Calculs d'endurance par similitude

Jean-François Debongnie

ULg, LTAS/LMF

February 25, 2011

Calculs d'endurance classiques

Méthode du gradient :

Contrainte d'endurance locale = fct du *gradient relatif* χ

$$\sigma_{\text{max}D} = \Sigma(\chi)$$

$$\chi = \frac{1}{\sigma}|\mathbf{grad}\sigma|_{\text{au maximum}}$$

$$\chi = \frac{B_1}{d} + \frac{B_2}{R}$$

d = taille pièce, R= rayon à fond d'entaille.

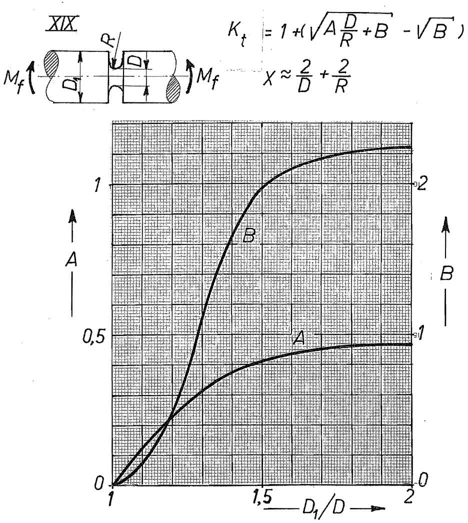
$$\Sigma(\chi) = \sigma_{D0} + A\sqrt{\chi}$$

- σ_{D0} = limite d'endurance en *extension*
- A à peu près constant pour tous les aciers ($\approx 70 MPa\sqrt{mm}$)

Avec entaille :

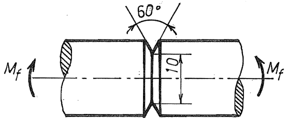
$$\sigma_{nD} = \frac{\Sigma(\chi)}{K_t} = \frac{\sigma_{D_0} + A\sqrt{\chi}}{K_t}$$

Suppose évidemment K_t et χ connus (il existe des tables).

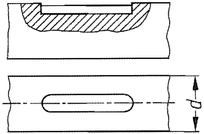


Entailles non calculables

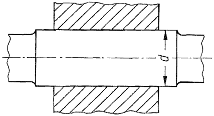
- Entailles vives ($R = 0$)



- Données insuffisantes, rayon R mal défini



- Assemblages frettés : $K_t = ?, \chi = ?$



$\longrightarrow$ *Pourquoi pas une méthode de similitude ?*

Méthode de similitude

Pièces géométriquement semblables : ont en commun

- Coefficient de concentration de contrainte K_t
- Nombre de gradient $G = \sqrt{\chi d}$

Facteur d'affaiblissement :

$$\gamma = \frac{\sigma_{nD}(d)}{\sigma_{D0}} \qquad \text{(en torsion: } \gamma = \frac{\tau_{nD}(d)\sqrt{3}}{\sigma_{D_0}}\text{)}$$

$$\text{Méthode du gradient} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{K_t} + \frac{G}{K_t}\frac{A}{\sigma_{D0}\sqrt{d}} = C_1 + C_2\frac{A}{\sigma_{D_0}\sqrt{d}}$$

$$\rightarrow \textit{Nouveau nb sans dimension } Z = \frac{A}{\sigma_{D_0}\sqrt{d}}$$

Cas des aciers :

$$A \approx \text{cte} \Rightarrow C_3 = C_2 A \text{ et } \gamma = C_1 + \frac{C_3}{\sigma_{D_0}\sqrt{d}}$$

Entailles vives

$$K_t \to \infty, \quad G \to \infty$$

mais

$$C_2 = \frac{G}{K_t} \to \text{ valeur finie}$$

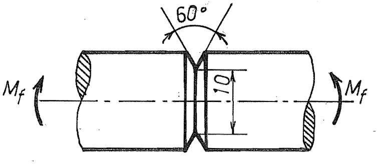
Alors,

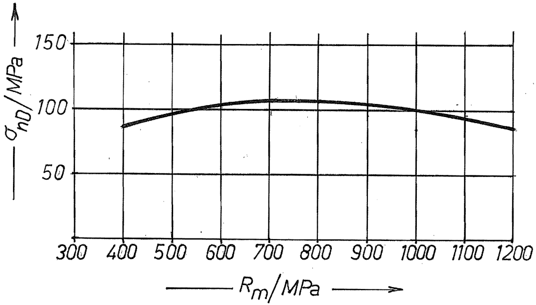
$$\gamma = \frac{C_3}{\sigma_{D_0}\sqrt{d}}, \quad \sigma_{nD} = \frac{C_3}{\sqrt{d}}$$

- *C'est le cas où l'effet d'échelle est le plus marqué.*
- *La limite d'endurance est indépendante de la dureté de l'acier.*

Remarque : ce cas est un peu idéalisé, car les entailles ne sont jamais tout-à-fait vives (l'outil a toujours un rayon de bec). Cependant...

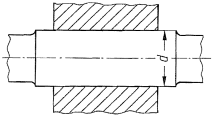
Saignée vive à 60° (Köhler & Rögnitz)

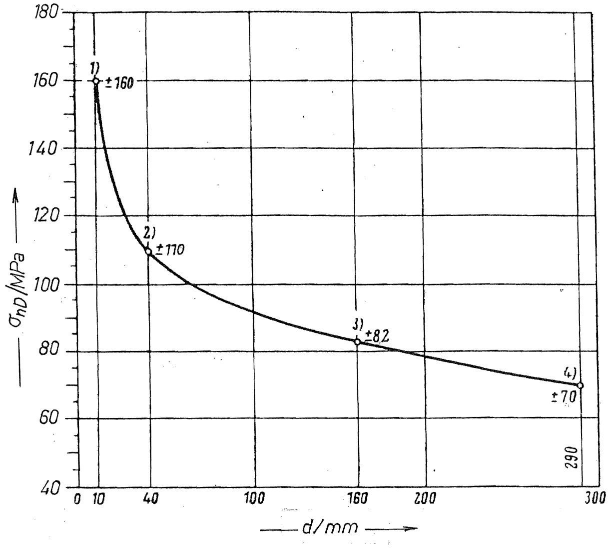




$$\sigma_{nD} \approx 100MPa, \text{ soit } C_3 = 316,2MPa\sqrt{mm}$$

Frettage : $K_t = ?$, $\chi = ?$ - Données de Lehr (noter l'effet d'échelle !)





$$C_1 = 0,2373; \quad C_3 = 341,4$$

Vérifié sur d'autres données – Différence $\leq 4\%$

Autres résultats expérimentaux

Une vaste campagne d'identification des paramètres C_1 et C_3 a été menée, incluant de nombreuses géométries utiles.

- Base : résultats de la littérature, souvent pour un diamètre et plusieurs aciers, parfois pour un acier et plusieurs diamètres.
- Régressions excellentes.
- Un tableau de données utiles a été construit.

Tableau 1 - $\gamma = C_1 + \dfrac{C_3}{\sigma_{D0}\sqrt{d}}$

(C_3 en $MPa\sqrt{mm}$)

Entaille	C_1	C_3
Rainure de clavette, flexion [10] $\sigma_n = \frac{M_f d}{2I}$ $I = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{bt(d-t)^2}{4}$ b=largeur, t=profondeur	0,2853	346,5
Idem, torsion [10] $\tau_n = \frac{M_t d}{2I_t}$ $I_t = \frac{\pi d^4}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{4}$	0,2826	389,6
Assemblage fretté, flexion [6,8,9]	0,2373	341,4
Assemblage fretté, torsion [8]	0,4006	456,2
Assemblage par boulon métrique extension [10]	0,0854	154,6
Assemblage par boulon Withworth extension [10]	0,1202	206,6
Filetage Withworth sur arbre [11] - extension - flexion	 0,1556 0,1610	 176,8 437,3
Filetage métrique sur arbre [11] - extension - flexion	 0,1446 0,1436	 158,4 429,9
Cannelures en flexion [10] $\sigma_f = M_f/W_f$ - développante : $W_f = \frac{\pi d_{\text{prim}}^3}{32}$ - droites : $W_f = \xi \frac{\pi d_{\text{int}}^3}{32}$ $\xi = \begin{cases} 9/8 & : \text{série légère} \\ 6/5 & : \text{série moyenne} \\ 5/4 & : \text{série lourde} \end{cases}$	0,4508	235,3
Cannelures en torsion [10] $\tau_t = \frac{M_t}{2W_f}$, W_f comme ci-dessus - droites - en développante	 0,2736 0,5578	 167,4 170,4
Gorge à circlips [9] - flexion - torsion	 0 0	 368,1 449,7
Arbre dentelé, torsion [12] τ_t : section brute	0,3628	283,8
Saignée vive en V (60°) [7]	0	316,2

Exemple de calcul

Arbre dentelé, torsion, $R_m = 600MPa$, $\sigma_{D0} = 273MPa$, $d = 40mm$

$$\text{Tableau} \rightarrow C_1 = 0,3638, \quad C_2 = 283,8MPA\sqrt{mm}$$

$$\gamma = C_1 + \frac{C_3}{\sigma_{D0}\sqrt{d}} = 0,3638 + \frac{283,8}{273\sqrt{40}} = 0,5282$$

$$\tau_{nD}\sqrt{3} = \gamma\sigma_{D0} = 0,5282 \cdot 273 = 144,2MPa$$

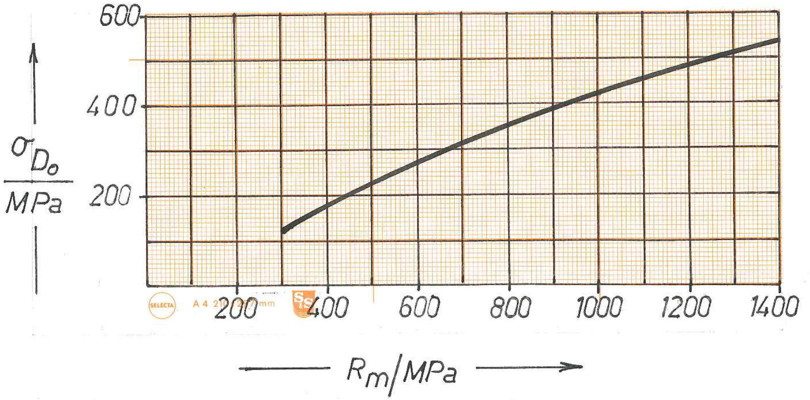
$$\tau_{nD} = \frac{144,2}{\sqrt{3}} = 83,25MPa$$

Conclusions

- Méthode fondée sur des conditions de similitude appliquées à la méthode du gradient.
- Les calculs sont très simples à réaliser.
- La voie est ainsi ouverte à toute une série de géométries qui résistent aux calculs traditionnels.
- Les régressions obtenues à partir de résultats de la littérature sont tout simplement étonnantes.
- Nous espérons pouvoir enrichir notre tableau dans le futur.
- Le cas d'autres métaux que l'acier reste un sujet ouvert pour des recherches futures.

Limite d'endurance en extension des aciers

Données de Niemann



$$\frac{\sigma_{D_0}}{MPa} = -243,9 + 21,09\sqrt{\frac{R_m}{MPa}}$$