Quantifications équivariantes

Fabian Radoux

Jussieu, 28 Mars 2011

Introduction

• Observables classiques : fonctions sur une variété symplectique $(\mathcal{M}, \omega)$.

Introduction

• Observables classiques : fonctions sur une variété symplectique $(\mathcal{M}, \omega)$.

• Observables quantiques : opérateurs sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

Introduction

• Observables classiques : fonctions sur une variété symplectique $(\mathcal{M}, \omega)$.

• Observables quantiques : opérateurs sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

• Problème de Dirac : trouver une bijection $Q : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ telle que

Introduction

• Observables classiques : fonctions sur une variété symplectique $(\mathcal{M}, \omega)$.

• Observables quantiques : opérateurs sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

• Problème de Dirac : trouver une bijection $Q : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ telle que

- $Q(\mathbf{1}_{\mathcal{M}}) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$,

Introduction

• Observables classiques : fonctions sur une variété symplectique $(\mathcal{M}, \omega)$.

• Observables quantiques : opérateurs sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

• Problème de Dirac : trouver une bijection $Q : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ telle que

- $Q(\mathbf{1}_{\mathcal{M}}) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$,
- $Q(\bar{f}) = Q(f)^*$,

Introduction

• Observables classiques : fonctions sur une variété symplectique $(\mathcal{M},\omega)$.

• Observables quantiques : opérateurs sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

• Problème de Dirac : trouver une bijection $Q : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ telle que

- $Q(\mathbf{1}_{\mathcal{M}}) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$,
- $Q(\bar{f}) = Q(f)^*$,
- $Q(\{f,g\}) = \frac{i}{\hbar}[Q(f), Q(g)]$.

- Hamiltonien H, observable F,

Mécanique classique Mécanique quantique

$$\frac{dF}{dt} = \{H, F\} \qquad \longmapsto \qquad \frac{dQ(F)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[Q(H), Q(F)]$$

- Hamiltonien H, observable F,

Mécanique classique Mécanique quantique

$$\frac{dF}{dt} = \{H, F\} \qquad \longmapsto \qquad \frac{dQ(F)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[Q(H), Q(F)]$$

•Préquantification : si $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathcal{M})$, si $\omega = d\alpha$,

- Hamiltonien H, observable F,

Mécanique classique Mécanique quantique

$\frac{dF}{dt} = \{H, F\} \quad \longmapsto \quad \frac{dQ(F)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[Q(H), Q(F)]$

•Préquantification : si $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathcal{M})$, si $\omega = d\alpha$,

$$Q(f) = \frac{\hbar}{i} X_f + f - \langle X_f, \alpha \rangle.$$

•Problème de la préquantification : si $\mathcal{M} = T^*M$, $\mathrm{L}^2(T^*M)$ est trop grand$\longrightarrow$réduction de $\mathcal{H}$.

- Problème de la préquantification : si $\mathcal{M} = T^*M$, $\mathrm{L}^2(T^*M)$ est trop grand$\longrightarrow$réduction de $\mathcal{H}$.
- Polarisation de $(\mathcal{M}, \omega)$: distribution $P \subset T\mathcal{M}$.

•Problème de la préquantification : si $\mathcal{M} = T^*M$, $\mathrm{L}^2(T^*M)$ est trop grand$\longrightarrow$réduction de $\mathcal{H}$.

• Polarisation de $(\mathcal{M}, \omega)$: distribution $P \subset T\mathcal{M}$.

• P permet de réduire $\mathcal{H}$, on passe de $\mathcal{H}$ à $\mathcal{H}^P$.

•Problème de la préquantification : si $\mathcal{M} = T^*M$, $\mathrm{L}^2(T^*M)$ est trop grand$\longrightarrow$réduction de $\mathcal{H}$.

• Polarisation de $(\mathcal{M}, \omega)$: distribution $P \subset T\mathcal{M}$.

• P permet de réduire $\mathcal{H}$, on passe de $\mathcal{H}$ à $\mathcal{H}^P$.

•L'observable f est quantifiable si $Q(f)$ préserve $\mathcal{H}^P$.

•Problème de la préquantification : si $\mathcal{M} = T^*M$, $\mathrm{L}^2(T^*M)$ est trop grand$\longrightarrow$réduction de $\mathcal{H}$.

• Polarisation de $(\mathcal{M}, \omega)$: distribution $P \subset T\mathcal{M}$.

• P permet de réduire $\mathcal{H}$, on passe de $\mathcal{H}$ à $\mathcal{H}^P$.

•L'observable f est quantifiable si $Q(f)$ préserve $\mathcal{H}^P$.

•L'ensemble des observables quantifiables : $\mathcal{A}$.

•Problème de la préquantification : si $\mathcal{M} = T^*M$, $\mathrm{L}^2(T^*M)$ est trop grand$\longrightarrow$réduction de $\mathcal{H}$.

• Polarisation de $(\mathcal{M}, \omega)$: distribution $P \subset T\mathcal{M}$.

• P permet de réduire $\mathcal{H}$, on passe de $\mathcal{H}$ à $\mathcal{H}^P$.

•L'observable f est quantifiable si $Q(f)$ préserve $\mathcal{H}^P$.

•L'ensemble des observables quantifiables : $\mathcal{A}$.

•Quantification géométrique Q_G : $Q_G = Q|_{\mathcal{A}}$.

•Si $\mathcal{M} = T^*M$, si P est la polarisation verticale, alors

$$\mathcal{H}^P \cong \mathrm{L}^2(M),\ \mathcal{A} \cong \mathcal{S}_{\leq 1}(M),$$

•Si $\mathcal{M} = T^*M$, si P est la polarisation verticale, alors

$$\mathcal{H}^P \cong \mathrm{L}^2(M),\ \mathcal{A} \cong \mathcal{S}_{\leq 1}(M),$$

$$Q_G(X^i(x)p_i + A(x)) = \frac{\hbar}{i}X^i(x)\partial_i + A(x).$$

•Si $\mathcal{M} = T^*M$, si P est la polarisation verticale, alors

$$\mathcal{H}^P \cong \mathrm{L}^2(M),\ \mathcal{A} \cong \mathcal{S}_{\leq 1}(M),$$

$$Q_G(X^i(x)p_i + A(x)) = \frac{\hbar}{i} X^i(x)\partial_i + A(x).$$

•Est-il possible d'étendre la quantification géométrique à $\mathcal{S}(M)$?

•Si $\mathcal{M} = T^*M$, si P est la polarisation verticale, alors

$$\mathcal{H}^P \cong \mathrm{L}^2(M),\ \mathcal{A} \cong \mathcal{S}_{\leq 1}(M),$$

$$Q_G(X^i(x)p_i + A(x)) = \frac{\hbar}{i} X^i(x)\partial_i + A(x).$$

•Est-il possible d'étendre la quantification géométrique à $\mathcal{S}(M)$?

•Cette prolongation est-elle unique ?

•Si $\mathcal{M} = T^*M$, si P est la polarisation verticale, alors

$$\mathcal{H}^P \cong \mathrm{L}^2(M),\ \mathcal{A} \cong \mathcal{S}_{\leq 1}(M),$$

$$Q_G(X^i(x)p_i + A(x)) = \frac{\hbar}{i}X^i(x)\partial_i + A(x).$$

•Est-il possible d'étendre la quantification géométrique à $\mathcal{S}(M)$?

•Cette prolongation est-elle unique ?

•Est-il possible de rétablir l'unicité ?

Quantification équivariante

•Il y a beaucoup d'extensions de la quantification géométrique à $\mathcal{S}(M)$.

Quantification équivariante

•Il y a beaucoup d'extensions de la quantification géométrique à $\mathcal{S}(M)$.

•Idée pour rétablir l'unicité : ajouter une condition de symétrie.

Quantification équivariante

•Il y a beaucoup d'extensions de la quantification géométrique à $\mathcal{S}(M)$.

•Idée pour rétablir l'unicité : ajouter une condition de symétrie.

•La quantification géométrique est l'unique application $Q : \mathcal{S}_{\leq 1}(M) \to \mathcal{D}(M)$ telle que $L_X Q = 0$ pour tout $X \in \mathrm{Vect}(M)$.

Quantification équivariante

•Il y a beaucoup d'extensions de la quantification géométrique à $\mathcal{S}(M)$.

•Idée pour rétablir l'unicité : ajouter une condition de symétrie.

•La quantification géométrique est l'unique application $Q : \mathcal{S}_{\leq 1}(M) \to \mathcal{D}(M)$ telle que $L_X Q = 0$ pour tout $X \in \mathrm{Vect}(M)$.

•Il n'y a pas de prolongation Q de la quantification géométrique telle que $L_X Q = 0$ pour tout $X \in \mathrm{Vect}(M)$.

•Quantification équivariante : action d'un groupe de Lie G sur M : $\Phi : G \times M \to M$.

•Quantification équivariante : action d'un groupe de Lie G sur M : $\Phi : G \times M \to M$.

•Quantification équivariante Q : bijection linéaire Q : $\mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$ t.q. $\sigma(Q(S)) = S$ et t.q. $Q(\Phi_g^* S) = \Phi_g^* Q(S)\ \forall g \in G$.

•Quantification équivariante : action d'un groupe de Lie G sur M : $\Phi : G \times M \to M$.

•Quantification équivariante Q : bijection linéaire Q : $\mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$ t.q. $\sigma(Q(S)) = S$ et t.q. $Q(\Phi_g^* S) = \Phi_g^* Q(S)\ \forall g \in G$.

•$Q(L_{h^*} S) = L_{h^*} Q(S)\ \forall h \in \mathfrak{g}$.

•Quantification équivariante : action d'un groupe de Lie G sur M : $\Phi : G \times M \to M$.

•Quantification équivariante Q : bijection linéaire Q : $\mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$ t.q. $\sigma(Q(S)) = S$ et t.q. $Q(\Phi_g^* S) = \Phi_g^* Q(S)\ \forall g \in G$.

•$Q(L_{h^*} S) = L_{h^*} Q(S)\ \forall h \in \mathfrak{g}$.

•Idée : prendre G assez petit pour avoir une quantification et assez grand pour avoir l'unicité.

•Quantification équivariante : action d'un groupe de Lie G sur M : $\Phi : G \times M \to M$.

•Quantification équivariante Q : bijection linéaire Q : $\mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$ t.q. $\sigma(Q(S)) = S$ et t.q. $Q(\Phi_g^* S) = \Phi_g^* Q(S)\ \forall g \in G$.

•$Q(L_{h^*} S) = L_{h^*} Q(S)\ \forall h \in \mathfrak{g}$.

•Idée : prendre G assez petit pour avoir une quantification et assez grand pour avoir l'unicité.

•Cas projectif (P. Lecomte, V. Ovsienko) :
• $PGL(m+1, \mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{R}P^m$.

•Quantification équivariante : action d'un groupe de Lie G sur M : $\Phi : G \times M \to M$.

•Quantification équivariante Q : bijection linéaire $Q : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$ t.q. $\sigma(Q(S)) = S$ et t.q. $Q(\Phi_g^* S) = \Phi_g^* Q(S)\ \forall g \in G$.

•$Q(L_{h^*} S) = L_{h^*} Q(S)\ \forall h \in \mathfrak{g}$.

•Idée : prendre G assez petit pour avoir une quantification et assez grand pour avoir l'unicité.

•Cas projectif (P. Lecomte, V. Ovsienko) :
• $PGL(m+1, \mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{R}P^m$.

•$X \in \mathfrak{sl}(m+1, \mathbb{R}) \mapsto X^*$ champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$.

•Quantification équivariante : action d'un groupe de Lie G sur M : $\Phi : G \times M \to M$.

•Quantification équivariante Q : bijection linéaire Q : $\mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$ t.q. $\sigma(Q(S)) = S$ et t.q. $Q(\Phi_g^* S) = \Phi_g^* Q(S)\ \forall g \in G$.

•$Q(L_{h^*} S) = L_{h^*} Q(S)\ \forall h \in \mathfrak{g}$.

•Idée : prendre G assez petit pour avoir une quantification et assez grand pour avoir l'unicité.

•Cas projectif (P. Lecomte, V. Ovsienko) :
• $PGL(m+1, \mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{R}P^m$.

•$X \in \mathfrak{sl}(m+1, \mathbb{R}) \mapsto X^*$ champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$.

•$\exists Q : L_X Q(S) = Q(L_X S)\ \forall X \in \mathfrak{sl}(m+1, \mathbb{R})$.

•Cas conforme (C. Duval, P. Lecomte, V. Ovsienko) :

• $SO(p+1, q+1)$ agit sur $S^p \times S^q$.

•Cas conforme (C. Duval, P. Lecomte, V. Ovsienko) :

• $SO(p+1, q+1)$ agit sur $S^p \times S^q$.

•$X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1) \mapsto X^*$ champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$.

•Cas conforme (C. Duval, P. Lecomte, V. Ovsienko) :

• $SO(p+1, q+1)$ agit sur $S^p \times S^q$.

•$X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1) \mapsto X^*$ champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$.

•$\exists Q : L_X Q(S) = Q(L_X S)\ \forall X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1)$.

•Cas conforme (C. Duval, P. Lecomte, V. Ovsienko) :

• $SO(p+1,q+1)$ agit sur $S^p \times S^q$.

•$X \in \mathfrak{so}(p+1,q+1) \mapsto X^*$ champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$.

•$\exists Q : L_X Q(S) = Q(L_X S) \; \forall X \in \mathfrak{so}(p+1,q+1)$.

• Méthode de l'opérateur de Casimir : $\mathfrak{l}$: Algèbre de Lie semi-simple pourvue d'une forme de Killing non dégénérée K.

•Cas conforme (C. Duval, P. Lecomte, V. Ovsienko) :

• $SO(p+1, q+1)$ agit sur $S^p \times S^q$.

•$X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1) \mapsto X^*$ champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$.

•$\exists Q : L_X Q(S) = Q(L_X S)\ \forall X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1)$.

• Méthode de l'opérateur de Casimir : $\mathfrak{l}$: Algèbre de Lie semi-simple pourvue d'une forme de Killing non dégénérée K.

• (V, β) : représentation de $\mathfrak{l}$.

•Cas conforme (C. Duval, P. Lecomte, V. Ovsienko) :

• $SO(p+1,q+1)$ agit sur $S^p \times S^q$.

•$X \in \mathfrak{so}(p+1,q+1) \mapsto X^*$ champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$.

•$\exists Q : L_X Q(S) = Q(L_X S)\ \forall X \in \mathfrak{so}(p+1,q+1)$.

• Méthode de l'opérateur de Casimir : $\mathfrak{l}$: Algèbre de Lie semi-simple pourvue d'une forme de Killing non dégénérée K.

• (V,β) : représentation de $\mathfrak{l}$.

• $(u_i : i \leqslant n)$:base de $\mathfrak{l}$; $(u_i' : i \leqslant n)$: base Killing-duale $(K(u_i,u_j') = \delta_{i,j})$.

•Cas conforme (C. Duval, P. Lecomte, V. Ovsienko) :

• $SO(p+1,q+1)$ agit sur $S^p \times S^q$.

•$X \in \mathfrak{so}(p+1,q+1) \mapsto X^*$ champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$.

•$\exists Q : L_X Q(S) = Q(L_X S) \; \forall X \in \mathfrak{so}(p+1,q+1)$.

• Méthode de l'opérateur de Casimir : $\mathfrak{l}$: Algèbre de Lie semi-simple pourvue d'une forme de Killing non dégénérée K.

• (V,β) : représentation de $\mathfrak{l}$.

• $(u_i : i \leqslant n)$:base de $\mathfrak{l}$; $(u'_i : i \leqslant n)$: base Killing-duale $(K(u_i,u'_j) = \delta_{i,j})$.

• Opérateur de Casimir (V,β) :

$$\sum_{i=1}^{n} \beta(u'_i)\beta(u_i).$$

- $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), L)$ et $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \mathcal{L})$ sont des représentations de $\mathfrak{g}$.

- $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), L)$ et $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \mathcal{L})$ sont des représentations de $\mathfrak{g}$.
- C et $\mathcal{C}$: opérateurs de Casimir de $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{S}(M)$ et $\mathcal{D}(M)$.

- $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), L)$ et $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \mathcal{L})$ sont des représentations de $\mathfrak{g}$.
- C et $\mathcal{C}$: opérateurs de Casimir de $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{S}(M)$ et $\mathcal{D}(M)$.
- Si $C(S) = \alpha S$ et $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$, alors $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$.

- $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), L)$ et $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \mathcal{L})$ sont des représentations de $\mathfrak{g}$.
- C et $\mathcal{C}$: opérateurs de Casimir de $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{S}(M)$ et $\mathcal{D}(M)$.
- Si $C(S) = \alpha S$ et $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$, alors $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$.
- Dans les situations non-critiques : si $C(S) = \alpha S$, alors $\exists!$ $Q(S)$ t.q. $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$, $\sigma(Q(S)) = S$.

- $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), L)$ et $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \mathcal{L})$ sont des représentations de $\mathfrak{g}$.
- C et $\mathcal{C}$: opérateurs de Casimir de $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{S}(M)$ et $\mathcal{D}(M)$.
- Si $C(S) = \alpha S$ et $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$, alors $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$.
- Dans les situations non-critiques : si $C(S) = \alpha S$, alors $\exists!$ $Q(S)$ t.q. $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$, $\sigma(Q(S)) = S$.
- Dans ces conditions : $\mathcal{L}(Q(S)) = Q(L(S))$ car :

- $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), L)$ et $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \mathcal{L})$ sont des représentations de $\mathfrak{g}$.
- C et $\mathcal{C}$: opérateurs de Casimir de $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{S}(M)$ et $\mathcal{D}(M)$.
- Si $C(S) = \alpha S$ et $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$, alors $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$.
- Dans les situations non-critiques : si $C(S) = \alpha S$, alors $\exists!$ $Q(S)$ t.q. $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$, $\sigma(Q(S)) = S$.
- Dans ces conditions : $\mathcal{L}(Q(S)) = Q(L(S))$ car :
  - $\sigma(\mathcal{L}(Q(S))) = \sigma(Q(L(S)) = L(S)$;

- $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), L)$ et $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \mathcal{L})$ sont des représentations de $\mathfrak{g}$.
- C et $\mathcal{C}$: opérateurs de Casimir de $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{S}(M)$ et $\mathcal{D}(M)$.
- Si $C(S) = \alpha S$ et $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$, alors $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$.
- Dans les situations non-critiques : si $C(S) = \alpha S$, alors $\exists!$ $Q(S)$ t.q. $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$, $\sigma(Q(S)) = S$.
- Dans ces conditions : $\mathcal{L}(Q(S)) = Q(L(S))$ car :
  - $\sigma(\mathcal{L}(Q(S))) = \sigma(Q(L(S)) = L(S)$;
  - Comme $C(L(S)) = \alpha L(S)$, $\mathcal{C}(Q(L(S))) = \alpha Q(L(S))$;

- $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), L)$ et $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \mathcal{L})$ sont des représentations de $\mathfrak{g}$.
- C et $\mathcal{C}$: opérateurs de Casimir de $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{S}(M)$ et $\mathcal{D}(M)$.
- Si $C(S) = \alpha S$ et $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$, alors $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$.
- Dans les situations non-critiques : si $C(S) = \alpha S$, alors $\exists!$ $Q(S)$ t.q. $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$, $\sigma(Q(S)) = S$.
- Dans ces conditions : $\mathcal{L}(Q(S)) = Q(L(S))$ car :
  - $\sigma(\mathcal{L}(Q(S))) = \sigma(Q(L(S)) = L(S)$;
  - Comme $C(L(S)) = \alpha L(S)$, $\mathcal{C}(Q(L(S))) = \alpha Q(L(S))$;
  - $\mathcal{C}(\mathcal{L}(Q(S))) = \mathcal{L}(\mathcal{C}(Q(S))) = \alpha \mathcal{L}(Q(S))$.

- $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), L)$ et $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \mathcal{L})$ sont des représentations de $\mathfrak{g}$.
- C et $\mathcal{C}$: opérateurs de Casimir de $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{S}(M)$ et $\mathcal{D}(M)$.
- Si $C(S) = \alpha S$ et $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$, alors $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$.
- Dans les situations non-critiques : si $C(S) = \alpha S$, alors $\exists!$ $Q(S)$ t.q. $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$, $\sigma(Q(S)) = S$.
- Dans ces conditions : $\mathcal{L}(Q(S)) = Q(L(S))$ car :
  - $\sigma(\mathcal{L}(Q(S))) = \sigma(Q(L(S)) = L(S)$;
  - Comme $C(L(S)) = \alpha L(S)$, $\mathcal{C}(Q(L(S))) = \alpha Q(L(S))$;
  - $\mathcal{C}(\mathcal{L}(Q(S))) = \mathcal{L}(\mathcal{C}(Q(S))) = \alpha \mathcal{L}(Q(S))$.

•Généralisation (F. Boniver, P. Mathonet) : algèbres IFFT $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$

- Conjecture (P. Lecomte) : $Q(g) : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$

- Conjecture (P. Lecomte) : $Q(g) : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$ naturel

• Conjecture (P. Lecomte) : $Q(g) : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$ naturel et $Q(g) = Q(g')$ si $g = fg'$ avec $f > 0$

• Conjecture (P. Lecomte) : $Q(g) : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$ naturel et $Q(g) = Q(g')$ si $g = fg'$ avec $f > 0$

$\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(\varphi_t^* g_0)(\varphi_t^* S)$, g_0 métrique canonique de $\mathbb{R}^m$

$\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(g_0)(\varphi_t^* S)$, φ_t flot de $X \in so(p+1, q+1)$

• Conjecture (P. Lecomte) : $Q(g) : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$ naturel et $Q(g) = Q(g')$ si $g = fg'$ avec $f > 0$

$\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(\varphi_t^* g_0)(\varphi_t^* S)$, g_0 métrique canonique de $\mathbb{R}^m$

$\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(g_0)(\varphi_t^* S)$, φ_t flot de $X \in so(p+1, q+1)$

$L_X Q(g_0)(S) = Q(g_0)(L_X S)$

• Conjecture (P. Lecomte) : $Q(g) : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$ naturel et $Q(g) = Q(g')$ si $g = fg'$ avec $f > 0$

$\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(\varphi_t^* g_0)(\varphi_t^* S)$, g_0 métrique canonique de $\mathbb{R}^m$

$\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(g_0)(\varphi_t^* S)$, φ_t flot de $X \in so(p+1, q+1)$

$L_X Q(g_0)(S) = Q(g_0)(L_X S)$

• Conjecture (P. Lecomte) : $Q(\nabla) : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$

• Conjecture (P. Lecomte) : $Q(g) : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$ naturel et $Q(g) = Q(g')$ si $g = fg'$ avec $f > 0$

$\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(\varphi_t^* g_0)(\varphi_t^* S)$, g_0 métrique canonique de $\mathbb{R}^m$

$\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(g_0)(\varphi_t^* S)$, φ_t flot de $X \in so(p+1, q+1)$

$L_X Q(g_0)(S) = Q(g_0)(L_X S)$

• Conjecture (P. Lecomte) : $Q(\nabla) : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$ naturel

• Conjecture (P. Lecomte) : $Q(g) : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$ naturel et $Q(g) = Q(g')$ si $g = fg'$ avec $f > 0$

$\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(\varphi_t^* g_0)(\varphi_t^* S)$, g_0 métrique canonique de $\mathbb{R}^m$

$\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(g_0)(\varphi_t^* S)$, φ_t flot de $X \in so(p+1, q+1)$

$L_X Q(g_0)(S) = Q(g_0)(L_X S)$

• Conjecture (P. Lecomte) : $Q(\nabla) : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$ naturel et $Q(\nabla) = Q(\nabla')$ si $\nabla' = \nabla + \alpha \vee id$

• Conjecture (P. Lecomte) : $Q(g) : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$ naturel et $Q(g) = Q(g')$ si $g = fg'$ avec $f > 0$

$\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(\varphi_t^* g_0)(\varphi_t^* S)$, g_0 métrique canonique de $\mathbb{R}^m$

$\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(g_0)(\varphi_t^* S)$, φ_t flot de $X \in so(p+1, q+1)$

$L_X Q(g_0)(S) = Q(g_0)(L_X S)$

• Conjecture (P. Lecomte) : $Q(\nabla) : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$ naturel et $Q(\nabla) = Q(\nabla')$ si $\nabla' = \nabla + \alpha \vee id$

$\varphi_t^* Q(\nabla_0)(S) = Q(\varphi_t^* \nabla_0)(\varphi_t^* S)$, ∇_0 connexion plate de $\mathbb{R}^m$

$\varphi_t^* Q(\nabla_0)(S) = Q(\nabla_0)(\varphi_t^* S)$, φ_t flot de $X \in sl(m+1, \mathbb{R})$

• Conjecture (P. Lecomte) : $Q(g) : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$ naturel et $Q(g) = Q(g')$ si $g = fg'$ avec $f > 0$

$\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(\varphi_t^* g_0)(\varphi_t^* S)$, g_0 métrique canonique de $\mathbb{R}^m$

$\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(g_0)(\varphi_t^* S)$, φ_t flot de $X \in so(p+1, q+1)$

$L_X Q(g_0)(S) = Q(g_0)(L_X S)$

• Conjecture (P. Lecomte) : $Q(\nabla) : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$ naturel et $Q(\nabla) = Q(\nabla')$ si $\nabla' = \nabla + \alpha \vee id$

$\varphi_t^* Q(\nabla_0)(S) = Q(\varphi_t^* \nabla_0)(\varphi_t^* S)$, ∇_0 connexion plate de $\mathbb{R}^m$

$\varphi_t^* Q(\nabla_0)(S) = Q(\nabla_0)(\varphi_t^* S)$, φ_t flot de $X \in sl(m+1, \mathbb{R})$

$L_X Q(\nabla_0)(S) = Q(\nabla_0)(L_X S)$

- Méthode de M. Bordemann :

•Méthode de M. Bordemann : $M \mapsto \tilde{M}$;

•Méthode de M. Bordemann : $M \mapsto \tilde{M}$;

$$\nabla \mapsto \tilde{\nabla};$$

•Méthode de M. Bordemann : $M \mapsto \tilde{M}$;

$$\nabla \mapsto \tilde{\nabla};$$

$$S \mapsto \tilde{S};$$

•Méthode de M. Bordemann : $M \mapsto \tilde{M}$;

$\nabla \mapsto \tilde{\nabla}$;

$S \mapsto \tilde{S}$;

$$Q(\widetilde{\nabla)(S})(f) = \tau(\tilde{\nabla})(\tilde{S})(\tilde{f})$$

- Questions :

- Questions : Valeurs critiques de δ

- Questions : Valeurs critiques de δ

  Formule explicite

- Questions : Valeurs critiques de δ

  Formule explicite

  Unicité

- Questions : Valeurs critiques de δ

  Formule explicite

  Unicité

  Autres opérateurs différentiels

- Questions : Valeurs critiques de δ

  Formule explicite

  Unicité

  Autres opérateurs différentiels

  Cas conforme

•Fibrés et connexions de Cartan

• Fibrés et connexions de Cartan

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (P \to M)$$

•Fibrés et connexions de Cartan

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (P \to M)$$

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (\omega : TP \to \mathfrak{g})$$

•Fibrés et connexions de Cartan

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (P \to M)$$

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (\omega : TP \to \mathfrak{g})$$

$$\omega_u : T_uP \to \mathfrak{g} \text{ bijection } \forall u \in P$$

•Fibrés et connexions de Cartan

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (P \to M)$$

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (\omega : TP \to \mathfrak{g})$$

$$\omega_u : T_uP \to \mathfrak{g} \text{ bijection } \forall u \in P$$

$$P \subset P^2M,\ p : P \to P_0 \subset P^1M$$

•Fibrés et connexions de Cartan

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (P \to M)$$

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (\omega : TP \to \mathfrak{g})$$

$$\omega_u : T_u P \to \mathfrak{g} \text{ bijection } \forall u \in P$$

$$P \subset P^2 M,\ p : P \to P_0 \subset P^1 M$$

$$\mathcal{C}^\infty(P_0, V)_{G_0} \ni T \mapsto p^* T \in \mathcal{C}^\infty(P, V)_H$$

•Fibrés et connexions de Cartan

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (P \to M)$$

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (\omega : TP \to \mathfrak{g})$$

$$\omega_u : T_uP \to \mathfrak{g} \text{ bijection } \forall u \in P$$

$$P \subset P^2M,\ p : P \to P_0 \subset P^1M$$

$$\mathcal{C}^\infty(P_0, V)_{G_0} \ni T \mapsto p^*T \in \mathcal{C}^\infty(P, V)_H$$

$$\text{avec } H = G_0 \rtimes G_1,\ \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

•Fibrés et connexions de Cartan

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (P \to M)$$

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (\omega : TP \to \mathfrak{g})$$

$$\omega_u : T_u P \to \mathfrak{g} \text{ bijection } \forall u \in P$$

$$P \subset P^2 M,\ p : P \to P_0 \subset P^1 M$$

$$\mathcal{C}^\infty(P_0, V)_{G_0} \ni T \mapsto p^* T \in \mathcal{C}^\infty(P, V)_H$$

$$\text{avec } H = G_0 \rtimes G_1,\ \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{h},\ \mathfrak{g}_{-1} \cong \mathbb{R}^m$$

•Fibrés et connexions de Cartan

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (P \to M)$$

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (\omega : TP \to \mathfrak{g})$$

$$\omega_u : T_u P \to \mathfrak{g} \text{ bijection } \forall u \in P$$

$$P \subset P^2 M,\ p : P \to P_0 \subset P^1 M$$

$$\mathcal{C}^\infty(P_0, V)_{G_0} \ni T \mapsto p^* T \in \mathcal{C}^\infty(P, V)_H$$

$$\text{avec } H = G_0 \rtimes G_1,\ \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{h},\ \mathfrak{g}_{-1} \cong \mathbb{R}^m$$

$$\omega \to \nabla^\omega(e_i) = L_{\omega^{-1}(e_i)},\ e_i \in \mathfrak{g}_{-1}$$

•Fibrés et connexions de Cartan

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (P \to M)$$

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (\omega : TP \to \mathfrak{g})$$

$$\omega_u : T_uP \to \mathfrak{g} \text{ bijection } \forall u \in P$$

$$P \subset P^2M,\ p : P \to P_0 \subset P^1M$$

$$\mathcal{C}^\infty(P_0, V)_{G_0} \ni T \mapsto p^*T \in \mathcal{C}^\infty(P, V)_H$$

$$\text{avec } H = G_0 \rtimes G_1,\ \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{h},\ \mathfrak{g}_{-1} \cong \mathbb{R}^m$$

$$\omega \to \nabla^\omega(e_i) = L_{\omega^{-1}(e_i)},\ e_i \in \mathfrak{g}_{-1}$$

$$f\ \ G_0\text{-équivariant} \Rightarrow \nabla^\omega f\ \ G_0\text{-équivariant}$$

•Fibrés et connexions de Cartan

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (P \to M)$$

$$[\nabla] \text{ (ou } [g]) \mapsto (\omega : TP \to \mathfrak{g})$$

$$\omega_u : T_u P \to \mathfrak{g} \text{ bijection } \forall u \in P$$

$$P \subset P^2 M, \ p : P \to P_0 \subset P^1 M$$

$$\mathcal{C}^\infty(P_0, V)_{G_0} \ni T \mapsto p^* T \in \mathcal{C}^\infty(P, V)_H$$

$$\text{avec } H = G_0 \rtimes G_1, \ \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{h}, \ \mathfrak{g}_{-1} \cong \mathbb{R}^m$$

$$\omega \to \nabla^\omega(e_i) = L_{\omega^{-1}(e_i)}, \ e_i \in \mathfrak{g}_{-1}$$

$$f \ \ G_0\text{-équivariant} \Rightarrow \nabla^\omega f \ \ G_0\text{-équivariant}$$

$$f \ \ G_1\text{-équivariant} \not\Rightarrow \nabla^\omega f \ \ G_1\text{-équivariant}$$

- Le cas des densités (P. Mathonet, R.) :

•Le cas des densités (P. Mathonet, R.) :

$$S \mapsto p^* S \in \mathcal{C}^\infty(P, S^k_\delta(\mathbb{R}^m))_H$$

•Le cas des densités (P. Mathonet, R.) :

$$S \mapsto p^*S \in \mathcal{C}^\infty(P, S^k_\delta(\mathbb{R}^m))_H$$

$$f \mapsto p^*f \in \mathcal{C}^\infty(P, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_H$$

•Le cas des densités (P. Mathonet, R.) :

$$S \mapsto p^*S \in \mathcal{C}^\infty(P, S^k_\delta(\mathbb{R}^m))_H$$

$$f \mapsto p^*f \in \mathcal{C}^\infty(P, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_H$$

$$\omega \to Div^\omega = \sum_i i(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(e_i)}$$

•Le cas des densités (P. Mathonet, R.) :

$$S \mapsto p^*S \in \mathcal{C}^\infty(P, S^k_\delta(\mathbb{R}^m))_H$$

$$f \mapsto p^*f \in \mathcal{C}^\infty(P, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_H$$

$$\omega \to Div^\omega = \sum_i i(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(e_i)}$$

Condition : $L_{h^*} Q(p^*S)(p^*f) = 0 \; \forall h \in \mathfrak{g}_1$

•Le cas des densités (P. Mathonet, R.) :

$$S \mapsto p^*S \in \mathcal{C}^\infty(P, S^k_\delta(\mathbb{R}^m))_H$$

$$f \mapsto p^*f \in \mathcal{C}^\infty(P, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_H$$

$$\omega \to Div^\omega = \sum_i i(\epsilon^i)L_{\omega^{-1}(e_i)}$$

Condition : $L_{h^*}Q(p^*S)(p^*f) = 0\ \forall h \in \mathfrak{g}_1$

$\langle p^*S, \nabla^{\omega^k}_s p^*f\rangle$ pas G_1-équivariant !

•Le cas des densités (P. Mathonet, R.) :

$$S \mapsto p^*S \in \mathcal{C}^\infty(P, S^k_\delta(\mathbb{R}^m))_H$$

$$f \mapsto p^*f \in \mathcal{C}^\infty(P, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_H$$

$$\omega \to Div^\omega = \sum_i i(\epsilon^i)L_{\omega^{-1}(e_i)}$$

Condition : $L_{h^*}Q(p^*S)(p^*f) = 0 \; \forall h \in \mathfrak{g}_1$

$\langle p^*S, \nabla^{\omega^k}_s p^*f\rangle$ pas G_1-équivariant !

On ajoute des termes d'ordre inférieur en p^*f...

•Le cas des densités (P. Mathonet, R.) :

$$S \mapsto p^*S \in \mathcal{C}^\infty(P, S^k_\delta(\mathbb{R}^m))_H$$

$$f \mapsto p^*f \in \mathcal{C}^\infty(P, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_H$$

$$\omega \to Div^\omega = \sum_i i(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(e_i)}$$

Condition : $L_{h^*} Q(p^*S)(p^*f) = 0 \; \forall h \in \mathfrak{g}_1$

$\langle p^*S, \nabla_s^{\omega^k} p^*f \rangle$ pas G_1-équivariant !

On ajoute des termes d'ordre inférieur en p^*f...

On trouve alors :

$$Q_M(\nabla, S)(f) = {p^*}^{-1}\left(\sum_{l=0}^k C_{k,l} \langle Div^{\omega^l} p^*S, \nabla_s^{\omega^{k-l}} p^*f \rangle\right),$$

avec $C_{k,l} = \frac{(\lambda + \frac{k-1}{m+1}) \cdots (\lambda + \frac{k-l}{m+1})}{\gamma_{2k-1} \cdots \gamma_{2k-l}} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}, \forall l \geq 1, \quad C_{k,0} = 1$

- Formule explicite sur M (R.)

- Formule explicite sur M (R.)
- Non-unicité$\leftrightarrow$courbure de ω (R.)

•Autres opérateurs différentiels et cas conforme (P. Mathonet, R.) : méthode des opérateurs de Casimir :

•Autres opérateurs différentiels et cas conforme (P. Mathonet, R.) : méthode des opérateurs de Casimir :

•Cas "plat" : Quantification affine Q_{Aff} : si
$S = \sum_{|\alpha|} f_\alpha \otimes e_1^{\alpha_1} \vee \cdots \vee e_m^{\alpha_m}$,
$Q_{Aff}(S) := \sum_{|\alpha|} f_\alpha \partial_{x^1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x^m}^{\alpha_m}$.

•Autres opérateurs différentiels et cas conforme (P. Mathonet, R.) : méthode des opérateurs de Casimir :

•Cas "plat" : Quantification affine Q_{Aff} : si
$S = \sum_{|\alpha|} f_\alpha \otimes e_1^{\alpha_1} \vee \cdots \vee e_m^{\alpha_m}$,
$Q_{Aff}(S) := \sum_{|\alpha|} f_\alpha \partial_{x^1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x^m}^{\alpha_m}$.

•Cas "courbe" : "Quantification affine" Q_ω : si
$S = f \otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_k$, $Q_\omega(S) := f \circ L_{\omega^{-1}(h_1)} \cdots L_{\omega^{-1}(h_k)}$.

•Autres opérateurs différentiels et cas conforme (P. Mathonet, R.) : méthode des opérateurs de Casimir :

•Cas "plat" : Quantification affine Q_{Aff} : si
$S = \sum_{|\alpha|} f_\alpha \otimes e_1^{\alpha_1} \vee \cdots \vee e_m^{\alpha_m}$,
$Q_{Aff}(S) := \sum_{|\alpha|} f_\alpha \partial_{x^1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x^m}^{\alpha_m}$.

•Cas "courbe" : "Quantification affine" Q_ω : si
$S = f \otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_k$, $Q_\omega(S) := f \circ L_{\omega^{-1}(h_1)} \cdots L_{\omega^{-1}(h_k)}$.

•Cas "plat" : Application γ :
$\mathcal{L}_{X^h} Q_{Aff}(S) = Q_{Aff}((L_{X^h} + \gamma(h))S)$.

•Autres opérateurs différentiels et cas conforme (P. Mathonet, R.) : méthode des opérateurs de Casimir :

•Cas "plat" : Quantification affine Q_{Aff} : si
$S = \sum_{|\alpha|} f_\alpha \otimes e_1^{\alpha_1} \vee \cdots \vee e_m^{\alpha_m}$,
$Q_{Aff}(S) := \sum_{|\alpha|} f_\alpha \partial_{x^1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x^m}^{\alpha_m}$.

•Cas "courbe" : "Quantification affine" Q_ω : si
$S = f \otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_k$, $Q_\omega(S) := f \circ L_{\omega^{-1}(h_1)} \cdots L_{\omega^{-1}(h_k)}$.

•Cas "plat" : Application γ :
$\mathcal{L}_{X^h} Q_{Aff}(S) = Q_{Aff}((L_{X^h} + \gamma(h))S)$.

•Cas "courbe" : Application γ' :
$\mathcal{L}_{h^*} Q_\omega(S) = Q_\omega((L_{h^*} + \gamma'(h))S)$, $\forall h \in g_1$.

•Cas "plat" : Casimirs C et $\mathcal{C}$:
$C = -\frac{1}{2}\rho_*(\mathcal{E}) + \frac{1}{2m}\rho_*(\mathcal{E})^2 + \sum_j \rho_*(A_j)\rho_*(A_j^*)$,
$\mathcal{C} = C - 2\sum_i \gamma(\epsilon^i)\partial_{x^i}$.

•Cas "plat" : Casimirs C et $\mathcal{C}$:
$C = -\frac{1}{2}\rho_*(\mathcal{E}) + \frac{1}{2m}\rho_*(\mathcal{E})^2 + \sum_j \rho_*(A_j)\rho_*(A_j^*)$,
$\mathcal{C} = C - 2\sum_i \gamma(\epsilon^i)\partial_{x^i}$.

•Cas "courbe" : "Casimirs" C^ω et $\mathcal{C}^\omega$:
$C^\omega := -\frac{1}{2}\rho_*(\mathcal{E}) + \frac{1}{2m}\rho_*(\mathcal{E})^2 + \sum_j \rho_*(A_j)\rho_*(A_j^*)$,
$\mathcal{C}^\omega := C^\omega - 2\sum_i \gamma'(\epsilon^i)L_{\omega^{-1}(e_i)}$.

•Cas "plat" : Casimirs C et $\mathcal{C}$:
$C = -\frac{1}{2}\rho_*(\mathcal{E}) + \frac{1}{2m}\rho_*(\mathcal{E})^2 + \sum_j \rho_*(A_j)\rho_*(A_j^*)$,
$\mathcal{C} = C - 2\sum_i \gamma(\epsilon^i)\partial_{x^i}$.

•Cas "courbe" : "Casimirs" C^ω et $\mathcal{C}^\omega$:
$C^\omega := -\frac{1}{2}\rho_*(\mathcal{E}) + \frac{1}{2m}\rho_*(\mathcal{E})^2 + \sum_j \rho_*(A_j)\rho_*(A_j^*)$,
$\mathcal{C}^\omega := C^\omega - 2\sum_i \gamma'(\epsilon^i)L_{\omega^{-1}(e_i)}$.

•Cas "plat" : Quantification de S t.q. $C(S) = \alpha S$:
$Q_{Aff}(Q(S))$, $Q(S)$ t.q $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$ et "tête" de $Q(S) = S$.

•Cas "plat" : Casimirs C et $\mathcal{C}$:
$C = -\frac{1}{2}\rho_*(\mathcal{E}) + \frac{1}{2m}\rho_*(\mathcal{E})^2 + \sum_j \rho_*(A_j)\rho_*(A_j^*)$,
$\mathcal{C} = C - 2\sum_i \gamma(\epsilon^i)\partial_{x^i}$.

•Cas "courbe" : "Casimirs" C^ω et $\mathcal{C}^\omega$:
$C^\omega := -\frac{1}{2}\rho_*(\mathcal{E}) + \frac{1}{2m}\rho_*(\mathcal{E})^2 + \sum_j \rho_*(A_j)\rho_*(A_j^*)$,
$\mathcal{C}^\omega := C^\omega - 2\sum_i \gamma'(\epsilon^i)L_{\omega^{-1}(e_i)}$.

•Cas "plat" : Quantification de S t.q. $C(S) = \alpha S$:
$Q_{Aff}(Q(S))$, $Q(S)$ t.q $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$ et "tête" de $Q(S) = S$.

•Cas "courbe" : Quantification de S t.q. $C^\omega(S) = \alpha S$:
$Q_\omega(Q(S))$, $Q(S)$ t.q. $\mathcal{C}^\omega(Q(S)) = \alpha Q(S)$ et "tête" de $Q(S) = S$.

•Cas "plat" : $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$ car $[\mathcal{C}, \mathcal{L}] = 0$ et $[C, L] = 0$.

•Cas "plat" : $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$ car $[\mathcal{C}, \mathcal{L}] = 0$ et $[C, L] = 0$.

•Cas "courbe" : $(L_{h^*} + \gamma'(h)) \circ Q = Q \circ L_{h^*}$ car $[\mathcal{C}^\omega, L_{h^*} + \gamma'(h)] = 0$ et $[C^\omega, L_{h^*}] = 0$.

•Cas "plat" : $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$ car $[\mathcal{C}, \mathcal{L}] = 0$ et $[C, L] = 0$.

•Cas "courbe" : $(L_{h^*} + \gamma'(h)) \circ Q = Q \circ L_{h^*}$ car $[\mathcal{C}^\omega, L_{h^*} + \gamma'(h)] = 0$ et $[C^\omega, L_{h^*}] = 0$.

•On a dans le cas courbe $\mathcal{L}_{h^*} Q_\omega(Q(S)) = Q_\omega((L_{h^*} + \gamma'(h))Q(S)) = 0$ si $L_{h^*} S = 0$.

•Cas "plat" : $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$ car $[\mathcal{C}, \mathcal{L}] = 0$ et $[C, L] = 0$.

•Cas "courbe" : $(L_{h^*} + \gamma'(h)) \circ Q = Q \circ L_{h^*}$ car $[\mathcal{C}^\omega, L_{h^*} + \gamma'(h)] = 0$ et $[C^\omega, L_{h^*}] = 0$.

•On a dans le cas courbe $\mathcal{L}_{h^*} Q_\omega(Q(S)) = Q_\omega((L_{h^*} + \gamma'(h))Q(S)) = 0$ si $L_{h^*} S = 0$.

•Si S est G_0-équivariant, $Q(S)$ est G_0-équivariant et $Q_\omega(Q(S))$ préserve la G_0-équivariance.

Remarque : cette méthode permet de trouver des applications naturelles

$$Q : \{\text{réductions de } P^2M \text{ à } H\} \to \{\text{quantifications sur } M\},$$

où P^2M est le fibré des repères du deuxième ordre et où H est un groupe de Lie provenant d'une algèbre IFFT $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$.

•Quantification des espaces singuliers (N. Poncin, R. Wolak, R.)

•Espace de configuration M possède une symétrie$\rightarrow$on considère le quotient M/G où G est un groupe de Lie

•Quantification des espaces singuliers (N. Poncin, R. Wolak, R.)

•Espace de configuration M possède une symétrie$\rightarrow$on considère le quotient M/G où G est un groupe de Lie

•Sous certaines conditions, M/G : orbifold V

•Quantification des espaces singuliers (N. Poncin, R. Wolak, R.)

•Espace de configuration M possède une symétrie$\rightarrow$on considère le quotient M/G où G est un groupe de Lie

•Sous certaines conditions, M/G : orbifold V

•Désingularisation : $V \cong$Espace des feuilles de $(M, \mathcal{F})$

•Quantification des espaces singuliers (N. Poncin, R. Wolak, R.)

•Espace de configuration M possède une symétrie$\rightarrow$on considère le quotient M/G où G est un groupe de Lie

•Sous certaines conditions, M/G : orbifold V

•Désingularisation : $V\cong$Espace des feuilles de $(M,\mathcal{F})$

•Quantification :

$$\begin{tikzcd}
\nabla_{\mathcal{F}}, S_{\mathcal{F}} \arrow[r, "Q_{\mathcal{F}}"] & Q_{\mathcal{F}}(\nabla_{\mathcal{F}})(S_{\mathcal{F}}) \arrow[d, "p^{*-1}"] \\
\nabla_V, S_V \arrow[u, "p^*"] \arrow[r, "Q_V"'] & Q_V(\nabla_V)(S_V)
\end{tikzcd}$$

- Quantification des supervariétés (T. Leuther, P. Mathonet, R.)

•Quantification des supervariétés (T. Leuther, P. Mathonet, R.)

•Quantification $\mathfrak{pgl}(p+1,q)$-équivariante sur $\mathbb{R}^{p|q}$ (P. Mathonet, R.)

•Quantification des supervariétés (T. Leuther, P. Mathonet, R.)

•Quantification $\mathfrak{pgl}(p+1,q)$-équivariante sur $\mathbb{R}^{p|q}$ (P. Mathonet, R.)

•Quantification naturelle projectivement invariante sur les supervariétés (T. Leuther, R.)