

Quantifications
naturelles
projectivement
équivariantes

Fabian Radoux

Introduction

Fibrés et
connexions de
Cartan

Le cas des
densités

Une formule
explicite

Non-unicité de la
quantification

Autres
opérateurs
différentiels

Quantifications naturelles projectivement équivariantes

Fabian Radoux

Mulhouse, UHA

28 Septembre 2006

Introduction

- A l'origine : $qp \rightarrow QP$

$$qp \rightarrow \frac{1}{2}(QP + PQ)$$

avec $P = \partial_x$; $Q = x$.

Introduction

- A l'origine : $qp \rightarrow QP$

$$qp \rightarrow \frac{1}{2}(QP + PQ)$$

avec $P = \partial_x$; $Q = x$.

Problèmes : Dépendance en l'ordre

Introduction

- A l'origine : $qp \rightarrow QP$

$$qp \rightarrow \frac{1}{2}(QP + PQ)$$

avec $P = \partial_x$; $Q = x$.

Problèmes : Dépendance en l'ordre

Changements de variables

- Quantification : $Q : \mathcal{S}(M) \mapsto \mathcal{D}_{\frac{1}{2}}(M)$

- Quantification : $Q : \mathcal{S}(M) \mapsto \mathcal{D}_{\frac{1}{2}}(M)$

Q : bijection linéaire

- Quantification : $Q : \mathcal{S}(M) \mapsto \mathcal{D}_{\frac{1}{2}}(M)$

Q : bijection linéaire

préserve le symbole principal

- Quantification : $Q : \mathcal{S}(M) \mapsto \mathcal{D}_{\frac{1}{2}}(M)$

Q : bijection linéaire

préserve le symbole principal

- $\nexists Q : Q(\Phi^* S) = \Phi^* Q(S) \forall$ difféomorphisme local Φ

- Quantification : $Q : \mathcal{S}(M) \mapsto \mathcal{D}_{\frac{1}{2}}(M)$

Q : bijection linéaire

préserve le symbole principal

- $\#Q : Q(\Phi^* S) = \Phi^* Q(S) \forall$ difféomorphisme local Φ
 $\#Q : Q(L_X S) = L_X Q(S) \forall$ champ de vecteurs X

Introduction

Fibrés et
connexions de
Cartan

Le cas des
densités

Une formule
explicite

Non-unicité de la
quantification

Autres
opérateurs
différentiels

Cas “plat” :

- $\exists Q : Q(\Phi_g^* S) = \Phi_g^* Q(S) \forall g \in G$

Introduction

Fibrés et
connexions de
Cartan

Le cas des
densités

Une formule
explicite

Non-unicité de la
quantification

Autres
opérateurs
différentiels

Cas “plat” :

- $\exists Q : Q(\Phi_g^* S) = \Phi_g^* Q(S) \forall g \in G$
 $\exists Q : Q(L_h^* S) = L_h^* Q(S) \forall h \in \mathfrak{g}$

Introduction

Fibrés et
connexions de
Cartan

Le cas des
densités

Une formule
explicite

Non-unicité de la
quantification

Autres
opérateurs
différentiels

Cas “plat” :

- $\exists Q : Q(\Phi_g^* S) = \Phi_g^* Q(S) \forall g \in G$
 $\exists Q : Q(L_h^* S) = L_h^* Q(S) \forall h \in \mathfrak{g}$
- $PGL(m+1, \mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{R}P^m$

Cas “plat” :

- $\exists Q : Q(\Phi_g^* S) = \Phi_g^* Q(S) \forall g \in G$

- $\exists Q : Q(L_h^* S) = L_h^* Q(S) \forall h \in \mathfrak{g}$

- $PGL(m+1, \mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{R}P^m$

- $X \in \mathfrak{sl}(m+1, \mathbb{R}) \mapsto X^*$ champ de vecteurs sur \mathbb{R}^m

Cas “plat” :

- $\exists Q : Q(\Phi_g^* S) = \Phi_g^* Q(S) \forall g \in G$

- $\exists Q : Q(L_h^* S) = L_h^* Q(S) \forall h \in \mathfrak{g}$

- $PGL(m+1, \mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{R}P^m$

- $X \in sl(m+1, \mathbb{R}) \mapsto X^*$ champ de vecteurs sur \mathbb{R}^m

- $\exists Q : L_X Q(S) = Q(L_X S) \forall X \in sl(m+1, \mathbb{R})$

- Méthode de l'opérateur de Casimir :

$$\mathcal{C} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \mapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \quad ; \quad \mathcal{C} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \mapsto \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$$

- Méthode de l'opérateur de Casimir :

$$C : \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \mapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \quad ; \quad \mathcal{C} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \mapsto \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$$

Condition : $\exists Q$ tel que si $C(S) = \alpha S$, alors

- Méthode de l'opérateur de Casimir :

$$\mathcal{C} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \mapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \quad ; \quad \mathcal{C} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \mapsto \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$$

Condition : $\exists Q$ tel que si $\mathcal{C}(S) = \alpha S$, alors

$$\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$$

- Méthode de l'opérateur de Casimir :

$$\mathcal{C} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \mapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \quad ; \quad \mathcal{C} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \mapsto \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$$

Condition : $\exists Q$ tel que si $\mathcal{C}(S) = \alpha S$, alors

$$\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S) \text{ et } \sigma(Q(S)) = S$$

Introduction

Fibrés et
connexions de
Cartan

Le cas des
densités

Une formule
explicite

Non-unicité de la
quantification

Autres
opérateurs
différentiels

Cas “courbe” :

- $Q(\nabla) : \mathcal{S}^3(M) \mapsto \mathcal{D}^3(M)$

$$Q(\nabla) = Q(\nabla') \text{ si } \nabla' = \nabla + \alpha \vee id$$

Introduction

Fibrés et
connexions de
Cartan

Le cas des
densités

Une formule
explicite

Non-unicité de la
quantification

Autres
opérateurs
différentiels

- Conjecture : $Q(\nabla) : \mathcal{S}(M) \mapsto \mathcal{D}(M)$

Introduction

Fibrés et
connexions de
Cartan

Le cas des
densités

Une formule
explicite

Non-unicité de la
quantification

Autres
opérateurs
différentiels

- Conjecture : $Q(\nabla) : \mathcal{S}(M) \mapsto \mathcal{D}(M)$ naturel

- Conjecture : $Q(\nabla) : \mathcal{S}(M) \mapsto \mathcal{D}(M)$ naturel et

$$Q(\nabla) = Q(\nabla') \text{ si } \nabla' = \nabla + \alpha \vee id$$

- Conjecture : $Q(\nabla) : \mathcal{S}(M) \mapsto \mathcal{D}(M)$ naturel et

$$Q(\nabla) = Q(\nabla') \text{ si } \nabla' = \nabla + \alpha \vee id$$

$$\phi_t^* Q(\nabla^0)(S) = Q(\phi_t^* \nabla^0)(\phi_t^* S)$$

- Conjecture : $Q(\nabla) : \mathcal{S}(M) \mapsto \mathcal{D}(M)$ naturel et

$$Q(\nabla) = Q(\nabla') \text{ si } \nabla' = \nabla + \alpha \vee id$$

$$\phi_t^* Q(\nabla^0)(S) = Q(\phi_t^* \nabla^0)(\phi_t^* S)$$

$$\phi_t^* Q(\nabla^0)(S) = Q(\nabla^0)(\phi_t^* S)$$

- Conjecture : $Q(\nabla) : \mathcal{S}(M) \mapsto \mathcal{D}(M)$ naturel et

$$Q(\nabla) = Q(\nabla') \text{ si } \nabla' = \nabla + \alpha \vee id$$

$$\phi_t^* Q(\nabla^0)(S) = Q(\phi_t^* \nabla^0)(\phi_t^* S)$$

$$\phi_t^* Q(\nabla^0)(S) = Q(\nabla^0)(\phi_t^* S)$$

$$\frac{d}{dt} \phi_t^* Q(\nabla^0)(S)|_{t=0} = \frac{d}{dt} Q(\nabla^0)(\phi_t^* S)|_{t=0}$$

- Conjecture : $Q(\nabla) : \mathcal{S}(M) \mapsto \mathcal{D}(M)$ naturel et

$$Q(\nabla) = Q(\nabla') \text{ si } \nabla' = \nabla + \alpha \vee id$$

$$\phi_t^* Q(\nabla^0)(S) = Q(\phi_t^* \nabla^0)(\phi_t^* S)$$

$$\phi_t^* Q(\nabla^0)(S) = Q(\nabla^0)(\phi_t^* S)$$

$$\frac{d}{dt} \phi_t^* Q(\nabla^0)(S)|_{t=0} = \frac{d}{dt} Q(\nabla^0)(\phi_t^* S)|_{t=0}$$

$$L_X Q(\nabla^0)(S) = Q(\nabla^0)(L_X S) \forall X \in \mathfrak{sl}(m+1, \mathbb{R})$$

Quantifications
naturelles
projectivement
équivariantes

Fabian Radoux

Introduction

Fibrés et
connexions de
Cartan

Le cas des
densités

Une formule
explicite

Non-unicité de la
quantification

Autres
opérateurs
différentiels

- Méthode de M. Bordemann :

Introduction

Fibrés et
connexions de
Cartan

Le cas des
densités

Une formule
explicite

Non-unicité de la
quantification

Autres
opérateurs
différentiels

- Méthode de M. Bordemann : $M \mapsto \tilde{M}$;

- Méthode de M. Bordemann : $M \mapsto \tilde{M}$;
 $\nabla \mapsto \tilde{\nabla}$;

• Méthode de M. Bordemann : $M \mapsto \tilde{M}$;

$\nabla \mapsto \tilde{\nabla}$;

$S \mapsto \tilde{S}$;

• Méthode de M. Bordemann : $M \mapsto \tilde{M}$;

$$\nabla \mapsto \tilde{\nabla};$$

$$S \mapsto \tilde{S};$$

$$Q(\widetilde{\nabla})(\tilde{S})(f) = \tau(\tilde{\nabla})(\tilde{S})(\tilde{f})$$

Quantifications
naturelles
projectivement
équivariantes

Fabian Radoux

Introduction

Fibrés et
connexions de
Cartan

Le cas des
densités

Une formule
explicite

Non-unicité de la
quantification

Autres
opérateurs
différentiels

- Questions :

Quantifications
naturelles
projectivement
équivariantes

Fabian Radoux

Introduction

Fibrés et
connexions de
Cartan

Le cas des
densités

Une formule
explicite

Non-unicité de la
quantification

Autres
opérateurs
différentiels

- Questions : Valeurs critiques de δ

- Questions : Valeurs critiques de δ

Formule explicite

- Questions : Valeurs critiques de δ

Formule explicite

Unicité

- Questions : Valeurs critiques de δ

Formule explicite

Unicité

Autres opérateurs différentiels

Quantifications
naturelles
projectivement
équivariantes

Fabian Radoux

Introduction

**Fibrés et
connexions de
Cartan**

Le cas des
densités

Une formule
explicite

Non-unicité de la
quantification

Autres
opérateurs
différentiels

- Fibrés de Cartan et connexions de Cartan :

- Fibrés de Cartan et connexions de Cartan :

$$[\nabla] \rightarrow P \mapsto M$$

• Fibrés de Cartan et connexions de Cartan :

$$[\nabla] \rightarrow P \mapsto M$$

$$[\nabla] \rightarrow \omega : TP \mapsto \mathfrak{g}$$

• Fibrés de Cartan et connexions de Cartan :

$$[\nabla] \rightarrow P \mapsto M$$

$$[\nabla] \rightarrow \omega : TP \mapsto \mathfrak{g}$$

$$\omega_u : T_u P \mapsto \mathfrak{g} \text{ bijection } \forall u \in P$$

• Fibrés de Cartan et connexions de Cartan :

$$[\nabla] \rightarrow P \mapsto M$$

$$[\nabla] \rightarrow \omega : TP \mapsto \mathfrak{g}$$

$$\omega_u : T_u P \mapsto \mathfrak{g} \text{ bijection } \forall u \in P$$

$$T \rightarrow p^* T \in \mathcal{C}^\infty(P, V)_H$$

• Fibrés de Cartan et connexions de Cartan :

$$[\nabla] \rightarrow P \mapsto M$$

$$[\nabla] \rightarrow \omega : TP \mapsto \mathfrak{g}$$

$$\omega_u : T_u P \mapsto \mathfrak{g} \text{ bijection } \forall u \in P$$

$$T \rightarrow p^* T \in \mathcal{C}^\infty(P, V)_H$$

$$\text{avec } H = G_0 \times G_1, \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

• Fibrés de Cartan et connexions de Cartan :

$$[\nabla] \rightarrow P \mapsto M$$

$$[\nabla] \rightarrow \omega : TP \mapsto \mathfrak{g}$$

$$\omega_u : T_u P \mapsto \mathfrak{g} \text{ bijection } \forall u \in P$$

$$T \rightarrow p^* T \in \mathcal{C}^\infty(P, V)_H$$

$$\text{avec } H = G_0 \times G_1, \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{h}, \mathfrak{g}_{-1} \cong \mathbb{R}^m$$

• Fibrés de Cartan et connexions de Cartan :

$$[\nabla] \rightarrow P \mapsto M$$

$$[\nabla] \rightarrow \omega : TP \mapsto \mathfrak{g}$$

$$\omega_u : T_u P \mapsto \mathfrak{g} \text{ bijection } \forall u \in P$$

$$T \rightarrow p^* T \in \mathcal{C}^\infty(P, V)_H$$

$$\text{avec } H = G_0 \rtimes G_1, \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{h}, \mathfrak{g}_{-1} \cong \mathbb{R}^m$$

$$\omega \rightarrow \nabla^\omega(e_i) = L_{\omega^{-1}(e_i)}, e_i \in \mathfrak{g}_{-1}$$

• Fibrés de Cartan et connexions de Cartan :

$$[\nabla] \rightarrow P \mapsto M$$

$$[\nabla] \rightarrow \omega : TP \mapsto \mathfrak{g}$$

$$\omega_u : T_u P \mapsto \mathfrak{g} \text{ bijection } \forall u \in P$$

$$T \rightarrow p^* T \in \mathcal{C}^\infty(P, V)_H$$

$$\text{avec } H = G_0 \times G_1, \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{h}, \mathfrak{g}_{-1} \cong \mathbb{R}^m$$

$$\omega \rightarrow \nabla^\omega(e_i) = L_{\omega^{-1}(e_i)}, e_i \in \mathfrak{g}_{-1}$$

$$f \text{ } G_0\text{-équivariant} \Rightarrow \nabla^\omega f$$

G_0 -équivariant

• Fibrés de Cartan et connexions de Cartan :

$$[\nabla] \rightarrow P \mapsto M$$

$$[\nabla] \rightarrow \omega : TP \mapsto \mathfrak{g}$$

$$\omega_u : T_u P \mapsto \mathfrak{g} \text{ bijection } \forall u \in P$$

$$T \rightarrow p^* T \in \mathcal{C}^\infty(P, V)_H$$

$$\text{avec } H = G_0 \times G_1, \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{h}, \mathfrak{g}_{-1} \cong \mathbb{R}^m$$

$$\omega \rightarrow \nabla^\omega(e_i) = L_{\omega^{-1}(e_i)}, e_i \in \mathfrak{g}_{-1}$$

$$f \text{ } G_0\text{-équivariant} \Rightarrow \nabla^\omega f$$

G_0 -équivariant

$$f \text{ } G_1\text{-équivariant} \not\Rightarrow \nabla^\omega f$$

G_1 -équivariant

Quantifications
naturelles
projectivement
équivariantes

Fabian Radoux

Introduction

Fibrés et
connexions de
Cartan

**Le cas des
densités**

Une formule
explicite

Non-unicité de la
quantification

Autres
opérateurs
différentiels

- Cas des densités :

- Cas des densités :

$$S \rightarrow p^* S \in C^\infty(P, S_\delta^k(\mathbb{R}^m))_H$$

- Cas des densités :

$$S \rightarrow p^* S \in \mathcal{C}^\infty(P, S_\delta^k(\mathbb{R}^m))_H$$

$$f \rightarrow p^* f \in \mathcal{C}^\infty(P, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_H$$

- Cas des densités :

$$S \rightarrow p^* S \in \mathcal{C}^\infty(P, S_\delta^k(\mathbb{R}^m))_H$$

$$f \rightarrow p^* f \in \mathcal{C}^\infty(P, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_H$$

$$\omega \rightarrow \text{Div}^\omega = \sum_i i(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(\epsilon_i)}$$

- Cas des densités :

$$S \rightarrow p^* S \in \mathcal{C}^\infty(P, S_\delta^k(\mathbb{R}^m))_H$$

$$f \rightarrow p^* f \in \mathcal{C}^\infty(P, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_H$$

$$\omega \rightarrow \text{Div}^\omega = \sum_i i(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(\epsilon_i)}$$

Condition : $L_{h^*} Q(p^* S)(p^* f) = 0 \forall h \in \mathfrak{g}_1$

- Cas des densités :

$$S \rightarrow p^* S \in \mathcal{C}^\infty(P, S_\delta^k(\mathbb{R}^m))_H$$

$$f \rightarrow p^* f \in \mathcal{C}^\infty(P, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_H$$

$$\omega \rightarrow \text{Div}^\omega = \sum_i i(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(\epsilon_i)}$$

Condition : $L_{h^*} Q(p^* S)(p^* f) = 0 \forall h \in \mathfrak{g}_1$

$\langle p^* S, \nabla_s^{\omega^k} p^* f \rangle$ pas G_1 -équivariant !

- Cas des densités :

$$S \rightarrow p^* S \in \mathcal{C}^\infty(P, S_\delta^k(\mathbb{R}^m))_H$$

$$f \rightarrow p^* f \in \mathcal{C}^\infty(P, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_H$$

$$\omega \rightarrow \text{Div}^\omega = \sum_i i(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(e_i)}$$

Condition : $L_{h^*} Q(p^* S)(p^* f) = 0 \forall h \in \mathfrak{g}_1$

$\langle p^* S, \nabla_s^{\omega^k} p^* f \rangle$ pas G_1 -équivariant !

On ajoute des termes d'ordres inférieurs en $p^* f \dots$

• Cas des densités :

$$S \rightarrow p^* S \in \mathcal{C}^\infty(P, S_\delta^k(\mathbb{R}^m))_H$$

$$f \rightarrow p^* f \in \mathcal{C}^\infty(P, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_H$$

$$\omega \rightarrow \text{Div}^\omega = \sum_i i(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(e_i)}$$

Condition : $L_{h^*} Q(p^* S)(p^* f) = 0 \forall h \in \mathfrak{g}_1$

$\langle p^* S, \nabla_s^{\omega^k} p^* f \rangle$ pas G_1 -équivariant !

On ajoute des termes d'ordres inférieurs en $p^* f \dots$

On trouve alors :

$$Q_M(\nabla, S)(f) = p^{*-1} \left(\sum_{l=0}^k C_{k,l} \langle \text{Div}^{\omega^l} p^* S, \nabla_s^{\omega^{k-l}} p^* f \rangle \right),$$

$$\text{avec } C_{k,l} = \frac{(\lambda + \frac{k-1}{m+1}) \dots (\lambda + \frac{k-l}{m+1})}{\gamma_{2k-1} \dots \gamma_{2k-l}} \binom{k}{l}, \forall l \geq 1, \quad C_{k,0} = 1$$

Quantifications
naturelles
projectivement
équivariantes

Fabian Radoux

Introduction

Fibrés et
connexions de
Cartan

Le cas des
densités

**Une formule
explicite**

Non-unicité de la
quantification

Autres
opérateurs
différentiels

- Formule explicite :

Quantifications
naturelles
projectivement
équivariantes

Fabian Radoux

Introduction

Fibrés et
connexions de
Cartan

Le cas des
densités

**Une formule
explicite**

Non-unicité de la
quantification

Autres
opérateurs
différentiels

- Formule explicite : $\Upsilon \rightarrow \sigma_\Upsilon : P^1 M \mapsto P$

• Formule explicite : $\Upsilon \rightarrow \sigma_\Upsilon : P^1 M \mapsto P$

$$\sigma_\Upsilon \rightarrow \tau : P \mapsto \mathfrak{g}_1$$

• Formule explicite : $\Upsilon \rightarrow \sigma_\Upsilon : P^1 M \mapsto P$

$$\sigma_\Upsilon \rightarrow \tau : P \mapsto \mathfrak{g}_1$$

$\nabla_s^{\omega^l}(p^* f) = \sum_{t=0}^l \tau^t \vee A_t$, où A_t est égal à :

$$\binom{l}{t} \prod_{j=1}^t (-\lambda(m+1) - l + j) p^* (\pi_{l-t} (\sum_{j=0}^{l-t} (\nabla_s + T_1)^j) f),$$

si $T_1|_{S^j T^* M \otimes \mathcal{F}_\lambda(M)} = (-\lambda(m+1) - j)(j+1) \vee r$

• Formule explicite : $\Upsilon \rightarrow \sigma_\Upsilon : P^1 M \mapsto P$

$$\sigma_\Upsilon \rightarrow \tau : P \mapsto \mathfrak{g}_1$$

$\nabla_s^{\omega^l}(p^* f) = \sum_{t=0}^l \tau^t \vee A_t$, où A_t est égal à :

$$\binom{l}{t} \prod_{j=1}^t (-\lambda(m+1) - l + j) p^*(\pi_{l-t}(\sum_{j=0}^{l-t} (\nabla_s + T_1)^j) f),$$

si $T_1|_{S^j T^* M \otimes \mathcal{F}_\lambda(M)} = (-\lambda(m+1) - j)(j+1) \vee r$

$\text{Div}^{\omega^l}(p^* S) = \sum_{t=0}^l \langle \tau^t, B_t \rangle$, où B_t est égal à :

$$\binom{l}{t} \prod_{j=1}^t (\gamma_{2k-1}(m+1) - l + j) p^*(\pi_{l-t}(\sum_{j=0}^{l-t} (\text{Div} + T_2)^j) S),$$

si $T_2|_{S_\delta^j(M)} = ((m+1)\gamma_{2k-1} - k + j)(k - j + 1)i(r)$

Formule :

$$Q_M(\nabla, S)(f) = \sum_{l=0}^k C_{k,l} \langle \pi_l(\sum_{j=0}^l (Div + T_2)^j) S, \pi_{k-l}(\sum_{j=0}^{k-l} (\nabla_s + T_1)^j) f \rangle.$$

Quantifications
naturelles
projectivement
équivariantes

Fabian Radoux

Introduction

Fibrés et
connexions de
Cartan

Le cas des
densités

Une formule
explicite

**Non-unicité de la
quantification**

Autres
opérateurs
différentiels

- Non-unicité de la quantification :

- Non-unicité de la quantification :

Non-unicité \leftrightarrow Applications naturelles projectivement
invariantes de $\mathcal{S}_\delta^k(M)$ dans $\mathcal{S}_\delta^{k-l}(M)$

- Non-unicité de la quantification :

Non-unicité \leftrightarrow Applications naturelles projectivement
invariantes de $\mathcal{S}_\delta^k(M)$ dans $\mathcal{S}_\delta^{k-l}(M)$

$$\omega \rightarrow \Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \rightarrow \kappa(., .) = \Omega(\omega^{-1}(.), \omega^{-1}(.))$$

- Non-unicité de la quantification :

Non-unicité \leftrightarrow Applications naturelles projectivement
invariantes de $\mathcal{S}_\delta^k(M)$ dans $\mathcal{S}_\delta^{k-l}(M)$

$$\omega \rightarrow \Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \rightarrow \kappa(., .) = \Omega(\omega^{-1}(.), \omega^{-1}(.))$$

$$\kappa \rightarrow \kappa_0 \in \mathcal{C}^\infty(P, \wedge^2 \mathbb{R}^{m^*} \otimes \mathbb{R}^{m^*} \otimes \mathbb{R}^m)_H$$

- Non-unicité de la quantification :

Non-unicité \leftrightarrow Applications naturelles projectivement
invariantes de $\mathcal{S}_\delta^k(M)$ dans $\mathcal{S}_\delta^{k-l}(M)$

$$\omega \rightarrow \Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \rightarrow \kappa(., .) = \Omega(\omega^{-1}(.), \omega^{-1}(.))$$

$$\kappa \rightarrow \kappa_0 \in \mathcal{C}^\infty(P, \wedge^2 \mathbb{R}^{m^*} \otimes \mathbb{R}^{m^*} \otimes \mathbb{R}^m)_H$$

$$\kappa_0 \rightarrow \text{Tenseur de Weyl}$$

• Non-unicité de la quantification :

Non-unicité \leftrightarrow Applications naturelles projectivement
invariantes de $\mathcal{S}_\delta^k(M)$ dans $\mathcal{S}_\delta^{k-l}(M)$

$$\omega \rightarrow \Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \rightarrow \kappa(.,.) = \Omega(\omega^{-1}(.), \omega^{-1}(.))$$

$$\kappa \rightarrow \kappa_0 \in \mathcal{C}^\infty(P, \wedge^2 \mathbb{R}^{m^*} \otimes \mathbb{R}^{m^*} \otimes \mathbb{R}^m)_H$$

$\kappa_0 \rightarrow$ Tenseur de Weyl

$$W(u)(e_{i_1}, \dots, e_{i_{2j}}) := \sum_{\nu} \sum_{r_1, \dots, r_j} \kappa_0(u)_{i_{\nu(1)} i_{\nu(2)} r_{\sigma(1)}}^{r_1} \cdots \kappa_0(u)_{i_{\nu(2j-1)} i_{\nu(2j)} r_{\sigma(j)}}^{r_j}$$

• Non-unicité de la quantification :

Non-unicité \leftrightarrow Applications naturelles projectivement
invariantes de $\mathcal{S}_\delta^k(M)$ dans $\mathcal{S}_\delta^{k-l}(M)$

$$\omega \rightarrow \Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \rightarrow \kappa(.,.) = \Omega(\omega^{-1}(.), \omega^{-1}(.))$$

$$\kappa \rightarrow \kappa_0 \in \mathcal{C}^\infty(P, \wedge^2 \mathbb{R}^{m^*} \otimes \mathbb{R}^{m^*} \otimes \mathbb{R}^m)_H$$

$\kappa_0 \rightarrow$ Tenseur de Weyl

$$W(u)(e_{i_1}, \dots, e_{i_{2j}}) := \sum_{\nu} \sum_{r_1, \dots, r_j} \kappa_0(u)_{i_{\nu(1)} i_{\nu(2)} r_{\sigma(1)}}^{r_1} \cdots \kappa_0(u)_{i_{\nu(2j-1)} i_{\nu(2j)} r_{\sigma(j)}}^{r_j}$$

$$S \mapsto p^{*-1} \left(\sum_{r=0}^{l-2j} C_{k,l,r} \langle \text{Div}^{\omega^r} p^* S, \nabla_s^{\omega^{l-r-2j}} W \rangle \right)$$

Quantifications
naturelles
projectivement
équivariantes

Fabian Radoux

Introduction

Fibrés et
connexions de
Cartan

Le cas des
densités

Une formule
explicite

Non-unicité de la
quantification

**Autres
opérateurs
différentiels**

- **Autres opérateurs différentiels** : méthode de l'opérateur de Casimir :

- **Autres opérateurs différentiels** : méthode de l'opérateur de Casimir :

Opérateurs différentiels entre $E_1(M)$ et $E_2(M)$

- **Autres opérateurs différentiels** : méthode de l'opérateur de Casimir :

Opérateurs différentiels entre $E_1(M)$ et $E_2(M)$

Cas "plat"

Cas "courbe"

- **Autres opérateurs différentiels** : méthode de l'opérateur de Casimir :

Opérateurs différentiels entre $E_1(M)$ et $E_2(M)$

Cas "plat"

Cas "courbe"

Quantification affine :

"Quantification affine" :

$$\text{Si } S(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=k} C_\alpha(x) \xi^\alpha,$$

$$Q_\omega(S)(f) = \langle S, \nabla_s^{\omega^k} f \rangle$$

$$Q_{\text{Aff}}(S) = \sum_{|\alpha|=k} C_\alpha(x) \circ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$$

- **Autres opérateurs différentiels** : méthode de l'opérateur de Casimir :

Opérateurs différentiels entre $E_1(M)$ et $E_2(M)$

Cas "plat"

Cas "courbe"

Quantification affine :

"Quantification affine" :

$$\text{Si } S(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=k} C_\alpha(x) \xi^\alpha,$$

$$Q_\omega(S)(f) = \langle S, \nabla_s^{\omega^k} f \rangle$$

$$Q_{Aff}(S) = \sum_{|\alpha|=k} C_\alpha(x) \circ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$$

Application γ :

Application γ :

$$\gamma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)) : L_{h^*} Q_\omega(S)(f) - Q_\omega(S)(L_{h^*} f)$$

$$h \mapsto \gamma(h) = \mathcal{L}_{X^h} - L_{X^h} = Q_\omega((L_{h^*} + \gamma(h))S)(f)$$

Casimirs :

$$C|_{E_{k,s}} = \alpha_{k,s} \text{Id}_{E_{k,s}}$$

$$\mathcal{C} = C + 2 \sum_i \gamma(\epsilon^i) L_{X^{e_i}}$$

"Casimirs" :

$$C^\omega(S) = \alpha_{k,s} S \text{ si } S \in C^\infty(P, l_{k,s})$$

$$\mathcal{C}^\omega = C^\omega - 2 \sum_i \gamma(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(e_i)}$$

Casimirs :

$$C|_{E_{k,s}} = \alpha_{k,s} \text{Id}_{E_{k,s}}$$

$$\mathcal{C} = C + 2 \sum_i \gamma(\epsilon^i) L_{X^{e_i}}$$

Quantification :

$Q_{\text{Aff}}(Q(S))$, $Q(S)$ tel que

si $C(S) = \alpha S$, alors

$$\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S) \text{ et}$$

"tête" de $Q(S) = S$

"Casimirs" :

$$C^\omega(S) = \alpha_{k,s} S \text{ si } S \in C^\infty(P, I_{k,s})$$

$$\mathcal{C}^\omega = C^\omega - 2 \sum_i \gamma(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(e_i)}$$

Quantification :

$Q_\omega(Q(S))$, $Q(S)$ tel que

si $C^\omega(S) = \alpha S$, alors

$$\mathcal{C}^\omega(Q(S)) = \alpha Q(S) \text{ et}$$

"tête" de $Q(S) = S$

Casimirs :

$$C|_{E_{k,s}} = \alpha_{k,s} \text{Id}_{E_{k,s}}$$

$$\mathcal{C} = C + 2 \sum_i \gamma(\epsilon^i) L_{X^{e_i}}$$

Quantification :

$Q_{\text{Aff}}(Q(S))$, $Q(S)$ tel que

si $C(S) = \alpha S$, alors

$$\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S) \text{ et}$$

"tête" de $Q(S) = S$

Alors :

$$\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L \text{ car}$$

"Casimirs" :

$$C^\omega(S) = \alpha_{k,s} S \text{ si } S \in C^\infty(P, l_{k,s})$$

$$C^\omega = C^\omega - 2 \sum_i \gamma(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(e_i)}$$

Quantification :

$Q_\omega(Q(S))$, $Q(S)$ tel que

si $C^\omega(S) = \alpha S$, alors

$$C^\omega(Q(S)) = \alpha Q(S) \text{ et}$$

"tête" de $Q(S) = S$

Alors :

$$(L_{h^*} + \gamma(h)) \circ Q = Q \circ L_{h^*} \text{ car}$$

Casimirs :

$$C|_{E_{k,s}} = \alpha_{k,s} \text{Id}_{E_{k,s}}$$

$$\mathcal{C} = C + 2 \sum_i \gamma(\epsilon^i) L_{X^{e_i}}$$

Quantification :

$$Q_{\text{Aff}}(Q(S)), Q(S) \text{ tel que}$$

si $C(S) = \alpha S$, alors

$$\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S) \text{ et}$$

"tête" de $Q(S) = S$

Alors :

$$\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L \text{ car}$$

$$[\mathcal{C}, \mathcal{L}] = 0 \text{ et } [C, L] = 0$$

"Casimirs" :

$$C^\omega(S) = \alpha_{k,s} S \text{ si } S \in C^\infty(P, I_{k,s})$$

$$C^\omega = C^\omega - 2 \sum_i \gamma(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(e_i)}$$

Quantification :

$$Q_\omega(Q(S)), Q(S) \text{ tel que}$$

si $C^\omega(S) = \alpha S$, alors

$$C^\omega(Q(S)) = \alpha Q(S) \text{ et}$$

"tête" de $Q(S) = S$

Alors :

$$(L_{h^*} + \gamma(h)) \circ Q = Q \circ L_{h^*} \text{ car}$$

$$[C^\omega, L_{h^*} + \gamma(h)] = 0 \text{ et}$$

$$[C^\omega, L_{h^*}] = 0$$

- Conclusion : Cas “plat”

$$\partial_i$$

Cas “courbe”

$$L_{\omega^{-1}}(e_i)$$