la structure se trouve en dépression. Une zone de surpression existe sur la moitié gauche des toitures Nord et Sud. Ceci peut être en partie expliqué par la présence de la méga-poutre qui est un obstacle pour l'écoulement du vent. Dans la zone adjacente à la méga-poutre, le vent y est bloqué et des surpressions s'y exercent. Sur la toiture Sud-Ouest une forte dépression a lieu dans le coin au niveau de la méga-poutre. Les zones adjacentes aux méga-poutres et les zones proches de discontinuités dans la structure présentent les moyennes des pressions les plus élevées.

La figure 3.5 présente l'écart-type des pressions. L'écart-type de la pression sera d'autant plus grand que l'on se trouve dans des zones de la structure présentant des discontinuités et donc, par exemple, dans des zones où des détachements tourbillonnaires peuvent avoir lieu. Pour la toiture Est la transition entre fléaux bas et fléaux hauts est bien marquée avec un écart-type plus grand pour les fléaux bas, ceux-ci étant directement exposés aux flux d'air. La partie inférieure des fléaux bas de la toiture Ouest présentent les écarts-types les plus faibles sur la structure. En effet, cette

partie de la structure est la mieux protégée. L'écart-type maximum se rencontre dans la zone où la valeur maximale de dépression peut être observée sur la figure 3.4, c'est-à-dire au niveau du coin de la toiture Sud-Ouest où le phénomène de décollement de couche est bien présent.

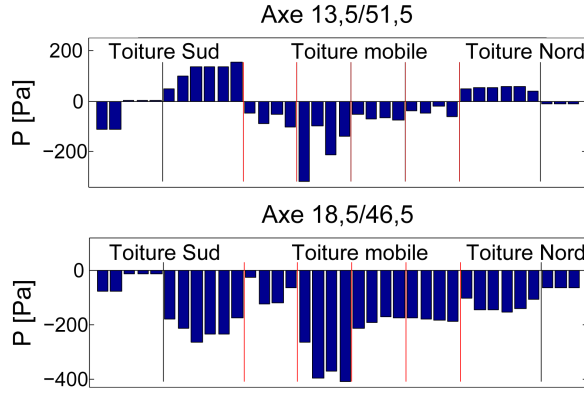


FIG. 3.6 – Pressions moyennes sur la structure dans la direction perpendiculaire au vent selon deux axes.

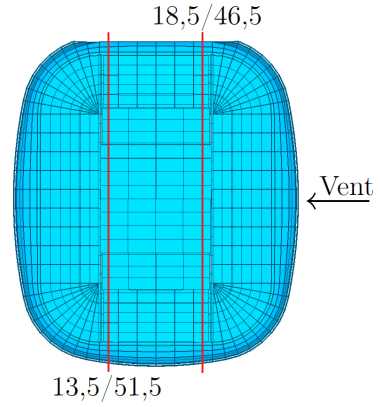


FIG. 3.7 – Axes 13,5/51,5 et 18,5/46,5.

La figure 3.6 présente les pressions moyennes selon l'axe 13,5/51,5 (valeurs adjacentes côté Est à la méga-poutre Ouest) ainsi que les pressions moyennes selon l'axe 18,5/46,5 (valeurs adjacentes côté Ouest à la méga-poutre Est).

Le choix de vouloir présenter ces valeurs n'est pas dû au hasard. En effet, du point de vue de l'écoulement de l'air, les situations de ces zones sont opposées. Une première différence se manifeste au niveau des fléaux hauts des toitures Sud et Nord. Selon l'axe 13,5/51,5, l'écoulement de l'air est bloqué et des surpressions s'y réalisent. Au contraire, selon l'axe 18,5/46,5, ces zones se trouvent protégées de l'écoulement de l'air mais il y naît néanmoins des dépressions importantes, ceci peut être en partie expliqué via l'analogie avec une nappe d'eau sur un déversoir à seuil mince. Au niveau des toitures mobiles, les dépressions sont plus importantes du côté Est que du côté Ouest.

La figure 3.8 présente les valeurs de pressions selon une direction parallèle à la direction du vent (axe 0,5/31,5). Les dépressions sur la toiture Est augmentent au fur et à mesure que l'on se rapproche de la méga-poutre. Une singularité est mise en évidence pour les pressions comprises entre la méga-poutre et la panne 1 puisque la dépression y chute d'une valeur de l'ordre de 100 Pa. Ceci peut être dû à la membrure supérieure de la méga-poutre qui crée un obstacle à l'écoulement. Ensuite, les pressions diminuent de la toiture mobile aux fléaux bas de la toiture Ouest.

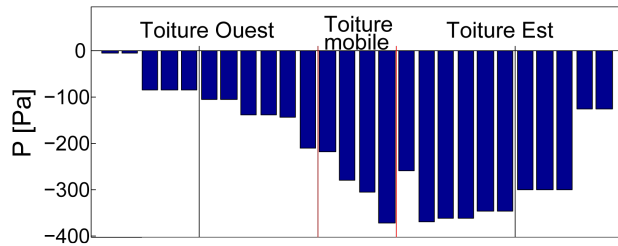


FIG. 3.8 – Pressions moyennes sur la structure selon l'axe 0,5/31,5.

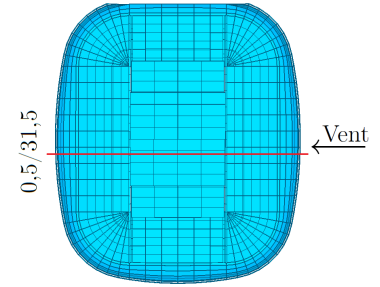


FIG. 3.9 – Axe 0,5/31,5.

La figure 3.10 présente les coefficients de dissymétrie des densités de probabilité des pressions aux

capteurs. Les valeurs sont comprises entre -1,5 et 1,5. Cette dissymétrie remet en cause l'hypothèse formulée de processus gaussien (coefficient de dissymétrie nul). Sur la toiture Nord, côté méga-poutre Ouest, les maxima des coefficients de dissymétrie sont observés tandis que sur la toiture Nord-Ouest, ce sont les minima qui sont présents.

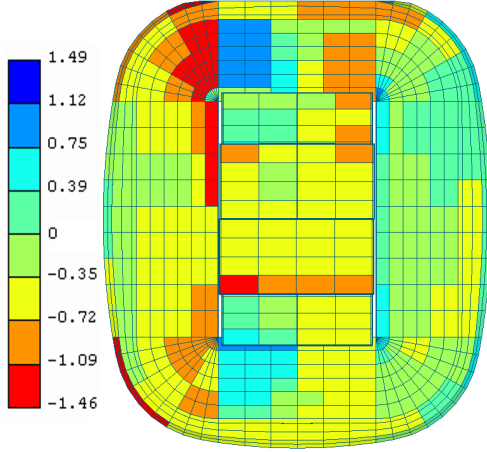


FIG. 3.10 – Coeff. de dissymétrie. Vent à 75°.

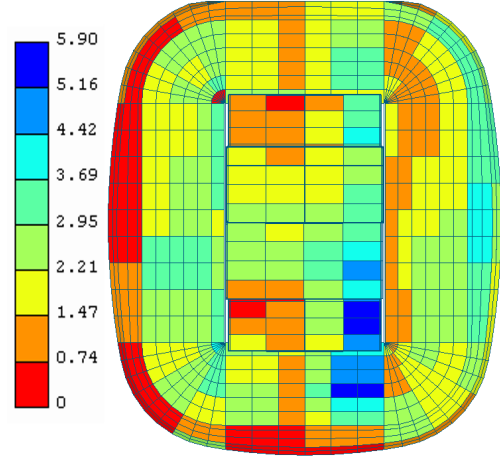


FIG. 3.11 – Échelle de temps [s]. Vent à 75°.

Les échelles de temps sont reprises à la figure 3.11. Globalement sur les fléaux bas, les échelles de temps évoluent très fortement selon la circonférence. Face au vent, les échelles de temps sont importantes tandis que sous le vent les échelles de temps sont plus faibles. De fait, les fléaux hauts côté Est subissent les gros tourbillons sans que la structure n'en ait encore modifié leurs allures, leurs tailles, leurs contenus fréquentiels. Sur la partie basse de la toiture Ouest, les échelles de temps sont faibles et associées à des écarts-types faibles également (voir figure 3.5). En réalité, la turbulence y est moins énergétique mais à plus haute fréquence.

La toiture mobile fait apparaître également une nette évolution de l'échelle de temps depuis l'Est vers l'Ouest. Pour mettre en évidence cette évolution la figure 3.12 présente les échelles de temps selon les axes 13,5/51,5 et 18,5/46,5.

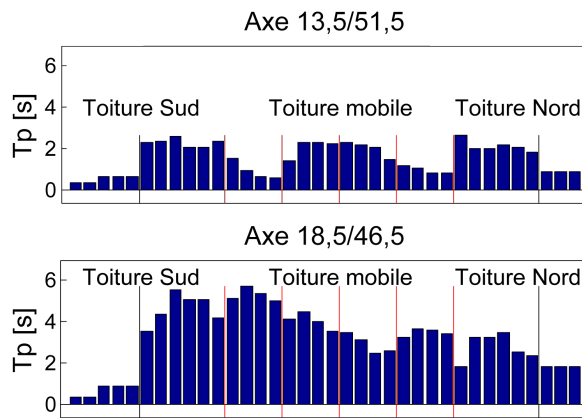


FIG. 3.12 – Échelle de temps sur la structure dans la direction perpendiculaire au vent selon deux axes.

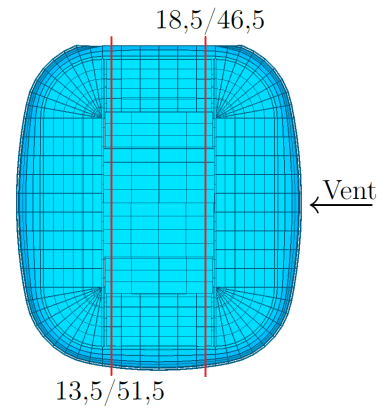


FIG. 3.13 – Axes 13,5/51,5 et 18,5/46,5

Les échelles de temps selon l'axe 18,5/46,5 sont plus importantes que pour l'axe 13,5/51,5. Une inversion de situation selon les deux axes s'opère entre les toitures mobiles inférieures et supérieures : pour l'axe 18,5/46,5 les échelles de temps sur les toitures mobiles inférieures sont plus grandes que celles sur les toitures mobiles extérieures tandis que la situation s'inverse pour l'axe 13,5/51,5.

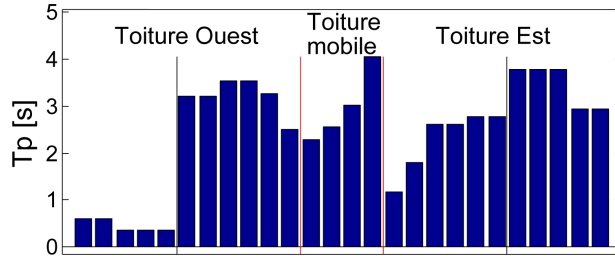


FIG. 3.14 – Échelle de temps sur la structure selon l'axe 0,5/31,5.

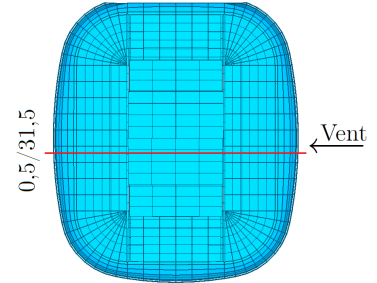


FIG. 3.15 – Axe 0,5/31,5.

La figure 3.14 reprend les échelles de temps sur la structure selon l'axe 0,5/31,5. Au niveau de la toiture Est et des fléaux hauts, l'échelle de temps diminue. Les échelles de temps les plus faibles se réalisent sur les fléaux bas de la toiture Ouest, où la turbulence est moins énergétique mais à plus haute fréquence.

3.3 Vent à 165°

3.3.1 Analyse aérodynamique

Partons de la structure dont la toiture mobile se trouve en position fermée. La figure 3.16 est une vue selon x-z. Selon cette orientation la structure présente une parfaite symétrie selon la direction y. Le vent de direction 165° souffle donc selon l'axe de symétrie de la structure. Cependant, la présence des bâtiments de l'université, situés au Sud-Est, modifie l'écoulement du vent. Un bois se situe à l'Est et a donc également une influence.

Globalement, le vent sur les toitures Ouest et Est s'écoulera sans rencontrer d'obstacle majeur.

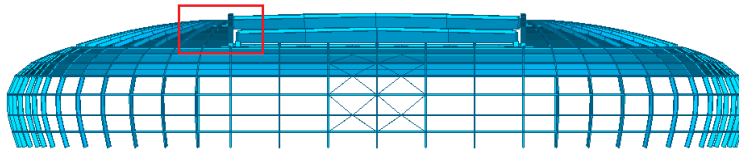


FIG. 3.16 – Vue de la structure selon x-z.

Pour la partie centrale du Sud vers le Nord, le vent rencontre les caissons Sud inférieur et Sud supérieur, obstacle de 2,5 m de hauteur chacun et présentant une arête. La figure 3.17 identifie quatre zones spécifiques.

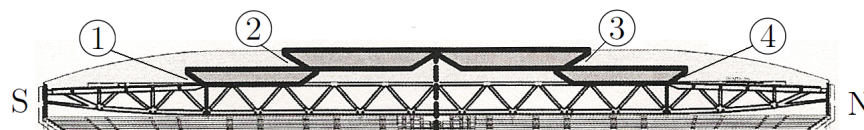


FIG. 3.17 – Identification de zone spéciales.

Pour les zones 1 et 2 la paroi rentrante des caissons crée une cavité où le vent peut s'engouffrer et il n'est donc pas surprenant d'avoir des surpressions à ces endroits. A contrario, les zones 3 et 4 sont des zones protégées et les pressions qui s'y appliquent sont donc faibles, voire négatives.

3.3.2 Analyse statistique

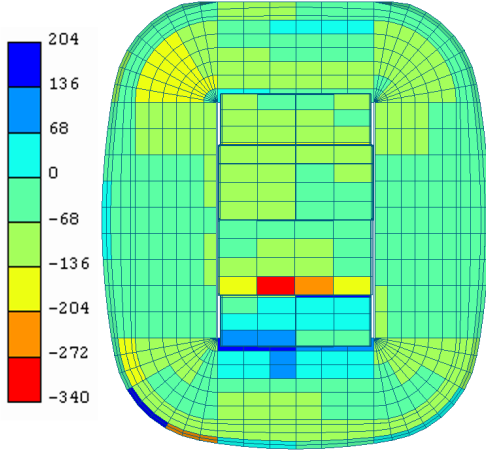


FIG. 3.18 – Moyenne [Pa]. Vent à 165°.

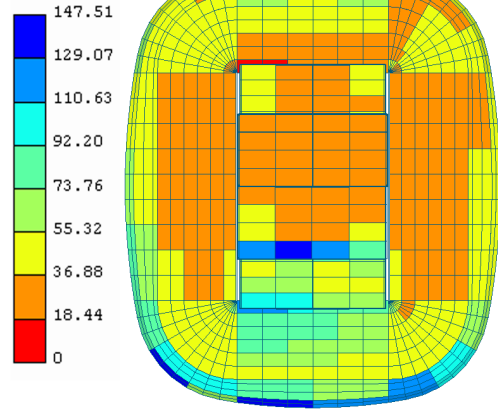


FIG. 3.19 – Écart-type [Pa]. Vent à 165°.

Dans ce cas-ci, la direction du vent correspond à l'unique symétrie de la structure. Malgré la présence des bâtiments de l'université au Sud-Est, cette symétrie se retranscrit relativement bien dans la symétrie des valeurs moyennes et écarts-types observables sur les figures 3.18 et 3.19. Les valeurs maximales de dépression se situent sur le caisson Sud-supérieur au niveau de l'arête offerte au vent. L'arête du caisson crée des tourbillons en aval, aspirant la toiture et justifiant les valeurs de dépressions élevées observables. L'écart-type qui y est associé est élevé et le phénomène de décollement de couche est donc bien présent. La partie de la toiture du fléau 4 au fléau 28 comprise entre les pannes 11 et 10 présente des zones en dépressions accolées à des zones de surpressions (voir figure 3.20). Il est surprenant d'observer une telle dissymétrie dans les valeurs moyennes des pressions pour cette partie de la structure. Une des explications est la présence des bâtiments de l'université qui modifie l'écoulement du vent.

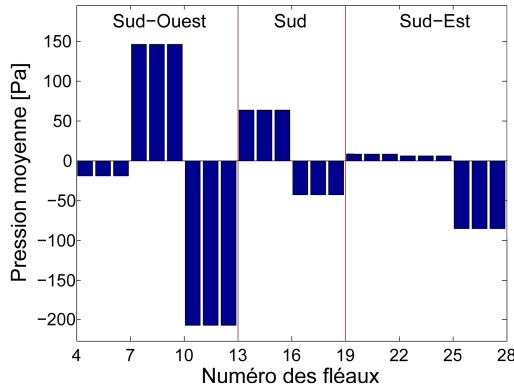


FIG. 3.20 – Pressions moyennes entre les pannes 9 et 11.

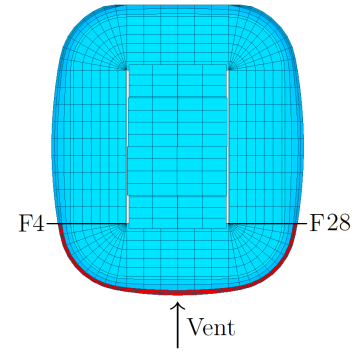


FIG. 3.21 – Fléaux 4 à 28 entre les pannes 9 et 11.

La figure 3.22 présente les pressions moyennes parallèles à la direction du vent (axe 15,5/49,5). La toiture au niveau des fléaux bas est en partie soumise à des surpressions (entre les pannes 9 et 11) et à des dépressions sur le haut. La toiture au niveau des fléaux hauts est, entre les pannes 3 et 6, en dépression pour ensuite être en surpression. En effet, l'air est coincé entre la toiture Sud et le caisson Sud-inférieur. Les valeurs des pressions sur le caisson Sud-inférieur sont malaisées à expliquer : des surpressions adjacentes à l'arête et des dépressions sur la partie adjacente et en dessous du caisson Sud-supérieur. Comme dit précédemment, les pressions adjacentes à l'arête offerte au vent du caisson Sud-supérieur sont des dépressions élevées. Ensuite le vent continue à s'écouler sur le caisson Sud-supérieur et les valeurs de pressions sont sensiblement les mêmes. Cependant, il peut être mis en avant l'augmentation des dépressions à l'approche de l'arête côté Nord du caisson Nord-supérieur correspondant au détachement de l'écoulement tourbillonnaire. Une autre valeur attirant l'attention est la dépression plus élevée observée sur la partie côté Sud du caisson Nord inférieur protégée par l'avant-bec du caisson Nord-supérieur. Cette dépression plus élevée que sur le reste du caisson peut être expliquée en faisant l'analogie avec l'aération d'une nappe d'eau sur un déversoir à seuil mince. L'écoulement d'air crée alors une zone de dépression au droit du détachement ce qui est une explication plausible à cette valeur plus importante de la dépression.

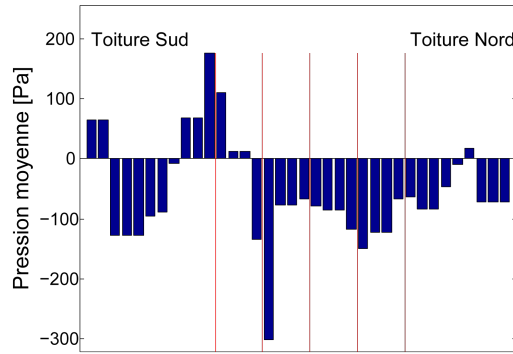


FIG. 3.22 – Pressions moyennes sur la structure dans la direction du vent. Axe 15,5/49,5.

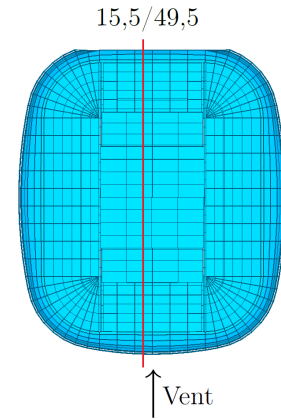


FIG. 3.23 – Axe 15,5/49,5.

La figure 3.24 présente les pressions moyennes sur la structure dans la direction perpendiculaire au vent. Ces pressions ne sont pas symétriques par rapport à l'axe y ce qui s'explique en partie par la présence des bâtiments de l'université au Sud-Est mais également par la présence du bois à l'Est provoquant un effet de paroi. Selon cette coupe, la toiture est essentiellement en dépression. Néanmoins, une zone de la toiture Ouest comprise entre les pannes 9 et 11 se trouve en surpression. Il ressort que les dépressions maximales se réalisent au niveau de la toiture mobile.

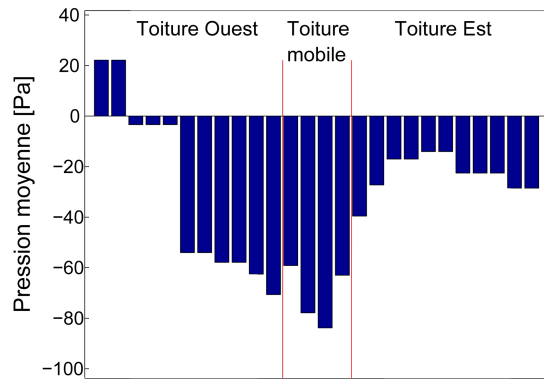


FIG. 3.24 – Pressions moyennes sur la structure dans la direction perpendiculaire au vent. Axe 0,5/31,5.

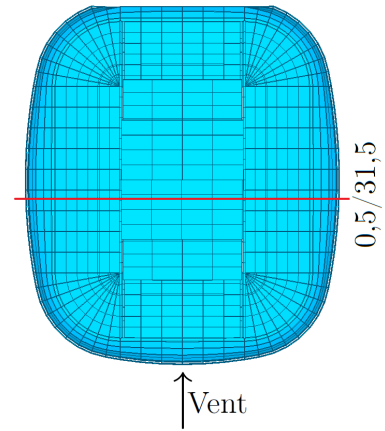


FIG. 3.25 – Axe 0,5/31,5.

3.4 Vent à 120°

3.4.1 Analyse aérodynamique

Dans le cas de cette direction, l'angle d'attaque du vent est selon la grande diagonale du stade. Dans ce cas, il ne peut être attendu une symétrie des valeurs observées et ce d'autant plus au niveau des toitures mobiles. L'analyse aérodynamique se rapproche de celle réalisée pour la direction de 165° et ne sera donc pas recommencée ici.

3.4.2 Analyse statistique

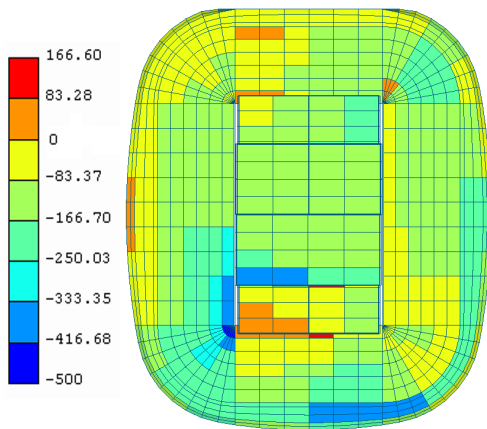


FIG. 3.26 – Moyenne [Pa]. Vent à 120°.

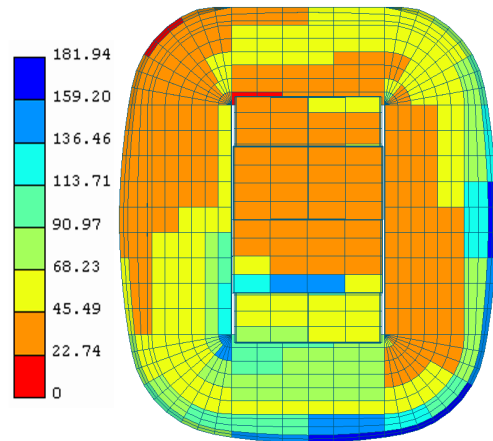


FIG. 3.27 – Écart-type [Pa]. Vent à 120°.

Sur base de la figure 3.26, l'essentiel de la structure se trouve en dépression. Le vent ayant une direction de 120°, il exerce une surpression sur le caisson Sud-inférieur côté méga-poutre Ouest. Le vent est alors cloisonné d'une part par la méga-poutre et d'autre part par le caisson Sud-supérieur. Il est étonnant de ce point de vue de ne pas avoir une zone plus étendue de surpression. D'autres

surpressions se trouvent à proximité de cette zone au niveau de la toiture Sud. Pour cette zone aussi la partie en surpression reste limitée. Ces surpressions locales se trouvent à proximité des dépressions importantes : le coin de la toiture Sud-Ouest, ainsi qu'une bande adjacente à la méga-poutre au niveau de la toiture Ouest. A l'opposé des dépressions du coin de la toiture Sud-Ouest, le coin adjacent à la méga-poutre de la toiture Nord-Est se trouve lui en surpression, la méga-poutre étant un obstacle à l'écoulement du vent. La figure 3.28 présente les valeurs moyennes des pressions entre les pannes 9 et 11 du fléau 13 au fléau 34. Les valeurs de dépression pour la toiture Sud-Ouest sont les plus faibles. Bien que ce soit étonnant de ne pas avoir de surpression, cette toiture étant dans l'axe du vent, il est normal d'y trouver la dépression la plus faible.

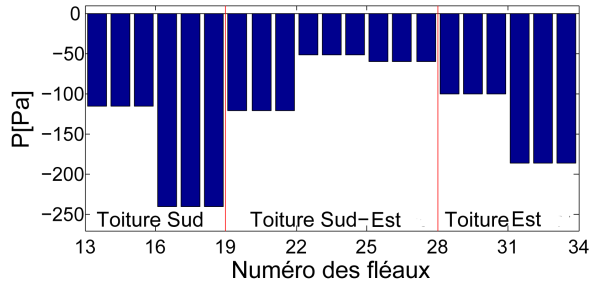


FIG. 3.28 – Valeurs de pressions moyennes entre les pannes 9 et 11.

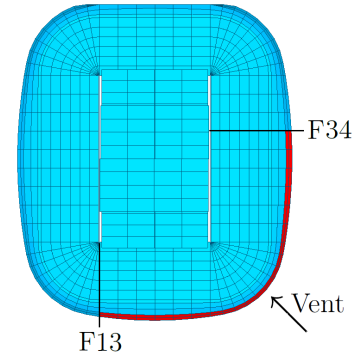


FIG. 3.29 – Fléaux 13 à 34 entre les pannes 9 et 11.

Passons à l'analyse de l'écart-type des pressions sur la structure. Les fléaux bas des toitures Est, Sud-Est et Sud présentent les écarts-types les plus importants. Au sein de la toiture Nord une zone d'écarts-types faibles est mise à jour. Ceci peut s'expliquer par la présence du caisson Nord inférieur qui protège la toiture Nord sur une bande limitée. Ici encore les zones où des décollement de couches ont lieu sont mises à jour : arête du caisson Sud supérieur, coin de la toiture Sud-Ouest et bande adjacente à la méga-poutre Ouest, côté Ouest.

La figure 3.30 présente les coefficients de dissymétrie des densités de probabilité des pressions aux capteurs. Ces coefficients de dissymétrie prennent des valeurs comprises entre 1,35 et 2. Globalement, sur la toiture, les pressions mesurées aux capteurs présentent des coefficients de dissymétrie négatifs.

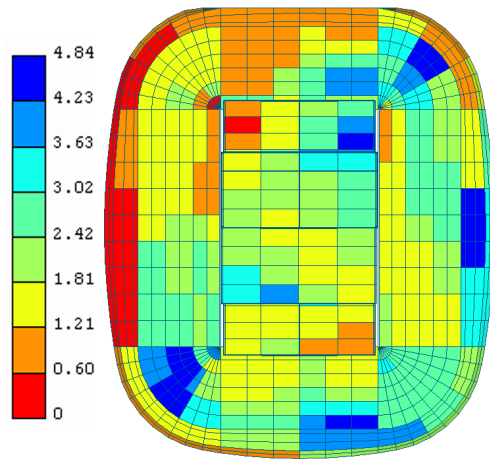
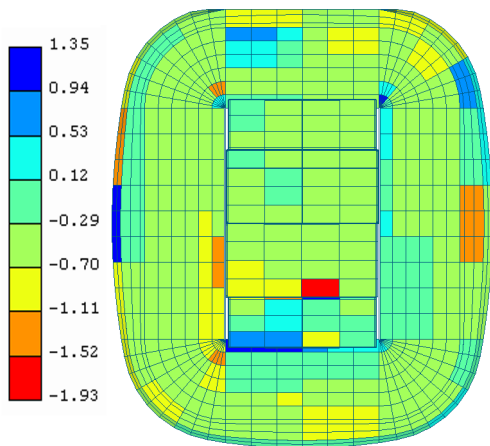


FIG. 3.30 – Coeff. de dissymétrie. Vent : 120°. FIG. 3.31 – Échelle de temps [s]. Vent : 120°.

La figure 3.31 présente les échelles de temps. Ici encore les valeurs les plus faibles se trouvent du côté sous le vent et celles plus élevées du côté face au vent. Quatre zones où les échelles de temps sont les plus importantes peuvent être identifiées. D'une part, pour les toitures Nord-Est et Sud-Ouest où ces zones se trouvent sur la partie haute des fléaux. D'autre part, sur la toiture Sud entre les fléaux 16 et 19 et sur la toiture Nord-Est au milieu pour la partie basse des fléaux.

La toiture Nord comprise entre les fléaux 49 et 51 fait apparaître une zone d'échelle de temps faible.

3.4.3 Observation des densités spectrales unilatérales des pressions mesurées aux capteurs.

Les densités spectrales sont calculées en utilisant la **méthode de Welch** et en réalisant un fenêtrage de type Hamming. Le nombre de points utilisés est 512 (nombre total de points égal à 18432) avec un recouvrement de 50 %. Ce recouvrement des échantillons permet de lisser la densité spectrale et ainsi d'éliminer le bruit attaché. La **méthode de Yule-Walker** (YW) est également utilisée. L'ordre du modèle autoregressif (AR) utilisé pour produire la DSP est choisi égal à 6. Cet ordre s'est imposé afin d'approcher correctement la forme des DSP. Les caractéristiques de la méthode de Welch, de la méthode de Yule-Walker ainsi que les caractéristiques communes aux deux méthodes sont reprises au tableau 3.1.

Welch				Yule-Walker	Commune	
NFFT	Fenêtrage	Recouvrement	Δf	Ordre	N	f_{Ny}
512	Hamming	50 %	$5,72 \cdot 10^{-3}$ Hz	6	18432	2,924 Hz

TAB. 3.1 – Caractéristiques de la méthode Welch et de la méthode de Yule-Walker. N=nombre total de points. f_{Ny} =fréquence de Nyquist.

Après observation des densités spectrales des pressions mesurées en chaque capteur pour les trois directions de vent étudiées, des pics apparaissent pour certaines fréquences ([0,402 0,408], 0,563, 0,617, 0,734 et 1,179 Hz) et pour certains capteurs. La figure 3.32 présente, pour un vent à 75° , les densités spectrales pour les signaux de pressions mesurées aux capteurs 149 et 326 avec identification des **fréquences parasites** correspondant aux pics. La figure 3.33 permet de localiser les capteurs sur la toiture.

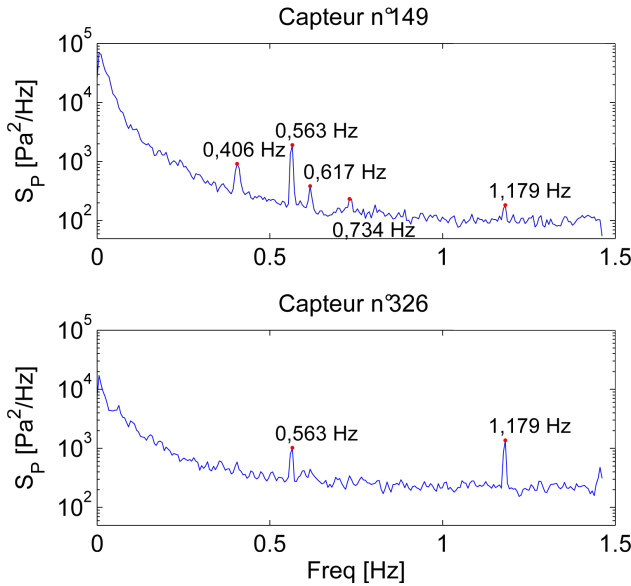


FIG. 3.32 – DSP pour les signaux de pressions mesurées aux capteurs 149 et 326. Vent à 75° .

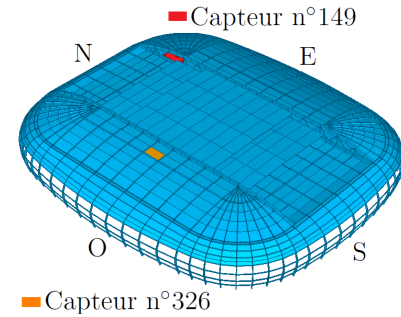


FIG. 3.33 – Positionnement au sein de la toiture des capteurs n° 149 et 326.

On remarque également que les valeurs prises par les densités spectrales à proximité de la fré-

quence de Nyquist (entre 1,44 Hz et 1,462 Hz) sont aberrantes.

Afin de trouver la cause de la présence de ces pics, calculons les fréquences équivalentes en soufflerie : [27,5 27,9], 38,5, 42,2, 50,2 et 80,6 Hz. Pour l'énergie à basse fréquence, cela pourrait être dû à la vitesse de rotation des pales (la fréquence étant de l'ordre de 30 Hz). Une autre possibilité est la fréquence du réseau électrique qui est de 50 Hz (fort proche des 50,2 Hz). D'autres origines de ces fréquences parasites peuvent être avancées : la maquette n'est pas infiniment rigide, la table d'assise de la maquette se met à vibrer. Quoiqu'il en soit il est souhaitable de réfléchir quelques instants à l'influence de ces pics. Si la fréquence d'un pic parasite se trouve être fort proche de la fréquence d'un mode propre de la structure, sa contribution résonante sera amplifiée. Cette amplification de la réponse d'un mode peut alors engendrer des modifications non négligeables sur la réponse globale de la structure et ce, d'autant plus, si le mode est un mode important. On ne peut envisager de simplement filtrer ces fréquences parasites à l'aide d'un filtre coupe-bande car on pourrait alors sous-estimer la réponse en enlevant de l'énergie au signal de pression dans la bande des fréquences propres de la structure.

Dans le cadre d'une analyse stochastique, une solution possible et mise en application dans ce travail, est de suivre les étapes suivantes :

1. calcul des densités spectrales des signaux ;
2. identification des pics éventuels et des fréquences associées (choisir un critère) ;
3. filtrage via un filtre coupe-bande des fréquences parasites et utilisation d'un filtre passe-bas à proximité de la fréquence de Nyquist ;
4. utilisation d'une méthode paramétrique (par exemple Yule-Walker) afin de calculer les densités spectrales sur base des signaux filtrés.

Pour pouvoir identifier un pic comme tel, il est nécessaire de comparer sa valeur à une valeur de référence. Cette valeur de référence est calculée comme suit :

$$S_{Ref} = \frac{\bar{S}(f_{par} - 0,02 < f < f_{par} - 0,01) + \bar{S}(f_{par} + 0,01 < f < f_{par} + 0,02)}{2} \quad (3.1)$$

où f_{par} est la fréquence parasite supposée, $\bar{S}(f_{par} - 0,02 < f < f_{par} - 0,01)$ est la moyenne de la densité spectrale calculé sur la plage de fréquence $[f_{par} - 0,02 ; f_{par} - 0,01]$ et $\bar{S}(f_{par} + 0,01 < f < f_{par} + 0,02)$ est la moyenne de la densité spectrale calculé sur la plage de fréquence $[f_{par} + 0,01 ; f_{par} + 0,02]$. Si la valeur de la DSP à la fréquence parasite est trois fois supérieure à la valeur de référence ($S(f_{par}) > 3 S_{Ref}$) on réalise alors le filtrage sur la plage $[f_{par} - 0,01 ; f_{par} + 0,01]$.

Calculer la densité spectrale suivant une méthode paramétrique telle que la méthode de Yule-Walker permet de "rétablir" l'énergie au niveau des fréquences filtrées.

La figure 3.34 permet d'apprécier la solution proposée. Pour les quatre premières fréquences parasites, la solution proposée (DSP via YW - Signal filtré) donne de bons résultats puisque la courbe rouge en pointillé suit correctement l'allure de la densité spectrale du signal filtré sans se "préoccuper" des fréquences parasites filtrées et donne au final une allure correcte de la densité spectrale.

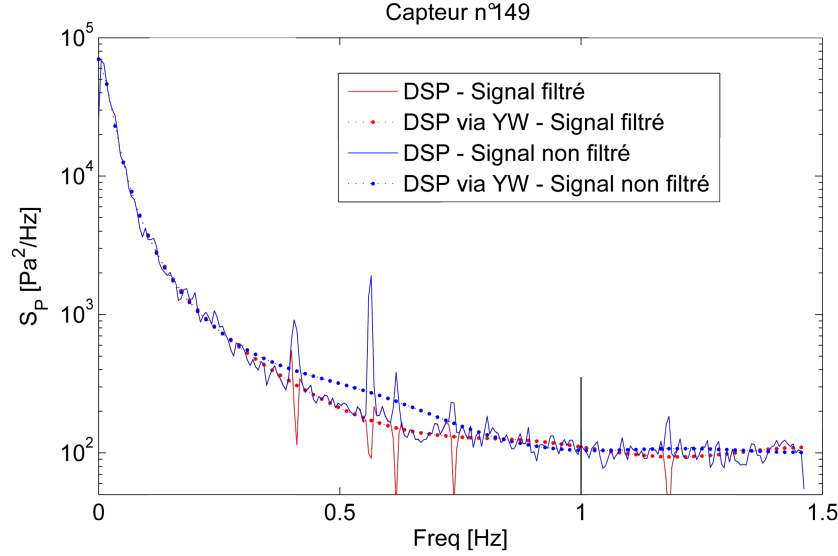


FIG. 3.34 – Application de la solution proposée. Vent à 75°.

La figure 3.34 amène à une réflexion. La densité spectrale, au-delà de un hertz, arrive à un palier et semble ne plus décroître. Ce palier peut être assimilé à un **bruit blanc**. Un traitement possible serait de soustraire ce bruit blanc aux densités spectrales. Cependant l'estimation de sa valeur est malaisée et il faut être prudent quant à la valeur choisie du niveau de bruit puisque l'on se trouve dans la gamme des fréquences propres de la structure. Une sous-estimation de la valeur de la densité spectrale dans cette gamme de fréquences induirait une sous-évaluation de la composante résonante des réponses modales, ce qui peut entraîner une sous-évaluation des efforts. L'estimation de ce bruit blanc sort du cadre de ce travail.

Une solution simple serait de ne considérer les densités spectrales que pour des fréquences inférieures à une fraction de la fréquence de Nyquist. Sur base de la figure 3.34, cette fréquence limite, au-delà de laquelle on considère que l'on atteint un niveau de bruit, pourrait être prise égale à deux-tiers de la fréquence de Nyquist. Cette solution est à mettre en adéquation avec la troncature de la base des modes propres afin que celle-ci soit justifiée.

Chapitre 4

Analyse dynamique du stade de Lille

4.1 Introduction

L'analyse dynamique du stade de Lille, sous l'effet d'un chargement éolien, se réalise au premier ordre et en considérant la structure linéaire.

Dans un premier temps, une rapide description du modèle éléments finis 3D est effectuée. Ensuite, les résultats de l'analyse modale sont présentés. La description des différentes contributions à l'effort sera développée afin d'exposer les méthodes appropriées. Finalement, deux approches afin de calculer les extrema moyens des efforts seront présentées.

4.2 Description du modèle éléments finis 3D

Cette rapide description du modèle éléments finis 3D se base sur la référence [9]. Le modèle éléments finis a été réalisé au moyen du logiciel FinelG¹. Le tableau 4.1 reprend les principales caractéristiques du modèle éléments finis 3D du stade de Lille.

Modèle éléments finis 3D	
Nombre d'éléments	4940
Nombre de types d'éléments	11
Types de matériaux	3
Nombre de géométrie	153
Nombre de degrés de liberté	42006

TAB. 4.1 – Caractéristiques du modèle éléments finis 3D.

Parmi les différents types d'éléments utilisés pour la modélisation, on a :

- des plaques triangulaires (Ex : bardage des méga-poutres) ;
- des plaques quadrangulaires (Ex : toiture du stade) ;
- des poutres 3D ;
- des barres (Ex : éléments de treillis des méga-poutres, poutres transversales) ;
- des éléments ressorts...

Il y a trois types de matériaux au sein du stade : l'acier, l'acier des câbles de précontrainte ayant un module de Young légèrement inférieur (dû au torronnage) et le bois.

1. Logiciel développé par l'Université de Liège en collaboration avec le Bureau d'Études Greisch.

Vu la taille du problème qui nous occupe (42006 degrés de liberté) il est très avantageux de ne pas conserver les déplacements des nœuds de la structure comme inconnues : les calculs dynamiques sont réalisés dans la base modale.

4.3 Description de l'analyse modale

4.3.1 Amortissement choisi au sein des modes

L'amortissement choisi est proportionnel et égal à un pour cent pour tous les modes. Un amortissement supplémentaire ([14], [15]) provient des forces aéroélastiques. Aucun essai sur maquette aéroélastique n'ayant été réalisé, il ne nous a pas été possible matériellement de les prendre en considération.

4.3.2 Troncature de la base des modes propres

La troncature est assujettie à la fréquence d'échantillonnage égale à 2,924 Hz (voir 2.3). Le théorème de Nyquist-Shannon énonce que la fréquence d'échantillonnage d'un signal doit être égale ou supérieure au double de la fréquence maximale du signal que l'on souhaite représenter. Cette fréquence maximale se nomme la fréquence de Nyquist et est égale à 1,462 Hz. De ce fait, seuls **les 21 premiers modes propres sont gardés**. Le mode propre 21 a une fréquence de 1,415 Hz.

Les articles [16] et [17] apportent des solutions pour prendre en compte la réponse des modes négligés. L'article [16] demande l'établissement des forces généralisées pour tous les modes et donc le calcul complet des modes propres (42006). Cette méthode est bien entendu inapplicable dans le contexte d'une structure à nombre de degrés de liberté important. L'article [17] apporte une réponse plus élégante : elle ne demande pas le calcul des modes propres négligés. La solution consiste à calculer un vecteur de charges nodales, R_x , représentant un chargement statique et prenant en compte la réponse négligée $\{x_d(t)\}$ (voir 2.1.2). Cependant, pour le calcul de R_x , il est nécessaire de stocker la matrice de masse M (42006×42006) ce qui est assez encombrant en mémoire (un peu moins de 2 milliards de valeurs...). Des solutions plus aisées seront mises en œuvre par la suite.

4.3.3 Résultats de l'analyse modale

Le tableau 4.2 reprend les résultats de l'analyse modale pour les vingt et un premiers modes.

Mode n°	Fréquence	M^*	Type de mode	ξ
1	0,475 Hz	2,06E+06 kg	Transversal dissymétrique	1 %
2	0,488 Hz	5,96E+06 kg	Longitudinal symétrique	1 %
3	0,517 Hz	2,09E+06 kg	Vertical symétrique	1 %
4	0,662 Hz	3,20E+06 kg	Vertical dissymétrique	1 %
5	0,663 Hz	5,40E+06 kg	Transversal dissymétrique (2 ondes)	1 %
6	0,729 Hz	1,11E+06 kg	Transversal symétrique	1 %
7	0,774 Hz	6,57E+06 kg	Longitudinal dissymétrique	1 %
8	0,946 Hz	7,51E+05 kg	Mode toitures mobiles transversal dissymétrique	1 %
9	0,954 Hz	8,34E+06 kg	Mode toitures mobiles transversal symétrique	1 %
10	0,974 Hz	7,60E+05 kg	Transversal dissymétrique	1 %
11	0,999 Hz	9,40E+05 kg	Mode toitures mobiles transversal symétrique	1 %
12	1,004 Hz	6,37E+05 kg	Mode toitures mobiles (2 ondes)	1 %
13	1,057 Hz	9,35E+05 kg	Balancement méga-poutre dissymétrique et toitures mobiles	1 %
14	1,094 Hz	6,83E+05 kg	Balancement méga-poutre symétrique et toitures mobiles	1 %
15	1,115 Hz	8,49E+05 kg	Balancement méga-poutre dissymétrique et toitures mobiles	1 %
16	1,212 Hz	7,88E+05 kg	Balancement poutre transversale dissymétrique 2 ondes	1 %
17	1,297 Hz	6,60E+05 kg	Balancement poutre transversale symétrique et toitures mobiles	1 %
18	1,349 Hz	2,48E+05 kg	Balancement poutre transversale dissymétrique	1 %
19	1,372 Hz	2,28E+05 kg	Balancement une seul-méga poutre à 2 ondes	1 %
20	1,399 Hz	1,25E+05 kg	Mode vertical local des toitures Nord et Sud	1 %
21	1,415 Hz	3,49E+05 kg	Balancement d'une seule méga-poutre (2 ondes)	1 %

TAB. 4.2 – Résultats de l'analyse modale.

La figure 4.1 reprend la forme du mode fondamental. La figure 4.2 reprend les formes du mode 2 au mode 21. A noter que les modes sont normés à un maximum unitaire. On observe que les modes sont essentiellement des modes locaux ou des modes symétriques/dissymétriques. Les fréquences débutent à une valeur faible de 0,475 Hz pour légèrement augmenter. En effet, les onze premiers modes ont une fréquence inférieure au Hertz.

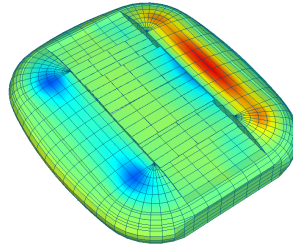


FIG. 4.1 – mode 1 : 0,475 Hz selon z_{global} .

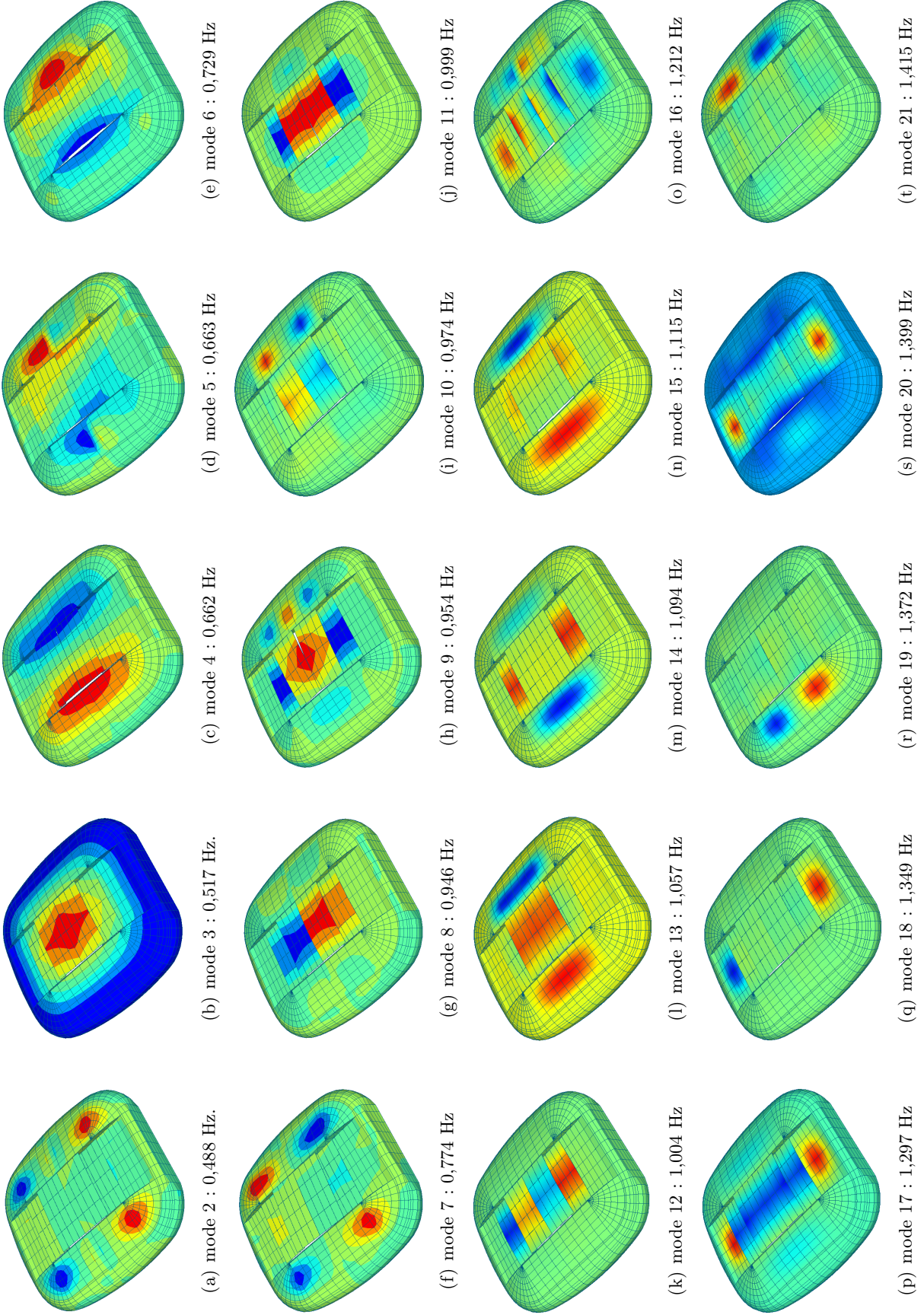


FIG. 4.2 – Allures des modes selon z_{global} et fréquences associées.

4.4 Décomposition d'un effort

Un effort¹ peut se décomposer en trois contributions :

$$\{F(t)\}_T = \{\bar{F}\} + \underbrace{\{F(t)\}_B + \{F(t)\}_R}_{\{F(t)\}_V} \quad (4.1)$$

où :

- $\{\bar{F}\}$ = contribution moyenne (ou statique) de l'effort ;
- $\{F(t)\}_B$ = contribution quasi-statique² de l'effort ;
- $\{F(t)\}_R$ = contribution dynamique³ de l'effort ;
- $\{F(t)\}_V$ = contribution variable de l'effort ;
- $\{F(t)\}_T$ = effort total.

Le lecteur déjà convaincu par cette décomposition peut passer le rappel. Pour le lecteur soucieux de bien comprendre la décomposition de l'effort en contribution et les façons de les calculer, le rappel développe ces aspects.

Rappel. L'équation (2.2) peut être résolue en prenant le vecteur des charges extérieures totales, noté $\{p(t)\}_T$:

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [C] \{\dot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{p(t)\}_T \longrightarrow \{x(t)\}_T \longrightarrow \{F(t)\}_T \quad (4.2)$$

L'effort $\{F(t)\}_T$ correspond alors à l'effort total au cours du temps. Maintenant, si au vecteur des charges extérieures $\{p(t)\}_T$, on retire sa moyenne, notée $\{\bar{p}\}$, on obtient alors un vecteur reprenant uniquement la partie⁴ variable des charges extérieures :

$$\{p(t)\}_V = \{p(t)\}_T - \{\bar{p}\} \quad (4.3)$$

L'équation (2.1) peut être résolue en prenant $\{\bar{p}\}$ comme vecteur des charges extérieures :

$$[K] \{x\} = \{\bar{p}\} \longrightarrow \{\bar{x}\} \longrightarrow \{\bar{F}\} \quad (4.4)$$

L'effort $\{\bar{F}\}$ correspond alors à la contribution moyenne de l'effort total $\{F(t)\}_T$. L'équation (2.1) peut également être résolue en prenant $\{p(t)\}_V$ comme vecteur des charges extérieures :

$$[K] \{x(t)\} = \{p(t)\}_V \longrightarrow \{x(t)\}_B \longrightarrow \{F(t)\}_B \quad (4.5)$$

L'effort $\{F(t)\}_B$ correspond alors à la contribution quasi-statique à l'effort total $\{F(t)\}_T$ et a une moyenne nulle. L'équation (2.2) peut tout aussi bien être résolue en prenant la partie variable du vecteur des charges extérieures $\{p(t)\}_V$:

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [C] \{\dot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{p(t)\}_V \longrightarrow \{x(t)\}_V \longrightarrow \{F(t)\}_V \quad (4.6)$$

L'effort $\{F(t)\}_V$ correspond alors à la contribution variable à l'effort total $\{F(t)\}_T$ et a une moyenne nulle.

Finalement la contribution dynamique $\{F(t)\}_R$ à l'effort total s'obtient par $\{F(t)\}_R = \{F(t)\}_V - \{F(t)\}_B$ et cet effort a donc une moyenne nulle également. L'effort total est $\{F(t)\}_T = \{\bar{F}\} + \{F(t)\}_V$.

1. De même qu'un déplacement, une contrainte ou encore une réaction d'appui.

2. L'indice choisi est B pour "Background" en anglais.

3. L'indice choisi est R pour "Resonant" en anglais.

4. Le terme "partie" est employé pour les charges extérieures (partie moyenne et variable) alors que le terme "contribution" est utilisé pour les efforts intérieurs.

Afin d'illustrer l'importance des contributions quasi-statique et dynamique, plaçons nous dans le contexte d'une analyse en base modale. Faisons également l'hypothèse que la troncature de la base des modes propres ne garde que le mode fondamental² de sorte que l'on résout :

$$M^* \ddot{q}(t) + C^* \dot{q}(t) + K^* q(t) = p_V^*(t) \quad (4.7)$$

Lorsque $q(t)$ est connu on calcule un effort intérieur via $F(t) = \phi^{(F)} q(t)$ où $\phi^{(F)}$ est la valeur de l'effort intérieur dans la déformée du mode propre (pour l'amplitude modale q unitaire).

La force illustrée à la figure 4.3(a) est la force généralisée $p^*(t)$. Si le mode possède une pulsation élevée par rapport à la sollicitation, celui-ci répondra de façon quasi-statique, dans le cas contraire de façon dynamique.

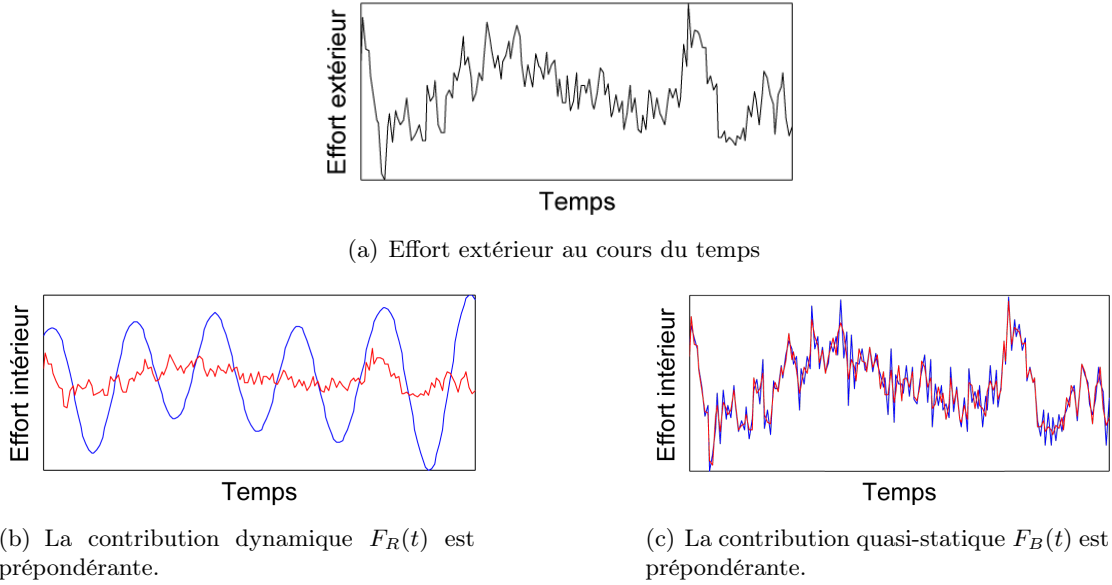


FIG. 4.3 – Illustration de la décomposition d'un effort intérieur entre sa contribution quasi-statique (B, en rouge) et sa contribution variable (B+R, en bleu).

La figure 4.3(b) présente l'effort résultant associé à un mode à pulsation proche de la pulsation de la sollicitation : la contribution $F_R(t)$ est bien plus importante que la contribution $F_B(t)$. A l'opposé, la figure 4.3(c) présente l'effort résultant associé à un mode à pulsation élevée par rapport à la pulsation de la sollicitation : la composante $F_B(t)$ est prépondérante. On remarque que dans ce cas l'effort intérieur est homothétique à la sollicitation extérieure, ce qui est évident au vu de la formule (2.21).

2. C'est-à-dire le premier mode.

4.5 Calcul de la contribution quasi-statique de l'effort

4.5.1 Méthodes déterministes en base nodale

Cas de charges

Afin de simplifier la mise en œuvre de cette méthode, il serait intéressant de connaître le vecteur $\{F\}$ sous chaque cas de charge pris à une valeur unitaire. On entend par cas de charge chaque différence de pression mesurée sur une facette du modèle CSTB. Cette information est stockée dans une matrice $[F]_{uni}$. Ensuite, les efforts internes au cours du temps sont calculés via :

$$\underbrace{\{F(t)\}}_{E \times 1} = \underbrace{[F]_{uni}}_{E \times C} \underbrace{\{p(t)\}}_{C \times 1} \quad (4.8)$$

En développant :

$$\begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_E(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1,1} & F_{1,2} & \cdots & F_{1,C} \\ F_{2,1} & F_{2,2} & \cdots & F_{2,C} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{E,1} & F_{E,2} & \cdots & F_{E,C} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_C(t) \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

où :

E = nombre d'éléments étudiés ;

C = nombre de cas de charge ;

$F_i(t)$ = valeur du $i^{\text{ième}}$ effort au cours du temps ;

$F_{i,j}$ = valeur du $i^{\text{ième}}$ effort sous une charge unitaire du $j^{\text{ième}}$ cas de charge ;

$p_j(t)$ = effort au temps t pour le $j^{\text{ième}}$ cas de charge.

Appellation simplifiée de la méthode : CDC.

Surfaces d'influences

La méthode décrite ci-après est tirée du document [18] et a été appliquée par le bureau d'études. Celle-ci consiste à utiliser le concept de surfaces d'influences. Si l'on connaît la surface d'influence associée à l'effort recherché, cet effort se calcule par :

$$F(t) = \sum_{i=1}^{Nf} p_i(t) (S_{X,i} d_{X,i} + S_{Y,i} d_{Y,i} + S_{Z,i} d_{Z,i}) \quad (4.10)$$

où :

Nf = nombre de facettes chargées ;

$d_{X,i}, d_{Y,i}, d_{Z,i}$ = déplacements au centre de la facette i dans les directions X, Y et Z ;

$S_{X,i}, S_{Y,i}, S_{Z,i}$ = projections de la surface de la facette i dans les directions X, Y et Z ;

$p_i(t)$ = effort au temps t pour la $i^{\text{ième}}$ facette.

Appellation simplifiée de la méthode : SI.

Simplifications effectuées pour la méthode SI

En 2.4, les différences entre le modèle facettes CSTB et le modèle ELF3D sont expliquées. A une facette du CSTB peut correspondre un ou plusieurs éléments plaques du modèle éléments finis 3D. Pour pouvoir mettre en œuvre la méthode SI, deux simplifications sont réalisées. Premièrement, considérons que les deux modèles sont équivalents : à une facette du CSTB correspond un élément plaque de modèle ELF3D. Le volume calculé entre la position de la surface d'influence et la position de l'élément plaque est simplifié en ne considérant que le déplacement du centre de la facette pour calculer le volume entre les deux surfaces. Si la surface d'influence est relativement plane ceci est justifié et la simplification est acceptable.

Deuxièmement, cette simplification est étendue aux modèles facettes CSTB mais le maillage de ce modèle est plus lâche ce qui a un impact négatif sur l'approximation déjà réalisée.

Afin d'être précis il aurait été plus adéquat de calculer le volume entre les deux surfaces et de multiplier par la charge de pression considérée uniforme.

Cependant, les surfaces d'influence ont été simplifiées afin d'obtenir des déplacements constants au centre des facettes.

Simplification effectuée pour la méthode CDC

Selon les explications données ci-dessus, il résulte que la mise en application de la méthode CDC comporte également une simplification. Si à une facette du CSTB peut correspondre un ou plusieurs éléments plaques du modèle ELF3D, la création des cas de charge (associés à une facette du modèle CSTB) a obligé à répartir la pression mesurée sur la facette aux éléments plaques couvertes par celle-ci, ce qui en soit constitue également une simplification.

Calcul des différentes contributions

Avec la décomposition de l'effort en ses différentes contributions, cf. 4.4, la méthode CDC permet de calculer la composante statique, $\{\bar{F}\}$, et quasi-statique de l'effort $\{F(t)\}_B$.

La contribution statique de l'effort se calcule via :

$$\{\bar{F}\}^{CDC} = [F]_{uni} \{\bar{p}\} \quad (4.11)$$

La contribution quasi-statique :

$$\{F(t)\}_B^{CDC} = [F]_{uni} \{p(t)\}_V \quad (4.12)$$

De façon équivalente, pour la méthode SI, on trouve : $\{\bar{F}\}^{SI}$ et $\{F(t)\}_B^{SI}$.

Note. Lors de l'analyse des calculs de la contribution quasi-statique, on parlera de **valeur de référence** pour une valeur obtenue par la méthode CDC.

4.6 Calcul de la contribution variable de l'effort

4.6.1 Introduction

La méthode présentée en 4.5 est la plus appropriée afin de déterminer les contributions statique et quasi-statique de l'effort. Dès lors, les calculs étant maintenant réalisés dans la base modale (adéquate pour le calcul dynamique), ceux-ci sont réalisés en considérant la partie variable des forces généralisées :

$$\{p^*(t)\}_V = [\phi]^T \{p(t)\}_V \quad (4.13)$$

où $\{p(t)\}_V$ reprend la partie variable des pressions au cours du temps.

4.6.2 Méthodes déterministes en base modale

En temporel

La méthode mise en œuvre est la superposition modale avec résolution des équations découplées par Newmark.

La contribution variable des amplitudes modales $\{q(t)\}_V^{NK}$ est calculée via l'application de la formule (2.6) où $\{p^*(t)\}$ est remplacé par sa partie variable $\{p^*(t)\}_V$.

La contribution quasi-statique se calcule simplement via :

$$\{q(t)\}_B^{NK} = [K^*]^{-1} \{p^*(t)\}_V \longrightarrow \{F(t)\}_B^{NK} = [\phi^{(F)}] \{q(t)\}_B^{NK} \quad (4.14)$$

Et la contribution dynamique :

$$\{q(t)\}_R^{NK} = \{q(t)\}_V - \{q(t)\}_B \longrightarrow \{F(t)\}_R^{NK} = [\phi^{(F)}] \{q(t)\}_R^{NK} \quad (4.15)$$

En fréquentiel

La méthode mise en œuvre est la superposition modale avec résolution des équations découplées par transformée de Fourier. On applique la formule (2.27) où $\{P^*(n)\}$ est remplacé par $\{P^*(n)\}_V$ calculé via la transformée directe de $\{p^*(t)\}_V$:

$$\{P^*(n)\}_V = \int_{-\infty}^{+\infty} \{p^*(t)\}_V e^{-2j\pi nt} dt \quad (4.16)$$

On obtient la contribution variable des amplitudes modales $\{q(t)\}_V$ par transformée inverse de $\{q(n)\}_V$.

Si, comme en temporel, on désire obtenir la contribution dynamique, deux solutions équivalentes sont possibles :

1. On calcule la contribution quasi-statique de l'amplitude modale en prenant, pour toutes les fréquences, la valeur de la fonction de transfert modale pour la fréquence nulle, soit :

$$\{q(n)\}_B^{TF} = [K^*]^{-1} \{P^*(n)\} \quad (4.17)$$

On revient dans le domaine temporel par transformée de Fourier inverse :

$$\{q(t)\}_B^{TF} = \int_{-\infty}^{\infty} \{q(n)\}_B^{TF} e^{2j\pi nt} dn \longrightarrow \{F(t)\}_B^{TF} = [\phi^{(F)}] \{q(t)\}_B^{TF} \quad (4.18)$$

et on réalise la soustraction entre les deux contributions :

$$\{q(t)\}_R^{TF} = \{q(t)\}_V^{TF} - \{q(t)\}_B^{TF} \quad (4.19)$$

de sorte qu'on obtient bien la contribution dynamique de l'amplitude modale.

2. On modifie la fonction de transfert modale en venant lui soustraire sa valeur à l'origine. Ceci donne alors une fonction de transfert permettant de calculer la contribution dynamique :

$$[H^*(n)]_R = [H^*(n)] - [K^*]^{-1} \quad (4.20)$$

Ainsi :

$$\{q(n)\}_R = [H^*(n)]_R \{P^*(n)\}_V \quad (4.21)$$

puis on revient dans le domaine temporel par transformée de Fourier inverse.

4.7 Calcul des extrema centrés

Le calcul des extrema centrés ne concerne que la partie variable de l'effort $\{F(t)\}_V$.

4.7.1 Sur base de la réponse temporelle

Les méthodes exposées en 4.5 et en 4.6.2 permettent d'obtenir les valeurs de l'effort au cours du temps. Sachant que la contribution quasi-statique sera mal évaluée en base modale (voir section 6.2.1) il est intéressant de venir recombinaison à la contribution dynamique calculée en base modale la contribution quasi-statique calculée en base nodale :

$$\{F(t)\}_V^{CDC.TF} = \{F(t)\}_B^{CDC} + \{F(t)\}_R^{TF} \quad (4.22)$$

$$\{F(t)\}_V^{CDC.NK} = \{F(t)\}_B^{CDC} + \{F(t)\}_R^{NK} \quad (4.23)$$

La méthode générale de calcul mise en œuvre par le bureau d'étude est :

$$\{F(t)\}_V^{SI.TF} = \{F(t)\}_B^{SI} + \{F(t)\}_R^{TF} \quad (4.24)$$

Connaissant maintenant l'effort variable par recombinaison, la démarche expliquée en 2.5.2 pour le calcul des extrema centrés peut être appliquée étape par étape :

1. Sur chaque échantillon, les extrema (min et max) sont relevés :

$$\{F_i\}_V^{(min)} = \min \{F_i(t)\}_V \quad \text{pour } i=1,2,\dots,12 \quad (4.25)$$

$$\{F_i\}_V^{(max)} = \max \{F_i(t)\}_V \quad \text{pour } i=1,2,\dots,12 \quad (4.26)$$

où $\{F_i(t)\}_V$ est le vecteur des efforts au cours du temps sur l'échantillon i .

2. les extrema sont alors moyennés entre eux :

$$\{F\}_V^{(minc)} = \frac{\sum_{i=1}^{12} \{F_i\}_V^{(min)}}{12} \quad (4.27)$$

$$\{F\}_V^{(maxc)} = \frac{\sum_{i=1}^{12} \{F_i\}_V^{(max)}}{12} \quad (4.28)$$

afin d'obtenir les extrema centrés.

4.7.2 Via la démarche stochastique

Pour calculer les extrema centrés via une démarche stochastique il est nécessaire de connaître la diagonale de la matrice des moments spectraux d'ordre 0 et d'ordre 2 des efforts :

$$m_{mm}^{0,(F)} = B_m^{0,(F)} + R_m^{0,(F)} \quad (4.29)$$

$$m_{mm}^{2,(F)} = B_m^{2,(F)} + R_m^{2,(F)} \quad (4.30)$$

Étant donné que la contribution quasi-statique, $B_m^{i,(F)}$, est mal évaluée en base modale, il serait bon de se servir des résultats obtenus via CDC. La variance de la contribution quasi-statique de l'effort, $B_m^{0,(F)}$, peut se calculer directement sur $\{F(t)\}_B^{CDC}$. La variance de la contribution quasi-statique de l'effort dérivé une fois, $B_m^{2,(F)}$, peut s'obtenir sur base de la densité spectrale de $\{F(t)\}_B^{CDC}$:

$$B_m^{2,(F),CDC} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^2 S_{mm}^{(F),CDC}(\omega) d\omega \quad (4.31)$$

Si l'on utilise la combinaison SRSS-BB :

$$m_{mm}^{0,(F),CDC.SRSS-BB} = B_m^{0,(F),CDC} + R_m^{0,(F),SRSS-BB} \quad (4.32)$$

$$m_{mm}^{2,(F),CDC.SRSS-BB} = B_m^{2,(F),CDC} + R_m^{2,(F),SRSS-BB} \quad (4.33)$$

Si l'on utilise la combinaison CQC-BB :

$$m_{mm}^{0,(F),CDC.CQC-BB} = B_m^{0,(F),CDC} + R_m^{0,(F),CQC-BB} \quad (4.34)$$

$$m_{mm}^{2,(F),CDC.CQC-BB} = B_m^{2,(F),CDC} + R_m^{2,(F),CQC-BB} \quad (4.35)$$

On calcule ensuite :

$$n_0^+ = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{m_{mm}^{2,(F)}}{m_{mm}^{0,(F)}}} \quad (4.36)$$

$$F_{V,mm}^{(extre)} \simeq \left(\sqrt{2 \ln n_0^+} + \frac{\Gamma}{\sqrt{2 \ln n_0^+}} \right) = g \sqrt{m_{mm}^{0,(F)}} \quad (4.37)$$

où $\Gamma = 0.5772$ est la constante d'Euler, T est la **période d'observation égale à 525 secondes** et g est le facteur de pointe.

Chapitre 5

Mise en pratique des différentes méthodes — Leurs spécificités

5.1 Introduction

Ce chapitre clarifie la prise en compte ou non des fréquences parasites selon la méthode utilisée et identifie les spécificités associées aux différentes démarches et les développe. Ce chapitre est donc un pré-requis au chapitre 6 dans la mesure où il apporte les derniers éléments afin de bien comprendre l'application des différentes méthodes.

Les spécificités associées à la démarche stochastique sont illustrées pour un vent à 75°.

5.2 Clarification quant à la prise en compte ou non des fréquences parasites

Il a déjà été question du filtrage des fréquences parasites (voir 3.4.3) et de leurs influences. Avant de passer au chapitre 6 présentant l'analyse des résultats, il convient de clarifier le sujet. Premièrement, considérons le calcul de la contribution moyenne et quasi-statique des amplitudes modales. La matrice de covariance de la contribution quasi-statique de l'amplitude modale est uniquement fonction de la matrice de covariance des forces généralisées :

$$B_{mn}^i = \frac{m_{mn}^{i,(p^*)}}{K_{mm}^* K_{nn}^*} \quad (5.1)$$

L'effet du filtrage provoque donc une diminution de la contribution quasi-statique de la matrice de covariance des amplitudes modales. L'effet final est alors une diminution des variances des efforts. **Pour la contribution quasi-statique il est choisi de ne pas filtrer les signaux de façon à être sécuritaire.**

Deuxièmement, concentrons-nous sur la contribution dynamique des amplitudes modales. Cette contribution peut être fortement amplifiée si une fréquence parasite se trouve être à proximité d'une fréquence naturelle. **Un critère** pourrait être de fixer une plage autour de chaque fréquence propre où aucune fréquence parasite ne peut se trouver. Cette plage pourrait être la largeur du pic de la fonction de transfert à mi-hauteur égale à $2\xi f_{nat}$. Une des deux conditions :

$$f_{par} < (1 - \xi)f_{nat} \quad \text{ou} \quad f_{par} > (1 + \xi)f_{nat} \quad (5.2)$$

est alors à vérifier.

Dans ce chapitre une solution est uniquement proposée dans le cadre d’une analyse stochastique. Des solutions existent pour l’analyse déterministe mais sont relativement plus compliquées à mettre en œuvre (par exemple : génération d’un signal à partir de sa densité spectrale). Il est proposé de continuer à travailler avec une analyse déterministe, sans filtrer les signaux, en tenant compte de la condition qui vient d’être énoncée.

En ce sens, la figure 5.1 reprend les fréquences naturelles en points bleus et les fréquences parasites en points rouges. La condition proposée, éq. (5.2), est reprise en traits verticaux pour les fréquences naturelles se trouvant à proximité des fréquences parasites.

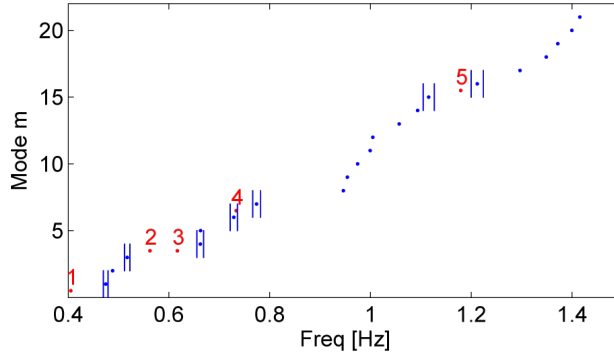


FIG. 5.1 – Les fréquences naturelles sont en bleu, les fréquences parasites en rouge.

La condition proposée est vérifiée pour les fréquences parasites 1,2,3 et 5. La fréquence parasite n°4 (0,734 Hz) se trouve dans la plage des fréquences correspondant aux valeurs de la moitié supérieure du pic, de la fonction de transfert du sixième mode ($f_{nat} = 0,729$ Hz). Cependant, la densité spectrale de la force généralisée associée à ce mode ne présente pas ce pic (voir figure 5.2 et tableau 5.3 en 5.4).

Nous avons décidé, pour l’analyse déterministe, de travailler sur base des signaux de pressions non filtrés.

Pour la démarche stochastique, la méthode de l’approximation en bruit blanc oblige ¹ de filtrer les signaux et entraîne que les fréquences parasites ne sont pas considérées.

Le tableau 5.1 clarifie si les signaux sont filtrés ou pas suivant la méthode appliquée et la contribution calculée (quasi-statique, dynamique).

CDC	TF		NK		SRSS-BB		CQC-BB	
B	B	R	B	R	B	R	B	R
SNF	SNF		SNF		SNF	SF	SNF	SF

TAB. 5.1 – SNF=signaux non filtrés, SF=signaux filtrés.

1. Explication en 5.4.

5.3 Superposition modale avec résolution des équations découplées par Newmark

La spécificité essentielle de Newmark est d'inclure dans son calcul des amplitudes modales la réponse transitoire. Cette réponse devient négligeable par rapport à la réponse stationnaire après un laps de temps quantifié par (voir [19]) :

$$t = \frac{T}{2\xi} = \frac{1}{2\xi f} \quad (5.3)$$

où T est la période du mode propre et ξ l'amortissement du mode propre.

Plus l'amortissement est élevé (1% dans notre cas), plus vite la réponse stationnaire est atteinte et donc plus courte est la contribution transitoire de la réponse. De même, plus la période d'un oscillateur est importante, moins rapidement cet oscillateur atteint sa réponse stationnaire. Dans notre cas, pour le premier mode, la fréquence est de 0,475 Hz et la période de mise en régime qui est associée est donc de 105 secondes, soit un peu moins de deux minutes. Le dernier mode (c'est-à-dire le mode 21), ayant une fréquence de 1,415 Hz a, quant à lui, une période de mise en régime de 35 secondes. Or, on sait par ailleurs, qu'un effort étudié au sein d'un élément résulte de la superposition modale des composantes de l'effort dans chaque mode. Ainsi, la période transitoire de l'effort se trouve entre le minimum de 35 secondes et le maximum de 105 secondes. Si l'élément est essentiellement sollicité par les premiers modes propres, la période de mise en régime associée à l'effort se rapprochera de celle du premier mode, dans le cas contraire elle se rapprochera d'une période de mise en régime proche de celle des derniers modes. **Le plus simple est de considérer les valeurs prises par les efforts au-delà de la période de mise en régime du premier mode.** Cette démarche est appliquée dans ce travail.

5.4 Démarche stochastique

5.4.1 Introduction

L'utilisation de la méthode SRSS-BB nécessite la connaissance de la valeur de la densité spectrale de puissance, unilatérale, de la force généralisée, à la pulsation propre du mode.

La mise en application de la démarche CQC-BB requiert la connaissance des valeurs des densités spectrales de puissance, croisées, pour chaque paire de fréquences propres.

5.4.2 Calcul des densités spectrales des forces généralisées

Unilatérales

Plusieurs méthodes de calcul des densités spectrales unilatérales existent, à savoir :

1. **les méthodes non paramétriques** : la DSP est estimée directement à partir du signal lui-même (périodogramme, Welch) ;
2. **les méthodes paramétriques** : méthode autorégressive de Yule-Walker ou encore méthode de Burg.

D'autres méthodes existent mais ne seront pas abordées.

Afin de connaître la valeur de la densité spectrale en une fréquence précise, deux solutions sont possibles :

1. utilisation des méthodes non paramétriques et interpolation afin de connaître la valeur de la DSP à la fréquence propre du mode ;
2. utilisation des méthodes paramétriques permettant de connaître la valeur de la DSP pour n'importe quelle fréquence (inférieure à la fréquence de Nyquist).

Le tableau 5.2 reprend les avantages et désavantages des deux solutions.

		Avantages	Désavantages
Méthodes	Non paramétriques	Si la condition (5.2) est vérifiée il n'est pas nécessaire de filtrer les signaux.	Même si un nombre important de fenêtres est utilisé avec recouvrement, la DSP obtenue n'est pas lisse et des variations locales importantes ont lieu de sorte qu'une interpolation de valeur n'est pas recommandable.
	Paramétriques	Elles permettent d'obtenir une DSP plus lisse que les méthodes non paramétriques et il est possible de connaître la valeur de la DSP pour n'importe quelle fréquence (inférieure à la fréquence de Nyquist).	Même si la condition 5.2 est vérifiée nécessité de filtrer les signaux des fréquences parasites.

TAB. 5.2 – Avantages et désavantages quant à l'utilisation de méthodes paramétriques et non paramétriques pour l'estimation de la valeur de densité spectrale à une fréquence précise.

Nous avons décidé de travailler avec la méthode auto-régressive de Yule-Walker qui nous semble la plus appropriée.

La figure 5.2 compare les DSP calculées via Welch sur base des signaux filtrés (en rouge) et non filtrés (en bleu) et présente les DSP calculées via Yule-Walker sur base des signaux filtrés (en noir) et non filtrés (en cyan). Ce type de comparaison a déjà été réalisé en 3.4.3, lors de l'observation des densités spectrales unilatérales des pressions mesurées aux capteurs. Les caractéristiques de la méthode Welch et de la méthode de Yule-Walker sont identiques à celles utilisées en 3.4.3 et reprises au tableau 3.1.

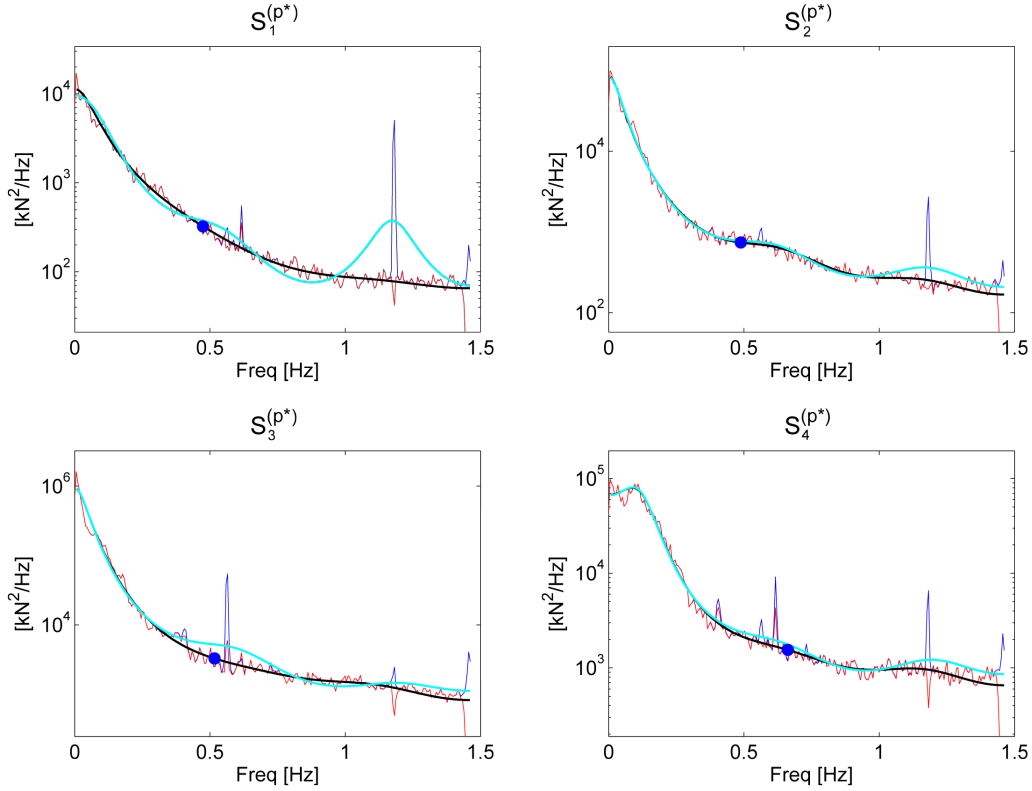


FIG. 5.2 – Densités spectrales unilatérales des forces généralisées pour les quatre premiers modes propres. DSP sur base des signaux filtrés : Welch en rouge et Yule-Walker en noir. DSP sur base des signaux non filtrés : Welch en bleu, Yule-Walker en cyan.

A nouveau, des pics parasites sont présents pour certaines fréquences. Le tableau 5.3 indique quelles fréquences parasites sont présentes.

Mode	[0,402 0,408] Hz	0,563 Hz	0,617 Hz	0,734 Hz	1,179 Hz	> 1,44 Hz
1	NP	P	P	NP	P	P
2	NP	P	NP	NP	P	P
3	P	P	NP	NP	P	P
4	P	P	P	NP	P	P

TAB. 5.3 – Présences des fréquences parasites dans les DSP des forces généralisées des quatre premiers modes. P=féquence parasite présente, NP=féquence parasite non présente.

La méthode de Yule-Walker, appliquée sur base des signaux non filtrés, entraîne des sous-évaluations et des sur-évaluations des valeurs prises par la densité spectrale calculée via Welch. Ce problème est d'autant plus marqué que l'énergie associée aux pics est élevée. Utiliser la méthode de Yule-Walker sur base du signal non filtré aurait amené, par exemple, à une surévaluation de $S^{(p^*)}(w_{nat})$ pour les modes 1,3 et 4.

Il est donc nécessaire de travailler sur base des signaux filtrés afin d'obtenir une DSP paramétrisée venant se superposer sur la DSP calculée via Welch et permettant ainsi d'obtenir une valeur correcte de $S^{(p^*)}(w_{nat})$.

Afin de permettre la visualisation de l'influence du filtrage des signaux sur la variance des forces généralisées, celle-ci est reportée à la figure 5.3 ainsi que les valeurs associées au sein du tableau 5.4.

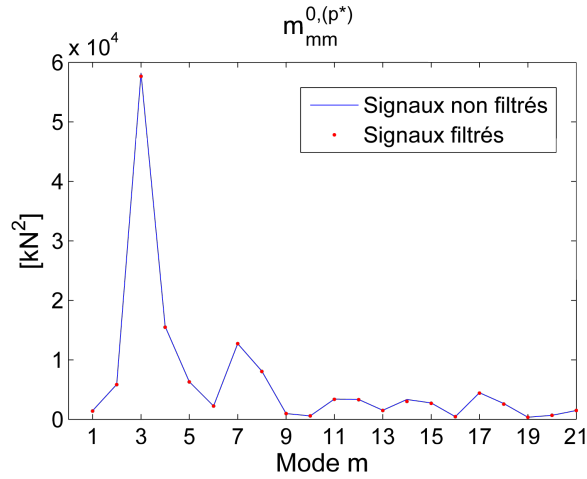


FIG. 5.3 – Variance des forces généralisées unilatérales.

$m_{mm}^{0,(p^*)}$				$m_{mm}^{0,(p^*)}$				$m_{mm}^{0,(p^*)}$			
$\frac{NF - F}{F}$				$\frac{NF - F}{F}$				$\frac{NF - F}{F}$			
Mode	NF	F	%	Mode	NF	F	%	Mode	NF	F	%
1	1430	1381	-3,4	8	8089	8005	-1,03	15	2732	2650	-3,01
2	5850	5815	-0,61	9	951	944	-0,71	16	429	423	-1,61
3	58153	57571	-1	10	561	555	-1,03	17	4465	4385	-1,79
4	15616	15430	-1,2	11	3389	3353	-1,07	18	2660	2545	-4,31
5	6319	6271	-0,76	12	3325	3287	-1,14	19	341	337	-1,25
6	2238	2221	-0,75	13	1500	1453	-3,12	20	664	654	-1,51
7	12725	12684	-0,32	14	3313	2977	-10,14	21	1477	1472	-0,31

TAB. 5.4 – Valeurs associées à la figure 5.3. NF=sur base des signaux non filtrés, F=sur base des signaux filtrés, $\frac{NF - F}{F}$ =pourcentage de diminution de la variance lorsqu'on filtre les signaux.

Le mode 3, vertical symétrique, présente la variance la plus élevée.

Filtrer les signaux entraîne une diminution de la variance, ce qui est trivial. Le pourcentage de diminution est repris au tableau 5.4. La figure 5.4 reprend les densités spectrales pour le mode 14 (présentant la plus grosse diminution de variance) et le mode 21 (ayant la plus petite diminution de variance).

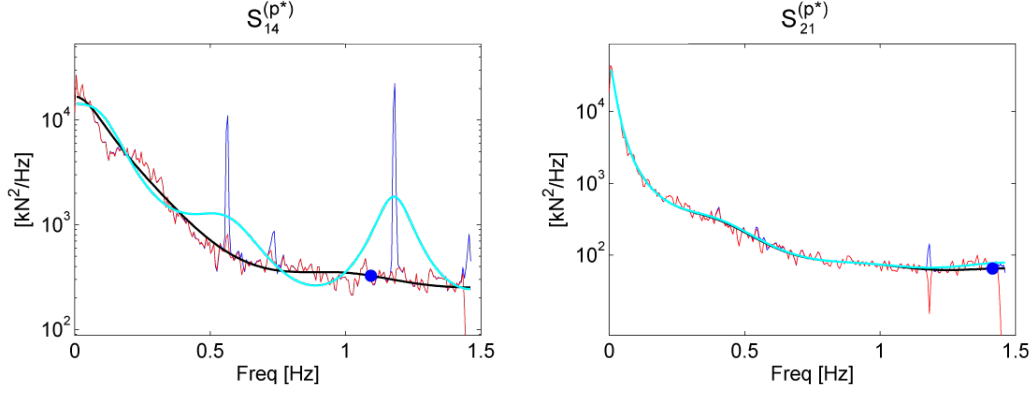


FIG. 5.4 – Densités spectrales unilatérales des forces généralisées pour les modes 14 et 21. DSP sur base des signaux filtrés : Welch en rouge et Yule-Walker en noir. DSP sur base des signaux non filtrés : Welch en bleu, Yule-Walker en cyan.

Croisées

Le logiciel Matlab ne contient pas de fonction prédéfinie permettant de calculer les DSP croisées de façon paramétrique². Sachant qu'il est uniquement nécessaire de connaître la valeur de chaque DSP croisée pour les deux fréquences propres associées, la **méthode proposée** suivante est mise en œuvre :

1. Calcul de la matrice des PSD via Welch.
2. Calcul de la cohérence sur base de la matrice obtenue en 1 :

$$\Gamma_{mn}^{(p^*)}(n) = \frac{S_{mn}^{(p^*)}(n)}{\sqrt{S_{mm}^{(p^*)}(n)S_{nn}^{(p^*)}(n)}} \quad (5.4)$$

où :

- $\Gamma_{mn}^{(p^*)}(n)$ = cohérence entre deux forces généralisées m et n ;
- $S_{mn}^{(p^*)}(n)$ = densité spectrale croisée entre les forces généralisées m et n ;
- $S_{mm}^{(p^*)}(n)$ = densité spectrale unilatérale de la force généralisée m .

3. Paramétrisation au moyen d'un polynôme de degré 6 de la partie réelle de la cohérence, $\Re(\Gamma_{mn}^{(p^*)}(n))$, pour les fréquences supérieures à 0,45 Hz. Ce choix de considérer uniquement les fréquences supérieures à 0,45 Hz résulte de l'utilisation de l'approximation en bruit blanc. Cette approximation exige la connaissance des valeurs :

- des densités spectrales unilatérales aux fréquences propres ;
- des densités spectrales croisées aux deux fréquences associées.

Cette approximation de la cohérence est notée $\Gamma_{mn}^{(p^*),A}(n)$. La figure 5.5 présente la cohérence calculée à l'étape 2 (en bleu) et son approximation (en rouge).

². L'article [20] traite de l'estimation paramétrique de densité spectrale croisée. Cependant, la méthode proposée étant assez fastidieuse, nous avons eu recours à une méthode simplifiée.

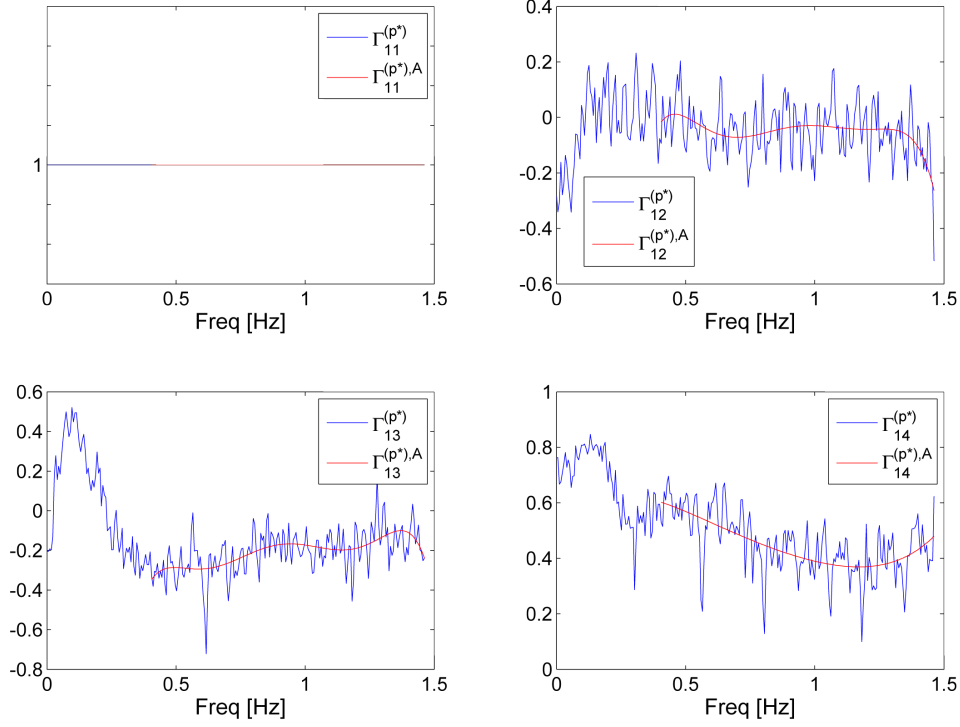


FIG. 5.5 – Approximation au moyen d'un polynôme de degré 6 de la partie réelle de la cohérence, $\Re\left(\Gamma_{mn}^{(p^*)}(n)\right)$, pour les fréquences supérieures à 0,45 Hz.

4. Calcul des DSP croisées à l'aide de la cohérence paramétrée, $\Gamma_{mn}^{(p^*),A}(n)$, et des DSP unilatérales calculées de façon paramétrique via Yule-Walker ($S_{mm}^{(p^*),YW}$) :

$$S_{mn}^{(p^*),AYW}(n) = \Gamma_{mn}^{(p^*),A}(n) \sqrt{S_{mm}^{(p^*),YW}(n) S_{nn}^{(p^*),YW}(n)} \quad (5.5)$$

La figure 5.6 compare les densités spectrales croisées calculées via Welch (étape 1) et obtenues via la méthode proposée. La figure 5.7 est un zoom de la figure 5.6 pour les fréquences supérieures à 0,45 Hz. Les densités spectrales croisées calculées via Welch sont fort erratiques de sorte qu'il est exclu de réaliser des interpolations entre valeurs. La méthode proposée est la plus adéquate pour connaître des valeurs de densités spectrales en des fréquences bien précises.

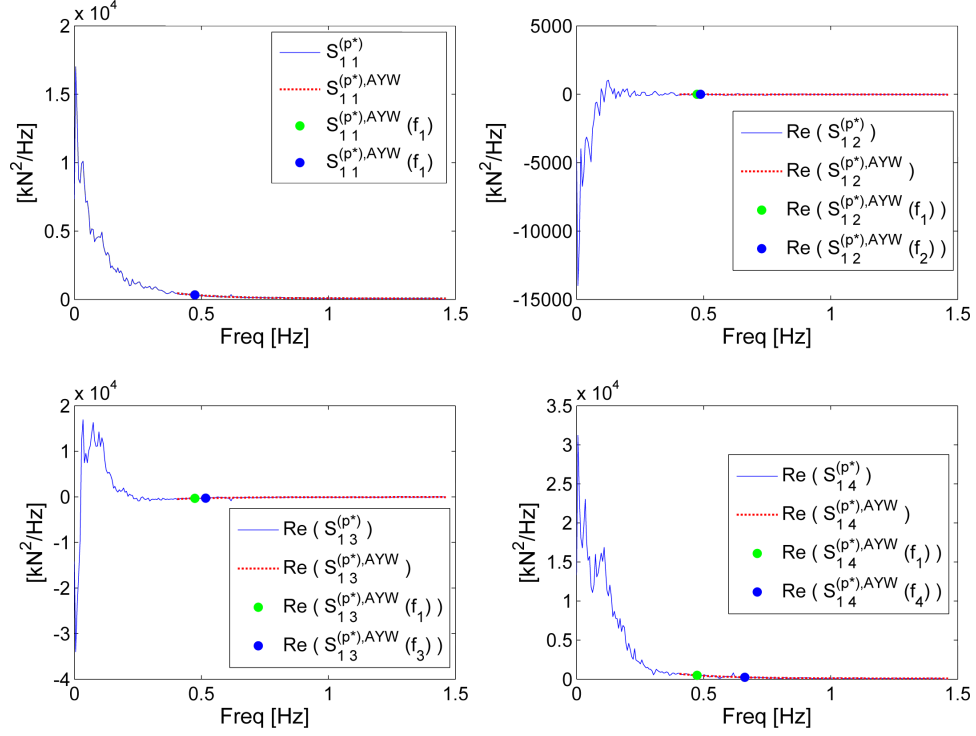


FIG. 5.6 – Approximation de la densité spectrale croisée calculée via Welch suivant la méthode proposée.

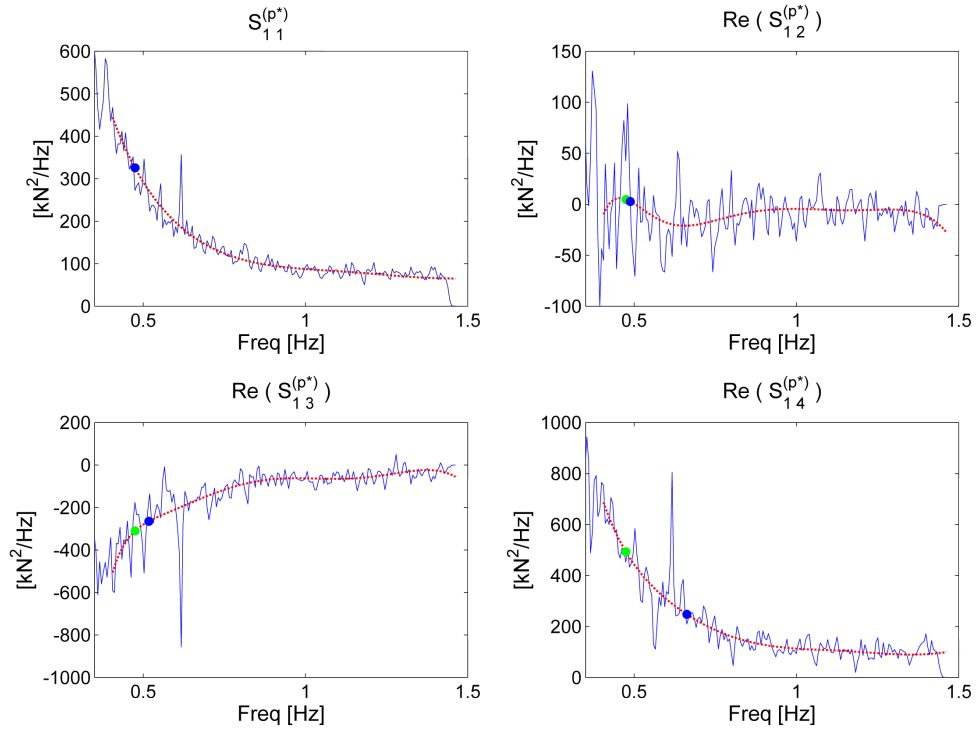


FIG. 5.7 – Zoom de la figure 5.6 pour les fréquences supérieures à 0,45 Hz.

Chapitre 6

Analyse et comparaison des résultats fournis par les différentes méthodes

6.1 Introduction

Ce chapitre présente les résultats des calculs selon les différentes méthodes exposées au chapitre 5. Ces résultats sont confrontés entre eux mais également avec les résultats de calculs fournis par le bureau d'études Greisch (méthode SI et SI.TF).

Le tableau 6.1 reprend les différentes méthodes utilisées.

Code	Section	Page	Calcul	Base	Description
CDC	4.5.1	71	statique	nodale	Cas de charge
SI	4.5.1	71	statique	nodale	Surface d'influence
NK	2.2.2	22	dynamique	modale	Résolution via Newmark
TF	2.2.2	23	dynamique	modale	Résolution via transformée de Fourier
SRSS-BB	2.3.2	25	dynamique	modale	Approximation en bruit blanc
CQC-BB	2.3.2	26	dynamique	modale	Approximation en bruit blanc

TAB. 6.1 – Rappel des différentes méthodes et notations utilisées.

En premier lieu, l'effort moyen est calculé en base nodale via la méthode CDC et les résultats sont comparés avec la méthode SI. Le calcul est également réalisé en base modale afin de faire apparaître l'évolution de l'effort en fonction du nombre de modes propres gardés.

En second lieu, la contribution quasi-statique de l'effort est obtenue via la méthode CDC. Les différences entre facteurs de pointe positifs et négatifs sont analysées.

En troisième lieu, deux étapes du calcul en base modale sont reprises. Les densités spectrales des amplitudes modales calculées suivant NK, TF et CQC-BB sont comparées et les densités spectrales des efforts obtenues via CQC-BB sont analysées afin de mettre en lumière les contributions des différents modes.

Finalement, les extrema centrés sont évalués et les résultats fournis par les différentes méthodes comparés.

Notes importantes :

- un effort de traction est négatif tandis qu'un effort de compression est positif ;
- les trois directions de vent ont été étudiées mais il nous a semblé pertinent de ne développer les différentes étapes des calculs que dans une seule direction. **La direction de vent choisie est celle de 75°** ¹, elle correspond à un vent perpendiculaire à la longueur du stade ;
- les caractéristiques du calcul des densités spectrales sont identiques à celles présentées en 3.4.3 et sont reprises au tableau 3.1 ;
- de manière à alléger l'écriture et à nommer univoquement un élément, les annotations simplifiées introduites en 2.6 sont utilisées.

6.2 Calcul de l'effort moyen

6.2.1 En base nodale

L'effort moyen $\bar{F}$ est calculé suivant la méthode CDC. Le tableau 6.2 présente les résultats obtenus en comparaison avec ceux obtenus via SI. Concernant trois éléments de la méga-poutre (I, D et S), les différences entre les deux méthodes sont faibles mais non négligeables. L'effort MP.E.B calculé via CDC est moitié moindre que celui trouvé via SI. Pour l'élément PT.N, l'effort calculé suivant les deux méthodes est fort semblable. Pour les efforts dans les contreventements, les différences entre les deux méthodes se marquent fortement avec pour Co.S un effort normal de compression calculé via CDC et de traction via SI. Concernant les pannes, les différences sont plus faibles que pour les éléments de contreventements mais sont néanmoins importantes avec, par exemple, la diminution de 30 % de l'effort P.O.P. Les efforts au sein des éléments du fléau n°64 présentent également des différences entre les deux méthodes.

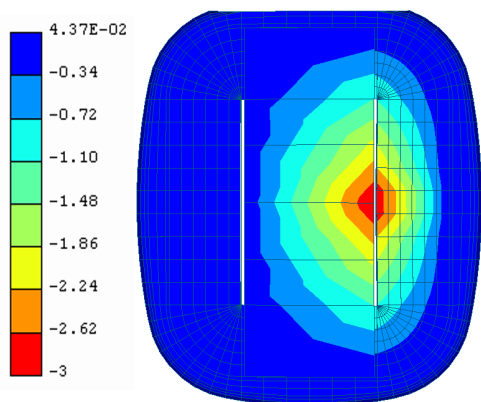
	MP.E				PT.N	Co		P			F.O	
	I	D	S	B	S	O	S	O.P	O.B	E	Po	M
SI	2992	418	-1113	141	-343	29	-25	30	13	-403	-33	151
CDC	2924	391	-1107	68	-316	49	2	21	12	-326	-40	165
$\frac{\text{CDC-SI}}{\text{SI}}\%$	-2,3	-6,5	-0,5	-51,8	-7,9	69	-108	-30	-7,7	-19,1	21,2	9,2

TAB. 6.2 – Effort moyen $\bar{F}$. Unité : kN et kN.m.

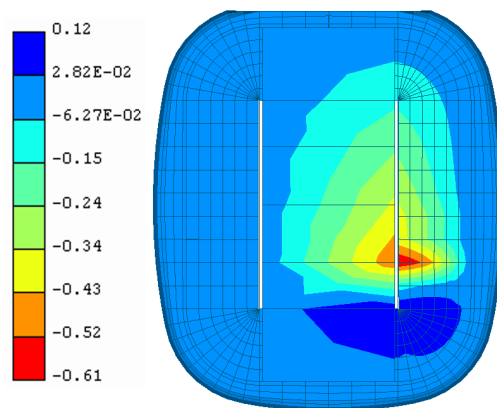
La simplification pour la mise en application de la méthode SI, expliquée en 4.5.1, introduit des erreurs qui sont d'autant plus marquées que la surface d'influence est très locale. Afin de se rendre compte de l'étendue des surfaces d'influence des différents efforts, celles-ci sont reportées à la figure 6.1. Pour les efforts concernant la méga-poutre (a,b et c), les surfaces d'influence sont importantes et les efforts calculés via les deux méthodes sont très proches. La différence minimum est associée à l'effort MP.E.S qui a la surface d'influence la plus étendue.

Pour les autres efforts, les surfaces d'influence sont plus localisées et des différences entre les deux approches se marquent alors. Les différences les plus importantes se présentent pour les efforts associés aux éléments de contreventements. Leurs surfaces d'influence (k et l) présentent l'étendue la plus faible ce qui explique que les plus grosses différences entre les deux méthodes soient observées pour ces deux efforts.

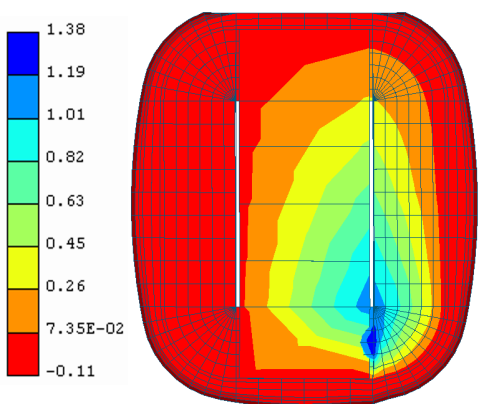
1. Les résultats des calculs des sections 6.5 et 6.6 pour les vents à 120° et à 165° sont donnés en annexe.



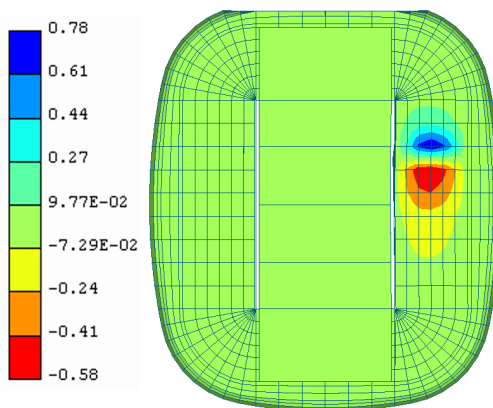
(a) Effort normal au sein d'un élément de la membrure inférieure de la méga poutre Est (MP.E.I).



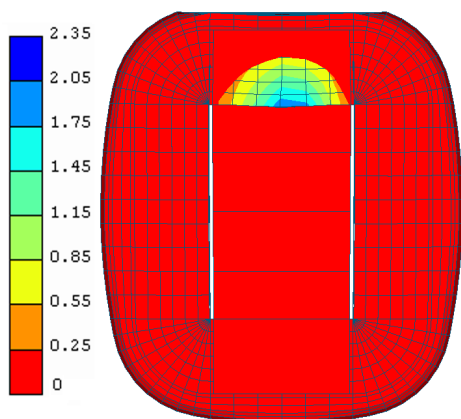
(b) Effort normal au sein d'une diagonale tendue de la méga poutre Est (MP.E.D).



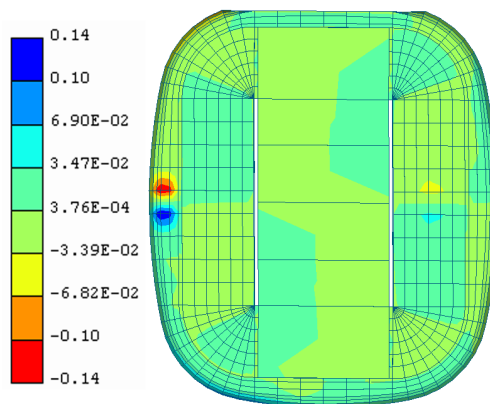
(c) Effort normal au sein d'un élément de l'extrémité de la membrure supérieure de la méga-poutre Est (MP.E.S).



(d) Effort normal au sein d'un bracon connecté à la méga-poutre Est (MP.E.B).

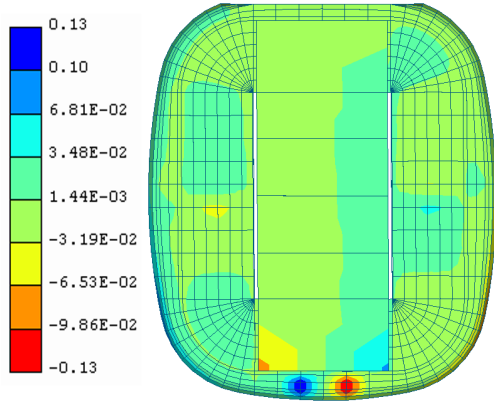


(e) Effort normal au sein d'un élément de la membrure supérieure de la poutre transversale Nord (PT.N.S).

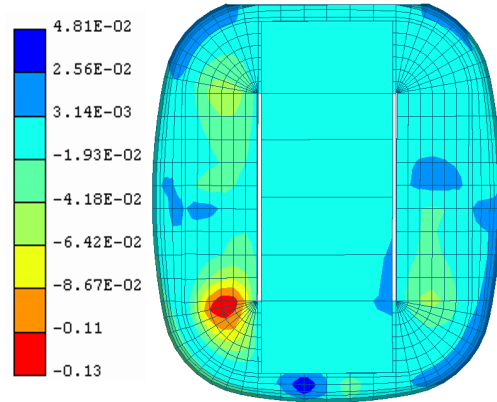


(f) Effort normal au sein d'un contreventement entre potelets (Co.O).

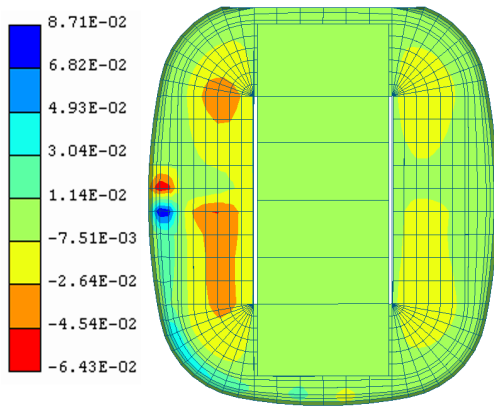
FIG. 6.1 – Surfaces d'influence selon z_{global} .



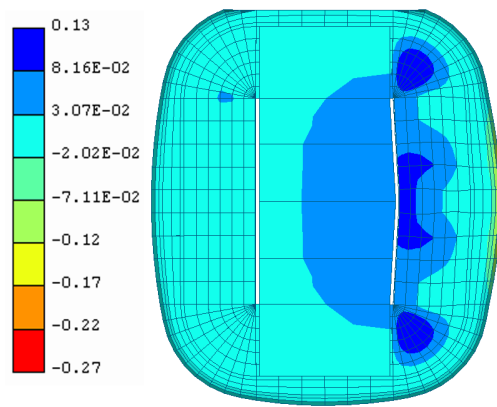
(g) Effort normal au sein d'un contreventement entre potelets côté Sud (Co.S).



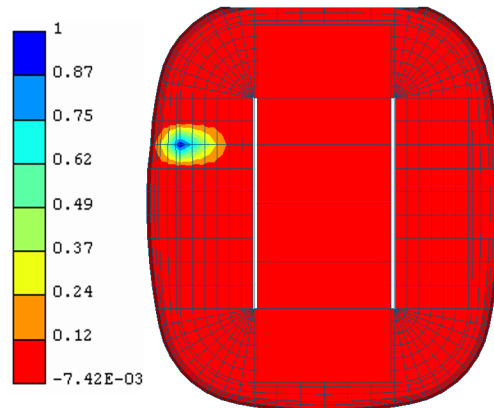
(h) Effort normal au sein d'une panne périphérique côté Ouest (P.O.P).



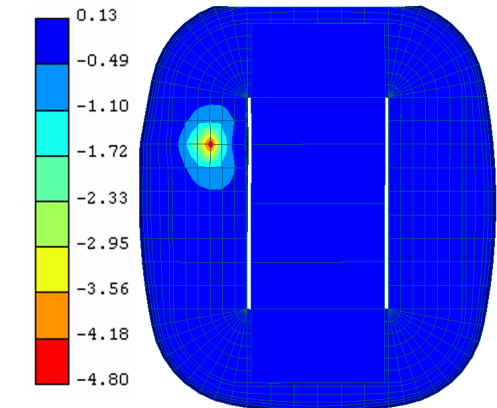
(i) Effort normal au sein d'une panne basse côté Ouest (P.O.B).



(j) Effort normal au sein d'une panne métallique côté Est (P.E).



(k) Effort normal au sein d'un potelet du fléau n°64 (F.O.P).



(l) Moment au sein d'un élément du fléau haut n°64 (F.O.M).

FIG. 6.1 – Surfaces d'influence selon z_{global} .

6.2.2 En base modale

Il est également possible de calculer cet effort moyen en base modale. L'amplitude modale moyenne se calcule par :

$$\bar{q}_i = \frac{\overline{p_i^*}}{K_i^*} \quad (6.1)$$

où $\overline{p_i^*}$ est la valeur moyenne de la i ème force généralisée.

Les efforts moyens se calculent simplement via :

$$\{\bar{F}\} = [\phi^{(F)}] \{\bar{q}\} \quad (6.2)$$

La section 4.3 décrit les 21 modes propres gardés pour l'analyse dynamique. Dans une analyse statique, il n'y a pas de limitation du nombre de modes propres gardés² et les 99 premiers modes propres sont calculés. La figure 6.2 présente l'évolution de l'effort moyen en fonction du nombre de modes propres gardés. La valeur de référence de l'effort est celle obtenue via la méthode CDC reprise en pointillés rouges sur les figures.

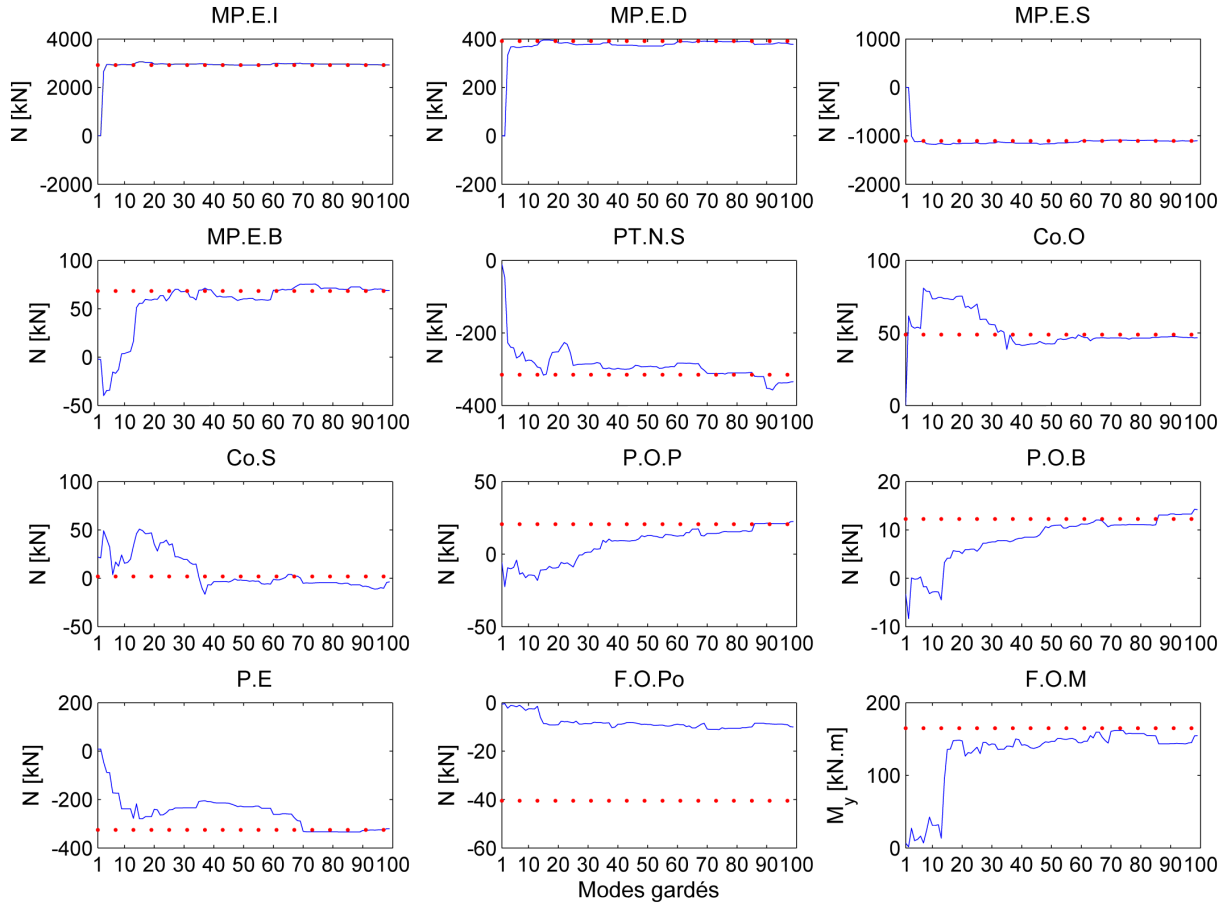


FIG. 6.2 – Évolution de l'effort moyen calculé en base modale en fonction du nombre de modes propres gardés. Les points rouges représentent la valeur de référence calculée via la méthode CDC.

2. Mis à part, bien entendu, le nombre de degrés de liberté.

Sur base de la figure 6.2, les efforts qui concernent la méga-poutre (I, D et S) sont très bien approchés en base modale avec un nombre restreint de modes. Ceci est la conséquence de leurs surfaces d'influence étendues. L'effort MP.E.B semble atteindre la valeur de référence pour environ 25 modes mais ne se stabilise pas comme pour les trois efforts précédants. Pour l'effort PT.N.S, 99 modes n'ont pas l'air d'être suffisants vu que la courbe semble s'éloigner de la valeur de référence après le nonantième mode. L'effort Co.O semble être stabilisé au delà de 65 modes tout en restant légèrement en-dessous de la valeur de référence. Pour les pannes côté Ouest, il est clair qu'il n'y pas de stabilisation autour de la valeur de référence vu que la valeur des efforts continue à augmenter. Les valeurs prises par l'effort F.O.Po sont fort éloignées de la valeur de référence et n'évoluent pratiquement pas en fonction du nombre de modes propres gardés. Pour cet effort, il faudrait garder un nombre de modes bien plus important pour pouvoir correctement approcher sa valeur de référence.

La figure 6.3 présente la contribution de chaque mode au calcul de l'effort moyen.

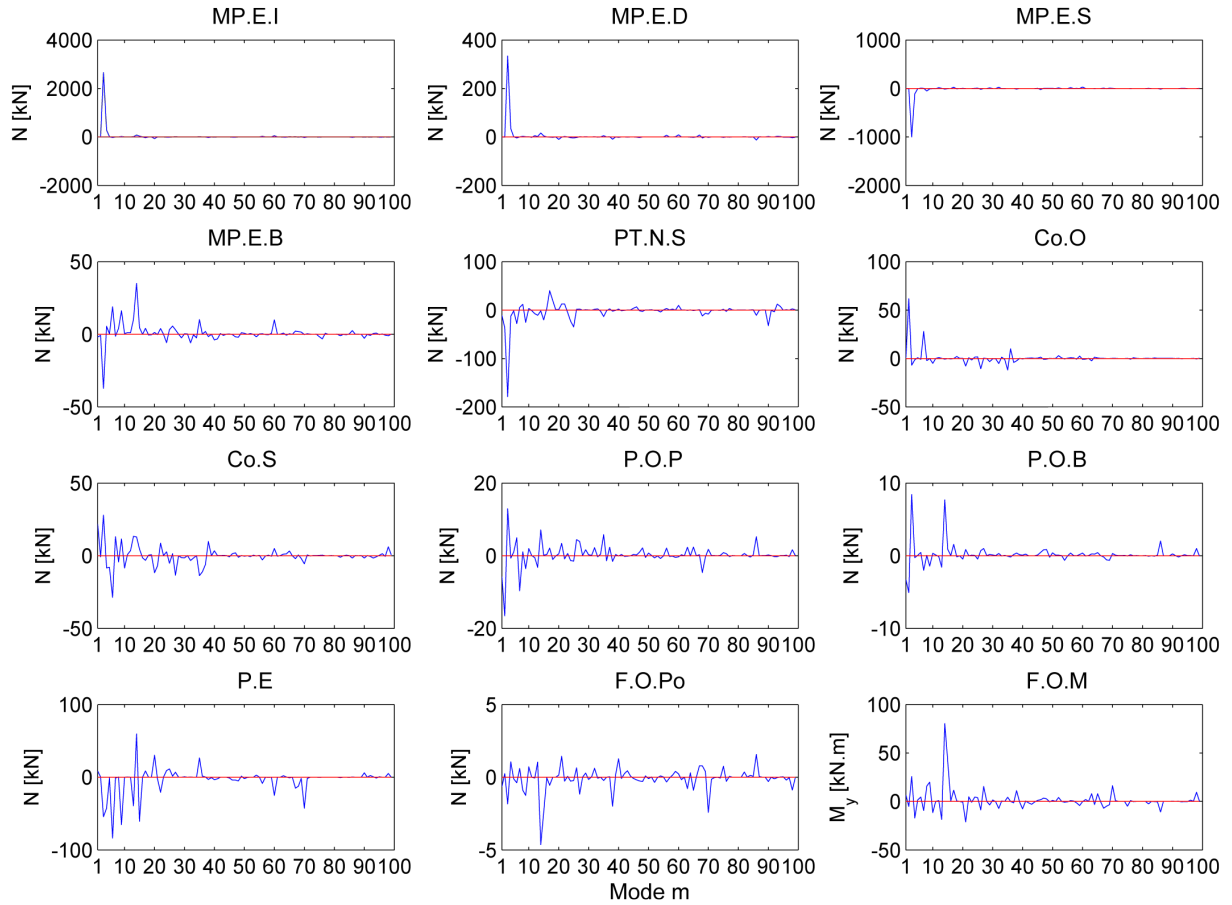


FIG. 6.3 – Contribution de chaque mode au calcul de l'effort moyen.

Pour les efforts concernant la méga-poutre (I, D et S), la réponse se manifeste principalement dans le troisième mode qui est le mode vertical symétrique. L'élément MP.E.B est sollicité quant à lui dans plusieurs modes.

Pour l'effort F.O.Po, les réponses dans chacun des modes sont du même ordre de grandeur avec des pics importants dans toute la gamme des modes, ce qui explique bien la non convergence vers la valeur de référence.

6.3 Calcul en base nodale

6.3.1 Contribution quasi-statique de l'effort

La contribution quasi-statique de l'effort est calculée en base nodale suivant la méthode CDC comme pour le calcul de l'effort moyen. Le facteur de pointe est calculé sur base des extrema (voir section 2.5.2) ce qui permet de mettre en évidence un facteur de pointe positif g^+ et un facteur de pointe négatif g^- :

$$g_i^+ = \frac{F_i^{Maxc}}{\sigma_{F_i}} \quad (6.3)$$

$$g_i^- = \frac{F_i^{Minc}}{\sigma_{F_i}} \quad (6.4)$$

Le tableau 6.3 reprend les résultats du calcul. En premier lieu, la moyenne, l'écart-type et le coefficient de dissymétrie sont repris pour chaque effort. En second lieu, les facteurs de pointe positifs, négatifs ainsi que la différence entre g^+ et la valeur absolue de g^- . Finalement les extrema centrés sont inscrits.

	M.P.E				P.T.N	Co		P			F.O	
	I	D	S	B	S	O	S	O.P	O.B	E	P	E
μ_{CDC}	2924	391	-1107	68	-316	49	2	21	12	-326	-40	165
σ_F	399	47	190	13	58	23	35	10	4	73	8	55
γ_3	0,35	0,35	-0,42	-0,33	-0,27	-0,05	0,21	0,08	0,13	0,05	-0,44	0,51
g^+	3,54	3,6	2,71	3,15	3,27	3,34	3,57	3,71	3,54	4,02	3,04	4,02
g^-	-2,86	-2,93	-3,54	-4,38	-3,7	-3,46	-3,24	-3,53	-3,46	-3,29	-3,99	-2,99
$g^+ - g^- $	0,68	0,67	-0,83	-1,23	-0,4	-0,12	0,33	0,18	0,08	0,73	-0,95	1,03
Minc	-1141	-139	-674	-56	-214	-78	-114	-35	-15	-34	-239	-164
Maxc	1414	171	515	40	190	75	125	36	15	26	292	221

TAB. 6.3 – μ_{CDC} = moyenne des efforts calculés via CDC, σ_F = écarts-types des efforts, g^+ = facteurs de pointe positifs, g^- = facteurs de pointe négatifs, Minc = minima centrés des efforts pour la contribution quasi-statique, Maxc = maxima centrés des efforts pour la contribution quasi-statique. Unités de σ_F , Maxc, Minc : kN et kN.m.

Les facteurs de pointe positifs et négatifs ne sont pas égaux, cela s'explique par la dissymétrie des processus aléatoires que nous étudions.

La figure 6.18 permet d'observer la corrélation entre les variables : $g^+ - |g^-|$, g^+ , g^- et le coefficient de dissymétrie γ_3 .

Sur les figures est inscrit le coefficient de corrélation entre les deux variables. Premièrement, la corrélation entre facteur de pointe et coefficient de dissymétrie est importante ($\rho > 0,8$). Deuxièmement, cette corrélation est positive : à un coefficient de dissymétrie positif correspond un facteur de pointe positif plus grand qu'un facteur de pointe négatif.

Troisièmement, la corrélation entre $g^+ - |g^-|$ et le coefficient de dissymétrie ($\rho=0,93$) est plus importante ($\sim +0.1$) que la corrélation des facteurs de pointe positifs ou négatifs avec le coefficient de dissymétrie.

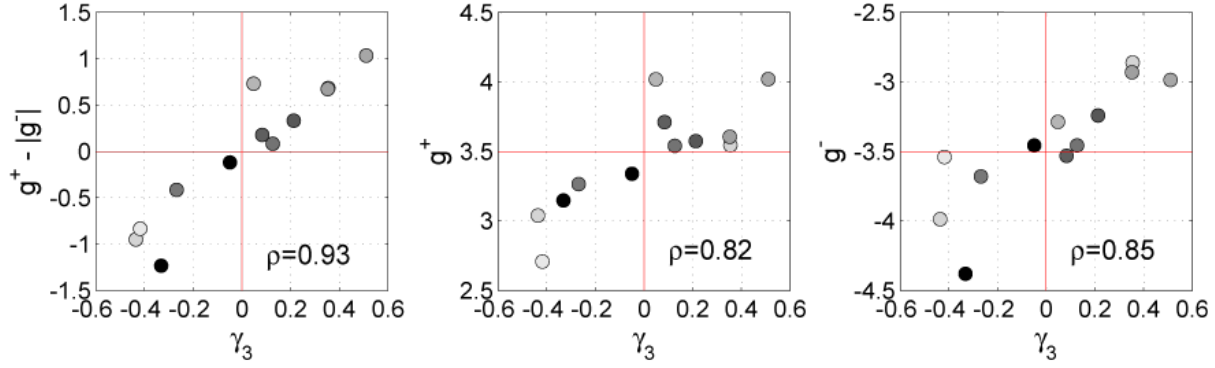


FIG. 6.4 – Recherche de corrélation entre les variables : $g^+ - |g^-|$, g^+ , g^- et le coefficient de dissymétrie γ_3 . Le niveau de gris s'étend sur la gamme [89 ; 205] (gris clair à gris foncé) et correspond au nombre de passages par 0 pendant la durée d'observation. ρ =coefficient de corrélation.

La figure 6.5 présente les densités de probabilité des douze efforts (la contribution moyenne est ajoutée) où la densité de probabilité, en considérant le processus gaussien est reprise en rouge. Le coefficient de dissymétrie γ_3 apparaît sur la figure.

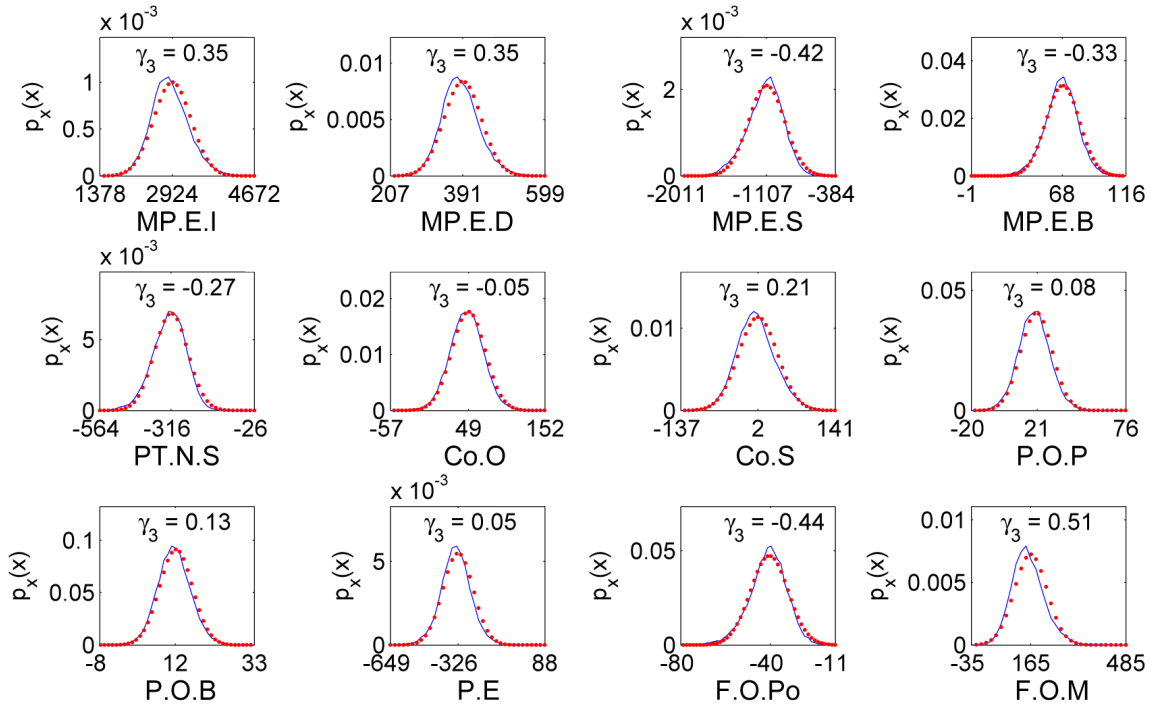


FIG. 6.5 – Densité de probabilité des douze efforts (contribution moyenne et quasi-statique), unités : kN et kN.m. En rouge : la densité de probabilité en supposant le processus gaussien. γ_3 =coefficient de dissymétrie.

6.4 Calcul en base modale

6.4.1 Amplitudes modales

Via les méthodes NK et TF, un des résultats des calculs représente les amplitudes modales au cours du temps. Il est intéressant d'en calculer les densités spectrales et de les comparer entre elles. Cette comparaison est reportée à la figure 6.6.

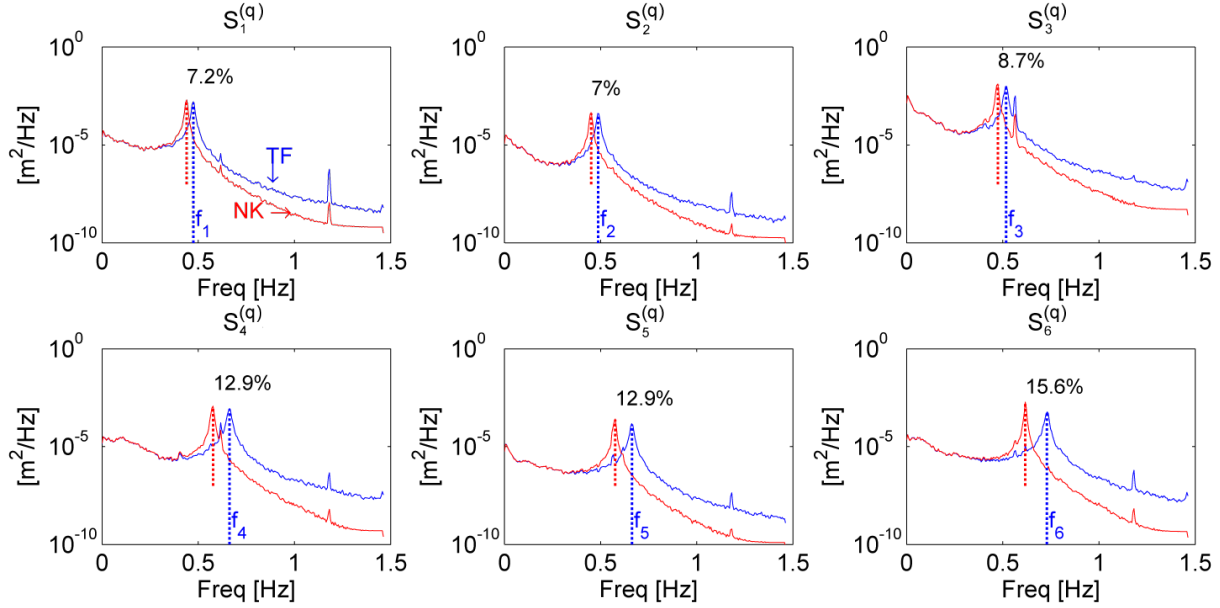


FIG. 6.6 – Densités spectrales des amplitudes modales calculées sur base de la réponse temporelle obtenue via NK (en rouge) et TF (en bleu). La droite verticale en pointillés bleus a pour abscisse la fréquence naturelle du mode. La droite verticale en pointillés rouges a pour abscisse la fréquence correspondant au pic calculé via NK.

Un décalage est visible entre la courbe TF et la courbe NK. Le pic de la courbe TF se produit bien à la fréquence naturelle du mode. Le pic de la courbe obtenue via NK se produit avant la fréquence naturelle du mode. **La méthode NK engendre donc une élongation de la période** (et donc une diminution de la fréquence). Ce pourcentage d'élongation de la période est inscrit sur les figures pour chaque mode et augmente au fur et à mesure que l'on considère un mode à pulsation plus élevée. La cause de ce décalage est le pas de temps utilisé égal à 0,342 seconde. En conséquence, le nombre de points pour représenter la période du premier mode propre est égal à six tandis que pour le mode 21 ce nombre de points par période tombe à 2. Sachant qu'il est usuellement conseillé, voir [19], de travailler avec 10 points pour représenter une période, ce critère n'est aucunement vérifié.

La figure 6.7 présente le pourcentage d'élongation de la période pour une réponse à un lâcher libre.

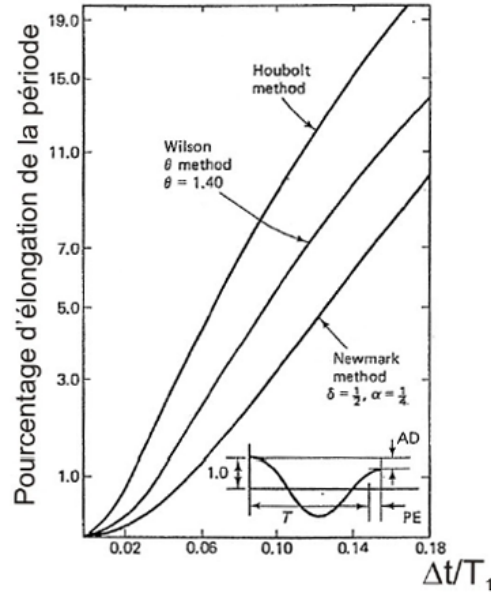


FIG. 6.7 – Pourcentage d'élongation de période - Réponse libre. Source : [19].

Pour le premier mode, $\Delta t/T_1$ vaut 0,16 ce qui correspond, via le graphique de la figure 6.7, à un pourcentage d'élongation de la période un peu supérieur à 7%. Bien que les conditions ne soient pas identiques, la réponse est, dans notre cas, forcée, la valeur obtenue (7,2%) se trouve être fort proche de la valeur calculée pour le mode 1.

Remarque. Outre le problème d'élongation de la période lié à la méthode NK, la valeur du pas de temps amène une autre réflexion. Si l'on possède uniquement entre deux et six points pour représenter une période, il est certain que cela n'est pas suffisant. Un nombre de points suffisant est essentiel afin de ne pas venir écrêter les pics par lesquels passe la réponse résonante.

Critère. Avant d'utiliser la méthode Newmark, il devrait être vérifié la condition suivante ([19]) :

$$\frac{\Delta T}{T_E} \leq 0,1 \quad (6.5)$$

où :

ΔT = pas de temps imposé ;

T_E = période propre du dernier mode conservé.

Au lieu de garder tous les modes ayant des fréquences inférieures à la fréquence de Nyquist, la condition 6.5 peut être utilisée pour connaître la période minimale au dessus de laquelle doivent se trouver les périodes des modes propres conservés.

La figure 6.8 compare les densités spectrales calculées suivant TF et en utilisant l'approximation en bruit blanc (BB).

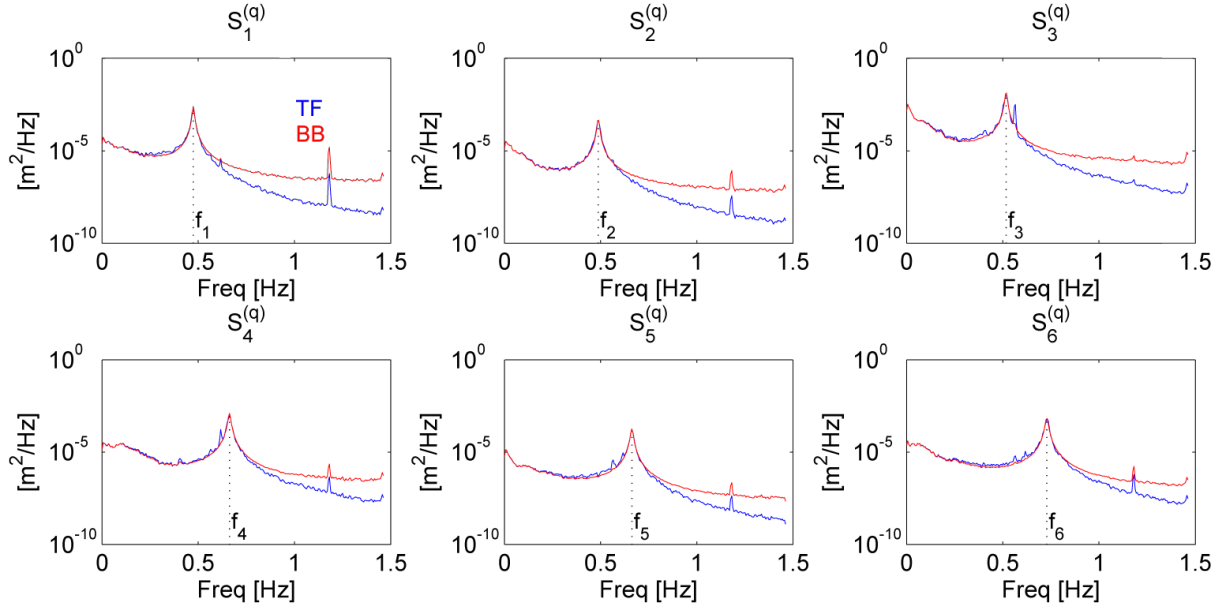


FIG. 6.8 – Comparaison des densités spectrales des amplitudes modales calculées sur base de la réponse temporelle fournie par TF (en bleu) et calculées via la démarche stochastique en utilisant l'approximation en bruit blanc (en rouge).

Les courbes se superposent avant le passage par la fréquence naturelle. Au delà les deux courbes s'éloignent et ceci est dû à l'utilisation de l'approximation en bruit blanc. L'utilisation de l'approximation en bruit blanc engendre que les pics parasites à proximité de la fréquence naturelle du mode ne sont pas repris (mode 3, 4, 5 et 6). Cette situation n'existe plus pour les pics parasites ayant des fréquences éloignées de la fréquence propre du mode puisque la contribution quasi-statique (homothétique à la densité spectrale de la force généralisée contenant les pics parasites) redevient prépondérante. Le pic associé à la fréquence parasite de 1,179 Hz est donc également présent dans la démarche stochastique.

Coefficients de corrélation des amplitudes modales. La figure 6.9(a) reprend les coefficients de corrélation d'ordre 0 des forces généralisées. Pour les modes ayant des formes similaires³, les coefficients $\rho_{mn}^{0,(p^*)}$ sont importants. C'est le cas pour les modes 5 et 7, 8 et 16, 9 et 11 qui ont des formes proches. A l'inverse le mode 1 ne présente pas de déformée pour la toiture mobile : les modes 8, 10, 11, 12 et 18 sont principalement des modes associés aux toitures mobiles et il en découle que les coefficients de corrélation entre ces modes et le premier mode sont très faibles voire nuls. Ainsi, si l'on désire approcher la contribution quasi-statique via une démarche stochastique en base modale il est impératif d'utiliser la méthode CQC qui prend en compte la corrélation des amplitudes modales.

La figure 6.9(c) présente les coefficients de corrélation dynamique. Ceux-ci sont influencés par la proximité des fréquences naturelles (ϕ) et par la cohérence des forces généralisées à la fréquence naturelle (Γ_{mn}). Les modes 4 et 5 ont des fréquences naturelles très proches (0,662 Hz et 0,663 Hz) de sorte que le coefficient de corrélation dynamique est important.

La figure 6.9(d) présente les coefficients de corrélation d'ordre 0 des amplitudes modales. Pour rappel, ceux-ci proviennent d'une pondération de la contribution quasi-statique et de la contribution résonante (cfr 2.3.2). La figure 6.9(c) étant fort proche de la figure 6.9(d) il apparaît que les modes répondent de façon résonante.

La figure 6.9(b) reprend les coefficients de corrélation d'ordre 2 des forces généralisées. Par rapport à la figure 6.9(a) les coefficients de corrélation d'ordre 2 sont plus faibles. Les vitesses des forces généralisées sont moins corrélées que les forces généralisées elles-mêmes.

La figure 6.9(e) par rapport à la figure 6.9(d) montre que les vitesses des amplitudes modales sont moins corrélées entre elles que les amplitudes modales elles-mêmes. De plus, le poids de la contribution quasi-statique est moins important vu qu'en dehors de la diagonale la corrélation est quasi nulle.

3. Les coefficients de corrélation des forces généralisées sont égaux à 0 lorsque les formes des modes se trouvent dans des plans orthogonaux.

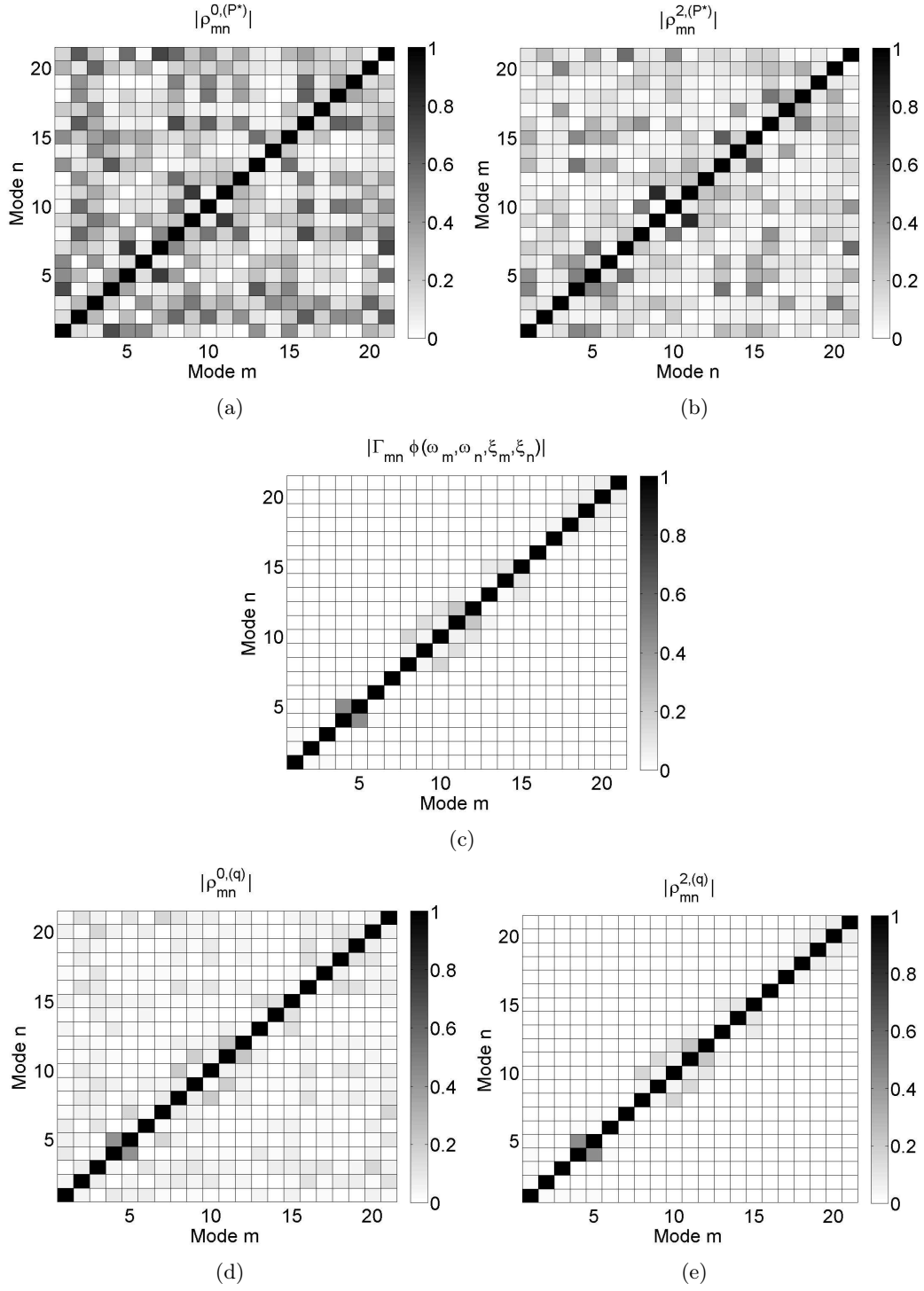


FIG. 6.9 – (a) Coefficients de corrélation d'ordre 0 des forces généralisées, (b) coefficients de corrélation d'ordre 2 des forces généralisées, (c) coefficients de corrélation dynamique, (d) coefficients de corrélation d'ordre 0 des amplitudes modales, (e) coefficients de corrélation d'ordre 2 des amplitudes modales obtenus via BB.

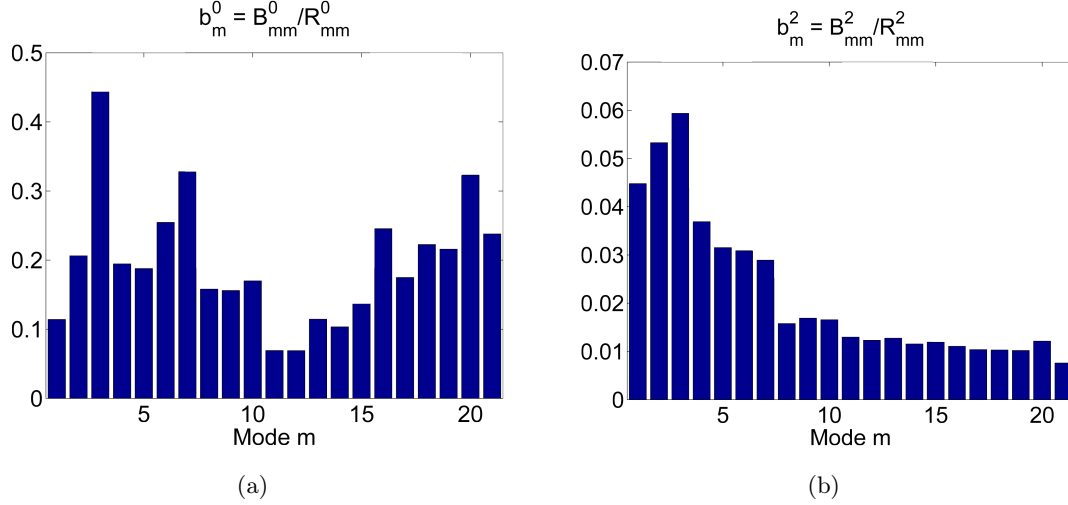


FIG. 6.10 – (a) Rapport d'ordre 0 entre la contribution quasi-statique et la contribution résonante, (b) rapport d'ordre 2 entre la contribution quasi-statique et la contribution résonante.

Sur base de la figure 6.10(a), le rapport d'ordre 0 entre la contribution quasi-statique et la contribution résonante est toujours inférieur à un. Les modes répondent donc plus de manière résonante que de manière quasi-statique. Le mode 3, vertical symétrique, a le rapport le plus élevée suivi des modes 7 et 20. Les modes 11 et 12 (modes des toitures mobiles) présentent des rapports inférieurs à 0,1 et répondent donc principalement de manière résonante.

Sur base de la figure 6.10(b), le rapport d'ordre 2 entre la contribution quasi-statique et la contribution résonante est inférieur à 0,06 et prend des valeurs inférieures à 0,012 à partir du onzième mode. Il en ressort que la contribution résonante des vitesse modales est largement prépondérante par rapport à la contribution quasi-statique.

Justification de la troncature de la base des modes propres. Afin de justifier la troncature, la figure 6.11 présente les variances de la contribution dynamique des amplitudes modales pour chaque mode.

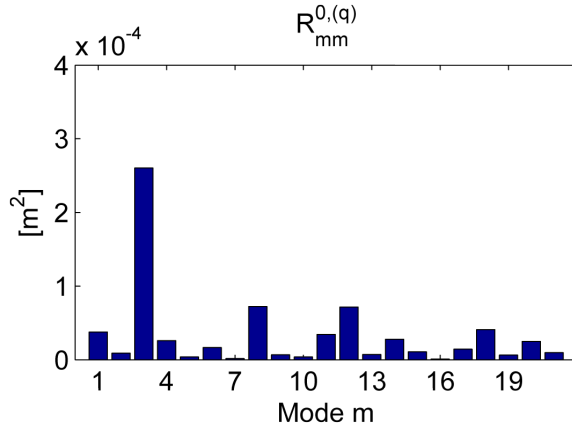


FIG. 6.11 – Variances de la contribution dynamique des amplitudes modales pour chaque mode.

M	$R^{0,(q)}$	M	$R^{0,(q)}$	M	$R^{0,(q)}$
1	3,79E-05	8	7,22E-05	15	1,09E-05
2	8,84E-06	9	6,64E-06	16	8,50E-07
3	2,60E-04	10	3,98E-06	17	1,43E-05
4	2,59E-05	11	3,43E-05	18	4,09E-05
5	3,78E-06	12	7,16E-05	19	6,21E-06
6	1,64E-05	13	7,17E-06	20	2,50E-05
7	1,63E-06	14	2,79E-05	21	9,49E-06

TAB. 6.4 – Valeurs associées à la figure 6.11.

Les valeurs de variance au sein de chaque mode rendent difficilement justifiable la troncature. Le mode 3, vertical global, a la variance la plus élevée. Les modes 8, 11, 12 et 17, présentant principalement une déformée au niveau de la toiture mobile, ont les variances les plus élevées après la variance du mode 3. Seulement 8 modes ont une variance supérieure à celle du vingtième mode. Il est donc difficilement sûr que les modes, au-delà du mode 21, auront des variances plus faibles que, par exemple, la moyenne des variances des modes 15 à 21. Cependant, un effort ou un déplacement ne répond pas de façon égale dans chaque mode, de sorte que la vérification sera réalisée à nouveau lors de l'étude des efforts.

6.4.2 Résultats pour les douze efforts

Les densités spectrales des efforts permettent d'apprécier les contributions des différents modes à l'effort total. Les points rouges correspondent à la valeur de la densité spectrale pour les fréquences propres des 21 modes. Toutes les densités spectrales présentées sont calculées via CQC-BB.

La figure 6.12 présente les densités spectrales des efforts associés aux éléments de la méga-poutre côté Est.

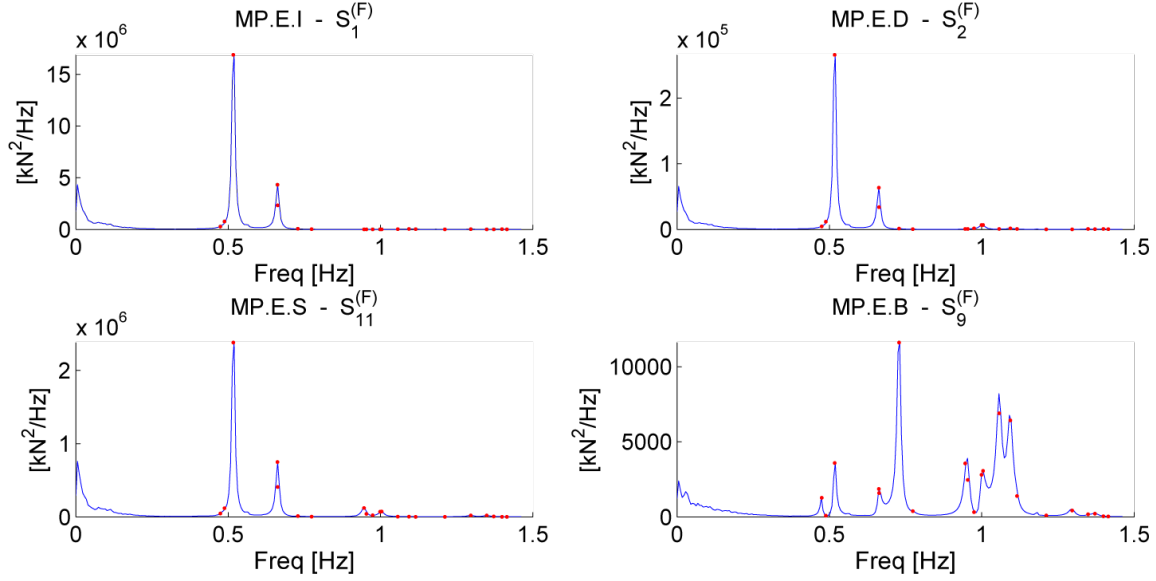


FIG. 6.12 – Densités spectrales des efforts - Éléments de la méga-poutre côté Est.

Les éléments MP.E.I, MP.E.D et MP.E.S sont principalement sollicités dans les modes 3, 4 et 5. Le mode 3 (vertical global) est le mode sollicitant le plus ces efforts.

L'élément MP.E.B n'est pratiquement pas sollicité dans le mode 3. Les modes 6, 13 et 14 présentent des déformées importantes dans cette partie de la toiture et l'élément est donc sollicité dans ces modes. Sa densité spectrale se rapproche sensiblement de la densité spectrale de l'effort P.E qui se situe à proximité. Le mode principal sollicitant P.E et MP.E.B est le même à savoir le mode 6.

La figure 6.13 présente les densités spectrales des efforts liés aux pannes étudiées et de l'effort dans un élément de la membrure supérieure de la poutre transversale.

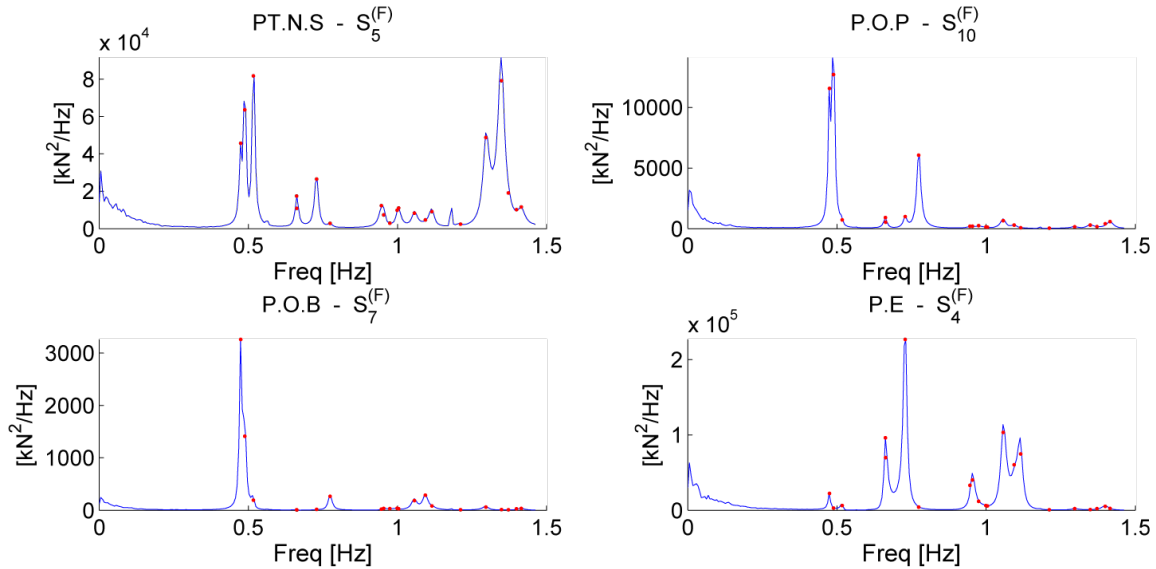


FIG. 6.13 – Densités spectrales des efforts - Élément de la membrure supérieure de la poutre transversale et pannes étudiées.

L'élément PT.N.S, est sollicité principalement dans les modes 1, 2, 3, 17 et 18. Le mode 2 présente une déformée importante de la partie de toiture Nord-Est, Nord-Ouest, Sud-Est et Nord-Ouest. Les fléaux supportant ces toitures viennent s'appuyer sur la méga poutre et lui donne une déformée importante à cet endroit. Ces déplacements se répercutent sur la poutre transversale et viennent donc également la solliciter. Les modes 17 et 18 sollicitent également cet élément ce qui s'explique facilement puisque ces modes correspondent au balancement de la poutre transversale.

La densité spectrale de l'effort P.O.P est à comparer avec la densité spectrale de l'effort P.O.B. L'importance des modes 1 et 2 est inversée.

L'effort P.O.P est, quant à lui, principalement sollicité par le mode fondamental (c'est-à-dire le premier mode) de la structure. Ce mode fondamental se déforme principalement sur la partie haute des toitures Est et Ouest.

La figure 6.14 présente les densités spectrales des efforts liés à des éléments de contreventements et à des éléments du fléau n°64.

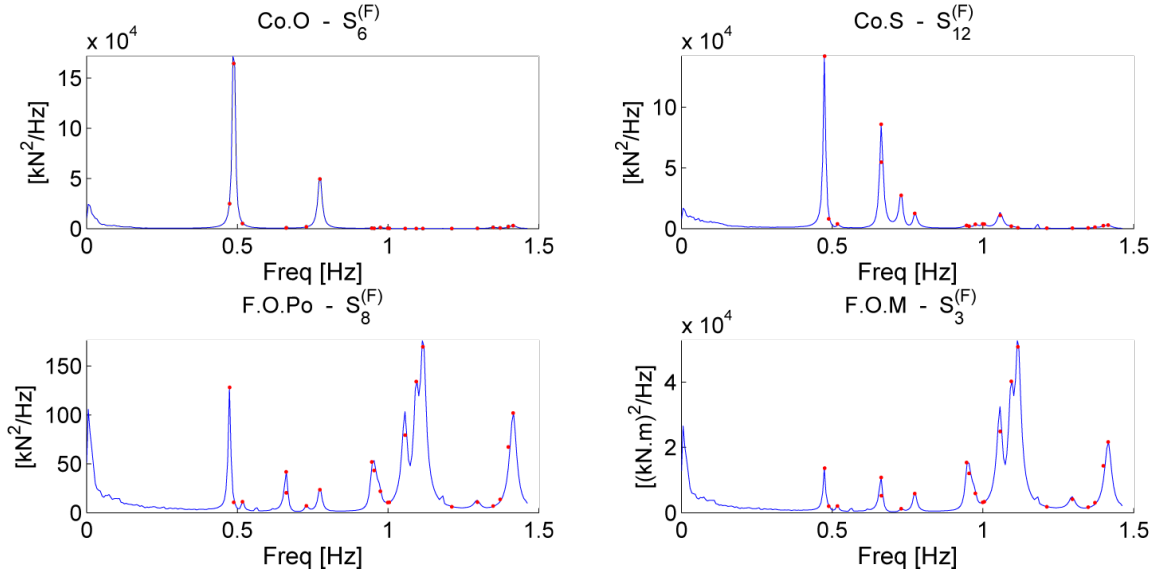


FIG. 6.14 – Densités spectrales des efforts -Éléments de contreventements et éléments du fléau n°64.

L'élément Co.O est sollicité principalement dans les modes 2 et 7. Ces modes se déforment de manière dissymétrique selon la largeur du stade. C'est ce type de déformée qui vient solliciter l'élément Co.O. L'élément Co.S est sollicité par les modes 1, 4 et 5.

Le mode fondamental et les modes 12,13 et 14 sollicitent principalement l'effort F.O.Po. Les modes 4, 5, 7, 8 et 21 sollicitent également l'élément dans une moindre mesure.

La densité spectrale de l'effort F.O.M est facile à analyser étant donné qu'elle est pratiquement identique à celle de l'effort F.O.Po.

La figure 6.15 reprend les coefficients de corrélation des douze efforts. Les efforts 1,2 et 11 appartenant à des éléments de la méga-poutre sont fortement corrélés ce qui est trivial. De même les efforts 3 et 8 appartenant à des éléments du même fléau sont également fortement corrélés. Les efforts 10 et 7 correspondant à deux pannes se trouvant à proximité sont également corrélés.

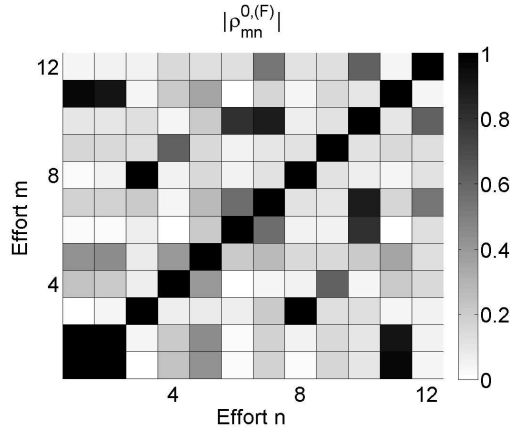


FIG. 6.15 – Coefficients de corrélation des douze efforts.

Justification de la troncature de la base des modes propres sur base des densités spectrales des efforts. Pour les efforts concernant la méga-poutre, les pannes ainsi que les contreventements, la troncature est justifiée et le nombre de modes propres conservés semble être suffisant. L'effort PT.N.S répond de façon prépondérante au sein du mode 17 et ses réponses au sein des modes 18, 19 et 21 ne sont pas négligeables. Pour cet effort, garder un nombre de modes propres plus important pourrait avoir une influence. Pour les éléments du fléau n° 64, ceux-ci ont une réponse importante dans le mode 21, à savoir le dernier mode de la troncature qui est alors difficilement justifiable. Ceci est néanmoins à nuancer lorsqu'on observe que la densité spectrale de la force généralisée du mode 21 (voir figure 5.4) arrive à un palier au-delà d'un hertz.

6.5 Comparaison des contributions quasi-statiques et dynamiques aux moments spectraux des efforts d'ordre 0 et d'ordre 2

La figure 6.16(a) compare les valeurs des moments spectraux d'ordre 0 pour la contribution quasi-statique calculée via les méthodes CDC, TF, SRSS-BB et CQC-BB. Pour rappel, la méthode de référence pour le calcul de la contribution quasi-statique est la CDC. La méthode NK n'est pas reprise car elle donne exactement les mêmes résultats que la méthode TF. Vu la corrélation importante des forces généralisées (voir figure 6.9(a)) ainsi que de la vitesse des forces généralisées (voir figure 6.9(b)) il ressort que la méthode SRSS-BB s'écarte des valeurs obtenues via la méthode TF et la méthode CQC-BB.

Les méthodes TF et CQC-BB se rapprochent assez bien de la méthode CDC pour les efforts de la méga-poutre même si des différences sont présentes.

La figure 6.16(b) compare les valeurs des moments spectraux d'ordre 0 pour la contribution dynamique entre NK, TF, SRSS-BB et CQC-BB.

La méthode NK donne des valeurs inférieures (sauf pour l'effort Co.S) aux autres méthodes : cela est dû à l'augmentation de période discutée en 6.6. Ceci est compréhensible au vu de la figure 6.6 où la courbe est inférieure pour la méthode NK par rapport à la méthode TF. Le raisonnement reste valide même si la méthode NK va chercher une valeur de la densité spectrale des forces généralisées plus grande. En effet, la méthode NK voit une fréquence naturelle plus faible que la fréquence naturelle réelle (décalage du pic vers la gauche, cfr. 6.4.1).

Il en résulte donc que la méthode NK, utilisée dans les conditions de ce travail n'est pas recommandable. Entre SRSS-BB et CQC-BB les différences pour la contribution dynamique d'ordre 0 et d'ordre 2 sont faibles, de sorte qu'il serait acceptable de n'effectuer que la démarche SRSS-BB pour la contribution dynamique. La méthode CQC-BB donne des valeurs plus faible que la méthode TF (mis à part l'effort Co.S et l'effort P.O.B). L'origine de cette différence est que certains pics parasites ne sont pas repris avec la méthode CQC-BB. Ceci a été discuté en 6.4.1.

Le tableau 6.5 reprend la contribution quasi-statique des efforts d'ordre 0 et d'ordre 2 pour les méthodes CDC, TF, SRSS-BB et CQC-BB et 6.6 reprend la contribution quasi-statique des efforts d'ordre 0 et d'ordre 2 pour les méthodes NK, TF, SRSS-BB et CQC-BB.

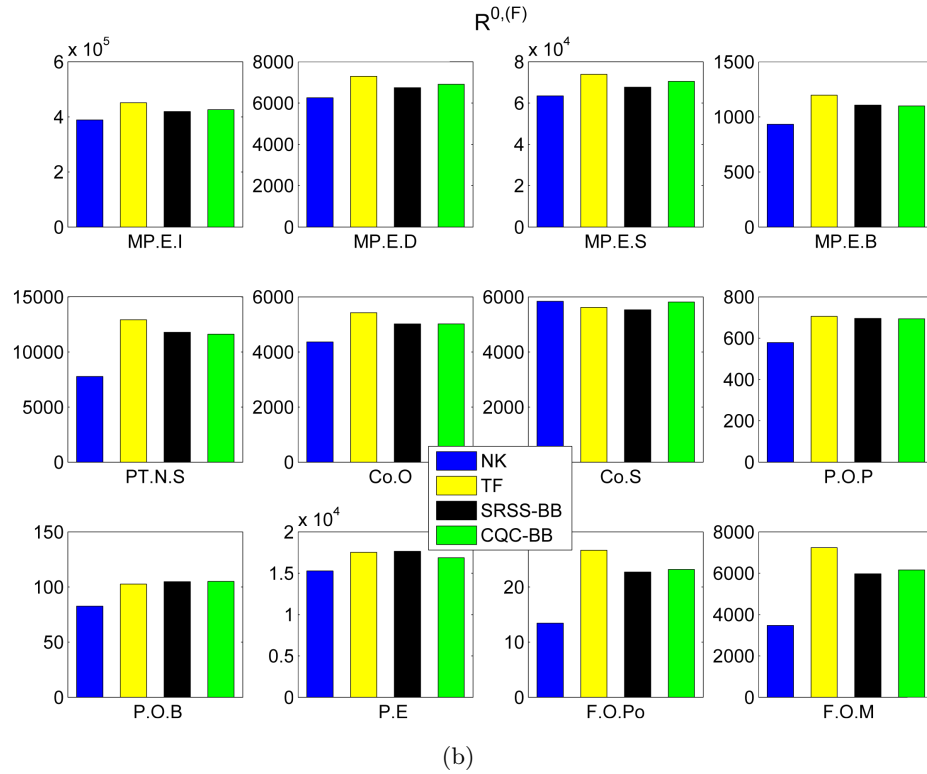
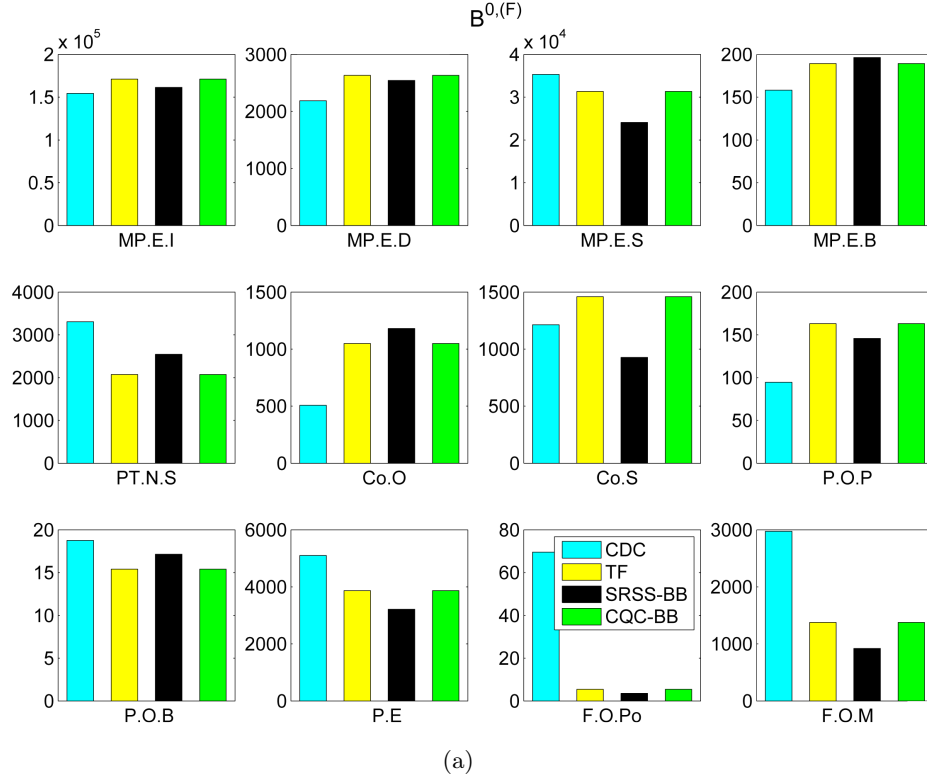


FIG. 6.16 – (a) Comparaison des contributions quasi-statiques aux moments spectraux des efforts d'ordre 0 entre les méthodes CDC, TF, SRSS-BB et CQC-BB (b) Comparaison des contributions dynamiques aux moments spectraux des efforts d'ordre 0 entre les méthodes NK, TF, SRSS-BB et CQC-BB. Unités : kN^2 , $(\text{kN.m})^2$.

		CDC		TF		SRSS-BB		CQC-BB	
E	Code	$B^0(F)$	$B^2(F)$	$B^0(F)$	$B^2(F)$	$B^0(F)$	$B^2(F)$	$B^0(F)$	$B^2(F)$
1	MP.E.I	1,54E+05	2,15E+05	1,71E+05	2,36E+05	1,61E+05	2,76E+05	1,71E+05	2,36E+05
2	MP.E.D	2,19E+03	4,11E+03	2,63E+03	3,99E+03	2,54E+03	4,44E+03	2,63E+03	3,99E+03
11	MP.E.S	3,53E+04	3,96E+04	3,13E+04	4,14E+04	2,41E+04	4,46E+04	3,13E+04	4,14E+04
9	MP.E.B	1,58E+02	5,51E+02	1,89E+02	4,86E+02	1,96E+02	8,42E+02	1,89E+02	4,86E+02
5	PT.N	3,31E+03	1,53E+04	2,07E+03	1,07E+04	2,54E+03	9,51E+03	2,07E+03	1,07E+04
6	Co.O	5,07E+02	1,62E+03	1,05E+03	2,52E+03	1,18E+03	2,94E+03	1,05E+03	2,52E+03
12	Co.S	1,21E+03	5,20E+03	1,46E+03	5,77E+03	9,28E+02	3,49E+03	1,46E+03	5,77E+03
10	P.O.P	9,50E+01	4,12E+02	1,63E+02	4,46E+02	1,46E+02	4,33E+02	1,63E+02	4,46E+02
7	P.O.B	1,90E+01	8,60E+01	1,50E+01	5,20E+01	1,70E+01	6,90E+01	1,50E+01	5,20E+01
4	P.E	5,10E+03	8,64E+03	3,87E+03	7,00E+03	3,21E+03	1,30E+04	3,87E+03	7,00E+03
8	F.O.Po	7,00E+01	4,15E+02	5,00E+00	2,50E+01	4,00E+00	1,70E+01	5,00E+00	2,50E+01
3	F.O.M	2,97E+03	1,54E+04	1,38E+03	6,56E+03	9,21E+02	4,52E+03	1,38E+03	6,56E+03

TAB. 6.5 – Contributions quasi-statiques aux moments spectraux des efforts d'ordre 0 (kN^2 et $(\text{kN.m})^2$) et d'ordre 2 ($(\text{kN/s})^2$, $(\text{kN.m/s})^2$).

		NK		TF		SRSS-BB		CQC-BB	
E	Code	$R^0(F)$	$R^2(F)$	$R^0(F)$	$R^2(F)$	$R^0(F)$	$R^2(F)$	$R^0(F)$	$R^2(F)$
1	MP.E.I	3,88E+05	4,00E+06	4,51E+05	5,95E+06	4,19E+05	5,22E+06	4,26E+05	5,34E+06
2	MP.E.D	6,25E+03	6,74E+04	7,30E+03	1,04E+05	6,75E+03	9,12E+04	6,91E+03	9,53E+04
11	MP.E.S	6,35E+04	7,32E+05	7,39E+04	1,21E+06	6,77E+04	1,05E+06	7,04E+04	1,11E+06
9	MP.E.B	9,32E+02	1,73E+04	1,20E+03	4,35E+04	1,11E+03	3,85E+04	1,10E+03	3,80E+04
5	PT.N	7,77E+03	1,54E+05	1,29E+04	6,09E+05	1,18E+04	5,44E+05	1,16E+04	5,29E+05
6	Co.O	4,37E+03	4,81E+04	5,42E+03	8,95E+04	5,02E+03	7,93E+04	5,02E+03	7,93E+04
12	Co.S	5,84E+03	7,84E+04	5,62E+03	1,21E+05	5,53E+03	1,12E+05	5,81E+03	1,16E+05
10	P.O.P	5,79E+02	7,21E+03	7,06E+02	1,48E+04	6,96E+02	1,35E+04	6,94E+02	1,35E+04
7	P.O.B	8,30E+01	9,74E+02	1,03E+02	2,25E+03	1,05E+02	2,02E+03	1,05E+02	2,06E+03
4	P.E	1,53E+04	2,72E+05	1,75E+04	6,03E+05	1,76E+04	5,94E+05	1,69E+04	5,58E+05
8	F.O.Po	1,30E+01	3,16E+02	2,70E+01	1,31E+03	2,30E+01	1,06E+03	2,30E+01	1,10E+03
3	F.O.M	3,47E+03	8,61E+04	7,23E+03	3,61E+05	5,97E+03	2,86E+05	6,16E+03	2,98E+05

TAB. 6.6 – Contributions dynamiques aux moments spectraux des efforts d'ordre 0 (kN^2 et $(\text{kN.m})^2$) et d'ordre 2 ($(\text{kN/s})^2$ et $(\text{kN.m/s})^2$).

6.6 Évaluation des extrema centrés

Le calcul des extrema centrés est entrepris selon les deux méthodes exposées en 4.7.2. La méthode basée sur la réponse temporelle est uniquement effectuée pour TF sachant que les résultats fournis par NK sont erronés. La statistique des valeurs extrêmes est appliquée pour les méthodes SRSS-BB, CQC-BB mais également pour TF. Appliquer cette méthode à TF permettra de comparer les deux approches sur une même réponse.

Le tableau 6.7 reprend les facteurs de pointe ainsi que les écarts-types des efforts calculés. Ces écarts-types sont obtenus en combinant la variance de la contribution dynamique calculée dans chaque méthode ($R^{0,(F)}$, tableau 6.6) avec la variance de la contribution quasi-statique calculée au moyen de CDC ($B^{0,(F)}$, troisième colonne du tableau 6.5).

E	Code	SI			CDC							
		TF			TF				SRSS-BB		CQC-BB	
		σ_F	g^+	g^-	σ_F	g^+	g^-	$ g $	σ_F	$ g $	σ_F	$ g $
1	MP.E.I	746	3,69	-3,1	766	3,62	-3,1	3,5	757	3,51	762	3,51
2	MP.E.D	97	3,68	-3,11	96	3,64	-3,11	3,52	95	3,52	95	3,53
11	MP.E.S	334	3,2	-3,79	328	3,06	-3,77	3,52	321	3,52	325	3,53
9	MP.E.B	40	3,51	-3,6	37	3,4	-3,35	3,67	36	3,67	35	3,67
5	PT.N	124	3,28	-3,61	129	3,23	-3,56	3,7	123	3,69	122	3,69
6	Co.O	65	3,3	-3,15	77	3,23	-3,22	3,57	74	3,57	74	3,57
12	Co.S	79	3,6	-3,65	82	3,59	-3,54	3,59	82	3,59	84	3,59
10	P.O.P	26	3,4	-3,48	28	3,47	-3,32	3,6	28	3,59	28	3,59
7	P.O.B	10	3,66	-3,5	11	3,51	-3,34	3,6	11	3,59	11	3,59
4	P.E	143	3,4	-3,64	152	3,52	-3,79	3,65	151	3,65	148	3,65
8	F.O.Po	8	3,18	-3,74	10	3,08	-3,95	3,58	10	3,58	10	3,58
3	F.O.M	107	3,47	-3,34	100	3,66	-3,18	3,69	95	3,68	96	3,68

TAB. 6.7 – Facteurs de pointe et écarts-types (Unités : kN et kN.m) calculés suivant SI.TF, CDC.TF, CDC.SRSS-BB, CDC.CQC-BB.

La figure 24 compare les écarts-types obtenus. Des différences avec les résultats SI.TF se marquent pour certains efforts (MP.E.B, Co.O, P.O.P, F.O.Po et F.O.M). Ceci peut s'expliquer en partie par les différences mises à jour entre les méthodes SI et CDC pour le calcul de la contribution quasi-statique des efforts (cfr. 6.2.1, tableau 6.2, les différences entre les efforts précités obtenues selon les deux méthodes étant les plus importantes). Les valeurs données par les méthodes CDC.TF et CDC.CQC-BB sont forts proches de sorte qu'il peut être à nouveau vérifié que **les fréquences parasites ont une influence négligeable sur la contribution dynamique des efforts**. Comme précédemment dit en 6.5, il apparaît que les différences entre les méthodes CDC.SRSS-BB et CDC.CQC-BB sont très faibles ce qui est la conséquence de la corrélation faible entre modes (mise à jour en 6.4.1).

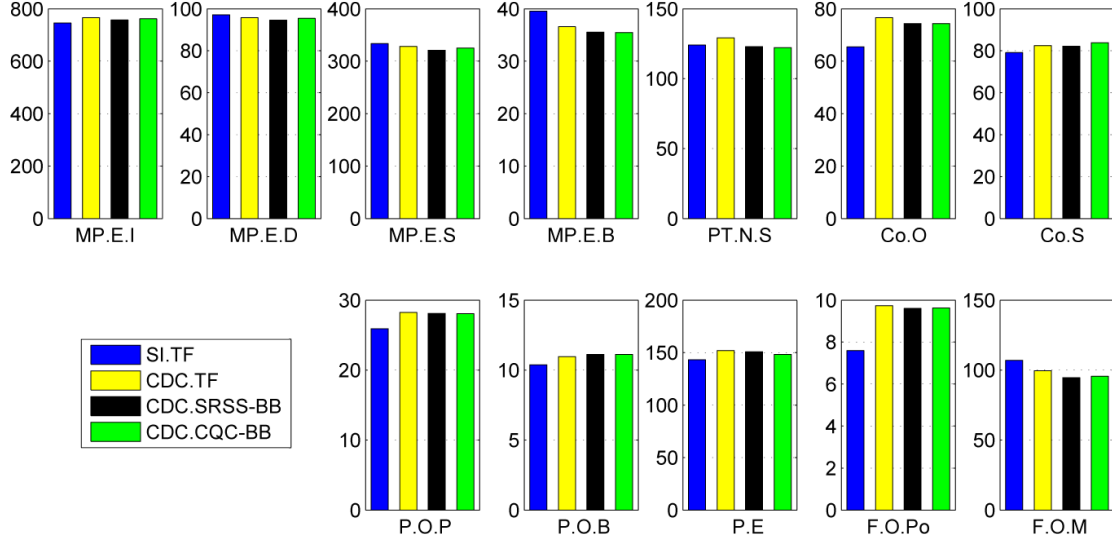


FIG. 6.17 – Comparaison des écarts-types calculés suivant SI-TF, CDC.TF, CDC.SRSS-BB, CDC.CQC-BB. Unités : kN et kN.m.

Les facteurs de pointe calculés via la statistique des valeurs extrêmes sont pratiquement les mêmes dans les trois méthodes CDC.TF, CDC.SRSS-BB et CDC.CQC-BB. Le fait d'avoir des facteurs de pointe positifs et négatifs différents a déjà été discuté en 6.3.1. En ce qui concerne la méthode TF, pour les efforts 3 à 7 et 9, 10, 12 le facteur de pointe calculé via la statistique des valeurs extrêmes est plus important que le maximum, en valeur absolue de g^- et de g^+ .

La figure 6.18 permet d'observer la corrélation entre les variables : $g^+ - |g^-|$, g^+ , g^- et le coefficient de dissymétrie γ_3 .

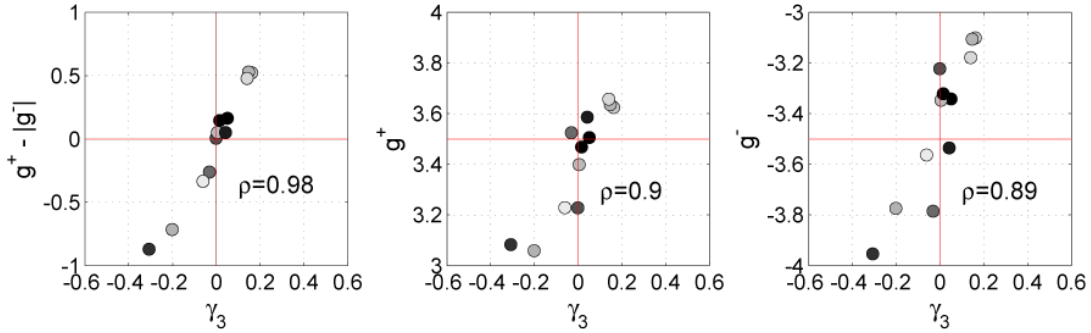


FIG. 6.18 – Recherche de corrélation entre les variables : $g^+ - |g^-|$, g^+ , g^- et le coefficient de dissymétrie γ_3 (calculés via TF). Le niveau de gris s'étend sur la gamme [257 ; 521] (gris clair à gris foncé) et correspond au nombre de passages par 0 pendant la durée d'observation. ρ = coefficient de corrélation.

La corrélation entre facteur de pointe et coefficient de dissymétrie pour la contribution variable des efforts est plus importante que lorsqu'on considère la contribution quasi-statique (cfr. 6.3.1). La corrélation entre $g^+ - |g^-|$ et γ_3 est passée de 0,93 à 0,98. La corrélation entre g et γ_3 a également augmenté. Par rapport à la contribution quasi-statique, la plage de variation des coefficients de dissymétrie a diminué (elle passe de [-0,44 ; 0,55] à [-0,31 ; 0,16]).

Le tableau 6.8 reprend les extrema centrés.

		SI		CDC				
		TF		TF			SRSS	CQC
E	Code	Maxc	Minc	Maxc	Minc	Extc	Extc	Extc
1	MP.E.I	2749	-2308	2778	-2377	2696	2654	2672
2	MP.E.D	358	-302	348	-297	339	333	336
11	MP.E.S	1067	-1265	1003	-1238	1158	1130	1147
9	MP.E.B	139	-142	124	-122	135	130	130
5	PT.N	407	-447	417	-460	477	454	451
6	Co.O	216	-206	247	-247	273	265	265
12	Co.S	284	-289	295	-291	296	295	301
10	P.O.P	88	-90	98	-94	102	101	101
7	P.O.B	38	-36	38	-37	40	40	40
4	P.E	486	-521	535	-575	551	550	540
8	F.O.Po	24	-28	30	-39	35	34	34
3	F.O.M	371	-357	364	-317	368	348	352

TAB. 6.8 – Comparaison des extrema centrés suivant SI.TF, CDC.TF, CDC.SRSS-BB, CDC.CQC-BB. Unités : kN et kN.m.

La figure 6.19 compare les extrema centrés.

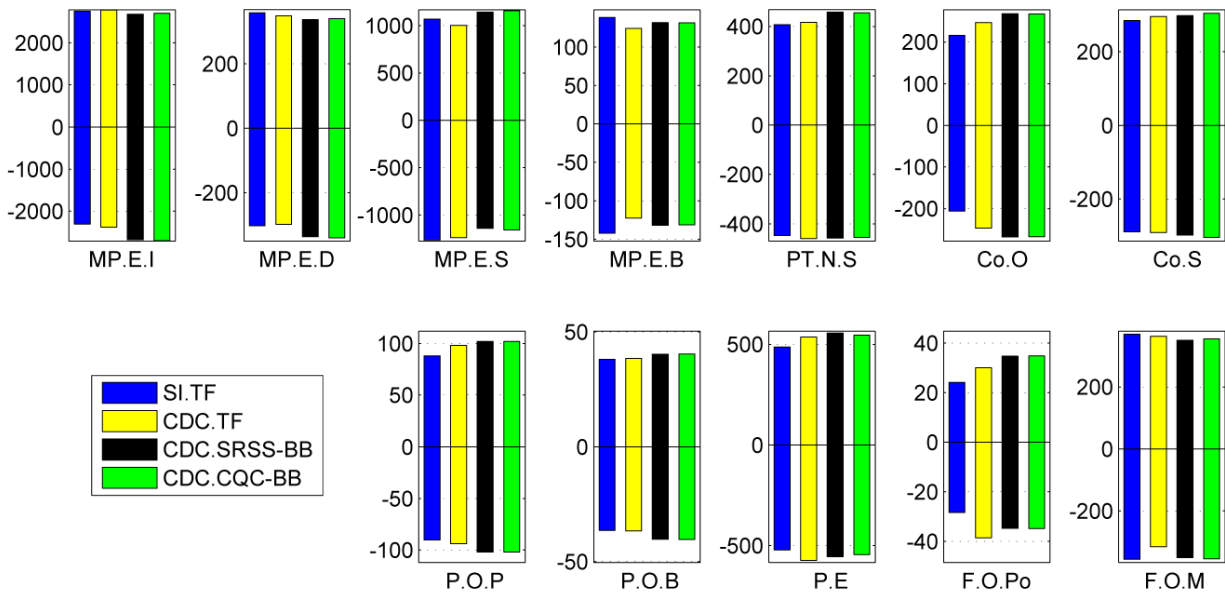


FIG. 6.19 – Comparaison des extrema centrés calculés suivant SI.TF, CDC.TF, CDC.SRSS-BB, CDC.CQC-BB. Unités : kN et kN.m.

La méthode CDC.TF concorde très bien avec les résultats fournis par le bureau d'études Greisch (méthode SI.TF) pour les efforts concernant la méga-poutre (MP.E.I, MP.E.D, MP.E.S) et la poutre transversale (PT.N.S), ceux-ci étant faiblement influencés par les différences entre la méthode SI et CDC. La comparaison entre CQC et TF montre bien l'influence de la dissymétrie principalement pour les efforts MP.E.I, MP.E.D et MP.E.S.

Troisième partie

Conclusions

Dans cette dernière partie, les différentes étapes du module simplifié de calcul au vent turbulent vont être reprises et commentées. Cette manière de procéder permet de revenir sur toutes les étapes-clés d'un calcul au vent turbulent. **Les hypothèses** définissant le domaine d'application du module de calcul sont d'emblée rappelées. Le calcul étant effectué aux états limites de service, l'étude de la réponse de la structure, sous le chargement éolien, est réalisée en menant une analyse linéaire au premier ordre. Les caractéristiques structurelles considérées parfaitement connues, l'aspect probabiliste n'est attribué qu'aux sollicitations extérieures, en l'occurrence, le vent. Dans la démarche stochastique, l'hypothèse de processus aléatoires gaussiens est formulée. Une autre hypothèse, celle d'amortissement proportionnel, permet d'obtenir une matrice de transfert diagonale et ainsi de réaliser un découplage de la réponse dans chacun des modes. Enfin, les effets aéroélastiques n'ont pu être pris en compte.

La première étape du module de calcul est le chargement de la sollicitation. Dans notre cas, cette sollicitation est quantifiée par des mesures de pression en soufflerie. Le traitement statistique des données est alors entrepris et l'observation des moyennes, écarts-types, échelles de temps et coefficients de dissymétrie sur la structure constitue une étape riche d'enseignements. Ensuite, l'observation des densités spectrales permet de se rendre compte de la qualité du signal mesuré et met en évidence des fréquences parasites (fig. 3.32, pg. 62).

La deuxième étape est le calcul, en base nodale, de la contribution moyenne et quasi-statique des efforts. Bien que des fréquences parasites soient présentes, le calcul est réalisé sur base des signaux non filtrés afin d'être sécuritaire. Des différences entre les deux méthodes mises en application apparaissent : elles sont engendrées par la non-concordance entre les facettes couvertes par les prises de pression et les éléments plaques du modèle FinelG.

La troisième étape, la plus importante, représente le calcul en base modale de la contribution dynamique des efforts.

En premier lieu, la troncature de la base des modes propres est réalisée en fonction de la fréquence de Nyquist. Pour l'analyse dynamique, la vérification du nombre de modes propres gardés fait apparaître que la justification de la troncature n'est pas aisée.

En deuxième lieu, le calcul des densités spectrales des forces généralisées, préalablement étudiées, permet de juger de l'impact des fréquences parasites mises à jour sur les signaux de pression.

En troisième lieu, la résolution de l'équation de mouvement en base modale est accomplie.

Dans le cadre de ce travail de fin d'études, deux analyses déterministes sont utilisées : une superposition modale avec résolution des équations découplées par Newmark et par transformée de Fourier ainsi qu'une analyse stochastique.

Afin d'appliquer les méthodes Newmark et transformée de Fourier, une condition (fig. 5.1, pg. 77) permet d'obtenir l'assurance minimum, que les fréquences parasites ne se trouvent pas être trop proches des fréquences propres de la structure (auquel cas une amplification importante de la réponse se produirait).

A ce niveau, la méthode Newmark montre ses limites en engendrant des elongations de période non négligeables de sorte qu'elle ne sert pas au calcul des extrema centrés (fig. 6.6, pg. 93).

La méthode transformée de Fourier donne des résultats forts proches de la méthode stochastique de sorte qu'elles sont équivalentes.

L'avantage de la démarche stochastique est l'apport d'une réponse aux traitements des fréquences. La solution proposée permet de lisser les densités spectrales (fig. 5.2, pg. 80), en travaillant sur base des signaux filtrés, et permet de supprimer l'influence des fréquences parasites sur le calcul de la contribution dynamique des efforts (fig. 6.8, pg. 95).

En conclusion, lorsque des fréquences parasites sont présentes, nous ne recommandons pas une analyse déterministe (que ce soit Newmark ou transformée de Fourier) car elle ne permet pas de les traiter. **Nous recommandons l'analyse stochastique** qui permet de les traiter aisément pour le calcul de la contribution dynamique.

La quatrième étape est la combinaison entre la contribution quasi-statique calculée en base nodale et la contribution dynamique calculée en base modale afin d'obtenir la contribution variable des efforts. A cette étape est vérifiée la convergence des efforts : il apparaît alors que pour certains efforts le nombre de modes propres conservés n'est pas suffisant.

La dernière étape est l'évaluation des extrema centrés, d'une part, sur base de la réponse temporelle et, d'autre part, au moyen de la statistique des valeurs extrêmes. La méthode basée sur la réponse temporelle calcule des facteurs de pointe positifs et négatifs et une corrélation avec le coefficient de dissymétrie est mise en évidence (fig. 6.18, pg. 107). Les facteurs de pointe obtenus à l'aide de la statistique des valeurs extrêmes se trouvent être parfois éloignés des facteurs de pointe calculés en fonction de la réponse temporelle.

En perspective de ce travail de fin d'études :

- **l'hypothèse de processus gaussien est non vérifiée** au vu des valeurs, non nulles, prises par les coefficients de dissymétrie. Ceci s'est traduit en différences entre facteurs de pointe positifs et négatifs. **Une perspective consisterait donc à étendre la démarche stochastique au processus non gaussien ;**
- par ailleurs, pour ce type de structure, **les effets aéroélastiques pourraient être importants**. Hélas, l'utilisation d'une maquette aéroélastique, qui permet de quantifier ces effets, coûte bien plus cher qu'une maquette rigide. C'est pourquoi il ne nous a pas été possible, matériellement, de les prendre en considération ;
- il est à noter que dans ce travail, nous nous sommes uniquement concentrés sur les efforts internes mais **la démarche du calcul des extrema peut être étendue**, sans aucun problème, aux déplacements, contraintes et réactions d'appuis.

Ce travail de fin d'études nous permet également de mettre en lumière **la nécessité d'une collaboration étroite entre le bureau d'études chargé des essais en soufflerie et le bureau d'études chargé du calcul dynamique**. Nous recommandons que ce soit le nombre de modes propres nécessaires à l'analyse qui influence la fréquence d'échantillonnage en soufflerie et non le contraire. De plus, la fréquence d'échantillonnage choisie devrait permettre d'avoir au minimum 8-10 points pour représenter correctement la période du dernier mode propre de la troncature.

Enfin, il est très motivant d'envisager de compléter le modèle de calcul proposé dans ce travail de fin d'études par l'introduction d'autres méthodes. Son application à d'autres structures permettrait également d'augmenter sa polyvalence.

Quatrième partie

Annexe

Vent à 120°

Comparaison des contributions quasi-statiques et dynamiques aux moments spectraux des efforts d'ordre 0 et d'ordre 2

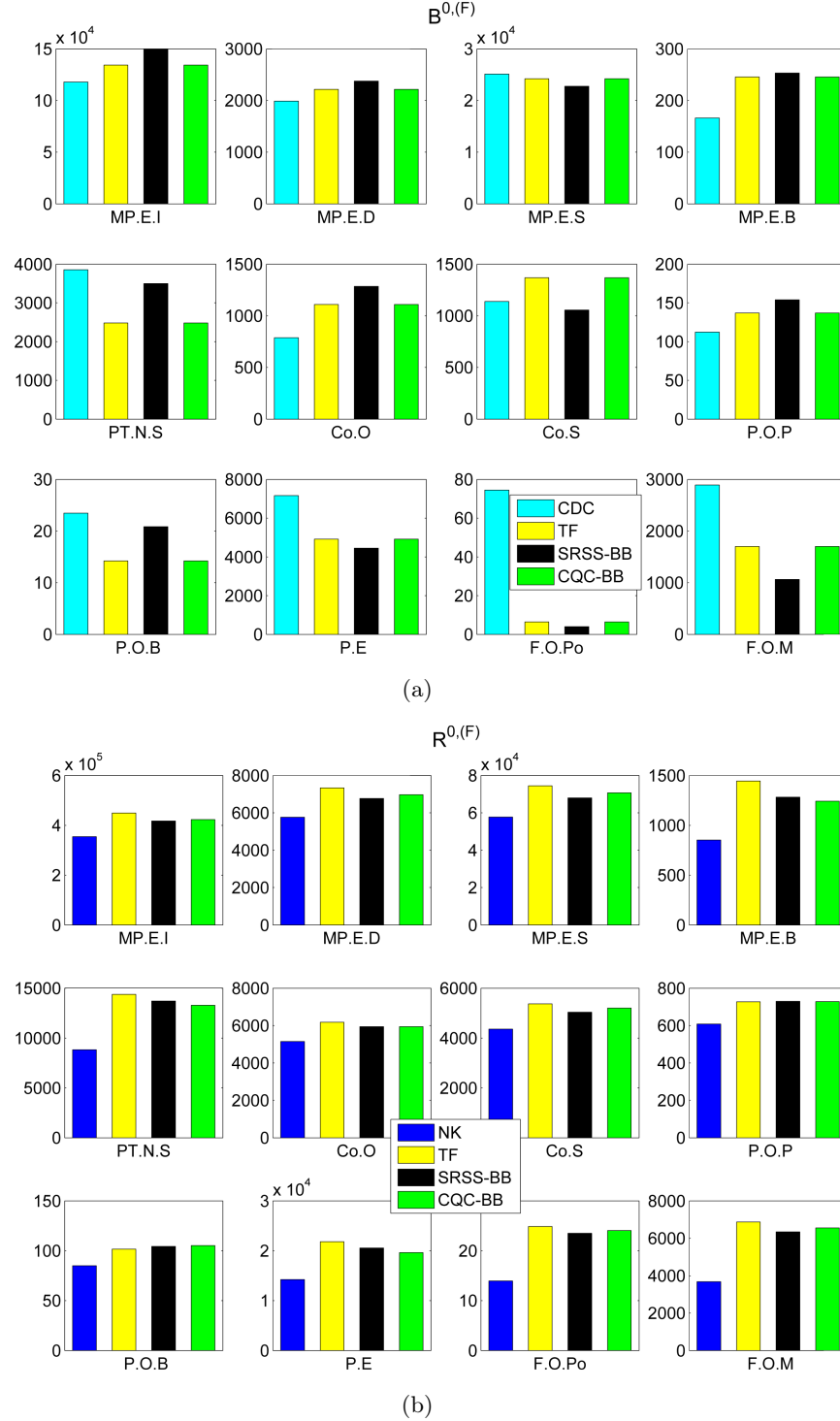


FIG. 20 – (a) Comparaison des contributions quasi-statiques aux moments spectraux des efforts d'ordre 0 entre les méthodes CDC, TF, SRSS-BB et CQC-BB (b) Comparaison des contributions dynamiques aux moments spectraux des efforts d'ordre 0 entre les méthodes NK, TF, SRSS-BB et CQC-BB. Unités : kN^2 , $(\text{kN.m})^2$. Vent à 120°

		CDC		TF		SRSS-BB		CQC-PM	
E	Code	$B^{0,(F)}$	$B^{2,(F)}$	$B^{0,(F)}$	$B^{2,(F)}$	$B^{0,(F)}$	$B^{2,(F)}$	$B^{0,(F)}$	$B^{2,(F)}$
1	MP.E.I	1,18E+05	2,15E+05	1,34E+05	2,39E+05	1,49E+05	2,76E+05	1,34E+05	2,39E+05
2	MP.E.D	1,99E+03	4,84E+03	2,22E+03	4,61E+03	2,38E+03	4,49E+03	2,22E+03	4,61E+03
11	MP.E.S	2,51E+04	4,17E+04	2,42E+04	3,90E+04	2,28E+04	4,54E+04	2,42E+04	3,90E+04
9	MP.E.B	1,66E+02	5,95E+02	2,45E+02	5,15E+02	2,53E+02	8,85E+02	2,45E+02	5,15E+02
5	PT.N	3,85E+03	1,81E+04	2,48E+03	1,31E+04	3,50E+03	1,16E+04	2,48E+03	1,31E+04
6	Co.O	7,88E+02	1,92E+03	1,11E+03	2,45E+03	1,28E+03	2,80E+03	1,11E+03	2,45E+03
12	Co.S	1,14E+03	4,03E+03	1,37E+03	4,21E+03	1,06E+03	3,20E+03	1,37E+03	4,21E+03
10	P.O.P	1,12E+02	4,93E+02	1,37E+02	3,63E+02	1,54E+02	4,03E+02	1,37E+02	3,63E+02
7	P.O.B	2,30E+01	1,21E+02	1,40E+01	5,10E+01	2,10E+01	6,40E+01	1,40E+01	5,10E+01
4	P.E	7,16E+03	9,75E+03	4,91E+03	7,69E+03	4,46E+03	1,38E+04	4,91E+03	7,69E+03
8	F.O.Po	7,40E+01	4,04E+02	6,00E+00	2,10E+01	4,00E+00	1,70E+01	6,00E+00	2,10E+01
3	F.O.M	2,89E+03	1,22E+04	1,70E+03	5,57E+03	1,06E+03	4,58E+03	1,70E+03	5,57E+03

TAB. 9 – Contributions quasi-statiques aux moments spectraux des efforts d'ordre 0 (kN^2 et $(\text{kN.m})^2$) et d'ordre 2 ($(\text{kN/s})^2$, $(\text{kN.m/s})^2$).

		NK		TF		SRSS-BB		CQC-PM	
E	Code	$R^{0,(F)}$	$R^{2,(F)}$	$R^{0,(F)}$	$R^{2,(F)}$	$R^{0,(F)}$	$R^{2,(F)}$	$R^{0,(F)}$	$R^{2,(F)}$
1	MP.E.I	3,54E+05	3,62E+06	4,49E+05	5,87E+06	4,17E+05	5,16E+06	4,23E+05	5,26E+06
2	MP.E.D	5,76E+03	6,28E+04	7,34E+03	1,07E+05	6,77E+03	9,20E+04	6,97E+03	9,83E+04
11	MP.E.S	5,77E+04	6,64E+05	7,44E+04	1,23E+06	6,80E+04	1,08E+06	7,07E+04	1,15E+06
9	MP.E.B	8,52E+02	1,64E+04	1,45E+03	5,14E+04	1,28E+03	4,47E+04	1,24E+03	4,30E+04
5	PT.N	8,83E+03	1,78E+05	1,44E+04	6,44E+05	1,37E+04	6,45E+05	1,33E+04	6,16E+05
6	Co.O	5,15E+03	5,08E+04	6,18E+03	8,85E+04	5,95E+03	8,43E+04	5,94E+03	8,42E+04
12	Co.S	4,36E+03	6,03E+04	5,37E+03	1,24E+05	5,04E+03	1,12E+05	5,21E+03	1,13E+05
10	P.O.P	6,08E+02	6,98E+03	7,28E+02	1,43E+04	7,29E+02	1,37E+04	7,28E+02	1,38E+04
7	P.O.B	8,50E+01	9,83E+02	1,02E+02	2,22E+03	1,04E+02	2,10E+03	1,05E+02	2,16E+03
4	P.E	1,42E+04	2,67E+05	2,18E+04	7,31E+05	2,06E+04	7,03E+05	1,96E+04	6,60E+05
8	F.O.Po	1,40E+01	3,42E+02	2,50E+01	1,20E+03	2,30E+01	1,11E+03	2,40E+01	1,15E+03
3	F.O.M	3,68E+03	9,33E+04	6,87E+03	3,36E+05	6,34E+03	3,03E+05	6,55E+03	3,17E+05

TAB. 10 – Contributions dynamiques aux moments spectraux des efforts d'ordre 0 (kN^2 et $(\text{kN.m})^2$) et d'ordre 2 ($(\text{kN/s})^2$ et $(\text{kN.m/s})^2$).

Évaluation des extrema centrés

E	Code	SI			CDC							
		TF			TF				SRSS-BB		CQC-BB	
		σ_F	g^+	g^-	σ_F	g^+	g^-	$ g $	σ_F	$ g $	σ_F	$ g $
1	MP.E.I	718	3.49	-2.99	741	3.37	-3.16	3.51	732	3.52	736	3.52
2	MP.E.D	94	3.61	-3.04	95	3.47	-3.11	3.53	94	3.53	95	3.54
11	MP.E.S	315	3.1	-3.45	312	3.23	-3.41	3.54	305	3.54	309	3.55
9	MP.E.B	42	3.52	-3.23	40	3.38	-3.4	3.68	38	3.67	38	3.67
5	PT.N	134	3.17	-3.71	139	3.24	-3.5	3.7	133	3.7	131	3.7
6	Co.O	70	3.74	-3.35	84	3.63	-3.17	3.55	82	3.55	82	3.55
12	Co.S	78	3.31	-3.41	81	3.5	-3.33	3.6	79	3.6	80	3.6
10	P.O.P	26	3.5	-3.35	29	3.51	-3.5	3.59	29	3.59	29	3.59
7	P.O.B	11	3.43	-3.31	11	3.5	-3.46	3.6	11	3.59	11	3.6
4	P.E	159	3.2	-3.88	172	3.16	-3.56	3.64	167	3.65	164	3.64
8	F.O.Po	8	3.36	-4.01	10	3.19	-4.2	3.57	10	3.58	10	3.58
3	F.O.M	106	3.74	-3.08	98	3.77	-3.37	3.69	96	3.69	97	3.69

TAB. 11 – Facteurs de pointe et écarts-types (Unités : kN et kN.m) calculés suivant SI.TF, CDC.TF, CDC.SRSS-BB, CDC.CQC-BB. Vent à 120°.

E	Code	SI		CDC				
		TF		TF			SRSS	CQC
		Maxc	Minc	Maxc	Minc	Extc	Extc	Extc
1	MP.E.I	2509	-2150	2497	-2341	2608	2573	2587
2	MP.E.D	340	-286	329	-295	335	330	335
11	MP.E.S	976	-1087	1009	-1065	1108	1081	1098
9	MP.E.B	148	-136	135	-136	146	140	138
5	PT.N	424	-496	449	-486	512	490	484
6	Co.O	263	-236	304	-265	296	291	291
12	Co.S	258	-266	282	-269	289	283	287
10	P.O.P	92	-88	102	-102	104	104	104
7	P.O.B	36	-35	39	-39	40	41	41
4	P.E	508	-615	541	-611	622	607	596
8	F.O.Po	26	-31	32	-42	35	35	36
3	F.O.M	395	-326	370	-331	361	354	358

TAB. 12 – Comparaison des extrema centrés suivant SI.TF, CDC.TF, CDC.SRSS-BB, CDC-CQC-BB. Unités : kN et kN.m. Direction 120°.

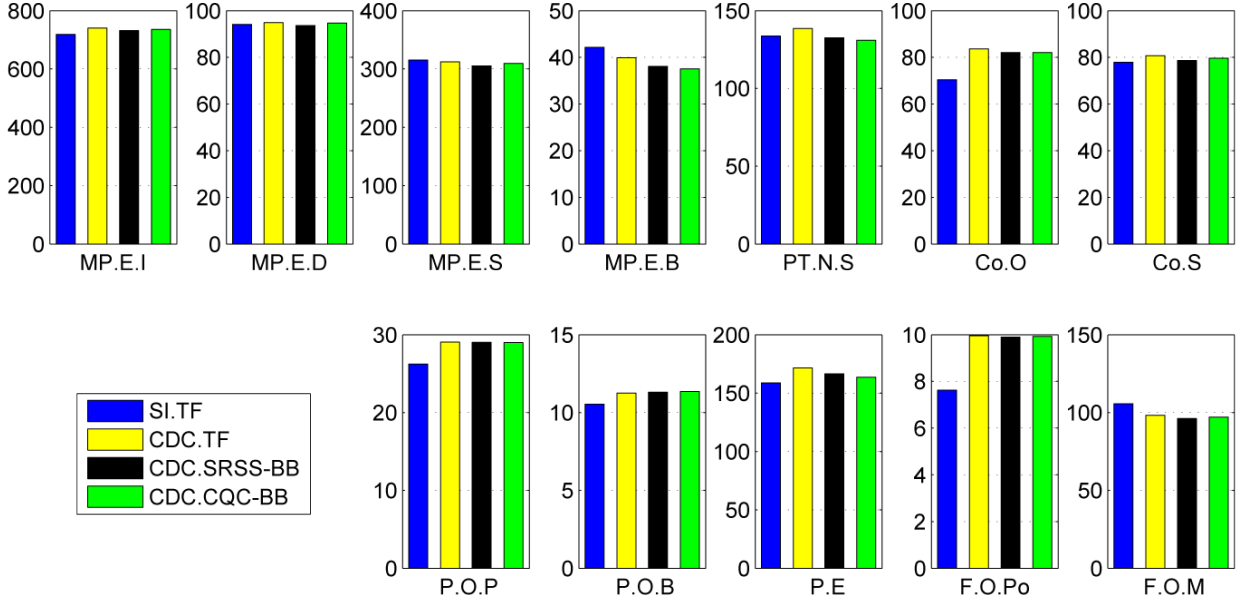


FIG. 21 – Comparaison des écarts-types calculés suivant SI.TF, CDC.TF, CDC.SRSS-BB, CDC.CQC-BB. Unités : kN et kN.m. Vent à 120°.

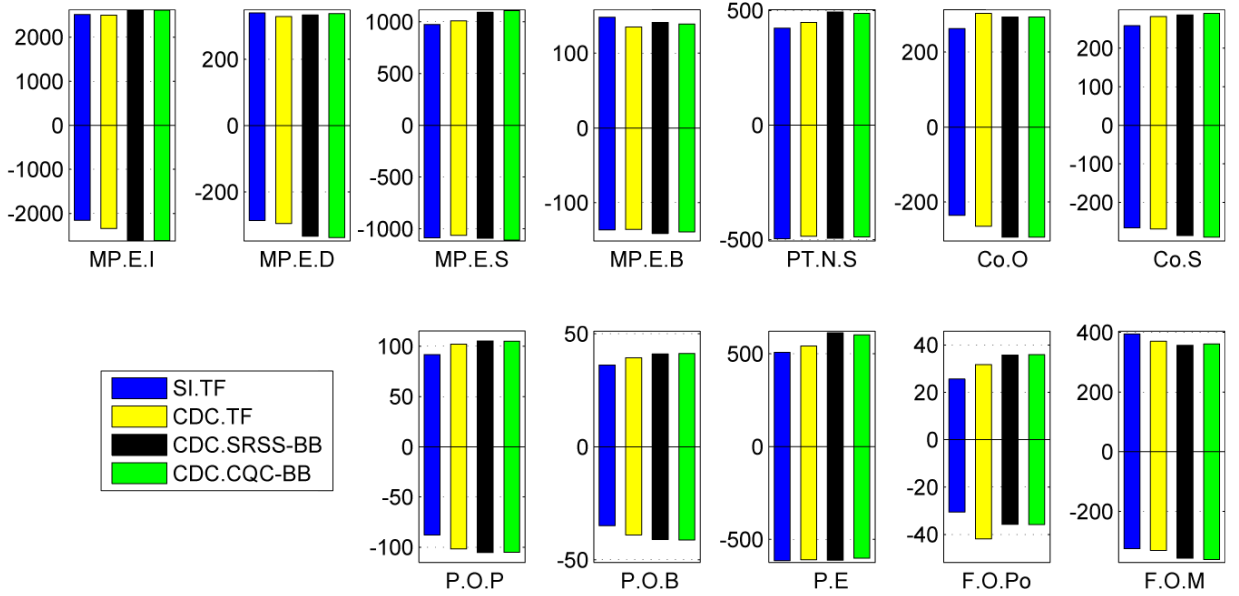


FIG. 22 – Comparaison des extrema centrés suivant SI.TF, CDC.TF, CDC.SRSS-BB, CDC.CQC-BB. Unités : kN et kN.m. Direction 120°

Vent à 165°

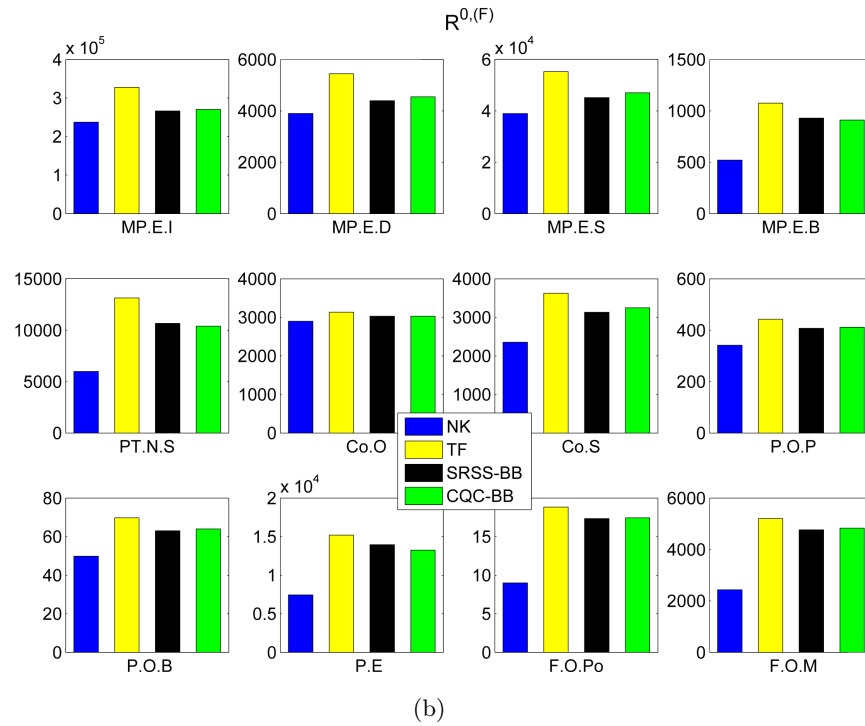
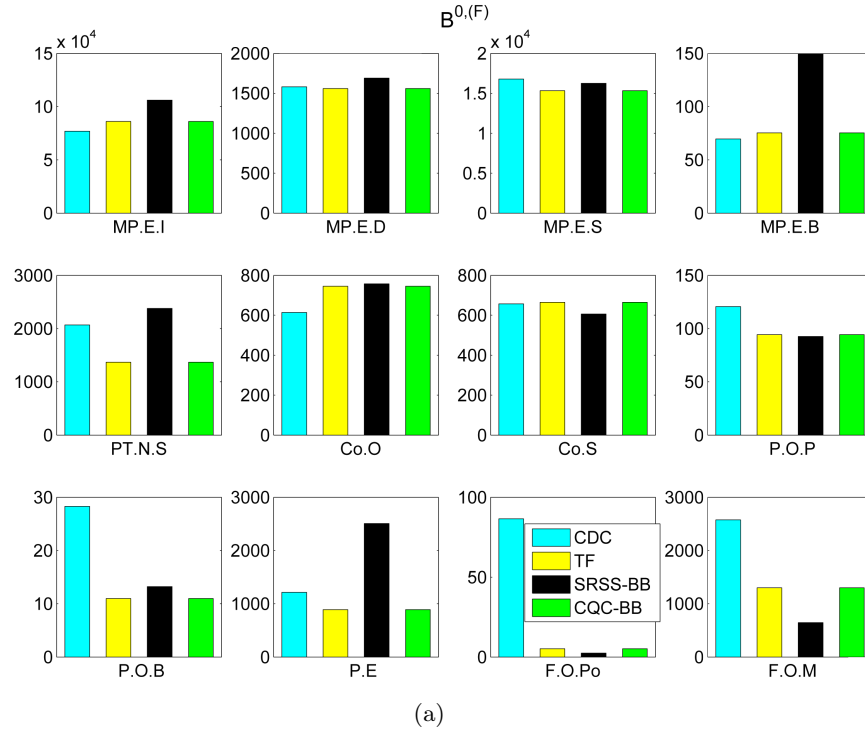


FIG. 23 – (a) Comparaison des contributions quasi-statiques aux moments spectraux des efforts d'ordre 0 entre les méthodes CDC, TF, SRSS-BB et CQC-BB (b) Comparaison des contributions dynamiques aux moments spectraux des efforts d'ordre 0 entre les méthodes NK, TF, SRSS-BB et CQC-BB. Unités : kN^2 , $(\text{kN.m})^2$. Vent à 165°

		CDC		TF		SRSS-BB		CQC-PM	
E	Code	$B^{0,(F)}$	$B^{2,(F)}$	$B^{0,(F)}$	$B^{2,(F)}$	$B^{0,(F)}$	$B^{2,(F)}$	$B^{0,(F)}$	$B^{2,(F)}$
1	MP.E.I	7,70E+04	1,93E+05	8,60E+04	2,13E+05	1,06E+05	2,44E+05	8,60E+04	2,13E+05
2	MP.E.D	1,58E+03	4,53E+03	1,56E+03	4,14E+03	1,69E+03	3,98E+03	1,56E+03	4,14E+03
11	MP.E.S	1,68E+04	3,57E+04	1,53E+04	3,38E+04	1,63E+04	4,06E+04	1,53E+04	3,38E+04
9	MP.E.B	7,00E+01	4,26E+02	7,50E+01	3,86E+02	1,49E+02	7,21E+02	7,50E+01	3,86E+02
5	PT.N	2,07E+03	1,73E+04	1,37E+03	1,32E+04	2,38E+03	1,13E+04	1,37E+03	1,32E+04
6	Co.O	6,13E+02	1,47E+03	7,45E+02	1,78E+03	7,57E+02	1,88E+03	7,45E+02	1,78E+03
12	Co.S	6,57E+02	3,02E+03	6,65E+02	2,98E+03	6,06E+02	2,33E+03	6,65E+02	2,98E+03
10	P.O.P	1,21E+02	4,24E+02	9,40E+01	3,01E+02	9,30E+01	2,85E+02	9,40E+01	3,01E+02
7	P.O.B	2,80E+01	1,20E+02	1,10E+01	4,70E+01	1,30E+01	4,70E+01	1,10E+01	4,70E+01
4	P.E	1,21E+03	4,01E+03	8,89E+02	3,25E+03	2,51E+03	1,10E+04	8,89E+02	3,25E+03
8	F.O.Po	8,70E+01	4,13E+02	5,00E+00	1,60E+01	2,00E+00	1,30E+01	5,00E+00	1,60E+01
3	F.O.M	2,58E+03	1,05E+04	1,30E+03	4,38E+03	6,46E+02	3,71E+03	1,30E+03	4,38E+03

TAB. 13 – Contributions quasi-statiques aux moments spectraux des efforts d'ordre 0 (kN^2 et $(\text{kN.m})^2$) et d'ordre 2 ($(\text{kN/s})^2$ et $(\text{kN.m/s})^2$).

		NK		TF		SRSS-BB		CQC-PM	
E	Code	$R^{0,(F)}$	$R^{2,(F)}$	$R^{0,(F)}$	$R^{2,(F)}$	$R^{0,(F)}$	$R^{2,(F)}$	$R^{0,(F)}$	$R^{2,(F)}$
1	MP.E.I	2,37E+05	2,45E+06	3,28E+05	4,37E+06	2,67E+05	3,39E+06	2,70E+05	3,46E+06
2	MP.E.D	3,90E+03	4,32E+04	5,44E+03	8,32E+04	4,40E+03	6,36E+04	4,55E+03	6,83E+04
11	MP.E.S	3,89E+04	4,64E+05	5,52E+04	9,70E+05	4,51E+04	7,78E+05	4,70E+04	8,30E+05
9	MP.E.B	5,21E+02	1,06E+04	1,08E+03	4,08E+04	9,29E+02	3,44E+04	9,11E+02	3,36E+04
5	PT.N	5,99E+03	1,36E+05	1,31E+04	6,73E+05	1,07E+04	5,60E+05	1,04E+04	5,42E+05
6	Co.O	2,90E+03	2,96E+04	3,14E+03	5,07E+04	3,03E+03	4,71E+04	3,03E+03	4,72E+04
12	Co.S	2,35E+03	3,39E+04	3,63E+03	8,72E+04	3,13E+03	7,54E+04	3,25E+03	7,67E+04
10	P.O.P	3,42E+02	4,15E+03	4,43E+02	9,81E+03	4,07E+02	8,78E+03	4,12E+02	8,87E+03
7	P.O.B	5,00E+01	6,32E+02	7,00E+01	1,63E+03	6,30E+01	1,50E+03	6,40E+01	1,53E+03
4	P.E	7,45E+03	1,47E+05	1,52E+04	5,51E+05	1,39E+04	5,03E+05	1,33E+04	4,71E+05
8	F.O.Po	9,00E+00	2,20E+02	1,90E+01	9,19E+02	1,70E+01	8,29E+02	1,70E+01	8,44E+02
3	F.O.M	2,43E+03	6,19E+04	5,20E+03	2,57E+05	4,76E+03	2,30E+05	4,83E+03	2,35E+05

TAB. 14 – Contributions dynamiques aux moments spectraux des efforts d'ordre 0 (kN^2 et $(\text{kN.m})^2$) et d'ordre 2 ($(\text{kN/s})^2$ et $(\text{kN.m/s})^2$).

		SI			CDC							
		TF			TF				SRSS-BB		CQC-BB	
E	Code	σ_F	g^+	g^-	σ_F	g^+	g^-	$ g $	σ_F	$ g $	σ_F	$ g $
1	MP.E.I	592	3.32	-3.25	621	3.25	-3.15	3.52	586	3.52	589	3.52
2	MP.E.D	79	3.28	-3.24	82	3.39	-3.13	3.53	77	3.53	78	3.54
11	MP.E.S	261	3.35	-3.58	263	3.29	-3.47	3.55	249	3.55	253	3.56
9	MP.E.B	34	3.37	-3.45	34	3.41	-3.55	3.69	32	3.69	31	3.69
5	PT.N	117	3.18	-3.52	128	3.32	-3.3	3.72	113	3.72	112	3.72
6	Co.O	54	3.25	-3.55	61	3.12	-3.38	3.55	60	3.55	60	3.56
12	Co.S	64	3.44	-3.54	65	3.44	-3.75	3.61	62	3.62	62	3.61
10	P.O.P	22	3.5	-3.3	24	3.65	-3.46	3.59	23	3.59	23	3.59
7	P.O.B	9	3.32	-3.44	10	3.46	-3.59	3.59	10	3.6	10	3.6
4	P.E	118	3.15	-3.6	128	3.27	-3.42	3.68	123	3.68	120	3.68
8	F.O.Po	8	3.24	-5.05	10	3.2	-4.79	3.54	10	3.54	10	3.54
3	F.O.M	91	3.45	-3.31	88	3.7	-3.33	3.68	86	3.68	86	3.68

TAB. 15 – Facteurs de pointe et écarts-types (Unités : kN et kN.m) calculés suivant SI.TF, CDC.TF, CDC.SRSS-BB, CDC.CQC-BB. Vent à 165°.

		SI		CDC				
		TF		TF			SRSS	CQC
E	Code	Maxc	Minc	Maxc	Minc	Extc	Extc	Extc
1	MP.E.I	1966	-1923	2023	-1958	2183	2063	2076
2	MP.E.D	260	-257	278	-257	289	273	277
11	MP.E.S	875	-935	867	-914	935	884	899
9	MP.E.B	115	-117	114	-119	124	117	115
5	PT.N	372	-412	425	-422	477	420	415
6	Co.O	174	-190	191	-207	218	215	215
12	Co.S	222	-228	223	-242	233	223	226
10	P.O.P	76	-71	86	-82	85	83	83
7	P.O.B	31	-32	34	-35	35	34	35
4	P.E	373	-426	419	-438	471	453	443
8	F.O.Po	26	-40	33	-49	36	36	36
3	F.O.M	315	-303	324	-291	321	315	317

TAB. 16 – Comparaison des extrema centrés suivant SI.TF, CDC.TF, CDC.SRSS-BB, CDC.CQC-PM. Unités : kN et kN.m. Vent à 165°.

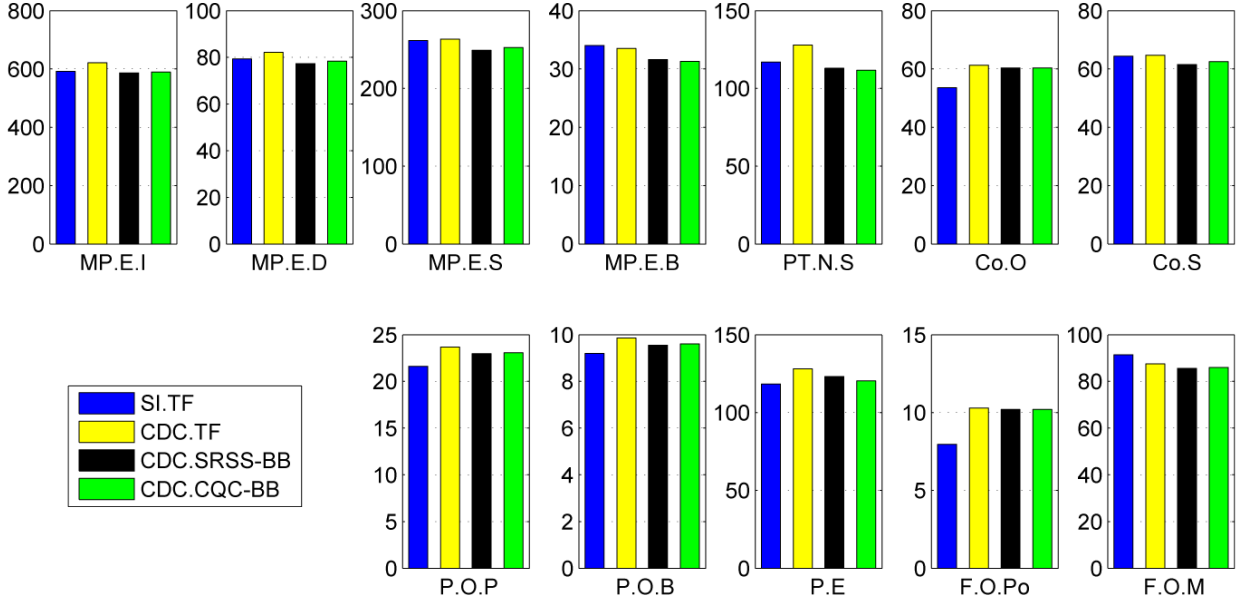


FIG. 24 – Comparaison des écarts-types calculés suivant SI-TF, CDC.TF, CDC.SRSS-BB, CDC.CQC-BB. Unités : kN et kN.m. Vent à 165° .

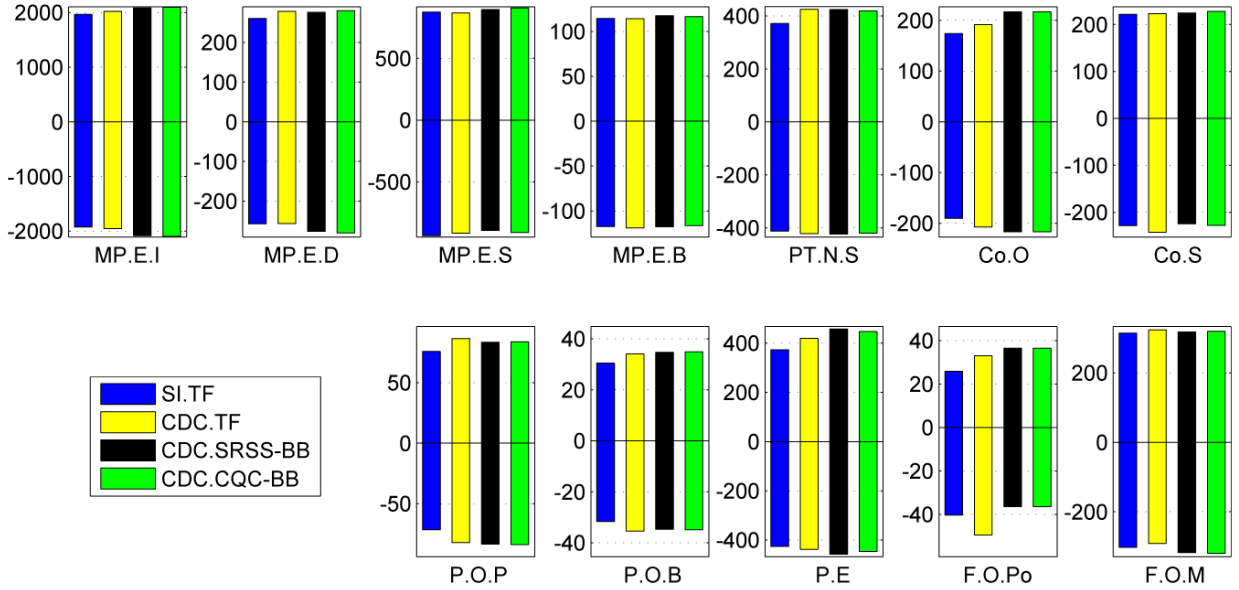


FIG. 25 – Comparaison des extrema centrés suivant SI-TF, CDC.TF, CDC.SRSS-BB, CDC.CQC-BB. Unités : kN et kN.m. Vent à 165° .

Bibliographie

- [1] L'internaute. Futur stade de lille. <http://www.linternaute.com/sport/foot/photo/le-futur-stade-de-lille/lille-va-enfin-avoir-son-stade.shtml>, Publié le 18 mars 2008, consultée le 4 février 2010.
- [2] LMCU. Le projet grand stade. http://www.lillemetropole.fr/index.php?p=1164&art_id=, Mise à jour le 13 mai 2009, consultée le 3 février 2010.
- [3] DENOËL Vincent. *Analyse de structures soumises au vent turbulent : de l'approche stochastique fréquentielle au dynamique transitoire non linéaire*. Travail présenté en vue de l'obtention du Diplôme d'Études Approfondies en Sciences Appliquées, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège (2003).
- [4] PENZIEN J. CLOUGH R. W. *Dynamics of structures*. Mc Graw-Hill : Civil Engineering series (second edition), (1997).
- [5] DENOËL Vincent. *Estimation of modal correlation coefficients from background and resonant responses*. Structural Engineering and Mechanics pp. 725-740, Vol. 32-6 (2009).
- [6] ZHOU Xuan-yi GU Ming. *An approximation method for resonant response with coupling modes of structures under wind action*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics pp. 573-580, Vol. 97 (2009).
- [7] Greisch. *Description de la statique générale de la toiture*. Grand Stade Lille Métropole pp 1-15 (2009).
- [8] Greisch. *Hypothèses générales de calcul au vent*. Grand Stade Lille Métropole pp 1-72 (2009).
- [9] Greisch. *Description du modèle de calcul 3D*. Grand Stade Lille Métropole pp 1-52 (2009).
- [10] PLUMIER André. *Pathologie et réparations structurelles de constructions*. Faculté des Sciences appliquées, Université de Liège (2009).
- [11] DE OLIVEIRA Fabrice DUFRESNE Marc. *Études aérodynamiques de dimensionnement au vent du Stade de Lille*. Centre scientifique et technique de la construction (2009).
- [12] *Eurocode 1 : Actions sur les structures - Partie 1-4 : Actions générales - Actions du vent*. Comité Européen de normalisation, Réf. n° EN 1991-1-4 :2005 F.
- [13] *Eurocode 1 : Actions sur les structures - Partie 1-4 : Actions générales - Actions du vent, Annexes A à F*. Comité Européen de normalisation, Réf. n° NF EN 1991-1-4 :2005/NA.
- [14] DENOËL Vincent. *Application des méthodes d'analyse stochastique à l'étude des effets du vent sur les structures du génie civil*. Travail présenté en vue de l'obtention du grade de Docteur en Sciences Appliquées, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège (2005).
- [15] BIÉTRY Jacques. *Effets du vent sur la toiture*. Revue française de génie civil pp. 50-66, Vol. 1, No. 1 (1997).
- [16] MADDON N. R. *On the Number of Modes Necessary for Accurate Response and Resulting Forces in Dynamic Analyses*. Journal of Applied Mechanics pp. 516-517, Vol. 42 (1975).

- [17] BELL K. HANSTEN O.E. *On the accuracy of mode superposition analysis in structural dynamics*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, pp. 405-411, Vol. 7 (1979).
- [18] Greisch. *Prise en compte des résultats de la deuxième campagne d'essais du CSTB*. Grand Stade Lille Métropole pp 1-42 (2010).
- [19] DENOËL Vincent. *Analyse dynamique des structures du génie civil*. Faculté des Sciences appliquées, Université de Liège (Nov 2009).
- [20] HIRATA K. KANAZAWA K. *Parametric estimation of the cross-power spectral density*. Journal of Sound and Vibration pp. 1-35, Vol. 282 (2005).