Quantifications naturelles projectivement équivariantes

Fabian Radoux

Université de Lille 1

13 Février 2007

Introduction

- A l'origine : $qp \to QP$

$$qp \to \frac{1}{2}(QP + PQ)$$

avec $P = \partial_x$; $Q = x$.

Introduction

- A l'origine : $qp \to QP$

$$qp \to \frac{1}{2}(QP + PQ)$$

avec $P = \partial_x$; $Q = x$.

Problèmes : Dépendance en l'ordre

Introduction

- A l'origine : $qp \to QP$

$$qp \to \frac{1}{2}(QP + PQ)$$

avec $P = \partial_x$; $Q = x$.

Problèmes : Dépendance en l'ordre

Changements de variables

- Quantification : $Q : \mathcal{S}(M) \mapsto \mathcal{D}_{\frac{1}{2}}(M)$

- Quantification : $Q : \mathcal{S}(M) \mapsto \mathcal{D}_{\frac{1}{2}}(M)$

$$Q \text{ : bijection linéaire}$$

- Quantification : $Q : \mathcal{S}(M) \mapsto \mathcal{D}_{\frac{1}{2}}(M)$

  Q : bijection linéaire

  préserve le symbole principal

- Quantification : $Q : \mathcal{S}(M) \mapsto \mathcal{D}_{\frac{1}{2}}(M)$

  Q : bijection linéaire

  préserve le symbole principal

- $\nexists Q : Q(\Phi^* S) = \Phi^* Q(S)$ $\forall$ difféomorphisme local Φ

- Quantification : $Q : \mathcal{S}(M) \mapsto \mathcal{D}_{\frac{1}{2}}(M)$

  Q : bijection linéaire

  préserve le symbole principal

- $\nexists Q : Q(\Phi^* S) = \Phi^* Q(S) \; \forall$ difféomorphisme local Φ

  $\nexists Q : Q(L_X S) = L_X Q(S) \; \forall$ champ de vecteurs X

Cas “plat” :

- $\exists Q : Q(\Phi_g^* S) = \Phi_g^* Q(S) \; \forall g \in G$

Cas “plat” :

- $\exists Q : Q(\Phi_g^* S) = \Phi_g^* Q(S) \; \forall g \in G$

  $\exists Q : Q(L_{h^*} S) = L_{h^*} Q(S) \; \forall h \in \mathfrak{g}$

Cas "plat" :

- $\exists Q : Q(\Phi_g^* S) = \Phi_g^* Q(S) \; \forall g \in G$

  $\exists Q : Q(L_{h^*} S) = L_{h^*} Q(S) \; \forall h \in \mathfrak{g}$

- $PGL(m+1, \mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{R}P^m$

Cas “plat” :

- $\exists Q : Q(\Phi_g^* S) = \Phi_g^* Q(S) \; \forall g \in G$

  $\exists Q : Q(L_{h^*} S) = L_{h^*} Q(S) \; \forall h \in \mathfrak{g}$

- $PGL(m+1, \mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{R}P^m$

  $X \in sl(m+1, \mathbb{R}) \mapsto X^*$ champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$

Cas “plat” :

- $\exists Q : Q(\Phi_g^* S) = \Phi_g^* Q(S)\ \forall g \in G$

  $\exists Q : Q(L_{h^*} S) = L_{h^*} Q(S)\ \forall h \in \mathfrak{g}$

- $PGL(m+1, \mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{R}P^m$

  $X \in sl(m+1, \mathbb{R}) \mapsto X^*$ champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$

  $\exists Q : L_X Q(S) = Q(L_X S)\ \forall X \in sl(m+1, \mathbb{R})$

- Méthode de l'opérateur de Casimir :

$$C : \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \mapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \quad ; \quad \mathcal{C} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \mapsto \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$$

- Méthode de l'opérateur de Casimir :

$$C : \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \mapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \quad ; \quad \mathcal{C} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \mapsto \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$$

Condition : $\exists Q$ tel que si $C(S) = \alpha S$, alors

- Méthode de l'opérateur de Casimir :

$$C : \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \mapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \quad ; \quad \mathcal{C} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \mapsto \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$$

Condition : $\exists Q$ tel que si $C(S) = \alpha S$, alors

$$\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$$

- Méthode de l'opérateur de Casimir :

$$C : \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \mapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \quad ; \quad \mathcal{C} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \mapsto \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$$

Condition : $\exists Q$ tel que si $C(S) = \alpha S$, alors

$$\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S) \text{ et } \sigma(Q(S)) = S$$

Cas "courbe" :

$\bullet Q(\nabla) : \mathcal{S}^3(M) \mapsto \mathcal{D}^3(M)$

$$Q(\nabla) = Q(\nabla') \text{ si } \nabla' = \nabla + \alpha \vee id$$

- Conjecture : $Q(\nabla) : \mathcal{S}(M) \mapsto \mathcal{D}(M)$

- Conjecture : $Q(\nabla) : \mathcal{S}(M) \mapsto \mathcal{D}(M)$ naturel

- Conjecture : $Q(\nabla) : \mathcal{S}(M) \mapsto \mathcal{D}(M)$ naturel et

$$Q(\nabla) = Q(\nabla') \text{ si } \nabla' = \nabla + \alpha \vee id$$

- Conjecture : $Q(\nabla) : \mathcal{S}(M) \mapsto \mathcal{D}(M)$ naturel et

  $Q(\nabla) = Q(\nabla')$ si $\nabla' = \nabla + \alpha \vee id$

  $\phi_t^* Q(\nabla^0)(S) = Q(\phi_t^* \nabla^0)(\phi_t^* S)$

- Conjecture : $Q(\nabla) : \mathcal{S}(M) \mapsto \mathcal{D}(M)$ naturel et

$$Q(\nabla) = Q(\nabla') \text{ si } \nabla' = \nabla + \alpha \vee id$$

$$\phi_t^* Q(\nabla^0)(S) = Q(\phi_t^* \nabla^0)(\phi_t^* S)$$

$$\phi_t^* Q(\nabla^0)(S) = Q(\nabla^0)(\phi_t^* S)$$

- Conjecture : $Q(\nabla) : \mathcal{S}(M) \mapsto \mathcal{D}(M)$ naturel et

$$Q(\nabla) = Q(\nabla') \text{ si } \nabla' = \nabla + \alpha \vee id$$

$$\phi_t^* Q(\nabla^0)(S) = Q(\phi_t^* \nabla^0)(\phi_t^* S)$$

$$\phi_t^* Q(\nabla^0)(S) = Q(\nabla^0)(\phi_t^* S)$$

$$\frac{d}{dt} \phi_t^* Q(\nabla^0)(S)|_{t=0} = \frac{d}{dt} Q(\nabla^0)(\phi_t^* S)|_{t=0}$$

- Conjecture : $Q(\nabla) : \mathcal{S}(M) \mapsto \mathcal{D}(M)$ naturel et

$$Q(\nabla) = Q(\nabla') \text{ si } \nabla' = \nabla + \alpha \vee id$$

$$\phi_t^* Q(\nabla^0)(S) = Q(\phi_t^* \nabla^0)(\phi_t^* S)$$

$$\phi_t^* Q(\nabla^0)(S) = Q(\nabla^0)(\phi_t^* S)$$

$$\frac{d}{dt}\phi_t^* Q(\nabla^0)(S)|_{t=0} = \frac{d}{dt} Q(\nabla^0)(\phi_t^* S)|_{t=0}$$

$$L_X Q(\nabla^0)(S) = Q(\nabla^0)(L_X S) \; \forall X \in sl(m+1, \mathbb{R})$$

• Méthode de M. Bordemann :

•Méthode de M. Bordemann : $M \mapsto \tilde{M}$;

•Méthode de M. Bordemann : $M \mapsto \tilde{M}$;

$$\nabla \mapsto \tilde{\nabla};$$

•Méthode de M. Bordemann : $M \mapsto \tilde{M};$

$$\nabla \mapsto \tilde{\nabla};$$

$$S \mapsto \tilde{S};$$

•Méthode de M. Bordemann : $M \mapsto \tilde{M}$;

$$\nabla \mapsto \tilde{\nabla};$$

$$S \mapsto \tilde{S};$$

$$Q(\widetilde{\nabla)(S})(f) = \tau(\tilde{\nabla})(\tilde{S})(\tilde{f})$$

- Questions :

- Questions : Valeurs critiques de δ

- Questions : Valeurs critiques de δ

  Formule explicite

- Questions : Valeurs critiques de δ

  Formule explicite

  Unicité

- Questions : Valeurs critiques de δ

  Formule explicite

  Unicité

  Autres opérateurs différentiels

•Fibrés de Cartan et connexions de Cartan :

•Fibrés de Cartan et connexions de Cartan :

$$[\nabla] \to P \mapsto M$$

• Fibrés de Cartan et connexions de Cartan :

$$[\nabla] \to P \mapsto M$$

$$[\nabla] \to \omega : TP \mapsto \mathfrak{g}$$

•Fibrés de Cartan et connexions de Cartan :

$$[\nabla] \to P \mapsto M$$

$$[\nabla] \to \omega : TP \mapsto \mathfrak{g}$$

$$\omega_u : T_uP \mapsto \mathfrak{g} \text{ bijection } \forall u \in P$$

•Fibrés de Cartan et connexions de Cartan :

$$[\nabla] \to P \mapsto M$$

$$[\nabla] \to \omega : TP \mapsto \mathfrak{g}$$

$$\omega_u : T_u P \mapsto \mathfrak{g} \text{ bijection } \forall u \in P$$

$$T \to p^* T \in \mathcal{C}^\infty(P, V)_H$$

•Fibrés de Cartan et connexions de Cartan :

$$[\nabla] \to P \mapsto M$$

$$[\nabla] \to \omega : TP \mapsto \mathfrak{g}$$

$$\omega_u : T_uP \mapsto \mathfrak{g} \text{ bijection } \forall u \in P$$

$$T \to p^*T \in \mathcal{C}^\infty(P, V)_H$$

$$\text{avec } H = G_0 \rtimes G_1,\ \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

•Fibrés de Cartan et connexions de Cartan :

$$[\nabla] \to P \mapsto M$$

$$[\nabla] \to \omega : TP \mapsto \mathfrak{g}$$

$$\omega_u : T_uP \mapsto \mathfrak{g} \text{ bijection } \forall u \in P$$

$$T \to p^*T \in \mathcal{C}^\infty(P, V)_H$$

$$\text{avec } H = G_0 \rtimes G_1,\ \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{h},\ \mathfrak{g}_{-1} \cong \mathbb{R}^m$$

•Fibrés de Cartan et connexions de Cartan :

$$[\nabla] \to P \mapsto M$$

$$[\nabla] \to \omega : TP \mapsto \mathfrak{g}$$

$$\omega_u : T_uP \mapsto \mathfrak{g} \text{ bijection } \forall u \in P$$

$$T \to p^*T \in \mathcal{C}^\infty(P, V)_H$$

$$\text{avec } H = G_0 \rtimes G_1,\ \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{h},\ \mathfrak{g}_{-1} \cong \mathbb{R}^m$$

$$\omega \to \nabla^\omega(e_i) = L_{\omega^{-1}(e_i)},\ e_i \in \mathfrak{g}_{-1}$$

•Fibrés de Cartan et connexions de Cartan :

$$[\nabla] \to P \mapsto M$$

$$[\nabla] \to \omega : TP \mapsto \mathfrak{g}$$

$$\omega_u : T_uP \mapsto \mathfrak{g} \text{ bijection } \forall u \in P$$

$$T \to p^*T \in \mathcal{C}^\infty(P, V)_H$$

$$\text{avec } H = G_0 \rtimes G_1,\ \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{h},\ \mathfrak{g}_{-1} \cong \mathbb{R}^m$$

$$\omega \to \nabla^\omega(e_i) = L_{\omega^{-1}(e_i)},\ e_i \in \mathfrak{g}_{-1}$$

$$f\ G_0\text{-équivariant} \Rightarrow \nabla^\omega f$$

G_0-équivariant

•Fibrés de Cartan et connexions de Cartan :

$$[\nabla] \to P \mapsto M$$

$$[\nabla] \to \omega : TP \mapsto \mathfrak{g}$$

$$\omega_u : T_uP \mapsto \mathfrak{g} \text{ bijection } \forall u \in P$$

$$T \to p^*T \in \mathcal{C}^\infty(P, V)_H$$

$$\text{avec } H = G_0 \rtimes G_1\,,\ \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{h},\ \mathfrak{g}_{-1} \cong \mathbb{R}^m$$

$$\omega \to \nabla^\omega(e_i) = L_{\omega^{-1}(e_i)},\ e_i \in \mathfrak{g}_{-1}$$

f G_0-équivariant$\Rightarrow \nabla^\omega f$ G_0-équivariant

f G_1-équivariant$\not\Rightarrow \nabla^\omega f$ G_1-équivariant

•Cas des densités :

•Cas des densités :

$$S \to p^*S \in \mathcal{C}^\infty(P, S^k_\delta(\mathbb{R}^m))_H$$

•Cas des densités :

$$S \to p^*S \in \mathcal{C}^\infty(P, S^k_\delta(\mathbb{R}^m))_H$$

$$f \to p^*f \in \mathcal{C}^\infty(P, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_H$$

•Cas des densités :

$$S \to p^*S \in \mathcal{C}^\infty(P, S^k_\delta(\mathbb{R}^m))_H$$

$$f \to p^*f \in \mathcal{C}^\infty(P, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_H$$

$$\omega \to Div^\omega = \sum_i i(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(e_i)}$$

•Cas des densités :

$$S \to p^*S \in \mathcal{C}^\infty(P, S^k_\delta(\mathbb{R}^m))_H$$

$$f \to p^*f \in \mathcal{C}^\infty(P, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_H$$

$$\omega \to Div^\omega = \sum_i i(\epsilon^i)L_{\omega^{-1}(e_i)}$$

Condition : $L_{h^*}Q(p^*S)(p^*f) = 0 \ \forall h \in \mathfrak{g}_1$

•Cas des densités :

$$S \to p^*S \in \mathcal{C}^\infty(P, S^k_\delta(\mathbb{R}^m))_H$$

$$f \to p^*f \in \mathcal{C}^\infty(P, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_H$$

$$\omega \to Div^\omega = \sum_i i(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(e_i)}$$

Condition : $L_{h^*} Q(p^*S)(p^*f) = 0 \; \forall h \in \mathfrak{g}_1$

$\langle p^*S, \nabla^{\omega^k}_s p^*f \rangle$ pas G_1-équivariant !

•Cas des densités :

$$S \to p^*S \in \mathcal{C}^\infty(P, S^k_\delta(\mathbb{R}^m))_H$$

$$f \to p^*f \in \mathcal{C}^\infty(P, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_H$$

$$\omega \to Div^\omega = \sum_i i(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(e_i)}$$

Condition : $L_{h^*} Q(p^*S)(p^*f) = 0 \; \forall h \in \mathfrak{g}_1$

$\langle p^*S, \nabla^{\omega^k}_s p^*f \rangle$ pas G_1-équivariant !

On ajoute des termes d'ordres inférieurs en p^*f...

•Cas des densités :

$$S \to p^*S \in \mathcal{C}^\infty(P, S^k_\delta(\mathbb{R}^m))_H$$

$$f \to p^*f \in \mathcal{C}^\infty(P, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_H$$

$$\omega \to Div^\omega = \sum_i i(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(e_i)}$$

Condition : $L_{h^*} Q(p^*S)(p^*f) = 0 \; \forall h \in \mathfrak{g}_1$

$\langle p^*S, \nabla^{\omega^k}_s p^*f \rangle$ pas G_1-équivariant !

On ajoute des termes d'ordres inférieurs en p^*f...

On trouve alors :

$$Q_M(\nabla, S)(f) = {p^*}^{-1}\left(\sum_{l=0}^k C_{k,l} \langle Div^{\omega^l} p^*S, \nabla^{\omega^{k-l}}_s p^*f \rangle\right),$$

avec $C_{k,l} = \dfrac{(\lambda + \frac{k-1}{m+1}) \cdots (\lambda + \frac{k-l}{m+1})}{\gamma_{2k-1} \cdots \gamma_{2k-l}} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}, \forall l \geq 1, \quad C_{k,0} = 1$

- Formule explicite :

•Formule explicite : $\Upsilon \to \sigma_\Upsilon : P^1M \mapsto P$

•Formule explicite : $\Upsilon \to \sigma_\Upsilon : P^1M \mapsto P$

$$\sigma_\Upsilon \to \tau : P \mapsto \mathfrak{g}_1$$

•Formule explicite : $\Upsilon \to \sigma_\Upsilon : P^1M \mapsto P$

$$\sigma_\Upsilon \to \tau : P \mapsto \mathfrak{g}_1$$

$\nabla_s^{\omega^l}(p^*f) = \sum_{t=0}^{l} \tau^t \vee A_t$, où A_t est égal à :

$$\begin{pmatrix} l \\ t \end{pmatrix} \prod_{j=1}^{t}(-\lambda(m+1) - l + j)p^*(\pi_{l-t}(\sum_{j=0}^{l-t}(\nabla_s + T_1)^j)f),$$

si $T_1|_{\mathcal{S}^j T^*M \otimes \mathcal{F}_\lambda(M)} = (-\lambda(m+1) - j)(j+1) \vee r$

•Formule explicite : $\Upsilon \to \sigma_\Upsilon : P^1M \mapsto P$

$$\sigma_\Upsilon \to \tau : P \mapsto \mathfrak{g}_1$$

$\nabla_s^{\omega^l}(p^*f) = \sum_{t=0}^{l} \tau^t \vee A_t$, où A_t est égal à :

$$\begin{pmatrix} l \\ t \end{pmatrix} \prod_{j=1}^{t} (-\lambda(m+1) - l + j) p^*(\pi_{l-t}(\sum_{j=0}^{l-t} (\nabla_s + T_1)^j) f),$$

si $T_1|_{\mathcal{S}^j T^*M \otimes \mathcal{F}_\lambda(M)} = (-\lambda(m+1) - j)(j+1) \vee r$

$Div^{\omega^l}(p^*S) = \sum_{t=0}^{l} \langle \tau^t, B_t \rangle$, où B_t est égal à :

$$\begin{pmatrix} l \\ t \end{pmatrix} \prod_{j=1}^{t} (\gamma_{2k-1}(m+1) - l + j) p^*(\pi_{l-t}(\sum_{j=0}^{l-t} (Div + T_2)^j) S),$$

si $T_2|_{\mathcal{S}^j_\delta(M)} = ((m+1)\gamma_{2k-1} - k + j)(k - j + 1) i(r)$

Formule :

$$Q_M(\nabla, S)(f) = \sum_{l=0}^{k} C_{k,l}\langle \pi_l(\sum_{j=0}^{l}(Div + T_2)^j)S, \pi_{k-l}(\sum_{j=0}^{k-l}(\nabla_s + T_1)^j)f\rangle.$$

•Non-unicité de la quantification :

•Non-unicité de la quantification :

Non-unicité $\leftrightarrow$ Applications naturelles projectivement invariantes de $\mathcal{S}^k_\delta(M)$ dans $\mathcal{S}^{k-l}_\delta(M)$

•Non-unicité de la quantification :

Non-unicité $\leftrightarrow$ Applications naturelles projectivement invariantes de $\mathcal{S}^k_\delta(M)$ dans $\mathcal{S}^{k-l}_\delta(M)$

$$\omega \to \Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega] \to \kappa(.,.) = \Omega(\omega^{-1}(.),\omega^{-1}(.))$$

•Non-unicité de la quantification :

Non-unicité $\leftrightarrow$ Applications naturelles projectivement invariantes de $\mathcal{S}^k_\delta(M)$ dans $\mathcal{S}^{k-l}_\delta(M)$

$$\omega \to \Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \to \kappa(.,.) = \Omega(\omega^{-1}(.), \omega^{-1}(.))$$

$$\kappa \to \kappa_0 \in \mathcal{C}^\infty(P, \wedge^2\mathbb{R}^{m*} \otimes \mathbb{R}^{m*} \otimes \mathbb{R}^m)_H$$

•Non-unicité de la quantification :

Non-unicité $\leftrightarrow$ Applications naturelles projectivement invariantes de $\mathcal{S}^k_\delta(M)$ dans $\mathcal{S}^{k-l}_\delta(M)$

$\omega \to \Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \to \kappa(.,.) = \Omega(\omega^{-1}(.), \omega^{-1}(.))$

$\kappa \to \kappa_0 \in \mathcal{C}^\infty(P, \wedge^2\mathbb{R}^{m*} \otimes \mathbb{R}^{m*} \otimes \mathbb{R}^m)_H$

$\kappa_0 \to$ Tenseur de Weyl

•Non-unicité de la quantification :

Non-unicité $\leftrightarrow$ Applications naturelles projectivement invariantes de $\mathcal{S}^k_\delta(M)$ dans $\mathcal{S}^{k-l}_\delta(M)$

$\omega \to \Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \to \kappa(.,.) = \Omega(\omega^{-1}(.), \omega^{-1}(.))$

$\kappa \to \kappa_0 \in \mathcal{C}^\infty(P, \wedge^2 \mathbb{R}^{m*} \otimes \mathbb{R}^{m*} \otimes \mathbb{R}^m)_H$

$\kappa_0 \to$ Tenseur de Weyl

$W(u)(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{2j}}) :=$
$\sum_\nu \sum_{r_1,\ldots,r_j} \kappa_0(u)^{r_1}_{i_{\nu(1)} i_{\nu(2)} r_{\sigma(1)}} \ldots \kappa_0(u)^{r_j}_{i_{\nu(2j-1)} i_{\nu(2j)} r_{\sigma(j)}}$

•Non-unicité de la quantification :

Non-unicité $\leftrightarrow$ Applications naturelles projectivement invariantes de $\mathcal{S}^k_\delta(M)$ dans $\mathcal{S}^{k-l}_\delta(M)$

$\omega \to \Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega] \to \kappa(.,.) = \Omega(\omega^{-1}(.),\omega^{-1}(.))$

$\kappa \to \kappa_0 \in \mathcal{C}^\infty(P, \wedge^2\mathbb{R}^{m*} \otimes \mathbb{R}^{m*} \otimes \mathbb{R}^m)_H$

$\kappa_0 \to$ Tenseur de Weyl

$W(u)(e_{i_1},\ldots,e_{i_{2j}}) :=$
$\sum_\nu \sum_{r_1,\ldots,r_j} \kappa_0(u)^{r_1}_{i_{\nu(1)}i_{\nu(2)}r_{\sigma(1)}} \ldots \kappa_0(u)^{r_j}_{i_{\nu(2j-1)}i_{\nu(2j)}r_{\sigma(j)}}$

$S \mapsto {p^*}^{-1}(\sum_{r=0}^{l-2j} C_{k,l,r}\langle Div^{\omega^r} p^* S, \nabla_s^{\omega^{l-r-2j}} W\rangle)$

•Autres opérateurs différentiels : méthode de l'opérateur de Casimir :

•Autres opérateurs différentiels : méthode de l'opérateur de Casimir :

Opérateurs différentiels entre $E_1(M)$ et $E_2(M)$

•Autres opérateurs différentiels : méthode de l'opérateur de Casimir :

Opérateurs différentiels entre $E_1(M)$ et $E_2(M)$

Cas "plat"

Cas "courbe"

•Autres opérateurs différentiels : méthode de l'opérateur de Casimir :

Opérateurs différentiels entre $E_1(M)$ et $E_2(M)$

Cas “plat”

Quantification affine :

Si $S(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=k} C_\alpha(x)\xi^\alpha$,

$Q_{Aff}(S) = \sum_{|\alpha|=k} C_\alpha(x) \circ (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha$

Cas “courbe”

”Quantification affine” :

$Q_\omega(S)(f) = \langle S, \nabla_s^{\omega^k} f\rangle$

•Autres opérateurs différentiels : méthode de l'opérateur de Casimir :

Opérateurs différentiels entre $E_1(M)$ et $E_2(M)$

Cas "plat"	Cas "courbe"
Quantification affine :	"Quantification affine" :
Si $S(x,\xi) = \sum_{\vert\alpha\vert=k} C_\alpha(x)\xi^\alpha$,	$Q_\omega(S)(f) = \langle S, \nabla_s^{\omega^k} f\rangle$
$Q_{Aff}(S) = \sum_{\vert\alpha\vert=k} C_\alpha(x) \circ (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha$	
Application γ :	Application γ :
$\gamma : \mathfrak{g} \to gl(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), \mathcal{S}(\mathbb{R}^m))$:	$L_{h^*} Q_\omega(S)(f) - Q_\omega(S)(L_{h^*} f)$
$h \mapsto \gamma(h) = \mathcal{L}_{X^h} - L_{X^h}$	$= Q_\omega((L_{h^*} + \gamma(h))S)(f)$

Casimirs :

$C|_{E_{k,s}} = \alpha_{k,s}\mathrm{Id}_{E_{k,s}}$

$\mathcal{C} = C + 2\sum_i \gamma(\epsilon^i)L_{X^{e_i}}$

"Casimirs" :

$C^\omega(S) = \alpha_{k,s}S$ si $S \in C^\infty(P, I_{k,s})$

$\mathcal{C}^\omega = C^\omega - 2\sum_i \gamma(\epsilon^i)L_{\omega^{-1}(e_i)}$

Casimirs :

$C|_{E_{k,s}} = \alpha_{k,s}\mathrm{Id}_{E_{k,s}}$

$\mathcal{C} = C + 2\sum_i \gamma(\epsilon^i)L_{X^{e_i}}$

Quantification :

$Q_{Aff}(Q(S))$, $Q(S)$ tel que

si $C(S) = \alpha S$, alors

$\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$ et

"tête" de $Q(S) = S$

"Casimirs" :

$C^\omega(S) = \alpha_{k,s}S$ si $S \in C^\infty(P, I_{k,s})$

$\mathcal{C}^\omega = C^\omega - 2\sum_i \gamma(\epsilon^i)L_{\omega^{-1}(e_i)}$

Quantification :

$Q_\omega(Q(S))$, $Q(S)$ tel que

si $C^\omega(S) = \alpha S$, alors

$\mathcal{C}^\omega(Q(S)) = \alpha Q(S)$ et

"tête" de $Q(S) = S$

Casimirs :

$C|_{E_{k,s}} = \alpha_{k,s}\mathrm{Id}_{E_{k,s}}$

$\mathcal{C} = C + 2\sum_i \gamma(\epsilon^i)L_{X^{e_i}}$

Quantification :

$Q_{Aff}(Q(S))$, $Q(S)$ tel que

si $C(S) = \alpha S$, alors

$\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$ et

"tête" de $Q(S) = S$

Alors :

$\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$ car

"Casimirs" :

$C^\omega(S) = \alpha_{k,s}S$ si $S \in C^\infty(P, I_{k,s})$

$\mathcal{C}^\omega = C^\omega - 2\sum_i \gamma(\epsilon^i)L_{\omega^{-1}(e_i)}$

Quantification :

$Q_\omega(Q(S))$, $Q(S)$ tel que

si $C^\omega(S) = \alpha S$, alors

$\mathcal{C}^\omega(Q(S)) = \alpha Q(S)$ et

"tête" de $Q(S) = S$

Alors :

$(L_{h^*} + \gamma(h)) \circ Q = Q \circ L_{h^*}$ car

Casimirs :

$C|_{E_{k,s}} = \alpha_{k,s}\mathrm{Id}_{E_{k,s}}$

$\mathcal{C} = C + 2\sum_i \gamma(\epsilon^i) L_{X^{e_i}}$

Quantification :

$Q_{Aff}(Q(S))$, $Q(S)$ tel que

si $C(S) = \alpha S$, alors

$\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$ et

"tête" de $Q(S) = S$

Alors :

$\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$ car

$[\mathcal{C}, \mathcal{L}] = 0$ et $[C, L] = 0$

"Casimirs" :

$C^\omega(S) = \alpha_{k,s} S$ si $S \in C^\infty(P, I_{k,s})$

$\mathcal{C}^\omega = C^\omega - 2\sum_i \gamma(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(e_i)}$

Quantification :

$Q_\omega(Q(S))$, $Q(S)$ tel que

si $C^\omega(S) = \alpha S$, alors

$\mathcal{C}^\omega(Q(S)) = \alpha Q(S)$ et

"tête" de $Q(S) = S$

Alors :

$(L_{h^*} + \gamma(h)) \circ Q = Q \circ L_{h^*}$ car

$[\mathcal{C}^\omega, L_{h^*} + \gamma(h)] = 0$ et $[C^\omega, L_{h^*}] = 0$

•Conclusion : Cas "plat"	Cas "courbe"
∂_i	$L_{\omega^{-1}(e_i)}$