

Calculs d'endurance par similitude

J.F. DEBONGNIE

Université de Liège, A&M-Méthodes de Fabrication
Chemin des Chevreuils, 1,
4000 Liège (Belgique)

JF.Debongnie@ulg.ac.be

Introduction

La difficulté essentielle des calculs de fatigue réside dans le fait que l'endurance des pièces entaillées ne dépend pas que du matériau, mais également de l'échelle. Il est vrai que des modèles théoriques existent de longue date, mais ils sont limités à des géométries dont on connaît à la fois le coefficient de concentration de contraintes et le gradient. Or, il existe un certain nombre de situations où ces deux paramètres sont inconnus, le cas le plus évident étant celui de l'assemblage par frettage. C'est ce que nous appellerons des entailles *non calculables*. L'objet de la présente communication est de présenter une méthode de similitude permettant une évaluation fiable du comportement de ces entailles, à partir de données expérimentales partielles. La comparaison des résultats de cette méthode avec les résultats de la littérature montre un bon agrément entre la présente approche et l'expérience.

La méthode du gradient

Nous nous appuierons sur la méthode du gradient, telle qu'elle a été développée en Allemagne par Siebel [1] et Petersen [2]. L'idée fondamentale de cette méthode est que la limite d'endurance, exprimée en termes de la contrainte maximale, est une fonction du *gradient relatif*

$$\chi = \frac{1}{\sigma} |\text{grad } \sigma|_{\text{au maximum}} \quad (1)$$

dont la forme générale est

$$\chi = \frac{B_1}{d} + \frac{B_2}{R} \quad (2)$$

d étant le diamètre, et R , le rayon à fond d'entaille. B_1 a pour valeur 0 en extension et 2 en flexion et torsion. Quant à B_2 , en extension et flexion, il vaut, selon Schijve [3]

$$B_2 = 2 + \frac{1}{K_t}, \quad K_t \text{ étant le coefficient de concentration de}$$

contrainte, mais il est d'usage de le prendre égal à 2, ce qui va dans le sens de la sécurité ; en torsion, on lui donne généralement la valeur 1. La contrainte locale d'endurance est alors de la forme

$$\Sigma(\chi) = \sigma_{D0} + A\sqrt{\chi} \quad (3)$$

où σ_{D0} est la limite d'endurance du matériau *en extension* et A , une constante du matériau. La contrainte nominale d'endurance est alors

$$\sigma_{nD} = \frac{\Sigma(\chi)}{K_t} = \frac{\sigma_{D0} + A\sqrt{\chi}}{K_t} \quad (4)$$

La valeur de A varie quelque peu selon les auteurs, mais dans chaque cas, on constate que cette valeur est

approximativement identique pour tous les aciers. Du reste, une étude de la compatibilité de ce modèle avec la mécanique de la rupture [3] nous a permis de confirmer la quasi-unicité de la valeur de A pour les aciers. Enfin, la comparaison des résultats de ce modèle avec 292 cas expérimentaux donnés par Heywood [5] a conduit à un bon agrément.

Malheureusement, cette méthode souffre d'une sévère limitation : pour pouvoir l'utiliser, il faut pouvoir chiffrer à la fois K_t et χ , ce qui, comme nous allons le voir, est loin d'être toujours le cas.

Entailles non calculables

Il y a en effet un grand nombre d'entailles de la pratique qui ne peuvent être calculées par le schéma précédent du fait de l'impossibilité de calculer directement soit le coefficient de concentration de contrainte, soit le gradient, soit les deux. Parmi celles-ci, il faut classer

- Les entailles vives ($R = 0$), pour lesquelles K_t et χ tendent vers l'infini. Il est cependant bien connu des praticiens que ce genre d'entailles conduit à une endurance non nulle, même si elle est faible.
- Une série d'entailles pour lesquelles les données sont insuffisantes, ou dont le rayon à fond d'entaille est mal défini. Parmi celles-ci, on trouve les rainures de clavettes, les cannelures, les filetages sur arbre, etc.
- Les assemblages frettés, dans lesquels l'état de contrainte est complexe et n'est nullement régi par un quelconque rayon.

Ces entailles, que nous appellerons *non calculables*, sont malheureusement parmi les plus courantes. Elles ne peuvent être traitées qu'à partir de l'expérience, et c'est là que se trouve la difficulté, car les résultats expérimentaux répertoriés dans la littérature sont extrêmement peu nombreux et se limitent le plus souvent à un seul diamètre, ce qui rend les résultats peu exploitables, en raison de l'effet d'échelle qui peut être très marqué.

En s'inspirant des méthodes classiques de la mécanique des fluides, on peut se demander s'il n'est pas possible de travailler par *similitude*, de manière à permettre l'interpolation de résultats sur modèles aux pièces réelles. En effet, on peut considérer qu'une famille donnée d'entailles conserve à peu près ses proportions indépendamment de la taille de la pièce. Ainsi, une rainure de clavette est, à peu de chose près, proportionnée au diamètre de l'arbre.

Considérons donc une famille de pièces géométriquement semblables. Cette famille peut être caractérisée par une valeur identique des deux nombres sans dimension suivants :

- Le coefficient de concentration de contrainte K_t .
- Le nombre de gradient $G = \sqrt{\chi d}$, où d est une dimension caractéristique de la pièce.

Définissons alors le *facteur d'affaiblissement*

$$\gamma = \frac{\sigma_{nD}(d)}{\sigma_{D0}} \quad (\text{en torsion, } \gamma = \frac{\tau_{nD}(d)\sqrt{3}}{\sigma_{D0}}) \quad (5)$$

Il découle de la méthode du gradient que

$$\gamma = \frac{1}{K_t} + \frac{G}{K_t} \frac{A}{\sigma_{D0}\sqrt{d}} = C_1 + C_2 \frac{A}{\sigma_{D0}\sqrt{d}} \quad (6)$$

où C_1 et C_2 sont deux nombres caractéristiques de la famille, et où l'on voit apparaître un nouveau nombre sans dimension

$$Z = \frac{A}{\sigma_{D0}\sqrt{d}} \quad (7)$$

qui rend compte du matériau par A et σ_{D0} , et de la taille de la pièce à travers la dimension caractéristique d . Physiquement, C_1 est le facteur d'affaiblissement correspondant à une dureté infinie ou une dimension infinie ; c'est la plus petite valeur possible de γ . Quant au nombre C_2 , il est responsable de l'effet d'échelle et de la dépendance vis-à-vis du matériau. Plus ce nombre est grand, plus marqué est l'effet d'échelle, qui apparaît ici comme un bonus de résistance pour les petites tailles.

Dans le cas courant des aciers, nous avons vu que la grandeur A est approximativement constante, ce qui permet d'introduire une nouvelle constante $C_3 = C_2 A$ qui a la dimension d'un facteur d'intensité de contrainte ($MPa\sqrt{mm}$) et ramène l'équation (6) à la forme plus simple

$$\gamma = C_1 + \frac{C_3}{\sigma_{D0}\sqrt{d}} \quad (8)$$

Entailles vives

Les entailles vives sont caractérisées par la nullité du rayon à fond d'entaille. Dans ce cas, $K_t \rightarrow \infty$, $G \rightarrow \infty$, mais généralement, G/K_t a une valeur finie. Comme, dans ce cas, $C_1 = 0$, c'est ce type d'entaille qui donne lieu au plus fort effet d'échelle, puisque

$$\gamma = \frac{C_3}{\sigma_{D0}\sqrt{d}}, \quad \sigma_{nD} = \frac{C_3}{\sqrt{d}} \quad (9)$$

Fait important, la limite d'endurance est ici *indépendante de la dureté de l'acier*.

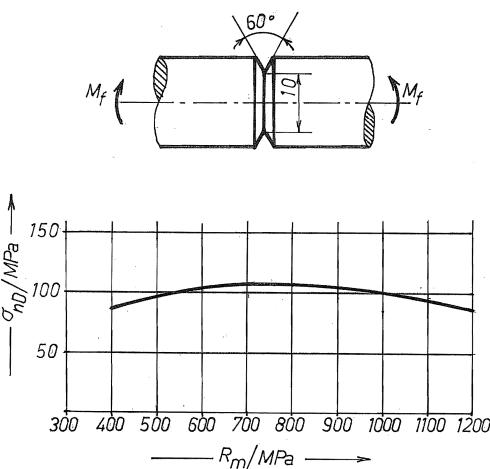


Figure 1 – Saignée vive en flexion [7]

Ce résultat est en bonne concordance avec la courbe publiée par Köhler et Rögnitz [7] pour une saignée vive en V à 60°

($d=10mm$) pour laquelle ils donnent une endurance différentant peu de $100MPa$, quel que soit l'acier (fig.1), ce qui correspond à $C_1 = 0$ et $C_3 = 316,2MPa\sqrt{mm}$.

Certes, les entailles vives sont un peu une vue de l'esprit, dans la mesure où les outils ont toujours un certain rayon de bec, mais le calcul ci-dessus peut être considéré comme une approximation dans le sens de la sécurité, dans le cas où un seul résultat expérimental est connu.

Frettage

L'assemblage fretté est probablement le cas le plus typique d'une entaille non calculable, puisque personne n'a jamais donné de méthode de calcul justifiée pour ce problème. Des données dues à Lehr [6] indiquent un très fort effet d'échelle, comme le montre la figure 2 relative à des essieux de chemin de fer en acier DIN-St50.

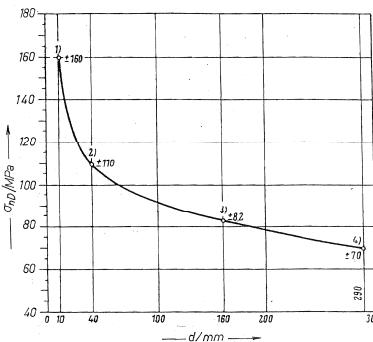


Figure 2 – Essieux frettés [6]

Ces résultats conduisent aux valeurs suivantes des constantes :

$$C_1 = 0,2373, \quad C_3 = 341,4MPa\sqrt{mm}$$

D'autres valeurs de l'endurance sont données dans le mémento Dubbel [8] pour 9 aciers différents, et un diamètre de 40mm. L'application de notre modèle avec les coefficients ci-dessus donne des résultats qui en diffèrent de moins de 3,6 %. D'autres vérifications sur des résultats isolés ont conduit à des différences de moins de 4%. C'est le seul cas où nous disposons de résultats avec des variations du diamètre et des aciers, mais il confirme clairement notre point de vue.

Autres résultats expérimentaux

Une vaste campagne d'identification des paramètres C_1 et C_3 pour diverses géométries utiles a été menée à partir de résultats de la littérature, le plus souvent pour un diamètre, mais différents aciers [13]. Chaque fois que nous disposions de plus de deux résultats expérimentaux, la corrélation obtenue s'est trouvée exceptionnellement bonne. Les résultats sont consignés dans le tableau 1. Dans ce dernier, le cas de la gorge à circlips, pour lequel nous ne disposions que d'un résultat expérimental, a été considéré comme une entaille vive, ce qui va dans le sens de la sécurité.

Utilisation du tableau

L'utilisation de ce tableau est extrêmement simple. Soit par exemple à calculer la contrainte nominale d'endurance en

torsion d'un arbre dentelé de 40mm de diamètre. L'arbre est réalisé en acier DIN-St60, dont la limite d'endurance en extension est de 273MPa pour une pièce lisse. Le tableau 1 donne, pour ce cas,

$$C_1 = 0,3638, \quad C_3 = 283,8 \text{ MPa} \sqrt{\text{mm}}$$

Le coefficient d'affaiblissement est donné par

$$\gamma = C_1 + \frac{C_3}{\sigma_{D0}\sqrt{d}} = 0,3638 + \frac{283,8}{273\sqrt{40}} = 0,5282$$

Il en découle

$$\tau_{nD}\sqrt{3} = \gamma\sigma_{D0} = 0,5282 \times 273 = 144,2 \text{ MPa}$$

soit

$$\tau_{nD} = \frac{144,2}{\sqrt{3}} = 83,25 \text{ MPa}$$

Tableau 1 - $\gamma = C_1 + \frac{C_3}{\sigma_{D0}\sqrt{d}}$																																																																																																						
$(C_3 \text{ en MPa} \sqrt{\text{mm}})$																																																																																																						
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: left; padding: 2px;">Entaille</th> <th style="text-align: center; padding: 2px;">C_1</th> <th style="text-align: center; padding: 2px;">C_3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">Rainure de clavette, flexion [10]</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">0,2853</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">346,5</td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">$\sigma_n = \frac{M_f d}{2I}$</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">$I = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{bt(d-t)^2}{4}$ b=largeur, t=profondeur</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">Idem, torsion [10]</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">0,2826</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">389,6</td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">$\tau_n = \frac{M_t d}{2I_t}$</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">$I_t = \frac{\pi d^4}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{4}$</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">Assemblage fretté, flexion [6,8,9]</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">0,2373</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">341,4</td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">Assemblage fretté, torsion [8]</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">0,4006</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">456,2</td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">Assemblage par boulon métrique extension [10]</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">0,0854</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">154,6</td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">Assemblage par boulon Withworth extension [10]</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">0,1202</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">206,6</td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">Filetage Withworth sur arbre [11]</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">- extension</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">0,1556</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">176,8</td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">- flexion</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">0,1610</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">437,3</td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">Filetage métrique sur arbre [11]</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">- extension</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">0,1446</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">158,4</td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">- flexion</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">0,1436</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">429,9</td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">Cannelures en flexion [10]</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">0,4508</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">235,3</td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">$\sigma_f = M_f/W_f$</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">- développante : $W_f = \frac{\pi d^3}{32}$</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">- droites : $W_f = \xi \frac{\pi d^3}{32}$</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">9/8 : série légère</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">$\xi = 6/5$: série moyenne</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">5/4 : série lourde</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">Cannelures en torsion [10]</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">$\tau_t = \frac{M_t}{2W_f}$, W_f comme ci-dessus</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">- droites</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">0,2736</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">167,4</td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">- en développante</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">0,5578</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">170,4</td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">Gorge à circlips [9]</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">- flexion</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">0</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">368,1</td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">- torsion</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">0</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">449,7</td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">Arbre dentelé, torsion [12]</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">0,3628</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">283,8</td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">τ_t : section brute</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: left; padding: 2px;">Saignée vive en V (60°) [7]</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">0</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">316,2</td> </tr> </tbody> </table>	Entaille	C_1	C_3	Rainure de clavette, flexion [10]	0,2853	346,5	$\sigma_n = \frac{M_f d}{2I}$			$I = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{bt(d-t)^2}{4}$ b=largeur, t=profondeur			Idem, torsion [10]	0,2826	389,6	$\tau_n = \frac{M_t d}{2I_t}$			$I_t = \frac{\pi d^4}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{4}$			Assemblage fretté, flexion [6,8,9]	0,2373	341,4	Assemblage fretté, torsion [8]	0,4006	456,2	Assemblage par boulon métrique extension [10]	0,0854	154,6	Assemblage par boulon Withworth extension [10]	0,1202	206,6	Filetage Withworth sur arbre [11]			- extension	0,1556	176,8	- flexion	0,1610	437,3	Filetage métrique sur arbre [11]			- extension	0,1446	158,4	- flexion	0,1436	429,9	Cannelures en flexion [10]	0,4508	235,3	$\sigma_f = M_f/W_f$			- développante : $W_f = \frac{\pi d^3}{32}$			- droites : $W_f = \xi \frac{\pi d^3}{32}$			9/8 : série légère			$\xi = 6/5$: série moyenne			5/4 : série lourde			Cannelures en torsion [10]			$\tau_t = \frac{M_t}{2W_f}$, W_f comme ci-dessus			- droites	0,2736	167,4	- en développante	0,5578	170,4	Gorge à circlips [9]			- flexion	0	368,1	- torsion	0	449,7	Arbre dentelé, torsion [12]	0,3628	283,8	τ_t : section brute			Saignée vive en V (60°) [7]	0	316,2
Entaille	C_1	C_3																																																																																																				
Rainure de clavette, flexion [10]	0,2853	346,5																																																																																																				
$\sigma_n = \frac{M_f d}{2I}$																																																																																																						
$I = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{bt(d-t)^2}{4}$ b=largeur, t=profondeur																																																																																																						
Idem, torsion [10]	0,2826	389,6																																																																																																				
$\tau_n = \frac{M_t d}{2I_t}$																																																																																																						
$I_t = \frac{\pi d^4}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{4}$																																																																																																						
Assemblage fretté, flexion [6,8,9]	0,2373	341,4																																																																																																				
Assemblage fretté, torsion [8]	0,4006	456,2																																																																																																				
Assemblage par boulon métrique extension [10]	0,0854	154,6																																																																																																				
Assemblage par boulon Withworth extension [10]	0,1202	206,6																																																																																																				
Filetage Withworth sur arbre [11]																																																																																																						
- extension	0,1556	176,8																																																																																																				
- flexion	0,1610	437,3																																																																																																				
Filetage métrique sur arbre [11]																																																																																																						
- extension	0,1446	158,4																																																																																																				
- flexion	0,1436	429,9																																																																																																				
Cannelures en flexion [10]	0,4508	235,3																																																																																																				
$\sigma_f = M_f/W_f$																																																																																																						
- développante : $W_f = \frac{\pi d^3}{32}$																																																																																																						
- droites : $W_f = \xi \frac{\pi d^3}{32}$																																																																																																						
9/8 : série légère																																																																																																						
$\xi = 6/5$: série moyenne																																																																																																						
5/4 : série lourde																																																																																																						
Cannelures en torsion [10]																																																																																																						
$\tau_t = \frac{M_t}{2W_f}$, W_f comme ci-dessus																																																																																																						
- droites	0,2736	167,4																																																																																																				
- en développante	0,5578	170,4																																																																																																				
Gorge à circlips [9]																																																																																																						
- flexion	0	368,1																																																																																																				
- torsion	0	449,7																																																																																																				
Arbre dentelé, torsion [12]	0,3628	283,8																																																																																																				
τ_t : section brute																																																																																																						
Saignée vive en V (60°) [7]	0	316,2																																																																																																				

Conclusion

La méthode de similitude que nous proposons ici constitue une tentative de solution rationnelle pour les entailles non calculables qui, jusqu'ici, résistaient à toute analyse. Fondée sur la théorie du gradient, elle permet d'obtenir des résultats relatifs à des familles entières de pièces semblables, à partir d'au moins deux résultats expérimentaux relatifs soit à des tailles distinctes, soit à des aciers différents. Les excellentes corrélations que nous avons obtenues sont un gage du bien-fondé de la méthode.

Très simple à utiliser, notre tableau pourrait évidemment être amélioré par l'addition de nouveaux résultats. L'applicabilité à des matériaux autres que l'acier reste une voie de recherche ouverte.

Bibliographie

- [1] E. Siebel - « Neue Wege der Festigkeitsrechnung », *ZVDI*, **90**, n°5, pp. 135-138, 1948.
- [2] C. Petersen - « Die Gestaltfestigkeit von Bauteilen », *ZVDI*, **94**, n°30, pp. 977-982, 1952.
- [3] J. Schijve - *Fatigue of structures and materials*, Kluwer, Dordrecht, 2001.
- [4] J.F. Debongnie - « On the link between design against fatigue and fracture mechanics », *Proc. 2000 ASME-DETC*, sept 10-13, Baltimore, Maryland, 2000.
- [5] R.B. Heywood - *Design against fatigue*, Chapman and Hall, London, 1962.
- [6] E. Lehr - « Formgebung und Werkstoffausnutzung », *Stahl und Eisen*, **43**, 61^e année, pp. 965-971, 1941.
- [7] G. Köhler, H. Rögnitz - *Maschinenteile*, Teubner, Stuttgart, 1976.
- [8] *Dubbel Taschenbuch für die Maschinenbau*, 17^e édition, Springer, Berlin, 1990.
- [9] G. Niemann - *Maschinenelemente*, 2^e édition, Springer, Berlin, 1975
- [10] G. Pisarenko, A. Yakovlev, V. Matveev - *Aide-mémoire de résistance des matériaux*, Mir, Moscou, 1979.
- [11] A. Leroy , Communication personnelle, 1979
- [12] H. Neuber - *Kerbspannungslehre*, 2^e édition, Springer, Berlin, 1958
- [13] J.F. Debongnie - « Une loi de similitude de l'endurance des pièces entaillées soumises à la fatigue », 2001 <http://hdl.handle.net/2268/16525>