

Sur le théorème de Mamikon

Jacques Bair et Valérie Henry

Mots clés : Aire, calcul intégral, *calculus* visuel, étendue tangentielle, concentration tangentielle, sous-tangente, tractrice, parabole, cycloïde, exponentielle.

Nous avons eu l'immense chance de côtoyer Nicolas ROUCHE dont nous avons apprécié, en plus de ses grandes qualités humaines, la sagesse, le savoir, l'expertise et le pragmatisme avec lesquels il concevait l'enseignement des mathématiques (voir à ce sujet [5]).

Lors d'une de nos dernières rencontres, il posa à l'un de nous cette question : « Jacques, connais-tu le théorème de Mamikon ? » Comme la réponse était négative, il ajouta : « Je vais t'envoyer une référence à ce sujet ; je suis certain que tous deux, vous apprécierez. »

Effectivement, il nous envoya (rapidement) la référence en question (à savoir [1]) ... et il ne s'était pas trompé : de suite, nous avons été charmés par cette théorie que nous souhaitons à notre tour faire connaître aux lecteurs de *Losanges*.

1. Introduction

En analyse mathématique, un problème important et classique consiste à calculer l'aire d'une région plane délimitée par une ou plusieurs courbes ; il peut généralement être résolu à l'aide du calcul intégral.

Nous allons montrer que certains problèmes de ce type peuvent être traités très simplement en traduisant adéquatement des segments de droite de manière à devoir finalement calculer l'aire d'une figure simple (disque, triangle, ...), ce qui ne réclame ni un recours au calcul intégral, ni la connaissance d'une équation définissant les courbes qui délimitent la région considérée.

Cette approche, fort visuelle, a été initialement mise au point par Mamikon Mnatsakanian dès 1959 alors qu'il était encore étudiant à l'université d'Erevan (capitale de l'Arménie) ; elle fut critiquée par les professeurs de l'étudiant car ceux-ci estimaient impossible de résoudre aussi facilement des problèmes de calcul d'aires. Mnatsakanian approfondit néan-

moins ses idées et les publia dans un article en 1981, mais en langue russe (dans les Comptes rendus de l'Académie Arménienne des Sciences), de sorte que ce travail passa tout d'abord inaperçu. Depuis le début de ce 21^e siècle, le réputé analyste américain Tom Apostol se charge de mieux faire connaître les travaux de Mnatsakanian : il a montré, dans plusieurs articles dont certains rédigés en collaboration avec l'arménien (qui l'a rejoint en 1997 au « Caltech » ou *California Institute of Technology*), la simplicité et la puissance de cette approche reposant principalement sur ce qu'il a appelé le *théorème de Mamikon* ; c'est ce dernier que nous souhaitons présenter simplement, avec quelques-unes de ses applications les plus simples et spectaculaires.

Notons que cette nouvelle théorie, dénommée en anglais *visual calculus*, fait l'objet d'un site dont l'adresse est la suivante : <http://www.its.caltech.edu/~mamikon/>

Ce site est très intéressant à visiter car il contient, outre des articles de T. Apostol et de M. Mnatsakanian sur le sujet, diverses illustrations fort parlantes dont certaines animations illustrant magnifiquement toute cette théorie ; plusieurs figures de cet article sont d'ailleurs extraites de ce site.

2. Objet du théorème

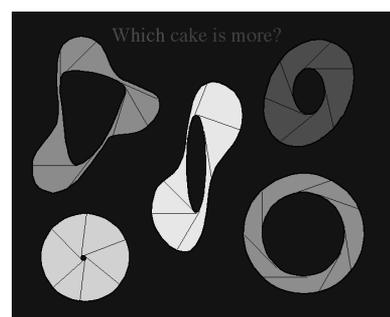


Figure 1

Pour introduire le sujet, considérons la question ci-dessus, posée en anglais et trouvée sur le site

d'Apostol à l'adresse que voici : <http://www.its.caltech.edu/~mamikon/RingsQuiz.gif>

Il s'agit de comparer les aires des régions planes comprises entre deux courbes. Pour ce faire, remarquons que chacune des régions considérées peut être construite en menant, depuis chaque point de la courbe intérieure, un segment de droite, de longueur fixée l , tangent à la courbe : tous ces segments tangents remplissent exactement l'anneau central. Si l'on translate tous ces segments tangents de sorte que les points de tangence soient amenés en un même point O , les segments translétés décrivent un cercle de centre O et de rayon l comme il est illustré sur la figure ci-dessous :

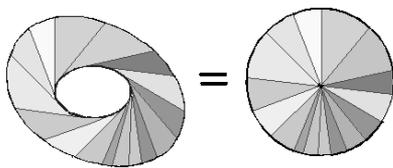


Figure 2

(<http://www.its.caltech.edu/~mamikon/VisualCalc.html>)

Puisque les différentes régions de la première figure sont engendrées par des segments de même longueur l , elles possèdent toutes une même aire, égale à πl^2 .

3. Enoncé du théorème

Le raisonnement très simple utilisé ci-dessus peut être généralisé. En effet, considérons une courbe lisse non nécessairement fermée. De chaque point X de la courbe, menons un segment de droite tangent de longueur fixée l : quand X parcourt la courbe, tous les segments en question décrivent une région plane que nous nommerons *étendue tangentielle*.

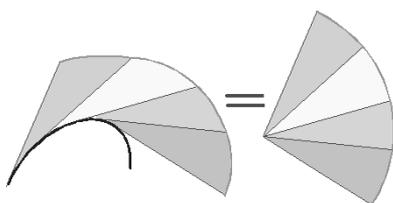


Figure 3

(<http://www.its.caltech.edu/~mamikon/VisualCalc.html>)

Translatons les segments considérés pour que tous les points de tangence soient confondus en un même point O : ces segments translétés génèrent une portion du disque de centre O et de rayon l ; nous l'appellerons la *concentration tangentielle* associée.

Le théorème de Mamikon affirme que

L'aire de l'étendue tangentielle est égale à celle de la concentration tangentielle associée.

Ce résultat reste vrai lorsque les segments tangents ne sont pas nécessairement de même longueur ; pour s'en convaincre, on peut faire appel à de petits triangles translétés depuis l'étendue tangentielle jusqu'à la concentration tangentielle associée, comme peuvent le suggérer les figures 3 et 4.

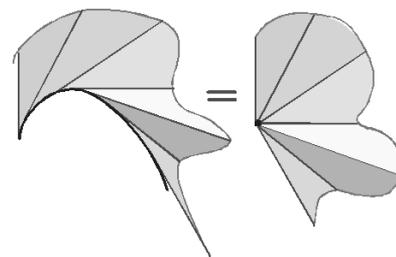


Figure 4

(<http://www.its.caltech.edu/~mamikon/VisualCalc.html>)

Nous allons à présent montrer la puissance de ce théorème en traitant quelques applications classiques.

4. Aire sous une tractrice

Nous nous proposons de calculer l'aire de la région plane située sous une *tractrice*. L'origine de cette courbe remonte à la fin du 17^e siècle lorsque Claude Rerrault, un médecin né en 1613 et mort en 1688, rencontra, vers 1670, Leibniz et lui exposa un problème mathématique qu'il aurait posé à plusieurs mathématiciens sans obtenir de réponse satisfaisante : il sortit sa montre qui comprenait une chaîne ⁽¹⁾, déplaça l'extrémité de celle-ci le long du bord (rectiligne) de la table et demanda au mathématicien quelle était la courbe ainsi décrite par (le centre de) la montre. Leibniz proposa une mise en équation pour cette courbe, la résolution théorique de l'équation (différentielle) n'étant pas simple pour l'époque (car elle fait appel, par

⁽¹⁾ A l'époque, on ne mettait pas sa montre autour du bras.

exemple, à des fonctions hyperboliques). Plusieurs mathématiciens réputés de l'époque, notamment Newton, Huyghens, les frères Bernoulli et L'Hôpital, s'intéressèrent à cette courbe que Leibniz baptisa *tractrix* tandis qu'Huyghens préféra l'appeler *tractoria*, ce qui donna naissance au nom adopté aujourd'hui en langue française, à savoir *tractrice*. Mathématiquement, cette courbe est décrite par un point X lié à un point T par les trois conditions suivantes :

- le point T parcourt la droite
- la distance entre X et T reste fixe
- la droite passant par X et par T est tangente à la courbe

La tractrice admet pour asymptote la droite servant de support pour les points mobiles T ; on l'appelle encore *courbe aux tangentes égales* pour exprimer que la longueur des segments XT reste constante. Si l'on adopte l'axe des abscisses comme asymptote, le point initial étant le point d'abscisse nulle et d'ordonnée égale à un réel positif a avant de se déplacer vers la droite, la courbe obéit à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

dont la solution (vérifiant la condition initiale) est donnée par

$$x = a = \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$$

Des équations paramétriques de la courbe peuvent être données en fonction d'un paramètre t variant entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, soit

$$x(t) = a(t - \tanh(t)) \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{a}{\cosh(t)}$$

où \cosh et \tanh désignent respectivement les cosinus et tangente hyperboliques.

Nous allons résoudre ce problème sans recours à une intégrale, ni même à une équation de la courbe ⁽²⁾. Il suffit en effet de se référer à la façon de tracer la courbe (voir la figure 5 du dessus) : l'aire cherchée est l'étendue tangentielle formée des divers segments XT lorsque X parcourt la tractrice et T est l'intersection de la tangente avec l'axe horizontal.

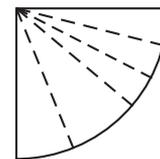
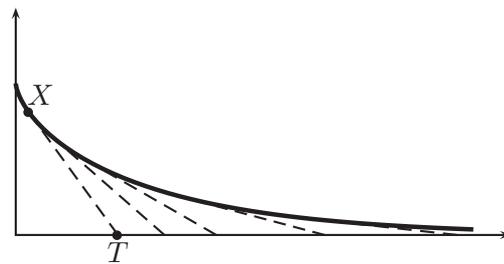


Figure 5

D'après le théorème de Mamikon, l'aire \mathcal{A} cherchée vaut l'aire de la concentration tangentielle associée. Or, d'après la figure 5 du dessus, cette dernière se ramène à un quart de cercle de rayon l égal à la longueur du segment XT (c'est-à-dire à la longueur de la chaîne dans le cas de la montre de Perrault). Donc, la réponse attendue est

$$\mathcal{A} = \frac{\pi l^2}{4}.$$

Une démarche similaire peut être appliquée pour calculer d'autres aires planes, par exemple celles des régions comprises entre les traces laissées sur le sol par les deux roues d'un vélo (voir figure 6).

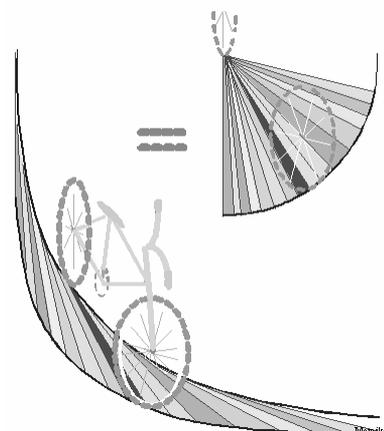


Figure 6

(<http://www.its.caltech.edu/~mamikon/VisualCalc.html>)

⁽²⁾ Bien entendu, l'aire en question est égale à $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ où $y = f(x)$ désigne une équation de la tractrice : encore faudrait-il connaître cette fonction f , puis être capable de la primitiver.

5. Aire sous une parabole

Penchons-nous sur le calcul de l'aire de la région plane située entre la parabole d'équation $y = x^2$ et l'axe horizontal pour des abscisses allant de 0 à un réel positif r : ce problème est ancien puisque Archimède (287 - 212 AJC) aurait déjà trouvé que cette aire vaut le tiers de l'aire du rectangle dans lequel est inscrite la parabole (voir figure 7)

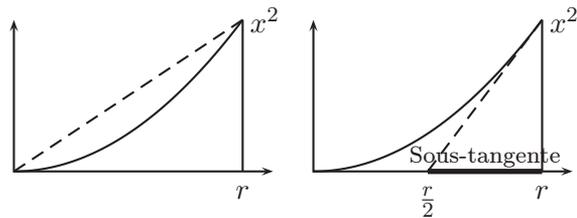


Figure 7

Il est clair que l'aire \mathcal{A} cherchée est inférieure à l'aire r^3 du rectangle en question, et même inférieure à la moitié $\frac{r^3}{2}$ de ce dernier puisque la parabole est une courbe convexe (et donc située sous la corde joignant l'origine à l'extrémité supérieure droite du rectangle).

La méthode que nous allons suivre ne fait pas appel à l'équation de la parabole, mais seulement au fait que la tangente à la parabole au point $P = (r, r^2)$ détermine une sous-tangente ⁽³⁾ de longueur $\frac{r}{2}$ (voir la figure 7), de sorte que la pente de la tangente en P est égale à r^2 divisé par $\frac{r}{2}$, soit à $2r$.

Construisons, dans le rectangle en question (de sommets l'origine et les points P , $(0, r^2)$ et $(r, 0)$), la parabole d'équation $y = (2x)^2 = 4x^2$. Le rectangle est de la sorte divisé en trois régions : celle située dans le coin gauche au-dessus de la seconde parabole, celle située dans la région centrale entre les deux paraboles, et enfin celle située à droite sous la parabole initiale ; désignons respectivement par \mathcal{B} et par \mathcal{C} les aires des deux premières régions, de sorte que

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} = r^3.$$

Pour chaque réel a compris entre 0 et r^2 traçons la droite horizontale d'équation $y = a$; celle-ci porte deux segments de droite de même longueur (égale à $\frac{a}{2}$) joignant l'axe vertical à la seconde parabole d'une part, entre les deux paraboles d'autre part (voir la figure 8). En conséquence :

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} \quad \text{d'où} \quad \mathcal{A} = r^3 - 2\mathcal{B}.$$

⁽³⁾ On appelle *sous-tangente* la projection orthogonale de la tangente sur l'axe des abscisses.

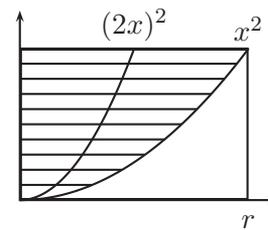


Figure 8

Nous allons montrer que

$$\mathcal{A} = \mathcal{B},$$

ce qui nous conduira au résultat escompté.

A cet effet, considérons l'étendue tangentielle sous la parabole de départ et limitée par l'axe des abscisses : en un point arbitraire (t, t^2) de la parabole du dessous, traçons la tangente qui coupe l'axe horizontal au point d'abscisse $\frac{t}{2}$, de sorte que la portion envisagée de la tangente est le segment de droite joignant le point $(\frac{t}{2}, 0)$ à (t, t^2) . Translatons ce segment de manière à ramener son extrémité gauche en l'origine : on obtient ainsi le segment de droite dont l'extrémité droite est le point $(\frac{t}{2}, t^2)$; en d'autres termes, le segment translaté va de l'origine au point situé sur la parabole du dessus. En conséquence, la concentration tangentielle considérée coïncide avec la région du plan comprise entre la parabole d'équation $y = 4x^2$ et la droite joignant l'origine au point d'intersection de cette parabole avec le côté supérieur du rectangle (voir figure 9)

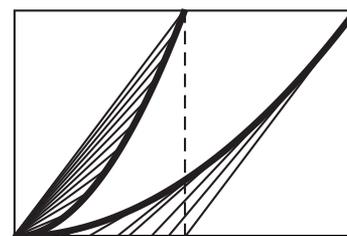


Figure 9

Le théorème de Mamikon affirme que que l'étendue tangentielle coïncide avec la concentration tangentielle associée. Comme les triangles supérieur gauche, (de sommets l'origine, $(0, r^2)$ et $(\frac{r}{2}, r^2)$) et inférieur droit (de sommets $(\frac{r}{2}, 0)$, $(r, 0)$ et (r, r^2))

ont même aire, il en résulte bien que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, d'où la conclusion

$$\mathcal{A} = \frac{r^3}{3}.$$

Signalons que la méthode utilisée dans le cas de la parabole peut être généralisée pour toute puissance (entière ou non) d'exposant supérieur à 2, ainsi que dans le cas de fonctions de type puissance dont l'exposant est négatif; le lecteur intéressé peut consulter l'article d'Apostol et Mnatsakanian [3].

6. Aire d'une arche de cycloïde

Recherchons à présent l'aire de la région située sous une arche de cycloïde, cette courbe étant, rappelons-le, décrite par un point fixe sur un cercle qui roule sans glisser sur une droite.

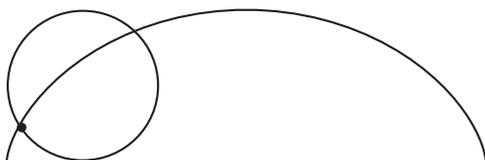


Figure 10

Bien entendu, cette question peut être traitée de manière classique en recherchant une équation de la cycloïde, puis en calculant une intégrale. Nous allons encore l'aborder en faisant appel à des outils peu sophistiqués.

Une arche de cycloïde est inscrite dans un rectangle dont la hauteur est égale au diamètre d du cercle générateur, tandis que la base est le périmètre πd de ce cercle. En conséquence, l'aire de ce rectangle vaut πd^2 , c'est-à-dire 4 fois l'aire du disque générateur. L'aire \mathcal{A} recherchée (voir la figure 11) est donc égale

$$\mathcal{A} = \pi d^2 - \mathcal{B},$$

où \mathcal{B} vaut l'aire de la région située dans le rectangle mais au-dessus de la cycloïde.



Figure 11

Nous allons montrer, par un raisonnement assez intuitif, que \mathcal{B} vaut exactement l'aire du disque de diamètre d . En effet, constatons qu'en tout point X de la cycloïde, le cercle générateur est tangent aux deux bases inférieure et supérieure du rectangle, aux points P_0 et P respectivement (voir la figure 12); le segment P_0P est donc un diamètre de ce cercle et divise celui-ci en deux parties égales. De plus, lorsqu'il parcourt un déplacement « infinitésimal » sur la cycloïde (qui peut alors être « assimilée » à la tangente correspondante), le point X subit une « rotation instantanée » autour du point P_0 , de sorte que la tangente à la cycloïde en X est perpendiculaire au rayon P_0X de cette rotation. En conséquence, le point X est le sommet d'un triangle rectangle inscrit dans le demi-cercle de diamètre P_0P et la corde XP de ce demi-cercle est tangente à la cycloïde. Dès lors, si X parcourt cette dernière, les segments XP , limités par le côté supérieur du rectangle, balayent la région d'aire \mathcal{B} et forment alors une étendue tangentielle.

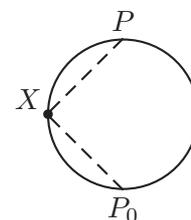
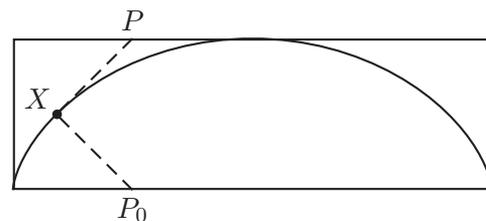


Figure 12

Le théorème de Mamikon garantit l'égalité entre les aires de cette étendue tangentielle et de la concentration tangentielle associée (voir figure 7).

Au total, l'aire sous une arche de cycloïde vaut alors, en désignant par R le rayon du cercle générateur (donc $R = \frac{d}{2}$) :

$$\mathcal{A} = 4\pi R^2 - \pi R^2 = 3\pi R^2.$$

En d'autres termes, cette aire vaut bien trois fois celle du disque générateur.

7. Aire sous le graphe d'une exponentielle

Proposons-nous à présent de calculer l'aire \mathcal{A} de la région du plan située sous le graphe de la fonction $x \mapsto \exp\left(\frac{b}{x}\right)$, où b désigne une constante positive, et à gauche d'une abscisse quelconque r (supposée ici positive). Il est connu qu'elle est donnée par :

$$\mathcal{A} = \int_{-\infty}^r \exp\left(\frac{b}{x}\right) dx ,$$

mais nous allons la calculer sans recourir à cette intégrale. Pour ce faire, remarquons qu'une courbe exponentielle est caractérisée par le fait que la pente de sa tangente en un point arbitraire est toujours proportionnelle à la hauteur de la courbe en ce point, ce qui équivaut à dire que la sous-tangente est de longueur constante.

Pour la fonction exponentielle considérée, traçons les tangentes en tous les points d'abscisse inférieure ou égale à r et limitons tous les segments tangents par l'axe horizontal : nous obtenons de la sorte une étendue tangentielle. Comme chaque sous-tangente est constante, égale à b , on peut translater ces segments tangents pour que les points d'intersection de la tangente avec l'axe horizontal viennent coïncider avec le point d'abscisse $r - b$ et d'ordonnée nulle (il s'agit donc de l'intersection de la tangente à l'exponentielle au point d'abscisse r avec l'axe horizontal) : la concentration tangentielle associée forme un triangle rectangle de base b et de hauteur $\exp\left(\frac{r}{b}\right)$; l'aire de ce triangle (voir la figure 13) est égale à $\frac{1}{2} b \exp\left(\frac{r}{b}\right)$.

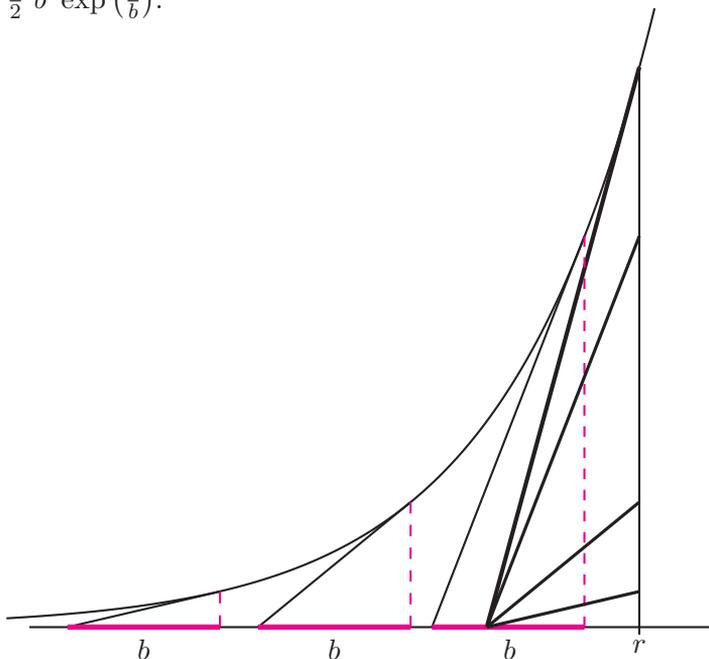


Figure 13

D'après le théorème de Mamikon, l'étendue tangentielle et la concentration tangentielle associée ont même aire, ce qui peut surprendre en première analyse car la concentration tangentielle est une région « bornée » du plan (puisque c'est un triangle) au contraire de l'étendue tangentielle (puisque les abscisses peuvent y prendre toutes les valeurs de la demi-droite $]-\infty, b - r[$).

Dès lors, l'aire \mathcal{A} cherchée, qui est égale à la somme de celles de l'étendue tangentielle et de la concentration tangentielle associée, vaut deux fois l'aire du triangle considéré ci-dessus, c'est-à-dire

$$\mathcal{A} = b \exp\left(\frac{r}{b}\right) .$$

Pour en savoir plus

- [1] APOSTOL T., A Visual Approach to Calculus Problems, *Engineering and Science*, n°3, 2000, pp. 22 - 31 ; *Newsletter of the EMS (European Mathematical Society)*, issue 64, 2007, pp. 17 - 23.
- [2] APOSTOL T. - MNATSAKIAN M., Subtangents - An Aid to Visual Calculus, *Monthly*, The Mathematical Association of America, 109, 2002, pp. 525 - 533.
- [3] APOSTOL T. - MNATSAKIAN M., Tangents and Subtangents Used to Calculate Areas, *Monthly*, The Mathematical Association of America, 109, 2002, pp. 900 - 908.
- [4] BAIR J. - HENRY V., Translater, c'est quar- rer !, *Les transformations de la géométrie à l'art*, Bibliothèque Tangente, HS n°35, Editions Pôle, Paris, 2009, pp. 100 - 103.
- [5] DE BLOCK - DOCQ CHR. - HAUCHART CHR., Les idées principales de Nicolas Rouche à propos de l'enseignement des mathématiques, *Lo-sanges*, 5, 2009, pp. 18 - 24.

J. Bair est professeur à l'Université de Liège (J.Bair@ulg.ac.be) et V. Henry travaille à l'Université de Liège et aux Facultés Universitaires Notre Dame de la Paix à Namur (valerie.henry@fundp.ac.be).

Des graphes et des ensembles pour aider le linguiste

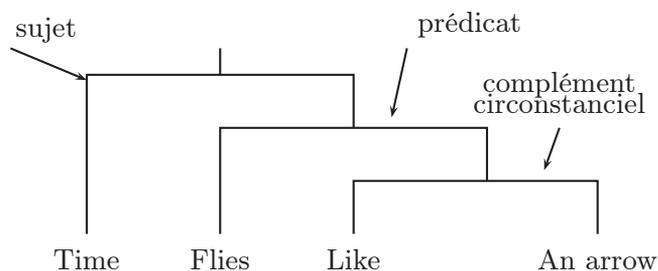
Alain Gottcheiner

Mots clés : graphe, ensemble, métonymie, synecdoque, métaphore

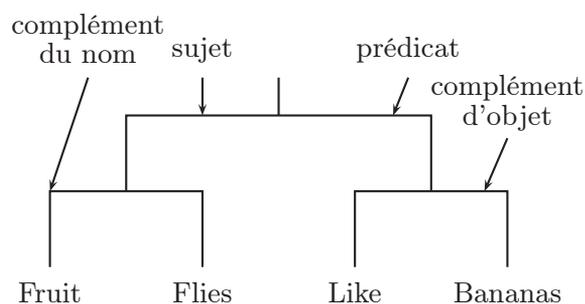
Les linguistes, comme tous les spécialistes, font usage d'un jargon professionnel abondant. Ces termes sont souvent complexes, et occasionnellement mal définis. Toutefois, les mathématiques peuvent aider, dans de nombreux cas, à aiguïser et expliciter leurs définitions. En voici quelques exemples, qui permettent d'originales interactions entre cours au niveau du secondaire supérieur.

Ambiguïté syntaxique et arbres syntaxiques

« Time flies like an arrow », disent les Anglais. Certains ajoutent facétieusement « but fruit flies like bananas ». Sauf à être un ordinateur, il n'est pas difficile de comprendre la différence de structure entre ces deux phrases. Mais justement, comment décrire à un ordinateur comment elles sont constituées ? L'application classique des mathématiques à la syntaxe ⁽¹⁾ est la création d'arbres syntaxiques, qui permettent de visualiser l'analyse grammaticale :



⁽¹⁾ Nous ne parlerons pas ici de l'utilisation de la théorie des automates finis, développement absolument remarquable mais d'une utilisation complexe.



On se demande alors pour quelle raison tant d'exemples d'ambiguïté existent en anglais – et moins souvent en français – ; la réponse la plus communément admise est qu'en anglais, les mêmes mots peuvent avoir plusieurs natures grammaticales (*like* : préposition ou verbe ? ; *flies* : verbe ou substantif ?). Cependant, ceci n'est qu'une petite partie de la réponse, comme le montre cette manchette, où aucun mot ne change de nature grammaticale entre les deux interprétations possibles : *Man pleads not guilty in stolen violin case*.

La concaténation comme loi mathématique

La phrase ci-dessus attire notre attention sur la principale cause de l'ambiguïté, à savoir que rien dans la phrase, sinon le sens, ne signale dans quel ordre les regroupements de mots doivent être réalisés.

Vous désirez comprendre « dans l'affaire du violon volé » : (*stolen violin*) case plutôt que « dans un