Complexité syntaxique d'ensembles d'entiers ultimement périodiques

Elise Vandomme

EJCIM 2011 – Amiens

GRENOBLE 1
UNIVERSITE JOSEPH FOURIER
SCIENCES. TECHNOLOGIE. SANTÉ

Université de Liège

Plan de l'exposé

1. Introduction
2. Procédures de décisions connues
3. Complexité syntaxique
4. Perspectives

Soit A un alphabet fini.

$$A^* : \text{ ensemble des mots finis sur } A$$

Soit $f : A \to A^*$ morphisme, i.e. $\forall x, y \in A$

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \qquad \text{et} \qquad f(\varepsilon) = \varepsilon.$$

Exemple

Soient $A = \{a, b, c\}$ et $f : A \to A^* : \begin{array}{l} a \mapsto abc \\ b \mapsto ac \\ c \mapsto b \end{array}$.

Alors, $f(abbc) = f(a)f(b)f(b)f(c) = abcacacb$.

Si f est (strictement) prolongeable en a, i.e.,

$$f(a) = aw \text{ avec } a \in A, w \in A^* \setminus \{\varepsilon\},$$

alors

$$\{f^n(a) | n \in \mathbb{N}\} \text{ est infini}$$

et

$$f^\omega(a) = \lim_{n \to +\infty} f^n(a).$$

Exemple

Si $f(a) = abc, f(b) = ac, f(c) = b,$

$f^\omega(a) = \underline{a}$

Si f est (strictement) prolongeable en a, i.e.,

$$f(a) = aw \text{ avec } a \in A, w \in A^* \setminus \{\varepsilon\},$$

alors

$$\{f^n(a) | n \in \mathbb{N}\} \text{ est infini}$$

et

$$f^\omega(a) = \lim_{n \to +\infty} f^n(a).$$

Exemple

Si $f(a) = abc, f(b) = ac, f(c) = b$,

$f^\omega(a) = abc$

Si f est (strictement) prolongeable en a, i.e.,

$$f(a) = aw \text{ avec } a \in A, w \in A^* \setminus \{\varepsilon\},$$

alors

$$\{f^n(a) | n \in \mathbb{N}\} \text{ est infini}$$

et

$$f^\omega(a) = \lim_{n \to +\infty} f^n(a).$$

Exemple

Si $f(a) = abc, f(b) = ac, f(c) = b,$

$f^\omega(a) = a\underline{b}cac$

Si f est (strictement) prolongeable en a, i.e.,

$$f(a) = aw \text{ avec } a \in A, w \in A^* \setminus \{\varepsilon\},$$

alors

$$\{f^n(a) | n \in \mathbb{N}\} \text{ est infini}$$

et

$$f^\omega(a) = \lim_{n \to +\infty} f^n(a).$$

Exemple

Si $f(a) = abc, f(b) = ac, f(c) = b,$

$f^\omega(a) = ab\underline{c}acb$

Si f est (strictement) prolongeable en a, i.e.,

$$f(a) = aw \text{ avec } a \in A, w \in A^* \setminus \{\varepsilon\},$$

alors

$$\{f^n(a) | n \in \mathbb{N}\} \text{ est infini}$$

et

$$f^\omega(a) = \lim_{n \to +\infty} f^n(a).$$

Exemple

Si $f(a) = abc, f(b) = ac, f(c) = b,$

$f^\omega(a) = abc\underline{a}cb\color{red}{abc}$

Si f est (strictement) prolongeable en a, i.e.,

$$f(a) = aw \text{ avec } a \in A, w \in A^* \setminus \{\varepsilon\},$$

alors

$$\{f^n(a) | n \in \mathbb{N}\} \text{ est infini}$$

et

$$f^\omega(a) = \lim_{n \to +\infty} f^n(a).$$

Exemple

Si $f(a) = abc, f(b) = ac, f(c) = b,$

$f^\omega(a) = abcacbabc \cdots$

Si f est (strictement) prolongeable en a, i.e.,

$$f(a) = aw \text{ avec } a \in A, w \in A^* \setminus \{\varepsilon\},$$

alors

$$\{f^n(a) | n \in \mathbb{N}\} \text{ est infini}$$

et

$$f^\omega(a) = \lim_{n \to +\infty} f^n(a).$$

Un mot infini u sur A est ultimement périodique si

$$u = v\, w^\omega \qquad \text{avec } v \in A^*, w \in A^* \setminus \{\varepsilon\}.$$

Si f est (strictement) prolongeable en a, i.e.,

$$f(a) = aw \text{ avec } a \in A, w \in A^* \setminus \{\varepsilon\},$$

alors

$$\{f^n(a) | n \in \mathbb{N}\} \text{ est infini}$$

et

$$f^\omega(a) = \lim_{n \to +\infty} f^n(a).$$

Un mot infini u sur A est ultimement périodique si

$$u = v\, w^\omega \qquad \text{avec } v \in A^*, w \in A^* \setminus \{\varepsilon\}.$$

Problème (D0L periodicity problem)

Si $f : A \to A^*$ est un morphisme prolongeable en $a \in A$,
le mot infini $f^\omega(a)$ est-il ultimement périodique ?

C'est décidable. [Harju, Linna, 1986]

Variante

Soient A et B deux alphabets finis.

Un morphisme $g : A \to B$ est un codage si $|g(\alpha)| = 1, \forall \alpha \in A$.

Problème (HD0L-ultimate periodicity problem)

Soient

- un codage $g : A \to B$,
- un morphisme $f : A \to A^*$ tel que
- f est prolongeable en $a \in A^*$.

Le mot infini $g(f^\omega(a))$ est-il ultimement périodique ?

Exemple : suite de Baum-Sweet $(x_n)_{n\geq 0}$

Soient $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{0, 1\}$.

$$f: \begin{array}{l} a \mapsto ab \\ b \mapsto cb \\ c \mapsto bd \\ d \mapsto dd \end{array} \qquad g: \begin{array}{l} a \mapsto 1 \\ b \mapsto 1 \\ c \mapsto 0 \\ d \mapsto 0 \end{array}$$

Exemple : suite de Baum-Sweet $(x_n)_{n\geq 0}$

Soient $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{0, 1\}$.

$$f: \begin{array}{l} a \mapsto ab \\ b \mapsto cb \\ c \mapsto bd \\ d \mapsto dd \end{array} \qquad g: \begin{array}{l} a \mapsto 1 \\ b \mapsto 1 \\ c \mapsto 0 \\ d \mapsto 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{a} \\ \downarrow \text{f} \\ \text{ab} \\ \downarrow \text{f} \\ \text{abcb} \\ \downarrow \text{f} \\ \text{abcbbdcb} \\ \downarrow \text{f} \\ \vdots \end{array}$$

Alors,

$$f^{\omega}(a) = abcbbdcbcbddbd\cdots$$

$$\begin{aligned} (x_n)_{n\geq 0} &:= g(f^{\omega}(a)) \\ &= 11011001010010\ldots \end{aligned}$$

Cas particulier

Supposons $f : A \to A^*$ est k-uniforme, i.e.,

$$|f(\alpha)| = k \qquad \forall \alpha \in A.$$

Théorème (Cobham, 1972)

Soit un mot infini x.

$$x = g(f^\omega(a)) \Leftrightarrow x \text{ est } k\text{-automatique.}$$

Une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est k-automatique si x_n est engendré par un automate fini (avec sortie), lisant en entrée $\mathrm{rep}_k(n)$.

Cas particulier

Supposons $f : A \to A^*$ est k-uniforme, i.e.,

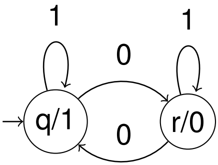
$$|f(\alpha)| = k \qquad \forall \alpha \in A.$$

Théorème (Cobham, 1972)

Soit un mot infini x.

$$x = g(f^\omega(a)) \Leftrightarrow x \text{ est } k\text{-automatique.}$$

Une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est k-automatique si x_n est engendré par un automate fini (avec sortie), lisant en entrée $\mathrm{rep}_k(n)$.



Exemple : $(x_n)_{n\geq 0} = 11011001010010\ldots$

x_n	1	1	0	1	1	0	0	1	0	...
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$\mathrm{rep}_2(n)$	ε	1	10	11	100	101	110	111	1000	$\cdots$

Exemple : $(x_n)_{n\geq 0} = 11011001010010\ldots$

x_n	1	1	0	1	1	0	0	1	0	$\ldots$
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\ldots$
$\mathrm{rep}_2(n)$	ε	1	10	11	100	101	110	111	1000	$\cdots$

$x_n = 1 \Leftrightarrow$

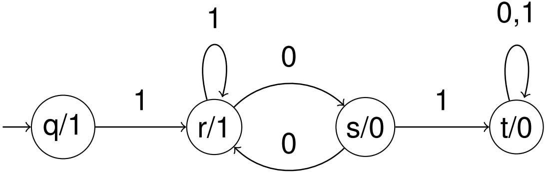
$\mathrm{rep}_2(n)$ n'a pas de blocs de 0 de longueurs impaires.

Exemple : $(x_n)_{n\geq 0} = 11011001010010\ldots$

x_n	1	1	0	1	1	0	0	1	0	$\ldots$
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\ldots$
$\mathrm{rep}_2(n)$	ε	1	10	11	100	101	110	111	1000	$\cdots$

$x_n = 1 \Leftrightarrow$

$\mathrm{rep}_2(n)$ n'a pas de blocs de 0 de longueurs impaires.

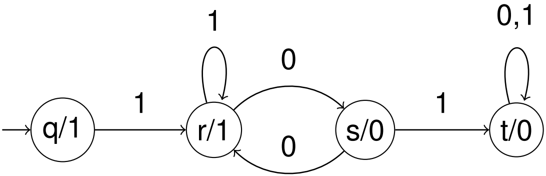


Exemple : $(x_n)_{n\geq 0} = 11011001010010\ldots$

x_n	1	1	0	1	1	0	0	1	0	$\ldots$
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\ldots$
$\mathrm{rep}_2(n)$	ε	1	10	11	100	101	110	111	1000	$\cdots$

$x_n = 1 \Leftrightarrow$

$\mathrm{rep}_2(n)$ n'a pas de blocs de 0 de longueurs impaires.



$\rightsquigarrow (x_n)_{n\geq 0}$ est 2-automatique.

Exemple : $(x_n)_{n\geq 0} = 11011001010010\ldots$

En particulier,

$$S_0 = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = 0\} \text{ et } S_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = 1\}$$

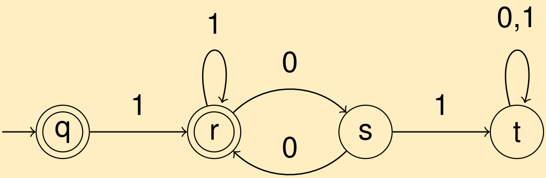
sont 2-reconnaissables, i.e.,

$$\mathrm{rep}_2(S_i) = \{\mathrm{rep}_2(n) \mid n \in S_i\} \qquad \text{avec } i = 0, 1$$

est accepté par un automate fini.

Exemple

S_1 est accepté par



Soit un ensemble d'entiers $X \subseteq \mathbb{N}$.

Sa suite caractéristique est $1_X = (1_X(n))_{n \geq 0}$ définie par

$$1_X(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in X \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

L'ensemble X est ultimement périodique si

1_X est ultimement périodique.

Problème

Soient un morphisme $f : A \to A^*$ k-uniforme prolongeable en $a \in A$ et un codage $g : A \to B$.
Le mot infini $g(f^\omega(a))$ est-il ultimement périodique ?

Soit un ensemble d'entiers $X \subseteq \mathbb{N}$.

Sa suite caractéristique est $1_X = (1_X(n))_{n \geq 0}$ définie par

$$1_X(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in X \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

L'ensemble X est ultimement périodique si

$$1_X \text{ est ultimement périodique.}$$

Problème

Etant donné un AF acceptant la représentation de $X \subseteq \mathbb{N}$, l'ensemble X est-il ultimement périodique ?

Théorème (Honkala, 1986)

Le problème est décidable dans le cas des bases entières.

Idée :

Si X est ultimement périodique,

la taille de l'automate $\nearrow$ avec la période et la prépériode.

Procédure de décision

Donnée : $X \subseteq \mathbb{N}$ via un AF acceptant $0^* rep_b(X)$.

Si X est ultimement périodique,

alors nous avons une borne supérieure pour sa période et prépériode.

$\rightsquigarrow$ Nombre fini de couples (période, prépériode) à tester.

Procédure de décision

Donnée : $X \subseteq \mathbb{N}$ via un AF acceptant $0^* rep_b(X)$.

Si X est ultimement périodique,

alors nous avons une borne supérieure pour sa période et prépériode.

$\rightsquigarrow$ Nombre fini de couples (période, prépériode) à tester.

Remarque

Allouche, Rampersad, Shallit	2009
Muchnik	1991

Un système de numération positionnel est donné par une suite d'entiers strictement croissante $U = (U_i)_{(i \geq 0)}$ tels que

- $U_0 = 1$
- $C_U := \sup_{i \geq 0} \lceil U_{i+1} / U_i \rceil$ est fini.

Un système de numération positionnel est donné par une suite d'entiers strictement croissante $U = (U_i)_{(i \geq 0)}$ tels que

- $U_0 = 1$
- $C_U := \sup_{i \geq 0} \lceil U_{i+1} / U_i \rceil$ est fini.

La U-représentation gloutonne d'un entier positif n est l'unique mot $\mathrm{rep}_U(n) = w_\ell \cdots w_0$ sur $A_U = \{0, \ldots, C_U - 1\}$ satisfaisant

- $n = \sum_{i=0}^{\ell} w_i U_i$,
- $w_\ell \neq 0$,
- $\sum_{i=0}^{t} w_i U_i < U_{t+1}, \forall t = 0, \ldots, \ell$.

Un système de numération positionnel est donné par une suite d'entiers strictement croissante $U = (U_i)_{(i \geq 0)}$ tels que

- $U_0 = 1$
- $C_U := \sup_{i \geq 0} \lceil U_{i+1}/U_i \rceil$ est fini.

La U-représentation gloutonne d'un entier positif n est l'unique mot $\mathrm{rep}_U(n) = w_\ell \cdots w_0$ sur $A_U = \{0, \ldots, C_U - 1\}$ satisfaisant

- $n = \sum_{i=0}^{\ell} w_i U_i$,
- $w_\ell \neq 0$,
- $\sum_{i=0}^{t} w_i U_i < U_{t+1}, \forall t = 0, \ldots, \ell$.

Cas particulier : les bases entières

$$(U_i)_{i \geq 0} = (b^i)_{i \geq 0}$$

Système de numération de Fibonacci

Soit $F = (F_i)_{i \geq 0} = (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$ défini par

$$F_0 = 1, F_1 = 2 \text{ et } F_{i+2} = F_{i+1} + F_i \text{ pour tout } i \geq 0.$$

Système de numération de Fibonacci

Soit $F = (F_i)_{i\geq 0} = (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$ défini par

$$F_0 = 1, F_1 = 2 \text{ et } F_{i+2} = F_{i+1} + F_i \text{ pour tout } i \geq 0.$$

13	8	5	3	2	1	
					ε	0
					1	1
				1	0	2
			1	0	0	3
			1	0	1	4
						$\vdots$
1	0	0	1	0	1	17

$$\mathrm{rep}_F(17) = 100101$$

Système de numération de Fibonacci

Soit $F = (F_i)_{i \geq 0} = (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$ défini par

$$F_0 = 1, F_1 = 2 \text{ et } F_{i+2} = F_{i+1} + F_i \text{ pour tout } i \geq 0.$$

13	8	5	3	2	1	
					ε	0
					1	1
				1	0	2
			1	0	0	3
			1	0	1	4
						$\vdots$
1	0	0	1	0	1	17

$$\mathrm{rep}_F(17) = 100101$$

$$\mathrm{rep}_F(\mathbb{N}) = \{\varepsilon\} \cup 1\{0, 01\}^*$$

Système de numération de Fibonacci

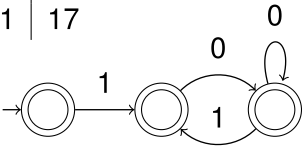
Soit $F = (F_i)_{i \geq 0} = (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$ défini par

$$F_0 = 1, F_1 = 2 \text{ et } F_{i+2} = F_{i+1} + F_i \text{ pour tout } i \geq 0.$$

13	8	5	3	2	1	
					ε	0
					1	1
				1	0	2
			1	0	0	3
			1	0	1	4
						$\vdots$
1	0	0	1	0	1	17

$$\mathrm{rep}_F(17) = 100101$$

$$\mathrm{rep}_F(\mathbb{N}) = \{\varepsilon\} \cup 1\{0, 01\}^*$$



Théorème (Bell, Charlier, Fraenkel, Rigo, 2008)

Le problème est décidable pour une classe de systèmes de numération positionnels.

Théorème (Bell, Charlier, Fraenkel, Rigo, 2008)

Le problème est décidable pour une classe de systèmes de numération positionnels.

Condition sur les systèmes :

$$N_U(t) \to +\infty \text{ si } t \to +\infty.$$

Pour une suite $(U_i)_{i\geq 0}$ d'entiers, notons $N_U(t) \in \{1, \ldots, m\}$ le nombre de valeurs prises infiniment souvent par la suite $(U_i \bmod t)_{i\geq 0}$.

Système de numération de Fibonnacci

Soit $F = (F_i)_{i \geq 0} = (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$ défini par

$$F_0 = 1, F_1 = 2 \text{ et } F_{i+2} = F_{i+1} + F_i \text{ pour tout } i \geq 0.$$

Nous avons

$$(F_i)_{i \geq 0} = (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610 \cdots).$$

$$(F_i \bmod 4)_{i \geq 0} = (1, 2, 3, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 1, 0, 1, 1, 2, 3, \cdots).$$

Système de numération de Fibonnacci

Soit $F = (F_i)_{i \geq 0} = (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$ défini par

$$F_0 = 1, F_1 = 2 \text{ et } F_{i+2} = F_{i+1} + F_i \text{ pour tout } i \geq 0.$$

Nous avons

$$(F_i)_{i \geq 0} = (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610 \cdots).$$

$$(F_i \bmod 4)_{i \geq 0} = ({\color{red}1, 2}, 3, 1, 0, 1, {\color{red}1, 2}, 3, 1, 0, 1, 1, 2, 3, \cdots).$$

Système de numération de Fibonnacci

Soit $F = (F_i)_{i \geq 0} = (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$ défini par

$$F_0 = 1, F_1 = 2 \text{ et } F_{i+2} = F_{i+1} + F_i \text{ pour tout } i \geq 0.$$

Nous avons

$$(F_i)_{i \geq 0} = (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610 \cdots).$$

$$(F_i \bmod 4)_{i \geq 0} = ({\color{red}1, 2}, 3, 1, 0, 1, {\color{red}1, 2}, 3, 1, 0, 1, 1, 2, 3, \cdots).$$

$\rightsquigarrow N_U(4) = 4.$

Inconvénient

La procédure de décision ne peut pas être appliquée aux systèmes de numération en base entière $b \geq 2$:

$$(U_i)_{i \geq 0} = (b^i)_{i \geq 0}.$$

On a, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} U_{i+1} = b\,U_i &\Rightarrow U_i \equiv 0 \pmod{b^n} \quad \forall i \geq n \\ &\Rightarrow N_U(b^n) = 1 \end{aligned}$$

Donc, $N_U(t) \not\to +\infty$ si $t \to +\infty$.

1. Introduction
2. Procédures de décisions connues
3. **Complexité syntaxique**
4. Perspectives

Soit L un langage sur l'alphabet fini A.

Contexte d'un mot $u \in A^*$ par rapport à L :

$$C_L(u) = \{(x, y) \in A^* \times A^* | xuy \in L\}$$

Congruence $\leftrightarrow$ de Myhill pour L : $\forall u, v \in A^*$,

$$u \leftrightarrow_L v \Leftrightarrow C(u) = C(v)$$

Soit L un langage sur l'alphabet fini A.

Contexte d'un mot $u \in A^*$ par rapport à L :

$$C_L(u) = \{(x, y) \in A^* \times A^* | xuy \in L\}$$

Congruence $\leftrightarrow$ de Myhill pour L : $\forall u, v \in A^*$,

$$u \leftrightarrow_L v \Leftrightarrow C(u) = C(v)$$

Exemple

Posons $A = \{a, b\}$ et $L = a^* b^* = \{a^n b^m | n, m \in \mathbb{N}\}$.

$$\begin{aligned} C(ab) &= \{(a^i, b^j) | i, j \in \mathbb{N}\} \\ C(ba) &= \emptyset \\ C(a) &= \{(a^i, a^j b^\ell) | i, j, \ell \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

La relation $\leftrightarrow_L$ est une relation d'équivalence.

Notons $[u]$ la classe d'un mot $u \in A^*$.

Munissons $A^*/_{\leftrightarrow_L}$ d'un produit

$$[u] \circ [v] = [w] \text{ si } [u] \cdot [v] \subseteq [w].$$

En particulier, $[u] \circ [v] = [uv]$.

$(A^*/_{\leftrightarrow_L}, \circ)$ est le monoïde syntaxique.

Théorème

L est accepté par un AF $\Leftrightarrow A^*/_{\leftrightarrow_L}$ est fini.

Complexité syntaxique de L : $\#(A^*/_{\leftrightarrow_L})$

Retour au problème de décision

Problème

Etant donné un AF acceptant la représentation de $X \subseteq \mathbb{N}$, l'ensemble X est-il ultimement périodique ?

Si $X \subseteq \mathbb{N}$ est périodique de période m,

alors la représentation de X dans un système de numération raisonnable donne un langage L accepté par un AF.

Question : $\#(A^*/\leftrightarrow_L)$ croît avec la période de X ?

Quelques résultats

Théorème (Rigo, V., 2011)

Soient $m, b \geq 2$ des entiers tels que $pgcd(m, b) = 1$. Si $X \subseteq \mathbb{N}$ est périodique de période m, alors

$$\#(A^*/_{\leftrightarrow_{0^*\mathrm{rep}_b(X)}}) = m \cdot \mathrm{ord}_m(b).$$

Notation : $\mathrm{ord}_m(b) = \min\{j \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid b^j \equiv 1 \pmod{m}\}$.

Idée de la preuve : Montrer que pour tous $u, v \in A^*$,

$$u \leftrightarrow_{0^* rep_b(X)*} v \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{val}_b(u) \equiv \mathrm{val}_b(v) & \pmod{m} \\ |u| \equiv |v| & \pmod{\mathrm{ord}_m(b)} \end{cases}.$$

Quelques résultats

Résultats similaires obtenus pour une période m et une base b tels que :

- $\mathrm{pgcd}(m, b) = 1$,
- $m = b^n$ avec $n \geq 1$,
- $m = b^n q$ avec $q \geq 2$, $\mathrm{pgcd}(q, b) = 1$ et $n \geq 1$.

Théorème (Rigo, V., 2011)

Si b est premier et $X \subseteq \mathbb{N}$ est ultimement périodique de période $m = b^n q$ avec $\mathrm{pgcd}(q, b) = 1$ et $n \geq 0$, alors

$$\#(A^*/_{\leftrightarrow_{0^*\mathrm{rep}_b(X)}}) \geq (n+1)q.$$

Cas manquant

Si b n'est pas un nombre premier, il y a des entiers

$$m = b^n q \qquad \text{avec } \mathrm{pgcd}(q, b) > 1$$

et n maximal.

Cas manquant

Si b n'est pas un nombre premier, il y a des entiers

$$m = b^n q \qquad \text{avec } \mathrm{pgcd}(q, b) > 1$$

et n maximal.

Exemple

Prenons $b = 4$ et $m = 72 = 4 \cdot 18$.
Nous avons $\mathrm{pgcd}(4, 18) = 2 > 1$.
Un tel cas n'a pas encore été traité.

1. Introduction
2. Procédures de décisions connues
3. Complexité syntaxique
4. Perspectives

Objectif : Traiter une classe plus large de systèmes de numération grâce au monoïde syntaxique.

Par exemple, le système de numération de Fibonacci défini par

$$F_0 = 1, F_1 = 2 \text{ et } F_{i+2} = F_{i+1} + F_i \text{ pour tout } i \geq 0.$$

Conjecture

Si $X = m\mathbb{N} = \{m \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\}$, *alors*

$$\#(A^*/_{\leftrightarrow_{0^*\mathrm{rep}_F(X)}}) = 4 \cdot m^2 \cdot P_F(m) + 2$$

où $P_F(m)$ *est la période de* $(F_i \bmod m)_{i \geq 0}$.

Généralisation

Système de numération abstrait : $S = (L, \Sigma, <)$ où

- L est un langage régulier infini
- $(\Sigma, <)$ alphabet totalement ordonné.

La S-représentation d'un entier positif n est

$$\mathrm{rep}_S(n) := \text{ le } (n+1)\text{-ième mot de L.}$$

Exemple

Soit $S = (L, \{a, b\}, a < b)$ avec $L = \{\varepsilon\} \cup \{a, ab\}^*$.

L	ε	a	aa	ab	aaa	aab	aba	$aaaa$	$\ldots$
$\mathrm{rep}_S(L)$	0	1	2	3	4	5	6	7	$\ldots$

Problème (équivalent au "HD0L periodicity problem")

Soient

- un système de numération abstrait S
- un ensemble $X \subseteq \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{rep}_S(X)$ est accepté par un AF.

Pouvons-nous décider si X est ou non un ensemble ultimement périodique ?

Oui pour une classe de systèmes de numération abstraits.
[Bell, Charlier, Fraenkel, Rigo, 2008]

Résultat similaire avec la complexité syntaxique ?

Merci pour votre attention.

Des questions ?