

Université de Liège  
Faculté des Sciences Appliquées

**Couplages thermo-hydro-mécaniques dans les  
sols et les roches tendres partiellement saturés**

par  
Frédéric COLLIN

Thèse présentée en vue de l'obtention  
du grade de Docteur en Sciences Appliquées

Jury:

S. CESCOTTO, Professeur à l'Université de Liège, Président  
R. CHARLIER, Professeur à l'Université de Liège, Promoteur  
A. BOLLE, Professeur à l'Université de Liège  
CH. SCHROEDER, Maître de Conférences à l'Université de Liège  
P. DELAGE, Professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées  
(France)  
P. KEUL, Directeur à TotalFinaElf Exploration Norway (Norvège)  
P. MARCHINA, Directeur à TotalFinaElf Pau (France)  
J.-C. ROEGIERS, Professeur à l'Université d'Oklahoma (USA)  
J.-C. VERBRUGGE, Professeur à l'Université Libre de Bruxelles

Année académique 2002-2003



## TABLE DES MATIERES

<b>TABLE DES FIGURES</b>	<b>vi</b>
<b>TABLE DES NOTATIONS</b>	<b>x</b>
<b>NOTIONS DE BASE</b>	<b>xxviii</b>
<b>INTRODUCTION</b>	
1. <i>Introduction générale</i> .....	3
2. <i>Plan du travail</i> .....	5
<b>MODELE D'ECOULEMENT MULTIPHASIQUE ANISOTHERME</b>	
1. <i>Introduction</i> .....	11
2. <i>Concepts de Base</i> .....	14
2.1. <b>Propriétés et lois de comportement des différents composants</b>	14
2.1.1. L'eau liquide	14
2.1.2. L'huile	16
2.1.3. L'air sec	16
2.1.4. La vapeur d'eau	18
2.1.5. Le mélange air sec - vapeur d'eau	23
2.1.6. Air dissous	24
2.1.7. La phase solide	25
2.2. <b>Milieu poreux et milieu continu</b>	26
2.3. <b>Equations de bilan</b>	28
2.4. <b>Conclusions</b>	30
3. <i>Milieu anisotherme saturé par un seul fluide</i> .....	30
3.1. <b>Conservation de la masse du fluide</b>	30
3.2. <b>Ecoulement du fluide</b>	31
3.3. <b>Emmagasinement de fluide</b>	32
3.4. <b>Conservation de la chaleur</b>	32
3.5. <b>Transfert de la chaleur par unité de volume</b>	33
3.6. <b>Quantité de chaleur emmagasinée par unité de volume : enthalpie</b>	34
4. <i>Milieu anisotherme saturé par deux fluides sans changement de phase</i> .....	35
4.1. <b>Phénomène capillaire</b>	35
4.1.1. Approche des sols non-saturés	38
4.1.2. Approche pétrolière	42
4.2. <b>Conservation de la masse des fluides</b>	45
4.3. <b>Ecoulement des fluides</b>	46
4.4. <b>Emmagasinement des fluides</b>	46
4.5. <b>Conservation de la chaleur</b>	47
4.6. <b>Transfert de la chaleur par unité de volume</b>	47

4.7. Quantité de chaleur emmagasinée par unité de volume	48
5. <i>Milieu anisotherme saturé par deux fluides avec changement de phase</i> .....	48
5.1. Conservation de la masse d'eau	50
5.2. Ecoulement de l'eau	51
5.3. Emmagasinement d'eau	53
5.4. Conservation de la masse de l'air	54
5.5. Ecoulement de l'air et du gaz	55
5.6. Emmagasinement d'air	56
5.7. Conservation de la chaleur	57
5.8. Transfert de la chaleur par unité de volume	58
5.9. Quantité de chaleur emmagasinée par unité de volume	59
6. <i>Conclusions</i> .....	60

## MODELE DE COMPORTEMENT DES SOLS NON SATURES

1. <i>Introduction</i> .....	63
2. <i>Observations expérimentales</i> .....	64
2.1. Techniques expérimentales de contrôle de la succion	65
2.1.1. Méthode de translation d'axes	65
2.1.2. Méthode osmotique	66
2.1.3. Méthode par phase vapeur	68
2.2. Comportement volumique	69
2.3. Comportement déviatorique	71
2.4. Comportement d'enrochements non-saturés	72
3. <i>Lois constitutives de géomatériaux non-saturés</i> .....	74
3.1. Contrainte effective dans les sols non-saturés	75
3.2. Variables d'état de contrainte	76
3.3. Relevé de modèles de comportement	77
3.3.1. Surfaces d'état	77
3.3.2. Modèle d'Alonso-Gens	78
3.3.3. Modèle en contraintes effectives	79
3.3.4. Conclusions	80
3.4. Le modèle d'Alonso - Gens	80
3.4.1. Elasticité	81
3.4.2. Surface de plasticité en conditions saturées	81
3.4.3. Surface de plasticité en conditions non-saturées	82
3.4.4. Règles d'écrouissage	87
4. <i>Conclusions</i> .....	88

## MODELE DE COMPORTEMENT D'UNE CRAIE NON SATUREE

1. <i>Introduction</i> .....	93
2. <i>Observations et aspects expérimentaux</i> .....	94
2.1. Composition et minéralogie	95

2.2. Comportement mécanique	96
2.3. Mécanisme microscopique expliquant la résistance de la craie	99
3. <i>Relevé bibliographique des lois de comportement de la craie</i> .....	100
3.1. Modèle de Shao	101
3.1.1. Elasticité	101
3.1.2. Surface de plasticité	101
3.1.3. Viscoplasticité de la craie	103
3.2. Le modèle de Santarelli - Brignoli	105
3.2.1. Elasticité	105
3.2.2. Surface de plasticité	106
3.3. Modèle de Piau - Maury	107
3.4. Modèle Homand – Shao	109
3.4.1. Elasticité	109
3.4.2. Surfaces de plasticité en conditions saturées	109
3.4.3. Effet des fluides saturants	111
3.5. Conclusions	111
4. <i>Modèle de comportement d'une craie non-saturée</i> .....	112
4.1. Formulation d'un modèle élasto-plastique en conditions non-saturées	114
4.2. Elasticité	119
4.3. Modèle CamClay	122
4.3.1. Surface d'écoulement	125
4.3.2. Règle d'écrouissage	125
4.4. Modèle à frottement interne : modèle PLASOL	127
4.4.1. Surface d'écoulement	130
4.4.2. Règle d'écrouissage	130
4.5. Modèle en traction	131
4.6. Surface SI	132
4.6.1. Règle d'écrouissage	133
5. <i>Détermination des paramètres de la craie</i> .....	134
5.1. Rappel des paramètres du modèle	134
5.2. Paramètres de la craie de Lixhe	135
5.2.1. Essais triaxiaux	136
5.2.2. Essais oedométriques	151
5.3. Jeux de paramètres	156
6. <i>Conclusions</i> .....	159
<b>ELEMENTS FINIS COUPLES</b>	
1. <i>Introduction</i> .....	163
2. <i>Eléments finis couplés MWAT 2D/3D</i> .....	163
2.1. Forme faible des équations de bilan	164
2.2. Formulation de l'élément fini couplé	166
3. <i>Intégration des lois constitutives</i> .....	172
3.1. Loi de comportement mécanique	172

3.1.1. Prédicteur élastique	174
3.1.2. Correcteur plastique	175
3.1.3. Les sous-intervalles d'intégration	184
3.1.4. Algorithme de la loi	185
3.2. Modèle d'écoulement anisotherme	187
4. Algorithme général de résolution.....	188
5. Conditions aux limites.....	194
6. Conclusions.....	197
<b>VALIDATION DES MODELES</b>	
1. Introduction .....	201
2. Modèle d'écoulement non-saturé anisotherme .....	202
2.1. Ecoulement saturé anisotherme	202
2.1.1. Description du problème	202
2.1.2. Prédications du modèle	204
2.2. Ecoulement non-saturé isotherme	209
2.2.1. Description du problème	210
2.2.2. Prédications du modèle	212
2.3. Ecoulement non-saturé anisotherme	218
2.3.1. Description du problème	218
2.3.2. Prédications du modèle	221
2.4. Conclusions	224
3. Modèle de comportement d'une craie non-saturée .....	225
3.1. Craie saturée	225
3.1.1. Essais triaxiaux	225
3.1.2. Essais K0	227
3.1.3. Variabilité des propriétés du matériau	228
3.2. Craie non-saturée : Waterflooding	232
3.2.1. Description des essais	235
3.2.2. Prédiction du modèle	236
3.3. Conclusions	241
4. Conclusions.....	242
<b>APPLICATIONS</b>	
1. Introduction .....	245
2. Projet CATSIUS CLAY.....	247
2.1. Définition du problème	247
2.2. Paramètres du modèle	248
2.3. Prédications du modèle	254
2.3.1. Conditions initiales	255
2.3.2. Conditions limites	255

2.3.3. Résultats	255
2.4. Conclusions	259
3. <i>Réservoir pétrolier</i> .....	260
3.1. Modèle homogène	260
3.2. Modèle multi-couches	265
3.2.1. Production seule	271
3.2.2. Production et injection	273
3.3. Conclusions	278
4. <i>Conclusion</i> .....	278

## CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

1. <i>Synthèse</i> .....	283
2. <i>Apports originaux de cette thèse</i> .....	286
3. <i>Perspectives</i> .....	287

## REFERENCES

## TABLE DES FIGURES

Figure 2.1 : Coupe d'un réservoir pétrolier simplifié	11
Figure 2.2 : Galerie de stockage de déchets	12
Figure 2.3 : Evolution en fonction de la température de différentes propriétés de l'eau - (a) Masse volumique – (b) Viscosité dynamique – (c) Conductibilité thermique – (d) Chaleur spécifique [RAZNJEVIC, 1970].	15
Figure 2.4 : Evolution en fonction de la température de différentes propriétés de l'air sec - (a) Masse volumique – (b) Viscosité dynamique – (c) Conductibilité thermique – (d) Chaleur spécifique [RAZNJEVIC, 1970]	17
Figure 2.5 : Courbe d'équilibre d'un corps pur	19
Figure 2.6 : Courbe isotherme de l'équilibre liquide-vapeur d'un corps pur	20
Figure 2.7 : Evolution des propriétés de la vapeur d'eau - (a) Masse volumique [Equations (2.21) et (2.22)] – (b) Viscosité dynamique [Equation (2.32)].	21
Figure 2.8 : Définition d'un milieu saturé	26
Figure 2.9 : Forces moléculaires sur une particule d'eau	36
Figure 2.10 : Tensions superficielles	36
Figure 2.11: Modèle physique du phénomène capillaire	37
Figure 2.12: Représentation d'un sol granulaire non-saturé	37
Figure 2.13: Causes du phénomène d'hystérésis : a) Goutte d'eau – b) Effet goulot – c) Connexion en parallèle	38
Figure 2.14: Courbes de rétention typique	39
Figure 2.15: Courbe de rétention de quatre matériaux d'après Brooks et Corey (1964)	40
Figure 2.16: Courbe de perméabilité pour un sol non saturé	42
Figure 2.17: Courbe de pression capillaire typique	43
Figure 2.18: Courbes de perméabilité typique	43
Figure 2.19: Courbe de pression capillaire idéalisée	44
Figure 2.20: Définition des phases et des espèces chimiques	49
Figure 3.1: Représentation d'un sol granulaire non-saturé	64
Figure 3.2 : Cellule de Richards de contrôle de succion [RICHARDS, 1941]	65
Figure 3.3 : Cellule triaxiale à succion contrôlée [BISHOP et al., 1961]	66
Figure 3.4 : Principe de la méthode osmotique	67
Figure 3.5 : Cellule oedométrique à succion contrôlée [DELAGE et al., 1992]	67
Figure 3.6 : Contrôle de succion par phase vapeur [DELAGE et al., 2001a]	68
Figure 3.7 : Cellule oedométrique à succion contrôlée [OTEO-MAZO et al., 1995]	69
Figure 3.8 : Essais isotropes à succion contrôlée sur un limon de Jossigny compacté [CUI et al., 1996]	70
Figure 3.9 : Essais oedométriques à succion contrôlée sur des agrégats d'argile de Boom. Résultats UPC [VOLCKAERT et al., 1996]	70
Figure 3.10 : Essai oedométrique sur un sol non saturé [ALONSO et al., 1987]	71
Figure 3.11 : Essais triaxiaux à succion contrôlée sur un limon de Jossigny [CUI et al., 1996]	72
Figure 3.12 : Représentation schématique des courbes de propagation sub-critique des fissures. [ALONSO et al., 2001]	74
Figure 3.13 : Paramètre $\chi$ pour différents types de sols [JENNINGS et al., 1962]	75
Figure 3.14 : Surface d'état pour un sol non-saturé [MATYAS et al., 1968]	78
Figure 3.15 : Courbe LC du modèle de Barcelone	79



Figure 3.16 : Modèle d'Alonso-Gens en conditions saturées	82
Figure 3.17 : Modèle de comportement pour des variations de contrainte nette (a) et de succion (b)	83
Figure 3.18 : Courbes de compressibilité pour un sol saturé et non-saturé [ALONSO et al., 1990]	84
Figure 3.19 : Surfaces de plasticité dans le plan $(\bar{p}, s)$ et le plan $(\bar{p}, q)$	86
Figure 3.20 : Surface plastique dans l'espace $(\bar{p}, q, s)$	87
Figure 4.1 : Contexte géologique du réservoir d'Ekofisk d'après SCHROEDER (2001)	93
Figure 4.2 : Structure de la craie de Lixhe	95
Figure 4.3 : Comportement général d'une craie	97
Figure 4.4 : Essais isotropes à différentes vitesses de chargement [SCHROEDER, 2002]	98
Figure 4.5 : Comportement de la craie pour différents liquides saturants d'après SCHROEDER (2001)	98
Figure 4.6 : Modèle de Brignoli-Santarelli dans le plan $(p, \tau)$	106
Figure 4.7 : Modèle de Piau-Maury	108
Figure 4.8 : Points d'entrée en plasticité pour les échantillons saturés en eau [SCHROEDER, 2000]	112
Figure 4.9 : Modèle à chapeau développé	114
Figure 4.10 : Les différents domaines définis par une surface de plasticité dans l'espace des contraintes	115
Figure 4.11 : Modèle CamClay dans le plan $(I_\sigma, II_\sigma)$	123
Figure 4.12 : Courbe LC dans le plan $(I_\sigma, s)$	124
Figure 4.13 : Ecrouissage - Adoucissement	126
Figure 4.14 : Modèle à frottement interne dans le plan $(I_\sigma, II_\sigma)$	127
Figure 4.15 : Angle de frottement en extension fonction de l'angle en compression	128
Figure 4.16 : Modèles à frottement interne dans le plan déviatoire $(\phi = 20^\circ)$	129
Figure 4.17 : Relation hyperbolique d'écrouissage pour deux valeurs du coefficient $B_p$ (avec $\phi_0 = 30^\circ$ , $\phi_f = 35^\circ$ )	131
Figure 4.18 : Modèle en traction pour différentes limites en traction isotrope	131
Figure 4.19 : Chemin de contrainte dans le plan $(p', q)$	137
Figure 4.20 : Mesure du déplacement entre la tête du piston et l'échantillon [SCHROEDER et al., 2002]	138
Figure 4.21 : Mesure du déplacement latéral par quatre LVDT	138
Figure 4.22 : Evolution du déviateur lors d'un essai triaxial selon le modèle à chapeau	139
Figure 4.23 : Mécanismes plastiques de la craie	140
Figure 4.24 : Points d'entrée en plasticité	140
Figure 4.25 : Points d'entrée en plasticité pour des échantillons saturés en eau	141
Figure 4.26 : Points d'entrée en plasticité pour des échantillons saturés en huile	141
Figure 4.27 : Evolution du pore collapse pour différentes saturations en huile	142
Figure 4.28 : Détermination du module cubique tangent	145
Figure 4.29 : Détermination du module cubique pour des chemins isotropes	146
Figure 4.30 : Influence de la porosité (échantillons saturés en huile)	147
Figure 4.31 : Détermination des paramètres $\kappa$ et $\lambda$	147
Figure 4.32 : Module cubique lors de cycles charge-décharge isotropes	148

Figure 4.33 : Module de cisaillement lors de chemins triaxiaux	149
Figure 4.34 : Module de cisaillement lors de chemins proportionnels	150
Figure 4.35 : Module de cisaillement pour des chemins déviatoriques (huile)	151
Figure 4.36 : Comportement à l'oedomètre selon le modèle CamClay	151
Figure 4.37 : Essais oedométriques en cellule triaxiale	153
Figure 4.38 : Essai oedométrique dans une cellule triaxiale asservie	154
Figure 4.39 : Modules cubique et de cisaillement à l'oedomètre	155
Figure 4.40 : Courbe LC avec la formule modifiée	157
Figure 5.1 : Différentes configurations d'un corps: $\Gamma$ (conf. initiale), $\gamma$ (conf. de référence), $\gamma^*$ (conf. déformée).	165
Figure 5.2 : Élément isoparamétrique à huit nœuds	167
Figure 5.3 : Algorithme de l'élément fini MWAT	171
Figure 5.4 : Modèle à chapeau	172
Figure 5.5 : Evaluation de l'état de contrainte $\sigma_E$ au point E	175
Figure 5.6 : Schéma totalement implicite : représentation de la plasticité parfaite dans l'espace des contraintes	177
Figure 5.7 : Algorithme de la routine d'intégration	178
Figure 5.8 : Détermination des régimes plastiques actifs dans le plan ( $I_\sigma, II_\sigma$ )	179
Figure 5.9 : Ecoulement plastique en régime de coin	181
Figure 5.10 : (a) Deux mécanismes actifs (b) Un seul mécanisme réellement actif	182
Figure 5.11 : Algorithme du pilote	185
Figure 5.12 : Algorithme de la routine d'intégration	186
Figure 5.13 : Calcul de l'emménagement	187
Figure 5.14 : Itérations successives pour résoudre le problème non-linéaire	189
Figure 5.15 : Élément de convection CONRA	195
Figure 5.16 : Loi de transfert de l'élément FMILC	196
Figure 5.17 : Élément de puits WEPRO	197
Figure 6.1 : Evolution temporelle du flux (normalisé) émis par la sphère	206
Figure 6.2 : Définition des points caractéristiques où sont donnés les résultats du modèle	206
Figure 6.3 : Prédictions du modèle et réponses analytiques dans le cas A (faible porosité)	207
Figure 6.4 : Prédictions du modèle et réponses analytiques dans le cas B (forte porosité)	208
Figure 6.5 : Variation de la pression après 500 ans.	209
Figure 6.6 : Courbe de rétention (a) et courbes de perméabilité relative (b) du sable Del Monte	211
Figure 6.7 : Simulation à pression d'air constante (1PH_D)	214
Figure 6.8 : Simulation à pression d'air variable (2PH_D)	215
Figure 6.9 : Simulation à pression d'air variable avec air dissous	216
Figure 6.10 : Comparaison entre les simulations avec perméabilité min. (krmin) et air dissous (a-d)	218
Figure 6.11 : Evolution temporelle du flux (normalisé) émis par la source	219
Figure 6.12 : Courbe de rétention (a) et courbe de perméabilité relative (b) du problème de Pollock	220
Figure 6.13 : Maillage éléments finis utilisé	222
Figure 6.14 : Résultats de la simulation du problème de Pollock	223

Figure 6.15 : Essai triaxial sur un échantillon saturé en huile	226
Figure 6.16 : Essai triaxial sur un échantillon saturé en eau	227
Figure 6.17 : Essais $K_0$ sur un échantillon saturé en huile	227
Figure 6.18 : Essais $K_0$ avec ressorts élastiques	228
Figure 6.19 : Module cubique tangent pour chemin isotrope	229
Figure 6.20 : Autocorrélogramme linéaire	230
Figure 6.21 : Essais isotropes avec $p_0$ aléatoire	231
Figure 6.22 : Courbes de rétention de la craie de Lixhe	233
Figure 6.23 : Courbes de perméabilité relative	234
Figure 6.24 : Chemin de contrainte suivis pour réaliser l'essai de waterflooding en condition anisotrope	235
Figure 6.25 : Schéma de l'échantillon de craie	236
Figure 6.26 : Essai de waterflooding en conditions de contrainte isotrope	238
Figure 6.27 : Cartes de porosité et déf. axiale (Amplification de la déformée : 10 fois)	239
Figure 6.28 : Essai de waterflooding en conditions de contrainte isotrope (type I)	240
Figure 6.29 : Essai de waterflooding en conditions de contrainte isotrope (type II)	241
Figure 7.1 : Galerie de stockage de déchets	245
Figure 7.2 : Histoire hydro-mécanique d'un réservoir (d'après [DELAGE et al., 1996])	246
Figure 7.3 : Schéma de l'expérimentation	248
Figure 7.4 : Courbe LC de la bentonite S-2	250
Figure 7.5 : Courbe de rétention de la bentonite S-2	251
Figure 7.6 : Perméabilité de la bentonite	251
Figure 7.7 : Propriétés thermiques de la bentonite	252
Figure 7.8 : Maillage de l'expérimentation	254
Figure 7.9 : Température dans l'échantillon	256
Figure 7.10 : Transferts hydriques dans l'échantillon	257
Figure 7.11 : Courbes de niveau de la saturation et la teneur en eau	258
Figure 7.12 : Courbes de niveau de la pression de vapeur [kPa] et de la variation de température [°C]	258
Figure 7.13 : Contrainte totale à la base de l'échantillon	259
Figure 7.14 : Schéma du premier modèle	261
Figure 7.15 : Schéma de production	261
Figure 7.16 : Courbe de rétention utilisée	262
Figure 7.17 : Réservoir homogène (2D – Axisymétrique)	263
Figure 7.18 : Réservoir homogène (2D – Etat-plan déformation)	264
Figure 7.19 : Schéma du réservoir	265
Figure 7.20 : Caractéristiques du réservoir	266
Figure 7.21 : Maillage utilisé (a) et maillage ECLIPSE (b)	270
Figure 7.22 : Pression de champ	271
Figure 7.23 : Débit de production	272
Figure 7.24 : Pression d'huile dans le réservoir	272
Figure 7.25 : Pression de champ	273
Figure 7.26 : Saturation dans le modèle homogène $S_{r,w} \in [8, 100] \%$	274
Figure 7.27 : Saturation dans le modèle non-homogène $S_{r,w} \in [8, 99] \%$	275
Figure 7.28 : Modification de la courbe de rétention	276
Figure 7.29 : Débit d'huile au puits de production	276

<i>Figure 7.30 : Débit d'eau au puits de production</i>	<i>277</i>
<i>Figure 7.31 : Débit d'eau au puits d'injection</i>	<i>277</i>

## TABLE DES NOTATIONS

### 1. LETTRES GRECQUES

Symbole	Unité	Signification	Page
$\alpha$	-	Paramètre de la relation 3.50	86
$\alpha_c$	-	Paramètre matériel de la relation 4.22	105
$\alpha_d$	-	Paramètre matériel de la relation 4.23	105
$\alpha_{fr}$	-	Paramètre relié à l'angle de frottement (Modèle Homand-Shao)	111
$\alpha_f^T$	$^{\circ}\text{K}^{-1}$	Dilatation thermique du fluide $f$	33
$\alpha_m$	-	Paramètre matériel de la relation 4.45	111
$\alpha_o^T$	$^{\circ}\text{K}^{-1}$	Dilatation thermique de l'huile	16
$\alpha_s^T$	$^{\circ}\text{K}^{-1}$	Dilatation thermique des grains solides	26
$\alpha_w^T$	$^{\circ}\text{K}^{-1}$	Dilatation thermique de l'eau	14
$\alpha_0$	-	Paramètre matériel de la relation 4.45	111
$\beta$	Degré	Angle de Lode	8
$\beta$	$\text{kg}/(\text{m}^3.\text{s})$	Dérivée de la masse volumique (Formule 2.125)	55
$\beta_a^T$	$^{\circ}\text{K}^{-1}$	Coefficient de variation thermique de la viscosité de l'air sec	17
$\beta_o^T$	$^{\circ}\text{K}^{-1}$	Coefficient de variation thermique de la viscosité de l'huile	16
$\beta_w^T$	$^{\circ}\text{K}^{-1}$	Coefficient de variation thermique de la viscosité de l'eau	16
$\chi$	-	Paramètre matériel dépendant de la saturation (Relation 3.12)	73
$\gamma_a^T$	$^{\circ}\text{K}^{-1}$	Coefficient de variation thermique de la conductibilité thermique de l'air sec	18
$\gamma_c$	-	Paramètre de viscosité (Modèle de Shao)	105
$\gamma_d$	-	Paramètre de viscosité (Modèle de Shao)	105
$\gamma_d$	-	Déformation déviatorique équivalente	111
$\gamma_o^T$	$^{\circ}\text{K}^{-1}$	Coefficient de variation thermique de la conductibilité thermique de l'huile	16
$\gamma_s^T$	$^{\circ}\text{K}^{-1}$	Coefficient de variation thermique de la conductibilité thermique des grains solides	26
$\gamma_w^T$	$^{\circ}\text{K}^{-1}$	Coefficient de variation thermique de la conductibilité thermique de l'eau	16

		thermique de l'eau	
$\Gamma_a$	W/(m.°K)	Conductibilité thermique de l'air sec	18
$\Gamma_{a0}$	W/(m.°K)	Conductibilité thermique de l'air sec à la température de référence	18
$\Gamma_{dry}$	W/(m.°K)	Conductibilité thermique du matériau sec	60
$\Gamma_f$	W/(m.°K)	Conductibilité thermique du fluide $f$	34
$\Gamma_g$	W/(m.°K)	Conductibilité thermique du gaz	60
$\Gamma_G$	W/(m.°K)	Conductibilité thermique de la phase $G$	49
$\Gamma_L$	W/(m.°K)	Conductibilité thermique de la phase $L$	49
$\Gamma_m$	W/(m.°K)	Conductibilité thermique du milieu	34
$\Gamma_o$	W/(m.°K)	Conductibilité thermique de l'huile	16
$\Gamma_{o0}$	W/(m.°K)	Conductibilité thermique de l'huile à la température de référence	16
$\Gamma_s$	W/(m.°K)	Conductibilité thermique des grains solides	26
$\Gamma_{sat}$	W/(m.°K)	Conductibilité thermique du matériau saturé	60
$\Gamma_{s0}$	W/(m.°K)	Conductibilité thermique des grains solides à la température de référence	26
$\Gamma_w$	W/(m.°K)	Conductibilité thermique de l'eau	16
$\Gamma_{w0}$	W/(m.°K)	Conductibilité thermique de l'eau à la température de référence	16
$\mathcal{E}^*$	-	Déformation généralisée	117
$\mathcal{E}^c$	-	Déformation plastique liée au pore collapse (Modèle de Shao)	103
$\mathcal{E}_d$	-	Déformation déviatorique équivalente	120
$\mathcal{E}^d$	-	Déformation plastique liée au cisaillement (Modèle de Shao)	103
$\mathcal{E}_{eq}^p$	-	Déformation équivalente plastique	108
$\mathcal{E}_{ij}$	-	Tenseur des déformations	105
$\hat{\mathcal{E}}_{ij}$	-	Tenseur des déformations déviatoriques	108
$\mathcal{E}^p$	-	Déformation plastique	103
$\mathcal{E}^{s,e}$	-	Déformation élastique liée à des variations de succion	116
$\mathcal{E}^{s,p}$	-	Déformation plastique liée à des variations de succion	116
$\mathcal{E}_w$	-	Déformation induite par l'augmentation de saturation (Modèle de Piau-Maury)	108

$\varepsilon_{vol}^p$	-	Déformation volumique plastique	108
$\varepsilon^{vp}$	-	Déformation visco-plastique	105
$\varepsilon^{\sigma,e}$	-	Déformation élastique liée à des variations de contraintes	116
$\varepsilon^{\sigma,p}$	-	Déformation plastique liée à des variations de contraintes	116
$\eta$	-	Coordonnée locale de l'élément fini	167
$\theta$	Degré	Angle de contact à l'interface	37
$\theta_{a-d}$	-	Teneur volumique d'air dissous	56
$\theta_d$	-	Coefficient lié à la dilatance (Modèle Homand-Shao)	111
$\theta_f$	-	Teneur volumique du fluide $f$	30
$\theta_i$	-	Teneur volumique du composant $i$	52
$\theta_s$	-	Teneur volumique de la phase solide	34
$\theta_v$	-	Teneur volumique de la vapeur d'eau	52
$\theta_w$	-	Teneur volumique de l'eau liquide	52
$\theta_0$	-	Paramètre matériel de la relation 4.46	112
$\theta_1$	Degré	Angle de contact à l'interface au mouillage	38
$\theta_2$	Degré	Angle de contact à l'interface au séchage	38
$\theta_\alpha$	-	Teneur volumique de la phase $\alpha$	34
$\iota$	-	Paramètre matériel de la relation 4.24	105
$\kappa$	-	Pente élastique lié à des variations de contraintes	79
$\kappa_s$	-	Pente élastique lié à des variations de succion	79
$\lambda$	-	Pente plastique lié à des variations de contraintes	80
$\lambda_{BC}$	-	Indice de distribution des pores	42
$\lambda_c$	s <sup>-1</sup>	Constante de décroissance de la relation 6.1	203
$\lambda_c$	-	Multiplicateur plastique liée au pore collapse (Modèle de Shao)	103
$\lambda^p$	-	Multiplicateur plastique	107
$\lambda_s$	-	Pente plastique lié à des variations de succion	82
$\lambda_w$	-	Multiplicateur plastique lié à l'eau (Modèle de Homand-Shao)	112
$\mu$	-	Fonction du sinus de l'angle de frottement (Modèle de Santarelli-Brignoli)	107
$\mu_a$	Pa.s	Viscosité dynamique de l'air sec	17

$\mu_{a0}$	Pa.s	Viscosité dynamique de l'air sec à la température de référence	17
$\mu_c$	J/mole	Potentiel chimique	19
$\mu_c^0$	J/mole	Potentiel chimique dans l'état de référence	19
$\mu_{o0}$	Pa.s	Viscosité dynamique de l'huile à la température de référence	16
$\mu_o$	Pa.s	Viscosité dynamique de l'huile	16
$\mu_f$	Pa.s	Viscosité dynamique du fluide $f$	32
$\mu_g$	Pa.s	Viscosité dynamique du mélange air sec-vapeur d'eau	24
$\mu_v$	Pa.s	Viscosité dynamique de la vapeur d'eau	23
$\mu_w$	Pa.s	Viscosité dynamique de l'eau	15
$\mu_{w0}$	Pa.s	Viscosité dynamique de l'eau à la température de référence	16
$\mu_0$	-	Paramètre matériel de la relation 4.32	108
$\mu_1$	-	Paramètre matériel de la relation 4.32	108
$\mu_2$	-	Paramètre matériel de la relation 4.32	108
$\mu_3$	-	Paramètre matériel de la relation 4.32	108
$\mu_\alpha$	Pa.s	Viscosité dynamique de la phase $\alpha$	47
$\nu$	-	Coefficient de Poisson	98
$\xi$	-	Coordonnée locale de l'élément fini	167
$\xi_c$	-	Déformation isotrope plastique équivalente (Modèle de Shao)	103
$\xi_d$	-	Déformation déviatorique plastique équivalente (Modèle de Shao)	104
$\pi$	N/m <sup>2</sup>	Succion osmotique	40
$\rho(d)$	-	Fonction d'autocorrélation	231
$\rho_a$	kg/m <sup>3</sup>	Masse volumique de l'air sec	17
$\rho_{a0}$	kg/m <sup>3</sup>	Masse volumique de l'air sec aux température et pression de référence	17
$\rho_f$	kg/m <sup>3</sup>	Masse volumique du fluide $f$	30
$\rho_{f0}$	kg/m <sup>3</sup>	Masse volumique du fluide $f$ aux température et pression de référence	33
$\rho_g$	kg/m <sup>3</sup>	Masse volumique du gaz	24
$\rho_G$	kg/m <sup>3</sup>	Masse volumique de la phase $G$	49



$\rho_i$	kg/m <sup>3</sup>	Masse volumique du composant $i$	52
$\rho_L$	kg/m <sup>3</sup>	Masse volumique de la phase $L$	49
$\rho_o$	kg/m <sup>3</sup>	Masse volumique de l'huile	16
$\rho_{o0}$	kg/m <sup>3</sup>	Masse volumique de l'huile aux température et pression de référence	16
$\rho_s$	kg/m <sup>3</sup>	Masse volumique des grains solides	26
$\rho_{s0}$	kg/m <sup>3</sup>	Masse volumique des grains solides à la température de référence	26
$\rho_v$	kg/m <sup>3</sup>	Masse volumique de la vapeur d'eau	23
$\rho_w$	kg/m <sup>3</sup>	Masse volumique de l'eau	14
$\rho_{w0}$	kg/m <sup>3</sup>	Masse volumique de l'eau aux température et pression de référence	14
$\rho_{v,0}$	kg/m <sup>3</sup>	Masse volumique de la vapeur d'eau saturante	21
$\rho_\alpha$	kg/m <sup>3</sup>	Masse volumique de la phase $\alpha$	34
$\rho_{\alpha,s}$	kg/m <sup>3</sup>	Masse volumique de la phase $\alpha$ en condition standard	46
$\sigma^*$	N/m <sup>2</sup>	Contrainte généralisée	117
$\sigma_d$	N/m <sup>2</sup>	Contrainte déviatorique équivalente	120
$\sigma_f$	N/m <sup>2</sup>	Contrainte normale au plan de rupture	71
$\sigma_{GL}$	N/m	Tension superficielle à l'interface entre les phases $G$ et $L$ .	36
$\sigma_{ij}$	N/m <sup>2</sup>	Tenseur des contraintes	8
$\sigma_{ij}$	N/m <sup>2</sup>	Tenseur des contraintes	103
$\sigma'_{ij}$	N/m <sup>2</sup>	Tenseur des contraintes effectives	106
$\hat{\sigma}_{ij}$	N/m <sup>2</sup>	Tenseur des contraintes déviatoriques	8
$\bar{\sigma}_{ij}$	N/m <sup>2</sup>	Tenseur des contraintes nettes	104
$\sigma_{p_{0,N}}$	N/m <sup>2</sup> (*)	Ecart-type de la distribution des $p_{0,N}$ (* dans ce cas-ci)	231
$\sigma_{SG}$	N/m	Tension superficielle à l'interface entre les phases $S$ et $G$ .	37
$\sigma_{SL}$	N/m	Tension superficielle à l'interface entre les phases $S$ et $L$ .	37
$\sigma_{t,i}$	N/m <sup>2</sup>	Résistance en traction isotrope	133
$\tau$	-	Tortuosité du milieu	54
$\tau_f$	N/m <sup>2</sup>	Contrainte de cisaillement au plan de rupture	71
$\phi'$	Degré	Angle de frottement à l'état saturé	71
$\phi^b$	Degré	Quantifie l'augmentation de résistance avec la succion (équation 2.9)	71

		(relation 3.9)	
$\phi_c$	-	Paramètre de viscosité (Modèle de Shao)	105
$\phi_C$	Degré	Angle de frottement en compression	123
$\phi_{Cf}$	Degré	Angle de frottement final en compression (Modèle PLASOL)	131
$\phi_{C0}$	Degré	Angle de frottement initial en compression (Modèle PLASOL)	131
$\phi_d$	-	Paramètre de viscosité (Modèle de Shao)	105
$\phi_E$	Degré	Angle de frottement en extension	130
$\phi_{Ef}$	Degré	Angle de frottement final en extension (Modèle PLASOL)	131
$\phi_{E0}$	Degré	Angle de frottement initial en extension (Modèle PLASOL)	131
$\varphi(S_{r,w})$	-	Fonction de la relation 6.18	218
$\chi'_a$	-	Paramètre matériel de la relation 3.22	78
$\chi_f$	Pa	Compressibilité du fluide $f$	33
$\chi_o$	Pa	Compressibilité de l'huile	16
$\chi_w$	Pa	Compressibilité de l'eau	14
$\chi'_w$	-	Paramètre matériel de la relation 3.22	78
$\psi$	m	Potentiel de l'eau	23
$\psi$	m	Potentiel total de l'eau	40
$\psi_g$	m	Potentiel gravitaire	40
$\psi_m$	m	Potentiel matriciel	40
$\psi_o$	m	Potentiel osmotique	40
$\psi_p$	m	Potentiel de pression externe	40
$\Psi_C$	Degré	Angle de dilatance en compression	131
$\Psi_E$	Degré	Angle de dilatance en extension	131
$\omega$	Pa <sup>-1</sup>	Paramètre contrôlant l'augmentation de la raideur du sol avec la succion (Relation 3.33)	82
$\underline{\omega}$	rad/s	Vecteur vitesse de rotation	174
$\omega_a$	-	Teneur massique de l'air sec dans le mélange gazeux	57
$\omega_l$	-	Paramètre matériel de la relation 4.24	105
$\omega_v$	-	Teneur massique de vapeur dans le mélange gazeux	53

## 2. LETTRES LATINES

Symbole	Unité	Signification	Page
$a$	Pa	Constante de la formule 2.20	21
$a$	-	Paramètre matériel de la relation 3.19	76
$a$	-	Paramètre matériel de la relation 4.6	103
$a$	-	Paramètre matériel de la relation 4.44	111
$a$	-	Paramètre matériel de la relation 4.87	123
$a'$	W/(m.°K)	Paramètre de la relation 2.101	49
$a'$	-	Paramètre matériel de la relation 3.20	76
$a'$	-	Paramètre matériel de la relation 4.12	104
$a_2$	-	Paramètre matériel de la relation 4.24	105
$A$	m <sup>2</sup>	Surface	30
$A$	m	Rayon de la sphère chauffante de la relation 6.1	203
$b$	-	Paramètre de la formule 2.20	21
$b$	-	Paramètre matériel de la relation 3.19	76
$b$	-	Paramètre matériel de la relation 4.10	104
$b$	-	Paramètre matériel de la relation 4.45	111
$b$	-	Paramètre matériel de la relation 4.87	123
$b'$	W/(m.°K)	Paramètre de la relation 2.101	49
$b'$	-	Paramètre matériel de la relation 3.20	76
$b'$	-	Paramètre matériel de la relation 4.12	104
$b_2$	-	Paramètre matériel de la relation 4.23	105
$B_c$	-	Paramètre matériel de la relation 4.122	131
$B_p$	-	Paramètre matériel de la relation 4.122	131
$B_\alpha$	-	Facteur de Volume de la phase $\alpha$	46
$c$	-	Paramètre matériel de la relation 3.19	76
$c$	-	Paramètre matériel de la relation 4.6	103
$c'$	-	Paramètre matériel de la relation 3.20	76
$c_f$	N/m <sup>2</sup>	Cohésion finale (Modèle PLASOL)	131
$ck_0$	m <sup>2</sup>	Constante de la relation 2.61	33
$c_{p,a}$	J/(kg.°K)	Capacité thermique de l'air sec	18
$c_{p,a0}$	J/(kg.°K)	Capacité thermique de l'air sec à la température de	18

		référence	
$c_{p,f}$	J/(kg.°K)	Capacité thermique du fluide $f$	34
$c_{p,f0}$	J/(kg.°K)	Capacité thermique du fluide $f$ à la température de référence	35
$c_{p,G}$	J/(kg.°K)	Capacité thermique de la phase $G$	49
$c_{p,i}$	J/(kg.°K)	Capacité thermique du composant $i$	59
$c_{p,L}$	J/(kg.°K)	Capacité thermique de la phase $L$	49
$c_{p,o}$	J/(kg.°K)	Capacité thermique de l'huile	17
$c_{p,o0}$	J/(kg.°K)	Capacité thermique de l'huile à la température de référence	17
$c_{p,s}$	J/(kg.°K)	Capacité thermique des grains solides	26
$c_{p,s0}$	J/(kg.°K)	Capacité thermique des grains solides à la température de référence	26
$c_{p,w}$	J/(kg.°K)	Capacité thermique de l'eau	16
$c_{p,w0}$	J/(kg.°K)	Capacité thermique de l'eau à la température de référence	16
$c_0$	N/m <sup>2</sup>	Cohésion initiale (Modèle PLASOL)	131
$c_{p,\alpha}$	J/(kg.°K)	Capacité thermique de la phase $\alpha$	34
$C_a^T$	°K <sup>-1</sup>	Coefficient de variation thermique de la capacité thermique de l'air sec	18
$C_f^T$	°K <sup>-1</sup>	Coefficient de variation thermique de la capacité thermique du fluide $f$	35
$C_{ijkl}$	N/m <sup>2</sup>	Tenseur constitutif	73
$CKA1$	-	Paramètre de la relation 6.31	235
$CKA2$	-	Paramètre de la relation 6.31	235
$CKW1$	-	Paramètre de la relation 6.32	235
$C_m$	-	Paramètre matériel de la relation 3.17	76
$C_o^T$	°K <sup>-1</sup>	Coefficient de variation thermique de la capacité thermique de l'huile	17
$C^r$	-	Point critique du diagramme de phase d'un corps pur	21
$CSR1$	N/m <sup>2</sup>	Paramètre de la relation 6.30	234
$CSR2$	N/m <sup>2</sup>	Paramètre de la relation 6.30	234
$CSR3$	-	Paramètre de la relation 6.30	234
$C_s^T$	°K <sup>-1</sup>	Coefficient de variation thermique de la capacité thermique des grains solides	26
$C_t$	-	Paramètre matériel de la relation 3.17	76

$C_w^T$	$^{\circ}\text{K}^{-1}$	Coefficient de variation thermique de la capacité thermique de l'eau	16
$\underline{\underline{C}}^e$	$\text{N/m}^2$	Tenseur constitutif élastique	118
$\underline{\underline{C}}^{e*}$	$\text{N/m}^2$	Tenseur constitutif élastique généralisé	119
$\underline{\underline{C}}^{p*}$	$\text{N/m}^2$	Tenseur constitutif plastique généralisé	119
$d$	-	Paramètre matériel de la relation 3.19	76
$d$	-	Paramètre matériel de la relation 4.10	104
$d'$	-	Paramètre matériel de la relation 3.20	76
$d_{car}$	m	Distance caractéristique	53
$D$	m	Dimension du VER	28
$D$	$\text{m}^2/\text{s}$	Coefficient de diffusion moléculaire de l'air et de l'eau	53
$D_a$	$\text{m}^2/\text{s}$	Coefficient de diffusion moléculaire de l'air dans l'eau	53
$D_m$	-	Paramètre matériel de la relation 3.18	76
$D_t$	-	Paramètre matériel de la relation 3.18	76
$D_v$	$\text{m}^2/\text{s}$	Coefficient de diffusion moléculaire de l'eau dans l'air	53
$D_{KG}$	$\text{Pa}^{-1}$	Module élastique de couplage	123
$e$	-	Indice des vides	75
$ep$	m	Epaisseur de l'élément fini	169
$exm$	-	Paramètre matériel de la relation 4.9	103
$exn$	-	Paramètre matériel de la relation 4.1	102
$exr$	-	Exposant de la relation 2.61	33
$exs$	-	Exposant de la relation 2.61	33
$E$	$\text{N/m}^2$	Module de Young	98
$E_{dyn}$	$\text{N/m}^2$	Module de Young dynamique	159
$E_{H_2O}^{w \rightarrow v}$	$\text{kg/m}^3$	Masse d'eau liquide transformée en vapeur	51
$E_{Air}^{a \rightarrow a-d}$	$\text{kg/m}^3$	Masse d'air sec transformée en air dissous	56
$f_c$	-	Surface de plasticité définissant le pore collapse (Modèle de Shao)	103
$f_1(S_{r,w}, t)$	-	Fonction de la relation 6.18	218
$f_2(S_{r,w}, t)$	-	Fonction de la relation 6.18	218
$\underline{F}$	-	Jacobien de la transformation de la configuration initiale à la configuration courante	166

$F_c$	-	Fonction scalaire contrôlant la visco-plasticité (Modèle de Shao)	105
$F_d$	-	Fonction scalaire contrôlant la visco-plasticité (Modèle de Shao)	105
$F_{L_i}$	(*)	Force nodale énergétiquement équivalente (* dépend du degré de liberté considéré)	169
$\underline{F}_L^{Ext}$	(*)	Force nodale extérieure énergétiquement équivalente (* dépend du degré de liberté considéré)	189
$\underline{F}_L^{Int}$	(*)	Force nodale intérieure énergétiquement équivalente (* dépend du degré de liberté considéré)	189
$g$	m/s <sup>2</sup>	Accélération de la pesanteur	23
$g_s$	-	Paramètre matériel de la relation 4.153	160
$G$	N/m <sup>2</sup>	Module de cisaillement	79
$G(t)$	-	Fonction de pondération	171
$G_c$	J	Enthalpie libre	19
$G_s$	N/m <sup>2</sup>	Module de cisaillement sécant	120
$G_t$	N/m <sup>2</sup>	Module de cisaillement tangent	120
$G_0$	N/m <sup>2</sup>	Module de cisaillement initial	80
$h$	-	Humidité relative	23
$h_c$	m	Hauteur de remontée capillaire	39
$h_c$	-	Rapport de forme de la surface d'écoulement plastique (Modèle Homand-Shao)	111
$h_{Conv}$	W/m <sup>2</sup>	Coefficient d'échange thermique convectif	196
$h^e$	Pa <sup>-1</sup>	Module de déformation élastique liée à la succion	117
$h_f$	-	Rapport de forme de la surface de plasticité (Modèle Homand-Shao)	110
$h_w$	-	Rapport de forme de la surface d'écoulement plastique induit par l'eau (Modèle Homand-Shao)	112
$H$	J/m <sup>3</sup>	Enthalpie	20
$H_a$	J/m <sup>3</sup>	Enthalpie de l'air sec	60
$H_f$	J/m <sup>3</sup>	Enthalpie du fluide $f$	34
$H_G$	J/m <sup>3</sup>	Enthalpie de la phase $G$	49
$H_i$	J/m <sup>3</sup>	Enthalpie du composant $i$	59
$H_L$	J/m <sup>3</sup>	Enthalpie de la phase $L$	49

$H_{Lat}$	J/m <sup>3</sup>	Enthalpie liée à la vaporisation	61
$H_m$	J/m <sup>3</sup>	Enthalpie du milieu	34
$H^s$	-	Coefficient de solubilité de Henry	25
$H_S$	J/m <sup>3</sup>	Enthalpie de la phase $S$	49
$H_s$	J/m <sup>3</sup>	Enthalpie des grains solides	60
$H_v$	J/m <sup>3</sup>	Enthalpie de la vapeur d'eau	60
$H_w$	J/m <sup>3</sup>	Enthalpie de l'eau liquide	60
$H_\alpha$	J/m <sup>3</sup>	Enthalpie de la phase $\alpha$	48
$\underline{i}_a$	kg/m <sup>3</sup> .m/s	Flux diffusif d'air sec dans le mélange	56
$\underline{i}_{cond}$	J/(m <sup>2</sup> .s)	Flux thermique de conduction	34
$\underline{i}_f$	kg/m <sup>3</sup> .m/s	Flux diffusif du composant $f$ dans la phase $\alpha$	30
$\underline{i}_j$	kg/m <sup>3</sup> .m/s	Flux diffusif du composant $j$	52
$\underline{i}_v$	kg/m <sup>3</sup> .m/s	Flux diffusif de la vapeur d'eau	52
$I_\sigma$	N/m <sup>2</sup>	Premier invariant des contraintes	8
$II_{\hat{\sigma}}$	N/m <sup>2</sup>	Second invariant des contraintes déviatoriques	8
$III_{\hat{\sigma}}$	(N/m <sup>2</sup> ) <sup>3</sup>	Troisième invariant des contraintes déviatoriques	8
$\underline{\underline{J}}$	-	Jacobien de la transformation des coordonnées globales aux coordonnées locales	169
$k$	-	Constante matérielle de la relation 3.43	85
$k_{int}$	m <sup>2</sup>	Perméabilité intrinsèque	32
$k_{int}^{sat}$	m <sup>2</sup>	Perméabilité intrinsèque saturée	44
$k_o$	m <sup>2</sup>	Perméabilité intrinsèque à l'huile (Non-saturé)	44
$k_{r,\alpha}$	-	Perméabilité relative de la phase $\alpha$	47
$k_{r,g}$	-	Perméabilité relative au gaz	57
$k_{r,o}$	-	Perméabilité relative à l'huile	44
$k_{r,w}$	-	Perméabilité relative à l'eau	44
$k_s$	-	Paramètre matériel de la relation 4.152	160
$k_w$	m <sup>2</sup>	Perméabilité intrinsèque à l'eau (Non-saturé)	44
$k_0$	m <sup>2</sup>	Perméabilité initiale dans la relation 2.61	33
$K$	N/m <sup>2</sup>	Module cubique	79
$\underline{\underline{K}}$	(*)	Matrice tangente d'itération	190

		(* Dépend du terme de la matrice considéré-	
$K_a$	m/s	Coefficient de perméabilité à l'air (Non saturé)	43
$K_{eq}^{a-d}$	Pa	Constante d'équilibre de la dissolution de l'air dans l'eau liquide	25
$K_f$	m/s	Coefficient de perméabilité	32
$K_g$	m/s	Coefficient de perméabilité au gaz (Non saturé)	57
$K^{num}$	(*)	Constante de pénalisation numérique de la relation 5.110	197
		(* dépend du degré de liberté considéré)	
$K_s$	N/m <sup>2</sup>	Module cubique sécant	120
$K_{sat}$	m/s	Coefficient de perméabilité (Saturé)	43
$K_t$	N/m <sup>2</sup>	Module cubique tangent	120
$K_w$	m/s	Coefficient de perméabilité à l'eau (Non saturé)	43
$K_0$	-	Rapport des contraintes effectives dans un essai oedométrique	72
$K^0$	N/m <sup>2</sup>	Module cubique initial (Modèle de Shao)	102
$K_\alpha$	m/s	Coefficient de perméabilité de la phase $\alpha$	47
$l$	m	Dimension microscopique	28
$L$	J/kg	Chaleur latente de vaporisation	20
$L$	m	Dimension macroscopique	28
$\underline{L}$	s <sup>-1</sup>	Tenseur gradient de vitesse	166
$m$	kg	Masse	20
$m$	-	pente de l'état critique dans le plan ( $I_\sigma, II_{\dot{\sigma}}$ )	123
$m'$	-	pente de la surface d'écoulement plastique du modèle PLASOL dans le plan ( $I_\sigma, II_{\dot{\sigma}}$ )	131
$M$	kg/mol	Masse molaire équivalente (formule 2.116)	53
$M$	-	Pente de la droite d'état critique	80
$M_a$	kg/mole	Masse molaire de l'air sec	24
$M_g$	kg/mole	Masse molaire du mélange air-sec-vapeur d'eau	24
$M_v$	kg/mole	Masse molaire de l'eau	21
$M_w$	kg/mole	Masse molaire de l'eau liquide	25
$n$	-	Porosité du milieu	27
$n$	-	Coefficient matériel de la relation 4.87	123
$\underline{n}$	-	Normale extérieure d'une surface	29



$n_0$	-	Porosité initiale de la relation 2.61	33
$N$	mole	Nombre de mole	19
$\underline{N}$	-	Fonction d'interpolation de l'élément fini	167
$N(s)$	-	Volume spécifique à la pression de référence	82
$N_a$	mole	nombre de moles d'air sec	17
$p$	N/m <sup>2</sup>	Contrainte moyenne	9
$p'$	N/m <sup>2</sup>	Contrainte moyenne effective	98
$p_a$	N/m <sup>2</sup>	Pression de l'air sec	17
$p_{a0}$	N/m <sup>2</sup>	Pression d'air sec de référence	17
$p_{at}$	N/m <sup>2</sup>	Pression atmosphérique	79
$p_c$	N/m <sup>2</sup>	Pression capillaire	37
$p_c$	N/m <sup>2</sup>	Pression de référence	82
$p_{cb}$	N/m <sup>2</sup>	Pression d'entre d'air	44
$p_f$	N/m <sup>2</sup>	Pression du fluide $f$	32
$p_g$	N/m <sup>2</sup>	Pression du mélange gazeux air sec-vapeur d'eau	23
$p_G$	N/m <sup>2</sup>	Pression de la phase $G$	37
$p_L$	N/m <sup>2</sup>	Pression de la phase $L$	37
$p_o$	N/m <sup>2</sup>	Pression de l'huile	16
$p_{o0}$	N/m <sup>2</sup>	Pression de l'huile de référence	16
$p_s$	N/m <sup>2</sup>	Pression de vapeur saturante	20
$p_s$	N/m <sup>2</sup>	Résistance en traction	85
$p_{s,w}$	N/m <sup>2</sup>	Pression de vapeur saturante de l'eau	21
$p_{s0}$	N/m <sup>2</sup>	Paramètre matériel de la relation 4.34	108
$p_{s1}$	N/m <sup>2</sup>	Paramètre matériel de la relation 4.34	108
$p_{s2}$	N/m <sup>2</sup>	Paramètre matériel de la relation 4.34	108
$p_{Sr0}$	N/m <sup>2</sup>	Paramètre matériel de la relation 4.33	108
$p_v$	N/m <sup>2</sup>	Pression de vapeur d'eau	23
$p_{v,0}$	N/m <sup>2</sup>	Pression de vapeur saturante de l'eau ( $=p_{s,w}$ )	21
$p_{v0}$	N/m <sup>2</sup>	Paramètre matériel de la relation 4.33	108
$p_{v1}$	N/m <sup>2</sup>	Paramètre matériel de la relation 4.33	108
$p_{v2}$	N/m <sup>2</sup>	Paramètre matériel de la relation 4.33	108
$p_{v3}$	N/m <sup>2</sup>	Paramètre matériel de la relation 4.33	108
$p_w$	N/m <sup>2</sup>	Pression de l'eau	14

$p_{w0}$	N/m <sup>2</sup>	Pression de l'eau de référence	14
$p_0$	N/m <sup>2</sup>	Contrainte de pré-consolidation	80
$\bar{p}_0^*$	N/m <sup>2</sup>	Pression de pré-consolidation en conditions saturées	82
$\hat{p}_{0,N}$	N/m <sup>2</sup>	Moyenne de la distribution des $p_{0,N}$	231
$p_{0,N}$	N/m <sup>2</sup>	Distribution des valeurs de $p_0$	231
$p_\alpha$	N/m <sup>2</sup>	Pression de la phase $\alpha$	47
$P_{field}$	N/m <sup>2</sup>	Pression de champ	269
$q$	N/m <sup>2</sup>	Contrainte déviatorique	9
$q$	(*)	Flux extérieur imposé en surface (Formule 2.48) ( * Dépend du type de flux : écoulement ou thermique)	29
$\underline{q}_a$	m/s	Flux convectif d'air	43
$\underline{q}_f$	m/s	Flux convectif du fluide $f$	35
$\underline{q}_f^{eff}$	m/s	Vitesse effective du fluide $f$	34
$\underline{q}_g$	m/s	Flux convectif de la phase gazeuse	52
$\underline{q}_G$	m/s	Flux convectif de la phase $G$	49
$\underline{q}_l$	m/s	Flux convectif de la phase liquide	52
$\underline{q}_L$	m/s	Flux convectif de la phase $L$	49
$\underline{q}_o$	m/s	Flux convectif d'huile	45
$\underline{q}_w$	m/s	Flux convectif d'eau	43
$\underline{q}_\alpha$	m/s	Flux convectif de la phase $\alpha$	30
$\underline{q}_\alpha^{eff}$	m/s	Flux convectif effectif de la phase $\alpha$	48
$Q$	(*)	Débit imposé ( * Dépend du type de débit : écoulement ou thermique)	30
$Q_a$	kg/m <sup>3</sup> .m <sup>3</sup> /s	Débit massique d'air sec	56
$Q_{a-d}$	kg/m <sup>3</sup> .m <sup>3</sup> /s	Débit massique d'air dissous	56
$Q_c$	-	Surface d'écoulement plastique relative au pore collapse (Modèle de Shao)	103
$Q_d$	-	Surface plastique d'écoulement liée au mécanisme frottant (Modèle de Shao)	104

$Q_f$	kg/m <sup>3</sup> .m <sup>3</sup> /s	Débit massique du composant $f$	30
$Q_i$	kg/m <sup>3</sup> .m <sup>3</sup> /s	Débit massique du composant $i$	56
$Q_T$	J/(m <sup>3</sup> .s)	Débit de chaleur	30
$Q_v$	kg/m <sup>3</sup> .m <sup>3</sup> /s	Débit massique de vapeur d'eau	51
$Q_w$	kg/m <sup>3</sup> .m <sup>3</sup> /s	Débit massique d'eau liquide	51
$r$	-	Constante liée à la raideur maximum du sol (relation 3.33)	81
$r_c$	m	Rayon capillaire	37
$r_C$	-	Rayon réduit pour un chemin triaxial de compression	129
$r_E$	-	Rayon réduit pour un chemin triaxial d'extension	129
$R$	J/(mole.°K)	Constante des Gaz Parfaits	17
$R$	-	Coefficient matériel de la relation 4.16	104
$\underline{\underline{R}}$	-	Matrice de corrélation	231
$R_v$	J/(kg.°K)	Constante de la vapeur d'eau (= $R/M_v$ )	23
$s$	N/m <sup>2</sup>	Succion matricielle	40
$s^*$	Pa	Paramètre matériel de la relation 4.147	157
$s_c$	N/m <sup>2</sup>	Pression d'entrée d'air	41
$s_T$	N/m <sup>2</sup>	Succion Totale	64
$s_0$	N/m <sup>2</sup>	Seuil de succion pour des déformations plastiques	84
$\dot{S}$	(*)	Emmagasinement dans le volume considéré ( * Dépend du type d'emmagasinement : écoulement ou thermique)	30
$S_a$	kg/m <sup>3</sup>	Emmagasinement de l'air sec	56
$S_{a-d}$	kg/m <sup>3</sup>	Emmagasinement de l'air dissous	56
$S_e$	-	Saturation efficace	42
$S_f$	kg/m <sup>3</sup>	Emmagasinement massique du composant $f$	30
$S_i$	kg/m <sup>3</sup>	Emmagasinement du composant $i$	52
$S_{nwc}$	-	Saturation critique (irréductible) du fluide non-mouillant	44
$S_{oc}$	-	Saturation critique (irréductible) de l'huile	44
$S_{r,G}$	-	Saturation de la phase $G$	49
$S_{r,g}$	-	Saturation partielle en gaz	52
$S_{r,i}$	-	Saturation de la phase $i$	28
$S_{r,L}$	-	Saturation de la phase $L$	49

$S_{r,u}$	-	Saturation résiduelle	41
$S_{r,w}$	-	Saturation partielle en eau	40
$S_{r,\alpha}$	-	Saturation de la phase $\alpha$	47
$S_T$	J/m <sup>3</sup>	Emmagasinement de chaleur	30
$S_v$	kg/m <sup>3</sup>	Emmagasinement de la vapeur d'eau	51
$S_w$	kg/m <sup>3</sup>	Emmagasinement d'eau liquide	51
$S_{wc}$	-	Saturation critique (irréductible) du fluide mouillant(eau)	44
$S_\alpha$	kg/m <sup>3</sup>	Emmagasinement de la phase $\alpha$	46
$\underline{t}$	N/m <sup>2</sup>	Contraintes extérieures appliquées en surface	165
$t_c$	-	Paramètre relié à la différence de résistance en compression et en tension (Modèle Homand-Shao)	111
$T$	°K	Température	14
$T_{Cr}$	°K	Température au point critique	21
$T^*$	-	Point triple du diagramme de phase d'un corps pur	20
$T^{well}$	m <sup>3</sup>	Facteur de transmissivité du puits	197
$T_0$	°K	Température de référence	14
$T_{0,N}$	-	Variable aléatoire normée centrée corréllée	231
$U_\alpha$	m <sup>3</sup>	Volume de la phase $\alpha$ en condition réservoir	46
$U_{\alpha,s}$	m <sup>3</sup>	Volume de la phase $\alpha$ en condition standard	46
$v$	-	Volume spécifique	81
$\underline{v}$	m/s	Tenseur vitesse	166
$V$	m <sup>3</sup>	Volume totale	27
$\underline{V}$	(*)	Flux intérieur normal à la surface ( * Dépend du type de flux : écoulement ou thermique)	29
$V_a$	m <sup>3</sup>	Volume de l'air sec	17
$\underline{V}_a$	kg/m <sup>3</sup> .m/s	Flux massique totale de l'air sec	56
$V_{a-d}$	m <sup>3</sup>	Volume d'air dissous	25
$V_{a-d}$	m <sup>3</sup>	Volume d'air dissous	56
$\underline{V}_{a-d}$	kg/m <sup>3</sup> .m/s	Flux massique totale de l'air dissous	56
$\underline{V}_f$	kg/m <sup>3</sup> .m/s	Flux massique totale du composant $f$	30
$V_i$	m <sup>3</sup>	Volume de la phase $i$	28
$\underline{V}_i$	kg/m <sup>3</sup> .m/s	Flux massique totale du composant $i$	52

$\underline{V}_i^{eff}$	kg/m <sup>3</sup> .m/s	Flux massique effective totale de l'espèce $i$	59
$V_L$	m/s	Vitesse sonique longitudinale	159
$\underline{V}_T$	J/(m <sup>2</sup> .s)	Flux de chaleur	30
$V_v$	m <sup>3</sup>	Volume des vides	27
$\underline{V}_v$	kg/m <sup>3</sup> .m/s	Flux massique totale de la vapeur d'eau	51
$V_w$	m <sup>3</sup>	Volume d'eau	25
$\underline{V}_w$	kg/m <sup>3</sup> .m/s	Flux massique totale de l'eau liquide	51
$\underline{V}_\alpha$	kg/m <sup>3</sup> .m/s	Flux massique totale de la phase $\alpha$	47
$w$	-	Teneur en eau	76
$W_E$	J/s	Puissance extérieure	165
$W_I$	J/s	Puissance intérieure	165
$W_{PI}$	-	Poids de Gauss du point d'intégration	169
$x_i$	-	Fraction molaire du $i^{ème}$ composant d'un mélange liquide	22
$x_w$	-	Fraction molaire de l'eau dans la solution	40
$X_i$	-	Fraction molaire du $i^{ème}$ composant d'un mélange gazeux	22
$y$	m	Coordonnée vertical positive vers le haut	32
$y_d^r$	-	Valeur ultime du paramètre $Y_d$ (Modèle de Shao)	104
$Y_c$	N/m <sup>2</sup>	Paramètre d'écrouissage (Modèle de Shao)	103
$Y_c^0$	N/m <sup>2</sup>	Valeur initiale de $Y_c$ (Modèle de Shao)	103
$Y_d$	-	Paramètre d'écrouissage (Modèle de Shao)	103
$Z_{0,N}$	-	Variable aléatoire indépendante	231

## NOTIONS DE BASE

La convention de signe est différente en géo-mécanique et en mécanique du solide ; dans ce travail, nous utiliserons la première convention où les contraintes et déformations sont positives en compression.

Les matériaux que nous considérons sont des milieux isotropes : leurs propriétés mécaniques sont identiques dans toutes les directions.

Les contraintes et déformations possèdent six valeurs indépendantes (cas général en 3D). Toutefois, pour un milieu isotrope, la loi constitutive peut être exprimée en fonction de trois invariants des contraintes, qui, pour un état donné, sont indépendants du référentiel choisi. Ces invariants pourraient être les trois valeurs propres de la matrice des contraintes. Cependant, ce choix n'est pas judicieux pour une implémentation dans un code d'éléments finis. D'autres invariants ont ainsi été définis ; différents choix peuvent être opérés mais un seul sera développé dans ce travail.

$I_\sigma$ ,  $II_{\hat{\sigma}}$ ,  $III_{\hat{\sigma}}$  représentent les premier, deuxième et troisième invariants du tenseur des contraintes et sont respectivement définis selon :

$$I_\sigma = \sigma_{ii} \quad (0.1)$$

$$II_{\hat{\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{2} \hat{\sigma}_{ij} \hat{\sigma}_{ij}} \quad (0.2)$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{I_\sigma}{3} \delta_{ij} \quad (0.3)$$

$$III_{\hat{\sigma}} = \frac{1}{3} \hat{\sigma}_{ij} \hat{\sigma}_{jk} \hat{\sigma}_{ki} \quad (0.4)$$

Différentes formulations du troisième invariant existent, cependant l'angle de Lode  $\beta$  offre une meilleure possibilité de décrire l'état de contrainte dans le plan déviatoire.

$$\beta = -\frac{1}{3} \sin^{-1} \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{III_{\hat{\sigma}}}{II_{\hat{\sigma}}^3} \right) \quad (0.5)$$

Les trois invariants  $I_\sigma$ ,  $II_{\hat{\sigma}}$  et  $\beta$  définissent un référentiel cylindrique autour de l'axe  $I_\sigma$ . Dans ce référentiel,  $II_{\hat{\sigma}}$  représente la distance entre le point P représentatif de l'état de contrainte et l'axe  $I_\sigma$  ; l'angle de Lode  $\beta$  représente la position angulaire de P par rapport à la ligne de cisaillement pure (Voir figure 2.1 a-b), avec  $\beta \in [-30^\circ, +30^\circ]$ .  $\sigma_1^*$ ,  $\sigma_2^*$  et  $\sigma_3^*$  représentent la projection des axes des contraintes principales dans le plan déviatoire (ou plan  $\Pi$ ).

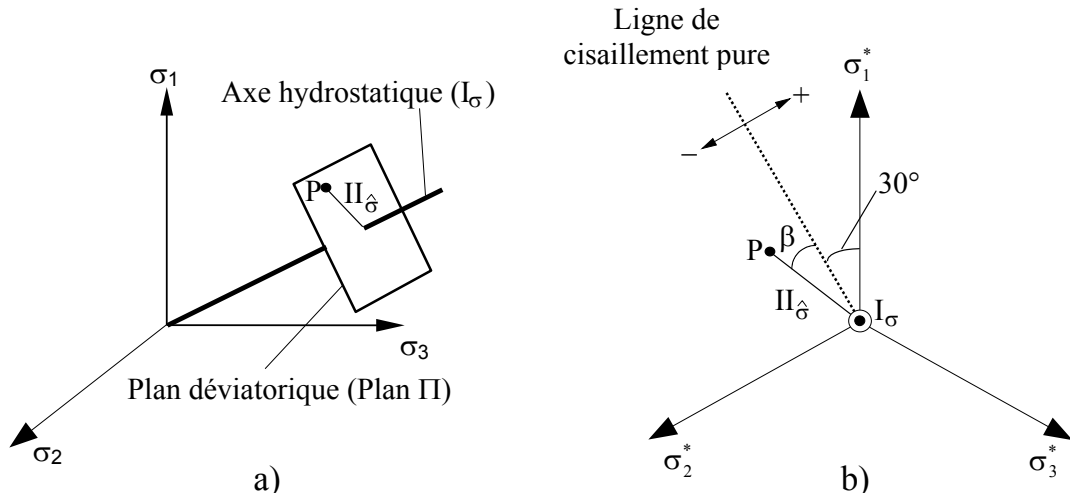


Figure 0.1: Représentation de l'espace des contraintes (a) et du plan déviatorique (b)

La contrainte moyenne  $p$  est définie à partir de l'expression du premier invariant :

$$p = \frac{I_\sigma}{3} \quad (0.6)$$

Dans les résultats d'essais de laboratoire, la contrainte déviatorique  $q$  est également définie par :

$$q = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (0.7)$$

Dans un essai triaxial,  $\sigma_1$  est la contrainte axiale et  $\sigma_3$  la contrainte latérale. Dans ce mode de chargement symétrique latéralement ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ), il existe une relation simple entre la contrainte déviatorique et le second invariant :

$$\Pi_{\hat{\sigma}} = \frac{q}{\sqrt{3}} \quad (0.8)$$





# **CHAPITRE I**

## **Introduction**



## CHAPITRE I

### INTRODUCTION

#### 1. INTRODUCTION GENERALE

Le travail présenté dans cette thèse s'intéresse aux couplages thermo-hydro-mécanique dans les sols et les roches tendres partiellement saturés. Notre approche consiste à développer des modèles de comportement qui, une fois implémentés dans le code aux éléments finis LAGAMINE, permettent l'étude de problèmes variés. On peut toutefois se demander quels types d'application sont concernés par ces modèles et ce que peuvent apporter des simulations numériques par rapport à des expérimentations ?

Le premier domaine d'étude concerne le stockage de déchets nucléaires de haute activité. Pour ceux-ci, le concept de dépôts dans des couches géologiques profondes a été développé afin de protéger les êtres humains et leur environnement des effets néfastes de la radio-activité. Les formations géologiques potentielles sont choisies en fonction de leur stabilité à long terme (on parle ici de millions d'années), de la possibilité d'y construire un complexe d'enfouissement et de leur aptitude à prévenir ou atténuer une éventuelle migration de radio-nucléides.

L'idée est de construire un système de galeries dans lesquelles seront placés les déchets vitrifiés ; une barrière d'étanchéité ouvragée (généralement des blocs d'argile compactée) remplira le reste de la galerie et assurera un complément à la barrière géologique naturelle. Pour dimensionner ce système complexe, il est nécessaire de bien connaître les caractéristiques hydrogéologiques, thermiques, mécaniques, chimiques et biologiques, ainsi que de comprendre les processus couplés qui ne manqueront pas de s'y développer.

C'est la raison pour laquelle se sont créés des URL (Underground Research Laboratories) dans les couches géologiques potentielles. Le rôle de ces URL est de permettre le développement de la technologie nécessaire à la construction, au remplissage et à la fermeture du dépôt. Ils doivent aussi démontrer la performance à long terme de l'ensemble du concept, tout en laissant la possibilité de récupérer ces déchets le cas échéant.

Ces laboratoires offrent ainsi la possibilité de récolter un grand nombre de données *in situ* et de réaliser une série d'expérimentations dans des conditions les plus proches possibles de la configuration finale. En effet, des expériences peuvent naturellement être conduites en surface à plus petite échelle ; elles ne remplacent toutefois pas les essais en vraie grandeur mais leur coût est moins important et leur contrôle est plus facile.

Les modèles numériques viennent en complément des études expérimentales afin d'aider à la compréhension des mesures effectuées. En effet, le comportement de la

barrière d'étanchéité est très complexe, impliquant des phénomènes thermo-hydro-mécaniques prenant place durant l'échauffement (les déchets dégagent toujours une certaine quantité d'énergie) et l'hydratation (par la formation hôte) de la barrière argileuse. Cette hydratation implique également une éventuelle interaction physico-chimique entre les fluides de la formation hôte et l'argile de scellement. L'analyse numérique peut ainsi faire le lien entre la compréhension théorique et empirique de chaque phénomène individuel et leur rôle dans la performance globale de la barrière.

La modélisation présente également l'avantage de pouvoir tester *numériquement* différentes configurations de système d'étanchéité ou hypothèses de travail. Elle permet aussi des études à très long terme qui ne sont pas envisageables en laboratoire. Cela suppose naturellement de disposer de modèles de comportement reproduisant correctement les phénomènes étudiés.

C'est l'un des objectifs de ce travail, à savoir le développement d'un outil numérique capable de reproduire les transferts hydriques et de chaleur se produisant dans la zone proche de la galerie. Nous étudierons également l'influence des variations des conditions de saturation et de température sur le comportement mécanique de l'argile. Il est en effet très important de pouvoir prédire l'apparition de fractures dans le matériau car elles diminueraient dramatiquement son étanchéité.

Le deuxième problème auquel nous allons nous intéresser est la subsidence des réservoirs pétroliers de mer du Nord. En effet, certains réservoirs se situent dans des couches de craie à plusieurs milliers de mètres sous le niveau de la mer et ils sont exploités à partir d'installations off-shore. La production du pétrole induit une déplétion du réservoir qui s'accompagne d'une compaction ; cette dernière se répercute en surface jusqu'au fond marin et cela met en danger les stations off-shore. La solution actuellement mise en œuvre est l'injection d'eau dans le réservoir afin de le repressuriser et de diminuer ainsi la compaction. Malheureusement, cela a provoqué dans ces formations crayeuses un tassement supplémentaire!

Ceci constitue donc un superbe exemple de couplage hydro-mécanique ; il est lié à la sensibilité à l'eau d'une craie initialement saturée d'huile. Nous devons donc développer des modèles d'écoulement biphasique eau-huile et des lois de comportement permettant de reproduire les phénomènes de compaction. L'outil numérique sert donc ici à vérifier les hypothèses que nous formulons sur le comportement du matériau. Nous verrons d'ailleurs dans ce travail l'étonnante similitude de comportement qui existe entre la craie et l'argile.

On peut toutefois se demander si il est intéressant d'étudier ce problème qui se rencontre dans les réservoirs de craie de mer Nord. Il faut se rendre compte que ces gisements constituent en fait d'énormes stocks de pétrole qui pourraient assurer à eux seuls l'indépendance énergétique de l'Europe. De plus, ces subsidences ont nécessité pour le champ d'Ekofisk le remplacement d'un complexe off-shore pour un coût de vingt milliards de Couronnes Norvégiennes. On comprend dès lors l'intérêt économique que peut représenter une meilleure compréhension du phénomène. De plus, celui-ci n'a pas que des aspects négatifs ; la compaction additionnelle permet une récupération

secondaire du pétrole, qui aurait dû être effectuée autrement sinon. Il est donc très intéressant de pouvoir contrôler le tassement des couches réservoir.

Cette recherche a été facilitée par le fait que des couches de craie, similaires à celles des réservoirs de Mer du Nord, affleurent dans notre pays ; on l'exploite notamment dans la carrière de Lixhe pour l'industrie cimentière. Cette craie possède les mêmes caractéristiques et propriétés que celles des formations du réservoir. La seule différence réside dans le fait qu'il n'y a jamais eu de pétrole dans ses pores!

Cette facilité d'approvisionnement en craie a permis la réalisation d'une quantité importante d'expériences. Il faut savoir que les échantillons provenant directement du réservoir sont très rares et extrêmement coûteux. La base de données des résultats expérimentaux constitue un excellent outil de travail pour le développement d'un modèle: il permet de confronter résultats numériques et expérimentaux sur de nombreux chemins de contraintes. Mais cela nécessite un échange constant entre numériciens et expérimentateurs qui doivent travailler ensemble pour la meilleure compréhension possible du comportement si complexe de la craie.

## **2. PLAN DU TRAVAIL**

Afin d'étudier les couplages entre le comportement mécanique et les transferts hydriques et de chaleur, nous allons développer deux types de lois constitutives. La première aura pour objectif de reproduire au mieux le comportement mécanique des deux matériaux étudiés dans le cadre de ce travail, à savoir une argile et une craie. La seconde permettra une analyse des transferts de fluide et de chaleur dans un milieu non saturé.

Il n'est pas évident *a priori* de choisir l'ordre de présentation de la loi mécanique et du modèle d'écoulement. En effet, les couplages existant entre ceux-ci font qu'il est nécessaire d'établir des liens entre ces modèles lors de leur présentation respective. Pour notre part, nous avons choisi de commencer notre travail par la description du modèle d'écoulement multiphasique. En effet, des notions importantes comme les phénomènes capillaires ou la succion se définissent plus simplement dans le cadre de l'étude des écoulements de plusieurs fluides.

Ainsi, dans le chapitre II, nous décrivons le modèle d'écoulement multiphasique anisotherme. Nous passons tout d'abord en revue les propriétés des différents fluides que nous rencontrons dans notre étude : l'eau liquide, la vapeur d'eau, l'air, l'huile. Nous définissons ainsi les relations constitutives par lesquelles nous avons choisi de modéliser le comportement de ces fluides. Ensuite, nous développons progressivement notre modèle en commençant par la description d'un milieu anisotherme saturé par un seul fluide pour terminer par un milieu anisotherme saturé par deux fluides avec changement de phase. Cette manière de procéder a pour unique objectif de présenter le plus clairement possible les concepts, en mettant en évidence à chaque étape la complexité croissante du modèle et les couplages de plus en plus nombreux à prendre en compte.

Nous y présentons notamment la notion de succion qui a également une importance dans le développement de notre modèle de comportement mécanique. De ce fait, dans le chapitre III, nous passons en revue les différentes techniques expérimentales de contrôle de la succion et nous présentons sur base de la littérature l'influence de la succion sur le comportement mécanique (essentiellement pour des sols argileux). Il faut préciser que notre travail, dans le cadre de cette thèse, est essentiellement numérique mais il est très important de bien comprendre les techniques expérimentales utilisées afin d'interpréter au mieux les résultats expérimentaux.

Nous présentons également dans ce chapitre III un relevé non-exhaustif de lois constitutives de géomatériaux non-saturés. C'est dans ce cadre que nous passons, au chapitre IV, à l'étude du comportement de la craie. En effet, nous montrons qu'il existe beaucoup de similitudes entre le comportement de l'argile et celui d'une craie très poreuse. Nous présentons tout d'abord les caractéristiques de ce matériau, un relevé de ses comportements expérimentaux. Nous passons ensuite en revue les différents modèles de comportement mécanique de la craie publiés dans la littérature.

Sur base de ce qui précède, nous développons un modèle de la craie, où la succion tient une place importante. Il s'agit d'un modèle à chapeau où les différents mécanismes plastiques, caractéristiques de la craie, sont reproduits.

Nous déterminons ensuite les paramètres de notre modèle grâce à une base de données importante d'essais réalisés sur la craie dans des conditions de chargement et de saturation fort variées. Nous essayons de tirer le maximum de ces résultats et nous mettons en évidence l'influence de certaines techniques expérimentales sur les mesures effectuées.

Dans le chapitre V, nous montrons comment les modèles que nous développons peuvent être introduits dans un code d'éléments finis. Nous présentons ainsi l'élément fini qui permet l'étude de problèmes complexes, en tenant compte des différents couplages. Nous abordons également différents aspects de l'intégration numérique de la loi de comportement mécanique ainsi que l'influence des grandes déformations sur le modèle d'écoulement. Enfin, nous décrivons les différents éléments finis que nous utilisons pour représenter les conditions limites dans les problèmes étudiés. En effet, dans des conditions non-saturées, les conditions aux frontières des domaines étudiés sont souvent plus complexes.

L'objectif du chapitre VI est la validation des deux modèles développés sur des cas limites dont la solution analytique est connue ou dont la solution numérique a été publiée. Ces différents problèmes traités apportent également une meilleure compréhension des phénomènes en jeu et de leurs couplages respectifs.

Dans le chapitre VII, nous passons aux exemples d'applications d'une galerie de stockage et d'un réservoir pétrolier. L'idée est de réaliser des modèles qui se rapprochent le plus possible des conditions réelles des problèmes étudiés. Les résultats de ces

simulations nous apportent ainsi une meilleure compréhension des phénomènes étudiés et nous permettent de tirer des conclusions sur le comportement de ces ouvrages.

Nous terminons ce travail par le chapitre VIII où nous présentons les conclusions et les apports que nous pouvons tirer de ce travail dans la problématique du stockage de déchets nucléaires et de la compaction des réservoirs pétroliers en mer du Nord.





## **CHAPITRE II**

### **Modèle d'écoulement multiphasique anisotherme**



## CHAPITRE II

### MODELE D'ECOULEMENT MULTIPHASIQUE ANISOTHERME

#### 1. INTRODUCTION

Les écoulements multiphasiques dans un milieu poreux constituent un sujet d'étude dans de nombreux domaines de l'ingénieur, que ce soit en hydrogéologie, en ingénierie des réservoirs pétroliers ou encore pour la problématique des déchets ménagers ou radio-actifs. Dans l'ensemble de ces domaines, la connaissance du mouvement des fluides revêt une importance capitale tant d'un point de vue financier (on pense notamment à la production de pétrole) que du point de vue de la sécurité si l'on pense à la problématique des déchets.

Les eaux souterraines constituent une richesse qu'il convient de préserver. Il est donc nécessaire d'étudier les différents échanges entre la nappe et la nature environnante. Par exemple, la contamination des nappes par des engrais constitue un problème important en agriculture. Or, entre la surface phréatique et celle du terrain se trouve une zone où les pores ne sont plus complètement saturés en eau. Ils contiennent une phase gazeuse constituée d'un mélange d'air et de vapeur d'eau. Il convient, pour comprendre les échanges avec la nappe, d'étudier les écoulements dans cette zone partiellement saturée.

Un réservoir pétrolier est une formation géologique qui contient dans ses pores de l'eau, des hydrocarbures et parfois des gaz. La figure 2.1 donne une coupe schématisée d'un réservoir pétrolier très simplifié : les trois fluides se répartissent en trois zones selon la hauteur, en fonction de leur densité. Une zone de transition où deux fluides coexistent apparaît entre chaque partie. La formation recouvrant le réservoir est très imperméable ce qui empêche les fluides de monter et est donc une condition nécessaire à l'existence d'un réservoir d'hydrocarbure. Lors de la production de pétrole, des écoulements simultanés des différents fluides vont se produire, ils dépendront des propriétés de perméabilité, de mouillabilité relative des fluides et du réservoir et seront également influencés par des phénomènes de capillarité.

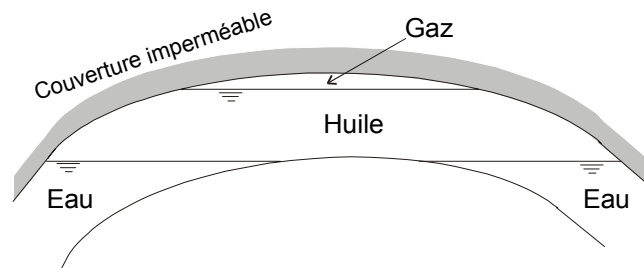


Figure 2.1 : Coupe d'un réservoir pétrolier simplifié

L'une des solutions proposées pour régler le problème des déchets nucléaires de haute activité et de longue durée de vie, consiste à stocker ces derniers dans des galeries creusées en profondeur dans des formations peu perméables (argile, granite ou formation saline). Dans ce réseau souterrain, les déchets vitrifiés sont placés dans des fûts au centre de la galerie. Le reste du conduit est comblé par une barrière ouvragée constituée généralement de blocs d'argile gonflante compactée. Le but est de constituer une barrière aussi compacte, stable et imperméable que possible afin de minimiser toute migration de radio-nucléides (particules radio-actives) dans le milieu environnant. Ces solutions sont actuellement étudiées dans différents laboratoires souterrains européens dont le Centre d'Etude de l'Energie Nucléaire SKN-CEN situé à Mol en Belgique.

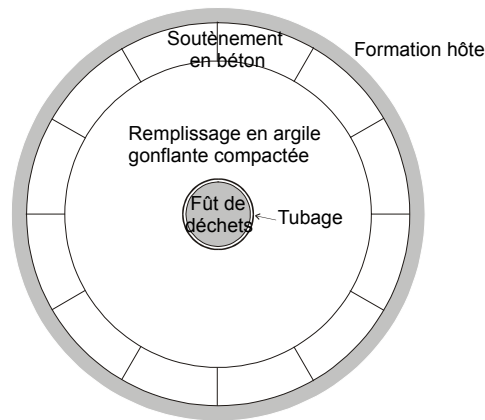


Figure 2.2 : Galerie de stockage de déchets

L'étude de ce type de stockage est très complexe d'un point de vue hydraulique et mécanique. Les blocs d'argile constituant la barrière sont très peu hydratés alors que la formation hôte est généralement saturée en eau. Des échanges se créent donc entre les deux zones mais ceux-ci sont très lents car les matériaux en présence sont très peu perméables. De plus, l'argile des barrières a tendance à gonfler lors de son hydratation ce qui ne facilite pas les écoulements. Enfin, ayant toujours une certaine activité, les déchets libèrent une quantité de chaleur ; les systèmes sont généralement conçus de manière à limiter la température aux environs de 100 °C. A cette température, l'eau se transforme en vapeur et vient perturber les échanges hydriques.

Ce problème est fortement couplé car il inclut l'étude de différents phénomènes physiques se déroulant simultanément. Nous montrerons dans la suite l'importance de la prise en compte de ces couplages.

D'une part, nous devons étudier les différents phénomènes liés aux transferts de chaleur. Ceux-ci peuvent être de plusieurs types :

- La conduction qui peut être définie comme le transfert de chaleur par contact entre les différentes particules des matériaux constituant le milieu. Elle dépend de la conductibilité du milieu et des gradients de température.

- La convection est le transport de chaleur par un corps en mouvement par rapport à un référentiel donné. Ce phénomène est donc lié à la vitesse de déplacement du matériau et à la capacité thermique de ce dernier.
- Le rayonnement dont nous ne parlerons pas dans ce travail.
- Le changement de phase, dont la quantité de chaleur nécessaire à sa réalisation doit être intégrée dans l'équation de bilan thermique.

D'autre part, les mouvements des différents fluides présents dans le géomatériau peuvent avoir plusieurs sources :

- Une différence de pression d'un fluide occasionne un mouvement de ce dernier dont la vitesse est proportionnelle au gradient de pression et à la perméabilité du géomatériau.
- Les effets capillaires influencent également profondément les échanges de fluides.
- Pour l'analyse de l'écoulement d'un mélange de fluides, nous devons prendre en compte le mouvement du mélange dans son ensemble dû à des différences de pression du mélange. Nous parlerons alors de convection. Mais il est également nécessaire de modifier les équations de bilan afin de tenir compte de la diffusion liée à des différences de concentration de chaque constituant. Ces échanges sont gouvernés par le gradient de concentration.

Ces différents aspects seront développés dans le modèle d'écoulement anisotherme. Nous nous sommes limités à l'étude des phénomènes qui sont importants dans les cas que nous serons amenés à traiter. Il existe également d'autres effets secondaires: effet Dufour, effet Soret, ... mais qui sont négligeables dans les problèmes thermo-hydro-mécaniques étudiés habituellement [ALONSO *et al.*, 2001].

Les modèles permettant de traiter ce genre de problèmes fortement couplés sont relativement complexes. Dans ce chapitre nous allons développer ces modèles et, dans un souci de bonne compréhension des phénomènes, nous traiterons tout d'abord des cas simples en ajoutant progressivement de la complexité.

Avant toute chose, il est nécessaire de connaître les caractéristiques des différents constituants des systèmes que nous étudions. Les propriétés des différents fluides dépendent des conditions de pression et de température et il convient donc de définir des lois de comportement. Pour certains fluides comme la vapeur d'eau, des hypothèses restrictives d'équilibre thermodynamique seront émises.

Nous devons ensuite nous donner des outils permettant d'étudier à l'échelle macroscopique des phénomènes se déroulant à l'échelle microscopique. En effet, au niveau des éléments finis, nous écrirons des équations de conservation de masse des fluides et d'énergie du système. Il sera donc nécessaire de formuler des modèles permettant de quantifier les écoulements et les transferts de chaleur.

Nous aborderons ensuite l'étude d'un milieu saturé soumis à des variations de température afin de montrer les couplages existant entre l'écoulement d'un fluide et les échanges thermiques. Ensuite, nous traiterons le cas des transferts multiphasiques en condition anisotherme pour bien mettre en évidence les phénomènes de capillarité et la manière d'en tenir compte. Le changement de phase d'un fluide sera étudié dans la dernière partie, ce problème est plus complexe car une phase au moins du système est constituée d'un mélange d'espèces chimiques différentes.

## 2. CONCEPTS DE BASE

### 2.1. Propriétés et lois de comportement des différents composants

Dans le cadre de la problématique des stockages de déchets nucléaires dans des formations argileuses faiblement perméables, les fluides rencontrés seront l'eau liquide, la vapeur d'eau et l'air constituant la phase gazeuse ou présent sous forme d'air dissous dans l'eau. Nous allons donc définir leurs propriétés ainsi que les lois de comportement par lesquelles nous avons choisi de les modéliser. Dans ces calculs, la température varie généralement entre 20°C et 120°C.

D'autre part, dans les réservoirs pétroliers, les écoulements sont biphasiques (Eau + Huile) et même triphasiques (Eau + Huile + Gaz). Toutefois, dans le cadre de ce travail, nous nous intéresserons uniquement aux écoulements d'eau et d'huile. Nous caractériserons donc également les propriétés de l'huile.

#### 2.1.1. L'EAU LIQUIDE

Nous avons considéré l'eau liquide comme un fluide compressible et dilatant, dont la loi de comportement a été linéarisée :

$$\rho_w(T, p_w) = \rho_{w0} \left[ 1 + \frac{p_w - p_{w0}}{\chi_w} - \alpha_w^T \cdot (T - T_0) \right] \quad (2.1)$$

où  $\chi_w$  est la compressibilité,  $\alpha_w^T$  est le coefficient de dilatation thermique et  $\rho_{w0}$  est la masse volumique aux pression  $p_{w0}$  et température  $T_0$  de référence.

La figure 2.3-a montre que la masse volumique n'est pas une fonction linéaire de la température entre 0 °C et 140 °C. Néanmoins, la formule (2.1) est valable entre 10°C et 110 °C avec une précision de 0,5%.

La viscosité dynamique de l'eau  $\mu_w$  dépend de la pression et de la température. Toutefois, l'influence de la pression est négligeable devant celle de la température.

La Figure 2.3-b montre l'évolution de la viscosité dynamique de l'eau en fonction de la température. De nombreuses formules ont été proposées pour estimer cette propriété, par exemple [EWEN *et al.*, 1989] valable entre 0 et 100°C :

$$\mu_w(T) = 661,2 \cdot (T - 229)^{-1,562} \cdot 10^{-3} \quad (2.2)$$

où  $T$  est la température absolue [ $^{\circ}\text{K}$ ].

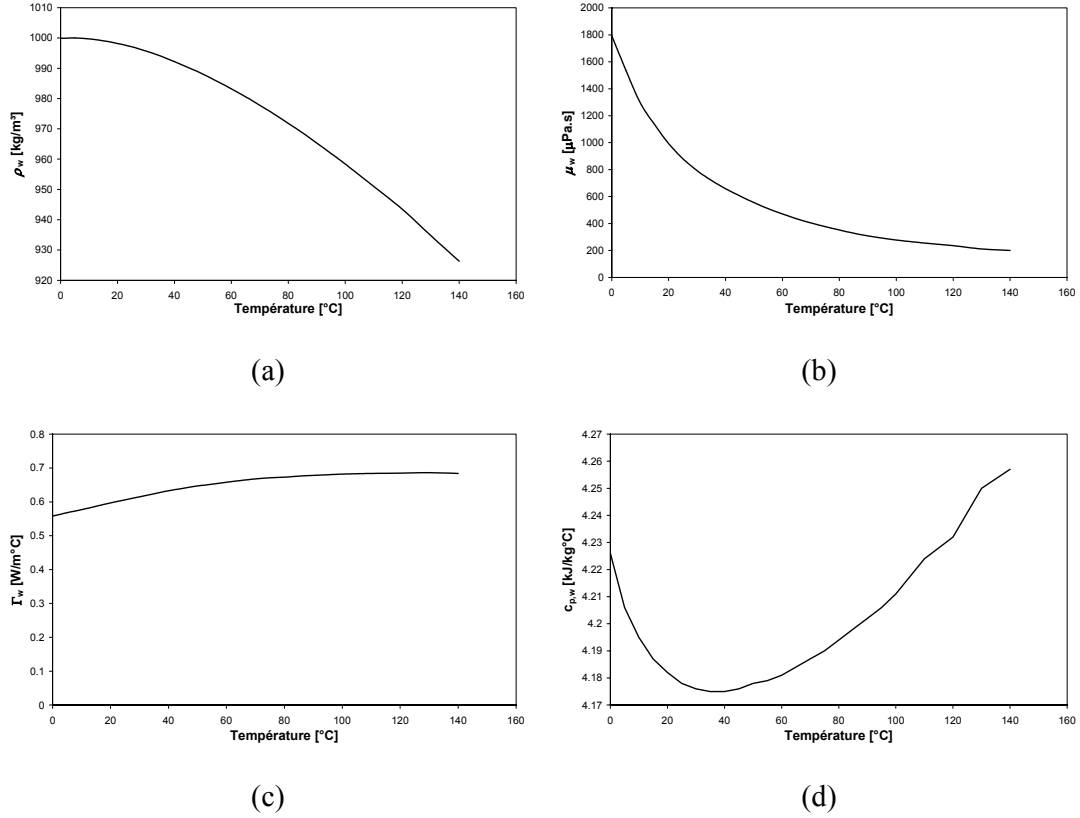


Figure 2.3 : Evolution en fonction de la température de différentes propriétés de l'eau - (a) Masse volumique – (b) Viscosité dynamique – (c) Conductibilité thermique – (d) Chaleur spécifique [RAZNJEVIC, 1970].

Nous avons supposé une variation linéaire de cette propriété afin de limiter le nombre de paramètres à définir :

$$\mu_w(T) = \mu_{w0} \cdot [1 - \beta_w^T \cdot (T - T_0)] \quad (2.3)$$

où  $\beta_w^T$  est le coefficient de variation thermique de la viscosité et  $\mu_{w0}$  est la viscosité dynamique de l'eau à la température  $T_0$  de référence.

Pour l'étude des problèmes thermiques, nous devons définir la conductibilité  $\Gamma_w$  et la chaleur spécifique de l'eau  $c_{p,w}$ . Nous avons supposé une dépendance linéaire de ces propriétés avec la température :

$$\Gamma_w(T) = \Gamma_{w0} \cdot [1 + \gamma_w^T \cdot (T - T_0)] \quad (2.4)$$

$$c_{p,w}(T) = c_{p,w0} \cdot [1 + C_w^T \cdot (T - T_0)] \quad (2.5)$$

où  $\gamma_w^T$  est le coefficient de variation thermique de la conductibilité,  $\Gamma_{w0}$  est la conductibilité à la température  $T_0$  de référence,  $C_w^T$  est le coefficient de variation

thermique de la capacité thermique et  $c_{p,w0}$  est la capacité thermique à la température de référence  $T_0$ .

En réalité, la Figure 2.3-d montre que la capacité thermique de l'eau ne varie pas de manière importante (moins de 1%) en fonction de la température.

### 2.1.2. L'HUILE

L'huile est également un fluide compressible et dilatant, nous avons donc choisi de garder les mêmes relations que celles définies pour l'eau. La masse volumique  $\rho_o$ , la viscosité dynamique  $\mu_o$ , la conductibilité thermique  $\Gamma_o$  et la capacité thermique  $c_{po}$  seront définies respectivement par les relations (2.6) à (2.9).

$$\rho_o(T, p_o) = \rho_{o0} \cdot \left[ 1 + \frac{p_o - p_{o0}}{\chi_o} - \alpha_o^T \cdot (T - T_0) \right] \quad (2.6)$$

où  $\chi_o$  est la compressibilité,  $\alpha_o^T$  est le coefficient de dilatation thermique et  $\rho_{o0}$  est la masse volumique aux pression  $p_{o0}$  et température  $T_0$  de référence.

$$\mu_o(T) = \mu_{o0} \cdot [1 - \beta_o^T \cdot (T - T_0)] \quad (2.7)$$

où  $\beta_o^T$  est le coefficient de variation thermique de la viscosité et  $\mu_{o0}$  est la viscosité dynamique de l'huile à la température  $T_0$  de référence.

Pour l'étude des problèmes thermiques, nous devons définir la conductibilité  $\Gamma_o$  et la chaleur spécifique de l'huile  $c_{p,o}$ . Nous avons supposé une dépendance linéaire de ces propriétés avec la température :

$$\Gamma_o(T) = \Gamma_{o0} \cdot [1 + \gamma_o^T \cdot (T - T_0)] \quad (2.8)$$

$$c_{p,o}(T) = c_{p,o0} \cdot [1 + C_o^T \cdot (T - T_0)] \quad (2.9)$$

où  $\gamma_o^T$  est le coefficient de variation thermique de la conductibilité,  $\Gamma_{o0}$  est la conductibilité à la température  $T_0$  de référence,  $C_o^T$  est le coefficient de variation thermique de la capacité thermique et  $c_{p,o0}$  est la capacité thermique à la température  $T_0$  de référence.

### 2.1.3. L'AIR SEC

L'air sec est considéré comme un gaz parfait ; il respecte donc la relation des gaz parfaits :

$$p_a \cdot V_a = N_a \cdot R \cdot T \Rightarrow V_a = N_a \cdot R \cdot \frac{T}{p_a} \quad (2.10)$$

où  $p_a$  est la pression,  $T$  la température,  $N_a$  le nombre de moles,  $V_a$  le volume et  $R$  la constante des gaz parfaits ( $R = 8,313 \text{ J/mole}^\circ\text{K}$ ).



L'utilisation de la loi des gaz parfaits suppose que la température soit une température absolue définie en Kelvin. Dans l'ensemble de ce travail, nous optons pour toujours travailler en température absolue même si, pour certains graphiques, le degré Celsius est utilisé pour faciliter la lecture.

Considérant une masse constante d'air sec entre deux états de pression et de température notés respectivement  $(T, p_a)$  et  $(T_0, p_{a0})$ , nous pouvons écrire, avec l'équation (2.10), la relation suivante :

$$\rho_a(T, p_a) \cdot v_a(T, p_a) = \rho_a(T_0, p_{a0}) \cdot V_a(T_0, p_{a0}) \quad (2.11)$$

$$\Leftrightarrow \rho_a(T, p_a) = \rho_{a,0} \cdot \frac{p_a}{p_{a,0}} \cdot \frac{T_0}{T} \quad (2.12)$$

où  $\rho_{a0}$  est la masse volumique aux pression  $p_{a0}$  et température  $T_0$  de référence.

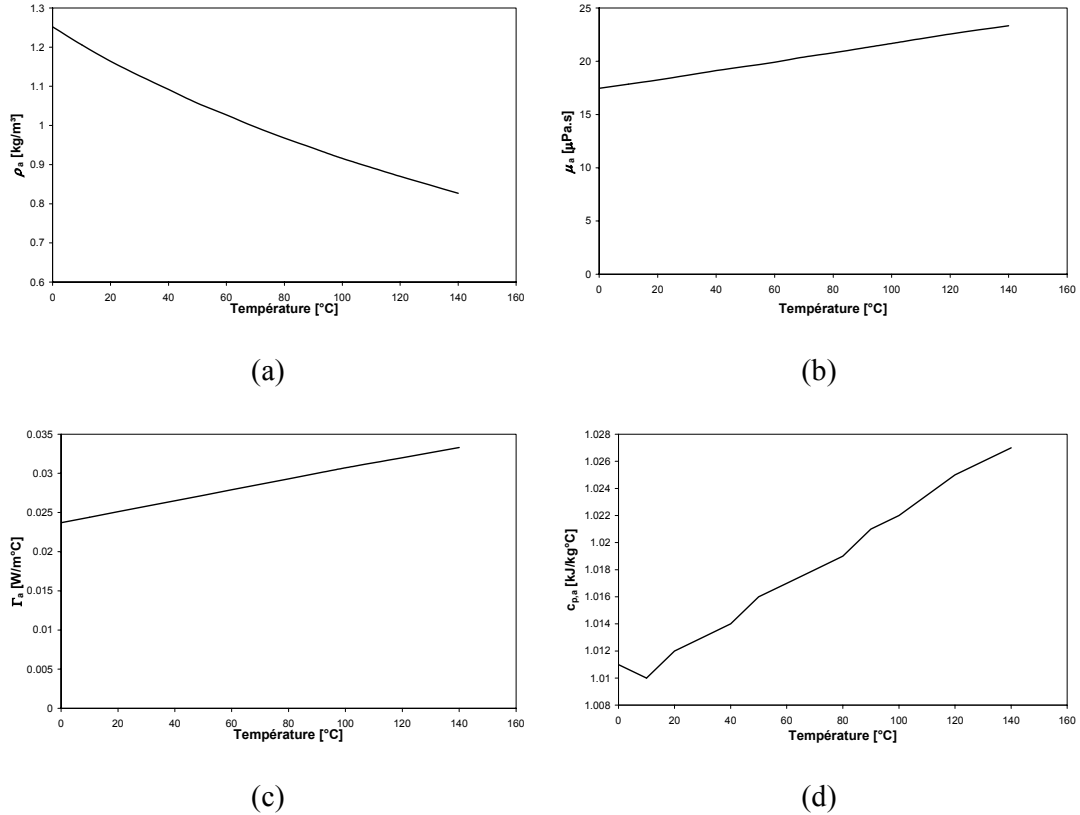


Figure 2.4 : Evolution en fonction de la température de différentes propriétés de l'air sec- (a) Masse volumique – (b) Viscosité dynamique – (c) Conductivité thermique – (d) Chaleur spécifique [RAZNJEVIC, 1970]

La viscosité dynamique de l'air  $\mu_a$  dépend de la température. Nous avons également supposé une variation linéaire de cette propriété, ce que semble confirmer la Figure 2.4-b.

$$\mu_a(T) = \mu_{a0} \cdot [1 - \beta_a^T \cdot (T - T_0)] \quad (2.13)$$

où  $\beta_a^T$  est le coefficient de variation thermique de la viscosité et  $\mu_{a0}$  est la viscosité dynamique de l'air à la température  $T_0$  de référence.

Les propriétés thermiques de l'air sont définies par les relations suivantes :

$$\Gamma_a(T) = \Gamma_{a0} \cdot [1 + \gamma_a^T \cdot (T - T_0)] \quad (2.14)$$

$$c_{p,a}(T) = c_{p,a0} \cdot [1 + C_a^T \cdot (T - T_0)] \quad (2.15)$$

où  $\gamma_a^T$  est le coefficient de variation thermique de la conductibilité,  $\Gamma_{a0}$  est la conductibilité à la température  $T_0$  de référence,  $C_a^T$  est le coefficient de variation thermique de la capacité thermique et  $c_{p,a0}$  est la capacité thermique à la température  $T_0$  de référence.

La figure 2.4-c confirme cette variation linéaire de la conductibilité et la figure 2.4-d montre que la capacité thermique de l'air ne varie pas beaucoup dans la plage de températures considérée.

#### 2.1.4. LA VAPEUR D'EAU

La quantité de vapeur d'eau présente dans un sol dépend des conditions de pression des fluides (eau et air) et de température considérées. Ayant postulé l'existence d'un équilibre thermodynamique local entre les différents constituants du milieu, nous pouvons donc supposer qu'il en est de même entre la vapeur d'eau et l'eau liquide présente.

Considérons donc tout d'abord le cas simplifié d'un système constitué uniquement d'eau pure. L'équilibre de l'eau pure entre deux phases différentes 1 et 2 est assuré sous réserve que les trois conditions suivantes soient vérifiées :

- la même température :  $T^1 = T^2$
- la même pression :  $p^1 = p^2$
- le même potentiel chimique :  $\mu_c^1(p, T) = \mu_c^2(p, T)$

Le potentiel chimique définit la variation d'enthalpie libre d'un corps pur de composition variable à température et pression constantes:

$$\mu_c = \left( \frac{\partial G_c}{\partial N} \right)_{p,T} \quad (2.16)$$

où  $G_c$  est l'enthalpie libre du corps et  $N$  le nombre de moles.

Pour un corps pur monophasé, le potentiel chimique est égal à son enthalpie libre molaire :

$$\mu_c(p, T) = \frac{G_c}{N} = \mu_c^0(T) + RT \ln(p) \quad (2.17)$$

où  $\mu_c^0$  est le potentiel chimique dans l'état de référence (25°C et 1 atm).

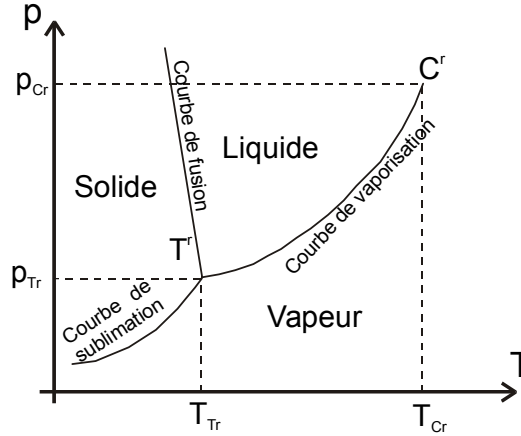


Figure 2.5 : Courbe d'équilibre d'un corps pur

L'égalité des potentiels chimiques de l'eau pure à l'équilibre signifie donc qu'il existe une relation entre la température et la pression au changement de phase. Il est donc possible de définir les courbes d'équilibre de l'eau pure dans le plan (p, T) (Figure 2.5). Le changement de phase est un processus réversible qui s'effectue à pression et température constantes et qui s'accompagne toujours d'une absorption de chaleur pour la fusion, vaporisation ou sublimation, et d'une libération de chaleur pour les transformations inverses.

Le point triple T<sup>r</sup> correspond aux conditions pour lesquelles les trois phases de l'eau sont à l'équilibre.

La variation d'enthalpie  $\Delta H$  durant la vaporisation d'une masse  $m$  d'eau à pression constante est une mesure de la quantité de chaleur reçue par l'eau :

$$\Delta H = mL \quad (2.18)$$

où  $L$  est la chaleur latente de l'eau.

La chaleur latente dépend de la température et de la pression. Des formules existent afin de définir l'évolution de la chaleur latente en fonction de la température ; nous citerons par exemple la formule de Regnault :

$$L(T) = 3335 - 2,91T [kJ / kg] \quad (2.19)$$

Toutefois, dans notre modèle nous supposons que la chaleur de vaporisation reste constante car, dans les problèmes que nous traitons, cette hypothèse est généralement prise.

A température constante, le diagramme ( $p$ ,  $V$ ) d'équilibre liquide-vapeur (figure 2.6) présente un palier horizontal LG à la pression constante  $p_s$ , appelée la pression de vapeur saturante.

Si la pression de l'eau est égale à la pression saturante, l'eau liquide coexistera avec la vapeur d'eau. Si la pression est inférieure (supérieure) à la pression de vapeur saturante, seule la vapeur sèche (l'eau liquide) est présente.

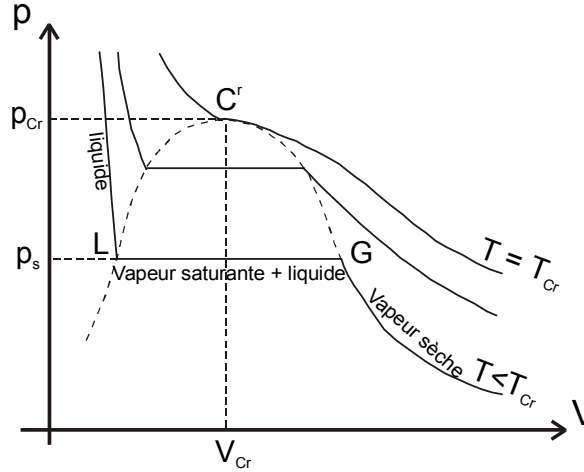


Figure 2.6 : Courbe isotherme de l'équilibre liquide-vapeur d'un corps pur

Pour des températures croissantes, le palier LG se rétrécit, jusqu'à se confondre avec un point Cr, pour une température critique  $T_{Cr}$  à partir de laquelle il est impossible de vaporiser un liquide à pression constante.

Supposant l'équilibre entre l'eau liquide et la vapeur, la pression de vapeur est égale à la pression de vapeur saturante. Il est donc important de connaître la courbe de vaporisation de l'eau. Ces données sont définies expérimentalement et il est possible de les estimer par l'équation suivante :

$$p_{s,w} = a.e^{\frac{-b}{T}} \text{ [MPa]} \quad (2.20)$$

où  $a = 112659$  MPa et  $b = 5192.74$  pour des températures  $T$  comprises entre  $273^\circ\text{K}$  et  $373^\circ\text{K}$ .

Dans le cadre de ce travail, nous supposons que la vapeur d'eau respecte la loi des gaz parfaits. Nous pouvons donc définir la masse volumique de la vapeur saturante par la relation suivante :

$$\rho_{v,0} = \frac{p_{v,0} \cdot M_v}{R \cdot T} \quad (2.21)$$

où  $p_{v,0}$  est égale à la pression de vapeur saturante,  $M_v$  est la masse molaire de la vapeur d'eau ( $M_v = 0.018$  kg/mole) et  $R$  est la constante des gaz parfaits.

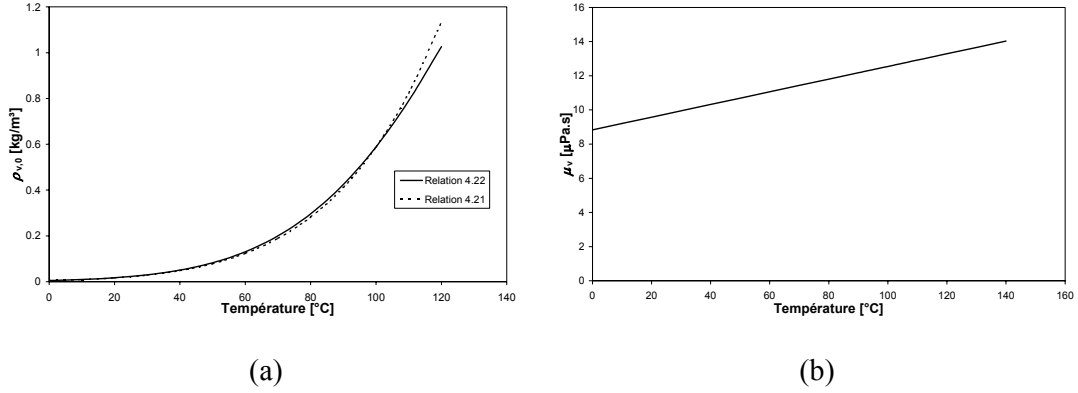


Figure 2.7 : Evolution des propriétés de la vapeur d'eau - (a) Masse volumique [Equations (2.21) et (2.22)] – (b) Viscosité dynamique [Equation (2.32)].

Une autre méthode pour obtenir la masse volumique de vapeur saturante consiste à définir une relation corrélée sur base de résultats expérimentaux. [EWEN *et al.*, 1989] a trouvé la relation (2.22) à partir de données standards de [MAYHEW *et al.*, 1976] et qui est valable pour des températures comprises entre 20 et 58°C.

$$\frac{1}{\rho_{v,0}} = 194,4 \cdot \exp\left[-0,06374 \cdot (T - 273) + 0,1634 \cdot 10^{-3} \cdot (T - 273)^2\right] \quad (2.22)$$

où  $\rho_{v,0}$  est exprimé en kg/m³ et  $T$  est la température absolue.

La figure 2.7-a montre que les relations (2.21) et (2.22) sont équivalentes.

Toutefois, dans le problème qui nous préoccupe, l'air est également présent dans le milieu et influence l'équilibre entre les différentes phases. Nous devons donc à présent étudier le problème de changement de phase d'un mélange binaire.

Si nous considérons à présent un mélange idéal de  $J$  gaz parfaits, nous pouvons définir le potentiel chimique du  $i^{\text{ème}}$  composant par :

$$\mu_{c,i}(p, T) = \mu_{c,i}^0(T) + RT \ln p_i \quad (2.23)$$

où  $p_i$  est la pression partielle.

Introduisant la fraction molaire du  $i^{\text{ème}}$  constituant gazeux,

$$X_i = \frac{N_i}{\sum_{i=1}^J N_i} = \frac{p_i}{\sum_{i=1}^J p_i} = \frac{p_i}{p} \quad (2.24)$$

où  $N_i$  est le nombre de moles du  $i^{\text{ème}}$  constituant et  $p$  est la pression totale du mélange gazeux, nous obtenons :

$$\mu_{c,i}(p, T) = \mu_{c,i}^0(T) + RT \ln X_i \quad (2.25)$$

Par analogie à la relation précédente, une solution de plusieurs liquides est dite idéale si le potentiel chimique du constituant  $i$  dans le liquide s'écrit :

$$\mu_{c,i}(p, T) = \mu_{c,i}^0(T) + RT \ln x_i \quad (2.26)$$

où  $x_i$  est la fraction molaire du constituant  $i$  dans le liquide et  $\mu_i^0$  est le potentiel chimique du constituant  $i$  pur dans des conditions de référence.

A partir de ces relations, il est possible de déduire la loi de Raoult qui lie, pour une solution idéale, la pression partielle  $p_i$  du composant  $i$  dans la phase gazeuse à sa fraction molaire dans la phase liquide  $x_i$  :

$$p_i = p_{s,i}(T) \cdot x_i \quad (2.27)$$

où  $p_{s,i}$  est la pression de vapeur saturante du composant  $i$ .

Dans le cas qui nous occupe, la phase liquide comprend uniquement l'eau liquide et la phase gazeuse est constituée d'un mélange d'air sec et de vapeur d'eau. En appliquant la relation (2.27) à ce système, nous obtenons une pression de vapeur d'eau égale à la pression de vapeur saturante (la fraction molaire de l'eau dans la phase liquide est égale à 1), ce qui correspond au cas précédent pour un système composé d'eau pure uniquement.

Néanmoins, il est nécessaire de tenir compte d'un effet supplémentaire : l'effet capillaire qui apparaît lorsque deux fluides non-miscibles (eau et air) sont mis en contact. Il est alors possible de calculer la pression de vapeur à l'aide de la loi de Kelvin définissant l'humidité relative  $h$  :

$$h = \exp\left(\frac{\psi \cdot g}{R_v \cdot T}\right) \quad (2.28)$$

où  $\psi$  est la somme du potentiel matriciel et osmotique de l'eau (voir paragraphe 4.1.1),  $R_v$  est égal au rapport  $R/M_v$  et  $g$  est l'accélération de la pesanteur.

En tenant compte des effets capillaires uniquement, l'humidité relative est définie par le potentiel matriciel  $\psi_m$  donné par la relation suivante:

$$\psi_m = \frac{p_w - p_g}{\rho_w \cdot g} \quad (2.29)$$

L'humidité relative  $h$  définit le rapport des pressions de vapeur avec effets capillaires  $p_v$  et en conditions standards  $p_{v,0}$  (égale à la pression de vapeur saturante).

$$h = \frac{p_v}{p_{v,0}} \quad (2.30)$$

La masse volumique de la vapeur d'eau est donc finalement définie par l'expression thermodynamique suivante :

$$\rho_v = \rho_{v,0} \cdot h \quad (2.31)$$

La viscosité dynamique de la vapeur d'eau  $\mu_v$  dépend de la température. Une expression a été proposée par [SPEYERER, 1923] :

$$\mu_v(T) = 125,4 \cdot 10^{-7} + 3,711 \cdot 10^{-8} \cdot (T - 373) \quad (2.32)$$

où  $\mu_v$  est exprimé en Pa.s

La capacité thermique et la conductibilité de la vapeur seront considérées comme constantes.

### 2.1.5. LE MELANGE AIR SEC - VAPEUR D'EAU

Dans l'étude de problèmes où le changement de phase de l'eau entre en ligne de compte, la phase gazeuse est constituée d'un mélange d'air sec et de vapeur d'eau. Les flux de chaque constituant dépendront donc en partie du flux de la phase gazeuse (convection). Il est donc nécessaire de connaître les propriétés du mélange air sec – vapeur d'eau.

Considérant que ce mélange est idéal, la loi de Dalton est applicable : chaque constituant se comporte comme si il occupait seul le milieu. La pression du mélange  $p_g$  est donc égale la somme des pressions des constituants.

$$p_g = p_v + p_a \quad (2.33)$$

où  $p_g$  est la pression de gaz (mélange),  $p_v$  est la pression de vapeur et  $p_a$  la pression d'air sec.

La viscosité du mélange  $\mu_g$  peut être définie à partir des viscosités des constituants en utilisant une formule que [WILKE, 1949] a développée et qui se simplifie pour des solutions idéales :

$$\mu_g = \frac{\mu_a}{1 + \frac{(X_v/X_a) \cdot [1 + (\mu_a/\mu_v)^{0.5} \cdot (M_v/M_a)^{0.25}]^2}{(4/\sqrt{2})[1 + (M_a/M_v)]^{0.5}}} + \frac{\mu_v}{1 + \frac{(X_a/X_v) \cdot [1 + (\mu_v/\mu_a)^{0.5} \cdot (M_a/M_v)^{0.25}]^2}{(4/\sqrt{2})[1 + (M_v/M_a)]^{0.5}}} \quad (2.34)$$

où  $X_a = \frac{p_a}{p_g}$  est la fraction molaire de la vapeur et  $X_v = \frac{p_v}{p_g}$  celle de la vapeur.

Les masses molaires de la vapeur d'eau et de l'air sec sont respectivement  $M_v = 0.018$  kg/mole et  $M_a = 0.029$  kg/mole.

La masse volumique du mélange  $\rho_g$  peut être définie par la relation (2.35), en utilisant les lois de Dalton et des gaz parfaits, et en supposant que la masse molaire du gaz est donnée par la relation (2.36) basée sur une moyenne pondérée des masses molaires des constituants:

$$\frac{\rho_g}{M_g} = \frac{\rho_a}{M_a} + \frac{\rho_v}{M_v} \quad (2.35)$$

$$M_g = X_v \cdot M_v + X_a \cdot M_a \quad (2.36)$$

Toutefois, la relation simplifiée (2.37) est généralement utilisée dans la littérature [POLLOCK, 1986], [GAWIN *et al.*, 1996a] et dans notre modèle, nous l'utiliserons pour définir la masse volumique du mélange  $\rho_g$ :

$$\rho_g = \rho_a + \rho_v \quad (2.37)$$

### 2.1.6. AIR DISSOUS

En conditions non-saturées, l'air sec peut se trouver sous deux formes : en tant que gaz composant la phase gazeuse avec la vapeur d'eau et, dans la phase liquide, sous forme d'air dissous.

Nous supposons que l'air dissous dans l'eau est en équilibre avec l'air sous forme gazeuse et que la loi de Henry est respectée. Celle-ci exprime *qu'à une température donnée, la masse d'un gaz légèrement soluble, qui est dissous dans une masse définie de liquide, est proportionnelle à la pression partielle de ce gaz* [WEAST, 1971]. Cette loi est valable pour des gaz qui ne réagissent pas chimiquement avec le solvant. La relation d'équilibre peut s'écrire sous la forme suivante [VAUNAT *et al.*, 1997]:

$$K_{eq}^{a-d} = \frac{p_a \cdot m_w}{m_{a-d}} \cdot \frac{M_a}{M_w} \quad (2.38)$$

où  $p_a$  est la pression d'air sec au-dessus de la solution,  $m_w$  et  $m_{a-d}$  sont respectivement les masses d'eau et d'air dissous,  $M_w$  est la masse molaire de l'eau liquide ( $M_w = 0.018$  kg/mole) et  $K_{eq}^{a-d}$  est une constante d'équilibre dépendant de la température.

Cette dernière relation peut être transformée en utilisant la loi des gaz parfaits:

$$\rho_a = \frac{p_a \cdot M_a}{R \cdot T} \quad (2.39)$$

et en multipliant chaque membre par la masse volumique de l'eau,

$$\frac{\rho_w \cdot m_{a-d}}{\rho_a \cdot m_w} = \frac{\rho_w \cdot M_a}{K_{eq}^{a-d} M_w} \cdot \frac{RT}{M_a} \quad (2.40)$$

Le membre de gauche de l'équation (2.40) représente en fait le rapport du volume d'air dissous et du volume d'eau. Le membre de droite dépend exclusivement de la



température et de la masse volumique de l'eau et est appelé le coefficient de solubilité  $H$  de Henry.

$$\frac{V_{a-d}}{V_w} = H^s(\rho_w, T) \quad (2.41)$$

Vu la faible variation de la masse volumique de l'eau par rapport à l'influence de la température, nous pouvons dire que la constante de Henry dépend uniquement de cette dernière.

Température [°C]	Coefficient de solubilité de l'air
0	0,02918
5	0,02568
10	0,02284
15	0,02055
20	0,01868
25	0,01708
30	0,01564
80	0.01502*
100	0,01566*

Tableau 2.1 : Coefficient de solubilité de l'air dans l'eau [DORSEY, 1940]

\* Valeurs indirectes (recalculées)

Dans le tableau 2.1, nous définissons la constante de Henry de solubilité de l'air dans l'eau pour des températures comprises entre 0°C et 100°C. Dans notre modèle, le coefficient de solubilité sera toutefois considéré comme constant.

#### 2.1.7. LA PHASE SOLIDE

Nous ne voulons pas ici définir une loi de comportement de la phase solide. Cela fait l'objet du chapitre III. Nous devons néanmoins connaître les propriétés thermiques des grains afin de pouvoir étudier les transferts de chaleur dans le milieu.

Les grains seront considérés comme incompressibles mais nous introduirons une dépendance de la masse volumique des grains avec la température:

$$\rho_s = \rho_{s0} - \rho_{s0} \cdot \alpha_s^T \cdot (T - T_0) \quad (2.42)$$

où  $\alpha_s^T$  est le coefficient de dilatation thermique des grains et  $\rho_{s,0}$  est la masse volumique à la température  $T_0$  de référence.

La conductivité thermique et la capacité thermique des grains sont définies en toute généralité par les formules suivantes:

$$\Gamma_s(T) = \Gamma_{s0} + \Gamma_{s0} \cdot \gamma_s^T \cdot (T - T_0) \quad (2.43)$$

$$c_{p,s}(T) = c_{p,s0} + c_{p,s0} \cdot C_s^T \cdot (T - T_0) \quad (2.44)$$

où  $\gamma_s^T$  est le coefficient de variation thermique de la conductibilité,  $\Gamma_{s0}$  est la conductibilité à la température  $T_0$  de référence,  $C_s^T$  est le coefficient de variation thermique de la capacité thermique et  $c_{p,s0}$  est la capacité thermique à la température de référence  $T_0$ .

## 2.2. Milieu poreux et milieu continu

Un milieu poreux saturé par un seul fluide peut généralement être considéré comme un ensemble de particules solides entre lesquelles se trouve l'espace poreux saturé par un fluide (ce n'est pas le cas de certaines roches comme des granites de grande qualité par exemple). La porosité  $n$  d'un milieu est définie comme le rapport entre volume non-solide  $V_v$ , appelé volume des vides, et le volume total  $V$  du milieu.

$$n = \frac{V_v}{V} \quad (2.45)$$

Considérant un volume élémentaire entourant un point géométrique défini dans un référentiel choisi, ce dernier est composé, à l'échelle microscopique, d'une part d'un squelette de particules solides (grains + volume poreux) et d'autre part du fluide saturant les espaces intergranulaires. Ces deux systèmes se trouvent simultanément au même point géométrique de l'espace. De ce fait, nous pouvons donc définir le milieu poreux saturé (figure 2.8) comme la superposition, dans le temps et l'espace, de deux milieux continus (le squelette et le fluide) [COUSSY, 1995].

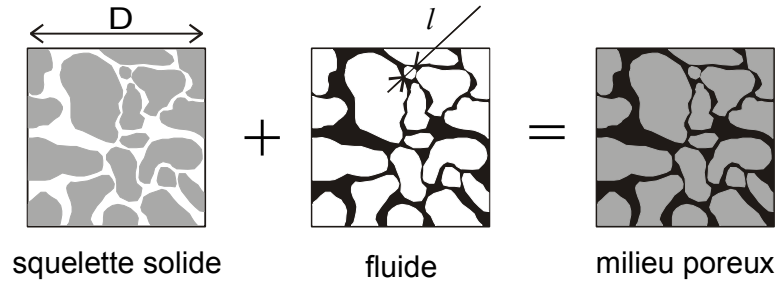


Figure 2.8 : Définition d'un milieu saturé

Cette notion introduit nécessairement une échelle du volume considéré à partir de laquelle un milieu hétérogène à l'échelle microscopique pourra être étudié par la théorie des milieux continus. Cette échelle correspond au Volume Élémentaire Représentatif (VER) au niveau duquel seront écrites les équations de bilan macroscopique. La

dimension  $D$  du VER devra être nettement plus grande que la dimension  $l$  où se produisent les phénomènes microscopiques. Elle devra également être inférieure à une dimension macroscopique  $L$  à partir de laquelle les phénomènes étudiés dans le VER seraient influencés par les hétérogénéités macroscopiques du milieu. La dimension du VER devra donc vérifier la condition suivante :

$$l \ll D \ll L \quad (2.46)$$

où  $l$  est l'échelle microscopique du milieu et  $L$  est l'échelle des hétérogénéités du milieu.

De cette manière, les grandeurs calculées sur ce volume seront indépendantes de la dimension de ce dernier.

Le comportement mécanique du squelette peut dès lors être décrit par des équations définies au chapitre IV qui concerne le comportement d'un matériau ne contenant pas de fluide dans ses pores. Le comportement du fluide saturant les pores fait l'objet du présent chapitre mais doit s'étendre au milieu partiellement saturé.

Dans un sol non-saturé, les différentes phases occupent chacune un volume bien distinct. Une phase peut naturellement être constituée de plusieurs composants. Le précédent raisonnement reste toutefois valable pour un milieu poreux saturé par différentes phases sous réserve que ces phases demeurent continues. Le milieu sera donc la superposition de  $p + 1$  continua :  $p$  étant le nombre de fluides saturant les pores et le dernier représentant la phase solide.

Le degré de saturation  $S_{r,i}$  d'une phase  $i$  est définie par le rapport entre le volume occupé par cette phase  $V_i$  et le volume  $V_v$  de l'ensemble des phases fluides :

$$S_{r,i} = \frac{V_i}{V_v} \quad (2.47)$$

Dans le cadre des problèmes qui nous préoccupent, le milieu poreux sera soumis à des variations de température assez importantes. Avant de décrire le traitement proprement dit du problème thermique, il est nécessaire de définir le cadre thermodynamique dans lequel nous travaillons.

Contrairement à la théorie classique des milieux continus, où il n'y a pas d'échange entre un volume élémentaire quelconque et le monde extérieur (système thermodynamique fermé), le milieu poreux est un système thermodynamique ouvert [COUSSY, 1995]. En effet, des échanges de masses fluides peuvent apparaître au cours de l'évolution du système.

Afin de résoudre ce problème, nous allons supposer que le système évolue dans une succession d'états d'équilibre thermodynamique locaux. De ce fait, chaque évolution du système sera considérée comme une succession d'évolutions quasi-thermostatiques : cela nous permettra d'utiliser les relations de la thermostatique pour étudier un problème de thermodynamique.

Ainsi, dans l'ensemble de ce travail, nous ferons les hypothèses suivantes : les différentes phases constituant le milieu se trouvent toutes à la même température ; les changements possibles de phase se déroulent également dans des conditions thermodynamiques à l'équilibre et enfin, nous étudions uniquement les transferts de chaleur et nous ne considérons pas les autres formes d'énergie du système (énergie liée au travail mécanique des forces en présence, l'énergie cinétique, ...).

### 2.3. Equations de bilan

Les équations de bilan macroscopique que nous écrivons doivent décrire des phénomènes se déroulant à une échelle microscopique. Différentes méthodes permettent le passage des équations de bilan microscopique à l'échelle du VER.

Une première approche consiste à obtenir ces équations à partir de la théorie des mélanges [BOWEN, 1980]. Les différentes phases sont considérées comme des continua qui occupent tout l'espace à tout moment. Les propriétés du mélange dépendent de celles de chaque phase ainsi que des interactions possibles.

Une seconde approche utilise une méthode d'homogénéisation sur des volumes locaux. Le système est constitué de continua s'interpénétrant, chacun occupant une partie de l'espace et étant séparé par des interfaces. Les équations de bilan classiques (pour chaque phase et chaque interface) sont utilisées au niveau microscopique et ensuite moyennées sur un volume local pour obtenir des équations macroscopiques en termes de quantités macroscopiques [HASSANIZADEH *et al.*, 1979a, 1979b, 1980].

Enfin, d'autres auteurs [COUSSY, 1995] se basent sur des développements de thermodynamique pour obtenir ces équations macroscopiques de bilan.

Dans notre travail, nous utiliserons des équations de bilan macroscopique, sachant que chaque terme de ces équations résulte d'une moyenne sur le volume considéré. Nous adopterons une approche phénoménologique où nous nous attacherons à décrire les différents phénomènes que nous voulons étudier.

Bien qu'étant deux phénomènes physiques bien distincts, les écoulements de fluides et le transfert de chaleur peuvent être décrits par des équations de bilan similaires [CHARLIER, 1987]. Deux équations traduisant l'équilibre local peuvent alors être écrites:

- l'une relative au bilan en surface :

$$\underline{n}^T \cdot \underline{V} + q = 0 \quad (2.48)$$

Cette équation exprime que le flux imposé en surface  $q$ , positif en entrée, est égal à la composante de flux intérieur  $\underline{V}$  normal à la frontière.

- l'autre est relative au bilan sur un élément de volume  $V$  délimité par la surface  $A$ , de normale extérieure  $\underline{n}$  qui doit être en équilibre lorsque le bilan des flux

spatiaux provenant du reste du solide, du terme (source ou pompage) de volume  $Q$  et de l'emmagasinement  $\dot{S}$ , est nul :

$$\int_A -(\underline{n}^T \cdot \underline{V}) \cdot dA + \int_V Q \cdot dV = \int_V \dot{S} \cdot dV \quad (2.49)$$

Par le théorème de Gauss, cette dernière relation peut s'écrire :

$$\int_V (-\text{div}(\underline{V}) + Q - \dot{S}) dV = 0 \quad (2.50)$$

Cette équation reste valable quel que soit le volume considéré. Dès lors, l'équation d'équilibre local intérieur est :

$$\text{div}(\underline{V}) + \dot{S} - Q = 0 \quad (2.51)$$

Ces équations sont exprimées dans la configuration déformée en utilisant une formulation Lagrangienne. Cette formulation est typique des codes de calculs écrits en grandes déformations où l'on fait une différence entre la configuration initiale et la configuration déformée. Ces notions seront explicitées dans le chapitre V.

Le flux  $\underline{V}$  de fluide (ou de chaleur) représente une vitesse par rapport à la phase solide, et de ce fait, ne comprend pas un terme lié au déplacement de la phase solide. De plus, lorsque nous traiterons de fluides susceptibles de changer de phase, ces équations de bilan devront être modifiées pour en tenir compte.

Afin de traiter des problèmes multiphasiques et donc d'écrire des équations de bilan, deux options sont possibles : nous exprimons la conservation de masse soit de chaque phase soit de chaque espèce chimique présente dans le système. Dans ce travail, nous utiliserons la dernière approche.

Ainsi, pour un composant  $f$  appartenant à la phase  $\alpha$ , l'équation de conservation de masse s'écrit :

$$\dot{S}_f + \text{div}(\underline{V}_f) - Q_f = 0 \quad (2.52)$$

Le flux massique de fluide  $\underline{V}_f$  possède en toute généralité deux composantes [OLIVELLA *et al.*, 1994] : une partie advective  $\rho_f \cdot \underline{q}_\alpha$  qui représente le mouvement de l'ensemble de la phase et une partie non-advective  $\underline{i}_f$  qui correspond à la diffusion du composant au sein de la phase.

$$\underline{V}_f = \rho_f \cdot \underline{q}_\alpha + \underline{i}_f \quad (2.53)$$

En utilisant cette décomposition, l'équation (2.52) est équivalente à la formulation développée par [HASSANIZADEH, 1986].

D'autre part, nous avons supposé que la température des différentes phases est unique, nous pouvons dès lors écrire une seule équation de conservation de l'énergie du système sous sa forme enthalpique. Toutefois, dans les problèmes que nous allons traiter, nous étudierons uniquement les transferts de chaleur et nous ne considérerons

pas les autres termes constituant l'enthalpie. Les autres formes d'énergie du système seront négligées : l'énergie liée au travail mécanique des forces en présence, l'énergie cinétique, ... Le transfert de chaleur se produira par conduction et convection. Nous négligerons un éventuel transfert par rayonnement dans le milieu poreux.

$$\dot{S}_T + \text{div}(\underline{V}_T) - Q_T = 0 \quad (2.54)$$

où  $S_T$  représente la quantité de chaleur emmagasinée,  $\underline{V}_T$  le flux de chaleur et  $Q_T$  une source (ou un pompage) de chaleur en volume.

## 2.4. Conclusions

Nous venons de présenter les différents outils nécessaires à l'étude des problèmes que nous voulons traiter : propriétés des différents fluides en présence, passage du milieu poreux au milieu continu et définition des équations de bilan. Nous allons dans la suite développer le formalisme de la loi de transfert hydrique anisotherme pour des problèmes du plus simple au plus complexe. Nous traiterons tout d'abord un milieu anisotherme saturé par un fluide afin de mettre en évidence les couplages possibles entre l'écoulement d'un fluide (eau ou huile) et le transfert de chaleur. Ensuite, nous parlerons d'un milieu saturé par deux fluides non miscibles (sans changement de phase) pour bien montrer les problèmes et les couplages créés par la capillarité. Les couples de fluides considérés seront l'eau et l'air ou l'eau et l'huile. Enfin nous terminerons par le problème plus complexe où des changements de phase sont possibles, en le particulier au couple eau-air. Pour chaque formalisme, une validation sera effectuée dans le chapitre VI.

## 3. MILIEU ANISOTHERME SATURÉ PAR UN SEUL FLUIDE

Nous pouvons à présent utiliser les différents outils que nous avons développés aux paragraphes précédents pour la modélisation de transfert hydrique dans des conditions anisothermes. Ce problème est très complexe car des couplages existent entre les différents phénomènes intervenants.

Le premier cas étudié est celui d'un milieu saturé par un seul fluide mais soumis à des variations de température. Nous devons donc écrire les équations de conservation de la masse de fluide et de la chaleur en utilisant les relations (2.52) et (2.54).

### 3.1. Conservation de la masse du fluide

Considérant les équations de bilan développées au paragraphe précédent, nous pouvons écrire l'équation de conservation de la masse de fluide :

$$\dot{S}_f + \text{div}(\underline{V}_f) - Q_f = 0 \quad (2.55)$$

où  $S_f$  représente la quantité de fluide emmagasinée,  $\underline{V}_f$  le flux massique de fluide et  $Q_f$  une source de fluide.

Le terme d'emmagasinement est défini par la relation suivante :

$$S_f = \rho_f \cdot \theta_f = \rho_f \cdot n \quad (2.56)$$

où  $\rho_f$  est la masse volumique,  $\theta_f$  est la teneur volumique équivalente à la porosité  $n$ .

Dans le cas qui nous occupe ici, la phase fluide est composée d'une seule espèce chimique et le flux diffusif n'existe donc pas. Le flux massique de fluide  $\underline{V}_f$  comprend donc uniquement une partie advective qui représente le mouvement de l'ensemble de la phase :

$$\underline{V}_f = \rho_f \cdot \underline{q}_f \quad (2.57)$$

où  $\underline{q}_f$  est la vitesse moyenne du fluide par rapport à la phase solide.

### 3.2. Ecoulement du fluide

L'équation de Darcy définit la vitesse macroscopique du fluide (volume de fluide par unité de temps et par unité de surface de sol ) par rapport à la phase solide et s'écrit en toute généralité [BEAR, 1972] :

$$\underline{q}_f = -\frac{\underline{K}_f}{\rho_f \cdot g} \cdot [\underline{grad}(p_f) + \rho_f \cdot g \cdot \underline{grad}(y)] \quad (2.58)$$

où  $\underline{K}_f$  est le tenseur anisotrope de perméabilité et  $y$  est la coordonnée verticale positive vers le haut.

Se ramenant à un milieu isotrope, la perméabilité est définie par un scalaire :

$$\underline{q}_f = -\frac{K_f}{\rho_f \cdot g} \cdot [\underline{grad}(p_f) + \rho_f \cdot g \cdot \underline{grad}(y)] \quad (2.59)$$

Le coefficient de perméabilité  $K_f$  [L.T<sup>-1</sup>] dépend du fluide considéré ; c'est pourquoi une perméabilité intrinsèque est également définie :

$$\underline{q}_f = -\frac{k_{int}}{\mu_f} \cdot [\underline{grad}(p_f) + \rho_f \cdot g \cdot \underline{grad}(y)] \quad (2.60)$$

où  $k_{int} = K_f \cdot \frac{\mu_f}{\rho_f \cdot g}$  [L<sup>2</sup>] est souvent exprimé en m<sup>2</sup>.

Les ingénieurs réservoirs utilisent pour leur part le Darcy comme unité pour la perméabilité intrinsèque. Un Darcy correspond à la perméabilité d'un sol par lequel un fluide de viscosité de 1 cp percolera avec un débit de 1 cm<sup>3</sup>/sec par cm<sup>2</sup> de section sous un gradient de pression de 1 atmosphère par cm [BEAR, 1972]. Le facteur de conversion du Darcy en une unité de surface est le suivant :

$$1 \text{ Darcy} = 9,8697 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2$$

La perméabilité intrinsèque ne dépend pas du fluide considéré ni de la température. L'influence de la température se marque au niveau des propriétés des fluides (viscosité et masse volumique) et plus spécialement de la viscosité, ce qui entraîne un couplage entre le problème thermique et hydraulique.

Un couplage supplémentaire existe également entre la perméabilité et les déformations volumiques. En effet, les modifications de porosité du milieu modifient la perméabilité de celui-ci. Nous avons choisi d'utiliser la formulation de Kozeny-Carman qui s'exprime comme suit:

$$k_{\text{int}} = ck_0 \cdot \frac{n^{\text{exs}}}{(1-n)^{\text{exr}}} \quad (2.61)$$

où *exs* et *exr* sont des paramètres du matériau et  $ck_0$  est une constante définie à partir des valeurs initiales de perméabilité  $k_0$  et de porosité  $n_0$ .

$$ck_0 = k_0 \cdot \frac{(1-n_0)^{\text{exr}}}{n_0^{\text{exs}}} \quad (2.62)$$

### 3.3. Emmagasinement de fluide

Ce modèle d'écoulement peut être couplé avec un modèle mécanique. De ce fait, si nous voulons définir la variation d'emmagasinement, nous devons également tenir compte d'une éventuelle variation de volume liée à des déformations du milieu.

La relation (2.55) de conservation de masse est écrite pour un volume unitaire. Considérons un volume de référence  $V$ , la variation d'emmagasinement s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(S_f \cdot V) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_f \cdot \theta_f \cdot V) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_f \cdot n \cdot V) \quad (2.63)$$

En développant la relation précédente [COLLIN, 1998], il est possible de trouver l'expression complète de l'emmagasinement :

$$\dot{S}_f = \rho_{f0} \cdot \left[ \frac{\dot{p}_f}{\chi_f} - \alpha_f^T \cdot \dot{T} \right] \cdot n + \rho_f \cdot \dot{\varepsilon}_V \quad (2.64)$$

où l'on observe que la variation de la quantité d'eau dans les pores dépend des variations de pression (si le fluide est compressible) et de température d'une part et des déformations volumiques du matériau d'autre part (qui correspondent exclusivement à des variations de volume poreux si les grains sont considérés comme incompressibles). Les déformations volumiques  $\varepsilon_v$  sont liées à la loi de comportement mécanique choisie.

La relation (2.64) introduite dans le code de calcul prend en compte les grandes déformations, comme cela sera décrit dans le chapitre V.



### 3.4. Conservation de la chaleur

Nous écrivons l'équation de conservation d'enthalpie en se limitant au terme de transfert de chaleur. Sachant que toutes les phases sont en équilibre thermique, donc ayant une seule et même température, il n'est pas nécessaire d'écrire une équation de bilan pour chaque phase. L'équation de conservation de l'enthalpie aura la forme suivante :

$$\dot{S}_T + \text{div}(\underline{V}_T) - Q_T = 0 \quad (2.65)$$

où  $S_T$  représente la quantité de chaleur emmagasinée,  $\underline{V}_T$  le flux de chaleur et  $Q_T$  une source de chaleur en volume.

Le terme d'emmagasinement définit la variation de l'enthalpie  $H_m$  du système.

$$S_T = H_m = \underbrace{\theta_f \cdot \rho_f \cdot c_{p,f} \cdot (T - T_0)}_{\text{Fluide}} + \underbrace{\theta_s \cdot \rho_s \cdot c_{p,s} \cdot (T - T_0)}_{\text{Solide}} \quad (2.66)$$

où  $\rho_\alpha$ ,  $\theta_\alpha$  et  $c_{p,\alpha}$  sont respectivement la masse volumique, la teneur volumique et la capacité thermique de la phase  $\alpha$ , et  $T_0$  est une température de référence.

Le flux de chaleur  $\underline{V}_T$  possède deux composantes : une partie de conduction de la chaleur (généralement définie par une loi de Fourier) et une partie liée à la quantité de chaleur transportée par convection par la phase fluide.

$$\underline{V}_T = \underline{i}_{cond} + H_f \cdot \underline{q}_f^{eff} \quad (2.67)$$

où  $\underline{i}_{cond}$  est le flux de conduction,  $H_f$  est l'enthalpie du fluide et  $\underline{q}_f^{eff}$  est la vitesse effective du fluide par rapport à la phase solide.

### 3.5. Transfert de la chaleur par unité de volume

Le transfert de chaleur peut s'effectuer dans ce cas précis soit par conduction, soit par convection. La conduction est définie par une loi générale de Fourier qui relie le flux de chaleur au gradient de température via une conductibilité thermique qui dépend des caractéristiques des composants du milieu :

$$\underline{i}_{cond} = -\Gamma_m \cdot \underline{\nabla} T \quad (2.68)$$

où  $\Gamma_m$  est la conductibilité thermique du milieu.

Cette propriété du milieu peut être définie à partir de la conductibilité des matériaux composant celui-ci. La relation suivante définissant la conductibilité du milieu suppose un modèle simple de conduction en parallèle où la chaleur est transmise séparément et simultanément par les deux phases, sans avoir d'échange.

$$\Gamma_m = n \cdot \Gamma_f + (1 - n) \cdot \Gamma_s \quad (2.69)$$

La situation est naturellement bien plus complexe, c'est pourquoi outre cette formule nous avons également utilisé des relations définies sur base expérimentale.

L'autre mode de transfert est la convection de chaleur par le fluide en mouvement  $H_f^T \cdot \underline{q}_f^{eff}$ , où la vitesse effective est liée à la vitesse de Darcy par la relation suivante [BURGER *et al.*, 1985] :

$$\underline{q}_f^{eff} = \frac{\underline{q}_f}{\theta_f} = \frac{\underline{q}_f}{n_e} \quad (2.70)$$

où  $n_e$  est la porosité efficace qui correspond à la partie du volume poreux concernée par l'écoulement. Toutefois, dans la suite, nous supposons toujours que la porosité efficace équivaut à la porosité totale (hypothèse forte pour des sols argileux).

Il faut noter que la relation (2.67) ne contient pas de terme lié à la convection de la phase solide. En effet, le bilan est écrit dans la configuration Lagrangienne actualisée et cet effet de convection est implicitement pris en compte.

Nous pouvons donc résumer ces deux modes de transfert dans l'équation suivante :

$$\underline{V}_T = - \underbrace{(n \cdot \Gamma_f + (1-n) \cdot \Gamma_s) \cdot \nabla T}_{conduction} + \underbrace{(\rho_f \cdot c_{p,f} \cdot \underline{q}_f) \cdot (T - T_0)}_{convection} \quad (2.71)$$

La convection constitue un couplage important entre l'écoulement du fluide et le problème thermique. Nous le montrerons clairement dans l'exemple de validation de cette formulation.

### 3.6. Quantité de chaleur emmagasinée par unité de volume : enthalpie

Les contributions de l'enthalpie de l'eau et du solide sont sommées afin de définir l'enthalpie du système (équation 2.66).

Nous pouvons donc calculer les variations d'enthalpie du système en tenant compte d'une éventuelle variation du volume considéré. Ainsi, pour un volume  $V$  de référence, la variation de chaleur emmagasinée s'exprimera selon:

$$\frac{\partial}{\partial t}(S_T \cdot V) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ n \cdot V \cdot \rho_f \cdot c_{p,f} \cdot (T - T_0) + (1-n) \cdot V \cdot \rho_s \cdot c_{p,s} \cdot (T - T_0) \right] \quad (2.72)$$

Après certains développements [COLLIN, 1998], il est possible de trouver l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
\dot{S}_T = & \dot{\varepsilon}_V \cdot \rho_f \cdot c_{p,f} \cdot (T - T_0) + n \cdot (\rho_f \cdot c_{p,f}) \cdot \dot{T} + (1 - n) \cdot \rho_s \cdot c_{p,s} \cdot \dot{T} \\
& + n \cdot [\rho_{f,0} \cdot (\frac{\dot{p}_f}{\chi_f} - \alpha_f^T \cdot \dot{T}) \cdot c_{p,f} + \rho_f \cdot c_{p,f0} \cdot C_f^T \cdot \dot{T}] \cdot (T - T_0) \\
& + (1 - n) \cdot [\rho_{s,0} \cdot \alpha_s^T \cdot \dot{T} \cdot c_{p,s} + \rho_s \cdot c_{p,s0} \cdot C_s^T \cdot \dot{T}] \cdot (T - T_0)
\end{aligned} \tag{2.73}$$

où l'on observe que la variation de quantité de chaleur dépend essentiellement des modifications de température mais également des déformations volumiques. En effet, si le volume poreux diminue, la quantité de fluide contenant de la chaleur diminue également.

La relation (2.73) introduite dans le code de calcul prend en compte les grandes déformations, comme cela sera décrit dans le chapitre V.

#### 4. MILIEU ANISOTHERME SATURE PAR DEUX FLUIDES SANS CHANGEMENT DE PHASE

L'écoulement de deux fluides se présente dans de nombreux problèmes rencontrés par l'ingénieur. Dans les réservoirs pétroliers, les écoulements sont même multiphasiques car, généralement, l'huile, l'eau et une phase gazeuse sont présentes. Toutefois, dans le cadre de notre étude sur les réservoirs, nous nous limiterons à des écoulements de deux fluides (eau-huile). En hydrologie, on parle souvent d'écoulement non-saturé pour décrire les écoulements d'eau et de vapeur d'eau dans les pores du sol où se trouve également de l'air. Toutefois, il est souvent admis que l'air est immobile. Dans le cadre du problème de stockage des déchets (superficiel ou en profondeur), des écoulements simultanés de liquide et de gaz sont rencontrés. Nous étudierons donc également les écoulements eau-air ou d'une manière plus générale liquide-gaz.

En fait, les ingénieurs réservoirs d'une part et les hydrogéologues et géotechniciens d'autre part ont chacun développé des modèles d'écoulement multiphasique en utilisant leur propre notation et terminologie mais il est clair qu'ils reposent sur les mêmes concepts de base.

Lorsque deux fluides non-miscibles s'écoulent dans un milieu poreux, il se crée une interface entre ces derniers et la notion de capillarité ou de succion est alors introduite. Nous allons donc développer ces notions d'une manière générale et nous montrerons ensuite comment elles ont été utilisées en ingénierie réservoir et en géotechnique.

Nous pourrions finalement formuler le modèle d'écoulement multiphasique que nous avons validé par les différentes applications qui sont décrites dans le chapitre VI.

##### 4.1. Phénomène capillaire

Lorsque deux fluides non-miscibles sont en contact, une interface se crée entre ceux-ci dans laquelle s'exercent des tensions superficielles. Ces tensions résultent de la différence des forces moléculaires agissant sur la particule se trouvant soit dans le fluide

soit à l'interface. En effet, pour une particule au sein du fluide, l'ensemble des forces moléculaires sont équilibrées au contraire d'une particule à l'interface (figure 2.9). Des tensions superficielles  $\sigma_{GL}$  se créent à l'interface afin de rétablir l'équilibre.

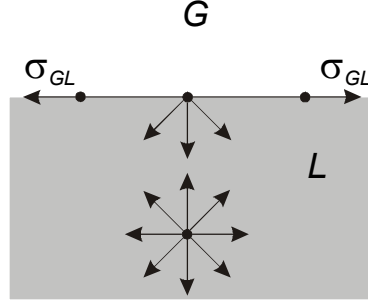


Figure 2.9 : Forces moléculaires sur une particule d'eau

Considérons deux fluides  $L$  et  $G$  en contact avec une surface parfaitement plane d'un solide  $S$  (figure 2.10), les différentes tensions superficielles  $\sigma_{GL}$ ,  $\sigma_{SG}$  et  $\sigma_{SL}$  s'exercent à l'interface. L'équilibre peut être exprimé par l'équation de Young-Dupré :

$$\sigma_{SG} = \sigma_{SL} + \sigma_{GL} \cos \theta \quad (2.74)$$

$$\cos \theta = \frac{\sigma_{SG} - \sigma_{SL}}{\sigma_{GL}} \quad (2.75)$$

où  $\theta$  est l'angle formé par l'interface et la surface  $SL$ . Par convention, cet angle (compris entre  $0^\circ$  et  $180^\circ$ ) est mesuré par rapport au fluide le plus dense.

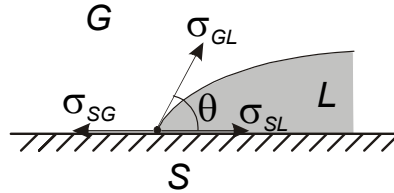


Figure 2.10 : Tensions superficielles

L'angle  $\theta$  est appelé angle de contact et pour que le contact soit possible, il faut que  $(\sigma_{SG} - \sigma_{SL}) / \sigma_{GL} < 1$ . Cet angle dépend donc des fluides en présence mais également du solide considéré. Remarquons que la température influence les tensions superficielles mais nous n'en parlerons pas plus dans le cadre de ce travail.

Tout cela nous amène à définir la notion de mouillabilité. Ainsi, si l'angle de contact est inférieur à  $90^\circ$ , on dit que le fluide  $L$  mouille le solide et nous l'appellerons fluide mouillant. Par opposition, le fluide  $G$  sera appelé le fluide non-mouillant.

La capillarité est un phénomène lié à la tension superficielle et à la mouillabilité. Elle est le plus souvent mise en évidence par l'expérience représentée à la figure 2.11 :

pour un tube capillaire de rayon  $r_c$  plongé dans un fluide, la hauteur d'eau remontant dans ce tube est donnée par la loi de Jurin, exprimant l'équilibre verticale:

$$p_c = p_G - p_L = \frac{2\sigma_{GL} \cos \theta}{r_c} \quad (2.76)$$

où  $p_c$  est la pression capillaire définie par la différence entre la pression du fluide non-mouillant  $p_G$  et la pression du fluide mouillant  $p_L$ .

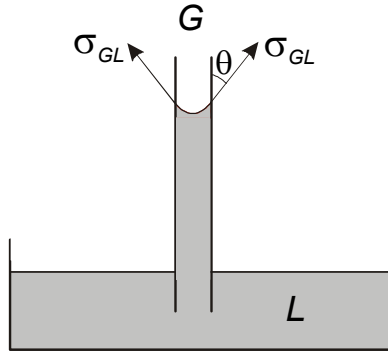


Figure 2.11: Modèle physique du phénomène capillaire

Ce concept de tube capillaire peut être utilisé pour expliquer les phénomènes se déroulant dans un milieu poreux saturé par deux fluides [DELAGE, 1987]. Suivant la pression capillaire et le rayon des pores, il se forme des ménisques du fluide mouillant qui possèdent un rayon de courbure plus ou moins prononcé (figure 2.12). Il existe d'ailleurs une relation entre la pression capillaire et la quantité relative des fluides dans les pores. Le plus souvent cette relation exprime la pression capillaire comme une fonction de la saturation du fluide mouillant ou de sa teneur en poids.

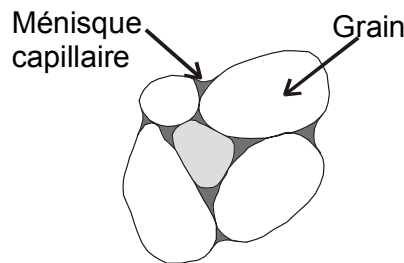


Figure 2.12: Représentation d'un sol granulaire non-saturé

Malheureusement, ces relations ne sont pas univoques car des phénomènes d'hystérésis apparaissent dans le milieu poreux. Les causes de ces phénomènes sont illustrées à la figure 2.13. La première raison peut être mise en évidence dans l'expérience de la goutte d'eau qui montre clairement que l'angle de contact est différent suivant que l'eau chasse l'air ( $\theta_1$  angle de remouillage) ou l'inverse ( $\theta_2$  angle de séchage) [BEAR *et al.*, 1987]. L'effet goulot montre que le modèle d'un capillaire à rayon constant est naturellement une simplification : les pores ont des rayons variables ce qui peut expliquer des saturations différentes pour des pressions capillaires identiques.

Enfin, certains pores de petit diamètre peuvent être connectés en série à de plus gros pores ce qui conduit à des saturations différentes suivant les chemins hydriques suivis [DELAGE *et al.*, 2001a].

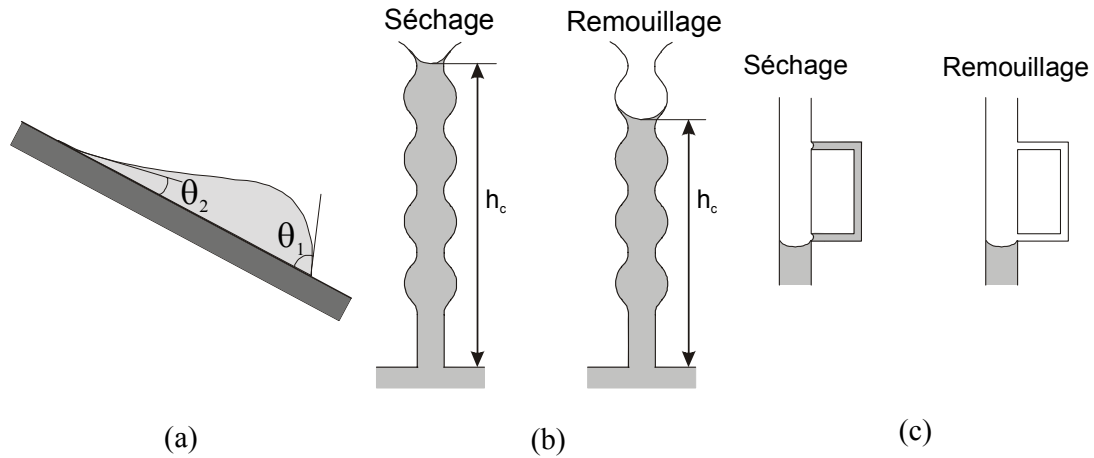


Figure 2.13: Causes du phénomène d'hystérésis : a) Goutte d'eau – b) Effet goulot – c) Connexion en parallèle

Il est donc nécessaire de définir la courbe de pression capillaire selon que le fluide mouillant est chassé ou non. Les ingénieurs réservoirs appellent les chemins correspondant à l'expulsion du fluide mouillant un chemin de drainage et le cas contraire un chemin d'imbibition. En mécanique des sols non-saturés, on parlera plutôt respectivement de chemin de séchage (dessiccation) et de mouillage (humidification) par référence à sa teneur en eau.

Ce point de vocabulaire nous amène naturellement à préciser les notions que nous venons de développer selon une approche de géotechnicien ou d'ingénieur réservoir.

#### 4.1.1. APPROCHE DES SOLS NON-SATURES

Dans les sols non-saturés, les pores sont remplis par l'eau et l'air. L'eau se trouve sous ses formes liquide et vapeur. L'air est présent dans la phase gazeuse et également dissous dans l'eau. Dans ce paragraphe, nous ne tiendrons pas compte de la présence de vapeur d'eau ni d'air dissous car cela fera l'objet du paragraphe 5. L'eau est le fluide mouillant et la pression capillaire s'écrit donc :

$$p_c = p_a - p_w \quad (2.77)$$

où  $p_a$  et  $p_w$  sont respectivement les pressions d'air et d'eau.

A côté du terme pression capillaire, le terme de succion est de plus en plus utilisé en mécanique des sols. Dans la suite de ce travail, nous considérons que la notion de succion (initialement introduite par les agronomes qui travaillaient sous contrainte nulle) est un concept qui inclut la pression capillaire mais également d'autres phénomènes. En fait, le potentiel total de l'eau dans un milieu poreux non saturé peut

être défini comme l'énergie nécessaire pour extraire de l'eau d'un sol non-saturé (en condition isotherme) et la porter dans un état de référence. Ce potentiel total comporte quatre composantes [REVIEW PANEL, 1965]:

$$\psi = \psi_g + \psi_p + \psi_m + \psi_o \quad (2.78)$$

où  $\psi_g$  est le potentiel gravitaire,  $\psi_p$  est le potentiel de pression externe,  $\psi_m$  est le potentiel matriciel et  $\psi_o$  est le potentiel osmotique.

En pratique, nous pouvons définir la succion totale  $s_T$  comme un potentiel de signe opposé. La succion comprend deux contributions : la succion matricielle  $s$  ( $= -\psi_m$ ) et la succion osmotique  $\pi$  ( $= -\psi_o$ ).

La succion matricielle est liée au phénomène capillaire et correspond à la définition de la pression capillaire (2.77). La succion osmotique est pour sa part liée à des différences de concentrations de solutions et correspond à la pression osmotique :

$$\pi = -\frac{\rho_w RT}{M_w} \ln x_w \quad (2.79)$$

avec  $x_w$  la fraction molaire de l'eau dans la solution.

Ces différentes notions relatives à la succion ont été abondamment étudiées, notamment par [LI, 2000].

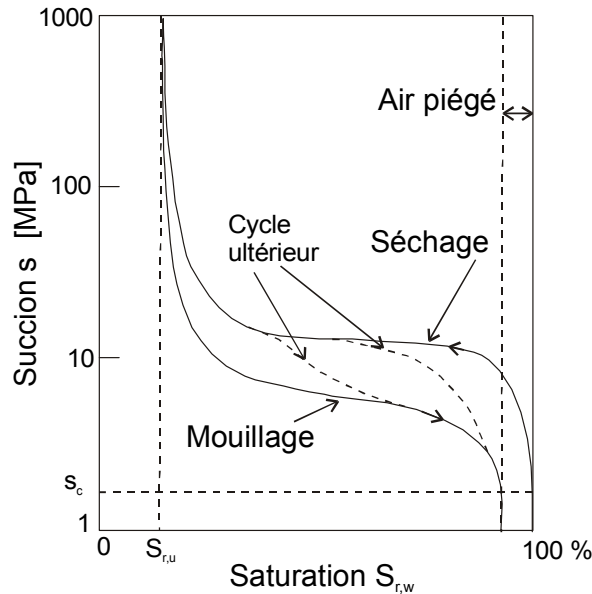


Figure 2.14: Courbes de rétention typique

La relation entre la succion totale et la saturation en eau  $S_{r,w}$  est appelée courbe de rétention. Cette courbe peut être définie théoriquement, pour la succion matricielle, en se basant sur une distribution supposée des pores et sur la loi de Jurin. Mais les courbes

expérimentales peuvent différer de ces courbes théoriques. Des expressions empiriques ou semi-empiriques sont dès lors définies à partir des observations et mesures expérimentales.

Une courbe de rétention typique est définie à la figure 2.14. Deux paramètres peuvent être définis : la pression d'entrée d'air et la saturation résiduelle. La pression d'entrée d'air  $s_c$  est en fait la succion à partir de laquelle un sol commence à se dessécher et à être envahi par l'air. La saturation résiduelle  $S_{r,u}$  correspond à la quantité d'eau qu'il est impossible d'extraire du sol, quelle que soit la succion appliquée.

Les phénomènes d'hystérésis des effets capillaires nécessitent la définition de deux courbes de rétention différentes en séchage et remouillage. Sur la figure 2.14 sont représentées les courbes correspondant au premier séchage et re-mouillage ainsi que celles des cycles ultérieurs. Lors du chemin de remouillage, une partie de l'air peut rester piégée et la saturation maximale ne peut être atteinte. A très fortes succions, les phénomènes d'hystérésis disparaissent. En effet, à ces très faibles saturations, l'eau restante est fortement liée aux grains solides et est moins influencée par les phénomènes capillaires. Dès lors, à fortes succions, les courbes de séchage et de mouillage se rejoignent.

Il est à noter que la dimension de la succion est celle d'une pression  $[F.L^{-2}]$ . Elle est également parfois exprimée en  $pF$ . Cette unité revient à exprimer la succion par le logarithme en base 10 de la hauteur d'eau équivalente en cm

$$pF = \log_{10} h_c \text{ avec } h_c \text{ exprimé en cm d'eau.}$$

Nous avons donc  $pF\ 1 = 1\text{ kPa}$ ,  $pF\ 3 = 100\text{ kPa}$ ,  $pF\ 4 = 1\text{ MPa}$ , ...

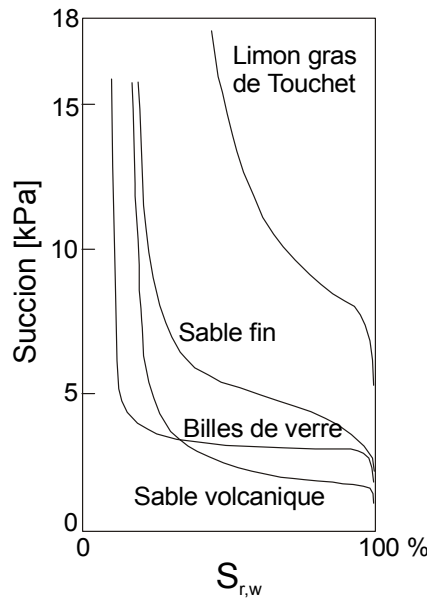


Figure 2.15: Courbe de rétention de quatre matériaux d'après Brooks et Corey (1964)



La distribution granulométrique influence la courbe de rétention. La figure 2.15 donne l'exemple de quatre matériaux. Les matériaux les mieux classés, dont la distribution des pores est très serrée, se dessècheront rapidement lorsque la succion appliquée atteindra la valeur correspondant au rayon des pores (par exemple, les billes de verre à la figure 2.15). La courbe de rétention correspondante passera rapidement de l'état saturé à la saturation résiduelle. Certains auteurs ([DELAGÉ *et al.*, 1995],[CUI, 1993]) interprètent d'ailleurs les courbes porosimétriques d'injection au mercure afin d'obtenir une courbe de rétention.

Parmi les expressions semi-empiriques de courbe de rétention, Brooks et Corey ont proposé la relation suivante :

$$S_e = \left( \frac{s_c}{s} \right)^{\lambda_{BC}} \quad \text{si } s > s_c \quad (2.80)$$

où  $S_e = \frac{S_{r,w} - S_{r,u}}{1 - S_{r,u}}$  est la saturation efficace.

Cette relation se fonde sur l'observation que la saturation efficace  $S_e$  varie linéairement en fonction de la succion dans un plan bi logarithmique. La pente de cette droite définit l'indice de distribution des pores  $\lambda_{BC}$  (*pore-size distribution index*). Cette expression est intéressante car elle ne requiert pas beaucoup de paramètres.

La température semble avoir très peu d'influence sur la courbe de rétention bien que la tension superficielle des fluides dépende de cette dernière.

Les modèles d'écoulement non-saturé découlent des lois définies en conditions saturées. En fait, la loi de Darcy reste valable pour des pressions d'eau négatives à condition d'adapter le coefficient de perméabilité [FREDLUND *et al.*, 1993].

$$\underline{q}_w = - \frac{K_w(S_{r,w})}{\rho_w \cdot g} \cdot [\underline{grad}(p_w) + \rho_w \cdot g \cdot \underline{grad}(y)] \quad (2.81)$$

La loi de Darcy a été établie pour décrire l'écoulement de liquide dans un milieu poreux. Nous utiliserons également cette loi pour l'air car elle reste valable pour un gaz à condition que les gradients ne soient pas trop élevés.

$$\underline{q}_a = - \frac{K_a(S_{r,a})}{\rho_a \cdot g} \cdot [\underline{grad}(p_a) + \rho_a \cdot g \cdot \underline{grad}(y)] \quad (2.82)$$

La composante gravitaire de ce flux d'air est généralement négligeable par rapport au gradient de pression.

La succion influence en effet la perméabilité : les pores désaturés ne constituent plus un chemin d'écoulement pour l'eau et la perméabilité s'en trouve affectée. Suivant les auteurs, la perméabilité en conditions non-saturées est exprimée en fonction soit de la saturation (ou de la teneur en eau), soit de la succion. Il est généralement observé que

la perméabilité à un fluide augmente avec le degré de saturation [DELAGE, 1987] (figure 2.16). Des phénomènes d'hystérésis se marquent également sur les courbes de perméabilité. Si la perméabilité est exprimée en fonction de la succion, il sera nécessaire de définir une courbe pour les différents chemins hydriques possibles. Toutefois, ces effets d'hystérésis ne se marquent quasiment pas quand la perméabilité est exprimée en fonction de la saturation [FREDLUND *et al.*, 1993].

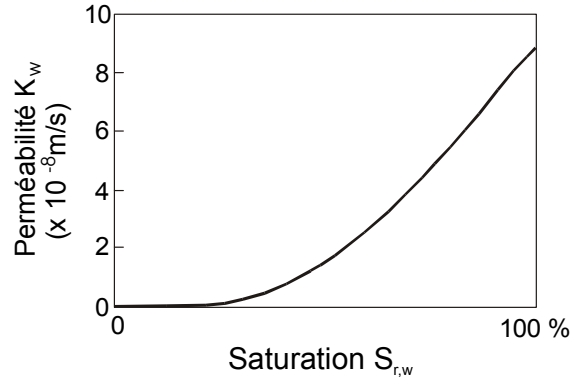


Figure 2.16: Courbe de perméabilité pour un sol non saturé

Nous citons pour exemple les relations semi-empiriques de Brooks et Corey, sachant qu'il en existe bien d'autres. Les perméabilités à l'eau  $k_w$  et à l'air  $k_a$  dépendent de la saturation efficace et de l'indice de distribution des pores:

$$K_w = K_{sat} \cdot (S_e)^{\frac{2+3\lambda_{BC}}{\lambda_{BC}}} \text{ si } s > s_c \quad (2.83)$$

$$K_w = K_{sat} \text{ si } s < s_c$$

$$K_a = K_{sat} \cdot (1 - S_e)^2 \cdot \left( 1 - S_e^{\frac{2+\lambda_{BC}}{\lambda_{BC}}} \right) \quad (2.84)$$

où  $K_{sat}$  est la perméabilité à l'eau du milieu en conditions saturées.

#### 4.1.2. APPROCHE PETROLIERE

Dans les réservoirs que nous allons modéliser, nous supposerons la présence de deux fluides : l'huile et l'eau. Les réservoirs sont généralement mouillables à l'huile et il y a en fait peu de réservoirs mouillables à l'eau. En ingénierie pétrolière, le terme de succion n'est pas utilisé et l'on définit la pression capillaire suivant:

$$p_c = p_o - p_w \quad (2.85)$$

où  $p_o$  et  $p_w$  sont respectivement les pressions d'huile et d'eau.

Une discussion sur la différence entre succion et pression capillaire sera faite dans le chapitre IV afin d'expliquer le phénomène responsable de la sensibilité à l'eau de la craie.

La courbe de pression capillaire définit la relation entre la saturation d'eau et la pression capillaire. La figure 2.17 représente une courbe typique illustrant également le

phénomène d'hystérésis avec une courbe d'imbibition et une courbe de drainage. Dans ces courbes, trois caractéristiques peuvent être définies : la pression d'entrée  $p_{cb}$  qui représente la pression capillaire nécessaire pour l'entrée du liquide non-mouillant et les saturations irréductibles (ou critiques)  $S_{wc}$  et  $S_{oc}$  qui représentent respectivement la saturation de l'eau et de l'huile en dessous de laquelle il n'est pas possible de descendre.

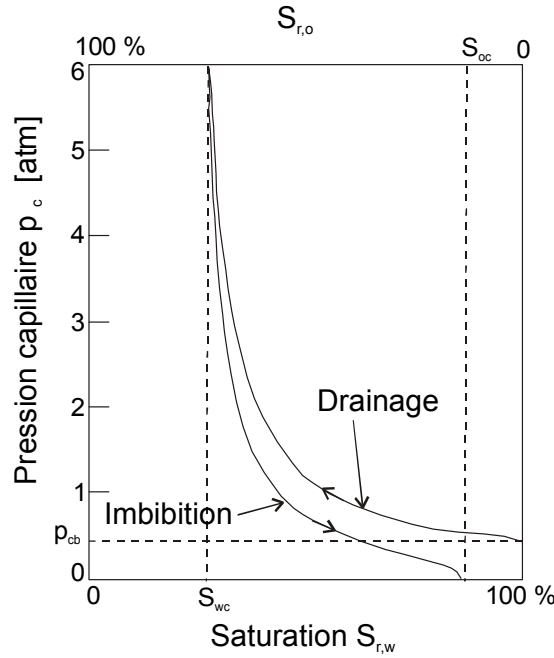


Figure 2.17: Courbe de pression capillaire typique

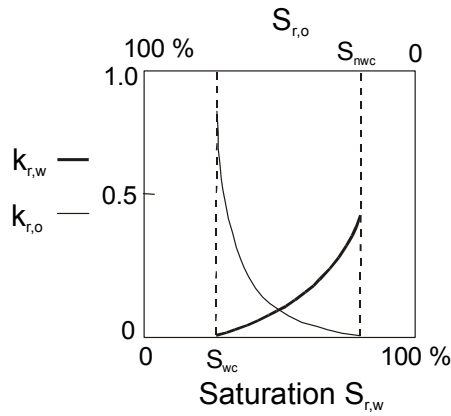


Figure 2.18: Courbes de perméabilité typique

Les écoulements des deux fluides non-miscibles sont modélisés par l'équation de Darcy généralisée où la perméabilité est adaptée aux conditions non-saturées. La notion de perméabilité relative est alors introduite comme le rapport entre la perméabilité en conditions non-saturées et la perméabilité en conditions saturées.

$$k_{r,w} = \frac{k_w}{k_{int}^{sat}} \text{ et } k_{r,o} = \frac{k_o}{k_{int}^{sat}} \quad (2.86)$$

Les perméabilités relatives sont fonction de la saturation. La figure 2.18 montre des courbes classiques de perméabilité relative : il n'y a plus de déplacement d'eau ( $k_{r,w} = 0$ ) pour des saturations en eau inférieures à  $S_{wc}$  ni de déplacement d'huile ( $k_{r,o} = 0$ ) pour des saturations en eau supérieures à  $S_{oc}$ .

Les flux d'eau et d'huile sont alors définis par les relations suivantes :

$$\underline{q}_w = -\frac{k_{r,w} \cdot k_{int}^{sat}}{\mu_w} \cdot [\underline{grad}(p_w) + \rho_w \cdot g \cdot \underline{grad}(y)] \quad (2.87)$$

$$\underline{q}_o = -\frac{k_{r,o} \cdot k_{int}^{sat}}{\mu_o} \cdot [\underline{grad}(p_o) + \rho_o \cdot g \cdot \underline{grad}(y)] \quad (2.88)$$

En ingénierie des réservoirs, le concept d'écoulement de type piston est très souvent utilisé. En effet, les matériaux constituant les formations des réservoirs possèdent une courbe de pression capillaire très raide, passant pour une faible variation de pression capillaire d'un état saturé en huile à un état saturé en eau. La zone de transition entre ces deux états est relativement limitée et on peut la supposer nulle en regard des dimensions des modèles étudiés.

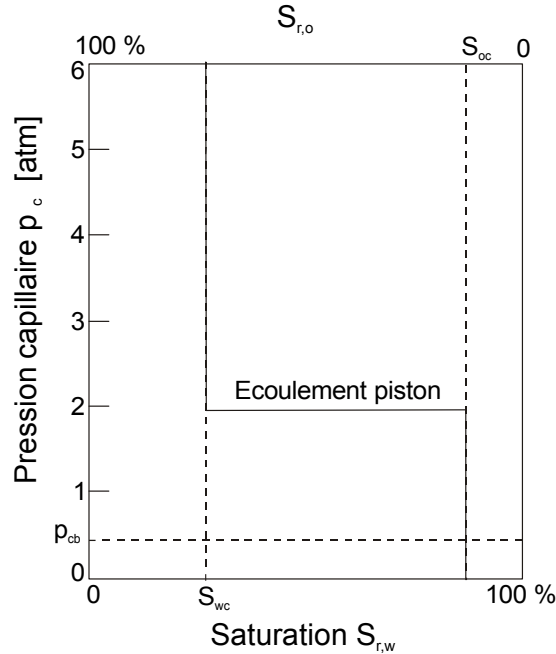


Figure 2.19: Courbe de pression capillaire idéalisée

Ainsi, lors de l'injection d'eau dans un réservoir saturé en huile, il va se développer une zone quasi-saturée en eau (où l'huile est immobile) et une autre en huile (où l'eau est immobile). A la limite des deux régions, un front d'eau apparaît se déplaçant tel un piston. La figure 2.19 présente une courbe de rétention modélisant un

écoulement de type piston. Ce genre de courbe idéalisée permet de développer des modèles simplifiés où un seul fluide, de composition variable, est modélisé ce qui amène à des économies de temps de calcul.

Dans les réservoirs règnent des conditions de pression et de température nettement différentes des conditions standards. Les propriétés des fluides sont le plus souvent données en conditions standards et non en conditions réservoirs. C'est pourquoi un facteur de volume (*formation volume factor*) est défini comme le rapport entre le volume  $U_{\alpha,s}$  d'un fluide  $\alpha$  en conditions standards (pression standard = 1 atm et température standard = 15,6 °C) et le volume  $U_\alpha$  à la pression et température du réservoir.

$$B_\alpha = \frac{U_\alpha(p, T)}{U_{\alpha,s}} \quad (2.89)$$

La masse volumique en conditions réservoirs peut ainsi être déterminée à partir de sa valeur en conditions standards:

$$\rho_\alpha(p, T) = \frac{\rho_{\alpha,s}}{B_\alpha} \quad (2.90)$$

#### 4.2. Conservation de la masse des fluides

Les équations de bilan que nous avons développées précédemment restent valables pour l'écoulement non-saturé (équation 2.52). Nous écrirons donc ces relations pour chaque phase  $\alpha$  présente dans les pores.

Dans les simulations de réservoir, les deux phases seront la phase huile et la phase eau. En mécanique des sols non-saturés, nous aurons une phase eau et une phase air. Dans ce paragraphe, pour plus de généralité, nous considérerons deux phases fluides  $L$  et  $G$  et une phase solide  $S$ .

Le terme d'emmagasinement doit être modifié pour tenir compte des conditions de saturation, il est défini par la relation suivante :

$$S_\alpha = \rho_\alpha \cdot \theta_\alpha = \rho_\alpha \cdot n \cdot S_{r,\alpha} \quad (2.91)$$

où  $\rho_\alpha$  est la masse volumique de la phase  $\alpha$  et  $\theta_\alpha$  est la teneur volumique de cette même phase, sachant que la saturation doit vérifier la relation suivante:

$$\sum_\alpha S_{r,\alpha} = 1 \quad (2.92)$$

Chaque phase fluide est composée d'une seule espèce chimique et le flux non advectif n'existe donc pas. Le flux massique de fluide  $\underline{V}_\alpha$  s'écrit alors :

$$\underline{V}_\alpha = \rho_\alpha \cdot \underline{q}_\alpha \quad (2.93)$$

où  $\underline{q}_\alpha$  est la vitesse moyenne du fluide de la phase  $\alpha$  par rapport à la phase solide. Cette vitesse doit être adaptée aux conditions de saturation partielle.

#### 4.3. Ecoulement des fluides

L'équation de Darcy modélise la vitesse macroscopique du fluide (volume de fluide par unité de temps, par unité de surface de sol) par rapport à la phase solide et s'écrit en la généralisant au milieu non-saturé pour une phase fluide  $\alpha$  :

$$\underline{q}_\alpha = -\frac{\underline{K}_\alpha}{\rho_\alpha \cdot g} \cdot [\underline{grad}(p_\alpha) + \rho_\alpha \cdot g \cdot \underline{grad}(y)] \quad (2.94)$$

où  $\underline{K}_\alpha$  est le tenseur de perméabilité et  $y$  est la coordonnée verticale positive vers le haut.

En introduisant la perméabilité intrinsèque et la notion de perméabilité relative, cette dernière équation devient:

$$\underline{q}_\alpha = -\frac{k_{int}^{sat} \cdot k_{r,\alpha}}{\mu_\alpha} \cdot [\underline{grad}(p_\alpha) + \rho_\alpha \cdot g \cdot \underline{grad}(y)] \quad (2.95)$$

où  $k_{r,\alpha}$  est la perméabilité relative de la phase  $\alpha$ .

Dans cette équation, des couplages existent entre la thermique et le problème écoulement ; en effet, les propriétés des fluides dépendent de la température. Mais un couplage supplémentaire est créé de part la présence de deux fluides : la perméabilité est une fonction de la saturation qui dépend de la succion. Cela signifie que la pression d'un fluide influencera l'écoulement de l'autre phase.

#### 4.4. Emmagasinement des fluides

L'emmagasinement des fluides s'exprime par une relation proche de celle utilisée en milieu saturé, que nous modifions de manière à tenir compte de la saturation partielle. La variation d'emmagasinement dépendra donc des modifications de pression, des déformations volumiques mais également des variations de saturation.

Considérons un volume de référence  $V$ , la variation d'emmagasinement s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(S_\alpha \cdot V) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha \cdot \theta_\alpha \cdot V) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha \cdot n \cdot S_{r,\alpha} \cdot V) \quad (2.96)$$

pour chaque phase fluide  $\alpha$ .

Après quelques développements [COLLIN, 1998], il est possible d'exprimer la variation d'emmagasinement de la phase fluide  $\alpha$ .

$$\dot{S}_\alpha = \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} \cdot n \cdot S_{r,\alpha} + \rho_\alpha \cdot \dot{\varepsilon}_V \cdot S_{r,\alpha} + \rho_\alpha \cdot n \cdot \left[ \frac{\partial S_{r,\alpha}}{\partial (p_G - p_L)} \right] \cdot (\dot{p}_G - \dot{p}_L) \quad (2.97)$$

où le troisième terme correspond à la modification de fluide emmagasiné suite à des variations de saturation.

#### 4.5. Conservation de la chaleur

En supposant que les différentes phases du milieu (phase solide + deux phases fluides) sont à la même température, l'équation de conservation de l'enthalpie peut toujours s'écrire selon la relation (2.65).

La quantité de chaleur emmagasinée dépend de l'enthalpie des différentes phases composant le système:

$$H_m = \sum_{\alpha=L,G,S} H_\alpha = \sum_{\alpha} \theta_\alpha \cdot \rho_\alpha \cdot c_{p,\alpha} \cdot (T - T_0) \quad (2.98)$$

où  $\rho_\alpha$ ,  $\theta_\alpha$  et  $c_{p,\alpha}$  sont respectivement la masse volumique, la teneur volumique et la capacité thermique de la phase  $\alpha$  (deux phases fluides + une phase solide) et  $T_0$  est une température de référence.

Le flux de chaleur  $\underline{V}_T$  possède deux composantes : une partie de conduction de la chaleur et une partie liée à la quantité de chaleur transportée par les différentes phases.

$$\underline{V}_T = \underline{i}_{cond} + \sum_{\alpha=L,G,S} H_\alpha \cdot \underline{q}_\alpha^{eff} \quad (2.99)$$

où  $\underline{i}_{cond}$  est le flux de conduction et  $\underline{q}_\alpha^{eff}$  est la vitesse effective de la phase  $\alpha$  par rapport à la phase solide.

#### 4.6. Transfert de la chaleur par unité de volume

Les deux modes de transfert de chaleur peuvent être représentés par des équations similaires au paragraphe 3. La conduction est définie par une loi générale de Fourier en utilisant une conductibilité thermique  $\Gamma_m$  qui dépend des caractéristiques des composants du milieu. Sur base d'un modèle simple de conduction en parallèle entre les différentes phases, la conductibilité peut être définie par la relation suivante :

$$\Gamma_m = n \cdot S_{r,L} \cdot \Gamma_L + n \cdot S_{r,G} \cdot \Gamma_G + (1 - n) \cdot \Gamma_s \quad (2.100)$$

où nous considérons deux phases fluides  $L$  et  $G$  et une phase solide  $S$ .

Toutefois, des relations semi-empiriques existent également. Par exemple, on peut exprimer la conductibilité comme une fonction de la saturation :

$$\Gamma_m = a' \cdot S_{r,w} + b' \quad (2.101)$$

où  $a'$  et  $b'$  sont deux constantes à déterminer sur base de mesures expérimentales de la conductibilité.

La convection de chaleur par le fluide en mouvement dépend de la vitesse effective qui est liée à la vitesse de Darcy par la relation suivante [BURGER *et al.*, 1985] :

$$\underline{q}_{\alpha}^{eff} = \frac{\underline{q}_{\alpha}}{n.S_{r,\alpha}} \quad (2.102)$$

Nous pouvons donc résumer ces deux modes de transfert dans l'équation suivante :

$$\underline{V}_T = \underbrace{-\Gamma_m \cdot \underline{\nabla} T}_{conduction} + \underbrace{(\rho_L \cdot c_{p,L} \cdot \underline{q}_L + \rho_G \cdot c_{p,G} \cdot \underline{q}_G)}_{convection} \cdot (T - T_0) \quad (2.103)$$

Par rapport au cas précédent (paragraphe 3), la présence d'un second fluide induit un nouveau terme de convection. Cette dernière reste le principal couplage de l'écoulement des fluides sur le transfert de chaleur.

#### 4.7. Quantité de chaleur emmagasinée par unité de volume

La quantité d'enthalpie du système est définie comme la somme des contributions de chaque phase du système: un fluide  $L$ , un fluide  $G$  et la phase solide  $S$ .

$$\begin{aligned} H_L &= n.S_{r,L} \cdot \rho_L \cdot c_{p,L} \cdot (T - T_0) \\ H_G &= n.S_{r,G} \cdot \rho_G \cdot c_{p,G} \cdot (T - T_0) \\ H_S &= (1 - n) \cdot \rho_s \cdot c_{p,s} \cdot (T - T_0) \end{aligned} \quad (2.104)$$

Nous pouvons donc exprimer les variations de chaleur emmagasinée pour un volume de référence  $V$  afin de tenir compte d'éventuelles déformations volumiques :

$$\frac{\partial}{\partial t}(S_T \cdot V) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sum_{\alpha=L,G} n.S_{r,\alpha} \cdot \rho_{\alpha} \cdot c_{p,\alpha} \cdot (T - T_0) \cdot V + (1 - n) \cdot \rho_s \cdot c_{p,s} \cdot (T - T_0) \cdot V \right] \quad (2.105)$$

Nous ne développerons pas plus en détails cette équation (voir [COLLIN, 1998]). L'emmagasinement de chaleur dépend des variations de température, des déformations volumiques et des modifications de saturation.

## 5. MILIEU ANISOTHERME SATURE PAR DEUX FLUIDES AVEC CHANGEMENT DE PHASE

Dans un milieu anisotherme, il peut être nécessaire de prendre en compte les variations de l'équilibre liquide - vapeur d'un fluide. Le changement de phase rend très complexe le problème à traiter. Nous nous limitons donc dans cette partie du travail au couple de fluides eau-air dans le but de résoudre des problèmes liés au stockage de déchets. Sous des élévations de température, une proportion de l'eau se transforme de liquide en vapeur et passe dans la phase gazeuse.



Les équations à résoudre sont plus compliquées parce que, d'une part, il faut établir les relations d'équilibre entre l'eau liquide et sa vapeur, et modifier l'équation de bilan thermique pour tenir compte de l'énergie nécessaire au changement d'état. D'autre part, la phase gazeuse constitue à présent un mélange de deux gaz : la vapeur d'eau et l'air sec. L'équation d'écoulement de la phase gazeuse sera modifiée et des flux diffusifs apparaîtront en son sein, dus à des différences de concentrations des deux constituants.

Les premiers travaux sur les transferts hydriques sous forme de vapeur dans un milieu poreux sont dus à Philip et de Vries [PHILIP *et al.*, 1957] ; ils ont servi de base aux développements de Milly [MILLY, 1982] qui a établi les équations de l'écoulement de l'eau et du transfert de chaleur dans des milieux non-homogènes. Les différentes phases du milieu sont supposées être en équilibre thermique en tout point (elles ont donc toutes trois la même température) ; une seule équation de transfert et de bilan thermique est donc nécessaire. Il faut toutefois étudier les transferts par convection de chaque constituant (et non de chaque phase uniquement) car des flux diffusifs existent au sein de chaque phase. La plupart des modèles considèrent que la pression de gaz reste constante mais Pollock [POLLOCK, 1986] a développé les équations de bilan de gaz afin de traiter des problèmes où la pression de gaz varie. Plus récemment, ces travaux ont constitué la base de recherches pour des problèmes dans les milieux salins ([OLIVELLA *et al.*, 1994 et 1996] et dans le stockage de déchets nucléaires ([EWEN *et al.*, 1989], [THOMAS *et al.*, 1995] entre autres). Dans la problématique des barrières argileuses, le rapport final d'un projet européen relatif à ce sujet ([VOLCKAERT *et al.*, 1996] constitue une référence remarquable des points de vue expérimental et numérique.

Un autre aspect également abordé dans ce travail est celui de l'air dissous dans l'eau. En effet, lorsqu'un gaz est en contact avec un liquide, une quantité de gaz peut se dissoudre dans celui-ci. En se limitant au couple eau – air, nous avons modélisé le volume d'air dissous dans l'eau à l'aide de la loi de Henry (équation 2.41). Notre modèle est toutefois simplifié car nous négligeons l'influence de cet air dissous sur les propriétés de l'eau. De plus, nous négligerons également les flux diffusifs au sein de la phase liquide car ils sont supposés faibles en regard du flux convectif de la phase liquide.

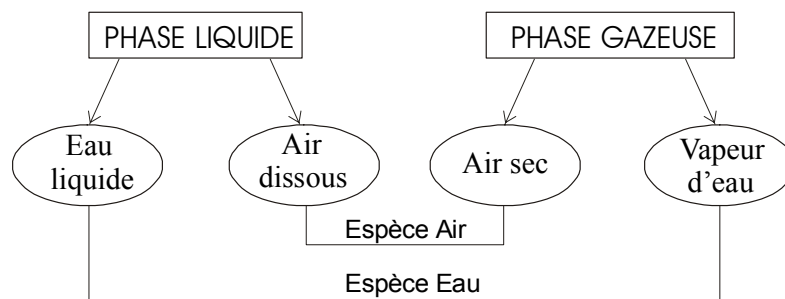


Figure 2.20: Définition des phases et des espèces chimiques

Les différents constituants chimiques de notre système sont donc l'eau liquide, la vapeur d'eau, l'air sec et l'air dissous. Ainsi, chaque phase (liquide et gazeuse) est

constituée d'un mélange de deux constituants et chaque espèce chimique (eau et air) se trouve dans les deux phases sous des états différents (figure 2.20).

Deux options sont possibles afin d'écrire les équations de bilan : nous exprimons la conservation de masse soit de chaque phase soit de chaque espèce chimique présente dans le système. La première option présente l'avantage que les flux non-advectifs (loi de diffusion de Fick) de chaque espèce à l'intérieur d'une phase vont s'annuler [BEAR, 1972]. La seconde approche, ou approche des composants [PANDAY *et al.*, 1989], [OLIVELLA *et al.*, 1994], correspond à écrire l'équation de conservation d'une même espèce chimique quelle que soit la phase où elle est présente. Cette approche présente l'avantage que les termes d'échanges entre phase vont s'annuler, ce qui est particulièrement intéressant lorsque l'équilibre entre chaque phase est supposé. Cette dernière approche sera utilisée dans la suite de ce travail.

### 5.1. Conservation de la masse d'eau

Nous pouvons écrire les équations de bilan de l'eau qui se trouve dans son état liquide (2.106) et sous forme de vapeur (2.107). Nous les regroupons ensuite dans une seule équation selon l'approche des composants que nous avons choisie.

$$\dot{S}_w + \text{div}(\underline{V}_w) + \dot{E}_{H_2O}^{w \rightarrow v} - Q_w = 0 \quad (2.106)$$

$$\dot{S}_v + \text{div}(\underline{V}_v) - \dot{E}_{H_2O}^{w \rightarrow v} - Q_v = 0 \quad (2.107)$$

où  $S_i$  représente la quantité de fluide emmagasiné,  $\underline{V}_i$  le flux massique de fluide,  $E_{H_2O}^{w \rightarrow v}$  la masse de d'eau liquide transformée en vapeur et  $Q_i$  une source de fluide.

Le terme d'emmagasinement est défini par la relation suivante :

$$S_i = \rho_i \cdot \theta_i \quad (2.108)$$

où  $\rho_i$  est la masse volumique,  $\theta_i$  est la teneur volumique qui pour l'eau liquide vaut  $\theta_w = n \cdot S_{r,w}$  et pour la vapeur d'eau  $\theta_v = n \cdot S_{r,g}$ .

Le flux massique de fluide  $\underline{V}_i$  possède en toute généralité deux composantes [OLIVELLA *et al.*, 1994] : une partie advective qui représente le mouvement de l'ensemble de la phase et une partie non-advective qui correspond à la diffusion (loi de Fick) du fluide au sein de la phase. La phase liquide est composée d'eau liquide et d'air dissous mais nous avons décidé de négliger la diffusion d'air dissous. Le flux d'eau liquide ne comprend donc pas de flux non-advectif. La vapeur d'eau est un des constituant de la phase gazeuse. Les mouvements de vapeur sont liés à l'écoulement de la phase gazeuse dans son ensemble et à la diffusion de vapeur au sein de la phase gazeuse.

$$\underline{V}_w = \rho_w \cdot \underline{q}_l \quad (2.109)$$

$$\underline{V}_v = \rho_v \cdot \underline{q}_g + \underline{i}_v \quad (2.110)$$

où  $\underline{q}_l$  et  $\underline{q}_g$  sont les vitesses moyennes des phases liquide et gazeuse par rapport à la phase solide et  $\underline{i}_v$  est le flux de vapeur non advectif.

Les deux équations de bilan (2.106) et (2.107) peuvent être regroupées dans une seule équation où le terme d'évaporation disparaît. En incluant les relations (2.108) à (2.110), nous obtenons:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_w \cdot n \cdot S_{r,w}) + \text{div}(\rho_w \cdot \underline{q}_l) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho_v \cdot n \cdot S_{r,g}) + \text{div}(\underline{i}_v) + \text{div}(\rho_v \cdot \underline{q}_g) - Q_v - Q_w = 0 \quad (2.111)$$

## 5.2. Ecoulement de l'eau

L'équation de Darcy modélise la vitesse macroscopique de la phase liquide (volume de fluide par unité de temps et par unité de surface de sol) par rapport à la phase solide et s'écrit en généralisant au milieu non-saturé:

$$\underline{q}_l = -\frac{\underline{K}_w}{\rho_w \cdot g} \cdot [\underline{\text{grad}}(p_w) + \rho_w \cdot g \cdot \underline{\text{grad}}(y)] \quad (2.112)$$

où  $\underline{K}_w$  est le tenseur de perméabilité et  $y$  est la coordonnée verticale positive vers le haut.

En introduisant la perméabilité intrinsèque et la notion de perméabilité relative, cette dernière équation devient:

$$\underline{q}_l = -\frac{k_{int}^{sat} \cdot k_{r,w}}{\mu_w} \cdot [\underline{\text{grad}}(p_w) + \rho_w \cdot g \cdot \underline{\text{grad}}(y)] \quad (2.113)$$

où  $k_{r,w}$  est la perméabilité relative de l'eau liquide.

En toute rigueur, ce ne sont pas les propriétés de l'eau qu'il faudrait utiliser dans cette relation mais les propriétés du mélange eau-air dissous. Mais nous avons supposé que la perméabilité à l'eau, la viscosité et la masse volumique de l'eau restent inchangées.

Le flux non-advectif de vapeur d'eau est généralement modélisé par une loi de diffusion de Fick qui lie les écoulements aux gradients des concentrations. Nous avons ici un mélange de deux gaz (l'air sec et la vapeur d'eau), au sein duquel les flux diffusifs possèdent la propriété suivante :

$$\sum_j \underline{i}_j = 0 \quad (2.114)$$

Ecrivant des équations de bilan en masse, nous pouvons exprimer la loi de Fick sous la forme d'un flux massique:

$$\dot{i}_v = -D_v \cdot \rho_g \cdot \text{grad} \omega_v \quad (2.115)$$

où  $D_v$  est le coefficient de diffusion moléculaire de la vapeur d'eau dans l'air et  $\omega_v = \rho_v / \rho_g$  est la teneur massique de vapeur dans le mélange. Nous avons négligé dans notre formulation la dispersion mécanique de la vapeur d'eau.

La vapeur d'eau ne joue pas un rôle important pour de très faibles valeurs de teneur en eau ni pour des états proches de la saturation. En effet, pour avoir des transferts de vapeur, il faut avoir suffisamment d'eau disponible ; celle-ci ne doit pas se trouver uniquement sous la forme d'eau adsorbée à la surface des grains. A l'autre extrémité, lorsque la teneur en eau est importante, les pores sont essentiellement occupés par le liquide et la phase gazeuse se trouve très réduite. Cette dernière est présente sous forme de bulles qui sont rapidement saturées en vapeur et il y a donc peu de mouvements de vapeur.

Une relation équivalente à l'équation (2.115) peut être également définie pour la diffusion d'air sec. Il est facile de montrer que les coefficients de diffusion  $D_v$  et  $D_a$  sont égaux à un coefficient  $D$  en utilisant la relation (2.114) et sachant que  $\rho_g = \rho_a + \rho_v$ .

Mainguy [MAINGUY *et al.*, 1999] cite des travaux de Chapman et Enskog dans lesquels le coefficient de diffusion d'un mélange binaire idéal est déterminé à partir de la théorie cinétique des gaz et de l'équation de Boltzmann. L'expression du coefficient est la suivante :

$$D = \frac{0,00266T^{3/2}}{p_g \sqrt{M} d_{car} \Omega_D} \quad (2.116)$$

où  $D$  est exprimé en  $\text{cm}^2/\text{s}$ ,  $T$  est la température en Kelvin,  $p_g$  est la pression totale du mélange en bar,  $M_i$  est la masse molaire du constituant gazeux  $i$  (kg/mol),  $M = 2M_1M_2 / (M_1 + M_2)$ ,  $d_{car}$  est une distance caractéristique en Angström et  $\Omega_D$  est une intégrale de collision.

Cette relation montre que le coefficient de diffusion dépend essentiellement de la température et de la pression de gaz. Pour notre modèle, nous utiliserons une formule empirique proposée par Philip et de Vries (1957) basée sur des travaux de Krisher et Rohnalter, qui est valable pour des températures comprise entre 20 et 70°C :

$$D = 5,893 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{T^{2,3}}{p_g} \quad (2.117)$$

où  $D$  est exprimé en  $\text{m}^2/\text{s}$ ,  $T$  est la température en Kelvin,  $p_g$  est la pression totale du mélange en Pascal.

L'équation (2.115) doit être modifiée car la diffusion se déroule dans un milieu poreux. La vapeur se déplace uniquement dans les pores occupés par la phase gazeuse et le trajet qu'elle parcourt dépend de la tortuosité :

$$\underline{i}_v = -n.S_{r,g}.\tau.D.\rho_g.\underline{grad}\omega_v \quad (2.118)$$

où  $\tau$  est la tortuosité du milieu. Elle est définie ici comme le carré du rapport entre la distance en ligne droite et la distance réellement parcourue par le fluide entre deux points. Cette valeur est donc égale ou inférieure à l'unité. Il faut noter que cette définition de la tortuosité est l'inverse de la définition utilisée dans les travaux de Kozeni et Carman [BEAR, 1972].

Cette relation devient, sous l'hypothèse d'une pression de gaz constante, la formulation proposée par Philip et de Vries (1957):

$$\underline{i}_v = -n.S_{r,g}.\tau.D.\underline{grad}(\rho_v) \quad (2.119)$$

Voulant rester dans un contexte général où la pression de gaz peut varier, nous utiliserons donc la formulation (2.118) du flux de vapeur. Il est donc nécessaire de calculer le gradient de la teneur massique de vapeur :

$$\underline{grad} \frac{\rho_v}{\rho_g} = \frac{\rho_g.\underline{grad}\rho_v - \rho_v.\underline{grad}(\rho_v + \rho_a)}{\rho_g^2} \quad (2.120)$$

Nous devons à présent calculer le gradient de la masse volumique de la vapeur d'eau et de l'air sec. Le gradient de la densité d'air sec sera formulé au paragraphe 5.5.

La masse volumique de la vapeur d'eau est donnée par l'expression thermodynamique suivante (relation 2.30) :

$$\rho_v = \rho_{v,0}.h \quad (2.121)$$

où  $\rho_{v,0}$  est la pression de vapeur d'eau saturante (relation 2.22) et  $h$  est l'humidité relative définie par la relation (2.28):

$$h = \exp\left(\frac{\psi.g}{R_v.T}\right) \quad (2.122)$$

où  $\psi$  est la succion totale,  $R_v$  est égal au rapport  $R/M_v$  et  $g$  est l'accélération de la pesanteur. En nous limitant à des effets capillaires uniquement, la succion totale  $\psi$  équivaut au potentiel matriciel (relation 2.29):

$$\psi = \frac{p_w - p_g}{\rho_w.g} \quad (2.123)$$

Nous pouvons à présent exprimer le gradient de masse volumique de vapeur en appliquant l'opérateur gradient à l'équation (2.121):

$$\underline{\nabla}\rho_v = \frac{\rho_{v,0}.g.h}{R_v.T} \underline{\nabla}\psi + \left[ h.\beta - \frac{\rho_{v,0}.\psi.g.h}{R_v.T^2} \right] \underline{\nabla}T \quad (2.124)$$

où  $\beta$  représente la dérivée de la densité de vapeur saturante par rapport à la température:

$$\beta = \frac{\partial \rho_{v,0}}{\partial T} \quad (2.125)$$

### 5.3. Emmagasinement d'eau

Ayant fait le choix d'écrire les équations de bilan par constituant, la loi d'emmagasinement de l'eau comprendra des contributions de l'eau sous formes liquide et gazeuse. Pour un volume de référence  $V$ , nous pouvons exprimer l'emmagasinement d'eau liquide et de vapeur d'eau:

$$\frac{\partial}{\partial t}(S_w.V + S_v.V) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_w.n.S_{r,w}.V + \rho_v.n.S_{r,g}.V) \quad (2.126)$$

Après quelques développements [COLLIN, 1998], il est possible d'obtenir l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \dot{S}_w + \dot{S}_v = & \rho_{w,0} \cdot \left[ \frac{\dot{p}_w}{\chi_w} - \beta_w^T \cdot \dot{T} \right] n.S_{r,w} + \rho_w \cdot \dot{\epsilon}_V.S_{r,w} + \rho_w \cdot n \cdot \left[ \frac{\partial S_{r,w}}{\partial (p_g - p_w)} \right] (\dot{p}_g - \dot{p}_w) \\ & + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} n.S_{r,g} + \rho_v \cdot \dot{\epsilon}_V.S_{r,g} + \rho_v \cdot n \cdot \left[ \frac{\partial S_{r,g}}{\partial (p_g - p_w)} \right] (\dot{p}_g - \dot{p}_w) \end{aligned} \quad (2.127)$$

où l'on observe pour l'eau liquide et la vapeur des contributions liées à des variations de masse volumique, à des déformations volumiques et à des modifications de saturation.

### 5.4. Conservation de la masse de l'air

Dans notre problème, l'air est un constituant de la phase gazeuse et se trouve également dans la phase liquide sous forme d'air dissous. Nous pouvons donc écrire les équations de bilan de l'air sec et l'air dissous:

$$\dot{S}_a + \text{div}(\underline{V}_a) + \dot{E}_{Air}^{a \rightarrow a-d} - Q_a = 0 \quad (2.128)$$

$$\dot{S}_{a-d} + \text{div}(\underline{V}_{a-d}) - \dot{E}_{Air}^{a \rightarrow a-d} - Q_{a-d} = 0 \quad (2.129)$$

où  $S_i$  représente la quantité de fluide emmagasinée,  $\underline{V}_i$  le flux massique de fluide,  $E_{Air}^{a \rightarrow a-d}$  la masse de d'air sec transformée en air dissous dans l'eau et  $Q_i$  une source de fluide.

Le terme d'emmagasinement est défini par la relation suivante :

$$S_i = \rho_i \cdot \theta_i \quad (2.130)$$

où  $\rho_i$  est la masse volumique,  $\theta_i$  est la teneur volumique du fluide.

Pour un volume unitaire, la teneur volumique d'air sec vaut  $\theta_a = n.S_{r,g}$ . La quantité d'air dissous est calculée à l'aide de la loi de Henry (2.41) à partir d'une constante  $H^s$  :

$$\theta_{a-d} = V_{a-d} = H^s(\rho_w, T).n.S_{r,w} \quad (2.131)$$

L'air sec est un constituant de la phase gazeuse. Les mouvements d'air sec sont liés à l'écoulement de la phase gazeuse dans son ensemble mais également à la diffusion d'air sec au sein du mélange. Par contre, nous avons décidé de négliger la diffusion d'air dissous au sein de la phase liquide, le flux d'air dissous comprendra donc uniquement un flux advectif du liquide dans son ensemble.

$$\underline{V}_a = \rho_a \cdot \underline{q}_g + \underline{i}_a \quad (2.132)$$

$$\underline{V}_{a-d} = \rho_a \cdot H^s \cdot \underline{q}_l \quad (2.133)$$

où  $\underline{q}_l$  et  $\underline{q}_g$  sont les vitesses moyennes des phases liquide et gazeuse par rapport à la phase solide et  $\underline{i}_a$  est le flux d'air sec non advectif.

Le coefficient de Henry intervient dans l'équation (2.133). En effet, la vitesse moyenne de la phase liquide représente le volume de liquide déplacé par unité de temps et de surface de sol. Toutefois, l'air dissous dans l'eau n'occupe qu'une partie du volume de la phase et donc la vitesse moyenne doit être minorée dans le rapport des volumes air dissous et phase liquide.

Nous regroupons à présent dans une seule relation les deux équations de bilan (2.128) et (2.129) selon l'approche des composants que nous avons choisie. Ainsi, le terme de mise en solution d'air disparaît :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho_a \cdot n \cdot S_{r,g}) + \text{div}(\rho_a \cdot \underline{q}_g) + \text{div}(\underline{i}_a) \\ & + \frac{\partial}{\partial t}(\rho_a \cdot H^s \cdot n \cdot S_{r,w}) + \text{div}(\rho_a \cdot H^s \cdot \underline{q}_l) - Q_a - Q_{a-d} = 0 \end{aligned} \quad (2.134)$$

## 5.5. Écoulement de l'air et du gaz

Utilisant l'équation de Darcy en la généralisant au milieu non-saturé, nous pouvons modéliser la vitesse macroscopique de la phase gazeuse (volume de fluide par unité de temps et par unité de surface de sol) par rapport à la phase solide:

$$\underline{q}_g = - \frac{\underline{K}_g}{\rho_g \cdot g} \cdot [\underline{\text{grad}}(p_g) + \rho_g \cdot g \cdot \underline{\text{grad}}(y)] \quad (2.135)$$

où  $\underline{K}_g$  est le tenseur de perméabilité et  $y$  est la coordonnée verticale positive vers le haut.

En introduisant la perméabilité intrinsèque et la notion de perméabilité relative, cette dernière équation devient:

$$\underline{q}_g = -\frac{k_{int}^{sat} \cdot k_{r,g}}{\mu_g} \cdot [\underline{grad}(p_g) + \rho_g \cdot g \cdot \underline{grad}(y)] \quad (2.136)$$

où  $k_{r,g}$  est la perméabilité relative au gaz.

Les propriétés de la phase gazeuse sont celles d'un mélange. La masse volumique et la viscosité sont définies à partir des propriétés des constituants (relations 2.34 et 2.37).

La vitesse de diffusion de l'air sec est liée à un gradient de la masse volumique de l'air. En utilisant la théorie de la diffusion adaptée au cas des milieux poreux, nous pouvons écrire :

$$\underline{i}_a = -n \cdot S_{r,g} \cdot \tau \cdot D \cdot \rho_g \cdot \underline{grad}(\omega_a) = -\underline{i}_v \quad (2.137)$$

où  $\omega_a = \rho_a / \rho_g$  est la teneur massique d'air sec dans le mélange gazeux.

Afin de déterminer le flux non-advectif, nous devons calculer le gradient de la teneur massique d'air sec. Ce problème est similaire au cas de la diffusion de la vapeur et en utilisant le même raisonnement, nous devons calculer le gradient de la masse volumique d'air sec. Celle-ci est définie par la relation (2.12) :

$$\rho_a(T, p_a) = \rho_{a,0} \cdot \frac{p_a}{p_{a,0}} \cdot \frac{T_0}{T} \quad (2.138)$$

où  $\rho_{a,0}$  est la masse volumique à la pression  $p_{a,0}$  et température  $T_0$  de référence.

Dans la formulation des éléments finis que nous avons choisie (voir chapitre V), les inconnues nodales sont la pression d'eau, la pression de gaz et la température. Afin de calculer le gradient de la masse volumique d'air sec, nous devons exprimer cette dernière en fonction des inconnues nodales. Appliquant la loi de Dalton (2.33), nous obtenons la relation suivante:

$$\rho_a(T, p_a) = \rho_{a,0} \cdot \frac{(p_g - p_v)}{p_{a,0}} \cdot \frac{T_0}{T} \quad (2.139)$$

Pour un gaz parfait, on peut écrire :

$$\rho_a = \frac{p_a}{R_a T} \text{ et } \rho_v = \frac{p_v}{R_v T} \quad (2.140)$$

où  $R_a$  est égal au rapport  $R/M_a$  et  $M_a$  est la masse molaire de l'air sec.

La relation (2.139) devient donc en utilisant la relation (2.140):

$$\rho_a = \frac{\rho_{a,0} \cdot T_0}{p_{a,0}} \cdot \frac{p_g}{T} - \frac{\rho_{a,0} \cdot T_0}{p_{a,0}} \cdot \frac{p_v}{T} = \frac{p_g}{R_a T} - \frac{\rho_v \cdot R_v}{R_a} \quad (2.141)$$

En appliquant l'opérateur gradient, nous obtenons le résultat suivant :



$$\nabla \rho_a = \frac{\nabla p_g}{R_a \cdot T} - \frac{p_g}{R_a \cdot T^2} \nabla T - \frac{R_v}{R_a} \nabla \rho_v \quad (2.142)$$

où le gradient de la masse volumique de la vapeur peut être calculé par la formule (2.124).

### 5.6. Emmagasinement d'air

L'air est présent dans la phase gazeuse sous forme d'air sec et dans la phase liquide sous forme d'air dissous. La loi d'emmagasinement du constituant air, pour un volume de référence  $V$ , comprendra deux contributions :

$$\frac{\partial}{\partial t} (V \cdot S_a + V \cdot S_{a-d}) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_a \cdot n \cdot S_{r,g} \cdot V + H^s \cdot \rho_a \cdot n \cdot S_{r,w} \cdot V) \quad (2.143)$$

Après certains développements ([COLLIN, 1998]), nous pouvons obtenir le taux d'emmagasinement d'air pour un volume unitaire:

$$\begin{aligned} \dot{S}_a + \dot{S}_{a-d} = & \frac{\partial \rho_a}{\partial t} \cdot n \cdot S_{r,g} + \rho_a \cdot \dot{\epsilon}_V \cdot S_{r,g} + \rho_a \cdot n \cdot \left[ \frac{\partial S_{r,g}}{\partial (p_g - p_w)} \right] (\dot{p}_g - \dot{p}_w) \\ & + H^s \cdot \frac{\partial \rho_a}{\partial t} \cdot n \cdot S_{r,w} + H^s \cdot \rho_a \cdot \dot{\epsilon}_V \cdot S_{r,w} + H^s \cdot \rho_a \cdot n \cdot \left[ \frac{\partial S_{r,w}}{\partial (p_g - p_w)} \right] (\dot{p}_g - \dot{p}_w) \end{aligned} \quad (2.144)$$

où nous retrouvons pour l'air sec et l'air dissous une contribution à l'emmagasinement liée à des variations de pression, à des déformations volumiques et des modifications de saturation.

### 5.7. Conservation de la chaleur

L'équation de conservation d'enthalpie se limite au terme de transfert de chaleur. Il faut toutefois tenir compte de la quantité d'énergie nécessaire au changement de phase de l'eau en vapeur d'eau. Les différentes phases du milieu (phase solide + deux phases fluides) sont à la même température, l'équation de conservation de l'enthalpie peut s'écrire selon la relation suivante:

$$\dot{S}_T + \dot{E}_{H_2O}^{w \rightarrow v} \cdot L + \text{div}(\underline{V}_T) - Q_T = 0 \quad (2.145)$$

où  $S_T$  représente la quantité de chaleur emmagasinée,  $L$  la chaleur latente de vaporisation,  $\underline{V}_T$  le flux de chaleur et  $Q_T$  une source de chaleur en volume.

La quantité de chaleur emmagasinée dépend de l'enthalpie du système:

$$H_m = \sum_i H_i = \sum_i \theta_i \cdot \rho_i \cdot c_{p,i} \cdot (T - T_0) \quad (2.146)$$

où  $\rho_i$ ,  $\theta_i$  et  $c_{p,i}$  sont respectivement la masse volumique, la teneur volumique et la capacité thermique du composant  $i$ , et  $T_0$  est une température de référence.

L'énergie nécessaire à la vaporisation dépend naturellement de la quantité d'eau  $E_{H_2O}^{w \rightarrow v}$  transformée en vapeur, qui peut être modélisée par l'équation de bilan de vapeur d'eau (2.107). En négligeant les sources de vapeur, la variation de masse d'eau sous forme de vapeur dans le VER s'obtient par :

$$\dot{E}_{H_2O}^{w \rightarrow v} = \dot{S}_v + \text{div}(\underline{V}_v) \quad (2.147)$$

Le flux de chaleur  $\underline{V}_T$  possède deux composantes : une partie de conduction de la chaleur et une partie liée à la quantité de chaleur transportée par les différents composants :

$$\underline{V}_T = \underline{i}_{cond} + \sum_i H_i \cdot \underline{V}_i^{eff} \quad (2.148)$$

où  $\underline{i}_{cond}$  est le flux de conduction et  $\underline{V}_i^{eff}$  est la vitesse effective du composant  $i$  par rapport à la phase solide.

Il est nécessaire d'utiliser les vitesses de chaque composant et non plus de chaque phase car des flux non-advectifs sont présents dans chaque phase. L'équation de bilan thermique (2.145) peut donc être réécrite en :

$$\dot{S}_T + \dot{S}_v \cdot L + \text{div}(\underline{i}_{cond}) + \text{div}(\sum_i H_i \cdot \underline{V}_i^{eff}) + \text{div}(\underline{V}_v) \cdot L - Q_T = 0 \quad (2.149)$$

où les deux premiers termes peuvent être regroupés et représentent la chaleur emmagasinée avec une contribution de la vaporisation. Les trois termes suivants constituent les flux de chaleur de conduction, de convection et du à la vaporisation.

## 5.8. Transfert de la chaleur par unité de volume

Nous pouvons à présent développer les trois modes de transfert de chaleur. La conduction est définie par une loi générale de Fourier en utilisant une conductibilité thermique qui dépend des caractéristiques des composants du milieu (relations 2.100 ou 2.101). Toutefois, des mesures expérimentales de la conductibilité ont montré que celle-ci est mieux représentée par une moyenne géométrique des propriétés des trois phases [GENS *et al.*, 2001]:

$$\Gamma_m = \Gamma_s^{1-n} \cdot \Gamma_w^{nS_{r,w}} \cdot \Gamma_g^{nS_{r,g}} = \Gamma_{sat}^{S_{r,w}} \cdot \Gamma_{dry}^{1-S_{r,w}} \quad (2.150)$$

où  $\Gamma_{sat}$  et  $\Gamma_{dry}$  sont la conductibilité du milieu respectivement à l'état saturé en eau et à l'état sec.

$$\Gamma_{sat} = \Gamma_s^{1-n} \cdot \Gamma_w^n \text{ et } \Gamma_{dry} = \Gamma_s^{1-n} \cdot \Gamma_g^n \quad (2.151)$$

La convection de chaleur est due aux flux d'eau liquide, d'air sec et de vapeur d'eau. Nous négligeons la convection due à l'air dissous dans l'eau. La convection par un composant en mouvement dépend de la vitesse effective qui est liée à la vitesse moyenne (somme de la vitesse de la phase et du flux non-advectif) par la relation suivante [BURGER *et al.*, 1985]:

$$\underline{V}_i^{eff} = \frac{\underline{V}_i}{n.S_{r,i}} \quad (2.152)$$

Du fait de la vaporisation, un flux supplémentaire apparaît, qui est lié aux flux de vapeur. Nous pouvons donc résumer ces trois modes de transfert dans l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \underline{V}_T + \underline{V}_v L = & \underbrace{-\Gamma_m \cdot \nabla T}_{conduction} \\ & + \underbrace{\left[ c_{p,w} \cdot \rho_w \cdot \underline{q}_l + c_{p,a} \cdot (\underline{i}_a + \rho_a \cdot \underline{q}_g) + c_{pv} \cdot (\underline{i}_v + \rho_v \cdot \underline{q}_g) \right] \cdot (T - T_0)}_{convection} \\ & + \underbrace{\left[ \underline{i}_v + \rho_v \cdot \underline{q}_g \right] \cdot L}_{Latente} \end{aligned} \quad (2.153)$$

### 5.9. Quantité de chaleur emmagasinée par unité de volume

La quantité d'enthalpie du système est définie comme la somme des contributions de chaque espèce du système:

$$H_m = \sum_i H_i = \sum_i \theta_i \cdot \rho_i \cdot c_{p,i} \cdot (T - T_0) \quad (2.154)$$

Les contributions de chaque composante à l'enthalpie du système s'exprime selon:

$$\begin{aligned} H_w &= n.S_{r,w} \cdot \rho_w \cdot c_{p,w} \cdot (T - T_0) \\ H_a &= n.S_{r,g} \cdot \rho_a \cdot c_{p,a} \cdot (T - T_0) \\ H_s &= (1 - n) \cdot \rho_s \cdot c_{p,s} \cdot (T - T_0) \\ H_v &= n.S_{r,g} \cdot \rho_v \cdot c_{p,v} \cdot (T - T_0) \end{aligned} \quad (2.155)$$

Nous avons toutefois négligé l'enthalpie de l'air dissous. Un dernier terme, lié à la vaporisation de l'eau, contribue également à l'emmagasinement de chaleur et dépend de la quantité de vapeur et la chaleur latente de vaporisation.

$$H_{Lat} = n.S_{r,g} \cdot \rho_v \cdot L \quad (2.156)$$

Nous pouvons donc calculer l'emmagasinement de chaleur pour un volume de référence  $V$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (S_T \cdot V + S_v \cdot L \cdot V) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ n \cdot V \cdot (\rho_w \cdot S_{r,w} \cdot c_{p,w} + \rho_a \cdot S_{r,g} \cdot c_{p,a} + \rho_v \cdot S_{r,g} \cdot c_{p,v}) \cdot (T - T_0) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left[ (1 - n) \cdot V \cdot \rho_s \cdot c_{p,s} \cdot (T - T_0) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left[ n \cdot S_{r,g} \cdot \rho_v \cdot L \cdot V \right] \end{aligned} \quad (2.157)$$

Nous ne développerons pas plus cette expression, ce travail est effectué dans [COLLIN, 1998]. L'emmagasinement de chaleur dépend essentiellement des variations de température et de saturation.

## 6. CONCLUSIONS

Nous venons de développer un modèle d'écoulements multiphasiques anisothermes. Dans ce but, nous avons tout d'abord défini les propriétés des différents composants de notre système ainsi que les équations de conservation de masse et d'énergie.

Ce modèle est complexe car les différents modes de transferts hydrique et thermique s'influencent mutuellement ; les couplages sont nombreux. De ce fait, nous avons développé cette loi progressivement : écoulement saturé anisotherme, écoulement non-saturé isotherme et enfin écoulement multiphasique anisotherme avec changement de phase. De cette manière, nous avons pu montrer plus clairement les couplages existant dans notre modèle.

Composant	Flux d'écoulement		Transfert de chaleur	
	Advectif	Non-advectif	Convection	Changement d'état
Eau liquide	<b>X</b>	Négligé	<b>X</b>	<b>X</b>
Vapeur d'eau	<b>X</b>	<b>X</b>	<b>X</b>	<b>X</b>
Air sec	<b>X</b>	<b>X</b>	<b>X</b>	Négligé
Air dissous	<b>X</b>	Négligé	Négligé	Négligé
Phase solide	Néant	Néant	<b>X</b>	Néant

Tableau 2.2 : Phénomènes pris en compte dans le modèle

Le tableau 2.2 rappelle les différents phénomènes pris en compte dans le modèle. Ces développements ont été incorporés dans la loi WAVAT (Water-Vapour-Air-Température) du code Lagamine. Cette loi sera validée par des cas limites simplifiés dont la solution analytique est connue ou dont la solution numérique a été publiée. Grâce aux éléments finis MWAT dont nous parlerons au chapitre V, nous avons ainsi les outils nécessaires pour traiter les exemples d'applications fort complexes nous intéressant.

## **CHAPITRE III**

### **Modèle de comportement des sols non saturés**



## CHAPITRE III

### MODELE DE COMPORTEMENT DES SOLS NON SATURES

#### 1. INTRODUCTION

Historiquement, la mécanique des sols et des roches s'est d'abord concentrée sur l'étude des géomatériaux saturés. Le principe de la contrainte effective a permis le développement de lois constitutives adaptées aux différents géomatériaux rencontrés, et de reproduire ainsi les comportements mécaniques observés expérimentalement.

Toutefois, dans de nombreuses applications, le terrain étudié ne se trouve pas dans un état totalement saturé (généralement en eau), on parle alors de sol partiellement saturé ou encore non-saturé. Dans le chapitre précédent (chapitre II, § 4.1.1), nous avons montré que l'eau sous saturation partielle possède le potentiel suivant (équation 2.78):

$$\psi = \psi_g + \psi_p + \psi_m + \psi_o \quad (3.1)$$

où  $\psi_g$  est le potentiel gravitaire,  $\psi_p$  est le potentiel de pression externe,  $\psi_m$  est le potentiel matriciel et  $\psi_o$  est le potentiel osmotique.

Ce potentiel de l'eau influence non seulement les transferts hydriques mais également le comportement d'un géomatériau non-saturé [REVIEW PANEL, 1965]. Dans ce chapitre, nous utiliserons à la place du potentiel, la notion de succion définie par:

- la succion matricielle  $s$  ( $= -\psi_m$ ) représentant les effets capillaires et d'adsorption:

$$s = p_a - p_w \quad (3.2)$$

où  $p_a$  et  $p_w$  sont respectivement les pressions d'air et d'eau;

- la succion osmotique  $\pi$  ( $= -\psi_o$ ) représentant les effets de différences de concentration:

$$\pi = -\frac{\rho_w RT}{M_w} \ln x_w \quad (3.3)$$

où  $M_w$  est la masse moléculaire de l'eau,  $x_w$  la fraction molaire de l'eau dans la solution,  $R$  la constante des gaz parfaits,  $T$  la température et  $\rho_w$  la masse volumique de l'eau;

- la succion totale  $s_T$ :

$$s_T = s + \pi \quad (3.4)$$

La succion est une variable fondamentale pour comprendre le comportement mécanique des sols non-saturés. Ainsi, l'étude expérimentale de ce type de géomatériau nécessite le contrôle, ou à tout le moins la mesure de la succion.

Dans ce chapitre, nous aborderons tout d'abord les différents aspects du comportement mécanique des sols fins partiellement saturés : une majorité de publications traite du comportement volumique mais nous parlerons également des aspects déviatoriques. La plupart de ces aspects ont été abordés dans la thèse de X-L Li [LI, 1999] qui a constitué la référence principale de ce chapitre. Nous présenterons également certains aspects du comportement d'enrochements car il fournit une explication de l'influence de la succion sur des matériaux granulaires grossiers.

Enfin, nous passerons en revue les différentes lois constitutives de sols partiellement saturés ; nous insisterons plus particulièrement sur le modèle de Barcelone [ALONSO *et al.*, 1990] qui servira de base au développement de la loi mécanique de la craie que nous présenterons au chapitre IV.

## 2. OBSERVATIONS EXPERIMENTALES

Le comportement d'un géomatériau sous saturation partielle dépend directement de la succion à laquelle il est soumis. Les observations expérimentales doivent donc être réalisées dans des cellules triaxiales ou des oedomètres adaptés, où la succion peut être contrôlée.

Le comportement d'un sol non-saturé est fortement influencé par la microstructure du matériau. Il reste tout de même possible de dégager des comportements typiques qui peuvent être plus ou moins marqués selon le géomatériau utilisé.

En effet, considérant un sol granulaire non-saturé (figure 3.1), celui-ci peut être représenté par des grains entre lesquels se forment des ménisques aux interfaces des fluides saturants (voir chapitre II).

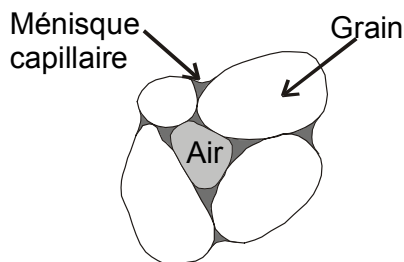


Figure 3.1: Représentation d'un sol granulaire non-saturé

Au sein de ces ménisques règne une tension superficielle qui tire les grains les uns contre les autres et leur apporte une cohésion apparente supplémentaire. La succion matricielle a donc pour effet d'améliorer la résistance des sols. Ce concept peut également être étendu aux sols argileux.



## 2.1. Techniques expérimentales de contrôle de la succion

Le contrôle de la succion peut être réalisé de différentes manières, celles-ci sont très bien décrites dans [DELAGE *et al.*, 2001b]. Nous pouvons distinguer trois techniques principales : la méthode de translation d'axes, la méthode osmotique et la méthode par phase vapeur.

### 2.1.1. METHODE DE TRANSLATION D'AXES

La méthode de translation d'axes découle directement de la définition de la succion matricielle  $s$  (équation 3.2). Elle consiste à imposer à un échantillon une pression d'air supérieure à la pression d'eau interstitielle. Le principe a été mis en œuvre par des pédologues [RICHARDS, 1941] grâce au dispositif présenté à la figure 3.2: une pression d'air est imposée dans une cellule étanche (placée dans un récipient d'eau) dont la base est constituée d'une pierre poreuse sur laquelle est déposé un échantillon. Afin de désaturer le sol, il est nécessaire d'avoir une phase liquide continue entre le sol et l'eau du récipient. La pierre poreuse doit donc posséder une pression d'entrée d'air suffisamment importante par rapport à la pression d'air imposée, afin de ne pas se désaturer. Grâce à ce contact parfait, la pression d'eau dans l'échantillon équivaut à la pression atmosphérique.

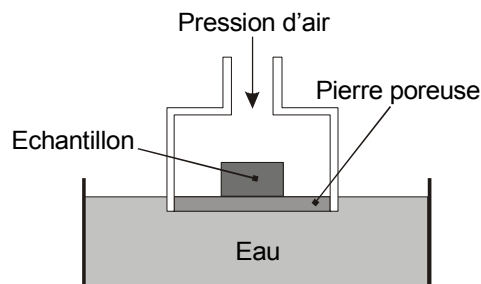


Figure 3.2 : Cellule de Richards de contrôle de succion [RICHARDS, 1941]

Ce principe a été utilisé afin de réaliser des essais triaxiaux et oedométriques avec contrôle de la succion. La figure 3.3 montre la cellule triaxiale modifiée par BISHOP et al (1961) : une pression d'eau est imposée à la base de l'échantillon via une pierre poreuse et la pression d'air s'exerce sur la face supérieure via un disque en fibre de verre.

A cause d'une diffusion possible d'air à travers les membranes entourant l'échantillon, ces dernières sont remplacées par un confinement au mercure qui permet également une mesure des variations de volume. En effet, dans un sol partiellement saturé, les déformations volumiques ne correspondent pas aux volumes d'eau échangés mais sont fonction également des échanges d'air. Toutefois, l'air est très compressible et est très sensible à la température ; il est dès lors difficile de mesurer les échanges d'air. Un cathétomètre mesure les variations du niveau de mercure qui correspondent à des déformations volumiques de l'échantillon.

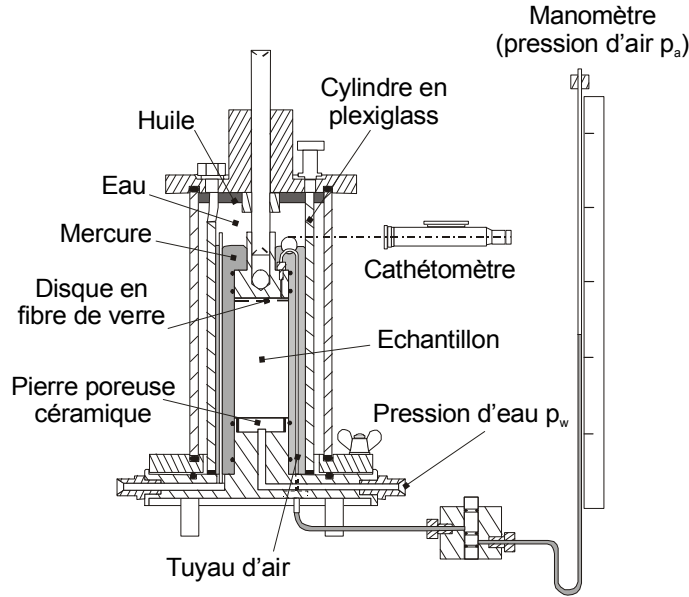


Figure 3.3 : Cellule triaxiale à succion contrôlée [BISHOP et al., 1961]

Dans cette méthode, la pression de l'eau reste positive et il n'y a donc pas de problème de cavitation. Il est possible d'obtenir des suctions maximales de l'ordre de 2 MPa car on est limité par la résistance de la cellule. En effet, la mise en pression de l'air dans l'échantillon demande une augmentation de la pression de confinement afin de travailler à contrainte latérale nette constante!

### 2.1.2. METHODE OSMOTIQUE

Une seconde technique de contrôle de la succion se fonde sur la méthode osmotique. A la figure 3.4, nous considérons deux volumes d'eau initialement à la même pression  $p$  et température  $T$  séparés par une membrane semi-perméable laissant passer l'eau mais pas de soluté. Si l'on ajoute une petite quantité de soluté à l'un des volumes, une différence de niveau apparaît entre les deux compartiments afin d'égaliser leur potentiel chimique. En effet, pour la solution et l'eau pure, nous pouvons écrire respectivement que:

$$\mu_{c,sol}(p_1, T) = \mu_{c,w}^0(p_1, T) + RT \ln x_w \quad (3.5)$$

où  $x_w$  est la fraction molaire de l'eau dans la solution et  $\mu_{c,w}^0$  est le potentiel chimique de l'eau pure.

$$\mu_{c,eau}(p_2, T) = \mu_{c,w}^0(p_2, T) \quad (3.6)$$

Il est évident que pour avoir équilibre des potentiels chimiques, il est nécessaire que les pressions  $p_1$  et  $p_2$  soient différentes. La pression osmotique est par définition la différence des deux pressions :

$$\pi = p_1 - p_2 = -\frac{\rho_w RT}{M_w} \ln x_w \quad (3.7)$$

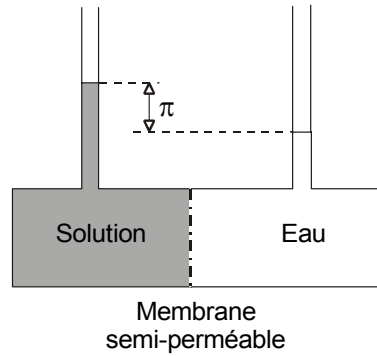


Figure 3.4 : Principe de la méthode osmotique

A cause de la succion osmotique, une partie de l'eau pure va migrer vers la solution afin d'égaliser les potentiels. Cette méthode a été adaptée afin de contrôler la succion matricielle dans un échantillon. La figure 3.5 montre l'oedomètre à succion contrôlée par la méthode osmotique, qui peut également être utilisée dans une cellule triaxiale [CUI et al, 1996]. La technique consiste à mettre en contact la base d'un échantillon avec une solution de PEG (PolyEthylène Glycol) au travers d'une membrane semi-perméable. Les molécules de PEG sont beaucoup plus grandes que celles de l'eau et ne peuvent traverser la membrane. Il se crée donc une succion osmotique entre la solution de PEG et l'eau pure se trouvant dans l'échantillon. La pression d'eau dans le sol diminue et des échanges se produisent vers la solution.

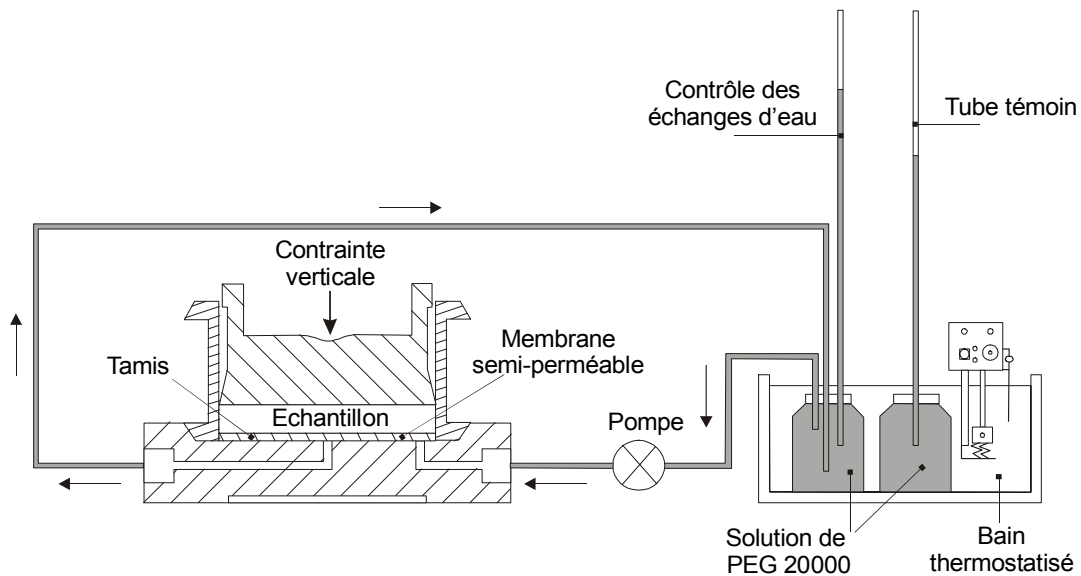


Figure 3.5 : Cellule oedométrique à succion contrôlée [DELAGÉ et al., 1992]

Une circulation de la solution de PEG est réalisée au moyen d'une pompe péristaltique et le volume de la solution est suffisant que pour ne pas être modifié par les

échanges d'eau. Ces derniers sont mesurés à l'aide de tubes capillaires ; pour que la mesure ne soit pas influencée par la dilatation de la solution, il est nécessaire de contrôler sa température.

A une température donnée, une concentration de PEG correspond à une succion imposée à l'échantillon. Il est ainsi possible d'atteindre des succions de l'ordre de 12 MPa sans avoir à augmenter la pression d'air, qui est généralement égale à la pression atmosphérique.

### 2.1.3. METHODE PAR PHASE VAPEUR

La contrôle de la succion par phase vapeur repose sur la loi de Kelvin (équation 3.8) :

$$h = \exp\left(\frac{\psi \cdot g}{R_v \cdot T}\right) \quad (3.8)$$

où  $h$  est l'humidité relative,  $\psi$  est la somme du potentiel matriciel  $\psi_m$  et osmotique  $\psi_o$  de l'eau,  $R_v$  est égal au rapport  $R/M_v$  et  $g$  est l'accélération de la pesanteur.

Elle consiste à appliquer une succion totale à un échantillon en le plaçant dans une atmosphère confinée à humidité relative contrôlée. Cela peut s'effectuer dans un dessiccateur où l'on a introduit une solution d'acide sulfurique à concentration donnée ou une solution saline saturée (figure 3.6). Pour un sel donné, il y correspond une humidité relative et donc une succion. Il n'y a pratiquement pas de limite supérieure en succion; l'inconvénient de la méthode est en fait la lenteur des échanges d'eau qui peuvent prendre des mois. De plus, il est nécessaire de maintenir une température constante car elle intervient dans la loi de Kelvin mais elle influence également l'humidité relative imposée.

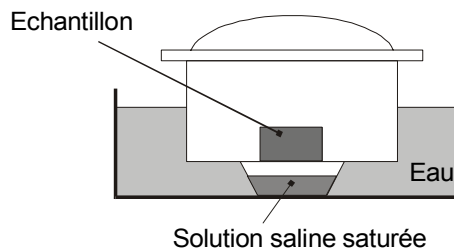


Figure 3.6 : Contrôle de succion par phase vapeur [DELAGÉ et al., 2001a]

Cette méthode de contrôle de succion a été utilisée dans des cellules triaxiale et oedométrique [OTEO-MAZO et al., 1995]. Dans ces dernières (figure 3.7), l'échantillon est confiné latéralement par un anneau en acier et mis en contact avec une atmosphère contrôlée par l'intermédiaire de pierres poreuses adéquates. Ces éléments sont placés dans une cellule étanche à l'air et un réceptacle en verre contient la solution saline contrôlant l'humidité relative.

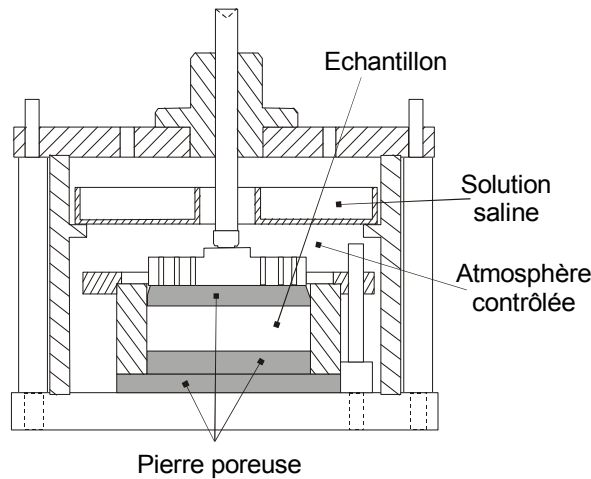


Figure 3.7 : Cellule oedométrique à succion contrôlée [OTEO-MAZO *et al.*, 1995]

## 2.2. Comportement volumique

Les techniques de contrôle de succion ont permis une étude approfondie des sols fins non-saturés. Une partie importante des recherches dans le domaine se sont portées sur le comportement volumique de ces matériaux.

La figure 3.8 donne les résultats d'essais isotropes à succion contrôlée sur un limon de Jossigny [CUI *et al.*, 1996]. Nous pouvons observer principalement deux phénomènes qui sont généralement relevés dans la littérature ([ALONSO *et al.*, 1987], [DUDLEY, 1970], ...):

- la contrainte de préconsolidation séparant un état pseudo-élastique d'un état plastique augmente avec la succion;
- la succion contribue à augmenter la raideur du sol : la pente plastique diminue en effet pour une succion croissante.

Pour des chemins de mouillage (la succion diminue donc), le sol pourra subir un gonflement ou un effondrement (une compaction) selon le niveau de confinement (figure 3.9). L'amplitude de la compaction augmente avec l'état de contrainte et cette déformation est irréversible. Une fois, le mouillage réalisé, le sol possède le comportement d'un sol saturé.

Lorsque les variations de volume sont empêchées lors de chemins de mouillage, des pressions de gonflement importantes peuvent apparaître. Ces pressions sont certes une donnée intéressante du matériau mais elles dépendent fortement de l'état de contrainte et de succion initiale. Elles ne sont donc pas une donnée intrinsèque du matériau.

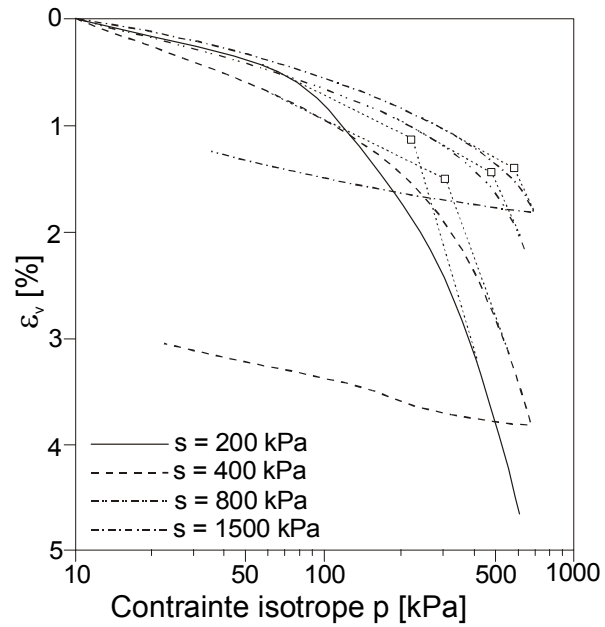


Figure 3.8 : Essais isotropes à succion contrôlée sur un limon de Jossigny compacté [CUI *et al.*, 1996]

Les changements de succion engendrent des déformations volumiques plastiques. Cela a été mis en évidence lors de cycles séchage-mouillage [JOSA *et al.*, 1987] qui montrent une accumulation de déformations lors des chemins à succion croissante.

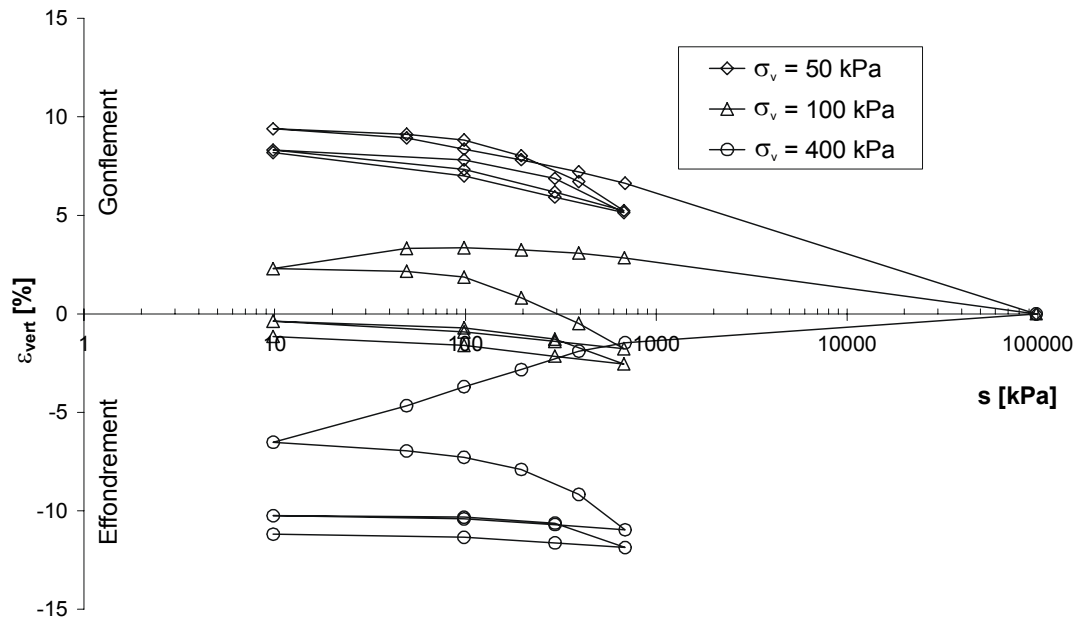


Figure 3.9 : Essais oedométriques à succion contrôlée sur des agrégats d'argile de Boom. Résultats UPC [VOLCKAERT *et al.*, 1996]

### 2.3. Comportement déviatorique

Le comportement au cisaillement des sols non-saturés est bien moins connu que les aspects volumiques. Il y a toutefois un accord général pour dire que la résistance au cisaillement augmente avec la succion :

- la cohésion apparente augmente avec la succion ([FREDLUND, 1993], [ALONSO *et al.*, 1987], ...);
- l'angle de frottement peut ou non être influencé par la succion. Ainsi, Fredlund [FREDLUND *et al.*, 1978] a proposé un critère de rupture au cisaillement où l'angle de frottement  $\phi'$  est constant :

$$\tau_f = c' + (\sigma_f - p_a)_f \operatorname{tg} \phi' + (p_a - p_w)_f \operatorname{tg} \phi^b \quad (3.9)$$

où  $\tau_f, \sigma_f$  représentent respectivement la contrainte de cisaillement et la contrainte normale au plan de rupture,  $p_a$  et  $p_w$  sont les pressions d'air et d'eau,  $c'$  est la cohésion à l'état saturé,  $\phi'$  est l'angle de frottement à l'état saturé et  $\phi^b$  permet de quantifier l'augmentation de résistance grâce à la succion.

Toutefois, des résultats expérimentaux ([ESCARIO *et al.*, 1986]) ont montré que l'angle de frottement  $\phi'$  augmente avec la succion tandis que d'autres auteurs arrivent à la conclusion inverse.

Il est par contre certain que l'augmentation de la résistance au cisaillement n'est pas infinie et qu'elle doit atteindre un niveau maximum une fois une certaine succion atteinte.

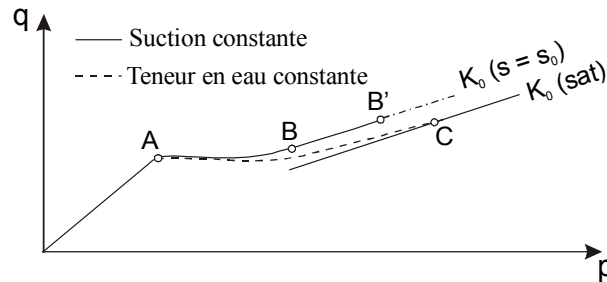


Figure 3.10 : Essai oedométrique sur un sol non saturé [ALONSO *et al.*, 1987]

Le comportement déviatorique avant rupture est également influencé par la succion. La figure 3.10 montre des résultats d'essais oedométriques dans le plan  $(p, q)$  : la première partie de la courbe de comportement est linéaire (elle correspond à la phase élastique), ensuite le chemin AB correspond à une entrée en plasticité du matériau. Le chemin de contrainte s'aligne finalement selon une pente plastique  $K_0$  dépendant de la succion. Pour des essais à teneur en eau constante, le début de chemin de contrainte est identique ; ensuite, lorsque les déformations deviennent plus importantes, la succion

diminue et le chemin de contrainte tend vers une pente  $K_0$  correspondant à un état saturé.

Les résultats triaxiaux à succion contrôlée [CUI *et al.*, 1996] confirment eux aussi l'augmentation de la résistance au cisaillement avec la succion (figure 3.11). De plus, on observe également une augmentation du module initial de cisaillement pour un échantillon plus sec.

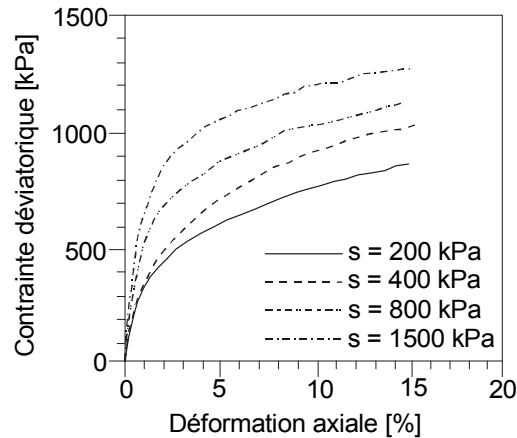


Figure 3.11 : Essais triaxiaux à succion contrôlée sur un limon de Jossigny [CUI *et al.*, 1996]

## 2.4. Comportement d'enrochements non-saturés

Les comportements que nous venons de décrire sont observés pour des sols fins partiellement saturés. Les enrochements non-saturés pourraient présenter un comportement différent ; toutefois, l'étude de barrage ou de remblais en enrochements montre que ces derniers sont également sensibles au remouillage lié à une augmentation du niveau d'eau dans le barrage ou simplement à une réhydratation due à la pluviosité. Les compactions observées sont en relation directe avec les variations de teneur en eau.

Des campagnes d'essais (essais triaxiaux et oedométriques) ont été réalisées essentiellement dans les années 1960 à 1980 sur différents enrochements ; ces essais montrent une rupture significative des particules qui dépend du niveau de contraintes, de la forme des particules et de la granulométrie, de la résistance de la roche et de la présence d'eau. La teneur en eau initiale est le facteur le plus important afin de déterminer l'effondrement lors du mouillage.

Afin de mieux comprendre l'influence de l'eau, [ALONSO *et al.*, 2001] ont réalisés des essais oedométriques à succion contrôlée par solution saline. Les auteurs observent les comportements suivants : sous chargement, le matériau présente une déformation directe qui dépend de l'état de contraintes appliquées et des déformations différées liées à l'action de l'eau ; la succion a pour effet de raidir le matériau et enfin, pour des chemins de mouillage, un effondrement est observé, il dépend du niveau de contraintes.



Ces observations sont finalement très proches des phénomènes mis en évidence pour les sols non-saturés. Toutefois, le mécanisme de déformation doit être radicalement différent. Dans un sol non-saturé, le mouillage a pour effet de faire disparaître les ménisques capillaires ; ainsi, la cohésion apparente qu'ils apportaient n'existe plus et un réarrangement des grains se produit en fonction de l'état de contrainte appliqué.

Dans un matériau granulaire grossier, la dimension des grains est plus importante et l'intensité des efforts capillaires devient négligeable par rapport au propre poids des grains et ne permet pas d'expliquer l'effet de l'eau sur les enrochements. Différents modèles conceptuels ont été proposés mais il semble que le phénomène de propagation sub-critique des fissures est le mieux adapté pour expliquer l'influence de la succion [ALONSO *et al.*, 2001]. La synthèse qui suit est tirée de cette référence.

En effet, dans la théorie classique de la mécanique de la rupture, une fissure se propage brutalement et instantanément lorsque le facteur d'intensité de contrainte  $K$  est égal à une valeur critique  $K_c$  qui dépend de la ténacité du matériau. Le facteur d'intensité de contrainte est défini par la relation suivante:

$$K = \Omega \sigma \sqrt{\pi a} \quad (3.10)$$

où  $a$  est la longueur de la fissure,  $\Omega$  est une constante qui dépend de la géométrie et  $\sigma$  est la contrainte moyenne sollicitant le matériau. Le facteur  $K$  est définie pour différents modes de sollicitation de la fissure (traction, cisaillement normale ou tangentielle à la fissure).

Il est toutefois possible que la rupture se propage à une vitesse  $V$  pour des valeurs du facteur d'intensité inférieures à la valeur critique. On parle alors de propagation sub-critique de la rupture. La vitesse  $V$  dépend de la valeur de  $K$  mais également de l'action d'agents "corrosifs" externes comme l'eau.

Dans l'étude de la corrosion sous contraintes dans le quartz en présence d'eau, la formulation thermodynamique de la vitesse de rupture peut être exprimée comme suit:

$$V = V_0(h) \exp \left[ -\frac{E^{2+} - bK}{RT} \right] \quad (3.11)$$

où  $h$  est l'humidité relative,  $E^{2+} - bK$  représente l'énergie d'activation de la corrosion,  $E^{2+}$  est la partie de l'énergie ne dépendant pas de la contrainte et  $bK$  peut être interprété comme le travail des contraintes entre l'état initial et final.

On observe donc que l'eau intervient dans cette formule par l'intermédiaire de l'humidité relative qui représente son énergie. La figure 3.12 synthétise l'effet du facteur d'intensité et de l'humidité relative sur la vitesse de propagation.

La valeur du facteur d'intensité  $K$  est limitée par deux valeurs critiques : pour  $K$  inférieure à  $K_0$ , la fissure ne se propagera pas et pour  $K$  égale à  $K_c$ , la rupture est brutale

et instantanée. Pour des valeurs intermédiaires, la fracture se propage à une vitesse  $V$  dépendant de l'humidité relative et de l'état de contrainte.

L'augmentation de l'humidité relative a donc deux effets : le premier est l'augmentation de la vitesse de propagation et le second est la diminution de la valeur minimum  $K_0$  (le nombre de fissures se propageant augmente donc).

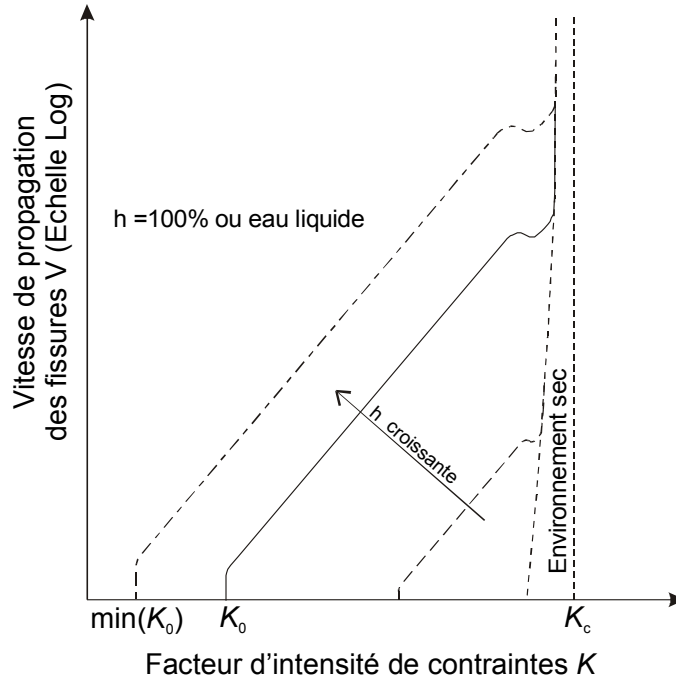


Figure 3.12 : Représentation schématique des courbes de propagation sub-critique des fissures. [ALONSO et al., 2001]

Cette approche de la propagation sub-critique permet d'expliquer l'influence de la teneur en eau dans les matériaux rocheux. Il est alors possible de développer un modèle de comportement pour ce type de matériau.

### 3. LOIS CONSTITUTIVES DE GEOMATERIAUX NON-SATURES

Nous venons de présenter différents aspects du comportement des sols non-saturés, en mettant en évidence l'influence de la succion qui est un paramètre essentiel pour ce genre d'étude. Il est à présent utile de passer en revue les lois constitutives qui ont été développées afin de reproduire les différents comportements observés expérimentalement.

Pour un géomatériau saturé par un seul fluide, la contrainte effective définie par le principe de Terzaghi permet de décrire à elle seule le comportement d'un sol saturé. Elle est définie par la relation suivante:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - p_w \delta_{ij} \quad (3.12)$$

Où  $p_w$  est la pression du fluide (généralement de l'eau),  $\sigma'_{ij}$  est la contrainte effective et  $\sigma_{ij}$  est la contrainte totale.

Cette définition suppose que les grains solides sont incompressibles et que le contact entre les grains est ponctuel. Par contre, elle reste valable pour tout type de sol et quel que soit le chemin de contrainte.

Une loi constitutive d'un géomatériau saturé doit donc uniquement relier le tenseur du taux des contraintes effectives au tenseur du taux des déformations :

$$\dot{\sigma}'_{ij} = C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (3.13)$$

Où  $C_{ijkl}$  est le tenseur constitutif et  $\varepsilon_{kl}$  est le tenseur des déformations.

### 3.1. Contrainte effective dans les sols non-saturés

Dans un sol non-saturé, hormis lorsque l'air se trouve sous forme de bulles (approximativement pour des suctions inférieures à la pression d'entrée d'air), le concept de contrainte effective de Terzaghi n'est plus applicable directement. De ce fait, de nombreux chercheurs ont tenté d'étendre ce concept en modifiant la définition de la contrainte effective. Parmi ceux-ci, le postulat de Bishop [BISHOP *et al.*, 1963] suggère la définition suivante:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - p_a \delta_{ij} + \chi(p_a - p_w) \delta_{ij} \quad (3.14)$$

Où  $\chi$  est un paramètre matériel dépendant de la saturation et est compris entre 0 (sol sec) et 1 (sol saturé en eau).

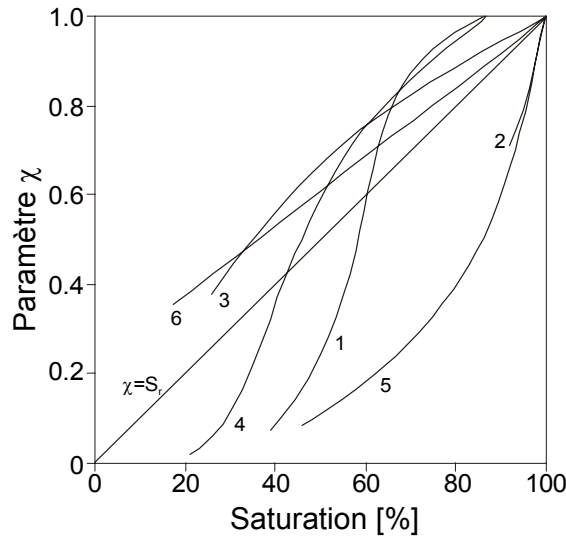


Figure 3.13 : Paramètre  $\chi$  pour différents types de sols [JENNINGS *et al.*, 1962]

Des résultats expérimentaux sur sols non-saturés ([BISHOP *et al.*, 1963], [JENNINGS *et al.*, 1962], ...) montrent que le paramètre  $\chi$  est en fait une fonction complexe dépendant de nombreux facteurs : saturation, type de sol, microstructure du sol, chemins de contrainte suivis (figure 3.13).

Il est à noter que cette contrainte de Bishop (équation 3.12) ne devrait en fait pas s'appeler contrainte effective à partir du moment où sa définition dépend des propriétés du matériau.

Toutefois, cette expression présente l'avantage d'être simple d'utilisation, une fois connu le paramètre  $\chi$ . Elle donne des résultats qualitativement bon pour les modélisations où les aspects volumiques ne sont pas trop importants. Pour ces calculs, le paramètre  $\chi$  est généralement pris égal à la saturation [CHARLIER *et al.*, 1997].

Par contre, cette approche est incapable de reproduire le phénomène d'effondrement des sols non-saturés pour des chemins de mouillage sous niveau de contraintes élevé. En effet, lors de l'hydratation, la pression de fluide augmente provoquant une diminution de la contrainte effective ; cela se traduit par un gonflement alors qu'une compaction est observée. Il est dès lors nécessaire d'adopter une autre approche.

### 3.2. Variables d'état de contrainte

Une variable d'état de contrainte est une variable non-matérielle nécessaire à la caractérisation de l'état de contrainte. Le nombre nécessaire de variable d'état est directement lié au nombre de phases impliquées [FREDLUND *et al.*, 1993]. Pour un géomatériau saturé, une seule variable d'état de contrainte est nécessaire : la contrainte effective (à laquelle peut s'ajouter des variables d'écrouissage :  $p_0$ ,  $e$ , ...).

Pour un sol partiellement saturé par deux fluides, nous venons de montrer qu'une seule variable (contrainte effective de Bishop par exemple) n'est pas suffisante pour définir l'état de contrainte et reproduire tous les comportements du matériau. Des travaux de Coleman [COLEMAN, 1962], Fredlund [FREDLUND *et al.*, 1977], Alonso et Gens [ALONSO *et al.*, 1990], ... montrent que deux variables indépendantes permettent de dépasser ce problème. Le choix de variables adopté le plus couramment est la contrainte nette  $\bar{\sigma}$  et la succion  $s$  :

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ij} &= \sigma_{ij} - p_a \delta_{ij} \\ s &= p_a - p_w\end{aligned}\tag{3.15}$$

En fait, Fredlund et Morgenstern (1977) justifient théoriquement l'utilisation de deux variables d'état parmi les couples suivants:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - p_w \delta_{ij} \text{ et } s = p_a - p_w\tag{3.16}$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - p_a \delta_{ij} \text{ et } s = p_a - p_w\tag{3.17}$$

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - p_w \delta_{ij} \text{ et } \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - p_a \delta_{ij}\tag{3.18}$$

Expérimentalement, un choix adéquat de variables d'état de contrainte permet la réalisation de *null test* : faisant varier de manière identique les composantes des variables d'état (mais pas les variables d'état elles-mêmes), il ne faut pas observer de distortions ni de variations de volume. Ainsi, pour le couple (3.15), une modification  $\Delta\sigma_{ij} = \Delta p_a = \Delta p_w$  ne doit entraîner aucune variation de volume.

### 3.3. Relevé de modèles de comportement

Les études expérimentales ayant mis en évidence les principaux aspects du comportement des sols non-saturés, il est donc possible de développer des modèles les représentant afin d'étudier des problèmes où les effets de saturation partielle interviennent: digues, barrages en terre, stabilité de talus, barrières d'étanchéité ...

Les premiers modèles étaient développés en contraintes effectives (notion étendue en condition non-saturée), mais ils ne pouvaient représenter correctement le phénomène d'effondrement. L'approche en variables d'état a permis de résoudre ce problème. Matyas & Radhakrishna [MATYAS *et al.*, 1968] ont tout d'abord introduit les surfaces d'état qui permettent de décrire tous les états possibles d'un sol non-saturé. Alonso & Gens ont été les premiers à développer un modèle dans un formalisme élasto-plastique en introduisant la courbe LC. Cette approche a d'ailleurs servi de base à bien d'autres lois constitutives qui utilisent pour la plupart la contrainte nette et la succion en variables d'état.

Toutefois, certains auteurs développent leur modèle en contrainte effective mais ils doivent introduire la succion et une courbe LC afin de reproduire le comportement des sols non-saturés ([BOLZON *et al.*, 1996]). Nous pouvons donc dire qu'ils sont également inspirés par les concepts du modèle de Barcelone.

#### 3.3.1. SURFACES D'ÉTAT

Utilisant l'approche des variables d'état de contrainte, Matyas & Radhakrishna (1968) ont introduit la notion de surface d'état. Une surface d'état représente l'ensemble des évolutions possibles des variables d'état pour tout chemin de sollicitation mécanique et hydrique.

La figure 3.14 montre un exemple de surface d'état dans l'espace  $e - \bar{\sigma} - s$ . Elle représente bien différents comportements des sols non-saturés:

- Les chemins 1 et 2 montrent que la rigidité du matériau augmente avec la succion.
- Lors d'une hydratation, les chemins 3 et 4 montrent qu'un gonflement ou un effondrement apparaît selon l'état de contrainte.

Différents auteurs ont proposé une expression analytique de la surface d'état, présentant plus ou moins de complexité:

[FREDLUND, 1979] a donné les premières expressions :

$$e = e_0 - C_t \log(\sigma - p_a) - C_m \log(p_a - p_w) \quad (3.19)$$

$$w = w_0 - D_t \log(\sigma - p_a) - D_m \log(p_a - p_w) \quad (3.20)$$

où  $w$  est la teneur en eau, l'indice 0 indique l'état initial et  $C_t$ ,  $C_m$ ,  $D_t$ ,  $D_m$  sont des paramètres du matériau.

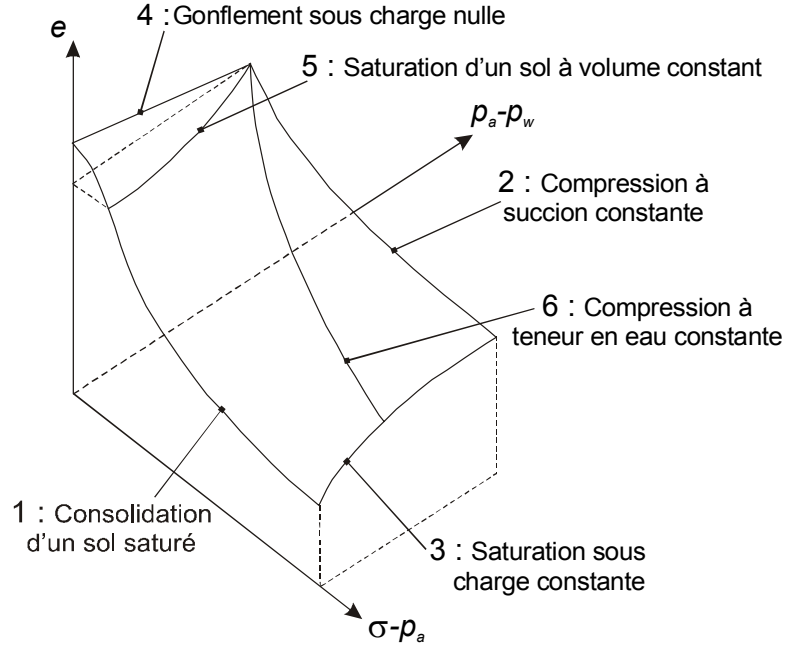


Figure 3.14 : Surface d'état pour un sol non-saturé [MATYAS et al., 1968]

Lloret & Alonso [LORET et al., 1985] ont proposé une expression avec un couplage contrainte-succion permettant de reproduire l'effondrement et le gonflement selon l'état de contraintes :

$$e = a + b \log(\sigma - p_a) + c \log(p_a - p_w) + d \log(\sigma - p_a) \log(p_a - p_w) \quad (3.21)$$

$$S_r = a' + [c' + d'(\sigma - p_a)] \tanh[b'(p_a - p_w)] \quad (3.22)$$

Toutefois, la surface d'état n'est valable que pour des chemins monotones en contrainte et saturation. Elle ne peut en effet pas reproduire les phénomènes d'hystérésis d'origine hydrique ou des déformations plastiques mécaniques. Cette approche n'est donc pas utile pour une utilisation dans un code de calcul, hormis pour des chemins monotones.

### 3.3.2. MODÈLE D'ALONSO-GENS

Le modèle proposé par Alonso & Gens ([ALONSO et al., 1987, 1990]) a été une des premières lois de comportement capable, dans un formalisme élasto-plastique, de reproduire les différents aspects des géomatériaux non-saturés. Il est donc utilisable dans un code de calcul.

Il utilise deux variables d'état, la contrainte nette et la succion. L'originalité des auteurs a été de décrire le modèle dans le plan  $(\bar{p}, s)$  et d'y définir la courbe LC (*Loading Collapse curve* en anglais). Cette surface de plasticité représente l'évolution de la contrainte de préconsolidation avec la succion (figure 3.15). Elle permet d'expliquer simplement le phénomène d'effondrement pour des chemins de mouillage à charges élevées.

Un chemin de mouillage correspond à une diminution de la succion. Pour de faibles contraintes (chemin AA'), l'état de contrainte se trouve dans la zone élastique et seules des déformations réversibles de gonflement sont créées. Pour des contraintes plus élevées, le chemin BB' croise la courbe LC, des déformations plastiques de compression sont alors créées : c'est le *collapse*, l'*effondrement*.

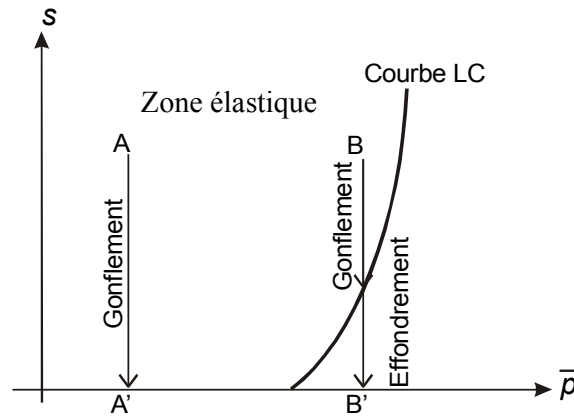


Figure 3.15 : Courbe LC du modèle de Barcelone

Une description plus détaillée de ce modèle sera donnée dans le paragraphe 3.4 car il servira de base au développement de la loi constitutive d'une craie non saturée.

Ce concept de courbe LC a été repris par de nombreux chercheurs pour l'étude de différents géomatériaux ([WHEELER *et al.*, 1995], [CUI *et al.*, 1996], ...)

### 3.3.3. MODÈLE EN CONTRAINTES EFFECTIVES

Des modèles ont également été développés en utilisant des contraintes effectives adaptées aux conditions non-saturées. Toutefois, afin de reproduire le phénomène de collapse, il est nécessaire d'introduire la succion dans le modèle (via une courbe LC par exemple). Nous citerons par exemple les lois de comportement suivantes:

Bolzon – Schrefler [BOLZON *et al.*, 1996] utilisent le couple suivant de variables d'état:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - p_a \delta_{ij} + S_r (p_a - p_w) \delta_{ij} \text{ et } s \quad (3.23)$$

qui correspondent à la contrainte effective de Bishop et à la succion.

Loret – Khalili [LORET *et al.*, 2000] définissent une autre contrainte effective (similaire à la précédente):

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \chi'_w p_w \delta_{ij} - \chi'_a p_a \delta_{ij} \text{ et } s \quad (3.24)$$

où  $\chi'_w$  et  $\chi'_a$  sont deux paramètres matériels.

Si l'utilisation d'une contrainte effective permet une transition douce entre l'état non-saturé et saturé, il n'en reste pas moins que les modèles doivent intégrer la succion afin de reproduire l'effondrement. En conséquence, nous pouvons donc dire que ces lois de comportement suivent également l'approche proposée dans le modèle de Barcelone.

### 3.3.4. CONCLUSIONS

Les premiers modèles de comportement pour sol non-saturé étaient une extension des lois constitutives en condition saturée. Malheureusement, ces dernières ne donnent pas satisfaction pour reproduire l'ensemble des aspects du comportement du matériau en utilisant uniquement une contrainte effective généralisée.

Le concept de variable d'état de contrainte a alors été introduit et de nombreux travaux montrent que deux variables sont nécessaires pour décrire les géomatériaux non-saturés. Les modèles de surface d'état (valable uniquement pour des chemins monotones) ont été développés mais c'est l'approche de Barcelone, avec sa courbe LC, qui permet le développement du modèle le plus abouti.

Les variables d'état utilisées sont les contraintes nettes et la succion. Cela permet une analyse aisée des essais à succion contrôlée car la pression d'air est généralement constante ou imposée. Par contre, la transition de l'état partiellement saturé à l'état saturé est plus problématique.

Ce concept de surface LC est donc très puissant et adaptable à de nombreux modèles, ce qui fait d'ailleurs son succès. Il est d'ailleurs également nécessaire dans les lois de comportement utilisant une contrainte effective généralisée et la succion!

### 3.4. Le modèle d'Alonso - Gens

La description de ce modèle se base essentiellement sur les travaux de l'équipe de l'UPC à Barcelone. Cette loi constitutive est dédiée aux sols partiellement saturés qui sont légèrement ou modérément expansifs. Nous présenterons le modèle de base ([ALONSO *et al.*, 1990]) et non les modèles ultérieurs incluant des effets de microstructure ([GENS *et al.*, 1992])

Ce modèle est capable de reproduire de nombreux comportements observés sur des sols non-saturés : le comportement volumique, la plasticité et les phénomènes d'effondrement et de gonflement. L'effondrement correspond à une compaction plastique irréversible créée lors d'un chemin de mouillage.



La loi de comportement d'Alonso-Gens appartient à la famille des CamClay. Il prédit donc un adoucissement irréaliste dans sa partie sur-consolidée et ne permet pas de reproduire des effets de cycles de chargement ou de microstructure. Toutefois, sa surface de plasticité évolue de manière à prendre en compte l'influence de la succion. Le comportement élastique et les lois d'écrouissage sont également modifiés.

### 3.4.1. ELASTICITE

Les déformations élastiques peuvent être divisées en deux termes : le premier lié à des variations de contraintes moyennes et le second à des changements de succion.

$$\dot{\varepsilon}^e = \dot{\varepsilon}_{mec}^e + \dot{\varepsilon}_{suc}^e \quad (3.25)$$

Il est communément admis que les variations de succion n'influencent que le comportement volumique d'un sol. Les incréments de déformations volumiques produits respectivement par un incrément de contrainte moyenne nette  $d\bar{p}$  et par un incrément de succion  $ds$  sont définis par les relations suivantes :

$$d\varepsilon_v^e(\bar{p}) = \frac{\kappa}{1+e} \frac{d\bar{p}}{\bar{p}} \quad (3.26)$$

$$d\varepsilon_v^e(s) = \frac{\kappa_s}{1+e} \frac{ds}{(s + p_{at})} \quad (3.27)$$

où  $e$  est l'indice des vides,  $\kappa$  et  $\kappa_s$  sont les paramètres élastiques relatifs respectivement aux modifications de contraintes nettes et de succion,  $p_{at}$  est la pression atmosphérique qui est introduite de manière à éviter des valeurs infinies de module élastique sous succion nulle.

Les déformations déviatoriques élastiques dues à un incrément de déviateur  $dq$  sont données par l'expression suivante :

$$d\varepsilon_d^e = \frac{1}{3} G dq \quad (3.28)$$

Dans ce modèle, le module cubique  $K$  dépend donc de la contrainte moyenne et le module de cisaillement  $G$  est constant. En conséquence, le coefficient de Poisson dépend également de l'état de contrainte.

$$K = \frac{(1+e)}{\kappa} \bar{p} \quad (3.29)$$

$$G = G_0$$

### 3.4.2. SURFACE DE PLASTICITE EN CONDITIONS SATUREES

Ce modèle est similaire à un modèle à état critique dans les conditions saturées. Dans le plan  $(\bar{p}, q)$ , la surface plastique est une ellipse définie par la relation :

$$q^2 + M^2 \bar{p}(\bar{p} + \bar{p}_0) = 0 \quad (3.30)$$

Où  $\bar{p}_0$  est la contrainte de pré-consolidation et  $M$  la pente de la droite d'état critique (figure 3.16).

En plasticité associée, la direction des déformations plastiques dépend de l'état de contraintes. Les déformations volumiques totales sont données par :

$$d\varepsilon_v = \frac{\lambda}{1+e} \frac{d\bar{p}}{\bar{p}} \quad (3.31)$$

Connaissant les déformations volumiques élastiques, l'expression des déformations irréversibles est donc :

$$d\varepsilon_v^p = \frac{\lambda - \kappa}{1+e} \frac{d\bar{p}}{\bar{p}} \quad (3.32)$$

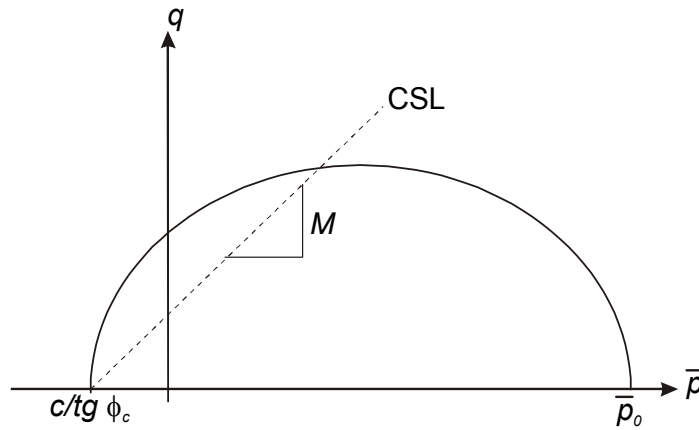


Figure 3.16 : Modèle d'Alonso-Gens en conditions saturées

### 3.4.3. SURFACE DE PLASTICITE EN CONDITIONS NON-SATUREES

En saturation partielle, la succion apparaît et affecte le comportement du sol, comme observé expérimentalement :

- La raideur du sol augmente avec la succion ce qui signifie que la pente de la courbe de compressibilité est plus faible en conditions non-saturées. De plus, le sol présente une contrainte de pré-consolidation apparemment plus importante.
- Lors d'un chemin de mouillage (diminution de la succion), un gonflement apparaît si la pression de confinement est faible et inversement un effondrement survient pour des pressions plus importantes. Dans ce dernier cas, une partie des déformations créées est irréversible.
- La succion apporte au sol une résistance au cisaillement plus importante, qui peut être interprétée comme une augmentation apparente de la cohésion. Ceci est vrai pour un certain intervalle de valeurs de pression de confinement.

Ce modèle est décrit pour un état de contraintes isotrope dans le plan  $(\bar{p}, s)$  et en présence de contraintes déviatoriques dans le plan  $(\bar{p}, q)$ .

### 3.4.3.1. Surface plastique dans le plan $(\bar{p}, s)$

Dans cette loi de comportement, la contrainte nette et la succion ont un rôle tout à fait similaire. La figure 3.17 montre le modèle utilisé pour prévoir les variations de volume spécifique  $v = 1 + e$  pour des variations des variables d'état de contrainte.

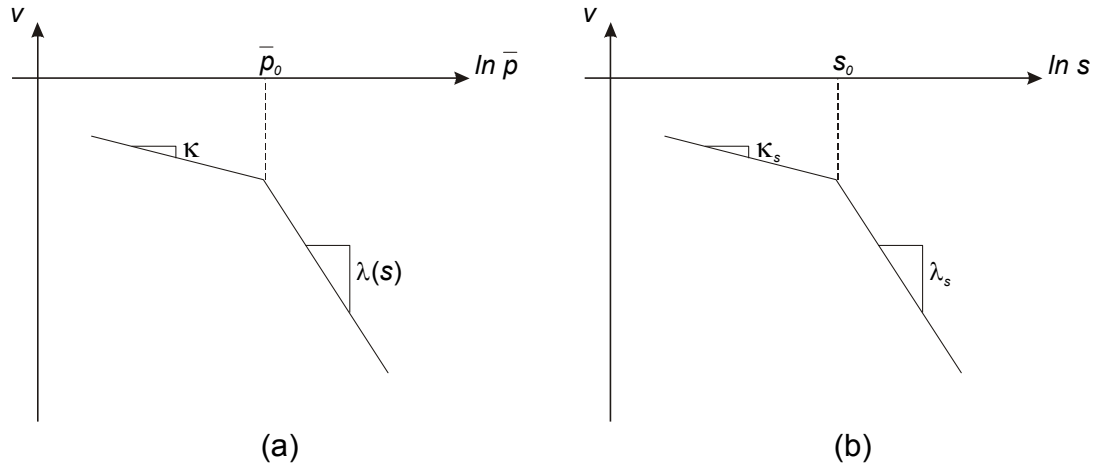


Figure 3.17 : Modèle de comportement pour des variations de contrainte nette (a) et de succion (b)

La variation de volume spécifique d'un échantillon soumis à un incrément de contrainte nette moyenne suit un modèle oedométrique classique avec une pente élastique  $\kappa$  et une pente de la droite vierge  $\lambda$ . Nous avons donc les relations suivantes :

$$dv = -\kappa \frac{d\bar{p}}{\bar{p}} \quad (3.33)$$

$$dv = -\lambda(s) \frac{d\bar{p}}{\bar{p}} \quad (3.34)$$

La compressibilité plastique  $\lambda(s)$  dépend de la succion tandis que le module  $\kappa$  est supposé constant. La relation définissant la raideur du sol  $\lambda(s)$  en fonction de la succion doit être exprimée sachant que celle-ci augmente avec la succion mais pas indéfiniment :  $\lambda(s)$  a probablement une valeur asymptotique pour de hautes valeurs de succions. Ce comportement est bien prédit par l'équation suivante :

$$\lambda(s) = \lambda(0) [(1-r) \exp(-\omega s) + r] \quad (3.35)$$

Où  $r$  est une constante liée à la raideur maximum,  $r = \frac{\lambda(s \rightarrow \infty)}{\lambda(0)}$  et  $\omega$  est un paramètre qui contrôle l'augmentation de la raideur du sol avec la succion.

Le modèle de comportement pour des variations de succion est calqué sur le modèle oedométrique. Des pentes élastique  $\kappa_s$  et plastique  $\lambda_s$  sont définies et la variation de volume spécifique est donnée par les relations suivantes :

$$dv = -\kappa_s \frac{ds}{s + p_{at}} \quad (3.36)$$

$$dv = -\lambda_s \frac{ds}{s + p_{at}} \quad (3.37)$$

où les paramètres  $\kappa_s$  et  $\lambda_s$  sont supposés constants et  $p_{at}$  est la pression atmosphérique introduite afin d'avoir une rigidité non-nulle à succion nulle.

Ce modèle de comportement en succion est très simple et devrait sans doute intégrer des notions comme la pression d'entrée d'air. En effet, le sol ne se désature qu'à partir d'une certaine succion qui peut ne pas être négligeable. Cela améliorerait la réponse du modèle pour le passage saturé non-saturé.

▪ Courbe *Loading Collapse* (LC)

La contrainte nette de pré-consolidation  $\bar{p}_0$  dépend de la succion. La contrainte de pré-consolidation en condition saturée est notée  $\bar{p}_0^*$  ; une relation entre  $\bar{p}_0(s)$  et  $\bar{p}_0^*$  peut être définie.

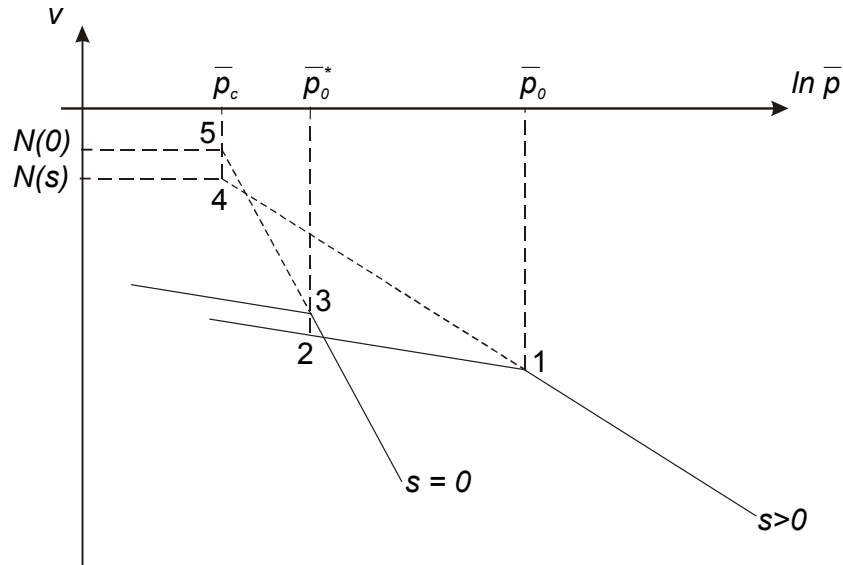


Figure 3.18 : Courbes de compressibilité pour un sol saturé et non-saturé  
[ALONSO et al., 1990]

Dans un modèle oedométrique (où les contraintes sont supposées isotropes), le volume spécifique d'un échantillon,  $v = 1 + e$ , dépend de la succion et de la contrainte moyenne (figure 3.18) :

$$v = N(s) - \lambda(s) \ln \frac{\bar{p}}{\bar{p}_c} \quad (3.38)$$

où  $N(s)$  est le volume spécifique pour  $\bar{p} = \bar{p}_c$  et  $\bar{p}_c$  est une pression nette de référence.

A la figure 3.18, deux chemins isotropes sont représentés : le premier à une succion donnée et le second à succion nulle. Considérons les deux points 1 et 3, ils appartiennent tous deux à la même surface de plasticité dans le plan  $(\bar{p}, s)$ . Une relation entre  $\bar{p}_0(s)$  et  $\bar{p}_0^*$  peut être définie en reliant la variation de volume spécifique entre ces deux points. Cette variation peut être définie selon un chemin virtuel impliquant un déchargement initial de  $\bar{p}_0(s)$  à  $\bar{p}_0^*$  (du point 1 à 2,  $s$  demeurant constant) suivi d'une réduction de succion de  $s \neq 0$  jusqu'à une valeur nulle (du point 2 à 3,  $\bar{p}$  demeurant constant).

La variation de volume s'écrit donc :

$$v_1 + (\Delta v_{\bar{p}})_{s=Cst} + (\Delta v_s)_{\bar{p}=Cst} = v_3 \quad (3.39)$$

$$\left( N(s) - \lambda(s) \ln \frac{\bar{p}_0}{\bar{p}_c} \right) + \left( \kappa \ln \frac{\bar{p}_0}{\bar{p}_0^*} \right) + \left( \kappa_s \ln \frac{s + p_{at}}{p_{at}} \right) = \left( N(0) - \lambda(0) \ln \frac{\bar{p}_0^*}{\bar{p}_c} \right) \quad (3.40)$$

De plus, considérant un second chemin virtuel entre les points 5 et 4 qui implique une augmentation de succion de  $s = 0$  à  $s \neq 0$  ( $\bar{p}$  demeurant égale à  $\bar{p}_c$ ), Alonso et Gens trouvent l'expression suivante :

$$v_5 + (\Delta v_s)_{\bar{p}=Cst} = v_4 \quad (3.41)$$

$$\left( N(0) - \lambda(0) \ln \frac{\bar{p}_c}{\bar{p}_c} \right) - \left( \kappa_s \ln \frac{s + p_{at}}{p_{at}} \right) = \left( N(s) - \lambda(s) \ln \frac{\bar{p}_c}{\bar{p}_c} \right) \quad (3.42)$$

$$\text{Vu que : } \ln \frac{\bar{p}_c}{\bar{p}_c} = 0 : N(0) - N(s) = \kappa_s \ln \frac{s + p_{at}}{p_{at}} \quad (3.43)$$

Des équations précédentes (3.40) et (3.43), les relations suivantes peuvent être écrites :

$$\begin{aligned}
-\lambda(s) \ln \frac{\bar{p}_0}{\bar{p}_c} + \kappa \ln \frac{\bar{p}_0}{\bar{p}_0^*} &= -\lambda(0) \ln \frac{\bar{p}_0^*}{\bar{p}_c} \\
-\lambda(s) \ln \frac{\bar{p}_0}{\bar{p}_c} + \kappa \ln \frac{\bar{p}_0}{\bar{p}_c} + \kappa \ln \frac{\bar{p}_c}{\bar{p}_0^*} &= -\lambda(0) \ln \frac{\bar{p}_0^*}{\bar{p}_c} \\
(\kappa - \lambda(s)) \ln \frac{\bar{p}_0}{\bar{p}_c} &= (\kappa - \lambda(0)) \ln \frac{\bar{p}_0^*}{\bar{p}_c} \\
\left( \frac{\bar{p}_0}{\bar{p}_c} \right)^{\kappa - \lambda(s)} &= \left( \frac{\bar{p}_0^*}{\bar{p}_c} \right)^{\kappa - \lambda(0)} \\
\frac{\bar{p}_0}{\bar{p}_c} &= \left( \frac{\bar{p}_0^*}{\bar{p}_c} \right)^{\frac{\lambda(0) - \kappa}{\lambda(s) - \kappa}}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

La courbe *Loading Collapse* LC est à présent définie en accord avec le modèle isotrope choisi. Cette équation joue un rôle important et explique l'augmentation de la contrainte de pré-consolidation en fonction de la succion.

- Courbe *Suction Increase* (SI)

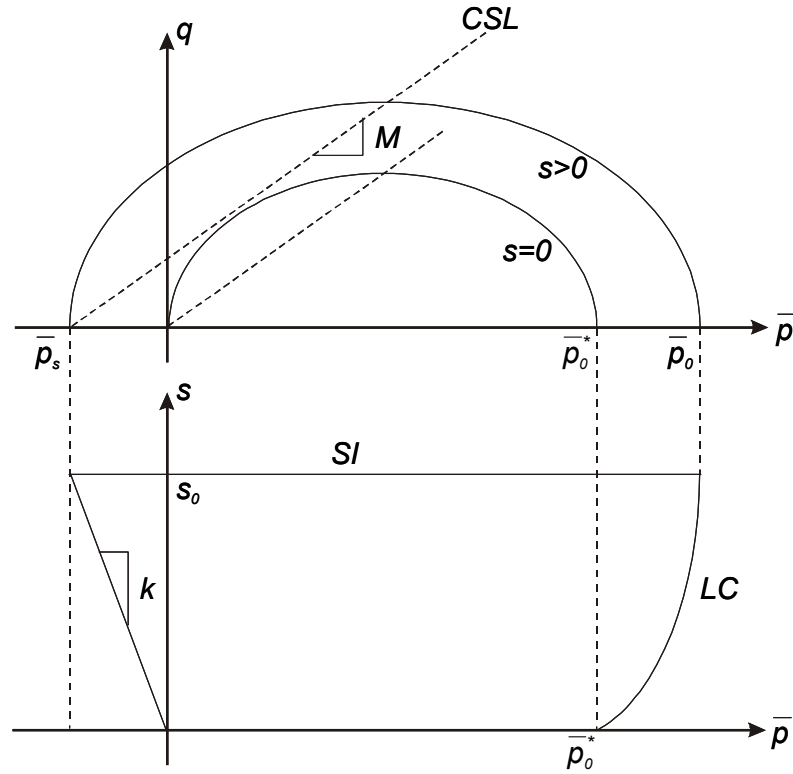


Figure 3.19 : Surfaces de plasticité dans le plan  $(\bar{p}, s)$  et le plan  $(\bar{p}, q)$

Comme nous l'avons précisé auparavant, une augmentation de succion peut induire des déformations irréversibles. Il est proposé de définir un niveau  $s_0$  de succion à partir duquel des déformations plastiques apparaissent.

Le critère  $s = s_0$  est un choix préliminaire qui doit être vérifié par des observations expérimentales. Le paramètre  $s_0$  est supposé être indépendant du niveau de contraintes. Toutefois, dans des versions ultérieures du modèle [GENS *et al.*, 1992], une dépendance de la contrainte moyenne est introduite.

Les courbes LC et SI sont tracées dans les plans  $(\bar{p}, q)$  et  $(\bar{p}, s)$  à la figure 3.19. La courbe SI est présumée valide pour des valeurs positives de la contrainte moyenne.

### 3.4.3.2. Surface de plasticité dans le plan $(\bar{p}, q)$

Dans un esprit de simplicité, la surface de plasticité en conditions non-saturées est une extension de la formulation à succion nulle. L'effet de cette dernière est prise en compte par l'augmentation de la cohésion et de la contrainte de pré-consolidation.

Sur base de résultats expérimentaux, les auteurs supposent que la succion n'influence pas l'angle de frottement du matériau ; la pente de la ligne d'état critique est donc indépendante de la succion. L'augmentation de résistance au cisaillement se traduit par une augmentation de la cohésion. Une relation linéaire est proposée, analogue à la proposition de Fredlund (relation 3.9):

$$\bar{p}_s = c(s) = c(0) + ks \quad (3.45)$$

où  $k$  est une constante du matériau.

L'équation de la surface de plasticité devient donc :

$$q^2 + M^2 (\bar{p} - \bar{p}_s)(\bar{p}_0 + \bar{p}) = 0 \quad (3.46)$$

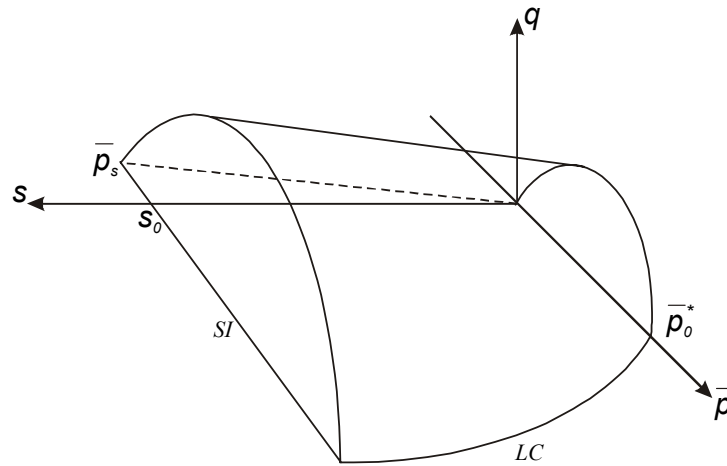


Figure 3.20 : Surface plastique dans l'espace  $(\bar{p}, q, s)$

Une représentation tri-dimensionnelle de la surface plastique dans l'espace  $(\bar{p}, q, s)$  est donnée à la figure 3.20.

#### 3.4.4. REGLES D'ECROUISSAGE

Une augmentation de la contrainte moyenne selon la droite vierge induit des déformations plastiques données par la relation suivante :

$$d\varepsilon_v^{m,p} = \frac{\lambda(s) - \kappa}{1 + e} \frac{d\bar{p}}{\bar{p}} \quad (3.47)$$

Le paramètre d'écrouissage est la contrainte de pré-consolidation à succion nulle  $\bar{p}_0^*$ . L'expression (3.47) devient pour une succion nulle :

$$d\varepsilon_v^{m,p}(\bar{p}) = \frac{\lambda(0) - \kappa}{1 + e} \frac{d\bar{p}_0^*}{\bar{p}_0^*} \quad (3.48)$$

qui représente l'équation d'écrouissage de la courbe LC.

Pour des succions supérieures au seuil de plasticité  $s_0$ , des déformations irréversibles sont créées :

$$d\varepsilon_v^{s,p}(s) = \frac{\lambda_s - \kappa_s}{1 + e} \frac{ds_0}{s_0 + p_{at}} \quad (3.49)$$

Les formulations (3.48) et (3.49) supposent que les deux mécanismes d'écrouissage sont indépendants. Toutefois, des résultats expérimentaux montrent que ceux-ci sont couplés [JOSA *et al.*, 1987]. Dès lors, les relations précédentes deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{p}_0^*}{\bar{p}_0^*} &= \frac{1 + e}{\lambda(0) - \kappa} d\varepsilon_v^p \\ \frac{ds_0}{s_0 + p_{at}} &= \frac{1 + e}{\lambda_s - \kappa_s} d\varepsilon_v^p \\ \text{avec } d\varepsilon_v^p &= d\varepsilon_v^{m,p}(\bar{p}) + d\varepsilon_v^{s,p}(s) \end{aligned} \quad (3.50)$$

La règle de dilatançe est différente de celle utilisée dans le CamClay. A priori, dans le cadre d'une plasticité associée, la relation suivante est vérifiée dans le plan  $(\bar{p}, q)$  :

$$\frac{d\varepsilon_d^p}{d\varepsilon_v^p(\bar{p})} = \frac{2q}{M^2(2\bar{p} + \bar{p}_0 - \bar{p}_s)} \quad (3.51)$$

Mais un modèle non-associé est proposé en introduisant un paramètre  $\alpha$ :

$$\frac{d\varepsilon_d^p}{d\varepsilon_v^p(\bar{p})} = \frac{2q\alpha}{M^2(2\bar{p} + \bar{p}_0 - \bar{p}_s)} \quad (3.52)$$



$\alpha$  est déterminé de manière à prédire des déformations latérales nulles (chemin oedométrique) pour un état de contraintes correspondant à un coefficient  $K_0$  défini par la formule de Jacky.

#### 4. CONCLUSIONS

En condition non-saturée, la succion influence le comportement mécanique des géomatériaux. Des appareils expérimentaux permettant le contrôle de la succion ont ainsi été développés depuis les années 1960. Les trois principaux systèmes sont la méthode de translation d'axe, la méthode osmotique et la méthode saline. Chacune a été adaptée à des cellules triaxiales, oedométriques ou de cisaillement directe.

Les résultats expérimentaux mettent en évidence le rôle de la succion : elle tend à raidir et à améliorer la résistance des sols non-saturés. Ainsi, pour des chemins de contraintes isotropes, il est généralement admis que la contrainte de pré-consolidation augmente avec la succion et que la compressibilité plastique diminue. Lors d'un chemin de mouillage, le comportement du matériau dépend de l'état de contrainte : un gonflement ou un effondrement est observé selon que le confinement est faible ou important. Pour des sollicitations déviatoriques, la résistance augmente avec la succion ; cela est traduit généralement par une augmentation de la cohésion.

Afin de reproduire ces aspects du comportement des sols insaturés, des modèles ont été proposés. Les premières approches ont tenté d'utiliser la notion de contrainte effective généralisée dans laquelle intervient la succion. Toutefois, ces tentatives de modèle avec une seule variable de contrainte se sont révélées incapables de reproduire le phénomène d'effondrement ! Des travaux ultérieurs ont montré que deux variables d'état de contrainte sont nécessaires : les plus utilisées sont la contrainte nette et la succion.

Le premier modèle élastoplastique, intégrant tous les aspects du comportement des matériaux sous saturation partielle, est le modèle de Barcelone dont le principal intérêt réside dans la concept de la courbe LC qui permet d'expliquer simplement le phénomène d'effondrement. Nous utiliserons d'ailleurs ce dernier par la suite, pour modéliser le comportement de la craie non-saturée.



## **CHAPITRE IV**

### **Modèle de comportement d'une craie non saturée**



## CHAPITRE IV

### MODELE DE COMPORTEMENT D'UNE CRAIE NON SATUREE

#### 1. INTRODUCTION

L'exploration pétrolière en mer du Nord débuta à la fin des années 1950 et la première découverte commerciale de pétrole fut faite à 200 km à l'ouest des côtes norvégiennes dans le champ d'Ekofisk en 1969 [MASSON *et al.*, 1980]. La structure de ce champ couvrant environ 50 km<sup>2</sup> est un dôme elliptique, allongé dans la direction Nord-Sud. Il est situé sous plus de 3000 m d'overburden de silts et d'argilites du tertiaire (figure 4.1). Le réservoir de 300 m d'épaisseur est constitué de deux couches de craies fracturées (formations de Tor et d'Ekofisk) séparées par une couche de 20 m de craie plus rigide et très peu perméable (teneur en silice et argile importante) appelée Tight zone [TEUFEL *et al.*, 1990]. La porosité dans les couches de craie varie entre 5 et 51% avec une moyenne de 32% dans la formation d'Ekofisk (Danien) et 30% dans la formation de Tor (Maastrichtien). La perméabilité de pore est par contre relativement faible avec une valeur moyenne de l'ordre de  $10^{-15}$  m<sup>2</sup>.

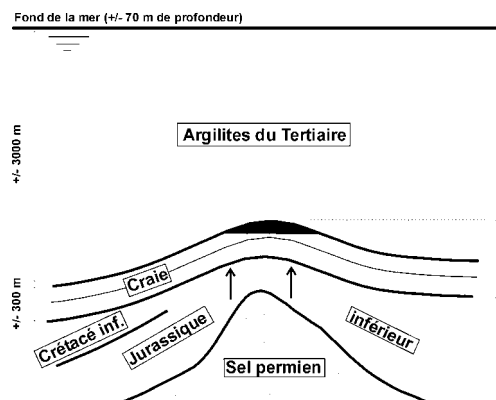


Figure 4.1 : Contexte géologique du réservoir d'Ekofisk d'après SCHROEDER (2001)

Ekofisk est un des plus grands réservoirs de pétrole mais il produit également du gaz. L'exploitation d'Ekofisk a commencé au début des années septante. Jusqu'en 1987, la production d'huile était assurée par une dépressurisation du réservoir et par la compaction qui en résultait. Des injections de gaz étaient réalisées afin de limiter ces effets mais après 1977, le gaz a également été produit à des fins commerciales et les injections diminuèrent [MAURY *et al.*, 1996].

Les compactions des couches du réservoir ont rapidement été observées ; ces tassements se répercutèrent en effet en surface et provoquèrent une subsidence des fonds marins. En 1984, le centre d'Ekofisk était descendu de 3 m et les stations offshore se trouvèrent dès lors mises en danger. La subsidence s'est poursuivie avec une

vitesse de 30 cm/an [MAURY *et al.*, 1996] et est actuellement proche de 8 m. En conséquence, des travaux de surélévation des stations ont été réalisés mais ceux-ci occasionnent des surcoûts importants. On comprend dès lors l'intérêt de déterminer l'origine du phénomène afin d'y remédier.

Il faut cependant nuancer ce propos en précisant que la compaction n'a pas que des effets négatifs : elle améliore également la production d'huile. Ainsi, l'intérêt des pétroliers n'est pas tant d'empêcher le phénomène mais plutôt de pouvoir le comprendre et le contrôler.

L'injection d'eau fut initiée en 1987 de manière à repressuriser le réservoir et limiter ainsi ses déformations. Après quelques essais préliminaires apparemment concluants, décision fut prise de réaliser des injections massives d'eau dans les différentes couches du réservoir. Le résultat a consisté en un accroissement de la compaction !

De nombreuses recherches ont alors été menées afin de mieux comprendre les phénomènes en jeu. Des auteurs ([ANDERSEN *et al.*, 1992], [DELAGE *et al.*, 1996]) ont émis l'hypothèse que l'origine de ces déformations additionnelles lors d'injections était la tension capillaire ou succion. En effet, une certaine quantité d'eau serait toujours présente dans le réservoir et une succion existerait dès lors entre la phase mouillante (eau) et la phase non-mouillante (huile).

L'influence de la succion sur le comportement mécanique d'un matériau a déjà été largement étudiée dans le domaine de la mécanique des sols non-saturés. Les fluides en présence sont alors l'eau (phase mouillante) et l'air (phase non-mouillante). C'est dans ce cadre qu'a été proposé le projet PASACHALK. L'idée de ce projet est d'appliquer les concepts et modèles de la mécanique des sols non-saturés au problème de compaction des réservoirs crayeux lors d'injections. Nos partenaires dans ce projet sont le CERMES-ENPC, Elf Norge et le LGIH-ULg.

Nous allons donc à présent développer dans ce chapitre un modèle de comportement mécanique de la craie non-saturée. Nous ferons auparavant un relevé des observations réalisées sur ce matériau et nous passerons ensuite en revue différents modèles qui ont été développés dans ce domaine.

## **2. OBSERVATIONS ET ASPECTS EXPERIMENTAUX**

Suite aux problèmes rencontrés dans les réservoirs de Mer du Nord, il a été nécessaire d'étudier le comportement de la craie. Ces travaux de recherches ont été principalement effectués dans le cadre des programmes Joint Chalk Research (JCR). Différents aspects du comportement mécanique de la craie ont ainsi été mis en évidence.

La réalisation d'essais sur des craies de réservoirs est possible mais le coût de prélèvement des échantillons est fort élevé. De plus, le matériau est profondément perturbé lors de sa remontée par les modifications de contraintes, de pression de fluides,

de température. Enfin, les opérations de nettoyage de l'échantillon peuvent modifier sa mouillabilité. Dès lors, les expérimentateurs ont entrepris également des recherches sur des craies d'affleurement. Parmi ces dernières, la craie provenant de la carrière de la cimenterie C.B.R. de Hallembaye (à proximité du village de Lixhe) est devenue une craie de référence dans le domaine sous le nom de *craie de Lixhe*. Cette craie possède l'avantage d'appartenir au même niveau stratigraphique que certaines craies de réservoirs rencontrées en Mer du Nord et des études ont montré ([MONJOIE *et al.*, 1985], [Da SILVA *et al.*, 1990]) que cette craie présente un comportement similaire à celui des craies de réservoirs. La seule différence réside bien sûr dans le fait que la craie de Lixhe n'a jamais été saturée en pétrole !

## 2.1. Composition et minéralogie

La craie est en fait constituée de l'assemblage de l'entièreté ou de fragments de squelettes en calcite (dimension environ  $1\mu\text{m}$ ) produits par des algues du plancton appelées coccolithophoridés. Ces assemblages peuvent former des rosettes ou des anneaux de dimension proche de  $10\mu\text{m}$  et sont appelés coccolithes [RISNES *et al.*, 1999a]. Ces structures ne peuvent être observées qu'au microscope électronique à balayage (figure 4.2). A l'origine, les coccolithes formaient des coccosphères à l'intérieur desquelles se trouvaient de très petites parties organiques du nannoplancton [SCHROEDER, 2002].

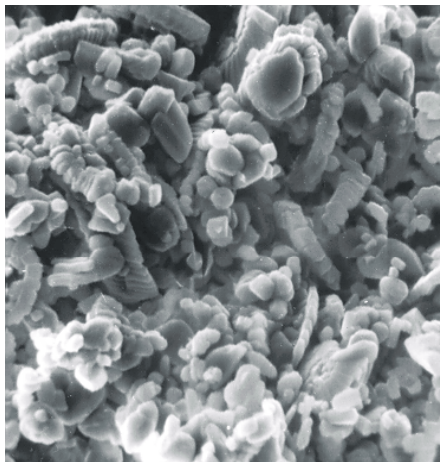


Figure 4.2 : Structure de la craie de Lixhe

La figure 4.2 montre clairement qu'aucune orientation préférentielle des grains ne peut être définie. Cette hétérogénéité au niveau microscopique n'empêche toutefois pas une homogénéité au niveau macroscopique. Cela complique d'ailleurs l'étude de la craie car rien ne différencie au MEB (microscope à balayage) une craie ayant subi un chargement mécanique d'une craie avant essai !

Les craies d'affleurement peuvent être divisées en deux groupes, essentiellement suivant leur composition [PIAU *et al.*, 1994]. Une craie très pure est constituée de 98 à 100% de carbonate de calcium sans autres minéraux secondaires. Le  $\text{CaCO}_3$  est

l'élément constitutif des grains de calcite. La porosité de la craie pure est supérieure à 30% et peut même atteindre 45 à 50%. Cette craie est un matériau formé d'un assemblage de coccolithes ou de fragments de coccolithes entre lesquels des ponts d'eau adsorbée sont créés.

Une craie impure contient des minéraux secondaires comme la silice, l'argile, la dolomite, la glauconie, la pyrite ou encore des cristaux de calcite. La cohésion est alors assurée par des ponts solides ce qui modifie le comportement de la craie. La porosité est généralement inférieure à 30%.

La craie de Lixhe est une craie pure contenant moins de 1% de silice. Sa structure ouverte explique que son volume poreux soit très important mais de part la finesse des grains et l'étroitesse des pores, la perméabilité de pore de la craie reste relativement faible (environ  $10^{-15}$  m<sup>2</sup>). Le tableau 4.1 reprend les caractéristiques physico-chimiques de la craie de Lixhe.

Propriétés	Valeurs	Unités
Composition moyenne :	CaCO <sub>3</sub>	98.5
	SiO <sub>2</sub>	0.8
	MgO	0.2
	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0.1
	P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	0.15
	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0.15
Porosité	42 à 44	%
Rayon des pores	0.5	µm
Perméabilité	0.1 à 1	mD

Tableau 4.1: Caractéristiques de la craie de Lixhe

## 2.2. Comportement mécanique

Les nombreuses expérimentations, comme d'ailleurs la plupart des lois de comportement dédiées à la craie, font état de deux mécanismes de plasticité : le *pore collapse* et une *rupture de cisaillement* typique de matériaux frottants (figure 4.3).

Le *pore collapse* se caractérise par un comportement contractant s'accompagnant d'une diminution importante de la porosité (quelques pourcents de déformations volumiques), liée à l'effondrement des plus gros pores. Selon MONJOIE *et al.* (1990), il est causé par la rupture des liaisons physico-chimiques entre les grains induisant des glissements entre les grains. Ce mode se présente pour des contraintes moyennes prédominantes comme lors d'essais oedométriques ou d'essais isotropes par exemple. Il est à remarquer que ce qui est appelé spécifiquement *pore collapse* correspond à la phase de transition entre la comportement élastique et la phase d'écrouissage (figure



4.3). En mécanique des sols, le *pore collapse* correspond à l'ensemble de la phase plastique (entrée en plasticité et phase d'écrouissage).

La *rupture par cisaillement* correspond à une déformation plastique brutale de la craie. Cette rupture soudaine signifie donc qu'aucun écrouissage n'existe lorsque ce mode est actif. Celui-ci apparaît pour des contraintes déviatoriques prédominantes (chemin triaxial de compression par exemple) et correspond à un mode de rupture.

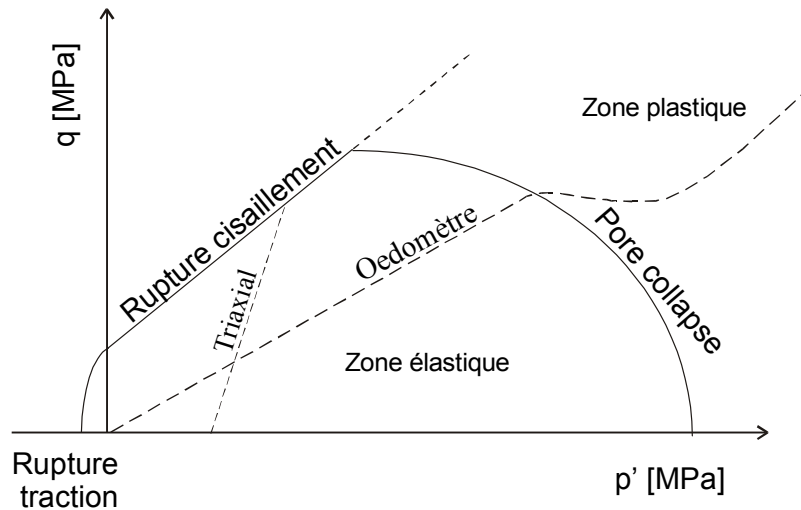


Figure 4.3 : Comportement général d'une craie

La résistance en traction de la craie est faible, de l'ordre de 1 MPa et elle est généralement mesurée lors d'un essai brésilien.

En plus de ces mécanismes plastiques, la craie présente un fluage non-négligeable. De ce fait, il est important de réaliser les expérimentations à une vitesse de chargement contrôlée afin de pouvoir interpréter les résultats. En effet, différentes propriétés de la craie dépendent de la vitesse de chargement : pore collapse, module élastique, ... Il est ainsi possible de définir des courbes de comportement correspondant à une vitesse donnée (figure 4.4). La viscosité de la craie devrait donc être prise en compte dans une loi de comportement décrivant cette roche tendre.

La craie est un matériau naturel dont les propriétés mécaniques présentent naturellement une certaine dispersion. Il est toutefois possible de mettre en évidence l'influence de trois paramètres : la porosité, le fluide saturant les pores et la teneur en silice et en argile [ENGSTROM, 1992].

La porosité influence aussi bien les paramètres élastiques que plastiques. Nous donnons ci-dessous des relations les liant à la porosité et établies par ENGSTRÖM (1992) pour des craies du Maastrichtien et du Danien :

$$E = 224,8.e^{-11,2,n} \text{ [GPa]}$$

$$\nu = 0,117 + 0,21.n$$

où  $E$  est le module de Young,  $\nu$  le coefficient de Poisson et  $n$  la porosité.

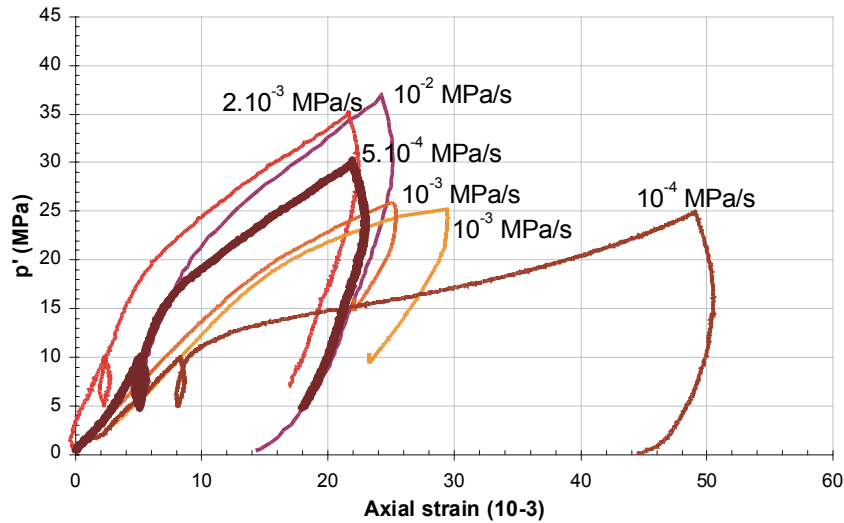


Figure 4.4 : Essais isotropes à différentes vitesses de chargement [SCHROEDER, 2002]

Les caractéristiques de résistance augmentent lorsque la porosité diminue. L'angle de frottement varie entre 20° et 50° et la cohésion entre 2 et 5 MPa pour une craie du Maastrichtien dont la porosité varie entre 40 et 20%.

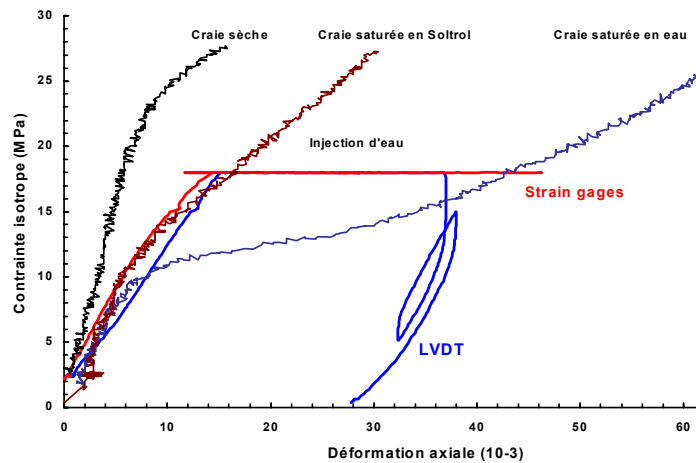


Figure 4.5 : Comportement de la craie pour différents liquides saturants d'après SCHROEDER (2001)

La craie de la Mer du Nord se différencie essentiellement des craies pures par la présence de pétrole dans ses pores. Ces craies saturées en huile sont très sensibles aux injections d'eau : réalisées sous contraintes, celles-ci s'accompagnent d'une compaction importante et localisée au niveau du front d'eau [MAURY *et al.*, 1996].

Le comportement mécanique du matériau dépend du liquide qui le sature. Ainsi, une craie saturée en eau est beaucoup moins résistante qu'une craie saturée en huile. La plus grande résistance est obtenue pour le matériau séché. Il est ainsi possible de définir une courbe de comportement typique d'un fluide saturant. De plus, l'injection d'eau dans une craie saturée en huile provoque une déformation additionnelle telle que la déformation totale soit équivalente à celle d'une craie saturée en eau ayant subi le même chemin de contrainte (figure 4.5) Ces aspects d'injection d'eau seront traités plus en détails dans le chapitre VI. Ainsi, pour une craie partiellement saturée en huile et en eau, il est possible de définir un comportement de craie à l'eau et un autre à l'huile. La transition entre les deux comportements est assez brutale et correspond à une saturation en eau d'environ 2% [SCHROEDER *et al.*, 1998].

Certains auteurs ([MAURY *et al.*, 1996], [DELAGE *et al.*, 1996]) expliquent cette influence du liquide saturant sur le comportement mécanique par la présence de capillaires dans la craie de réservoir. L'origine de ces capillaires s'explique comme suit : lorsque l'huile a remplacé l'eau pour constituer le réservoir, une certaine quantité d'eau n'a pas été chassée. Des ménisques capillaires se sont alors créés entre l'eau (fluide mouillant) et l'huile (fluide non-mouillant). Ce phénomène est bien connu en mécanique des sols mais concerne alors l'eau et l'air.

Le dernier paramètre influençant les propriétés du matériau est la teneur en minéraux secondaires. Dans les craies impures, MONJOIE *et al.* (1985) distingue les craies à faible teneur en silice (<2%) pour lesquelles ce constituant secondaire n'a pas d'influence et les craies à forte teneur (>10%). La résistance s'améliore avec une proportion de silice croissante.

Les expérimentations réalisées sur la craie ont donc montré que le comportement de cette roche tendre est très complexe. Un nombre important de paramètres influence la réponse du matériau aux différentes sollicitations auxquelles il est soumis.

### **2.3. Mécanisme microscopique expliquant la résistance de la craie**

Afin d'expliquer le comportement macroscopique de la craie, il est nécessaire de comprendre l'origine des forces inter-particules qui agissent au niveau des grains de calcites et qui définissent la résistance de ce matériau. Malheureusement, il semble que ces mécanismes microscopiques ne soient pas encore bien compris et qu'un mécanisme unique ne puisse expliquer seul l'ensemble des comportements de la craie.

Ainsi, dans la littérature, il est proposé différentes origines des phénomènes observés :

- Les liaisons peuvent être dues aux phénomènes de dissolution-recristallisation : la craie est dissoute aux endroits de fortes contraintes (contact des grains ou des aspérités des grains) et recristallise ailleurs. Cela amène la création de "ponts de calcite" qui sont toutefois rarement observés au MEB.

- FOGED *et al.* (1996) explique la compaction liée à l'injection d'eau par une réactivation (et augmentation) du fluage de la craie. Cela n'explique toutefois pas le mécanisme agissant au niveau microscopique.
- Certains auteurs [BOIS, 2000] font appel aux particules argileuses (existant même dans des craies très pures) présentes dans la craie pour expliquer des forces de liaison de nature physico-chimique.
- Les liaisons peuvent également être d'origine capillaire. Dans une craie saturée en huile, il resterait suffisamment d'eau pour développer des effets capillaires. Ceci expliquerait la perte de résistance d'une craie resaturée en eau.

Cette dernière piste a été suivie par DELAGE *et al.* (1996) qui ont mis en évidence la similitude du comportement d'une craie et d'un limon non-saturé. Dans un limon, les fluides en présence sont l'eau et l'air (fluide non-mouillant). Dans la craie, l'eau et l'huile sont le couple de fluides. Cette approche permet d'expliquer la résistance plus importante d'une craie saturée en huile (pression capillaire élevée) et le phénomène de collapse lors d'un chemin de mouillage (waterflooding), qui sont des comportements généralement observés dans les sols non-saturés (voir chapitre III).

Malheureusement, cette approche est prise en défaut par des essais sur des craies saturées d'un mélange plus ou moins concentré en éthanol [RISNES *et al.*, 1999a]. Les résultats montrent une augmentation de la résistance avec une concentration croissante. Toutefois, l'éthanol étant totalement miscible dans l'eau, les phénomènes capillaires ne peuvent expliquer ces observations.

En fait, à la place de pression capillaire, il serait plus correcte de parler de succion qui est une notion englobant plus de phénomènes (voir chapitre II). La succion représente une mesure de l'énergie totale de rétention en eau du matériau et outre des aspects purement capillaires, elle comprend également des effets de concentrations et autres. Nous utiliserons donc le terme de succion dans la suite de ce travail afin d'expliquer les phénomènes liés à la sensibilité à l'eau de la craie.

### **3. RELEVÉ BIBLIOGRAPHIQUE DES LOIS DE COMPORTEMENT DE LA CRAIE**

Les modèles mécaniques pour la craie comportent toujours les deux mécanismes plastiques mis en évidence par les expérimentations (pore collapse et rupture par cisaillement). Les premières lois développées concernaient la craie saturée et les travaux les plus aboutis ont été réalisés par SHAO (1991). BRIGNOLI et SANTARELLI (1994) ont été les premiers à introduire l'influence de la saturation dans un modèle de craie mais celui-ci ne pouvait pas reproduire les phénomènes de compaction dans une craie saturée en huile lors de l'injection d'eau. L'approche de PIAU et MAURY (1994) a apporté une solution à ce problème : ils ont défini deux surfaces de charge (l'une pour le comportement à l'huile et l'autre pour celui à l'eau) et introduit une déformation correspondant au passage de l'une à l'autre. Ce concept de modèle à ressaut a servi de

fondement à plusieurs modèles développés ultérieurement ([SCHROEDER *et al.*, 1996], [PLISCHKE, 1996] et [HOMAND *et al.*, 2000]).

### 3.1. Modèle de Shao

Ce paragraphe est basé essentiellement sur les deux références [SHAO *et al.*, 1991] et [SHAO, 1992].

SHAO propose une loi de comportement de la craie basée sur le modèle élasto-plastique de Lade [LADE, 1977]. Les expérimentations réalisées sur la craie montrent clairement deux mécanismes plastiques :

- Pour des chemins de contraintes hydrostatiques, le comportement de la craie se divise en trois phases : une première partie élastique suivie du pore collapse (diminution importante de la porosité) pour finalement se terminer par un écrouissage lié à l'augmentation des contacts entre les grains.
- Pour des chemins triaxiaux, le comportement de la craie dépend de la pression de confinement.

#### 3.1.1. ELASTICITÉ

Les résultats expérimentaux obtenus pour la craie étudiée montrent que le module élastique  $E$  et le module cubique  $K$  augmente avec la contrainte moyenne. Le coefficient de Poisson  $\nu$  montre également une dépendance mais plus faible. De ce fait, ce paramètre élastique est supposé constant.

Le module cubique  $K$  est défini par la relation suivante :

$$K = K^0 \left( \frac{I_\sigma}{3p_0} \right)^{exn} \quad (4.1)$$

Où  $I_\sigma$  est le premier invariant des contraintes,  $K^0$  est la valeur initiale du module cubique et  $p_0$  est la limite élastique hydrostatique. Enfin,  $exn$  est un paramètre matériel.

Cette relation reste valable jusqu'à une certaine valeur de la contrainte moyenne. Au-delà, le module  $K$  devient constant. Le module de Young peut être calculé à partir du module cubique et de la valeur moyenne du coefficient de Poisson :

$$E = 3(1 - 2\nu)K \quad (4.2)$$

#### 3.1.2. SURFACE DE PLASTICITÉ

Dans ce modèle, les déformations plastiques sont produites par deux modes plastiques : d'un côté, un mécanisme hydrostatique correspondant au pore collapse et d'un autre côté, un mécanisme déviatorique correspondant à une distorsion de la matrice

qui peut être reliée à une rupture par cisaillement. Les déformations plastiques sont donc divisées en deux contributions :

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\boldsymbol{\varepsilon}^c + d\boldsymbol{\varepsilon}^d \quad (4.3)$$

### 3.1.2.1. Pore Collapse

La surface de plasticité définissant le pore collapse est indépendante des contraintes déviatoriques :

$$f_c \equiv I_\sigma - Y_c = 0 \quad (4.4)$$

où  $Y_c$  est fonction des déformations plastiques dues au pore collapse.

Une loi d'écoulement associée est définie ( $Q_c = f_c$ ), les déformations plastiques du *collapse* sont donc perpendiculaires à la surface de plasticité et purement isotropes:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^c = d\lambda_c \left( \frac{\partial Q_c}{\partial \sigma_{ij}} \right) \quad (4.5)$$

Avec  $d\lambda_c$  la constante d'écrouissage du collapse.

La fonction d'écrouissage  $Y_c$  dépend des déformations plastiques isotropes et la relation empirique suivante est proposée pour définir  $Y_c$  :

$$Y_c = Y_c^0 + ap_{atm} \xi_c^{exn} \exp(c\xi_c) \quad (4.6)$$

Où  $a$ ,  $exn$  et  $c$  sont des paramètres matériels et  $p_{atm}$  la pression atmosphérique.  $Y_c^0$  correspond à la valeur initiale de  $Y_c$  et  $\xi_c$  est la déformation isotrope plastique équivalente calculée par :

$$\xi_c = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^c \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^c} \quad (4.7)$$

La dérivée de la loi d'écrouissage isotrope est donnée par la relation suivante :

$$\frac{\partial Y_c}{\partial \xi_c} = ap_{atm} (exn \xi_c^{exn-1} + c \xi_c^{exn}) \exp(c\xi_c) \quad (4.8)$$

### 3.1.2.2. Distorsion plastique

Le critère déviatorique d'entrée en plasticité est une relation basée sur une proposition de Lade :

$$f_d \equiv \left( \frac{I_\sigma^3}{III_{\dot{\sigma}}} - 27 \right) \left( \frac{I_\sigma}{p_{atm}} \right)^{exm} - Y_d = 0 \quad (4.9)$$

Où  $exm$  est un paramètre adimensionnel.  $Y_d$  est fonction des déformations déviatoriques.

La relation d'écrouissage  $Y_d$  est définie par la fonction hyperbolique suivante :

$$Y_d = \frac{y_d^r \xi_d}{b + \xi_d d} \quad (4.10)$$

où  $y_d^r$  est la valeur ultime de  $Y_d$ ,  $d$  est un paramètre matériel dépendant de l'état de consolidation initial du matériau et  $\xi_d$  représente la déformation déviatorique plastique équivalente définie par la relation suivante :

$$\xi_d = \sqrt{\varepsilon_{ij}^d \varepsilon_{ij}^d} \quad (4.11)$$

$b$  est un paramètre matériel fonction de la contrainte moyenne de manière à décrire la dépendance de la relation d'écrouissage à cette contrainte :

$$b = \ln \left( a' + b' \frac{I_\sigma}{3p_{atm}} \right), \quad b > 0 \quad (4.12)$$

avec  $a'$  et  $b'$  des paramètres matériels.

Une loi de plasticité non-associée est utilisée et les déformations plastiques sont exprimées par :

$$d\varepsilon_{ij}^d = d\lambda_d \frac{\partial Q_d}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.13)$$

où  $d\lambda_d$  est la constante d'écrouissage déviatorique et  $Q_d$  est la surface d'écoulement plastique définie par :

$$Q_d = I_\sigma^3 - 27III_{\bar{\sigma}} \quad (4.14)$$

La dérivée de la fonction d'écrouissage est donnée par :

$$\frac{dY_d}{d\xi_d} = \frac{y_d^r b}{(b + \xi_d d)^2} \quad (4.15)$$

### 3.1.2.3. Cohésion et résistance en traction

Pour tenir compte de la cohésion et de la résistance en traction que peut présenter le matériau, une transformation de Caquot dans le référentiel des contraintes est réalisée :

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + R.p_{atm}\delta_{ij} \quad (4.16)$$

La valeur de  $R.p_{atm}$  dépend de la résistance en traction. Pour un matériau sans cohésion, le coefficient  $R$  est nul.

### 3.1.3. VISCOPLASTICITÉ DE LA CRAIE

Dans le précédent paragraphe, le comportement de la craie est étudié sans tenir compte de l'effet du fluage. Pour des études à long terme, les déformations induites dans le temps doivent être étudiées :

Un modèle visco-plastique est proposé sur base de la loi élasto-plastique :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^{c-vp} + \underline{\varepsilon}^{d-vp} \quad (4.17)$$

Le comportement élastique est supposé ne pas être affecté par le phénomène du fluage. Les deux modes plastiques mentionnés précédemment généreront des déformations visqueuses.

Ces déformations visco-plastiques sont gouvernées par deux fonctions scalaires :

$$F_c = f_c(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^c) - \gamma_c(\varepsilon_{ij}^c) \quad (4.18)$$

$$F_d = f_d(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^d) - \gamma_d(\varepsilon_{ij}^d) \quad (4.19)$$

Quand ces fonctions  $F_c$  ou  $F_d$  sont inférieures ou égales à zéro, le comportement est purement élastique. Lorsque des déformations de fluage apparaissent, la vitesse de déformations est gouvernée par les relations suivantes :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \gamma_c \langle \phi_c(F_c) \rangle \frac{\partial Q_c}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{et} \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^d = \gamma_d \langle \phi_d(F_d) \rangle \frac{\partial Q_d}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.20)$$

où  $\phi_c$  et  $\phi_d$  sont des paramètres de viscosité,  $Q_c$  et  $Q_d$  définissent la direction des déformations plastiques et les crochets signifient :

$$\begin{aligned} \langle \phi(x) \rangle &= \phi(x), \text{ si } x > 0 \\ \langle \phi(x) \rangle &= 0, \text{ sinon} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Des données expérimentales permettent de définir les expressions des paramètres de viscosité :

$$\phi_c = \left( \frac{f_c}{y_c} - 1 \right) \alpha_c \quad (4.22)$$

$$\phi_d = \left( \frac{f_d}{y_d} \right)^{b_2} \left( \frac{f_d}{y_d} - 1 \right)^{\alpha_d} \quad (4.23)$$

Où  $\alpha_c$ ,  $\alpha_d$  et  $b_2$  sont des paramètres matériels.

Les paramètres de viscosité  $\gamma_c$  et  $\gamma_d$  dépendent de la contrainte hydrostatique  $I_\sigma$  et la relation suivante est proposée :



$$\gamma_c = \omega_1 \left( \frac{I_\sigma}{3p_{atm}} \right)^t \quad (4.24)$$

$$\gamma_d = \gamma_c a_2$$

Où  $\omega_1$ ,  $t$  et  $a_2$  sont des paramètres du modèle.

Les autres fonctions utilisées dans le modèle visqueux sont identiques à celles définies dans le modèle élasto-plastique ( $\gamma_c = Y_c$  et  $\gamma_d = Y_d$ ).

Ce modèle dédié à la craie comporte toutes les caractéristiques de ce matériau dans son état saturé ; cela en fait assurément un modèle de référence. Son point faible serait peut-être le nombre élevé de paramètres et la difficulté de les définir. Mais pour modéliser un comportement complexe, n'est-il pas nécessaire d'en passer par là ?

### 3.2. Le modèle de Santarelli - Brignoli

Nous avons utilisé les deux références suivantes afin de décrire le modèle de Brignoli-Santarelli : [PAPAMICHOS *et al.*, 1997] et [BRIGNOLI *et al.*, 1994].

Le modèle développé est un modèle à chapeau : il utilise un critère de Mohr-Coulomb fermé sur l'axe des contraintes moyennes de manière à reproduire les deux mécanismes plastiques de la craie. Les auteurs ont développé cette loi de comportement en se basant sur les résultats des essais effectués sur la craie Pietra Leccese. Par rapport au modèle de Shao, celui-ci incorpore l'influence de la saturation ; le couple de variables indépendantes choisies est la contrainte effective généralisée de Bishop  $\sigma'_{ij}$  et la saturation.

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - p_a \delta_{ij} + S_{r,w} (p_a - p_w) \delta_{ij} \quad (4.25)$$

où  $p_a$  et  $p_w$  sont les pressions d'air et d'eau et  $S_{r,w}$  est la saturation en eau.

En prenant la pression atmosphérique comme pression de référence, la pression d'air sera donc nulle quand elle sera égale à la pression atmosphérique et l'équation précédente s'écrira :

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + S_{r,w} s \delta_{ij} \quad (4.26)$$

où  $s$  représente la succion.

#### 3.2.1. ELASTICITÉ

Le modèle élastique est isotrope, linéaire ; les modules sont indépendants de l'état de contrainte et la relation suivante peut être écrite :

$$\sigma'_{ij} = C_{ijkl}^e \varepsilon_{kl}^e \quad (4.27)$$

Toutefois, les expériences ont montré une influence de la saturation sur le module de cisaillement  $G$ . A nos yeux, cette dépendance est quelque peu surprenante car il est

souvent admis que la succion (et donc la saturation) a principalement un effet sur le comportement volumique d'un sol.

La relation élastique écrite sous sa forme incrémentale deviendra donc:

$$\dot{\sigma}'_{ij} = C_{ijkl}^e \dot{\epsilon}_{kl}^e + D_{ij}^e \dot{S}_{r,w} \text{ et } D_{ij}^e = \frac{dC_{ijkl}^e}{dS_{r,w}} \epsilon_{kl}^e \quad (4.28)$$

### 3.2.2. SURFACE DE PLASTICITÉ

La surface de plasticité est définie par une courbe qui est tangente au critère de Drucker-Prager mais qui est refermée sur l'axe des contraintes moyennes (figure 4.6).

$$F(\sigma'_{ij}, \mu, p_s, p_0, S_{r,w}) \equiv q \left[ \cos \beta - \frac{\mu}{\sqrt{3}} \sin \beta \right] - \mu(p_s + p) \sqrt{\frac{p_0 - p}{p_0 + p_s}} = 0 \quad (4.29)$$

où  $p$  est la contrainte moyenne,  $q$  est la contrainte déviatorique ( $q = \sqrt{II_{\dot{\sigma}}}$ ),  $\beta$  est l'angle de Lode,  $p_s$  et  $p_0$  sont des paramètres d'écrouissage qui dépendent des déformations plastiques et de la saturation  $S_{r,w}$ . Le paramètre  $\mu$  est une fonction du sinus de l'angle de frottement.

Cette formulation de la surface de plasticité présente une singularité lorsque la contrainte moyenne égale la pression de pré-consolidation  $p_0$ . De ce fait, le modèle sera exprimé comme suit:

$$F(\sigma'_{ij}, \mu, p_s, p_0, S_{r,w}) \equiv \begin{cases} q \left[ \cos \beta - \frac{\mu}{\sqrt{3}} \sin \beta \right] - \mu(p_s + p) \sqrt{\frac{p_0 - p}{p_0 + p_s}} = 0 & \text{si } q \neq 0 \\ -(p_s + p) \sqrt{\frac{p_0 - p}{p_0 + p_s}} = 0 & \text{si } q = 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

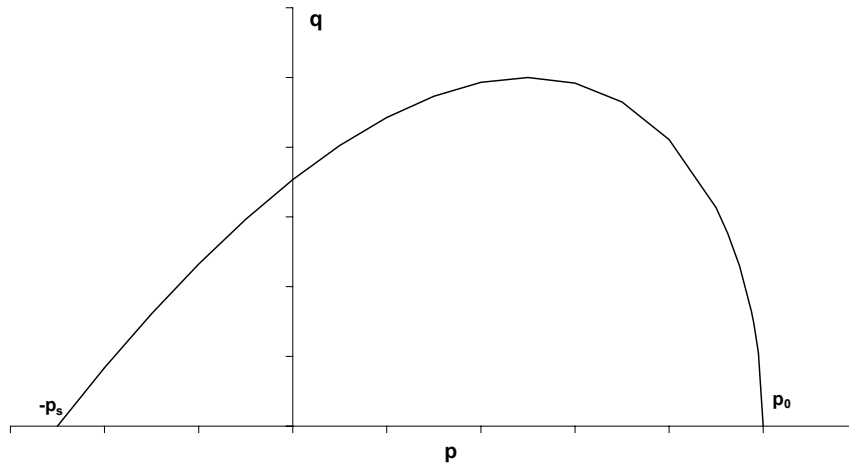


Figure 4.6 : Modèle de Brignoli-Santarelli dans le plan  $(p, \tau)$

Les auteurs utilisent une plasticité non-associée, les déformations plastiques sont définies par :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda}^p \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.31)$$

où  $g$  est la surface d'écoulement et  $\dot{\lambda}^p$  est le multiplicateur plastique.

La surface d'écoulement a une équation similaire à la surface de plasticité mais utilise un angle de dilatance à la place de l'angle de frottement.

Des règles d'écrouissage ont été calibrées sur base des essais réalisés :

$$\mu = \mu_0 + \frac{(1 + \mu_3 \varepsilon_{eq}^p) \varepsilon_{eq}^p}{\mu_1 + \mu_2 \varepsilon_{eq}^p} \quad (4.32)$$

$$p_0 = \frac{p_{v0} + p_{v1} |\varepsilon_{vol}^p| + p_{v2} |\varepsilon_{vol}^p| \ln |\varepsilon_{vol}^p| + p_{v3} \sqrt{|\varepsilon_{vol}^p|}}{1 + p_{sr0} \ln S_{r,w}} \quad (4.33)$$

$$p_s = p_{s,0} + p_{s,1} \exp(-p_{s,2} S_{r,w}) \quad (4.34)$$

Les relations d'écrouissage sont des fonctions des déformations plastiques et de la saturation.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{eq}^p &= \int \dot{\varepsilon}_{eq}^p dt, \dot{\varepsilon}_{eq}^p = \sqrt{2 \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p} \\ \varepsilon_{vol}^p &= \int \dot{\varepsilon}_{vol}^p dt, \dot{\varepsilon}_{vol}^p = \dot{\varepsilon}_{kk}^p \end{aligned} \quad (4.35)$$

Ce modèle est tout à fait intéressant car il comprend tous les mécanismes plastiques de la craie et il ajoute en plus l'effet de la saturation. Il est toutefois incapable de reproduire le phénomène d'effondrement au mouillage.

### 3.3. Modèle de Piau - Maury

[PIAU *et al.*, 1994], [MAURY *et al.*, 1996], [PIAU *et al.*, 1998] et [BOIS *et al.*, 1998] sont les références que nous avons utilisées pour décrire ce modèle.

Dans une première approche, Piau et Maury proposent un modèle essentiellement conceptuel pour interpréter le comportement de la craie soumise à des injections d'eau (*waterflooding*).

Le comportement de la craie avant injection peut être décrit par la relation suivante:

$$\Delta \varepsilon = \Delta \sigma' / E \quad (4.36)$$

Le comportement de la craie injectée sera défini par :

$$\Delta \varepsilon = \Delta \sigma' / E + \varepsilon_w \quad (4.37)$$

L'équation (4.37) tient compte de la déformation induite  $\varepsilon_w$  par l'augmentation de la saturation lors du waterflooding.

Les auteurs n'écartent pas pour autant d'autres origines que la saturation à cette déformation induite et ils englobent dans ce terme  $\varepsilon_w$  tous les phénomènes possibles (chimiques par exemple). Appliqué aux réservoirs de craie partiellement saturés en huile et en eau, ce modèle permet d'estimer la compaction de ces derniers lors d'une injection d'eau.

Des essais d'injection d'eau réalisés sur des échantillons de craie initialement saturés en huile ont montré que cette déformation n'est pas observée pour tous les tests d'injection. En effet, le mode de préparation de l'échantillon et l'état de contraintes lors de l'essai ont une importance capitale. Les échantillons prélevés à partir de carottes forées à l'eau ou des échantillons nettoyés et séchés ne présentent pas de sensibilité à l'injection d'eau. De plus, la craie doit se trouver dans un état de contraintes proche de la surface de plasticité pour développer une compaction secondaire importante liée à la variation de saturation.

Suite à ces expérimentations, les auteurs ont développé une loi constitutive de type CamClay pour modéliser les essais de *waterflooding* en se basant sur une transition brutale entre deux états : la craie saturée en huile et celle saturée en eau. Les deux fluides ont un déplacement de type piston c'est-à-dire qu'il existe une séparation nette entre ceux-ci, appelée front d'eau. La saturation varie d'une valeur initiale  $S_{wi}$  (pour les zones non-injectées) à une saturation finale  $S_{wf}$  après rinçage. Pour ces deux valeurs de saturation, une surface de plasticité est définie (figure 4.7) avec les restrictions suivantes :  $M_f < M_i$  et  $p_0^f < p_0^i$ . Le matériau atteint par le front d'eau subit donc une modification brutale et instantanée de ses caractéristiques de résistance (angle de frottement et contrainte de pré-consolidation) qui se trouvent réduites.

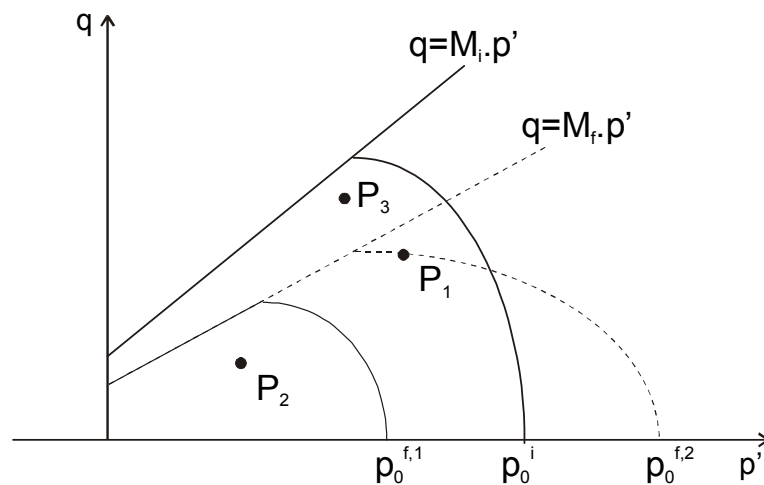


Figure 4.7 : Modèle de Piau-Maury

Le modèle suppose que les déformations plastiques dues à l'injection sont perpendiculaires au front d'eau. De plus, les variations de pression des fluides pendant le *waterflooding* sont négligées.

Suivant ce modèle, trois cas de figures peuvent se produire lorsque que la craie est atteinte par le front d'eau (figure 4.7):

1. L'état de contrainte correspond au point  $P_1$  et la resaturation du matériau va occasionner un saut de surface de  $(M_i, p_0^i)$  à  $(M_f, p_0^f)$ . Toutefois, le point  $P_1$  se trouve en dehors de la surface  $(M_f, p_0^f)$  qui va devoir s'écrouir et des déformations plastiques seront produites modifiant la contrainte  $p_0^{f,1}$  en  $p_0^{f,2}$ . C'est l'effondrement ou pore collapse.
2. Au point de contrainte  $P_2$ , le *waterflooding* entraînera un saut de surface mais sans produire de contraintes plastiques ni de gonflement lié à la variation de succion.
3. Lorsque le matériau d'état de contrainte  $P_3$  sera atteint par le front d'eau, le saut de surface se produira mais le comportement deviendra instable car aucun écoulement de l'angle de frottement n'est possible dans le modèle. C'est une rupture par frottement interne.

Ce modèle à ressaut entre deux états de saturation est cohérent avec les codes d'écoulement dans les réservoirs. En effet, ces codes supposent souvent un écoulement de type piston où la saturation varie brutalement entre deux valeurs extrêmes.

### 3.4. Modèle Homand – Shao

Ce modèle a été développé suivant l'approche proposée par Piau-Maury. La craie présente deux comportements typiques dépendant du fluide saturant : un comportement à l'huile et un autre à l'eau. Le matériau passe d'un à l'autre lorsque la saturation atteint une valeur critique ([HOMAND, 2000], [HOMAND *et al.*, 2000]).

#### 3.4.1. ELASTICITÉ

Les déformations élastiques sont données par la loi de Hooke élastique linéaire définie par le module de Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ . Les variations de saturation induisent uniquement des déformations plastiques.

#### 3.4.2. SURFACES DE PLASTICITÉ EN CONDITIONS SATURÉES

La craie présente les deux comportements plastiques typiques : le pore collapse et la rupture par cisaillement. Le pore collapse apparaît pour de fortes contraintes moyennes et est décrit par un modèle elliptique. La rupture par cisaillement dans le champ des faibles pressions est modélisée par un modèle de matériau frottant. Les auteurs proposent un modèle élastoplastique combinant deux surfaces de plasticité qui

évoluent indépendamment. Les déformations plastiques sont donc divisées en deux contributions :

$$d\epsilon_{ij}^p = d\epsilon_{ij}^c + d\epsilon_{ij}^d \quad (4.38)$$

#### 3.4.2.1. Mécanisme de Pore collapse

Le pore collapse est modélisé en utilisant le modèle suivant appartenant à la famille des CamClay :

$$f_c \equiv h_f^2 q^2 + p^2 - p_0^2 = 0 \quad (4.39)$$

où  $p$  et  $q$  sont la contrainte moyenne et la contrainte déviatorique :

$$p = \frac{\sigma_{ii}}{3} \text{ et } q = \sqrt{\frac{3}{2} \hat{\sigma}_{ij} \hat{\sigma}_{ij}} \quad (4.40)$$

Le paramètre  $h_f$  définit le rapport des longueurs des deux axes de la surface elliptique et  $p_0$  définit la dimension de la surface.

Une loi d'écoulement non-associée est adoptée en utilisant la surface d'écoulement plastique suivante:

$$g_c \equiv h_c^2 q^2 + p^2 = 0 \quad (4.41)$$

où  $h_c$  a une définition identique à celle de  $h_f$ .

#### 3.4.2.2. Mécanisme de rupture par cisaillement

Le critère de Drucker-Prager est utilisé pour modéliser ce mécanisme plastique. L'effet de l'angle de Lode  $\beta$  est également inclus :

$$f_d \equiv q \left( \cos \beta + \frac{t_c}{\sqrt{3}} \sin \beta \right) - \alpha_{fr} (p - p_s) = 0 \quad (4.42)$$

Le paramètre  $\alpha_{fr}$  est relié à l'angle de frottement mobilisé tandis que  $p_s$  représente la résistance hydrostatique à la traction. Le paramètre  $t_c$  est relié à la différence de résistance du matériau en compression uniaxiale et en tension.

Le potentiel plastique suivant est utilisé dans une formulation non-associée:

$$g_d \equiv q + \theta_d p = 0 \quad (4.43)$$

où  $\theta_d$  est un coefficient lié à la dilataance du matériau.

#### 3.4.2.3. Règles d'écrouissage

Le paramètre d'écrouissage de la surface plastique  $f_c$  est la contrainte de préconsolidation  $p_0$ . L'écrouissage dépend des déformations volumiques plastiques  $\epsilon_v^c$  :

$$p_0 = p_{0,ini} e^{a\varepsilon_v^c} \quad (4.44)$$

où  $a$  est un paramètre matériel d'écrouissage.

L'écrouissage de la surface plastique  $f_d$  est contrôlé par les déformations déviatoriques plastiques  $\gamma_d$ :

$$\alpha = \alpha_m - (\alpha_m - \alpha_0) e^{-b\gamma_d} \quad (4.45)$$

Utilisé dans le potentiel plastique  $g_d$ , le paramètre  $\theta_d$  est également contrôlé par les déformations plastiques déviatoriques :

$$\theta_d = \theta_0 e^{-b\gamma_d} \quad (4.46)$$

où  $b$  et  $\theta_d$  sont des paramètres matériels.

### 3.4.3. EFFET DES FLUIDES SATURANTS

Les surfaces de plasticité sont définies pour un comportement à l'eau et à l'huile. Homand définit ainsi une contrainte de préconsolidation, une cohésion et un angle de frottement différents selon le fluide de saturation. L'effet des fluides saturants est pris en compte en supposant une déformation additionnelle pendant la resaturation en eau.

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p + \Delta\lambda_w^p \frac{\partial g_w}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.47)$$

où  $g_w$  est le potentiel plastique pour les déformations plastiques induites par l'eau. Les auteurs prennent une fonction similaire à la surface plastique de pore collapse :

$$g_w \equiv h_w^2 q^2 + p^2 = 0 \quad (4.48)$$

Le multiplicateur plastique  $\Delta\lambda_w^p$  des déformations plastiques induites par l'eau dépend du saut de la surface de plasticité entre le comportement à l'huile et à l'eau. A contraintes constantes, ce multiplicateur peut être calculé par :

$$\Delta\lambda_w^p = \frac{1}{2p} \frac{1}{a} \ln \left( \frac{p_{0,ini}^{oil}}{p_{0,ini}^{water}} \right) \quad (4.49)$$

où  $a$  est le paramètre matériel défini à la relation (4.44).

Cette approche de saut de surface lors du passage du front d'eau avait également été utilisée précédemment par PLISCHKE (1996). Ce genre de modèle est tout à fait capable de reproduire le gonflement ou l'effondrement lors d'un chemin de mouillage. Cependant, on ne définit pas de manière continue le chemin de contrainte suivi ni l'évolution de la surface de plasticité lors du remouillage.

### 3.5. Conclusions

Nous voyons donc que tous ces modèles utilisent deux surfaces de plasticité (ou une surface unique de forme complexe) pour représenter le pore collapse et la rupture par cisaillement. Ils forment ainsi des modèles à chapeau. Dans ces derniers, un critère de Mohr-Coulomb ou de Drucker-Prager est utilisé pour simuler la rupture par cisaillement. Le pore collapse est généralement représenté par un modèle CamClay (modèles de PIAU-MAURY, HOMAND, PLISCHKE)

L'approche de Piau-Maury est la plus aboutie pour reproduire les effets de fluides saturants. Ils définissent un comportement à l'huile et à l'eau par deux surfaces de plasticité différentes. L'effet du *waterflooding* est représenté par le passage brutal d'une courbe à l'autre et s'accompagne de déformations plastiques.

## 4. MODELE DE COMPORTEMENT D'UNE CRAIE NON-SATUREE

La craie présente donc deux mécanismes plastiques bien distincts : le *pore collapse* et la *rupture par frottement interne*. Dans notre modèle, chaque mode plastique devra être reproduit et, vu la position des points d'entrée en plasticité relatifs à chaque mécanisme (figure 4.8), un modèle dit à chapeau semble le plus logique.

Toutefois, il existe plusieurs manières de construire ce modèle : une seule surface de plasticité avec une forme complexe ou plusieurs surfaces dont les jonctions présentent ou non une rupture de pente. Ce choix n'est pas évident car chaque formulation possède ses avantages et inconvénients.

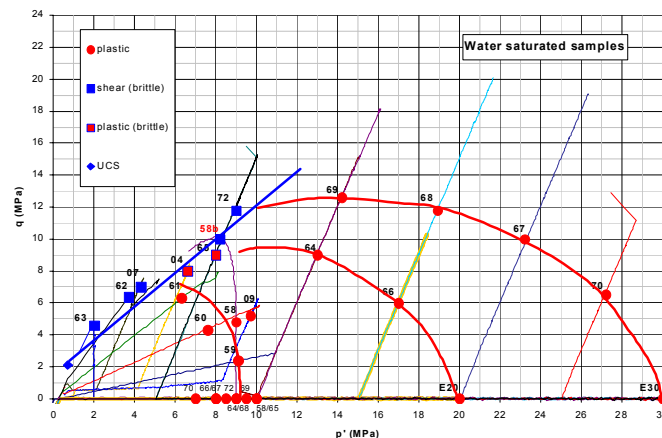


Figure 4.8 : Points d'entrée en plasticité pour les échantillons saturés en eau [SCHROEDER, 2000]

La plupart des modèles considèrent que les deux modes plastiques sont indépendants (modèles de SHAO, HOMAND, PLISCHKE, PIAU-MAURY). Tout le problème réside dans la manière de combiner ces deux mécanismes et de définir leur écrouissage.



La présence de deux modes indépendants suggère un modèle avec deux surfaces de plasticité. La jonction entre les deux surfaces n'est pas, a priori, continûment dérivable et cela peut poser certains problèmes numériques. C'est la raison pour laquelle des modèles à une seule surface de plasticité ont été développés (modèle de BRIGNOLI-SANTARELLI). La surface de plasticité ne comprend alors plus de coins. Mais le modèle peut présenter certaines difficultés pour gérer l'écrouissage. En effet, en utilisant une seule surface de plasticité, les deux mécanismes ne peuvent plus évoluer de manière tout à fait indépendante.

Une solution aux problèmes des coins est l'utilisation d'une surface supplémentaire servant de jonction entre les deux surfaces principales et assurant une pente continue du modèle. Une variante consiste à utiliser pour le mode de rupture en cisaillement non pas une droite mais une courbe qui est tangente à la droite d'état critique et vient se raccorder à l'ellipse de manière continue. Ces deux dernières techniques permettent d'éviter les coins dans le modèle, tout en gardant une indépendance totale entre les deux mécanismes. Toutefois, il faut évaluer si les efforts nécessaires pour gérer mathématiquement les raccords ne sont pas équivalents à ceux nécessaires à la gestion des coins.

En effet, le traitement de surfaces de plasticité présentant des coins est possible et des techniques existent. Simo & Hughes [SIMO *et al.*, 1998] notamment ont développé une méthode élégante.

Nous optons donc pour un modèle avec deux surfaces de plasticité. Le *pore collapse* est simulé par une surface elliptique (type CamClay modifié) et la *rupture par cisaillement* par un modèle à frottement interne (type Drucker-Prager ou Van Eekelen).

Toutefois, la résistance à la traction définie par le critère de Drucker-Prager en fonction de l'angle de frottement et de la cohésion est surestimée par rapport à la résistance réelle de la craie [RISNES *et al.*, 1999b]. Une troisième surface de plasticité est donc nécessaire pour limiter les contraintes de traction (figure 4.9-a).

Un autre aspect important du comportement de la craie est l'influence du fluide saturant sur la résistance : le seuil d'entrée en plasticité est plus important pour une craie saturée en huile que pour celle saturée en eau. De plus, lors de l'injection d'eau dans une craie saturée en huile, des déformations de compression apparaissent pour des états de contraintes proches du seuil de plasticité. Ces déformations sont liées au changement de fluide.

Ce type de comportement est similaire aux observations réalisées pour des sols partiellement saturés ([CUI *et al.*, 1996] par exemple) et est expliqué en introduisant la succion comme paramètre essentiel du comportement. Le modèle de Barcelone [ALONSO *et al.*, 1990] permet de reproduire la plupart des comportements des sols partiellement saturés (chapitre III, paragraphe 3.4). Une courbe LC définit l'évolution du seuil de plasticité en fonction de la succion et permet de simuler les déformations de compression pour des chemins de mouillage. Dans ce modèle, la succion génère des

déformations réversibles mais également plastiques. Ces dernières sont simulées grâce à une surface de plasticité supplémentaire (courbe SI – figure 4.9-b).

DELAGE *et al.* (1996) ont mis en évidence expérimentalement le comportement similaire de la craie et d'un limon non saturé. En suivant l'histoire géologique d'un réservoir de craie, ils ont ensuite montré que l'approche de Barcelone pouvait expliquer les compactions observées dans le réservoir lors d'injection d'eau. La craie est considérée comme un milieu non-saturé où l'huile est le fluide non-mouillant et l'eau le fluide mouillant. Cette hypothèse a été reprise dans le projet européen PASACHALK auquel nous avons participé. Nous allons donc développer notre modèle de craie où l'effet des fluides saturants est pris en compte par une approche similaire à celle du modèle de Barcelone.

Cette approche est à la fois différente et similaire à celle de Piau-Maury. En effet, dans le modèle de Barcelone, le chemin de contrainte est défini de manière continue pendant le *waterflooding* ; il n'y a donc pas de ressaut entre deux états. Notre loi de comportement pourra donc être couplée avec un modèle d'écoulement continu qui ne fait pas l'hypothèse d'un mouvement de type piston. Toutefois, le modèle de Piau-Maury peut être perçu comme un cas limite de l'approche de Barcelone, où la courbe LC présenterait un ressaut brutal.

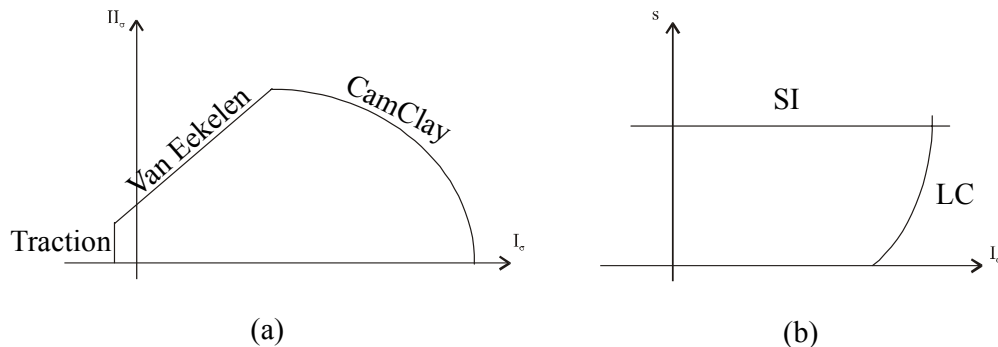


Figure 4.9 : Modèle à chapeau développé

Enfin, le comportement visqueux de la craie est important mais il ne sera pas considéré dans le cadre de ce travail. D'autres travaux abordent ailleurs cet aspect ([CHARLIER *et al.*, 2002] et PASACHALK2 project [SCHROEDER *et al.*, 1998]). Nous développerons donc un modèle dans un formalisme élasto-plastique en tenant compte des effets de succion.

#### 4.1. Formulation d'un modèle élasto-plastique en conditions non-saturées

Une loi constitutive définit la relation entre les contraintes et les déformations. En élasto-plasticité, l'espace des contraintes est divisé en trois parties par la surface de plasticité notée  $f$  : l'intérieur de la surface détermine la zone élastique tandis que la surface correspond à un état plastique. Aucun point représentatif de l'état de contrainte ne peut se trouver en dehors de la surface de plasticité (figure 4.10).

La loi élasto-plastique est écrite sous une forme incrémentale, elle définit alors une relation entre une vitesse de contrainte et une vitesse de déformation.

$$\underline{\tilde{\sigma}} = f(\underline{\dot{\epsilon}}, \underline{\sigma}, s, \mathcal{G}) \quad (4.50)$$

où  $\underline{\tilde{\sigma}}_{ij}$  est la vitesse de la contrainte objective de Jaumann,  $\underline{\dot{\epsilon}}_{ij}$  est la vitesse de déformation,  $s$  est la succion et  $\mathcal{G}$  est une variable interne de la loi dépendant de l'histoire des contraintes.

Dans un formalisme élasto-plastique, la vitesse de déformation peut s'écrire comme la somme de composantes élastique et plastique :

$$\underline{\dot{\epsilon}} = \underline{\dot{\epsilon}}^e + \underline{\dot{\epsilon}}^p \quad (4.51)$$

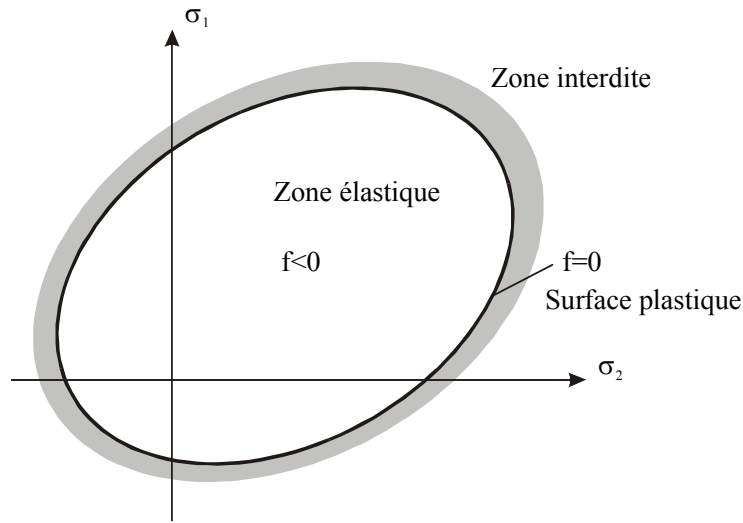


Figure 4.10 : Les différents domaines définis par une surface de plasticité dans l'espace des contraintes

Chaque terme possède une contribution de la mécanique et de la succion. En effet, une augmentation de succion peut générer à la fois des déformations élastiques et plastiques. Ces déformations irréversibles ont été observées pour des sols partiellement saturés [ALONSO *et al.*, 1990] mais pas encore pour la craie (par manque d'expérimentations). Toutefois, nous voulons construire un modèle valable pour différents matériaux (craie et argile), nous introduirons donc les déformations irréversibles liées à la succion. La relation précédente peut alors être réécrite selon:

$$\underline{\dot{\epsilon}} = \underline{\dot{\epsilon}}^{\sigma,e} + \underline{\dot{\epsilon}}^{s,e} + \underline{\dot{\epsilon}}^{\sigma,p} + \underline{\dot{\epsilon}}^{s,p} \quad (4.52)$$

où les exposants  $\sigma$  et  $s$  indiquent respectivement les contributions de la mécanique et de la succion.

Afin d'être capable de modéliser les comportements des sols non-saturés, il est nécessaire de se définir un couple de variables d'état de contrainte (chapitre III,

paragraphe 3.2). Nous utiliserons le couple utilisé dans le modèle de Barcelone, à savoir la contrainte nette et la succion:

$$\bar{\underline{\sigma}} = \underline{\sigma} - p_{nw} \underline{I} \text{ et } s = p_{nw} - p_w \quad (4.53)$$

où  $\bar{\underline{\sigma}}$  est la contrainte nette et  $p_{nw}$  la pression du fluide non-mouillant (l'air dans un couple eau-air et l'huile dans un couple eau-huile).

Les contraintes et la succion jouent donc un rôle similaire dans notre formulation. Pour des facilités d'écriture de l'algorithme de la loi, VAUNAT *et al.* (2000) ont introduit les variables généralisées suivantes :

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = (\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{33}, \bar{\sigma}_{12}, \bar{\sigma}_{13}, \bar{\sigma}_{23}, s)^t \text{ et } \underline{\underline{\varepsilon}}^* = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_v^s)^t \quad (4.54)$$

où  $\varepsilon_{ij}$  sont les composantes des déformations totales et  $\varepsilon_v^s$  est la déformation volumique liée aux variations de succion.

En effet, il est communément admis que la succion influence uniquement le comportement volumique des sols. De plus, les vitesses des déformations totales sont utilisées (au lieu des déformations mécaniques) car ce sont celles-là qui arrivent dans la routine d'intégration temporelle de la loi. Les déformations totales sont liées aux déformations mécaniques et de succion par la relation suivante:

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^\sigma + \frac{I}{3} \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^s \quad (4.55)$$

Nous pouvons à présent définir les différents termes de la relation 4.52 en fonction des variables généralisées que nous avons choisies. Nous commençons tout d'abord par les termes élastiques.

La loi de Hooke nous donne la relation entre le tenseur vitesse des contraintes et des déformations mécaniques élastiques :

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\sigma,e} \quad (4.56)$$

où  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$  est le tenseur objectif des vitesses de contraintes et  $\underline{\underline{C}}^e$  est la matrice de compliance définie par :

$$C_{ijkl}^e = 2G\delta_{ik}\delta_{jl} + \left(K - \frac{2}{3}G\right)\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (4.57)$$

Dans cette relation, le comportement élastique d'un matériau isotrope est défini par deux modules tangents élastiques : le module cubique  $K$  et le module de cisaillement  $G$ .

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \text{ et } G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.58)$$

où  $E$  est le module de Young et  $\nu$  est le coefficient de Poisson.

Nous pouvons définir les déformations réversibles liées à des changements de succion grâce à la formulation utilisée dans le modèle de Barcelone (relation 3.25) :

$$\dot{s} = \frac{1}{h^e} \dot{\varepsilon}_v^{s,e} \quad (4.59)$$

où le terme  $h^e$  est défini par:

$$h^e = \frac{\kappa_s}{(1 + e_0)(s + p_{atm})} \quad (4.60)$$

$\kappa_s$  est le module élastique pour des variations de succion,  $e_0$  l'indice des vides initial et  $p_{atm}$  la pression atmosphérique.

Les relations (4.56) et (4.59) peuvent être réécrites selon:

$$\underline{\tilde{\sigma}} = \underline{\underline{C}}^e \underline{\dot{\varepsilon}}^{\sigma,e} = \underline{\underline{C}}^e \cdot (\underline{\dot{\varepsilon}}^e - \dot{\varepsilon}_v^{s,e} \frac{\underline{I}}{3}) = \underline{\underline{C}}^e \underline{\dot{\varepsilon}}^e - K \dot{\varepsilon}_v^{s,e} \underline{I} \quad (4.61)$$

$$\dot{s} = \frac{1}{h^e} \dot{\varepsilon}_v^{s,e} \quad (4.62)$$

Ces deux relations peuvent être rassemblées dans une seule équation en utilisant les variables généralisées :

$$\underline{\tilde{\sigma}}^* = \underline{\underline{C}}^{*e} \underline{\dot{\varepsilon}}^{*e} \quad (4.63)$$

$$\underline{\underline{C}}^{*e} = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 & -K \\ K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 & -K \\ K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & 0 & 0 & 0 & -K \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/h^e \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

où la matrice  $\underline{\underline{C}}^{*e}$  est définie en 3D par la matrice (7 x 7).

Dans les lois élasto-plastiques, la direction des déformations plastiques est souvent supposée normale à la surface de plasticité  $f$  (on parle alors de plasticité associée) et l'amplitude est donnée par le multiplicateur plastique  $\lambda^p$ . La dilatance est directement liée à la direction des déformations plastiques, il est toutefois difficile de reproduire le comportement dilatant d'un sol avec la seule surface  $f$ . C'est pourquoi la surface d'écoulement plastique  $g$  est définie de manière à contrôler la dilatance (on parle alors de plasticité non-associée):

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^{*p} = \underline{\dot{\varepsilon}}^{\sigma,p} + \underline{\dot{\varepsilon}}_v^{s,p} \frac{I}{3} = \dot{\lambda}^p \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}^*} \quad (4.65)$$

où la dérivée de la surface d'écoulement s'écrit :

$$\frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}^*} = \left( \frac{\partial g}{\partial \sigma_1} + \frac{1}{3} \frac{\partial g}{\partial s}, \frac{\partial g}{\partial \sigma_2} + \frac{1}{3} \frac{\partial g}{\partial s}, \frac{\partial g}{\partial \sigma_3} + \frac{1}{3} \frac{\partial g}{\partial s}, \frac{\partial g}{\partial \sigma_4}, \frac{\partial g}{\partial \sigma_5}, \frac{\partial g}{\partial \sigma_6}, \frac{\partial g}{\partial s} \right) \quad (4.66)$$

sachant que la succion influence uniquement le comportement volumique.

On remarque que la direction des déformations mécaniques plastiques dépend de la dérivée par rapport aux contraintes mais aussi par rapport à la succion. Pour ne pas avoir cet effet, il est nécessaire que la surface d'écoulement relative à chaque mécanisme (pore collapse et rupture de cisaillement) ne dépende pas de la succion ( $\frac{\partial g}{\partial s} = 0$ ).

Cette définition de la dérivée de la surface d'écoulement montre que la direction des déformations plastiques liées à la succion est donnée par la dérivée du potentiel plastique par rapport à la succion. Nous introduirons la surface de plasticité SI du modèle de Barcelone (chapitre III, paragraphe 3.4.3.1) afin de modéliser les déformations irréversibles créées par des variations de succion.

En se plaçant dans le cadre de la plasticité non-associée, l'équation (4.51) peut s'écrire :

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^* = \underline{\dot{\varepsilon}}^{*e} + \dot{\lambda}^p \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}^*} \quad (4.67)$$

Le multiplicateur plastique est déterminé à l'aide de la condition de cohérence qui établit que lors d'un chemin plastique, l'état de contrainte doit se trouver sur la surface de plasticité. Cette condition s'exprime comme suit :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}^*} \underline{\dot{\sigma}}^* + \frac{\partial f}{\partial \mathcal{G}} \dot{\mathcal{G}} = 0 \quad (4.68)$$

Le premier terme peut s'écrire selon :

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}^*} \underline{\dot{\sigma}}^* = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \underline{\dot{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial s} \dot{s} \quad (4.69)$$

La variable interne  $\mathcal{G}$  est liée aux déformations plastiques et peut être exprimée en fonction du multiplicateur plastique. Nous pouvons donc ré-exprimer la condition de cohérence (4.68) selon :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}^*} \underline{\dot{\sigma}}^* + \frac{\partial f}{\partial \mathcal{G}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \lambda^p} \dot{\lambda}^p = 0 \quad (4.70)$$

Si nous remplaçons l'équation (4.67) dans (4.63), nous obtenons :

$$\underline{\tilde{\sigma}}^* = \underline{\underline{C}}^{*e} (\underline{\dot{\varepsilon}}^* - \dot{\lambda}^p \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{\sigma}^*}) \quad (4.71)$$

En combinant cette dernière équation avec l'équation (4.70), nous obtenons l'expression du multiplicateur plastique :

$$\dot{\lambda}^p = \frac{\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}^*} \underline{\underline{C}}^{*e} \underline{\dot{\varepsilon}}^*}{\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}^*} \underline{\underline{C}}^{*e} \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{\sigma}^*} - \frac{\partial f}{\partial \underline{g}} \frac{\partial \underline{g}}{\partial \lambda^p}} \quad (4.72)$$

Nous pouvons à présent exprimer la loi constitutive incrémentale :

$$\underline{\tilde{\sigma}}^* = (\underline{\underline{C}}^{*e} - \underline{\underline{C}}^{*p}) \underline{\dot{\varepsilon}}^* \quad (4.73)$$

où la matrice  $\underline{\underline{C}}^{*p}$  s'exprime comme suit :

$$\underline{\underline{C}}^{*p} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}^*} \underline{\underline{C}}^{*e} \underline{\underline{C}}^{*e} \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{\sigma}^*}}{\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}^*} \underline{\underline{C}}^{*e} \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{\sigma}^*} - \frac{\partial f}{\partial \underline{g}} \frac{\partial \underline{g}}{\partial \lambda^p}} \quad (4.74)$$

Nous voyons dans cette relation l'importance de choisir des fonctions continûment dérivables. On comprend dès lors la complexité du formalisme à la jonction de deux surfaces plastiques formant un coin.

Lorsque l'état de contrainte atteint la surface de plasticité, des déformations plastiques apparaissent. Ces dernières modifient la valeur de la variable interne qui régit la taille de la surface.

Par définition, si les déformations permanentes provoquent une augmentation de la surface de plasticité, on parle d'*écrouissage* ; en cas de diminution, on parle d'*adoucissement*. Enfin, la *plasticité parfaite* correspond à un modèle où la plasticité n'influence pas la taille du domaine élastique.

Nous allons donc à présent utiliser le formalisme élasto-plastique avec le modèle à chapeau que nous avons développé.

## 4.2. Elasticité

Bien que généralement faibles, les déformations réversibles doivent être définies dans un modèle élasto-plastique à l'aide de modules élastiques (équation 4.58) et de la matrice de Hooke (équation 4.57), pour un solide élastique linéaire isotrope.

En travaillant avec les invariants de contraintes  $p = I_\sigma/3$ ,  $\sigma_d = II_{\hat{\sigma}}$  et de déformations  $\varepsilon_v = I_\varepsilon$ ,  $\varepsilon_d = II_{\hat{\varepsilon}}$ , nous pouvons écrire en élasticité linéaire:

pour des modules sécants,

$$p = K_s \varepsilon_v \text{ et } \sigma_d = 2G_s \varepsilon_d \quad (4.75)$$

pour des modules tangents,

$$\dot{p} = K_t \dot{\varepsilon}_v \text{ et } \dot{\sigma}_d = 2G_t \dot{\varepsilon}_d \quad (4.76)$$

Formulant la loi de comportement sous sa forme incrémentale, nous utiliserons les modules tangents dans notre modèle.

Toutefois, les géomatériaux présentent la particularité d'avoir des modules élastiques dépendant de l'état de contraintes. Il faut dès lors introduire des relations non-linéaires de  $K_t$  et  $G_t$  en fonction de  $p$  et  $\sigma_d$ . Ces relations doivent respecter certaines conditions, afin de ne pas prédire des déformations résiduelles ou une dissipation d'énergie non-nulle pour des chemins fermés de contraintes.

On parle alors de processus hypoélastique ou hyperélastique suivant que les conditions définies au tableau 4.2 sont vérifiées :

Processus	Déformation résiduelle nulle	Dissipation d'énergie nulle
Elastique	oui	non
Hypoélastique	non	non
Hyperélastique	oui	oui

Tableau 4.2 : Types de formulation élastique d'après [LORET, 1985]

Dans un modèle hypoélastique, les modules peuvent être une fonction quelconque des contraintes et la relation (4.76) n'est en général pas intégrable.

L'hyperélasticité suppose l'existence de potentiels  $\Phi$  et  $\Omega$  (deux fois continûment dérivable) tels que :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} \text{ et } \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.77)$$

Pour un matériau isotrope, ces potentiels sont fonctions uniquement des invariants de contraintes ou déformations. Toutefois, nous supposons que le troisième invariant n'a pas d'influence et les potentiels auront donc la forme suivante:

$$\Phi = \Phi(\varepsilon_v, \varepsilon_d) \text{ et } \Omega = \Omega(p, \sigma_d) \quad (4.78)$$

Afin d'assurer une dissipation d'énergie nulle sur un chemin de sollicitation fermé, le potentiel doit vérifier le théorème de réciprocity [BOYCE, 1980]:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial p \partial \sigma_d} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \sigma_d \partial p} \Leftrightarrow \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \sigma_d} = \frac{\partial \varepsilon_d}{\partial p} \quad (4.79)$$

Si enfin, nous supposons que la relation (4.75) reste valable en élasticité non-linéaire, nous pouvons écrire d'après (4.79):



$$p = K_s \varepsilon_v, \sigma_d = 2G_s \varepsilon_d \quad (4.80)$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_d} \left( \frac{p}{K_s(p, \sigma_d)} \right) = \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\sigma_d}{2G_s(p, \sigma_d)} \right) \Leftrightarrow \frac{p}{K_s^2} \frac{\partial K_s}{\partial \sigma_d} = \frac{\sigma_d}{2G_s^2} \frac{\partial G_s}{\partial p} \quad (4.81)$$

Grâce à cette dernière relation, on s'aperçoit qu'un modèle élastique où le module cubique et le module de cisaillement sont fonction de la contrainte moyenne n'est pas hyperélastique [ZYTYSKI *et al.*, 1978] !

Afin de développer un modèle hyperélastique, il est donc nécessaire de trouver des expressions des modules vérifiant les relations (4.80) et (4.81). Il est alors possible de distinguer les modèles découplés et couplés. Dans les premiers, les modules cubique et de cisaillement dépendent respectivement (et uniquement) de la contrainte moyenne et de la contrainte déviatorique (tableau 4.3). La relation (4.81) est alors automatiquement vérifiée.

Modèle	Module cubique $K_t$	Module de cisaillement $G_t$
Elasticité linéaire	$K_0$	$G_0$
CamClay modifié [ROSCOE <i>et al.</i> , 1968] [NELSON <i>et al.</i> , 1971]	$\frac{(1+e_0)}{\kappa} p$ $K_0 + \alpha_1 p$	$G_0$ $G_0 + \alpha_2 \sigma_d$

Tableau 4.3 : Modèles hyperélastiques découplés – Modules tangents

Dans les modèles couplés, les modules sécants peuvent dépendre de  $p$  et  $\sigma_d$ . Ces derniers doivent toutefois vérifier la relation (4.81). On peut ainsi facilement montrer que [MESTAT, 1998] :

$$G_s(\sigma_d) \Leftrightarrow K_s(p)$$

$$G_s(p) \Rightarrow K_s(p, \sigma_d)$$

$$G_s(p, \sigma_d) \Leftrightarrow K_s(p, \sigma_d)$$

Modèle	Module cubique $K_s$	Module de cisaillement $G_s$
[BOYCE, 1980]	$\frac{K_0 \cdot p^{1-n}}{1 - \beta \frac{\sigma_d^2}{p^2}}$	$G_0 \cdot p^{1-n}$
[LADE <i>et al.</i> , 1987]	$K_0 \cdot p_a \left[ \left( \frac{p}{p_a} \right)^2 + r_0 \left( \frac{\sigma_d}{p_a} \right)^2 \right]$	$G_0 \cdot p_a \left[ \left( \frac{p}{p_a} \right)^2 + r_0 \left( \frac{\sigma_d}{p_a} \right)^2 \right]$

Tableau 4.4 : Modèles hyperélastiques couplés – Modules sécants

Nous donnons dans le tableau 4.4 deux exemples de modèles couplés. Il faut noter que ces formulations introduisent un couplage entre les phénomènes volumiques et

déviatoriques : il est ainsi possible d'obtenir de la dilatance dans le domaine élastique. En effet, si nous reprenons l'équation (4.80) que nous dérivons, on obtient ainsi:

$$\dot{\varepsilon}_v = \left[ \frac{1}{K_s} - \frac{p}{K_s^2} \frac{\partial K_s}{\partial p} \right] \dot{p} - \frac{p}{K_s^2} \frac{\partial K_s}{\partial \sigma_d} \dot{\sigma}_d \quad (4.82)$$

$$\dot{\varepsilon}_d = \left[ \frac{1}{2G_s} - \frac{\sigma_d}{2G_s^2} \frac{\partial G_s}{\partial \sigma_d} \right] \dot{\sigma}_d - \frac{\sigma_d}{2G_s^2} \frac{\partial G_s}{\partial p} \dot{p} \quad (4.83)$$

Ces deux dernières équations peuvent être réécrites de manière plus compacte sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_v \\ \dot{\varepsilon}_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/K_t & D_{KG} \\ D_{KG} & 1/2G_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\sigma}_d \end{Bmatrix} \quad (4.84)$$

où le terme  $D_{KG}$  est un coefficient qui n'existe pas dans la formulation des modèles élastiques classiques.

Généralement dans les routines d'intégration, le champ de contraintes doit être calculé à partir du champ de déformations qui est connu. Cela nécessite alors l'inversion de la matrice définie dans l'équation (4.84) (si le terme  $D_{KG}$  est nul, cela devient trivial). D'autre part, des modèles sont développés, dans lesquels les modules dépendent des déformations ; [HOULSBY, 1985] propose la formulation incrémentale suivante, correspondant à un modèle d'état critique :

$$\begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\sigma}_d \end{Bmatrix} = p_0 \exp(\varepsilon_v / \kappa^*) \begin{bmatrix} \frac{1 + \alpha \varepsilon_d^2 / \kappa^*}{\kappa^*} & \frac{2\alpha \varepsilon_d}{\kappa^*} \\ \frac{2\alpha \varepsilon_d}{\kappa^*} & 2\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_v \\ \dot{\varepsilon}_d \end{Bmatrix} \quad (4.85)$$

Nous voyons donc que la définition des modules élastiques en fonction des invariants doit être faite en respectant certaines règles et que les développements deviennent rapidement complexes. Pour notre modèle, nous présenterons dans la suite de ce chapitre les mesures expérimentales des modules et nous ferons alors la balance entre la nécessité de reproduire les essais et la complexité inhérente à un modèle hyperélastique. Il faut noter enfin que les développements que nous avons présentés avec la contrainte moyenne et déviatorique restent également valables lorsque la succion est introduite.

### 4.3. Modèle CamClay

Nous avons décidé de représenter le phénomène de pore collapse à l'aide d'un modèle CamClay modifié. Dans le plan  $(I_\sigma, II_{\hat{\sigma}})$ , la surface de plasticité est une ellipse (figure 4.11) définie par la relation suivante :

$$f \equiv II_{\hat{\sigma}}^2 + m^2 \left( I_\sigma + \frac{3c(s)}{\tan \phi_c} \right) (I_\sigma - 3p_0(s)) = 0 \quad (4.86)$$

Où  $c$  est la cohésion,  $\phi_c$  est l'angle de frottement pour des chemins de contraintes en compression et  $p_0$  est la pression de pré-consolidation.

Nous avons introduit dans le modèle une dépendance du troisième invariant grâce au paramètre  $m$ . De ce fait, la forme de la surface dans le plan déviatorique n'est pas un cercle. Le coefficient  $m$  est défini par la relation suivante :

$$m = a(1 + b \sin 3\beta)^n \quad (4.87)$$

$\sin 3\beta$  dépend du troisième invariant des contraintes :

$$\sin 3\beta = -\left( \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{III_{\dot{\sigma}}}{II_{\dot{\sigma}}^3} \right) \quad (4.88)$$

Les trois paramètres  $a$ ,  $b$  et  $n$  doivent vérifier certaines conditions dont nous reparlerons dans le prochain paragraphe.

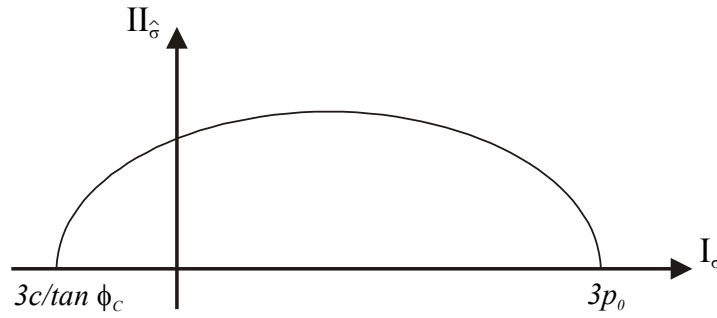


Figure 4.11 : Modèle CamClay dans le plan  $(I_{\sigma}, II_{\dot{\sigma}})$

La succion modifie la surface de plasticité car la contrainte de pré-consolidation et la cohésion sont influencées par la succion. SCHROEDER *et al.* (2000) ont par contre montré que l'angle de frottement est identique pour différents fluides saturant les pores de la craie et la pente d'état critique est donc indépendante de la succion.

Dans le modèle de Barcelone, les paramètres  $p_0(s)$  et  $c(s)$  sont définis par les relations suivantes :

$$p_0(s) = p_c \left( \frac{p_0^*}{p_c} \right)^{\frac{\lambda(0)-\kappa}{\lambda(s)-\kappa}} \quad (4.89)$$

$$c(s) = c(0) + k s \quad (4.90)$$

où  $p_0^*$  est la contrainte de pré-consolidation à succion nulle,  $p_c$  est une pression de référence,  $\kappa$  est un module élastique,  $\lambda(s)$  est le coefficient de compressibilité et  $k$  est un paramètre du matériau.

Le coefficient de compressibilité  $\lambda(s)$  dépend également de la succion. En effet, la raideur d'un sol augmente avec la succion ; cette dépendance est modélisée par la relation suivante :

$$\lambda(s) = \lambda(0)[(1-r)\exp(-\omega s) + r] \quad (4.91)$$

où  $r$  est un paramètre représentant la raideur maximum du matériau et  $\omega$  est un paramètre contrôlant l'augmentation de raideur avec la succion.

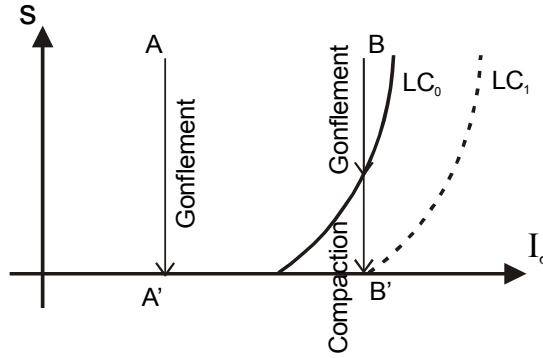


Figure 4.12 : Courbe LC dans le plan  $(I_\sigma, s)$

La fonction  $p_0(s)$  définit la courbe LC dans le plan  $(I_\sigma, s)$ . Cette courbe est très importante car elle permet de modéliser les compactions observées lors des chemins de mouillage. Pour une diminution de succion à faibles contraintes moyennes, seuls des gonflements se produiront (chemin A-A', figure 4.12). A plus fortes contraintes (chemin B-B'), le remouillage produira tout d'abord un gonflement, suivi d'une compaction correspondant à l'écrouissage de la courbe  $LC_0$  en  $LC_1$ .

Dans ce modèle, la variable interne qui définit la dimension de la surface de plasticité est la pression de pré-consolidation  $p_0^*$  à l'état saturé. Nous pouvons donc particulariser la condition de cohérence (4.68) à notre modèle :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}^*} \underline{\dot{\sigma}}^* + \frac{\partial f}{\partial p_0^*} \dot{p}_0^* = 0 \quad (4.92)$$

Nous devons à présent définir les dérivées de la surface de plasticité  $f$  par rapport aux contraintes et à la succion de manière à pouvoir utiliser le formalisme élasto-plastique :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial I_\sigma} \frac{\partial I_\sigma}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial II_\sigma} \frac{\partial II_\sigma}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial \sin 3\beta} \frac{\partial \sin 3\beta}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.93)$$

avec

$$\frac{\partial f}{\partial I_\sigma} = m^2 \left( I_\sigma + \frac{3c(s)}{\tan \phi_c} \right) + m^2 (I_\sigma - 3p_0(s)) \quad (4.94)$$

$$\frac{\partial I_\sigma}{\partial \sigma_{ij}} = \delta_{ij} \quad (4.95)$$

$$\frac{\mathcal{F}}{\partial II_{\hat{\sigma}}} = 2II_{\hat{\sigma}} \quad (4.96)$$

$$\frac{\partial II_{\hat{\sigma}}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\hat{\sigma}_{ij}}{2II_{\hat{\sigma}}} \quad (4.97)$$

$$\frac{\mathcal{F}}{\partial \sin 3\beta} = abn(1 + b \sin 3\beta)^{n-1} 2m \left( I_\sigma + \frac{3c(s)}{\tan \phi_c} \right) (I_\sigma - 3p_0(s)) \quad (4.98)$$

$$\frac{\partial \sin 3\beta}{\partial \sigma_{ij}} = -\frac{3\sqrt{3}}{2II_{\hat{\sigma}}^3} \left( \hat{\sigma}_{ik} \hat{\sigma}_{kj} - \frac{2}{3} II_{\hat{\sigma}}^2 \delta_{ij} - \frac{3III_{\hat{\sigma}}}{II_{\hat{\sigma}}} \frac{\partial II_{\hat{\sigma}}}{\partial \sigma_{ij}} \right) \quad (4.99)$$

La dérivée de la surface de plasticité  $f$  par rapport à la succion est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}}{\partial s} = & m^2 (I_\sigma - 3p_0(s)) \frac{3}{\tan \phi_c} k \\ & - m^2 \left( I_\sigma + \frac{3c(s)}{\tan \phi_c} \right) 3p_c \left( \frac{p_0^*}{p_c} \right)^{\frac{\lambda(0)-\kappa}{\lambda(s)-\kappa}} - (\lambda(0) - \kappa) \frac{\partial \lambda(s)}{\partial s} \ln \left( \frac{p_0^*}{p_c} \right) \end{aligned} \quad (4.100)$$

avec

$$\frac{\partial \lambda(s)}{\partial s} = -\lambda(0)(1-r)\omega \exp(-\omega s) \quad (4.101)$$

#### 4.3.1. SURFACE D'ECOULEMENT

Nous avons choisi de travailler en plasticité associée. La surface d'écoulement et la surface de plasticité sont donc identiques. Toutefois, la surface d'écoulement ne doit pas dépendre explicitement de la succion à cause de notre formulation (voir remarque concernant la relation 4.66). Nous la définissons donc comme suit :

$$g \equiv II_{\hat{\sigma}}^2 + m^2 \left( I_\sigma + \frac{3c(y)}{\tan \phi_c} \right) (I_\sigma - 3p_0(y)) = 0 \quad (4.102)$$

où  $y$  est une constante égale à la valeur de la succion.

#### 4.3.2. REGLE D'ECROUISSAGE

Dans le modèle CamClay, nous écrivons une relation incrémentale entre la contrainte de pré-consolidation et les déformations volumiques plastiques  $\varepsilon_v^p$  :

$$dp_0 = \frac{1+e_0}{\lambda(s)-\kappa} p_0 d\varepsilon_v^p \quad (4.103)$$

où  $e_0$  est l'indice des vides initial.

$\varepsilon_v^p$  représente les déformations plastiques totales. Des déformations plastiques liées à la succion (modélisées grâce à la surface SI) entraînent donc une augmentation de la contrainte de pré-consolidation et un écrouissage de la courbe LC. Il existe donc un couplage entre les surfaces SI et LC.

La règle d'écrouissage définit la relation entre la variable interne  $p_0^*$  et les déformations plastiques. Grâce à la définition de la courbe LC (relation 4.89), nous pouvons réécrire la règle d'écrouissage en fonction de la variable interne :

$$dp_0^* = \frac{1+e_0}{\lambda(0)-\kappa} p_0^* d\varepsilon_v^p \quad (4.104)$$

Selon cette relation, un écrouissage ou un adoucissement apparaîtra selon le signe des déformations volumiques plastiques (figure 4.13). Toutefois, dans le modèle à chapeau, ce n'est pas le cas car le mécanisme frottant est combiné avec le modèle CamClay et interdit d'activer le mécanisme plastique de pore collapse pour des états fortement surconsolidés.

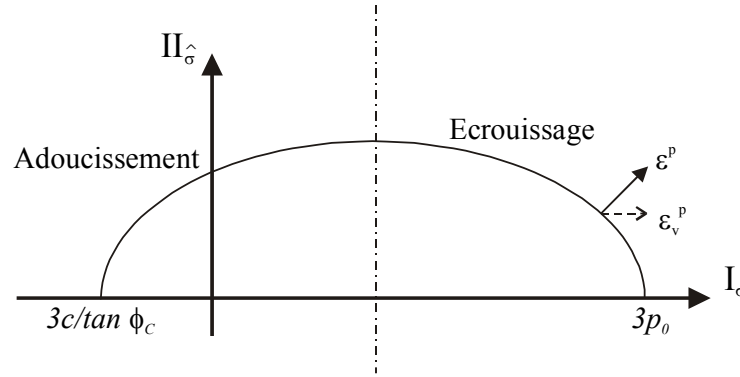


Figure 4.13 : Ecrouissage - Adoucissement

Nous pouvons à présent réécrire la condition de cohérence (4.92) en exprimant la dérivée de  $p_0^*$  par rapport au temps :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}^*} \underline{\dot{\sigma}}^* + \frac{\partial f}{\partial p_0^*} \frac{dp_0^*}{d\varepsilon_v^p} \dot{\varepsilon}_v^p = 0 \quad (4.105)$$

avec

$$\frac{\partial f}{\partial p_0^*} = 3m^2 \left( I_\sigma - \frac{3c(s)}{\tan \phi_c} \right) \cdot \frac{dp_0(s)}{dp_0^*} \quad (4.106)$$

$$\frac{dp_0^*}{d\varepsilon_v^p} = \frac{1+e_0}{\lambda(0)-\kappa} p_0^* \quad (4.107)$$

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \dot{\lambda}^p \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ii}} \quad (4.108)$$

Le formalisme élasto-plastique peut donc être utilisé avec ce modèle.

#### 4.4. Modèle à frottement interne : modèle PLASOL

Nous avons choisi de représenter la rupture par cisaillement par un modèle à frottement interne, dont le plus connu est sans doute le modèle de Mohr-Coulomb. Toutefois, son introduction dans un code de calcul demande un traitement particulier car sa surface présente des coins dans la plan déviatorique. C'est pourquoi d'autres modèles se rapprochant de ce dernier ont été proposés.

Le modèle de DRUCKER-PRAGER (1952) consiste en une surface de plasticité conique circonscrite au critère de Mohr-Coulomb dans l'espace des contraintes principales (figures 4.14 et 4.16). Cette surface peut être exprimée en fonction de l'angle de frottement en compression et de la cohésion [DESAI *et al.*, 1984] :

$$f \equiv \Pi_{\hat{\sigma}} - m \left( I_{\sigma} + \frac{3c(s)}{\tan \phi_c} \right) = 0 \quad (4.109)$$

où  $c$  est la cohésion,  $\phi_c$  est l'angle de frottement pour des chemins de compression et  $m$  un paramètre défini par la relation suivante :

$$m = \frac{2 \sin \phi_c}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi_c)} \quad (4.110)$$

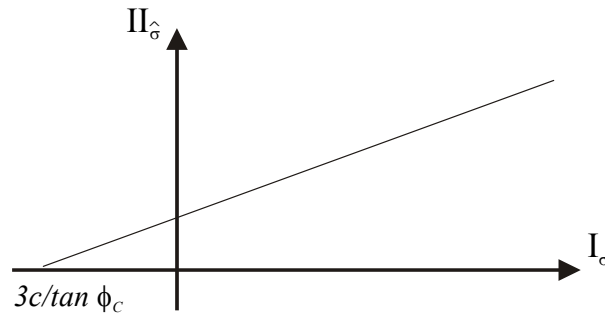


Figure 4.14 : Modèle à frottement interne dans le plan  $(I_{\sigma}, \Pi_{\hat{\sigma}})$

BARNICHON (1998) a montré que, dans cette formulation, l'angle de frottement en extension est fonction de l'angle en compression. La figure 4.15 montre que la différence entre les angles de frottement est d'autant plus grande que l'angle de frottement en compression est élevé. La résistance en extension est alors surestimée.

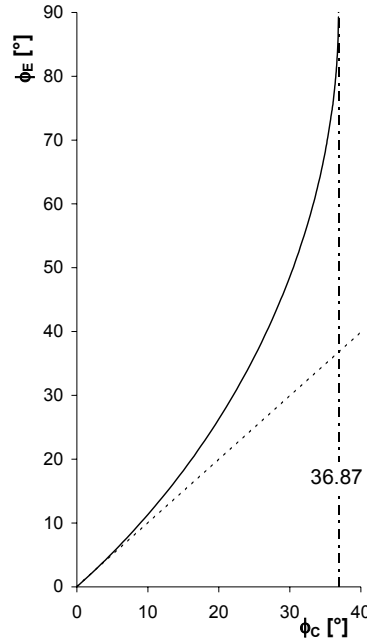


Figure 4.15 : Angle de frottement en extension fonction de l'angle en compression

VAN EEKELLEN (1980) a développé un modèle plus proche de Mohr-Coulomb en introduisant la dépendance de l'angle de Lode dans le modèle de Drucker-Prager. L'équation du modèle est identique mais le paramètre  $m$  n'a plus la même définition :

$$m = a(1 + b \sin 3\beta)^n \quad (4.111)$$

où  $a$  et  $b$  sont des coefficients dépendant des angles de frottement en compression et en extension et  $n$  est une constante qui définit la courbure de la surface de plasticité dans le plan déviatorique. Une valeur de  $n = -0.229$  assure la convexité de la surface [VAN EEKELLEN, 1980].

$$b = \frac{\left(\frac{r_C}{r_E}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{r_C}{r_E}\right)^{\frac{1}{n}} + 1} \quad (4.112)$$

$$a = \frac{r_C}{(1 + b)^n} \quad (4.113)$$

où  $r_C$  et  $r_E$  sont les rayons réduits pour des chemins triaxiaux axisymétriques de compression et d'extension définis par les relations suivantes :

$$r_C = \frac{2 \sin \phi_C}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi_C)} \quad (4.114)$$



$$r_E = \frac{2 \sin \phi_E}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi_E)} \quad (4.115)$$

De ce fait, la forme de la surface dans le plan déviatorique n'est plus un cercle et il est possible de définir les angles de frottement en compression et extension. La figure 4.15 montre les différences entre les trois modèles pour un angle de frottement de  $20^\circ$ .

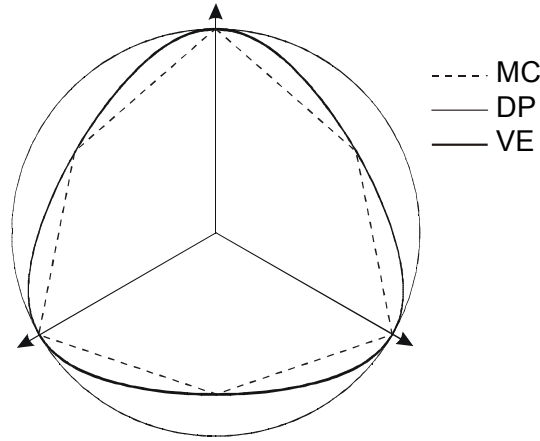


Figure 4.16 : Modèles à frottement interne dans le plan déviatoire ( $\phi = 20^\circ$ )

Dans le modèle PLASOL ([BARNICHON, 1998]), les modèles de Drucker-Prager et de Van Eekelen sont disponibles. Nous utiliserons toutefois de préférence le dernier cité afin d'éviter tout problème pour des angles de frottement élevés.

Les variables internes de ce modèle sont les angles de frottement  $\phi_C$ ,  $\phi_E$  et la cohésion  $c$ . La condition de cohérence peut donc s'écrire :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}^*} \underline{\dot{\sigma}}^* + \frac{\partial f}{\partial \phi_C} \dot{\phi}_C + \frac{\partial f}{\partial \phi_E} \dot{\phi}_E + \frac{\partial f}{\partial c} \dot{c} = 0 \quad (4.116)$$

avec

$$\frac{\partial f}{\partial I_\sigma} = -m \quad (4.117)$$

$$\frac{\partial f}{\partial II_{\dot{\sigma}}} = 1 \quad (4.118)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sin 3\beta} = -abn(1 + b \sin 3\beta)^{n-1} \left( I_\sigma + \frac{3c}{\tan \phi_C} \right) \quad (4.119)$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -m \frac{3}{\tan \phi_c} k \quad (4.120)$$

#### 4.4.1. SURFACE D'ECOULEMENT

Pour travailler en plasticité non-associée, nous avons défini une surface d'écoulement  $g$  similaire à la surface de plasticité.

$$g \equiv II_{\dot{\sigma}} - m' \left( I_{\sigma} + \frac{3c(y)}{\tan \phi_C} \right) = 0 \quad (4.121)$$

où  $y$  est une constante égale à la valeur de la succion et  $m'$  est défini par la même relation que le paramètre  $m$  (4.110) en remplaçant les angles de frottement par des angles de dilataance  $\psi_C$  et  $\psi_E$ .

En plasticité associée, il suffit de définir des angles de frottement et de dilataance identiques.

#### 4.4.2. REGLE D'ECROUISSAGE

Pour reproduire l'écrouissage ou l'adoucissement, nous écrivons des relations hyperboliques entre les variables internes du modèle (les angles de frottement  $\phi_C$  et  $\phi_E$  et la cohésion  $c$ ) et les déformations plastiques équivalentes de Von Mises (déformations déviatoriques) :

$$\begin{aligned} \phi_C &= \phi_{C0} + \frac{(\phi_{Cf} - \phi_{C0}) \varepsilon_{eq}^p}{B_p + \varepsilon_{eq}^p} \\ \phi_E &= \phi_{E0} + \frac{(\phi_{Ef} - \phi_{E0}) \varepsilon_{eq}^p}{B_p + \varepsilon_{eq}^p} \\ c &= c_0 + \frac{(c_f - c_0) \varepsilon_{eq}^p}{B_c + \varepsilon_{eq}^p} \end{aligned} \quad (4.122)$$

où  $\phi_0$  et  $c_0$  sont les valeurs initiales tandis que  $\phi_f$  et  $c_f$  sont les valeurs finales des paramètres d'écrouissage. Les coefficients  $B_p$  et  $B_c$  correspondent à la déformation plastique équivalant respectivement à la moitié de l'évolution de l'angle de frottement et de la cohésion (figure 4.17).

La déformation équivalente  $\varepsilon_{eq}^p$  représente la valeur cumulée des déformations plastiques :

$$\varepsilon_{eq}^p = \int_0^t \dot{\varepsilon}_{eq}^p dt \quad (4.123)$$

où les incréments des déformations équivalentes sont donnés par la relation suivante :

$$\dot{\varepsilon}_{eq}^p = \dot{\lambda}^p \sqrt{\frac{2}{3} \left( \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{3} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kk}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ll}} \right)} \quad (4.124)$$

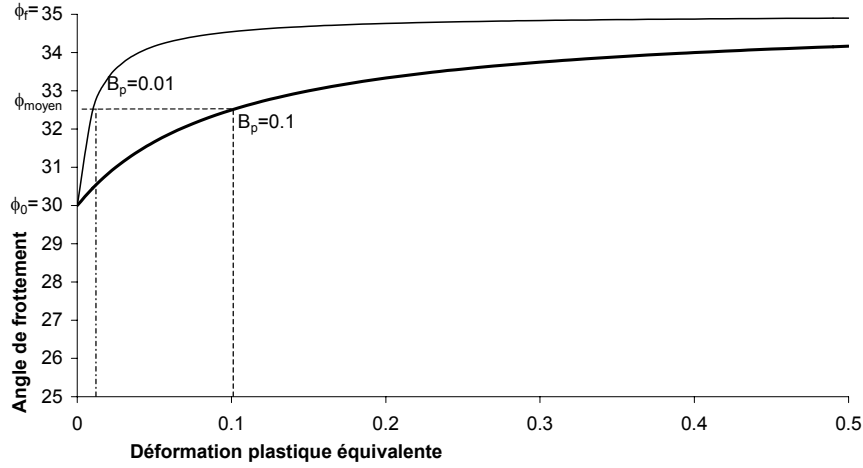


Figure 4.17 : Relation hyperbolique d'écrouissage pour deux valeurs du coefficient  $B_p$  (avec  $\phi_0 = 30^\circ$ ,  $\phi_f = 35^\circ$ )

#### 4.5. Modèle en traction

Les contraintes de traction permises par le modèle Van-Eekelen sont fonction de l'angle de frottement et de la cohésion. Expérimentalement, il a été montré que ce modèle mène à une surestimation des contraintes en traction pour la craie [RISNES *et al.*, 1999b]. Pour palier à cet inconvénient, une troisième surface de plasticité est introduite et consiste en une limitation des contraintes moyennes en traction. Dans une première version du modèle, nous avons introduit un critère indépendant du déviateur [COLLIN *et al.*, 2002]. Nous utilisons à présent une surface de plasticité hyperbolique (la pente de l'asymptote oblique correspondant à la pente du modèle frottant) passant par la limite en traction isotrope et par le point du modèle de Van-Eekelen à contrainte moyenne nulle (figure 4.18-a). Nous n'avons pas imposé la continuité de la pente en ce deuxième point de manière à être libre de choisir la valeur de la résistance en traction.

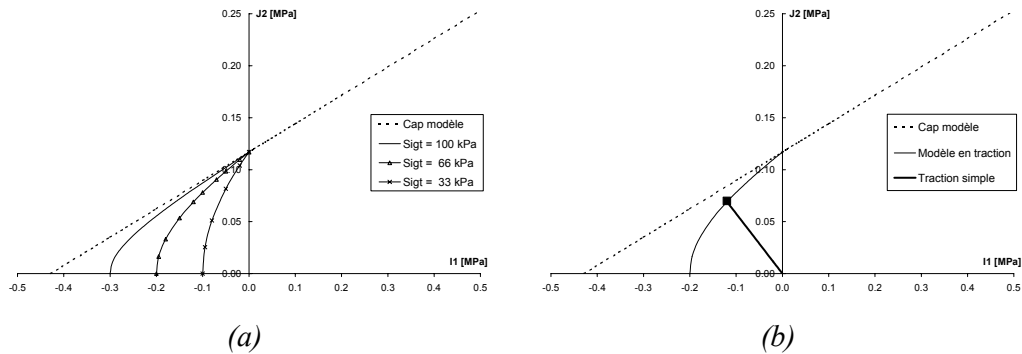


Figure 4.18 : Modèle en traction pour différentes limites en traction isotrope

Dans le plan  $(I_\sigma, II_{\dot{\sigma}})$ , ce critère est donné par la relation suivante :

$$f \equiv II_{\dot{\sigma}}^2 - m^2(I_\sigma + 3\sigma_{t,i}) \left( I_\sigma + \left( \frac{3c(s)}{\tan \phi_C} \right)^2 / 3\sigma_{t,i} \right) = 0 \quad (4.125)$$

Cette surface a été écrite en plasticité associée et aucun écrouissage de la limite en traction isotrope  $\sigma_{t,i}$  n'a jusqu'à présent été prévu. Il est à noter que la résistance en traction isotrope est difficilement mesurable ; on mesure habituellement la résistance à la traction simple ou à l'essai brésilien. Dans notre modèle, ces valeurs dépendent directement de la cohésion, de la résistance en traction isotrope et dans une moindre mesure de l'angle de frottement (figure 4.18-b). De plus, nous avons supposé que la succion n'influçait pas la limite en traction isotrope. La résistance en traction simple dépend tout de même de la succion car la cohésion en dépend. Nous définissons les dérivées de la surface  $f$  par rapport aux contraintes et à la succion :

$$\frac{\partial f}{\partial I_\sigma} = -m^2(I_\sigma + 3\sigma_{t,i}) - m^2 \left( I_\sigma + \left( \frac{3c(s)}{\tan \phi_C} \right)^2 / 3\sigma_{t,i} \right) \quad (4.126)$$

$$\frac{\partial f}{\partial II_{\dot{\sigma}}} = 2II_{\dot{\sigma}} \quad (4.127)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sin 3\beta} = -abn(1 + b \sin 3\beta)^{n-1} 2m(I_\sigma + 3\sigma_{t,i}) \left( I_\sigma + \left( \frac{3c(s)}{\tan \phi_C} \right)^2 / 3\sigma_{t,i} \right) \quad (4.128)$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -m^2(I_\sigma + 3\sigma_{t,i}) 2 \left( \frac{3c(s)}{\tan \phi_C} \right) / 3\sigma_{t,i} \frac{3}{\tan \phi_C} k \quad (4.129)$$

Faute de résultats expérimentaux dans ce domaine de l'espace des contraintes, un modèle plus raffiné n'a pu être développé.

#### 4.6. Surface SI

La surface SI est définie de manière à modéliser les déformations irréversibles liées à la succion. Elles apparaissent lorsque la succion est supérieure à un seuil  $s_0$ , qui est la plus grande succion à laquelle le sol ait été soumis. Dans le plan  $(I_\sigma, s)$ , ce critère est donné par la relation suivante :

$$f \equiv s - s_0 = 0 \quad (4.130)$$

La variable interne de cette loi est le seuil en succion  $s_0$  et la condition de cohérence peut donc s'écrire :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}^*} \underline{\dot{\sigma}}^* + \frac{\partial f}{\partial s_0} \dot{s}_0 = 0 \quad (4.131)$$

où les dérivées de la surface  $f$  par rapport aux contraintes généralisées sont très simples :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\sigma}} = 0 \quad (4.132)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s} = 1 \quad (4.133)$$

Nous travaillons en plasticité associée, la surface d'écoulement correspond à la définition de la courbe SI. La surface d'écoulement doit dépendre de la succion et être indépendante de l'état de contrainte, de manière à ne pas créer des déformations plastiques mécaniques lors de variations de succion.

#### 4.6.1. REGLE D'ECROUISSAGE

Nous écrivons une relation incrémentale entre le seuil de succion et les déformations volumiques plastiques  $\varepsilon_v^p$  :

$$ds_0 = \frac{1+e_0}{\lambda_s - \kappa_s} (s_0 + p_{atm}) d\varepsilon_v^p \quad (4.134)$$

où  $\lambda_s$  est le module plastique pour des variations de succion.

$\varepsilon_v^p$  représente les déformations plastiques totales. Il existe donc un couplage entre cette surface de plasticité et le modèle CamClay gérant les déformations plastiques mécaniques. Un écrouissage de la surface elliptique entraînera une augmentation du seuil de succion.

Nous pouvons à présent réécrire la condition de cohérence (4.131) en exprimant la dérivée de  $s_0$  par rapport au temps :

$$\dot{f} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\sigma}^*} \underline{\dot{\sigma}}^* + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_0} \frac{ds_0}{d\varepsilon_v^p} \dot{\varepsilon}_v^p = 0 \quad (4.135)$$

avec

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_0} = -1 \quad (4.136)$$

$$\frac{ds_0}{d\varepsilon_v^p} = \frac{1+e_0}{\lambda_s - \kappa_s} (s_0 + p_{atm}) \quad (4.137)$$

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \dot{\lambda}^p \frac{\partial g}{\partial s} \quad (4.138)$$

Le formalisme élasto-plastique peut donc être utilisé avec ce modèle.

## 5. DETERMINATION DES PARAMETRES DE LA CRAIE

Nous voulons à présent utiliser la loi constitutive qui a été construite pour modéliser le comportement de la craie. Dans le cadre du projet PASACHALK, différents essais ont été réalisés par nos partenaires (LGIH et CERMES-ENPC). Ces essais ont confirmé certains comportements repris dans la littérature et ont mis d'autres effets en évidence (Angle de frottement indépendant du fluide saturant par exemple). Les résultats expérimentaux nous permettent de déterminer les paramètres de notre modèle et de valider ce dernier. Pour ce faire, nous disposons essentiellement de deux types d'essais : des essais triaxiaux et oedométriques.

Nous étudions les propriétés de la craie en conditions non-saturées ; désirant étudier le comportement de la craie formant les réservoirs pétroliers, le couple de fluides que nous considérerons sont l'eau et l'huile. L'huile utilisée est le Soltrol 170<sup>TM</sup> qui est un kérosène transparent utilisé en laboratoire pour les essais à saturation au pétrole car il a des propriétés similaires à ce dernier.

### 5.1. Rappel des paramètres du modèle

Dans ce chapitre, nous venons de développer un modèle à chapeau comportant trois mécanismes plastiques avec prise en compte des effets de succion. Cette loi de comportement est constituée de l'assemblage d'un modèle à frottement interne, d'un modèle de type CamClay et d'un modèle de limitation des contraintes de traction.

Avant d'utiliser cette surface de plasticité pour modéliser le comportement mécanique d'une craie, il est nécessaire de définir les différents paramètres du modèle. Ceux-ci peuvent être divisés en deux catégories : d'une part les paramètres élastiques et d'autre part, les paramètres plastiques et d'écrouissage.

Le comportement élastique isotrope d'un matériau est défini par des modules élastiques. Dans un modèle hyperélastique découplé, nous utilisons les modules cubique  $K$  et de cisaillement  $G$ . Toutefois, si les résultats expérimentaux le demandent, nous utilisons alors des modèles couplés avec trois modules élastiques.

De plus, les variations de succion entraînent des déformations réversibles dont la modélisation requiert la détermination du coefficient  $\kappa_s$ .

Chaque paramètre de la surface de plasticité n'appartient pas nécessairement à un seul des modèles constituant notre loi constitutive. Nous donnons ci-dessous la liste des paramètres plastiques et d'écrouissage:

- L'angle de frottement interne  $\phi$  : ayant introduit l'influence de l'angle de Lode dans le critère de plasticité, l'angle de frottement doit être défini pour des chemins de compression et d'extension. De plus, la relation d'écrouissage introduite dans le modèle à frottement interne permet de définir les valeurs initiale et finale des angles de frottement. Les données à fournir sont donc au nombre de cinq :  $\phi_{C,i}$ ,  $\phi_{C,f}$ ,  $\phi_{E,i}$ ,  $\phi_{E,f}$ ,  $B_p$ .

- La cohésion  $c$  : nous avons également introduit un écrouissage possible de la cohésion, les données à fournir sont les suivantes :  $c_i, c_f, B_c$ . De plus, il faut définir la variation de la cohésion en fonction de la succion. Nous avons supposé une variation linéaire de cette dernière (relation 4.90) : définition du paramètre  $k$ .
- L'angle de dilatance  $\psi$  du critère à frottement interne : l'introduction du troisième invariant dans la surface d'écoulement plastique nous oblige à définir des angles de dilatance en compression et en extension :  $\psi_C, \psi_E$ .
- La contrainte de pré-consolidation  $p_0$  : cette limite de plasticité peut être définie directement ou être recalculée en fonction de l'état de contrainte si le taux de sur-consolidation  $OCR$  est défini. Il sera nécessaire de définir la variation de  $p_0$  avec la succion (courbe LC). Données :  $p_0(0), p_c$ .
- Les paramètres d'écrouissage du CamClay : le paramètre à définir est l'indice de compressibilité  $\lambda$  en fonction de la succion (relation 4.91). Il est également nécessaire de définir la porosité  $n$  qui n'est pas à proprement parler un paramètre de plasticité mais qui entre dans la relation d'écrouissage. Données :  $\lambda(0), r, \omega, n$ .
- Le critère de limitation de traction nécessite de définir la contrainte moyenne maximale en traction isotrope que le matériau est capable de supporter. Donnée :  $\sigma_{t,i}$ .
- Les paramètres liés à la surface SI : le seuil de succion  $s_0$  et le coefficient plastique  $\lambda_s$ .

L'ensemble de ces paramètres doit être déterminé sur base d'essais réalisés sur le matériau à étudier. Nous allons maintenant présenter la méthode générale que nous avons utilisée pour évaluer les paramètres du modèle, sachant que nous disposons des résultats d'essais triaxiaux de compression et oedométriques.

## 5.2. Paramètres de la craie de Lixhe

Vu le coût prohibitif d'échantillons de craie de réservoir, l'ensemble des essais a été réalisé sur une craie d'affleurement, la craie de Lixhe. Elle possède l'avantage d'appartenir au même niveau stratigraphique que certaines craies de réservoirs rencontrées en Mer du Nord et des études ont montré ([MONJOIE *et al.*, 1985], [Da SILVA *et al.*, 1990]) que cette craie présente un comportement similaire à celui des craies de réservoirs. Nos partenaires (LGIH, CERMES) dans le projet PASACHALK ont réalisé leurs essais sur le matériau à différentes saturations : craie saturée en eau, saturée en huile ou cas intermédiaires. Afin d'obtenir les échantillons, la procédure suivante est utilisée:

1. Choix de la craie : les blocs de craie servant à la préparation des échantillons proviennent de la carrière de Lixhe dans un niveau stratigraphique (correspondant à une période de dépôt) toujours identique. Les blocs sont ramassés sur un front de taille fraîchement réalisé en période ensoleillée.

2. Carottage d'un échantillon : les blocs sont sciés en tranches de 10 cm d'épaisseur. La craie n'a pas à proprement parler de direction de stratification telle

qu'elle se rencontre par exemple dans des matériaux phylliteux des blocs : les dépôts d'une strate sont globalement isotropes [VANDIJCKE, 2002]. Un carottage est réalisé afin d'obtenir des échantillons cylindriques d'environ 28 mm de diamètre et dont la hauteur correspond à celle du bloc utilisé. Cette opération n'est pas toujours évidente car, lors du forage, il arrive de rencontrer soit une zone fracturée (ou fissurée), soit des restes de fossiles (oursins, belemnites), soit des morceaux de silex millimétriques à centimétriques, ce qui entraîne la perte de l'échantillon.

3. Usinage de l'échantillon : afin d'amener l'échantillon aux dimensions désirées, ce dernier doit être usiné. Pour ce faire, la craie est préalablement séchée au four (à 105 °C jusqu'à poids constant) pendant au moins 48 heures. La craie peut alors être usinée au tour pour obtenir des échantillons de 23 à 25 mm de diamètre et 50 mm de hauteur environ. Cette opération est délicate car le matériau peut se rompre lors de l'usinage. En effet, l'opération de tournage du diamètre est compliquée à cause de la configuration de la mâchoire du tour (25 mm) et de la longueur de la carotte brute (100 mm) qui peuvent engendrer un mouvement de la carotte et causer la rupture de celle-ci.

4. Saturation de l'échantillon : après avoir pris les mesures géométriques, le poids de l'échantillon sec et la mesure de la vitesse sonique longitudinale  $V_L$ , la craie est saturée sous vide (0.001 atm) pendant 2 à 3 heures. L'échantillon sec est ainsi déposé dans un récipient rempli du fluide saturant et l'ensemble est ensuite placé sous vide : l'air sort de la craie sous forme de bulles et le fluide pénètre dans l'échantillon. Ce dernier est ensuite pesé afin de déterminer la teneur en fluide et la saturation.

Dans une cellule triaxiale, la saturation peut éventuellement être améliorée en injectant dans l'échantillon un certain volume (deux ou trois fois le volume poreux) de fluide saturant.

Différents fluides sont utilisés pour la saturation, notamment l'eau et le Soltrol<sup>TM</sup>. L'eau utilisée doit être en équilibre chimique avec la craie, sinon des phénomènes de dissolution de la craie pourraient apparaître et perturber la réalisation de l'essai. Afin d'obtenir de l'eau en équilibre, cette dernière est conservée dans un récipient contenant de la craie.

Pour des niveaux intermédiaires de saturation d'eau, deux méthodes sont possibles. La première consiste à contrôler la succion (et ainsi la saturation) par méthode osmotique ou de translation d'axes (chapitre III, paragraphe 2.1). La seconde consiste à saturer l'échantillon en eau et ensuite à le placer dans le four jusqu'à obtention de la saturation voulue (par mesure de poids) ; ensuite, l'huile est injectée dans l'échantillon. Avec cette deuxième méthode, il n'y a pas de contrôle de la saturation pendant l'essai !

Nous pouvons à présent passer à la description des essais triaxiaux et oedométriques et à la détermination des paramètres du matériau.



### 5.2.1. ESSAIS TRIAXIAUX

L'essai triaxial est un essai de compression à pression latérale constante. Cet essai se compose de deux phases : la consolidation et le cisaillement proprement dit. La consolidation permet d'amener l'échantillon dans l'état de contraintes isotrope désiré. Après la consolidation, un chemin de compression triaxiale correspond à une augmentation de la contrainte axiale, au contraire d'un chemin triaxial en extension où la contrainte axiale diminue mais reste toutefois compressive. Dans la suite de ce paragraphe, nous nous limiterons à des essais triaxiaux de compression.

Les essais réalisés dans le cadre du projet ne sont pas des triaxiaux classiques : on utilise une cellule triaxiale auto-compensée asservie par trois vérins hydrauliques (eux-mêmes mis en charge par des vérins mécaniques actionnés par des moteurs pas-à-pas) contrôlant respectivement la pression de pore, la pression de confinement et la force axiale. L'échantillon est placé dans la cellule, entouré par une membrane en Viton<sup>TM</sup> qui n'est pas attaquée par l'huile de confinement et qui résiste aux pressions et températures exercées. Pour de grandes déformations, la raideur de la membrane influence la réponse du matériau ; il est donc nécessaire d'en tenir compte afin de comparer des essais réalisés avec des membranes de nature différente.

Ces tests comportent généralement trois phases (figure 4.19) : un premier chargement isotrope suivi d'un déchargement également isotrope. La troisième phase est une compression triaxiale classique : la pression de confinement est maintenue constante et la contrainte axiale est augmentée. Ce sont des essais drainés réalisés à une vitesse de  $10^{-3}$  MPa/s.

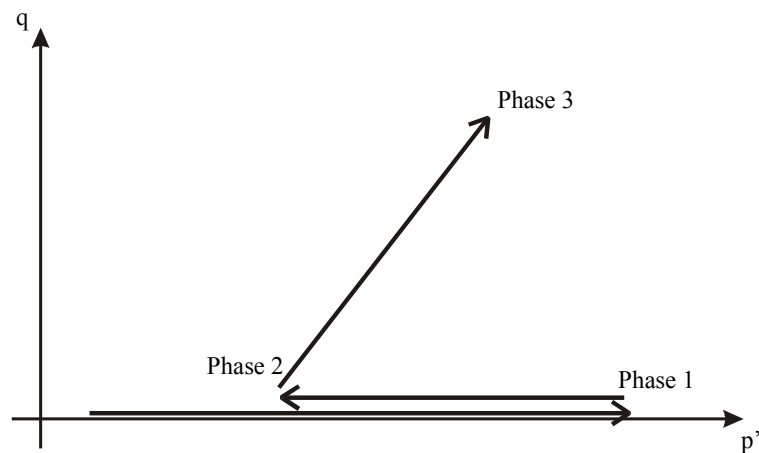
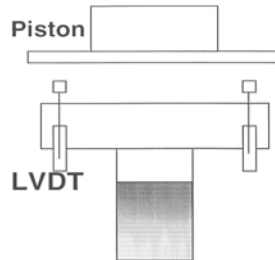


Figure 4.19 : Chemin de contrainte dans le plan  $(p', q)$

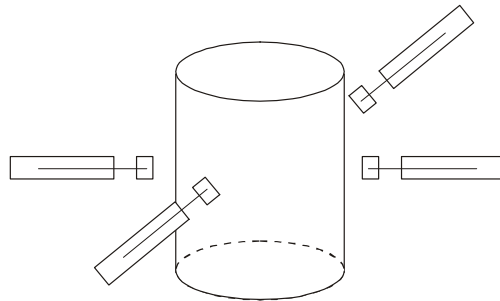
Les capteurs de pression sont reliés à la base de la cellule et les mesures des déformations axiales et latérales sont également disponibles. La déformation axiale est mesurée par le déplacement vertical du piston, c'est donc une mesure globale. De plus, deux capteurs de déplacement LVDT (figure 4.20) nous informent sur le déplacement possible entre la tête du piston et la partie supérieure de l'échantillon (lorsque la

déformation de l'échantillon est plus rapide que le déplacement du piston, à cause des forces de frottement dans le piston).



*Figure 4.20 : Mesure du déplacement entre la tête du piston et l'échantillon  
[SCHROEDER et al., 2002]*

Les déformations latérales sont mesurées par 4 LVDT diamétralement opposés deux à deux ; ils sont placés à mi-hauteur de l'échantillon et permettent de connaître la déformation latérale moyenne (figure 4.21). C'est donc une mesure locale : pour des configurations déformées de l'échantillon en forme de tonneau ou de diabololo, nous connaissons uniquement la déformation à mi-hauteur.



*Figure 4.21 : Mesure du déplacement latéral par quatre LVDT*

Des strain gages peuvent également être collées sur l'échantillon : il est toutefois nécessaire d'appliquer ces jauges avec soin car la raideur de la colle peut influencer la mesure. De plus, ce type de jauges n'est pas capable de mesurer de grandes déformations sur la craie car elles se détachent généralement de l'échantillon après une déformation d'environ 1%, par suite de la rupture de l'interface colle - craie.

#### 5.2.1.1. Interprétations : surfaces de plasticité

La détermination de la cohésion  $c$  et de l'angle de frottement  $\phi$  à la rupture est généralement obtenue par l'interprétation de trois ou plusieurs essais triaxiaux de compression, et plus précisément par le tracé d'une droite intrinsèque, enveloppe des cercles de Mohr à la rupture. Notre modèle permet de distinguer les caractéristiques en compression et en extension et il prévoit un écrouissage possible avant rupture. En

l'absence de résultats d'essais triaxiaux d'extension, nous supposons que les caractéristiques de résistance ( $c, \phi$ ) sont identiques en extension et en compression.

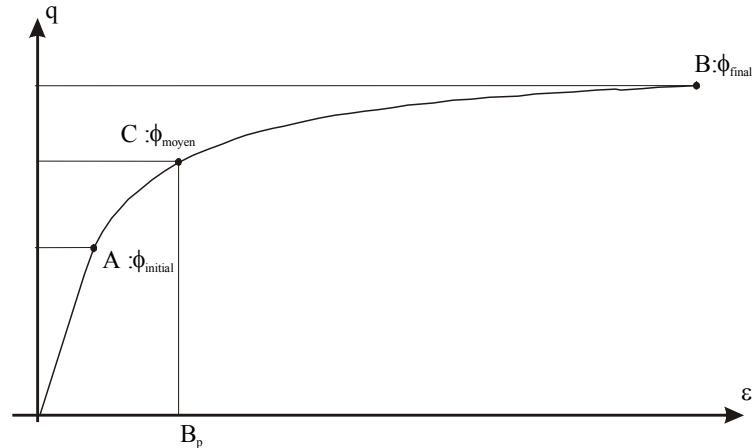


Figure 4.22 : Evolution du déviateur lors d'un essai triaxial selon le modèle à chapeau

L'évolution du déviateur peut être interprétée en terme d'écrouissage soit de la cohésion, soit de l'angle de frottement. Nous avons choisi d'utiliser l'évolution de l'angle de frottement et de considérer la cohésion constante. La règle d'écrouissage implémentée dans le modèle à frottement interne permet de reproduire l'évolution du déviateur en fonction de la déformation axiale décrite à la figure 4.22.

Le point *A* correspond à la rupture de la pente initiale du graphe et représente l'entrée en plasticité. Ce point caractérise l'angle de frottement initial. Le point *B* correspond à la valeur maximale (asymptotique) du déviateur et constitue une mesure de l'angle de frottement final. Le point *C* correspond à la moitié de l'évolution de l'angle de frottement entre sa valeur initiale et finale ; nous pouvons ainsi déterminer le paramètre  $B_p$  qui correspond à la déformation correspondante au point *C*. Pour des matériaux présentant ce type de comportement, il est donc possible de définir les paramètres  $\phi_{C,i}$ ,  $\phi_{C,f}$ , et  $B_p$ .

Les angles de dilatance ne sont pas facilement quantifiables à partir de l'essai triaxial. Il reste toutefois possible de déterminer le caractère contractant ou dilatant d'un géo-matériau. Dans un essai drainé, la dilatance se manifeste par une augmentation du volume de l'échantillon dans la phase plastique. Pour un essai non-drainé, la dilatance se traduit par une chute de la pression de pore.

La détermination de la surface de plasticité initiale commence tout d'abord par l'identification du type de comportement plastique observé : rupture fragile ou déformation plastique importante. Les résultats expérimentaux mettent bien en évidence les deux modes de rupture de la craie. Le premier est caractérisé par une diminution importante de la porosité, c'est le *pore collapse* (figure 4.23-b) accompagné de déformations volumiques plastiques importantes (pour la craie, soit 1 ou 2%). Le second mode correspond à une rupture fragile le long d'une famille de plans de

cisaillement, c'est la *rupture par frottement interne* (figure 4.23-a). En effet, cette figure nous montre qu'à l'entrée en plasticité, des déformations volumiques dilatantes sont créées alors que l'état de contraintes n'évolue plus beaucoup.

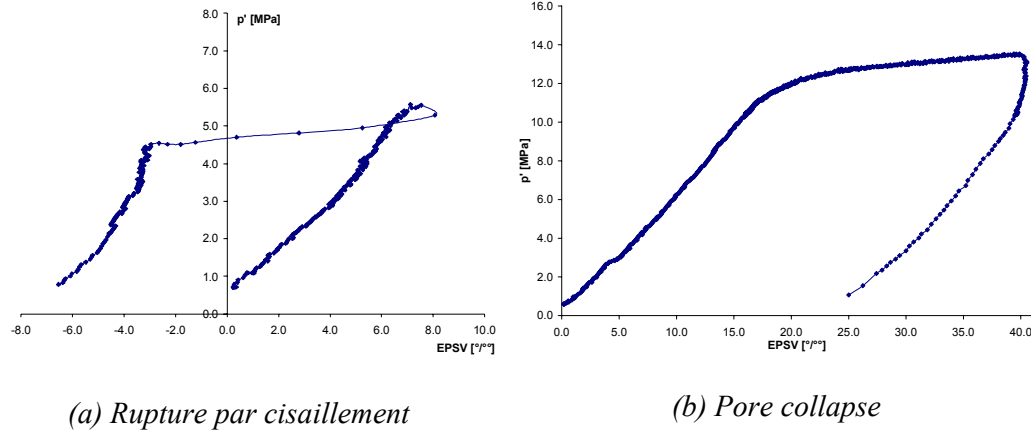


Figure 4.23 : Mécanismes plastiques de la craie

Lors de la rupture fragile par le mécanisme frottant, l'écroutissage de la surface est quasi inexistant. La règle d'écroutissage que nous avons introduite dans notre modèle sera donc inutile pour ce matériau ; cela signifie que les paramètres à déterminer se réduisent à l'angle de frottement et la cohésion à la rupture.

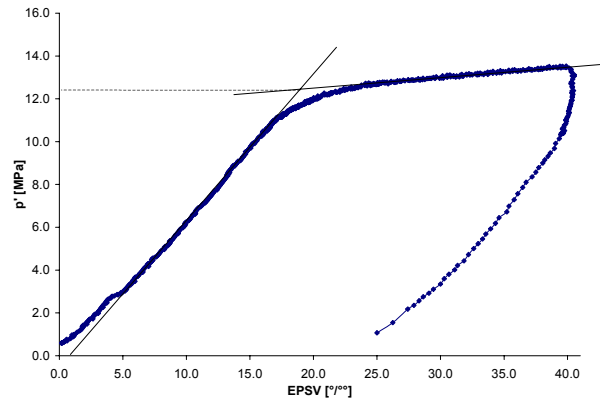


Figure 4.24 : Points d'entrée en plasticité

Il faut ensuite déterminer l'état de contrainte à l'entrée en plasticité. Nous travaillons dans le plan  $(p, \varepsilon_v)$ . Les tangentes à la courbe en phases élastique et plastique se rencontrent en un point que nous considérons être l'état de contrainte de l'entrée en plasticité (figure 4.24). Nous pouvons ainsi identifier les points d'entrée en plasticité pour chaque essai dans le plan  $(p', q)$ . Les figures (4.25) et (4.26) reprennent l'ensemble des points déterminés respectivement pour les échantillons saturés en eau et en huile. Chaque point est représenté par un symbole selon le type de mécanisme plastique activé (FM = *Frictionnal Mechanism* et PC = *Pore Collapse*).

Lors de la première phase de chargement isotrope, le mécanisme plastique de *pore collapse* est activé et la surface s'écrouit jusqu'au point d'arrêt de ce premier chargement. Nous devons ainsi définir la surface plastique initiale et la surface écrouie pour un chargement isotrope de 20 ou 30 MPa.

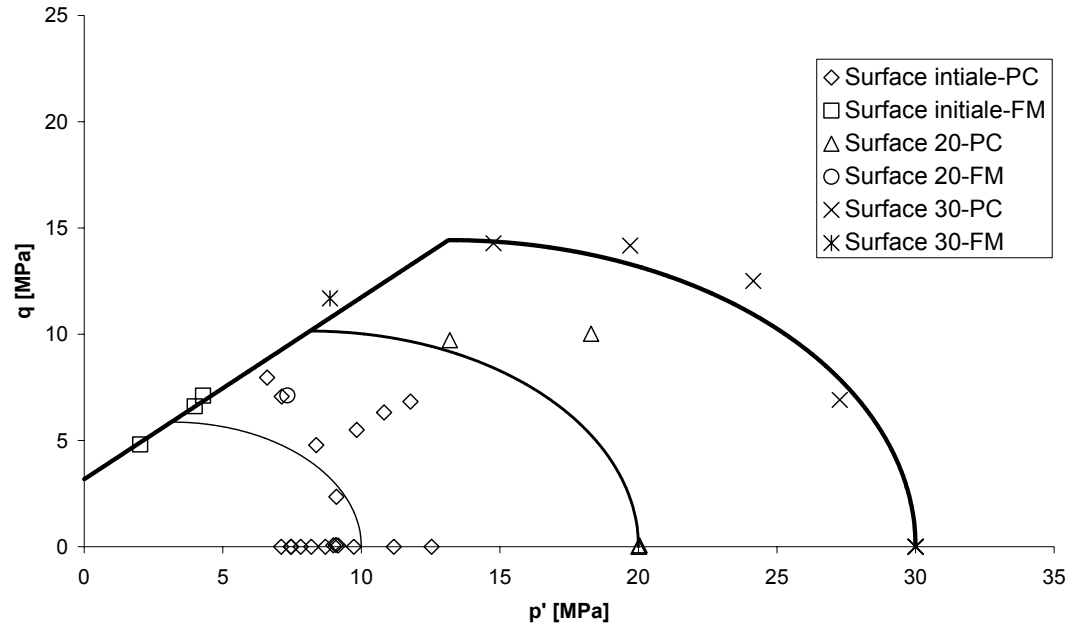


Figure 4.25 : Points d'entrée en plasticité pour des échantillons saturés en eau

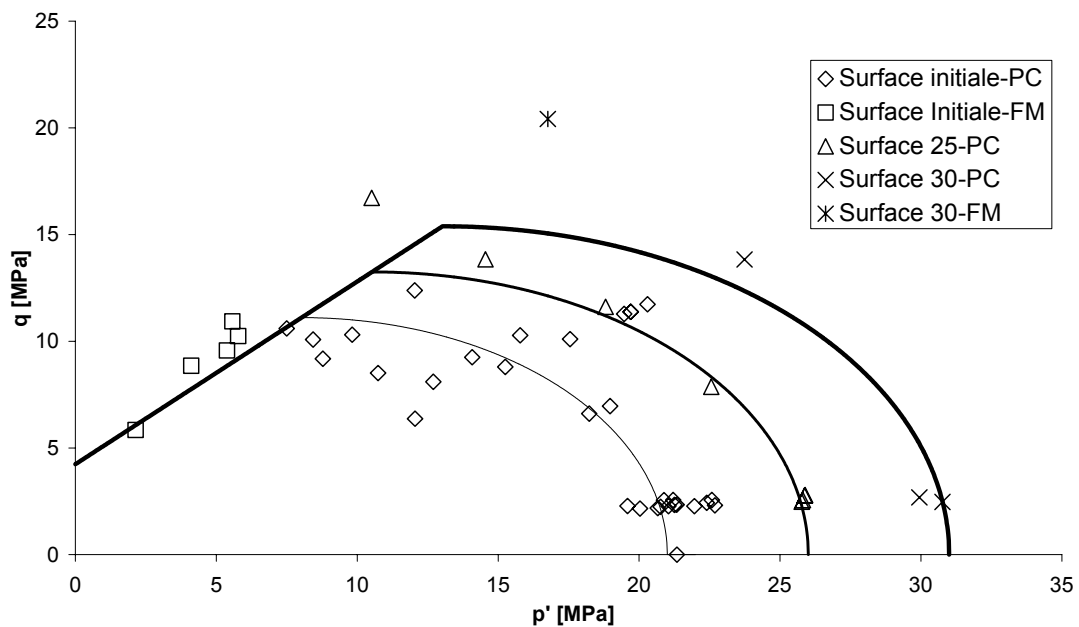


Figure 4.26 : Points d'entrée en plasticité pour des échantillons saturés en huile

Les figures (4.25) et (4.26) montrent bien une dispersion plus importante des points correspondant à la surface initiale. Cela rend difficile la définition d'une surface bien précise. Cette dispersion initiale ne peut être mise sur le compte de variations de porosité globale car cette dernière n'est guère variable pour l'ensemble des échantillons ( $0.38 < n < 0.43$ ). Toutefois, pour les surfaces écrouies, les points sont cohérents avec la surface elliptique. Il semblerait donc que la plasticité ait tendance à uniformiser les comportements.

Ce phénomène pourrait être attribué à la distribution des pores dans le matériau qui peut être différente (existence de pores de volume plus important par exemple) pour une même porosité moyenne. Lors du pore collapse, ces macro-pores s'écrasent en premier lieu, ce qui explique une entrée en plasticité plus ou moins tardive. Toutefois, après un écrouissage suffisant, les macro-pores ont disparu et il ne reste que des pores de dimensions similaires dans les différents échantillons. Cela expliquerait que le comportement plastique est moins dispersé que dans le domaine élastique.

Les surfaces de plasticité des figures 4.25 et 4.26 sont tracées de manière à passer au mieux dans les nuages de points déterminés expérimentalement. Nous pouvons ainsi définir une surface de plasticité pour le matériau saturé à l'eau et à l'huile. Nous pouvons observer que l'angle de frottement n'est pas significativement influencé par le liquide saturant.

	Eau	Huile
Angle de frottement $\phi [^\circ]$	22	22
Cohésion $c$ [MPa]	1,5	2,0
Pré-consolidation $p_0$ [MPa]	10	21

Tableau 4.5 : Paramètres de définition du modèle à chapeau

Nous avons supposé dans un premier temps que l'angle de dilataance est égal à l'angle de frottement (plasticité associée). La comparaison des résultats expérimentaux et numériques dans le domaine plastique nous permettra de valider cette hypothèse.

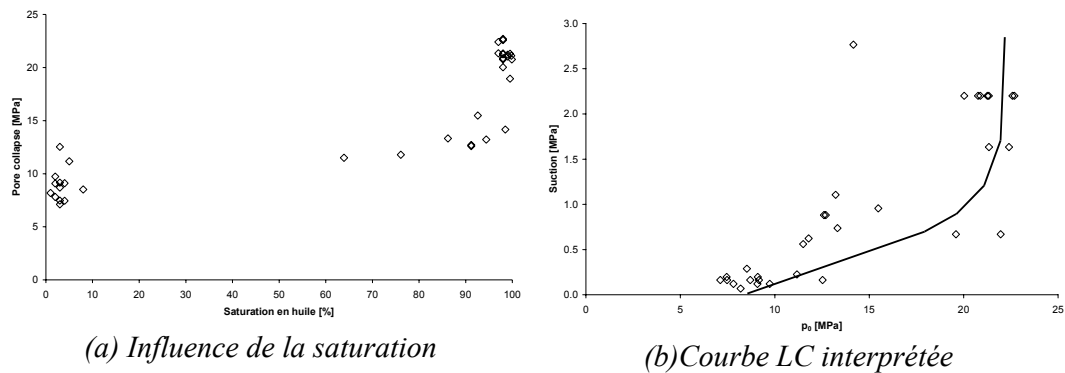


Figure 4.27 : Evolution du pore collapse pour différentes saturations en huile

Nous venons d'étudier les propriétés de la craie dans deux cas extrêmes : saturé en huile ou en eau. Mais nous devons également connaître l'évolution des propriétés pour des saturations intermédiaires.

Dans notre modèle, nous supposerons une évolution linéaire de la cohésion en fonction de la succion, entre deux valeurs extrêmes définies au tableau 4.5. La pression de pré-consolidation est définie par la courbe LC par une relation dépendant de la succion. Dans les expériences dépouillées ici, seule la saturation est connue et la succion n'est pas contrôlée. La figure 4.27-a présente l'évolution du pore collapse en fonction de la saturation en huile. En prenant la courbe de rétention utilisée pour la craie de Lixhe (cfr chapitre VI), nous pouvons déduire une courbe LC de ces résultats (figure 4.27-b). La courbe obtenue présente une forme similaire à celles de sols non-saturés.

#### 5.2.1.2. Interprétations : modules élastiques

Pour un modèle élastique isotrope, il est nécessaire d'identifier deux modules parmi les différents modules existants (Young  $E$ , cubique  $K$ , cisaillement  $G$ , coefficient de Poisson  $\nu$ , ...). La détermination de ces paramètres à partir des résultats d'essais est réalisée par la mesure de la pente des courbes contraintes-déformations. Il faut toutefois prendre certaines précautions : la détermination des modules doit s'effectuer dans la partie élastique de la courbe de comportement, elle nécessite des mesures précises des contraintes et déformations et elle demande de bien connaître les caractéristiques de la craie. En effet, les modules élastiques dépendent de plusieurs paramètres : la porosité, l'état de contrainte, le fluide saturant et dans une moindre mesure la teneur en silice.

La porosité est un paramètre qui influence fortement les modules élastiques et il faut à ce propos toujours mettre en relation les valeurs obtenues avec la valeur de la porosité de l'échantillon utilisé.

Le choix des deux modules à déterminer se pose en fonction des résultats dont on dispose. Comme nous l'avons déjà mentionné, la qualité de la mesure de la déformation radiale est moins bonne que celle de la déformation axiale. La déformation axiale est une mesure globale résultant du déplacement du piston, que l'on connaît avec grande précision. La déformation latérale est mesurée localement par les LVDT. Ainsi, le calcul du coefficient de Poisson par la pente de la courbe  $\varepsilon_1$ - $\varepsilon_3$  d'un essai triaxial est influencé de manière fort importante par l'imprécision de  $\varepsilon_3$  et ne fournit pas des données fiables.

Nous avons choisi de déterminer le module cubique  $K$  et le module de cisaillement  $G$  respectivement dans les plans  $(\varepsilon_v, p)$  et  $(\varepsilon_{eq}, II_{\hat{\sigma}})$ , sur base des relations suivantes :

$$p = K\varepsilon_v \text{ et } II_{\hat{\sigma}} = 2G\varepsilon_{eq} \quad (4.139)$$

où les déformations volumique et déviatorique sont définies selon :

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{ii} \text{ et } \varepsilon_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2} \hat{\varepsilon}_{ij} \hat{\varepsilon}_{ij}} \quad (4.140)$$

La déformation volumique ( $\varepsilon_v = \varepsilon_I + 2\varepsilon_3$ ) est moins influencée par l'imprécision de  $\varepsilon_3$  car la déformation axiale est généralement beaucoup plus importante que la déformation radiale. De plus, des comparaisons entre la déformation volumique calculée et la quantité de fluide expulsé ont montré une bonne concordance des valeurs en petites déformations [SCHROEDER *et al.*, 1988].

Il faut toutefois bien mesurer ces modules dans la partie élastique du chemin des contraintes. Comme nous l'avons vu (tableau 4.2), un matériau se comporte élastiquement si aucune déformation résiduelle n'est observée pour des chemins de contraintes fermés ; il faudrait donc réaliser des cycles de charge-décharge pour s'assurer de l'élasticité de matériau et déterminer les modules élastiques. Nous adapterons toutefois cette définition en considérant que la craie se trouve dans le domaine élastique au début du chargement (avant l'entrée en plasticité) et lors de tout déchargement. En pratique, si des cycles de charge sont réalisés dans cette zone, des déformations résiduelles apparaissent et les modules déterminés ne sont donc pas parfaitement élastiques. Toutefois, nous les considérerons comme tels car le comportement y est tout de même majoritairement réversible.

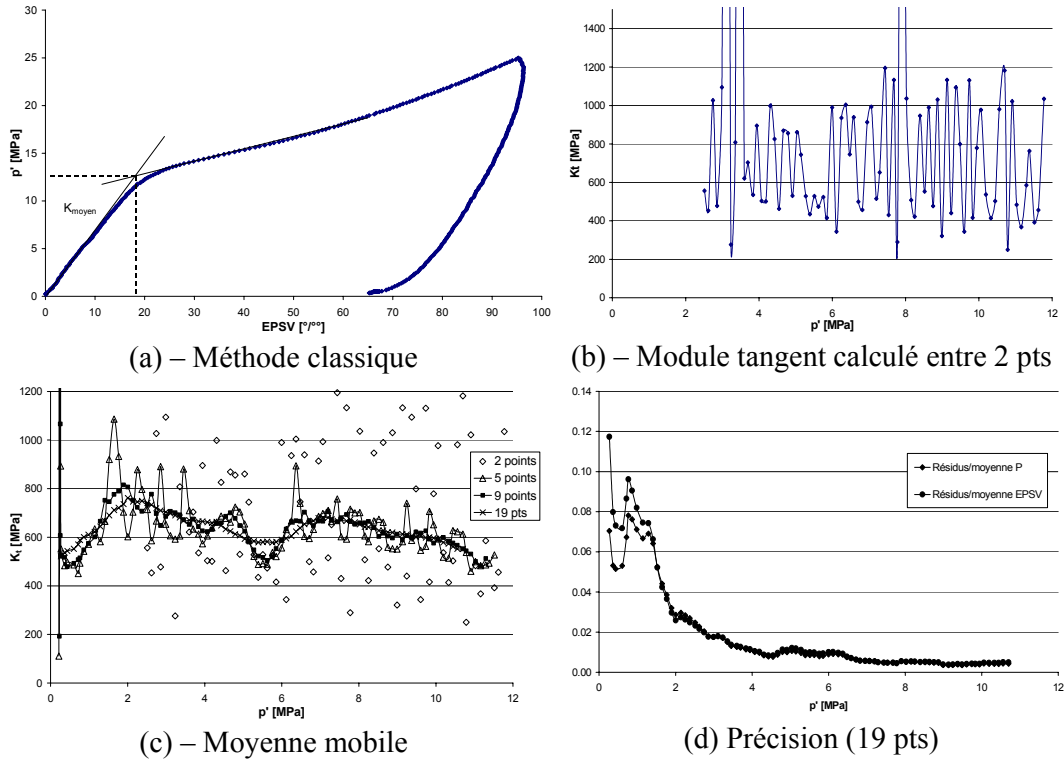


Figure 4.28 : Détermination du module cubique tangent

Nous déterminons le module cubique dans le plan ( $\varepsilon_v, p$ ) par la pente de la partie élastique du comportement du matériau. A la figure 4.28-a, nous donnons un exemple



de courbe d'essai où nous avons tracé la tangente de la partie élastique. Cette pente ne nous fournit en fait qu'une information limitée : elle représente une valeur moyenne du module cubique tangent. Si nous voulons connaître le module avec plus de précision (notamment son évolution en fonction de la contrainte moyenne), il est nécessaire d'analyser plus en détails les données.

Une première méthode consiste à calculer le module tangent pour chaque incrément enregistré des contraintes. Cette valeur fluctue toutefois énormément (figure 4.28-b). Il est possible d'améliorer ces mesures en utilisant la technique de la moyenne mobile : le calcul de la pente ne se fait plus entre 2 points mais bien entre plusieurs points pour lesquels une droite de régression est déterminée. La droite de régression est supposée représenter l'ensemble de ces points et la pente de cette dernière s'identifie au module tangent. Nous avons ainsi utilisé 5, 9 et 19 points et la figure 4.28-c montre des courbes qui sont de plus en plus lissées. Nous utiliserons dans la suite 19 points pour la moyenne mobile.

Cette méthode peut sembler complexe mais il est en fait facile d'obtenir la pente de la droite de régression. Elle est définie par le rapport des écart-types de la contrainte moyenne et de la déformation volumique [BOLLE, 1995] :

$$K_t = \frac{\text{Ecart type}(p')}{\text{Ecart type}(\varepsilon_v)} \quad (4.141)$$

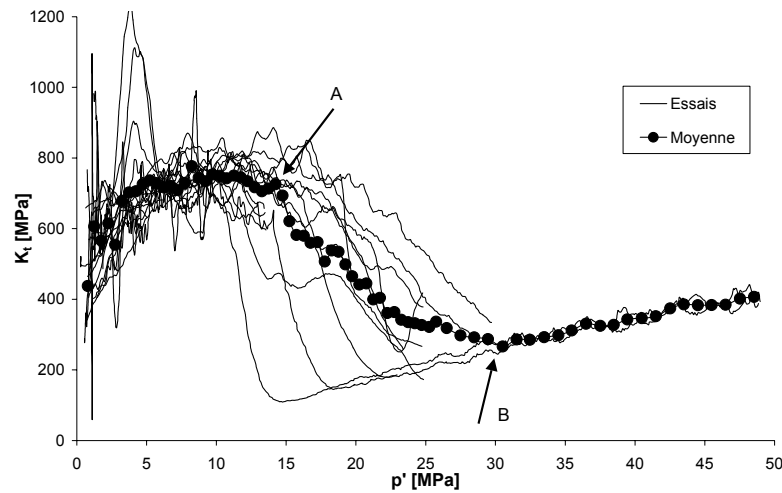
Lors d'un déchargement, le module peut éventuellement être négatif. Nous déterminons le signe du module par celui du coefficient de corrélation. Il est également intéressant d'analyser l'évolution de la somme résiduelle des carrés rapportée à la moyenne, donnée par

$$\frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (p_i - p_{reg,i})^2}{n-1}}}{\text{moyenne}(p_i)} \text{ et } \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \varepsilon_{reg,i})^2}{n-1}}}{\text{moyenne}(\varepsilon_i)}, n = 19 \quad (4.142)$$

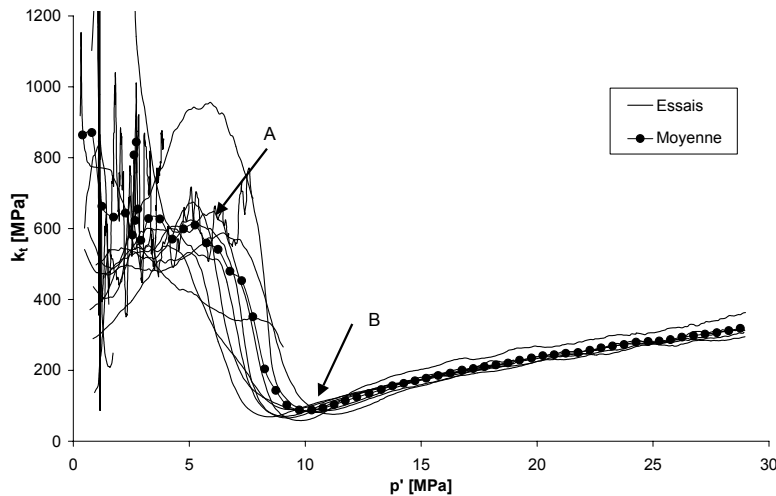
Cette valeur caractérise l'écart des données par rapport à la droite de régression, rapporté à la valeur moyenne. Elle indique donc que la précision obtenue (figure 4.28-d) est moins bonne pour de faibles contraintes mais s'améliore pour des contraintes plus importantes. Ce résultat est logique car la précision des mesures expérimentales elles-mêmes n'est pas bonne pour de faibles contraintes (< 1MPa).

Nous avons ainsi utilisé cette méthode pour l'ensemble des essais isotropes réalisés sur des échantillons saturés en huile et en eau. La figure 4.29 montre l'ensemble des résultats correspondant au premier chargement. Malgré une dispersion relative des résultats, il est possible de dégager un comportement général. Nous observons tout d'abord des valeurs plus fluctuantes du module cubique pour de faibles contraintes ; à chargement plus élevé, le module semble se stabiliser à une valeur de 750 MPa pour les échantillons saturés en huile (figure 4.29-a) et de 600 MPa (figure 4.29-b) pour les échantillons saturés en eau.

L'évolution du module cubique permet également de mettre en évidence le pore collapse. En effet, à partir de 15 MPa (huile) et de 7 MPa (eau), le module cubique diminue (point A) ce qui correspond à l'entrée en plasticité progressive de la craie (écrasement des plus gros pores). Ensuite, le module plastique augmente (point B), ce qui pourrait traduire une densification du matériau (classiquement observée à l'oedomètre sur des argiles). De plus, le comportement plastique n'est pas dispersé : le module chute tout d'abord jusqu'à 90 MPa (échantillons saturés en eau) et augmente ensuite progressivement. Un comportement similaire est observé pour les échantillons saturés à l'huile.



(a) – Essais à l'huile



(b) – Essais à l'eau

Figure 4.29 : Détermination du module cubique pour des chemins isotropes

Ces valeurs de modules doivent naturellement être mises en relation avec la porosité de la craie. Les échantillons utilisés présentent une porosité qui ne varie pas beaucoup, avec une valeur moyenne de 41 % (figure 4.30-a). Pour les échantillons saturés en huile, nous avons également tracé les valeurs moyennes du module cubique

(entre 5 et 15 MPa) en fonction de la porosité (figure 4.30-b). Pour la gamme de porosité considérée, nous n'observons pas d'influence de cette dernière.

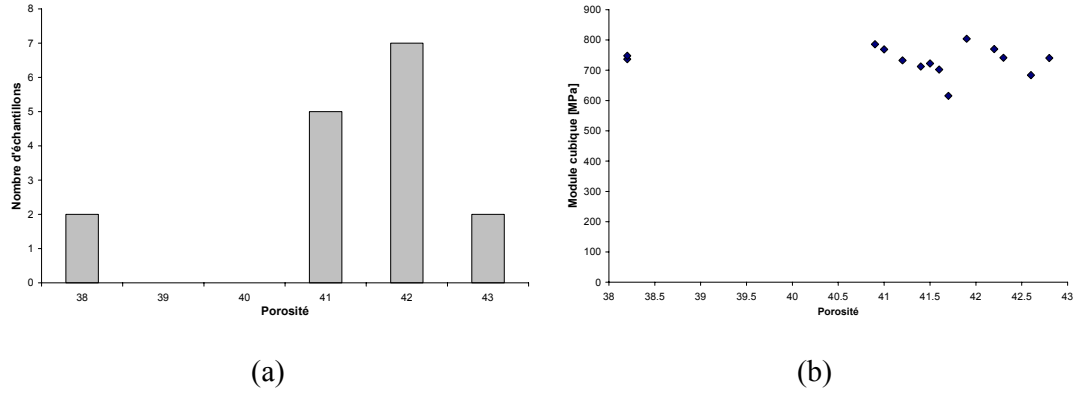


Figure 4.30 : Influence de la porosité (échantillons saturés en huile)

Nous pouvons déterminer le coefficient  $\kappa$  et l'indice de compressibilité  $\lambda$  grâce aux formules suivantes :

$$K_t^e = K_0 + \frac{1+e_0}{\kappa} p' \quad (4.143)$$

$$\Delta K_t^p = \frac{1+e_0}{\lambda} \Delta p' \quad (4.144)$$

Nous avons utilisé la courbe moyenne des essais et, en réalisant une régression linéaire dans les parties élastique et plastique, nous obtenons, pour une porosité moyenne de 40%, les valeurs présentées au tableau 4.6. Pour les essais saturés en eau, la courbe moyenne varie fortement, spécialement pour de faibles contraintes, nous amenant une valeur négative du coefficient  $\kappa$ .

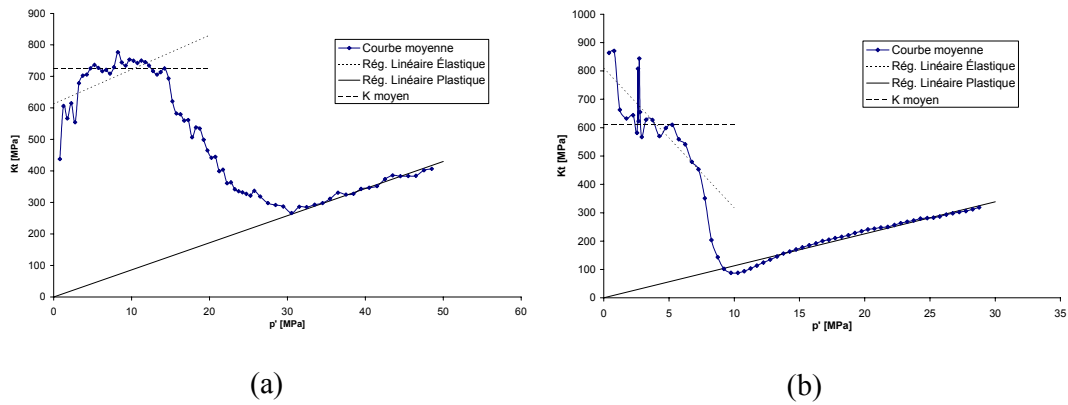


Figure 4.31 : Détermination des paramètres  $\kappa$  et  $\lambda$

Cela nous amène à définir un module cubique moyen, obtenu en ne tenant pas compte du début des courbes.

	Eau	Huile
$K_0$ [MPa]	808	612
Coefficient $\kappa$	-0,034	0,15
$K_{moyen}$ [MPa]	612	726
Indice de compressibilité $\lambda$	0,148	0,194

Tableau 4.6 : Paramètres volumiques élastique et plastique

Nous pouvons aussi déterminer des modules élastiques lors d'un chemin de déchargement. La figure 4.32-b montre les modules obtenus lors du cycle chargement déchargement de la figure 4.32-a. Au début de la décharge, la valeur du module cubique est fort élevée ( $> 2000$  MPa) mais elle se stabilise ensuite à une valeur supérieure de quelques dizaines de pourcents au module de premier chargement (la courbe de chargement est la courbe moyenne obtenue précédemment). Cela est systématiquement observé pour un cycle chargement-déchargement (figures 4.32-c-d).

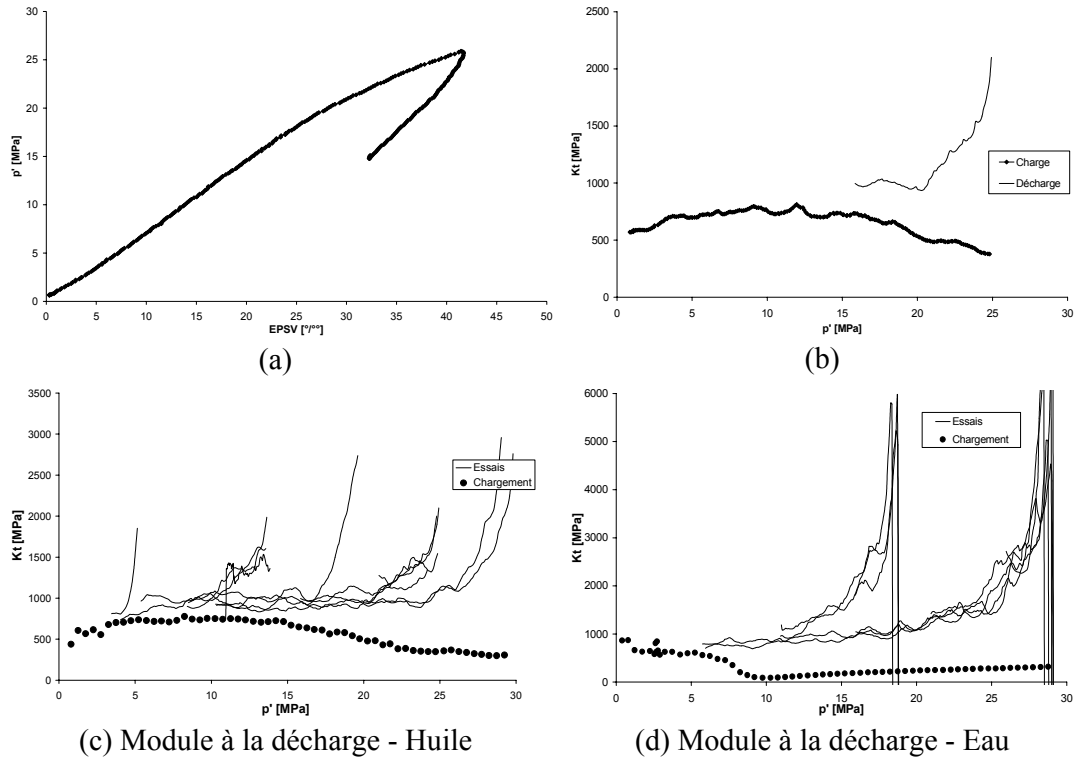


Figure 4.32 : Module cubique lors de cycles charge-décharge isotropes

Lors de cycles consécutifs charge-décharge, des conclusions similaires peuvent être formulées. Le module à la décharge est supérieur au module à la charge précédente. De plus, le module de début de chargement est généralement supérieur au module de la fin de déchargement précédent.

Ces modules très élevés sont-ils liés au comportement intrinsèque du matériau ou est-ce un artefact expérimental ? Dans la cellule auto-compensée utilisée, la mesure de la force axiale est effectuée à l'extérieur de la cellule. Cette dernière est tarée afin de tenir compte des frottements en phase de chargement. Malheureusement, elle n'a pas été tarée en déchargement (procédure nettement plus complexe). Dès lors, la prise en compte du frottement n'est pas correcte au début du déchargement : cela explique les modules très importants au début (inversion du sens du frottement). Ensuite, une fois le déchargement bien amorcé, la prise en compte du frottement est bonne.

Nous avons également étudié l'évolution du module cubique pour un chemin de contrainte proportionnel (chemin pour lequel le rapport  $q/p'$  est une constante). Les résultats montrent une évolution (qualitative et quantitative) similaire aux résultats obtenus pour un chemin isotrope. L'entrée en plasticité se produit pour une contrainte moyenne dépendant du rapport  $q/p'$ . Nous ne pouvons donc pas conclure à une influence du rapport  $q/p'$  (ni du déviateur) sur le module cubique.

Enfin, pour des chemins triaxiaux, la détermination du module cubique est plus difficile car les déformations volumiques sont plus limitées sur ce chemin et les courbes obtenues présentent beaucoup d'oscillations. Les courbes commencent par des valeurs très importantes du module. En effet, dans la plupart des essais, la phase triaxiale suit généralement une phase de déchargement isotrope et le problème du frottement influence fortement la réponse du matériau. De plus, les déformations volumiques élastiques sont relativement limitées et les valeurs de modules cubiques n'ont pas le loisir de se stabiliser car assez rapidement intervient l'entrée en plasticité. Il est donc difficile de tirer des conclusions sur la valeur du module cubique pour ces chemins.

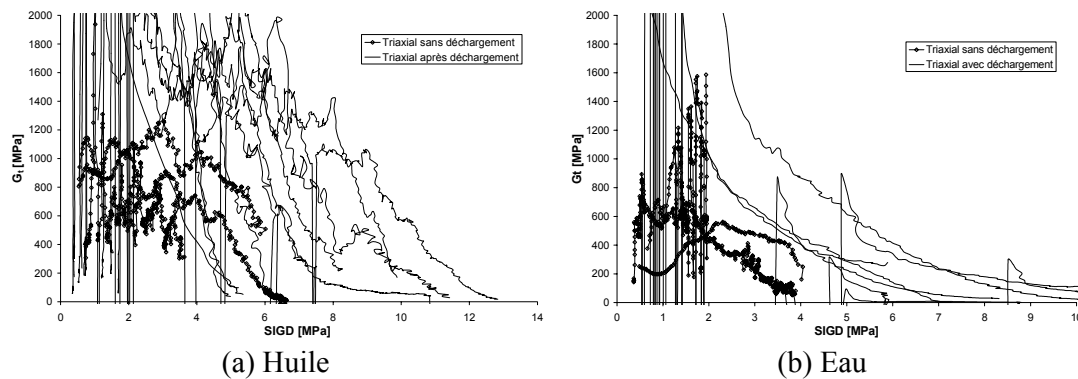


Figure 4.33 : Module de cisaillement lors de chemins triaxiaux

Le module de cisaillement  $G_t$  est donné dans le plan  $(\varepsilon_{eq}, \Pi_{\dot{\sigma}})$  par la pente de la partie élastique de la courbe. La figure 4.33 présente les modules mesurés lors de chemins triaxiaux. Les résultats obtenus montrent une dispersion relativement importante. Toutefois, il est possible de distinguer les chemins triaxiaux effectués après une montée isotrope et les chemins triaxiaux effectués après un cycle charge-décharge isotrope. En effet, les modules des premiers sont relativement constants aux environs de 400 à 1100 MPa pour l'huile et de 300 à 600 MPa pour l'eau. Les modules après déchargement présentent tout d'abord des valeurs importantes (liées au frottement) pour

ensuite redescendre à des valeurs plus raisonnables. Ces observations sont cohérentes avec celles effectuées lors des mesures du module cubique.

Les modules  $G_t$  mesurés lors de chemins proportionnels (chemins pour lesquels  $q/p'$  est constant, figure 4.34-a) sont représentés à la figure 4.34-b-c. Ces courbes montrent clairement une augmentation de ce module avec l'angle correspondant au rapport  $q/p'$  (figure 4.34-d). De plus, pour un angle donné, il semble que le module augmente avec la contrainte déviatorique. A l'entrée en plasticité, le module chute brutalement pour atteindre des valeurs proches de zéro. Ce comportement se produit pour des échantillons saturés en huile et en eau ; il est caractéristique du *pore collapse*. Enfin, à la figure 34-c, nous présentons également deux essais triaxiaux drainés qui correspondent à un angle de  $71^\circ$ .

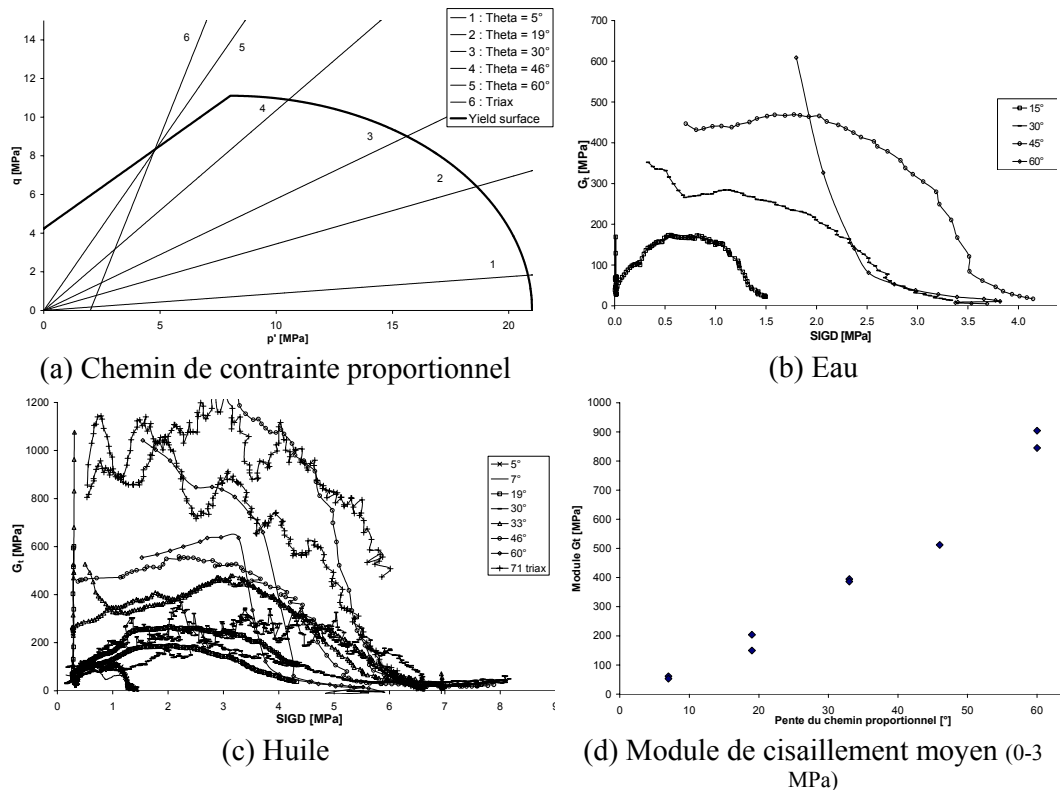


Figure 4.34 : Module de cisaillement lors de chemins proportionnels

La figure 4.35 présente les mesures du module de cisaillement pour des chemins de chargement purement déviatoriques. Ces essais à l'huile montrent que, lors de la décharge, les modules sont plus importants (à cause des problèmes de frottement). En chargement, le module est initialement d'environ 600 MPa et il diminue ensuite progressivement.

Il est en fait difficile de tirer des conclusions sur la valeur du module de cisaillement. Celui-ci semble très variable et dépend fortement du chemin de contrainte suivi (au contraire du module cubique). La figure 4.34-d montre très bien l'influence du

rapport  $q/p'$  pour des chemins proportionnels. On s'attendrait alors à obtenir un module de cisaillement maximum pour un chemin déviatorique (rapport  $q/p'$  maximum) mais une comparaison des figures 4.34-c et 4.35 montre le contraire. Nous préférons alors choisir un module moyen pour les échantillons à l'huile et à l'eau, respectivement de 700 MPa et 500 MPa. Il est également à noter que les déformations de cisaillement sont généralement plus faibles que les déformations volumiques et qu'il est dès lors plus important de déterminer avec précision le module cubique.

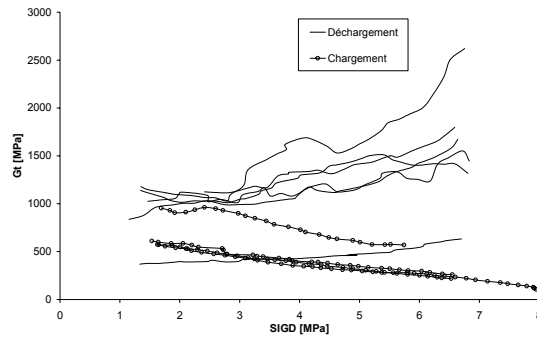


Figure 4.35 : Module de cisaillement pour des chemins déviatoriques (huile)

### 5.2.2. ESSAIS OEDOMETRIQUES

L'essai oedométrique est un essai de compression à déformation latérale empêchée. L'interprétation de ce test repose sur l'utilisation du modèle CamClay qui a été développé en ce sens. Les concepts de base de ce modèle sont les suivants : une élasticité non-linéaire et un comportement bi-linéaire dans le plan semi-logarithmique ( $e-\ln p$ ).

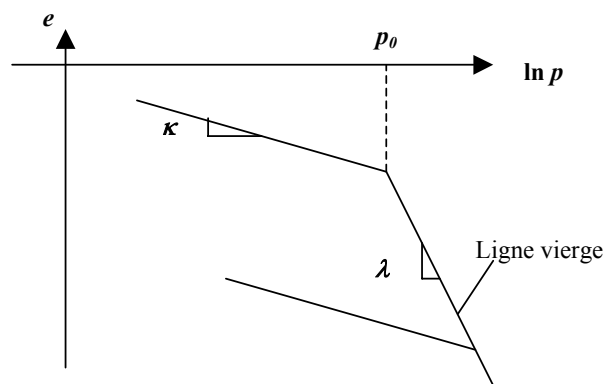


Figure 4.36 : Comportement à l'oedomètre selon le modèle CamClay

Cet essai permet donc de déterminer la contrainte de pré-consolidation  $p_0$ , la pente élastique  $\kappa$  et l'indice de compressibilité  $\lambda$  (figure 4.36). L'essai oedométrique classique présente toutefois l'inconvénient que la contrainte horizontale n'est pas connue. Dans la

partie élastique du chemin de contraintes, le rapport des contraintes horizontale et verticale dépend uniquement du coefficient de Poisson :

$$\frac{\sigma_h}{\sigma_v} = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (4.145)$$

Classiquement, ce rapport est inconnu et l'interprétation des résultats suppose généralement un état isotrope des contraintes avec les incertitudes que cela comporte.

De plus, la détermination du paramètre  $\kappa$  n'est pas très évidente. Lors de la mise en charge, la phase élastique est rarement linéaire ; il est donc intéressant de réaliser des décharges pendant la phase plastique pour obtenir une information plus précise.

Les résultats d'un essai oedométrique doivent donc être interprétés avec beaucoup de soin et de prudence, en se rendant compte des incertitudes qu'ils comportent.

La réalisation d'un essai oedométrique dans une cellule triaxiale asservie (essai de compression en maintenant les déformations latérales nulles, appelé essai  $K_0$ ) permet de déterminer la contrainte de pré-consolidation avec plus de précision et fournit également un moyen de déterminer le coefficient de Poisson. Ces essais  $K_0$  en cellule triaxiale ont été réalisés sur des échantillons saturés en huile. Il n'y a pas de contrôle de la succion mais ils permettent la connaissance du chemin de contraintes suivi. La procédure de préparation des échantillons est identique à celle utilisée pour les essais triaxiaux.

Par contre, deux procédures de chargement ont été utilisées. La première (figure 4.37-a) est inspirée d'essais précédemment réalisés sur des craies de réservoir [DA SILVA *et al.*, 1990] et est composée de trois phases (la valeur maximale des contraintes varie éventuellement suivant l'essai considéré):

- Un chemin de contrainte totale isotrope est imposé jusqu'à 35 MPa, la pression de pore est maintenue à une valeur de 2 MPa inférieure à la contrainte totale. Ensuite, la pression de pore reste constante et la pression de confinement est augmentée jusqu'à 40 MPa. ( $p' = 7$  MPa)
- L'échantillon est soumis alors à un chemin triaxial drainé. La contrainte axiale totale augmente jusqu'à 50 MPa et la pression de confinement est constante.
- La pression de pore est ensuite diminuée en maintenant constante la contrainte axiale et en empêchant toute déformation latérale par un contrôle de la pression de confinement. Cette dernière phase correspond donc à un chemin oedométrique.

La seconde procédure (figure 4.37-b) consiste en trois phases à pression de pore nulle. Un chemin isotrope de longueur variable est suivi éventuellement d'un chemin triaxial et l'essai se termine par une augmentation de la contrainte axiale en adaptant la contrainte latérale afin d'empêcher toute déformation latérale.



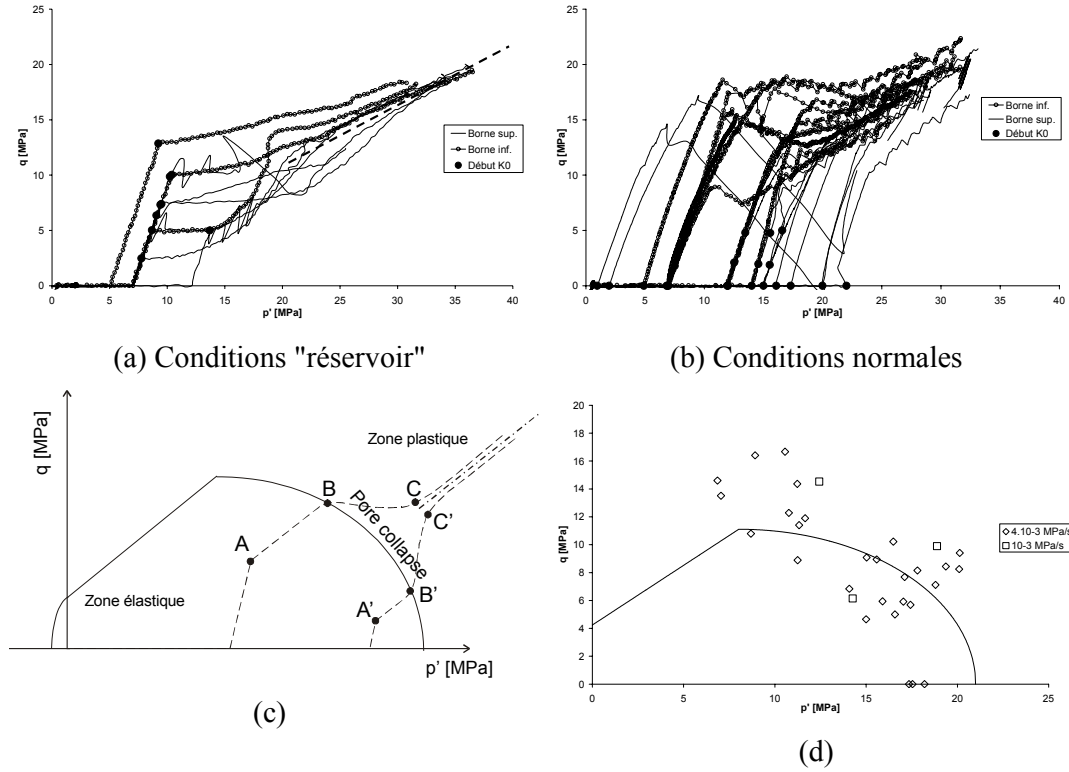


Figure 4.37 : Essais oedométriques en cellule triaxiale

L'ensemble des essais présentés aux figures 4.37-a-b devrait en théorie suivre des chemins de contraintes tels que décrit à la figure 4.37-c :

- Après la phase triaxiale, nous avons une phase élastique entre les points A et B. Ce chemin dépend du coefficient de Poisson. Sachant que le rapport de contraintes est donné par la relation (4.145), la pente du chemin dans le plan ( $p'$ - $q$ ) est donnée par l'équation suivante :

$$pente = \frac{1 - K_0}{1 + 2K_0} \quad (4.146)$$

- Le pore collapse commence au point B (entrée en plasticité) et se termine au point C.
- Une dernière phase d'écroutissage plastique commence au point C et s'aligne le long d'une droite.

Selon l'état de contrainte au point B, le pore collapse se traduit par une descente (BC) ou une montée (B'C') vers la droite d'écroutissage.

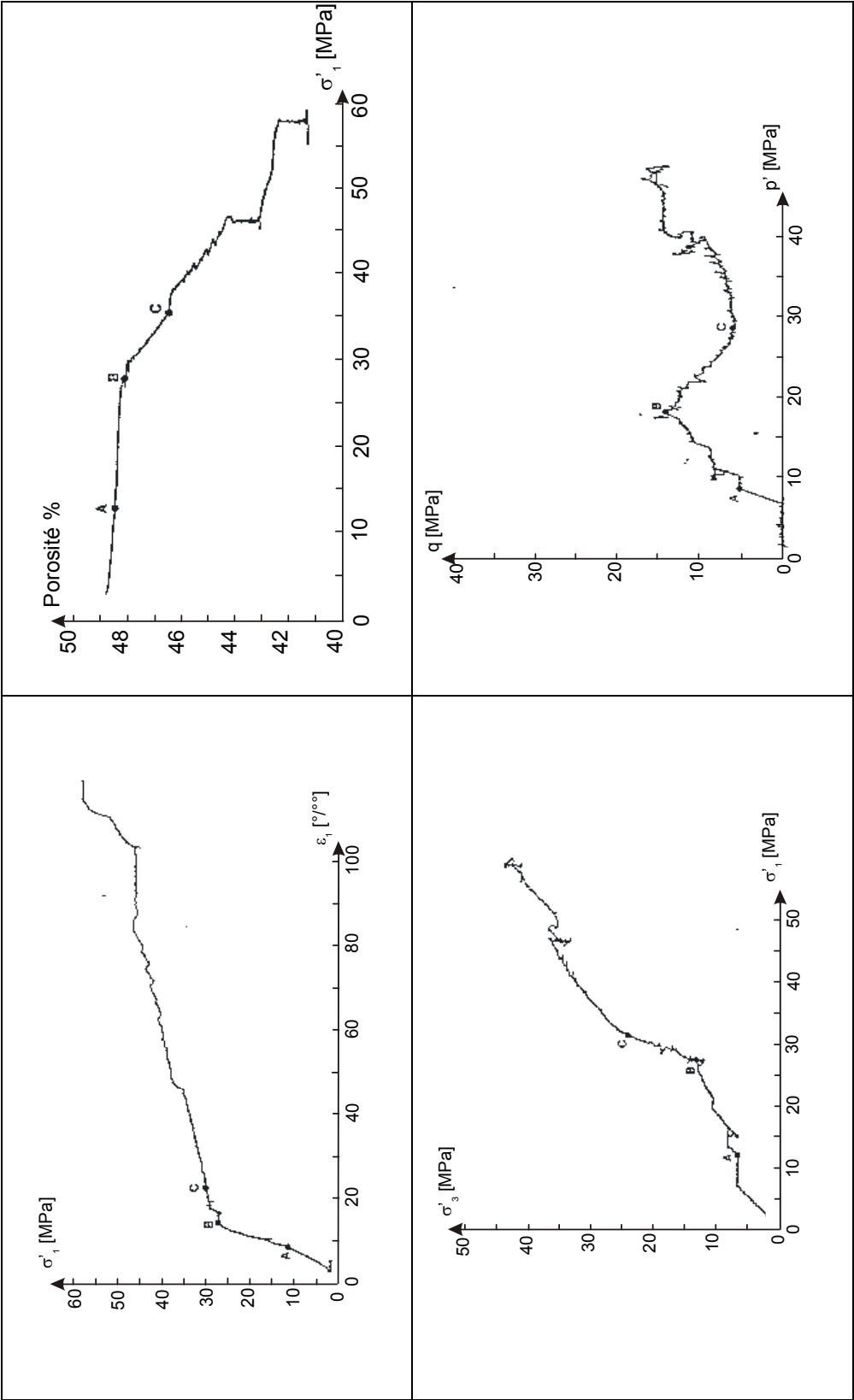


Figure 4. 38 : Essai oedométrique dans une cellule triaxiale asservie

Il est à noter que le pore collapse se marque très bien dans les plans  $(p', q)$  et  $(\sigma'_1, \sigma'_3)$  mais pas du tout dans un plan contrainte-déformation, par exemple le plan  $(\varepsilon_1, \sigma'_1)$ . La Figure 4.38 montre les résultats d'un essai sur une craie de réservoir dont la porosité vaut 48% et la teneur en silice 20% (les points *B* et *C* représentent le début et la fin du pore collapse).

Nous avons tout d'abord déterminé les points d'entrée en plasticité pour l'ensemble des essais oedométriques. Nous avons utilisé la même méthode que précédemment ; les résultats sont présentés à la figure 4.37-d. Malgré une certaine dispersion, la surface déterminée à l'aide des essais triaxiaux (indiquée également sur la figure) reste toujours valable.

Dans la phase oedométrique, le chemin élastique devrait nous permettre de déterminer le coefficient de Poisson (figure 4.37-c et relations 4.145, 4.146). Malheureusement, les figures 4.37-a-b semblent présenter des pentes différentes selon la procédure de chargement choisie. En effet, la procédure 'réservoir' présente un chemin à déviateur constant durant la phase oedométrique élastique. La seconde procédure présente quand à elle un chemin approximativement triaxial.

Cela résulte en fait du mode de contrôle des conditions oedométriques. En effet, l'essai  $K_0$  est obtenu en adaptant la contrainte latérale afin d'empêcher toute déformation latérale. En pratique, la pression de confinement est adaptée lorsque les LVDT mesurent un déplacement latéral de 0,02 mm. Il n'est pas possible de choisir un seuil plus faible car on atteint la précision du capteur. Malheureusement, la déformation élastique de la craie à pression latérale constante est du même ordre de grandeur, ce qui explique que la correction ne s'effectue pas avec précision. Ainsi, dans la procédure 'réservoir', le palier horizontal correspond à la diminution de la pression de pore (solicitation isotrope) sans correction de la pression de confinement. Dans la seconde procédure, le chemin quasi-triaxial correspond à l'augmentation de la contrainte axiale à pression latérale constante.

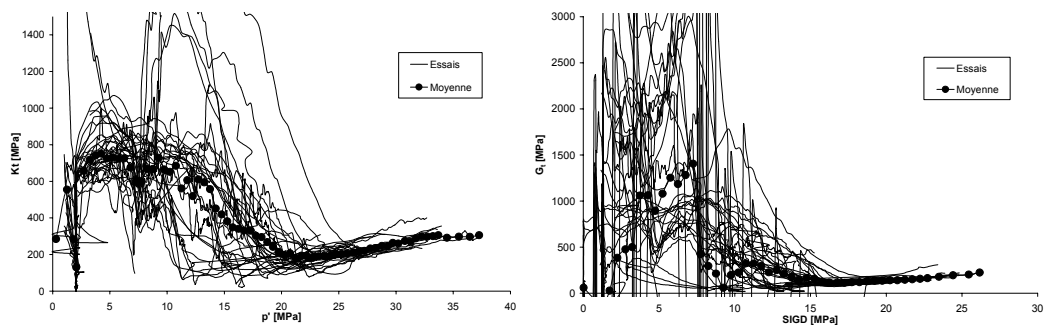


Figure 4.39 : Modules cubique et de cisaillement à l'oedomètre

Malgré tout, nous pouvons à nouveau déterminer les modules cubique et de cisaillement pour l'ensemble des essais. La dispersion est assez importante (figure 4.39)

mais nous obtenons un comportement moyen relativement proche de celui obtenu lors des essais triaxiaux.

### 5.3. Jeux de paramètres

Nous pouvons à présent résumer l'ensemble des données que nous avons obtenues afin de définir un jeu de paramètres.

Les surfaces de plasticité sont complètement définies. Nous rappelons dans le tableau ci-dessous les valeurs que nous avons obtenues. Il manque toutefois la valeur du paramètre  $s_0$  (relation 4.130 définissant la surface SI) qui n'a pas pu être déterminée. En fait, nous n'utiliserons pas cette surface dans nos simulations de la craie. Nous ne déterminons donc pas le paramètre  $\lambda_s$  d'écrouissage de la surface SI.

	Origine	Eau	Huile
Angle de frottement $\phi [^\circ]$	Triaxial	22	22
Cohésion $c$ [MPa]	Triaxial	1,5	2,0
Pré-consolidation $p_0$ [MPa]	Triaxial	10	21

Tableau 4.8 : Paramètres de définition du modèle à chapeau

Les expérimentations ont montré qu'il n'y avait pas d'écrouissage de la surface à frottement interne (surface de rupture). Par contre, l'écrouissage du CamClay est contrôlé par l'indice de compressibilité, dont les valeurs obtenues sont reprises dans le tableau ci-dessous.

	Eau	Huile
Essais $K_0$	0,161*	0,196
Essais Isotropes	0,148	0,194

Tableau 4.9 : Indice de compressibilité  $\lambda$  obtenu pour la craie

Nous voyons donc que l'ensemble des résultats semblent cohérents (triaxial et essais  $K_0$ ) et que, de plus, il n'y a pas d'influence nette de la succion. Il n'est donc plus nécessaire de définir la fonction  $\lambda(s)$  et nous utiliserons une valeur constante  $\lambda(s) = 0,195$ . En conséquence, l'utilisation de la formule de la courbe  $LC$  définie dans le modèle de Barcelone n'est dès lors plus possible.

Nous avons donc modifié l'expression de la courbe  $LC$  selon la relation suivante :

$$p_0(s) = p_0(0) + \Delta p_0 \frac{s}{s + s^*} \quad (4.147)$$

où  $\Delta p_0 = 12$  MPa,  $p_0(0) = 10$  MPa et  $s^* = 0.2$  MPa.

Nous obtenons ainsi la courbe  $LC$  tracée à la figure 4.40.

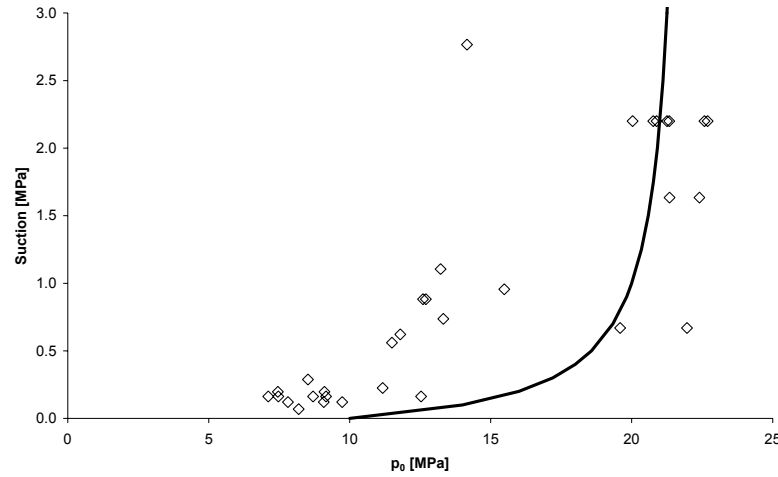


Figure 4.40 : Courbe LC avec la formule modifiée

Il est à remarquer que la relation d'écroûissage initiale (4.103) devient si on l'exprime en fonction de la contrainte de préconsolidation  $p_0$  :

$$dp_0^* = \frac{1 + e_0}{\lambda - \kappa(s)} p_0 d\varepsilon_v^p \quad (4.148)$$

Nous devons également définir les modules élastiques. L'ensemble des résultats montre que le module cubique dépend du fluide saturant (donc de la succion) et plus faiblement de la contrainte moyenne. Le module de cisaillement dépend de la contrainte moyenne, de la contrainte déviatorique et de la succion. Malheureusement, nous n'avons pas d'essais permettant de définir l'amplitude des déformations liées à des variations de succion. Nous ne pouvons donc définir le paramètre  $\kappa_s$ , ni sa dépendance éventuelle de l'état de contrainte.

Dans un modèle CamClay, le module cubique dépend linéairement de la contrainte moyenne et le module de cisaillement est constant. D'autre part, des modèles hyper-élastiques existent, dans lesquels les modules dépendent de l'état de contrainte, de manière plus complexe. Leur formalisme est nettement plus compliqué à mettre en œuvre et la détermination des paramètres n'est pas toujours évidente. Nous voulons travailler dans cette optique et définir un modèle élastique qui représente bien les modules déterminés mais qui soit utilisable aisément dans un code de calcul.

Dans un premier temps, nous pouvons tenter de définir un modèle hyperélastique couplé. En effet, si le module de cisaillement dépend de la contrainte moyenne, le module cubique doit dépendre de la contrainte déviatorique. Toutefois, les mesures expérimentales ne semblent pas montrer une influence du déviateur sur le module cubique. De plus, afin de quantifier l'influence de la contrainte moyenne sur le module de cisaillement, il serait intéressant de réaliser des essais purement déviatoriques à différentes valeurs de contraintes moyennes. Nous ne disposons pas de tous les essais nous permettant de déterminer les termes de couplages. Dès lors, nous pouvons nous orienter vers un modèle hyperélastique découplé où nous avons les relations suivantes :

$$K_t^e = K_0 + \frac{1+e_0}{\kappa} p' \quad (4.149)$$

$$G_t^e = G_0 + \alpha_G q \quad (4.150)$$

Toutefois, les figures 4.31-a-b montrent que la détermination du paramètre  $\kappa$  n'est pas évidente : nous obtenons une valeur négative pour les échantillons saturés en eau et la valeur est fortement influencée par les modules à faibles contraintes, pour lesquels la précision est faible. De plus, le module de cisaillement mesuré est fortement influencé par le chemin de contrainte suivi et il est difficile de déterminer les paramètres de la relation (4.150).

Finalement, il est préférable d'utiliser les valeurs moyennes définies dans le tableau 4.10.

	Eau	Huile
$K$ [MPa]	612	726
$G$ [MPa]	500	700
$E$ [MPa]	1180	1590
$\nu$ [-]	0.18	0.14

Tableau 4.10 : Paramètres élastiques moyens

A titre de comparaison, il est intéressant de considérer les valeurs prédites par les relations de ENGSTRÖM (1992) pour une craie saturée en huile, à 40% de porosité :  $E = 2548$  MPa,  $\nu=0,2$ . La différence pourrait s'expliquer par la faible teneur en silice de la craie de Lixhe, par comparaison aux craies de réservoir. En effet, la relation de Engström est basée sur des mesures obtenues à partir de craies d'origine, de traitement, de saturation et de sollicitations très variables. On doit donc considérer que cette relation fournit un ordre de grandeur du module !

Il est également intéressant de comparer nos valeurs à celles obtenues à partir des mesures de vitesse sonique réalisées sur des échantillons secs. Dans l'hypothèse d'un milieu élastique isotrope, continu et homogène, le module dynamique est donné par la relation suivante :

$$E_{dyn} = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{1-\nu} \cdot \rho \cdot V_L^2 \quad (4.151)$$

où  $V_L$  est la vitesse sonique longitudinale et  $\rho$  est la masse volumique du milieu.

Nous obtenons une valeur moyenne sur l'ensemble des échantillons qui équivaut à  $E_{dyn} = 8235$  MPa. Cette valeur est nettement supérieure à la valeur que nous avons obtenue. En fait, ce module dynamique est mesuré pour des déformations micrométriques, il est habituellement admis que le rapport entre le module dynamique et le module statique est de l'ordre de 2 à 15.

La succion influence les modules élastiques ; toutefois, nous manquons d'informations sur les déformations liées à la succion et il est donc impossible de développer un modèle hyperélastique mécanique-succion. Nous avons donc choisi un modèle hypoélastique dont les modules sont donnés par les relations suivantes:

$$K(s) = K_0^{eau} + k_s . s \quad (4.152)$$

$$G(s) = G_0^{eau} + g_s . s \quad (4.153)$$

où  $k_s$  et  $g_s$  sont déterminés à partir des valeurs du tableau 4.10 et valent respectivement 38 et 66,67.

La valeur du coefficient  $\kappa_s$  est supposée constante et sera déterminée par analyse inverse d'essais d'injection d'eau.

Nous venons donc d'obtenir quasi l'ensemble des paramètres de notre modèle mécanique, nous pouvons à présent l'utiliser afin de le confronter aux résultats d'essais plus complexes réalisés sur la craie !

## 6. CONCLUSIONS

Après avoir décrit la composition de la craie, nous avons passé en revue le comportement expérimental de ce matériau : pore collapse, rupture par cisaillement, effet de la vitesse de chargement, du fluide saturant ... Malheureusement, il n'est pas encore possible de déterminer l'ensemble des mécanismes microscopiques capables d'expliquer tous les comportements observés. Il est vraisemblable que plusieurs mécanismes interagissent. Dans ce travail, nous avons utilisé la succion afin de modéliser l'effet de l'eau sur la craie.

Les modèles de comportement présentés dans la littérature considèrent généralement deux mécanismes plastiques : le pore collapse et la rupture par cisaillement (Shao par exemple). L'approche proposée par Piau et Maury a permis une première modélisation de l'effet de l'eau : ils considèrent deux surfaces de plasticité correspondant à des états saturés en eau et en huile. Le passage de l'une à l'autre s'accompagne de déformations plastiques.

Le modèle de comportement proposé dans ce travail est une loi élasto-plastique associant les modèles CamClay et à frottement interne au sein d'un modèle à chapeau. L'approche de Barcelone est alors adoptée afin de tenir compte des effets de succion dans notre loi de comportement.

Les paramètres ont finalement été évalués sur base des essais réalisés sur la craie de Lixhe dans le cadre du projet Pasachalk. Cela nous a permis de déterminer les surfaces de plasticité à l'huile et à l'eau ainsi que leur transition. Les modules élastiques ont été étudiés attentivement.

Disposant d'un modèle avec ses paramètres, nous pouvons à présent passer à la validation de ce dernier, ainsi qu'à des exemples d'applications.





## **CHAPITRE V**

### **Eléments finis couplés**



## CHAPITRE V

### ELEMENTS FINIS COUPLES

#### 1. INTRODUCTION

Dans les chapitres précédents, nous avons développé une loi de comportement pour une craie non saturée et un modèle d'écoulement multiphasique anisotherme. Afin d'étudier différents problèmes complexes, il est nécessaire d'introduire ces lois dans un code d'éléments finis. Dans ce chapitre, nous allons décrire rapidement la marche à suivre; pour plus de détails, nous conseillons de se reporter à des ouvrages de référence comme ZIENKIEWICZ *et al.* (2000) ou DHATT *et al.* (1981) par exemple.

Le code d'éléments finis dans lequel ces lois sont implémentées est le code LAGAMINE. Initialement conçu pour simuler des problèmes de laminage, ce dernier est développé à l'Université de Liège depuis le début des années 80 et, dès le départ, il a été écrit et pensé pour traiter des problèmes non-linéaires en grandes déformations. Les thèses de CHARLIER (1987) et HABRAKEN (1989) pourront fournir plus de détails sur ce programme. Plus récemment, une version PC conviviale de LAGAMINE a été développée sous le nom de CONVILAG.

Après une première partie décrivant le développement d'un élément fini couplé, nous aborderons les différents aspects de l'intégration des lois constitutives (mécanique et écoulement). En effet, dans des problèmes non-linéaires et fortement couplés, la qualité et l'efficacité de cette intégration sont primordiales et différents outils numériques peuvent améliorer considérablement la convergence du code.

Nous présenterons ensuite l'algorithme de résolution du code pour des problèmes couplés. Différentes méthodes sont possibles (étagée ou monolithique) avec leurs avantages et inconvénients. Nous avons opté pour une méthode totalement couplée ; elle demande alors un calcul complet (et complexe) de la matrice tangente qui sera décrit en détails.

Les conditions aux limites dans un problème couplé sont souvent complexes et elles conditionnent la qualité de la modélisation. Nous nous attarderons plus particulièrement sur les outils numériques développés pour représenter les conditions limites d'écoulement aux puits de production et d'injection dans un réservoir pétrolier.

#### 2. ELEMENTS FINIS COUPLES MWAT 2D/3D

Au chapitre II, nous avons présenté les équations de bilan local de conservation de la masse des fluides et de la chaleur par les relations (2.52) et (2.54):

$$\dot{S}_f + \text{div}(\underline{V}_f) - Q_f = 0 \quad (5.1)$$

où  $S_f$  représente la quantité de fluide emmagasiné,  $\underline{V}_f$  le flux massique de fluide et  $Q_f$  une source de fluide en volume.

$$\dot{S}_T + \text{div}(\underline{V}_T) - Q_T = 0 \quad (5.2)$$

où  $S_T$  représente la quantité de chaleur emmagasinée,  $\underline{V}_T$  le flux de chaleur et  $Q_T$  une source de chaleur en volume.

Nous rappelons également l'équation d'équilibre statique d'un volume élémentaire et l'équation d'équilibre en surface:

$$\text{div}(\underline{\sigma}) + \rho \underline{g} = 0 \quad (5.3)$$

$$\underline{t} = \underline{n} \underline{\sigma} \quad (5.4)$$

où  $\rho$  représente la masse volumique du milieu,  $\underline{g}$  est le vecteur de l'accélération de la pesanteur,  $\underline{t}$  les contraintes appliquées en surface et  $\underline{n}$  le vecteur normal à cette surface.

## 2.1. Forme faible des équations de bilan

Les relations (5.1) à (5.4) sont des équations d'équilibre et de bilan local. Toutefois, nous voulons étudier des problèmes sur des domaines importants (réservoir pétrolier par exemple), dans lesquels nous voudrions que ces équations d'équilibre soient respectées sans avoir à les vérifier en tout point. Pour ce faire, nous utilisons le principe des puissances virtuelles.

Pour un champ de vitesses virtuelles  $\delta \underline{v}$ , cinématiquement admissibles (respectant la continuité du solide et les conditions limites), l'égalité des puissances virtuelles extérieure et intérieure entraîne le respect de l'équilibre local en tout point du domaine et donc de l'équilibre global. Les puissances virtuelles correspondent à la puissance développée par les forces extérieure et intérieure, pour le champ de vitesse considéré:

$$\delta W_E = \int_V \rho \underline{g} \delta \underline{v} dV + \int_A \underline{t} \delta \underline{v} dA \quad (5.5)$$

$$\delta W_I = \int_V \underline{\sigma} \delta \underline{\dot{\epsilon}} dV \quad (5.6)$$

où  $\underline{t}$  représente les forces de surface appliquées au domaine et  $\delta \underline{\dot{\epsilon}}$  est le tenseur vitesse de déformation virtuelle associé au tenseur contrainte.

A ce stade, il faut préciser la configuration dans laquelle sont exprimées ces intégrales. En effet, dans les problèmes traités, de grandes déformations et/ou déplacements sont possibles ; les configurations initiale et déformée sont donc différentes (figure 5.1).

Dans ce travail, nous utilisons une formulation Lagrangienne actualisée dans la dernière configuration à l'équilibre  $\gamma$ . Les contraintes  $\underline{\sigma}$  utilisées dans la relation (5.6) sont les contraintes de Cauchy, exprimées dans la configuration déformée, dans les axes cartésiens globaux.  $\delta \underline{\dot{\varepsilon}}$  est donc le tenseur vitesse de déformation virtuelle de Cauchy.

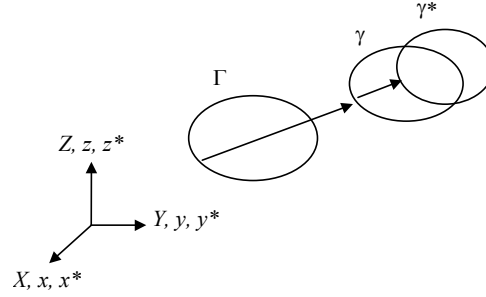


Figure 5.1 : Différentes configurations d'un corps:  $\Gamma$  (conf. initiale),  $\gamma$  (conf. de référence),  $\gamma^*$  (conf. déformée).

Le Jacobien de la transformation de la configuration initiale à la configuration courante s'écrit :

$$\underline{F} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} \quad (5.7)$$

Dans la configuration déformée, le tenseur vitesse  $\underline{v}$  et le tenseur gradient de vitesse  $\underline{L}$  peuvent s'écrire :

$$\underline{v} = \frac{d\underline{x}}{dt} = \dot{\underline{x}} \quad (5.8)$$

$$\underline{L} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{X}} \frac{\partial \underline{X}}{\partial \underline{x}} = \dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1} \quad (5.9)$$

Cette dernière relation peut être réécrite comme la somme d'une partie symétrique et d'une partie antisymétrique :

$$\underline{L} = \frac{1}{2}(\underline{L} + \underline{L}^T) + \frac{1}{2}(\underline{L} - \underline{L}^T) \quad (5.10)$$

Nous pouvons à présent introduire les équations d'équilibre en volume et en surface dans l'expression de la puissance virtuelle extérieure (5.5) et nous obtenons :

$$\begin{aligned} \delta W_E &= -\int_V \text{div}(\underline{\sigma}) \delta \underline{v} \, dV + \int_A \underline{n} \underline{\sigma} \delta \underline{v} \, dA \\ &= \int_V \left( -\text{div}(\underline{\sigma}) \delta \underline{v} + \text{div}(\underline{\sigma} \delta \underline{v}) \right) dV \\ &= \int_V \underline{\sigma} \underline{\text{grad}}(\delta \underline{v}) \, dV = \delta W_I \end{aligned} \quad (5.11)$$

Nous trouvons ainsi l'expression du tenseur déformation de Cauchy et en tenant compte de la symétrie du tenseur contrainte, nous pouvons écrire :

$$\delta \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} (\underline{L} + \underline{L}^T) \quad (5.12)$$

qui représente la partie symétrique du vecteur gradient de vitesse  $\underline{L}$ .

L'égalité des puissances virtuelles  $\delta W_E$  et  $\delta W_I$  constitue une forme faible des équations d'équilibre statique.

Un raisonnement similaire peut être tenu pour les équations de conservation de la masse de fluide et de chaleur. Ainsi, la puissance virtuelle extérieur  $\delta W_E$  développée par les débits imposés en volume  $Q$  et en surface  $q$ , pour un champ de perturbation virtuelle arbitraire admissible  $\delta q$  (de la pression ou de la température) s'exprime selon :

$$\delta W_E = \int_V Q \cdot \delta q \cdot dV + \int_A q \cdot \delta q \cdot dA \quad (5.13)$$

En introduisant les expressions de l'équilibre local en volume et en surface, il vient:

$$\delta W_E = \int_V (\text{div}(\underline{V}_q) + \dot{S}) \cdot \delta q \cdot dV + \int_A (-\underline{n} \cdot \underline{V}_q) \cdot \delta q \cdot dA \quad (5.14)$$

par le théorème de Gauss, on obtient :

$$\int_V \text{div}(\underline{V}_q) \cdot \delta q + \dot{S} \cdot \delta q - \text{div}(\underline{V}_q \cdot \delta q) dV = \int_V \dot{S} \cdot \delta q - \underline{V}_q \cdot \underline{\text{grad}}(\delta q) dV = \delta W_I \quad (5.15)$$

L'égalité de la puissance virtuelle extérieure  $\delta W_E$  et de la puissance virtuelle intérieure  $\delta W_I$  constitue une forme faible des équations de bilan pour les fluides et la chaleur.

## 2.2. Formulation de l'élément fini couplé

L'élément fini MWAT 2D/3D que nous avons développé est un élément isoparamétrique de type Serendipity [ZIENKIEWICZ *et al.*, 2000]. Dans ces éléments, la géométrie et les champs discrétisés (déplacement, pression, température) sont définis en fonction de leurs valeurs nodales à l'aide des fonctions d'interpolations  $\underline{N}$ . Ces dernières sont exprimées dans le plan des coordonnées locales  $(\xi, \eta)$  qui facilitent l'expression analytique de l'élément ainsi que les intégrales sur son volume.

$$\underline{N} = \underline{N}(\xi, \eta) \quad (5.16)$$

Dans ce paragraphe, nous présenterons uniquement l'élément fini 2D en état plan de déformation (figure 5.2). La définition détaillée des différentes fonctions d'interpolation peut être trouvée dans un des ouvrages de référence cités précédemment.

Dans l'élément MWAT 2D, cinq équations d'équilibre (2 directions en mécanique, 2 fluides et 1 thermique) doivent être vérifiées et l'élément possède donc cinq degrés de

liberté par nœud. Les deux degrés de liberté mécaniques seront les coordonnées géométriques  $x$  et  $y$ . Pour les degrés de liberté écoulement, plusieurs possibilités s'offrent à nous : les pressions de fluide, la saturation, la succion. Nous éliminerons tout d'abord la saturation ; en effet, dans le cas général d'un domaine comprenant plusieurs couches de terrains avec des propriétés de rétention différentes, la saturation ne sera pas une fonction continue dans tout le domaine. Nous avons dès lors choisi de prendre les deux pressions de fluide  $p_w$  et  $p_{nw}$ . De plus, dans le cas d'une phase gazeuse composée de deux gaz, nous avons opté pour la pression totale du mélange comme degré de liberté.

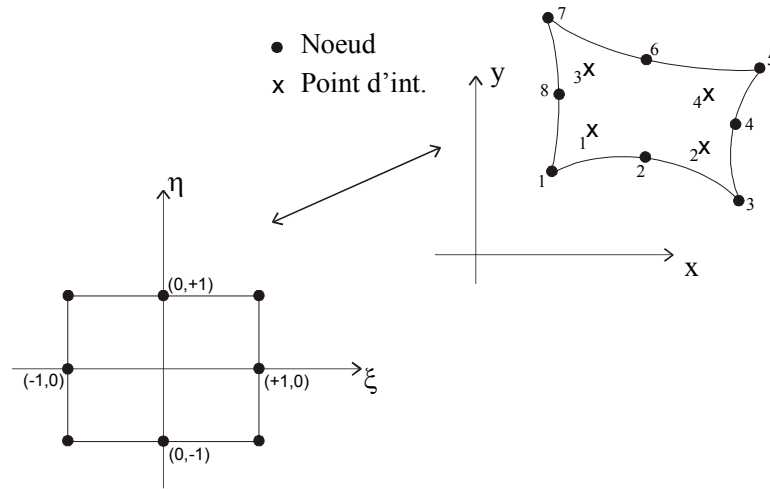


Figure 5.2 : Elément isoparamétrique à huit nœuds

En fait, ces choix ont une conséquence directe sur le mode d'imposition des conditions limites. Les deux degrés de liberté de pression impliquent un contrôle direct des pressions de fluide en tout point du domaine. Par contre, il est difficile d'imposer une succion ou une saturation avec des pressions de fluide variables. Cela peut demander par exemple le développement d'éléments spécifiques de conditions limites.

Ainsi, dans l'élément MWAT 2D, les coordonnées, les déplacements, les vitesses, les pressions et la température sont exprimés en fonction de leurs valeurs nodales grâce aux fonctions d'interpolation:

$$\begin{aligned} x_i &= N_L X_{Li} & p_w &= N_L P_{wL} \\ u_i &= N_L U_{Li} \text{ et } p_{nw} &= N_L P_{nwL} \\ v_i &= N_L V_{Li} & T &= N_L T_L \end{aligned} \quad (5.17)$$

où  $L$  varie de 1 au nombre de nœuds de l'élément.

Nous pouvons à présent reprendre les expressions des puissances intérieures (5.11) et (5.15) :

$$\delta W_I = \int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) dV \quad (5.18)$$

$$\delta W_{I,q} = \int_V \dot{S}_q \delta q - \left( V_{q_i} \frac{\partial \delta q}{\partial x_i} \right) dV \quad (5.19)$$

où les gradients des perturbations virtuelles s'écrivent :

$$\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial N_L}{\partial x_j} \delta V_{Li} \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial \delta q}{\partial x_i} = \frac{\partial N_L}{\partial x_i} \delta Q_L \quad (5.21)$$

Les dérivées spatiales des fonctions d'interpolations sont exprimées dans la configuration déformée :

$$\frac{\partial N_L}{\partial x_j} = \frac{\partial N_L}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \frac{\partial N_L}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \quad (5.22)$$

Les dérivées spatiales des coordonnées locales s'obtiennent grâce à la matrice Jacobienne de la transformation des coordonnées globales  $(x_1, x_2)$  vers les coordonnées locales  $(\xi, \eta)$  :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Le Jacobien de la transformation inverse peut alors s'écrire :

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x_1} & \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} & -\frac{\partial x_1}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial x_2}{\partial \xi} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

sous réserve que le déterminant  $|J|$  soit non-nul :

$$|J| = \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} - \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \neq 0 \quad (5.25)$$

Nous pouvons à présent reprendre les expressions de la puissance intérieure (5.18) et (5.19) en utilisant l'intégration numérique de Gauss:

$$\delta W_I = \sum_{PI} \left( \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_L}{\partial x_j} \delta V_{Li} + \frac{\partial N_L}{\partial x_i} \delta V_{Lj} \right) \right) \text{ep} |J| W_{PI} \quad (5.26)$$

$$\delta W_I = \sum_{PI} \dot{S}_q N_L - \left( V_{q_i} \frac{\partial N_L}{\partial x_i} \right) \text{ep} |J| W_{PI} \delta Q \quad (5.27)$$



où  $ep$  est l'épaisseur de l'élément,  $PI$  est le nombre de points d'intégration et  $W_{PI}$  est le poids de Gauss du point d'intégration.

Ces équations peuvent être réécrites en termes de forces nodales énergétiquement équivalentes  $F_{L,i}$  relatives à chaque degré de liberté :

$$\delta W_1 = F_{L,1} \delta V_{L1} + F_{L,2} \delta V_{L2} \quad (5.28)$$

$$\delta W_{1,q} = F_{L,q} \delta Q_L \quad (5.29)$$

qui peuvent s'expliciter comme suit :

$$F_{L1} = \sum_{PI} (\sigma_{11} \frac{\partial N_L}{\partial x_1} + \sigma_{12} \frac{\partial N_L}{\partial x_2}) ep |J| W_{PI} \quad (5.30)$$

$$F_{L2} = \sum_{PI} (\sigma_{12} \frac{\partial N_L}{\partial x_1} + \sigma_{22} \frac{\partial N_L}{\partial x_2}) ep |J| W_{PI} \quad (5.31)$$

$$F_{L_{pw}} = \sum_{PI} \left( \dot{S}_w N_L - V_{pw1} \frac{\partial N_L}{\partial x_1} - V_{pw2} \frac{\partial N_L}{\partial x_2} \right) ep |J| W_{PI} \quad (5.32)$$

$$F_{L_{pnw}} = \sum_{PI} \left( \dot{S}_{nw} N_L - V_{pnw1} \frac{\partial N_L}{\partial x_1} - V_{pnw2} \frac{\partial N_L}{\partial x_2} \right) ep |J| W_{PI} \quad (5.33)$$

$$F_{LT} = \sum_{PI} \left( \dot{S}_T N_L - V_{T1} \frac{\partial N_L}{\partial x_1} - V_{T2} \frac{\partial N_L}{\partial x_2} \right) ep |J| W_{PI} \quad (5.34)$$

L'effet du poids propre est pris en compte dans le modèle d'écoulement : l'expression du flux de Darcy contient un terme lié à la gravité. Par contre, dans la partie mécanique, nous devons ajouter une force énergétiquement équivalente  $F_g$  correspondant au poids propre du milieu et dirigée selon l'axe vertical :

$$F_g = \sum_{PI} (\rho_{app} g N_L) ep |J| W_{PI} \quad (5.35)$$

$$F_{L2} = \sum_{PI} (\sigma_{12} \frac{\partial N_L}{\partial x_1} + \sigma_{22} \frac{\partial N_L}{\partial x_2} - \rho_{app} g N_L) ep |J| W_{PI} \quad (5.36)$$

La masse volumique apparente doit être calculée dans la configuration déformée en tenant compte des déformations du milieu et des modifications des teneurs en fluide des pores du milieu :

$$\rho_{app} = (1-n) \cdot \rho_s + n \cdot S_{rw} \cdot \rho_w + n \cdot S_{rmw} \cdot \rho_{nw} \quad (5.37)$$

Nous venons donc de présenter la méthode de discrétisation spatiale à l'aide des éléments finis. Toutefois, il reste encore un aspect à définir : le temps. En effet, il intervient directement dans les équations de bilan de fluide et de chaleur. Il est donc nécessaire de le discrétiser. On introduit ainsi la notion de pas de temps (les éléments finis temporels) et de discrétisation temporelle.

Un pas de temps est délimité par deux instants, que nous notons A et B. Nous supposons que la pression et la température varient linéairement sur le pas, que ce soit en un point quelconque ou en un nœud.

$$\begin{aligned} t &= (1 - \theta)t^A + \theta t^B \\ p &= (1 - \theta)p^A + \theta p^B \\ T &= (1 - \theta)T^A + \theta T^B \end{aligned} \quad (5.38)$$

où  $\theta$  est compris entre 0 et 1.

Dès lors, la dérivée par rapport au temps de la pression (par exemple) se réduit à :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p^B - p^A}{t^B - t^A} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \quad (5.39)$$

Il s'agit donc d'un schéma qui s'apparente à ceux des différences finies.

Nous avons discrétisé l'évolution temporelle des inconnues nodales. Nous connaissons la valeur des forces nodales énergétiquement équivalentes en tout instant. De plus, nous voudrions que les équations de bilan soient respectées sur l'ensemble du pas de temps. Pour cela, nous pouvons utiliser la méthode des résidus pondérés, avec une fonction de pondération  $G$  variant dans le temps. L'équilibre discrétisé temporellement et spatialement s'écrit alors :

$$\int_{t_A}^{t_B} G(t) F_L^{\text{ext}} dt = \int_{t_A}^{t_B} G(t) F_L^{\text{int}} dt \quad (5.40)$$

Différentes fonctions de pondération sont possibles mais nous avons décidé de réduire la fonction  $G(t)$  à une collocation. Dès lors, on exprime l'équilibre en un instant  $\theta$ .

$$F_L^{\text{ext}}(\theta) = F_L^{\text{int}}(\theta) \quad (5.41)$$

Le choix de  $\theta$  n'est pas trivial. Il est possible de montrer pour un système linéaire que le problème est inconditionnellement stable pour  $\theta \geq 1/2$ . Si cette condition n'est pas remplie, le pas de temps choisi doit être inférieur à une valeur critique pour éviter des oscillations (et des erreurs) croissantes avec le temps. Dans la pratique, on s'intéresse à des systèmes complexes et non linéaires. Dans quelle mesure les conclusions peuvent-elles être extrapolées à ce type d'études ? Aucune réponse théorique ne peut être apportée à cette question. Mais la pratique montre que l'extrapolation des conclusions précédentes est généralement licite. Les schémas les plus utilisés sont les schémas implicite ( $\theta = 1$ ) et de Galerkin ( $\theta = 2/3$ ).

En conclusion, la figure 5.3 présente l'algorithme de l'élément fini MWAT. A cause des couplages, des informations mécaniques doivent parvenir à la loi écoulement et vice versa. Dans des sols non-saturés, le couplage de l'écoulement sur la mécanique provient de la succion, de l'utilisation d'une contrainte effective ou nette et, dans une moindre mesure, de la variation de la masse volumique apparente en fonction de la

saturation. Le couplage de la mécanique sur l'écoulement est directement lié aux déformations volumiques qui modifient l'emménagement des fluides ainsi que la perméabilité.

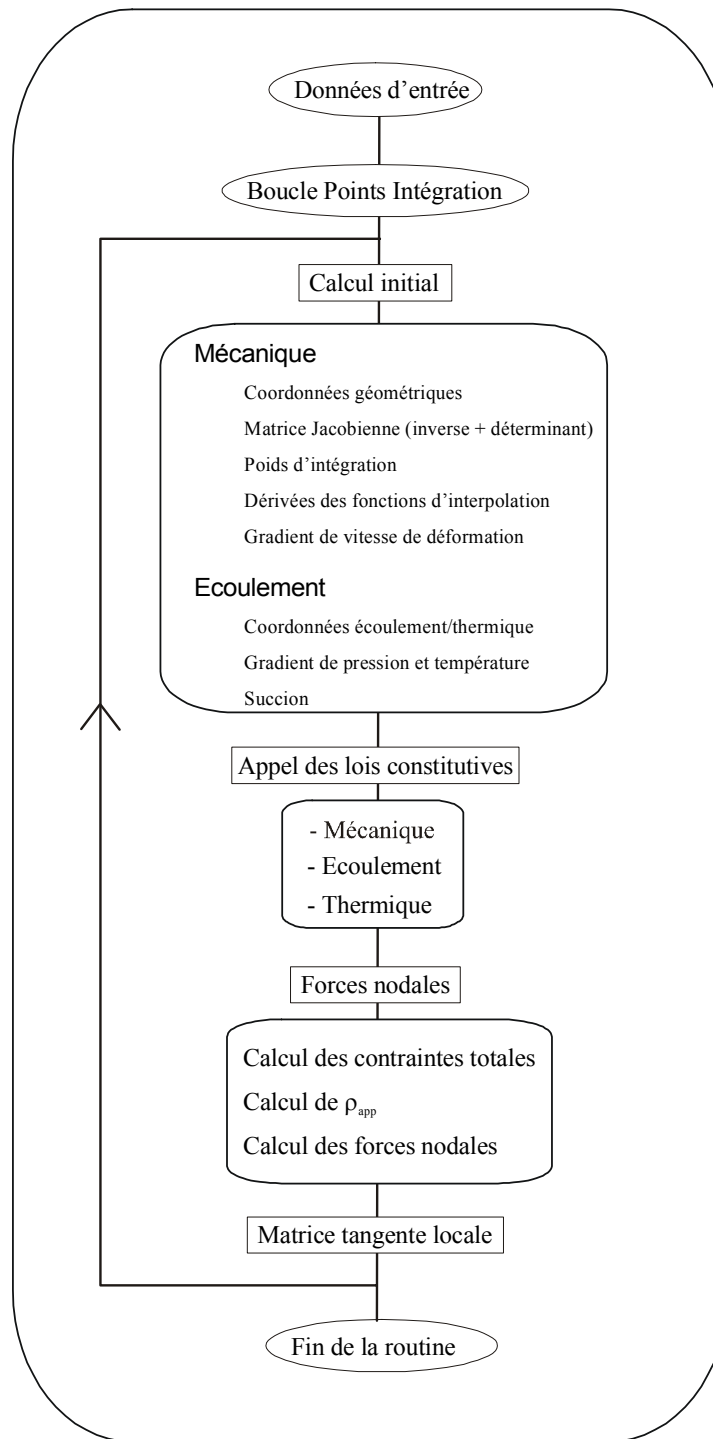


Figure 5.3 : Algorithme de l'élément fini MWAT

Ainsi dans l'algorithme de l'élément, le transfert de la succion devra être assuré lors de l'appel de la loi mécanique. De même, le modèle d'écoulement anisotherme a besoin de connaître l'incrément des déformations volumiques sur le pas de temps considéré.

Au paragraphe 4, nous reviendrons sur les différentes méthodes pour traiter un problème couplé et gérer l'échange d'information entre les modèles. Mais, avant cela, nous passons à la description de l'intégration des lois constitutives.

### 3. INTEGRATION DES LOIS CONSTITUTIVES

La loi de comportement que nous avons développée est écrite sous une forme incrémentale :

$$\underline{\tilde{\sigma}} = f(\underline{\dot{\varepsilon}}, \underline{\sigma}, s, \mathcal{G}) \quad (5.42)$$

où  $\underline{\tilde{\sigma}}_{ij}$  est la vitesse de la contrainte objective de Jaumann,  $\underline{\dot{\varepsilon}}_{ij}$  est la vitesse de déformation,  $s$  est la succion et  $\mathcal{G}$  est une variable interne de la loi dépendant de l'histoire des contraintes.

Toutefois, nous venons de montrer que nous avons besoin, dans l'élément, de la valeur de la contrainte en fin de pas (et non de sa vitesse). Il est donc nécessaire de réaliser l'intégration numérique de la loi sur chaque pas de temps.

Le loi d'écoulement et de transfert de chaleur ne demande pas à proprement parler une intégration. Nous donnerons néanmoins certains détails sur le calcul de l'emmagasinement et sur l'influence des grandes déformations sur la formulation de cette loi.

#### 3.1. Loi de comportement mécanique

Le modèle développé est composé de quatre surfaces de plasticité. L'intégration de la loi sera donc complexe car il faudra déterminer quel mécanisme plastique est actif et gérer le cas de deux ou trois surfaces actives. Ces derniers cas apparaissent à la jonction de deux ou trois surfaces, où le régime d'arête ou de coin est une combinaison de deux ou trois mécanismes.

Suivant le chemin de contraintes suivi, différents régimes plastiques peuvent apparaître, traduisant les différents comportements de la craie. Nous distinguerons ainsi les différents mécanismes par le paramètre *IYIELD* dont nous reprenons dans le tableau ci-dessous les différentes valeurs.

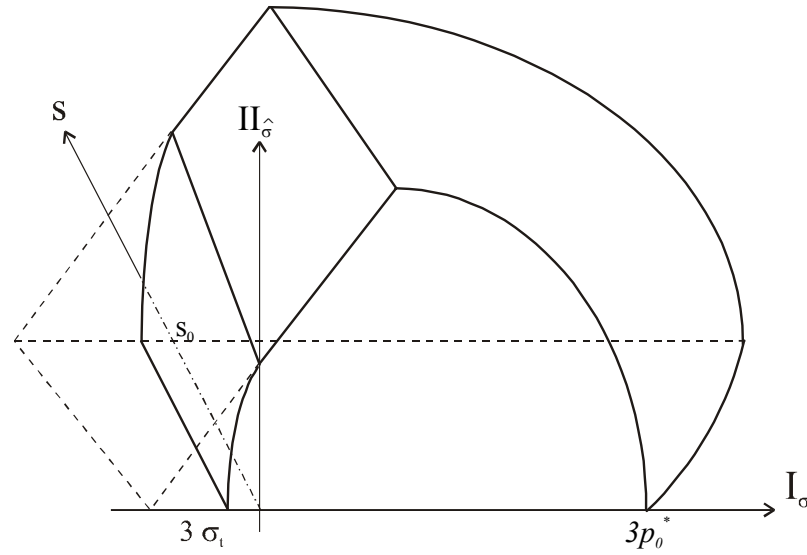


Figure 5.4 : Modèle à chapeau

	Mécanisme(s) actif(s)										
CamClay	■			■			■			■	
Frottement interne		■		■	■			■		■	■
Traction			■		■				■		■
SI						■	■	■	■	■	■
IYIELD	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Tableau 5.5 : Paramètre IYIELD

Avant d'aborder l'intégration de la loi proprement dite, nous voulons présenter deux problèmes liés aux grandes déformations et grands déplacements. Le premier concerne la définition d'une dérivée matérielle objective des contraintes. Il est en effet nécessaire qu'elle soit indépendante d'une rotation rigide ; dans le cas contraire, une rotation rigide entraînerait une modification de l'état de contrainte. Dans ce but, différentes formulations de dérivée objective ont été développées, parmi celles-ci nous utilisons la définition de JAUMANN :

$$\tilde{\underline{\sigma}} = \underline{\dot{\sigma}} - \underline{\dot{\omega}}\underline{\sigma} - \underline{\sigma}\underline{\dot{\omega}}^T \quad (5.43)$$

où  $\tilde{\underline{\sigma}}$  est la vitesse de la contrainte objective de Jaumann et  $\underline{\dot{\omega}}$  est le taux de rotation qui est défini par la partie antisymétrique du tenseur gradient de vitesse :

$$\underline{\dot{\omega}} = \frac{1}{2}(\underline{L} - \underline{L}^T) \quad (5.44)$$

Au cours d'un pas où se produisent de grandes déformations, on connaît la géométrie en début et en fin de pas, mais aucune information n'est donnée sur son évolution au cours du pas et nous sommes donc libres de faire toute hypothèse crédible.

L'hypothèse la plus courante est de supposer la vitesse des points matériels constante au cours du pas. Dans ce cas, le gradient de vitesse  $\underline{L}$  change continûment.

Un schéma plus original peut également être développé. Il consiste à supposer constant non pas la vitesse des points matériels, mais le gradient de vitesse en chaque point d'intégration [GODINAS, 1984]. On obtient ainsi un taux de déformation et une vitesse de rotation constants, ce qui simplifie l'algorithme d'intégration temporelle, au prix bien sûr d'un calcul préalable. Celui-ci, basé sur une décomposition en vecteurs propres de  $\underline{L}$ , est assez complexe et ne sera pas développé ici. Cette seconde possibilité sera généralement utilisée dans les calculs présentés dans les chapitres suivants.

Au chapitre IV, nous avons développé le formalisme d'une loi élastoplastique et nous avons obtenu la relation (4.72) reliant le taux de contrainte généralisée  $\underline{\sigma}^* = (\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{33}, \bar{\sigma}_{12}, \bar{\sigma}_{13}, \bar{\sigma}_{23}, s)^t$  au taux de déformation généralisée  $\underline{\varepsilon}^* = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_v^s)^t$ . Nous devons à présent réaliser son intégration temporelle, qui nous amène à la forme incrémentale suivante :

$$\Delta \underline{\tilde{\sigma}}^* = (\underline{C}^{*e} - \underline{C}^{*p}) \Delta \underline{\varepsilon}^* \quad (5.45)$$

L'algorithme d'intégration est basé sur une méthode de prédicteur élastique avec une éventuelle correction plastique si le critère de plasticité est violé [SIMO *et al.*, 1985].

Le schéma d'intégration que nous avons choisi est un schéma totalement implicite. Les conditions d'équilibre ainsi que le respect du critère de plasticité sont exprimés en fin de pas. Cette procédure nécessite donc obligatoirement au moins une itération car l'état de contrainte en fin de pas n'est évidemment pas à priori connu.

Dans la plupart des codes d'éléments finis, le champ de déformations arrive en entrée de la routine d'intégration de la loi et constitue une donnée en fonction de laquelle les contraintes doivent être déterminées en respectant les conditions d'équilibre et la surface de plasticité. On parle d'une intégration contrôlée par les déformations. Toutefois, dans le cas qui nous occupe, seules les déformations totales sont *a priori* connues, les déformations liées à la succion dépendent de la valeur de la succion qui arrive en entrée de la routine d'intégration. Travaillant avec les variables généralisées, la succion est considérée comme une contrainte et la procédure d'intégration n'est plus contrôlée uniquement par les déformations mais également par une contrainte. VAUNAT *et al.* (2000) ont proposé une procédure d'intégration de la loi avec un contrôle mixte déformations-contraintes. Dans le calcul du prédicteur élastique, elle consiste en l'inversion partielle de la matrice de rigidité  $\underline{C}^{*e}$  afin de calculer la déformation élastique  $\Delta \varepsilon_v^{s,e}$  à partir de l'incrément imposé de succion  $\Delta s$ . Ensuite, la partie plastique  $\Delta \varepsilon_v^{s,p}$  sera calculée classiquement suivant les règles d'écrouissage des surfaces de plasticité.

Nous pouvons à présent développer l'algorithme d'intégration de la loi. Il comprend le calcul du prédicteur élastique et celui de l'éventuel correcteur plastique. Dans cette deuxième partie, nous distinguerons deux cas selon qu'un ou plusieurs mécanismes sont actifs.

### 3.1.1. PREDICTEUR ELASTIQUE

A partir de l'état de contrainte  $\underline{\sigma}_A^*$  en début de pas, nous pouvons calculer l'incrément de contrainte  $\Delta \underline{\tilde{\sigma}}^{*e}$  correspondant à une réponse purement élastique (en tenant compte de la correction de Jaumann). Dans le cadre d'une élasticité non-linéaire, la matrice de Hooke  $C_{ijkl}^e$  dépend de l'état de contrainte. Dans notre schéma implicite, les modules élastiques devront être déterminés pour l'état de contrainte en fin de pas qui n'est pas *a priori* pas connu. En conséquence, l'intégration de la loi, même dans le domaine élastique, peut nécessiter plusieurs itérations.

$$\Delta \varepsilon_v^{s,e} = h^e \Delta s \quad (5.46)$$

$$\Delta \underline{\tilde{\sigma}}_{ij}^{e(n)} = C_{ijkl}^e (\underline{\sigma}_E^{*(n-1)}) (\Delta \varepsilon_{ij} - \Delta \varepsilon_v^{s,e} \delta_{ij}) \quad (5.47)$$

où  $n$  et  $n-1$  sont les numéros d'itération.

A partir de l'incrément élastique, un nouvel état de contrainte  $\sigma_E^{*(n)}$  est déterminé au point  $E$  correspondant au prédicteur élastique (figure 5.5) :

$$\underline{\sigma}_E^{*(n)} = \underline{\sigma}_A^* + \Delta \underline{\tilde{\sigma}}^{*e(n)} \quad (5.48)$$

Deux cas de figures peuvent alors se présenter : soit l'état de contrainte ne viole pas le critère de plasticité  $f(\sigma_E^{*(n)}, \vartheta_A) \leq 0$  et le chemin est purement élastique, soit il le viole et un correcteur plastique doit alors être calculé pour ramener le chemin de contrainte sur la surface de plasticité.

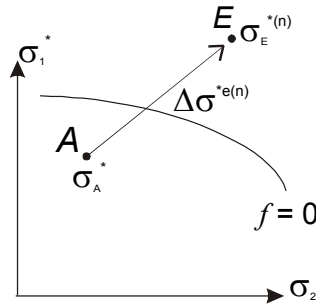


Figure 5.5 : Evaluation de l'état de contrainte  $\sigma_E$  au point  $E$

En élasticité non-linéaire, il est important de souligner que l'intégration nécessite de réévaluer la matrice de Hooke à chaque itération, que l'on se trouve dans le domaine élastique ou plastique.

Le critère de convergence de la boucle d'intégration en élasticité vérifie que l'état de contrainte n'évolue plus. Ce critère sera décrit à la fin du paragraphe 3.1.2.1.

### 3.1.2. CORRECTEUR PLASTIQUE

Lorsque le prédicteur élastique viole la surface de plasticité, des déformations plastiques sont générées. Nous avons présenté au chapitre IV (paragraphe 4.1) le formalisme élasto-plastique permettant de les calculer : une surface d'écoulement plastique définit leur direction et un multiplicateur plastique est calculé grâce à la condition de cohérence afin de déterminer leur amplitude.

$$\underline{n} = \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{\sigma}^*} \quad (5.49)$$

$$\Delta \underline{\varepsilon}^{*p} = \Delta \lambda^p \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{\sigma}^*} \quad (5.50)$$

Dans le schéma implicite que nous avons choisi, le calcul de la direction et du multiplicateur plastique doit s'effectuer avec les contraintes et les variables d'état en fin de pas. Leurs valeurs ne sont *a priori* pas connues, des itérations sont dès lors nécessaires pour intégrer la loi dans le domaine plastique.

Notre modèle mécanique comprend plusieurs mécanismes représentés chacun par une surface de plasticité. Nous pouvons donc avoir éventuellement plusieurs mécanismes actifs ; c'est pourquoi nous distinguons le cas d'une seule surface active du cas du régime d'arête ou de coin.

#### 3.1.2.1. Un seul mode plastique actif

L'incrément de contrainte plastique  $\Delta \underline{\sigma}^{*p(n)}$  est déterminé en tenant compte d'un éventuel écrouissage ou adoucissement de la surface. Dans le schéma implicite que nous avons choisi, nous devons donc calculer la contrainte plastique grâce à la condition de cohérence en fin de pas (connaissant les relations (5.49) et (5.50)) :

$$\Delta \underline{\sigma}_B^{*p} = -\underline{C}^{*e}(\underline{\sigma}_B^*) \Delta \underline{\varepsilon}_B^{*p} \quad (5.51)$$

$$f_B = f(\underline{\sigma}_E^* + \Delta \underline{\sigma}^{*p}, \underline{g}^E + \Delta \underline{g}) = 0 \quad (5.52)$$

La solution de ce système d'équation non-linéaire est obtenue en utilisant une méthode itérative de *Newton-Raphson*. Le développement de Taylor au premier ordre du critère de plasticité  $f$  autour de l'état de contrainte au point E donne :

$$f(\underline{\sigma}_E^* + \Delta \underline{\sigma}^{*p}, \underline{g}^E + \Delta \underline{g}) = f(\underline{\sigma}_E^*, \underline{g}^E) + \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}_E^*} \Delta \underline{\sigma}^{*p} + \frac{\partial f}{\partial \underline{g}^E} \Delta \underline{g} \quad (5.53)$$

avec

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}_E^*} \text{ équivaut à } \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}^*} \text{ en } \underline{\sigma}^* = \underline{\sigma}_E^*$$



$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}_E^*} \Delta \underline{\sigma}^{*p} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}_E} \Delta \underline{\sigma}^p + \frac{\partial f}{\partial s_E} \Delta s \quad (5.54)$$

$$\Delta g = \frac{d g}{d \varepsilon^p} \Delta \varepsilon^p \quad (5.55)$$

La déformation plastique  $\Delta \varepsilon^p$  contrôlant l'écrouissage dépend du mécanisme plastique actif et est calculée par les équations (4.103), (4.122) ou (4.134) selon les cas. Ces dernières relations peuvent s'écrire pour chaque mécanisme sous la forme :

$$\Delta \varepsilon^p = Val \Delta \lambda^p \quad (5.56)$$

Considérons à présent que le mécanisme actif ne soit pas la courbe SI, nous pouvons alors réécrire la relation (5.53) :

$$f = f(\underline{\sigma}_E^*, g^E) - \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}_E^*} C^{*e} \Delta \lambda^p \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}_B^*} + Val^B \frac{\partial f}{\partial g^E} \frac{d g}{d \varepsilon^p} \Delta \lambda^p \quad (5.57)$$

En utilisant la condition de cohérence  $f = 0$ , l'incrément du multiplicateur plastique est obtenu par la relation suivante, en connaissant l'état de contrainte et les variables d'état de l'itération précédente :

$$\Delta \lambda^p = \frac{f(\underline{\sigma}_E^*, g^E)}{\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}_E^*} C^{*e} \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}_B^*} - Val^B \frac{\partial f}{\partial g^E} \frac{d g}{d \varepsilon^p}} \quad (5.58)$$

Nous avons ainsi un état de contrainte B corrigé :

$$\underline{\sigma}_B^{*(n)} = \underline{\sigma}_B^{*(n-1)} - \Delta \lambda^p C^{*e}(\underline{\sigma}_B^{*(n-1)}) \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}_B^{*(n-1)}} \quad (5.59)$$

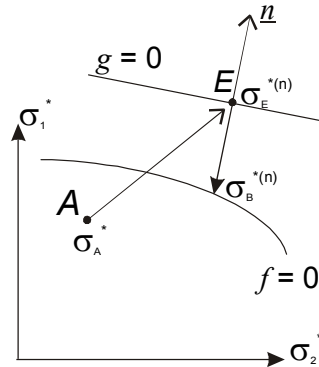


Figure 5.6 : Schéma totalement implicite : représentation de la plasticité parfaite dans l'espace des contraintes

A présent, si le mécanisme actif est la courbe SI, nous pouvons définir les déformations plastiques liées à la succion grâce à la relation d'écrouissage de la surface SI:

$$\Delta \varepsilon_v^{s,p} = \frac{\Delta s^p}{h^p} \quad (5.60)$$

$$\text{avec } \Delta s^p = s^E - s_0^E \text{ et } h^p = \frac{\lambda_s - \kappa_s}{(1 + e_0)(s + p_{atm})} \quad (5.61)$$

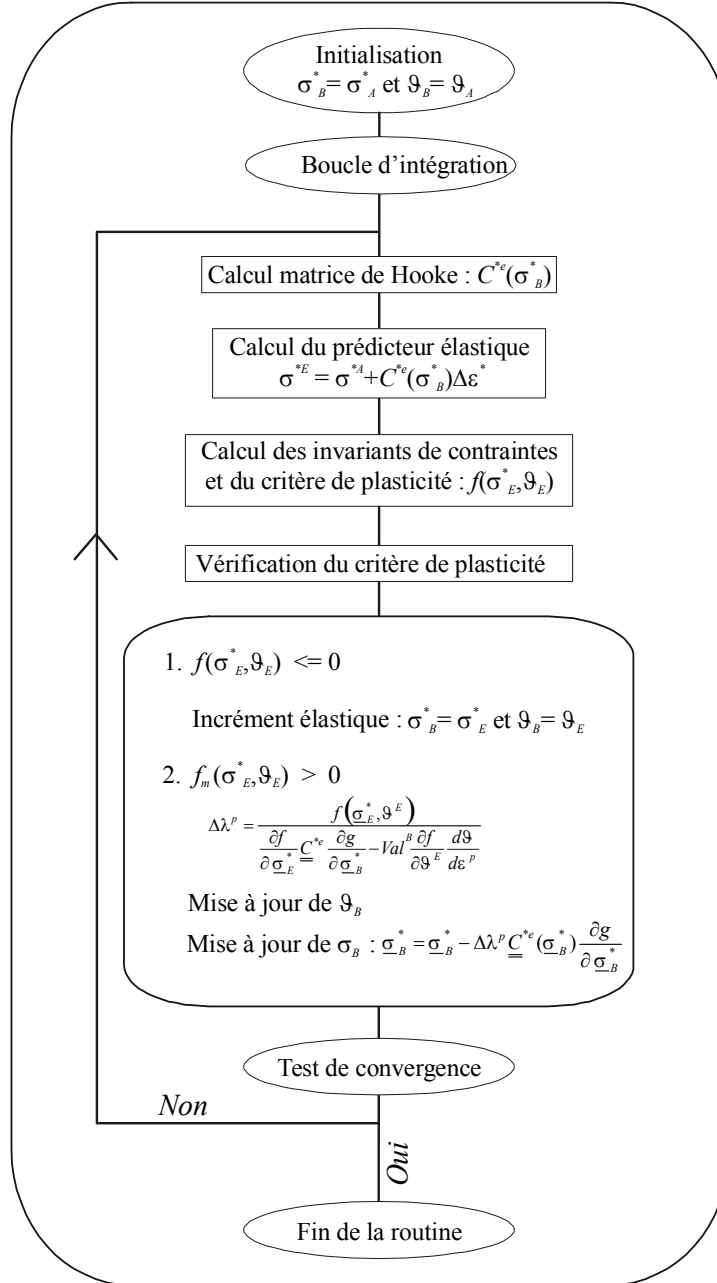


Figure 5.7 : Algorithme de la routine d'intégration

En effet, dans ce cas, la succion est imposée et les déformations doivent être calculées en conséquence. Les contraintes mécaniques doivent alors être adaptées car,

lors du calcul du prédicteur élastique, les déformations liées à la succion ont été sous-estimées.

$$\Delta \sigma_{ij}^{e(n)} = C_{ijkl}^e (\underline{\sigma}_E^{*(n-1)}) (\Delta \varepsilon_{ij} - \Delta \varepsilon_v^{s,e} \delta_{ij} - \Delta \varepsilon_v^{s,p} \delta_{ij}) \quad (5.62)$$

Il faut noter que dans le cadre d'une élasticité non-linéaire, le prédicteur élastique est recalculé à chaque itération.

La condition de convergence

$$f(\underline{\sigma}_B^*, \mathcal{G}^B) \approx 0 \quad (5.63)$$

de l'algorithme d'intégration a été adaptée. Elle a été écrite en terme de rapport d'incrément de contrainte entre l'itération  $(n-1)$  et l'itération  $n$  de la routine d'intégration de la loi :

$$1 - Prec < \max \left| \frac{\sigma_{ij}^n}{\sigma_{ij}^{n-1}} \right| < 1 + Prec \quad (5.64)$$

Une valeur de  $Prec=10^{-3}$  a été choisie, la convergence est donc atteinte lorsque la variation maximum relative des contraintes entre deux itérations est inférieure à 0,1%. Ce type de critère est adimensionnel, et en conséquence, indépendant du problème et du système d'unité choisi.

### 3.1.2.2. Plusieurs modes plastiques actifs : régime de coin

Le régime de coin doit être traité avec une attention particulière. En effet, plusieurs mécanismes plastiques sont actifs et la condition de cohérence doit donc être respectée simultanément pour chacun d'entre eux.

Nous considérons que les mécanismes sont indépendants même en régime de coin. Les déformations plastiques peuvent donc s'écrire comme la somme des contributions de chaque mécanisme :

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^{*p} = \sum_m \dot{\underline{\varepsilon}}_m^{*p} \quad (5.65)$$

En conséquence, la variable interne d'un modèle n'est pas influencée par les déformations plastiques relatives à l'autre modèle. Toutefois, cela n'est plus vrai lorsque le modèle CamClay et la surface SI sont actives simultanément car un couplage existe au niveau des règles d'écrouissage. Nous devons donc adapter les équations dans ce cas précis.

Après avoir calculé le prédicteur élastique, le premier problème rencontré est de déterminer quel(s) régime(s) plastique(s) est(sont) éventuellement actif(s). Cette question ne se pose que si l'état de contrainte est proche d'un coin. Toutefois, la notion

de proximité est toute relative et arbitraire. Nous avons choisi la procédure suivante (figure 5.8):

1. Calcul du premier invariant au point de jonction entre la surface elliptique et la surface à frottement interne.

$$I_{\sigma,1-2} = \left( 3p_0 - \frac{3c}{\tan\phi} \right) / 2 \quad (5.66)$$

2. Si  $I_{\sigma} > 1,5 I_{\sigma,1-2}$ , seul le modèle CamClay peut être actif ( $IYIELD = 1$ ).
3. Si  $0,5 I_{\sigma,1-2} \leq I_{\sigma} \leq 1,5 I_{\sigma,1-2}$ , les modèles CamClay et à frottement interne peuvent être actifs ( $IYIELD = 4$ ).
4. Si  $0 < I_{\sigma} < 0,5 I_{\sigma,1-2}$ , seul le modèle à frottement interne peut être actif ( $IYIELD = 2$ ).
5. Si  $I_{\sigma} \leq 0$ , les modèles à frottement interne et de traction peuvent être actifs ( $IYIELD = 5$ ).
6. Si  $s > s_0$ , la surface SI est activée ( $IYIELD = 6$  à 11). Dans ce cas, trois mécanismes plastiques peuvent être actifs.

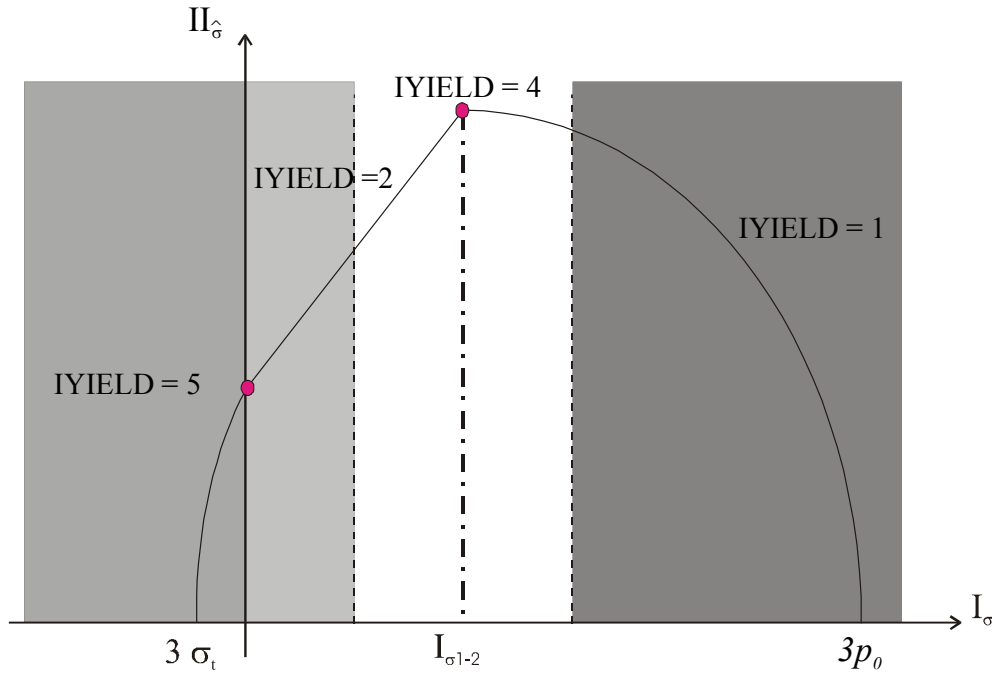


Figure 5.8 : Détermination des régimes plastiques actifs dans le plan  $(I_{\sigma}, II_{\hat{\sigma}})$

En régime de coin supposé, si l'un des critères n'est pas violé, nous retombons dans un cas classique et l'intégration de la loi s'effectue selon l'algorithme défini dans le paragraphe précédent.

A présent, considérons qu'une combinaison de  $M$  ( $M \in \{1,2,3\}$ ) mécanismes plastiques est possible ( $f_m > 0$  ;  $m = 1 \rightarrow M$ ) ; nous utiliserons une méthode proposée par Simo et Hughes [SIMO, 1998] pour intégrer la loi.

Dans un formalisme élasto-plastique, les relations suivantes doivent toujours être respectées :

$$\dot{\lambda}^{p,m} \geq 0 \quad f_m \leq 0 \quad \dot{\lambda}^{p,m} \cdot f_m = 0 \quad (5.67)$$

Nous allons tout d'abord donner une interprétation géométrique de la méthode utilisée en nous limitant à une plasticité parfaite associée ; nous utiliserons ensuite cette méthode pour le modèle que nous avons développé. En régime plastique, quand une combinaison de  $M$  ( $M \in \{1,2,3\}$ ) mécanismes plastiques est possible, nous pouvons écrire :

$$f_m = 0 \quad \dot{f}_m = 0 \quad (5.68)$$

La déformation plastique comprend les contributions de chaque mécanisme :

$$\underline{\dot{\epsilon}}^{*p} = \sum_{m=1}^M \dot{\lambda}^{p,m} \cdot \frac{\partial f_m}{\partial \underline{\sigma}^*} \quad (5.69)$$

Les multiplicateurs plastiques  $\dot{\lambda}^{p,m}$  doivent vérifier les conditions (5.66) et (5.68). Toutefois, un problème supplémentaire existe ; en effet, la condition ( $f_m > 0$  ;  $m = 1 \rightarrow M$ ) n'entraîne pas automatiquement que chaque mécanisme  $m$  soit réellement actif.

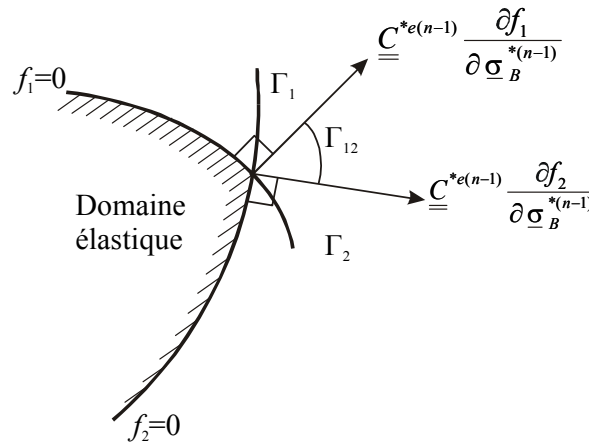


Figure 5.9 : Ecoulement plastique en régime de coin

Dans l'espace des contraintes, la zone angulaire, dans laquelle une combinaison de mécanismes est possible, peut être divisée en trois parties (figure 5.9) :  $\Gamma_{12}$  est la partie

où les deux surfaces plastiques sont réellement actives. Les parties  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  représentent les zones où respectivement le mécanisme 1 et le mécanisme 2 jouent seuls.

A la figure 5.10, la contrainte  $\underline{\sigma}_E^{*(n)}$  est déterminée par le prédicteur élastique. La projection de ce vecteur contrainte sur les directions des normales aux surfaces définit le signe des multiplicateurs plastiques. Si un de ces multiplicateurs se révèle être négatif (figure 5.10-b), cela signifie que le mécanisme plastique correspondant ne devait pas être activé. L'intégration de la loi peut alors continuer avec une seule surface.

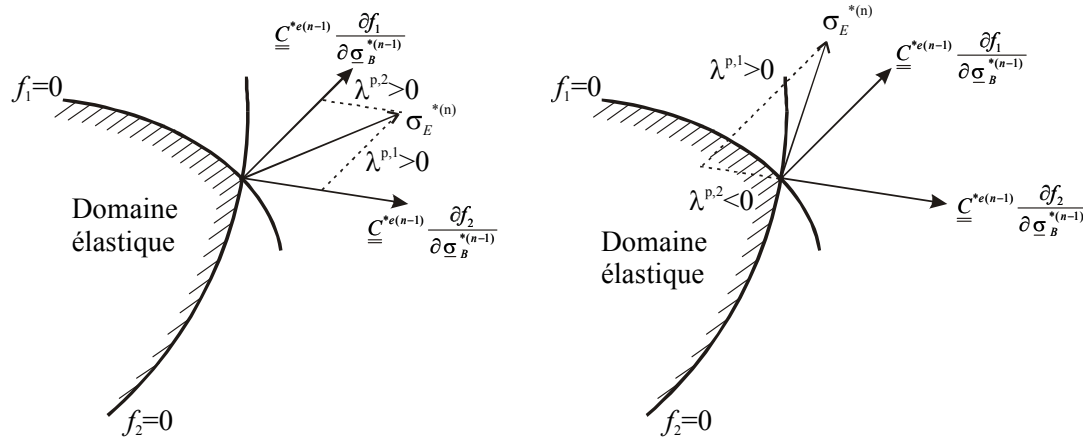


Figure 5.10 : (a) Deux mécanismes actifs (b) Un seul mécanisme réellement actif

Ce raisonnement reste valable en plasticité non-associée sous réserve que les surfaces d'écoulement plastique relatives à chaque mécanisme forment également un angle non-nul.

Nous pouvons à présent développer cette méthode pour le modèle que nous avons construit. Nous considérerons uniquement dans la suite le cas de deux mécanismes actifs pour des raisons de clarté mais le raisonnement reste valable quand trois modèles sont actifs. Nous considérons dans un premier temps que la surface SI n'est pas un des mécanismes actifs. Ainsi, si deux mécanismes plastiques sont actifs, les conditions suivantes doivent être vérifiées :

$$\begin{cases} f_1 = 0 \text{ et } f_2 = 0 \\ \dot{f}_1 = 0 \text{ et } \dot{f}_2 = 0 \end{cases} \quad (5.70)$$

Les déformations plastiques correspondent à la somme des déformations plastiques des deux mécanismes :

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^{*p} = \dot{\underline{\varepsilon}}^{*p-1} + \dot{\underline{\varepsilon}}^{*p-2} = \dot{\lambda}^{p,1} \frac{\partial \underline{g}_1}{\partial \underline{\sigma}^*} + \dot{\lambda}^{p,2} \frac{\partial \underline{g}_2}{\partial \underline{\sigma}^*} \quad (5.71)$$

Considérant que les surfaces de plasticité dépendent uniquement de l'état de contrainte et des variables internes, un développement de Taylor au premier ordre des deux surfaces de plasticité  $f_m$  ( $m = 1 \rightarrow 2$ ) nous donne les relations suivantes :

$$f_m(\underline{\sigma}_E^* + \Delta \underline{\sigma}^{*p}, g^{E-m} + \Delta g^m) = f_m(\underline{\sigma}_E^*, g^{E-m}) + \frac{\partial f_m}{\partial \underline{\sigma}_E^*} \Delta \underline{\sigma}^{*p} + \frac{\partial f_m}{\partial g^{E-m}} \Delta g^m \quad (5.72)$$

avec

$$\Delta \underline{\sigma}^{*p} = -\underline{\underline{C}}^{*e} \Delta (\underline{\varepsilon}^{*p-1} + \underline{\varepsilon}^{*p-2}) \quad (5.73)$$

La variation de la variable interne dépend des déformations plastiques. Comme la surface SI n'est pas un mécanisme actif, les règles d'écrouissage sont découplées et nous pouvons écrire :

$$\Delta g^m = \frac{d g^m}{d \varepsilon^{p-m}} \Delta \varepsilon^{p-m} \quad (5.74)$$

Sachant que les déformations plastiques peuvent s'écrire pour chaque mécanisme :

$$\Delta \varepsilon^{p-m} = Val^m \Delta \lambda^{p,m} \quad (5.75)$$

L'équation (5.71) peut être réécrite selon :

$$f_m = f_m(\underline{\sigma}_E^*, g^{E-m}) - \frac{\partial f_m}{\partial \underline{\sigma}_E^*} \underline{\underline{C}}^{*e} \left( \sum_{j=1}^2 \Delta \lambda^{p,j} \frac{\partial g_j}{\partial \underline{\sigma}_B^*} \right) + Val^{B-m} \frac{\partial f_m}{\partial g^{E-m}} \frac{d g^m}{d \varepsilon^{p-m}} \Delta \lambda^{p,m} \quad (5.76)$$

Sachant qu'en régime plastique, la condition de cohérence  $f_m = 0$  ( $m = 1 \rightarrow 2$ ) doit être vérifiée, la précédente relation donne pour les deux mécanismes considérés :

$$\begin{cases} f_1(\underline{\sigma}_E^*, g^{E-1}) - \frac{\partial f_1}{\partial \underline{\sigma}_E^*} \underline{\underline{C}}^{*e} \left( \Delta \lambda^{p,1} \frac{\partial g_1}{\partial \underline{\sigma}_B^*} + \Delta \lambda^{p,2} \frac{\partial g_2}{\partial \underline{\sigma}_B^*} \right) + Val^{B-1} \frac{\partial f_1}{\partial g^{E-1}} \frac{d g^1}{d \varepsilon^{p-1}} \Delta \lambda^{p,1} = 0 \\ f_2(\underline{\sigma}_E^*, g^{E-2}) - \frac{\partial f_2}{\partial \underline{\sigma}_E^*} \underline{\underline{C}}^{*e} \left( \Delta \lambda^{p,1} \frac{\partial g_1}{\partial \underline{\sigma}_B^*} + \Delta \lambda^{p,2} \frac{\partial g_2}{\partial \underline{\sigma}_B^*} \right) + Val^{B-2} \frac{\partial f_2}{\partial g^{E-2}} \frac{d g^2}{d \varepsilon^{p-2}} \Delta \lambda^{p,2} = 0 \end{cases} \quad (5.77)$$

Ce système d'équation permet de trouver la valeur des multiplicateurs plastiques  $\Delta \lambda^{p,1}$  et  $\Delta \lambda^{p,2}$  donnés par les relations (5.77) et (5.78). Ces dernières sont obtenues en supposant que les deux mécanismes sont actifs. Toutefois, cette hypothèse est vérifiée uniquement si les deux multiplicateurs sont positifs. En conséquence, si l'une des valeurs est négative, le mécanisme correspondant ne devait pas être activé et le calcul doit être recommencé avec uniquement l'autre surface de plasticité.

$$\Delta \lambda^{p,2} = \frac{f_2(\underline{\sigma}_E^*, g^{E-2}) - f_1(\underline{\sigma}_E^*, g^{E-1}) - \frac{\frac{\partial f_2}{\partial \underline{\sigma}_E^*} \underline{\underline{C}}^{*e} \frac{\partial g_1}{\partial \underline{\sigma}_B^*}}{\frac{\partial f_1}{\partial \underline{\sigma}_E^*} \underline{\underline{C}}^{*e} \frac{\partial g_1}{\partial \underline{\sigma}_B^*} - Val^{B-1} \frac{\partial f_1}{\partial g^{E-1}} \frac{\partial g^1}{\partial \varepsilon^{p-1}}}}{\frac{\frac{\partial f_2}{\partial \underline{\sigma}_E^*} \underline{\underline{C}}^{*e} \frac{\partial g_2}{\partial \underline{\sigma}_B^*} - Val^{B-2} \frac{\partial f_2}{\partial g^{E-2}} \frac{\partial g^2}{\partial \varepsilon^{p-2}} - \frac{\frac{\partial f_2}{\partial \underline{\sigma}_E^*} \underline{\underline{C}}^{*e} \frac{\partial g_1}{\partial \underline{\sigma}_B^*} \frac{\partial f_1}{\partial \underline{\sigma}_E^*} \underline{\underline{C}}^{*e} \frac{\partial g_2}{\partial \underline{\sigma}_B^*}}{\frac{\partial f_1}{\partial \underline{\sigma}_E^*} \underline{\underline{C}}^{*e} \frac{\partial g_1}{\partial \underline{\sigma}_B^*} - Val^{B-1} \frac{\partial f_1}{\partial g^{E-1}} \frac{\partial g^1}{\partial \varepsilon^{p-1}}}} \quad (5.78)$$

$$\Delta\lambda^{p,1} = \frac{f_1(\underline{\sigma}_E^*, \mathcal{G}^{E-1}) - \Delta\lambda^{p,2} \frac{\partial f_1}{\partial \underline{\sigma}_E^*} C^{*e} \frac{\partial g_2}{\partial \underline{\sigma}_B^*}}{\frac{\partial f_1}{\partial \underline{\sigma}_E^*} C^{*e} \frac{\partial g_1}{\partial \underline{\sigma}_B^*} - Val^{B-1} \frac{\partial f_1}{\partial \mathcal{G}^{E-1}} \frac{\partial \mathcal{G}^1}{\partial \varepsilon^{p-1}}} \quad (5.79)$$

Lorsque les surfaces actives sont le modèle CamClay et la courbe SI, une difficulté supplémentaire apparaît car un couplage existe entre ces deux mécanismes dans leur règle d'écroûissage :

$$\Delta\mathcal{G}^m = \frac{d\mathcal{G}^m}{d\varepsilon^p} (\Delta\varepsilon^{p-1} + \Delta\varepsilon^{p-2}) \quad (5.80)$$

Dans ce cas, les deux relations à respecter sont la condition de cohérence du modèle CamClay et la relation d'écroûissage de la courbe SI :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_2(\underline{\sigma}_E^*, \mathcal{G}^{E-2}) - \frac{\partial f_2}{\partial \underline{\sigma}_E^*} C^{*e} \left( \Delta\lambda^{p,2} \frac{\partial g_2}{\partial \underline{\sigma}_B^*} + \Delta\varepsilon_v^{p-s} \right) \\ \quad + \frac{\partial f_2}{\partial \mathcal{G}^{E-2}} \frac{d\mathcal{G}^2}{d\varepsilon^p} (Val^{B-2} \Delta\lambda^{p,2} + \Delta\varepsilon_v^{p-s}) = 0 \\ \Delta s^p = \frac{\Delta\varepsilon_v^{p-s} + Val^{B-2} \Delta\lambda_2}{h^p} \end{array} \right. \quad (5.81)$$

$$\text{où } \Delta\varepsilon_v^{p-s} = (\Delta\varepsilon_v^{p-s}, \Delta\varepsilon_v^{p-s}, \Delta\varepsilon_v^{p-s}, 0, 0, 0, 0)$$

Nous pouvons alors résoudre ce système où les deux inconnues sont  $\Delta\lambda^{p,2}$  et  $\Delta\varepsilon_v^{p-s}$ . Nous obtenons ainsi l'expressions des deux inconnues :

$$\Delta\lambda^{p,2} = \frac{f_2(\underline{\sigma}_E^*, \mathcal{G}^{E-2}) - \frac{\partial f_2}{\partial \underline{\sigma}_E^*} C^{*e} h^p \Delta s^p + \frac{\partial f_2}{\partial \mathcal{G}^{E-2}} \frac{\partial \mathcal{G}^2}{\partial \varepsilon^p} h^p \Delta s^p}{\frac{\partial f_2}{\partial \underline{\sigma}_E^*} C^{*e} \frac{\partial g_2}{\partial \underline{\sigma}_B^*} + \frac{\partial f_2}{\partial \underline{\sigma}_E^*} C^{*e} Val^{B-2}} \quad (5.82)$$

$$\Delta\varepsilon_v^{p-s} = h^p \Delta s^p - Val^{B-2} \Delta\lambda_2 \quad (5.83)$$

Si  $\Delta\lambda^{p,2}$  ou  $\Delta\varepsilon_v^{p-s}$  est négatif, cela signifie que le mécanisme correspondant n'était pas actif en réalité et le calcul est réitéré avec une seule surface de plasticité active.

### 3.1.3. LES SOUS-INTERVALLES D'INTEGRATION

Afin de réaliser des pas de temps aussi grands que possible, tout en gardant une intégration de la loi aussi précise que possible, une procédure de sous-intervalles d'intégration est prévue dans le code. Le pas de temps  $\Delta t$  est divisé en  $Nintv$  sous-intervalles  $\delta t$  définis par

$$\delta t = \frac{\Delta t}{Nintv} \quad (5.84)$$



Le nombre de sous-intervalles  $Nintv$  peut être fixé à une valeur constante (10 ou 20 par exemple). Toutefois, il est plus intéressant et efficace de calculer la valeur de  $Nintv$  en fonction de la déformation au point d'intégration [WANG, 1993] :

$$Nintv = \min \left\{ 1 + \frac{\dot{\epsilon}_N \Delta t}{Div}, 100 \right\} \quad (5.85)$$

où la norme du taux de déformation est définie par :

$$\dot{\epsilon}_N = \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} \quad (5.86)$$

A chaque itération, pour chaque point d'intégration, le nombre de sous-intervalles est recalculé en fonction des déformations : le nombre de sous-intervalles est important là où le solide se déforme de manière importante et permet ainsi une intégration du chemin de contraintes plus précise. Naturellement, le choix du paramètre  $Div$  est arbitraire [WANG, 1993], toutefois une valeur par défaut de  $Div \approx 5.10^{-3}$  donne habituellement une valeur satisfaisante de  $Nintv$ .

### 3.1.4. ALGORITHME DE LA LOI

Dans le code, la loi est composée essentiellement de deux routines : le pilote et la routine d'intégration proprement dite. Le pilote est différent suivant l'analyse réalisée (2D ou 3D), la routine d'intégration est toujours la même.

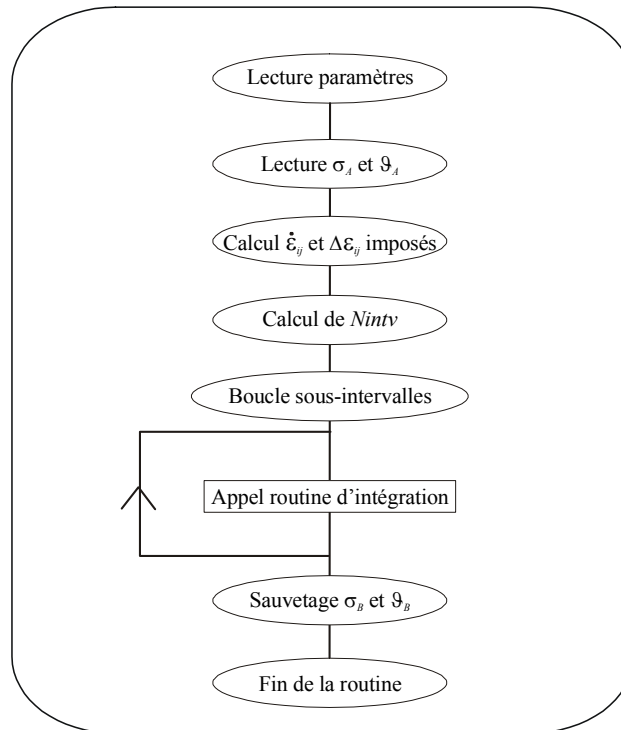


Figure 5.11 : Algorithme du pilote

La figure 5.11 montre l'algorithme du pilote de la loi. Cette routine consiste d'abord en la lecture des paramètres de la loi, de l'état de contrainte et des variables d'état initiales. La boucle sur les sous-intervalles  $y$  est réalisée, dans laquelle la routine d'intégration est appelée.

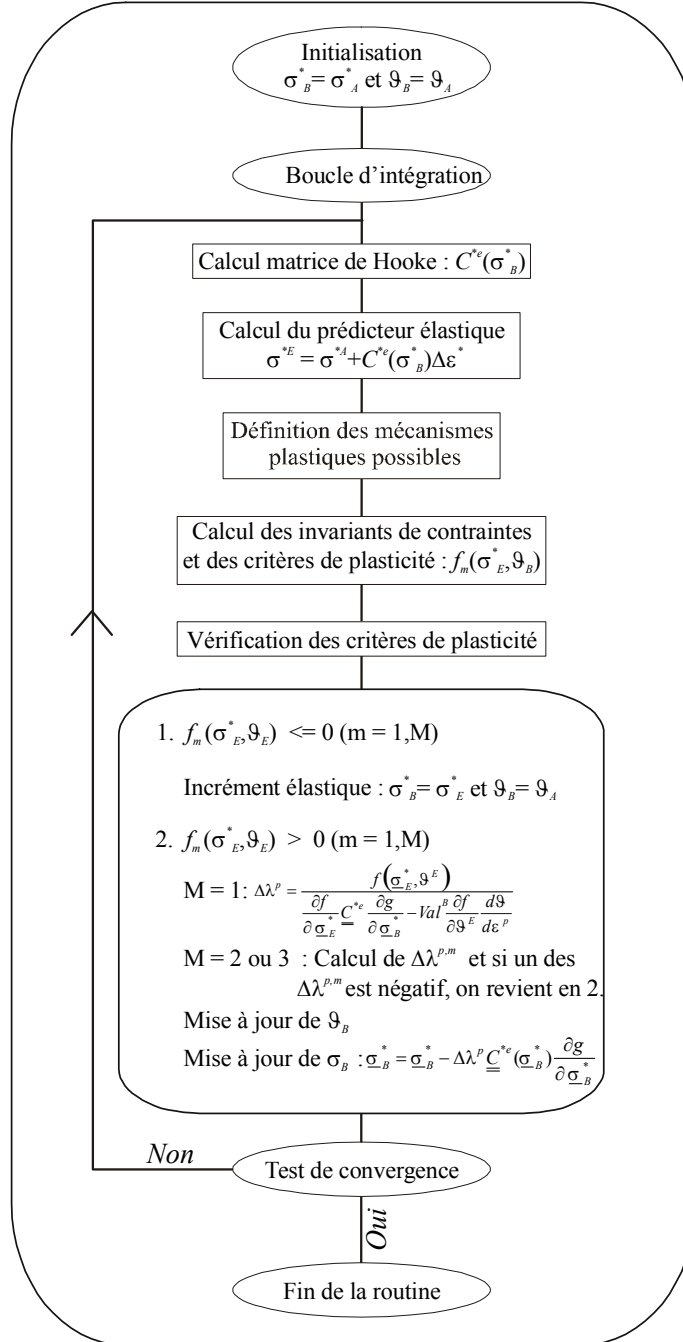


Figure 5.12 : Algorithme de la routine d'intégration

La figure 5.12 reprend l'algorithme de la routine d'intégration décrit précédemment.

### 3.2. Modèle d'écoulement anisotherme

Le modèle d'écoulement multiphasique anisotherme ne demande pas d'intégration sur le pas de temps. Nous avons également choisi un schéma implicite : les flux de chaleur et de fluides sont calculés en fin de pas. Nous allons toutefois donner des précisions supplémentaires sur le calcul de l'emmagasinement et sur l'influence de la formulation en grandes déformations sur le calcul des flux.

En prenant pour exemple un milieu saturé anisotherme (dans un esprit de clarté), l'expression de l'emmagasinement de fluide est donné par la relation (2.64) :

$$\dot{S}_f = \rho_{f0} \cdot \left[ \frac{\dot{p}_f}{\chi_f} - \alpha_f^T \cdot \dot{T} \right] \cdot n + \rho_f \cdot \dot{\varepsilon}_V \quad (5.87)$$

Cette expression correspond à la pente de la courbe de la quantité de fluide  $S_f$  en fonction du temps (figure 5.13). Nous appellerons cette méthode de calcul, le schéma tangent.

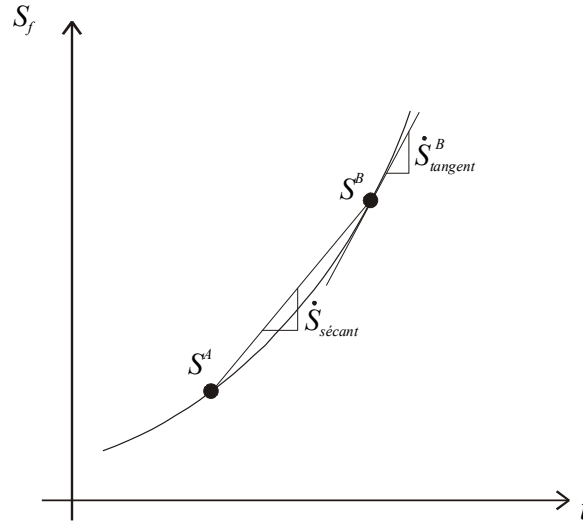


Figure 5.13 : Calcul de l'emmagasinement

Dans notre schéma implicite, la pente est calculée en fin de pas (Point B). Toutefois, cette méthode de calcul entraîne des difficultés numériques pour des simulations où la quantité de fluide varie fortement. Dans ce cas, un calcul de l'emmagasinement moyen sur le pas est plus stable numériquement :

$$\dot{S}_f = \frac{\rho_f^B \cdot n^B \cdot V^B - \rho_f^A \cdot n^A \cdot V^A}{\Delta t \cdot V^B} \quad (5.88)$$

Ce calcul moyen de l'emmagasinement (schéma sécant) sera utilisé *a priori* dans l'ensemble des simulations des chapitres suivants.

La formulation en grandes déformations a une influence importante sur le modèle d'écoulement. En effet, comme nous l'avons précisé au paragraphe 2.1, les équations d'équilibre sont exprimées dans la configuration courante déformée à chaque pas de temps. Ainsi les flux de chaleur et de fluide ont un référentiel lié au solide déformé et ne sont donc pas influencés par un déplacement de ce dernier. En conséquence, la vitesse de fluide (relation 2.58) donnée ci-après est bien une vitesse relative à la phase solide :

$$\underline{q}_f = -\frac{K_f}{\rho_f \cdot g} \cdot [\underline{grad}(p_f) + \rho_f \cdot g \cdot \underline{grad}(y)] \quad (5.89)$$

Dans l'équation de bilan de chaleur, il n'est donc pas nécessaire de tenir compte de la convection due à des mouvements de la phase solide car cette dernière est implicitement prise en compte dans une formulation Lagrangienne actualisée. D'un point de vue fluide, la formulation n'est donc ni totalement Eulérienne (maillage fixe), ni Lagrangienne (maillage attaché au fluide), mais un cas particulier simple d'une formulation arbitraire Lagrangienne Eulérienne (ALE) où le mouvement du maillage est dicté par les déformations du solide.

#### 4. ALGORITHME GENERAL DE RESOLUTION

Après avoir décrit la formulation d'un élément fini et les routines d'intégration des lois constitutives, nous pouvons présenter l'algorithme général de résolution d'un problème non-linéaire. Afin de résoudre ce dernier, il faut obtenir l'égalité des forces (ou débits) extérieures et intérieures :

$$\underline{F}_L^{\text{ext}} = \underline{F}_L^{\text{int}} \quad (5.90)$$

Dans le cas contraire, il est nécessaire de modifier le champ de vitesse de déformation et le champ de pression (ou de température). Malheureusement, la relation entre les coordonnées (dépendant directement du champ de vitesse de déformation) et les forces extérieures et intérieures est non-linéaire. Il est impossible de résoudre ce problème sans le linéariser. Pour ce faire, on effectue un développement en série de Taylor, limité au premier ordre, des forces nodales hors d'équilibre, autour de la dernière approximation connue des coordonnées  $x_0$  :

$$\underline{F}_L^{\text{HE}} = \underline{F}_L^{\text{HE}}(x_0) + \frac{\partial \underline{F}_L^{\text{HE}}}{\partial x_k} dx_k + O^2 \quad (5.91)$$

Nous souhaitons obtenir  $\underline{F}_L^{\text{HE}} = 0$  à la prochaine itération et  $\underline{F}_L^{\text{HE}}(x_0)$  représente le déséquilibre  $\underline{F}_L^{\text{ext}} - \underline{F}_L^{\text{int}}$ . L'équation (5.91) peut donc se transformer en :

$$\sum_{\text{éléments}} \frac{\partial \underline{F}_L^{\text{HE}}}{\partial x_k} dx_k = \sum_{\text{éléments}} (\underline{F}_L^{\text{ext}} - \underline{F}_L^{\text{int}}) \quad (5.92)$$

Passant à des incréments finis des coordonnées :

$$\underline{\underline{K}} \Delta \underline{x} = \underline{F}^{HE} \quad (5.93)$$

On obtient ainsi une correction des coordonnées nodales  $\Delta \underline{x}$ . Comme nous avons effectué une linéarisation, cette correction n'est pas parfaite et le processus est itératif (figure 5.14).

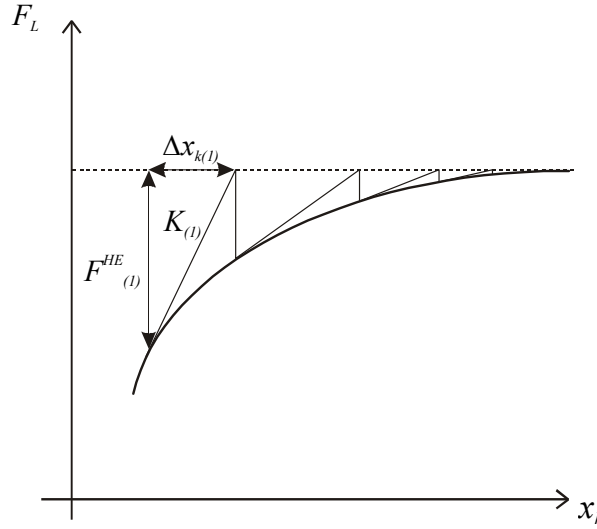


Figure 5.14 : Itérations successives pour résoudre le problème non-linéaire

La matrice tangente d'itération  $\underline{\underline{K}}$  doit être réévaluée à chaque itération. Elle est définie par la relation suivante:

$$K_{Lj,Mk} = \frac{\partial F_{jL}}{\partial x_{kM}} \quad (5.94)$$

Dans notre élément couplé MWAT, nous avons cinq degrés de liberté par nœud, la matrice tangente aura donc la forme suivante :

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{MM} & \underline{\underline{K}}_{WM} & \underline{\underline{K}}_{NwM} & \underline{\underline{K}}_{TM} \\ [2 \times 2] & [2 \times 1] & [2 \times 1] & [2 \times 1] \\ \underline{\underline{K}}_{MW} & \underline{\underline{K}}_{WW} & \underline{\underline{K}}_{NwW} & \underline{\underline{K}}_{TW} \\ [1 \times 2] & [1 \times 1] & [1 \times 1] & [1 \times 1] \\ \underline{\underline{K}}_{MNw} & \underline{\underline{K}}_{WNw} & \underline{\underline{K}}_{NwNw} & \underline{\underline{K}}_{TNw} \\ [1 \times 2] & [1 \times 1] & [1 \times 1] & [1 \times 1] \\ \underline{\underline{K}}_{MT} & \underline{\underline{K}}_{WT} & \underline{\underline{K}}_{NwT} & \underline{\underline{K}}_{TT} \\ [1 \times 2] & [1 \times 1] & [1 \times 1] & [1 \times 1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{F}_M}{\partial \underline{x}_M} & \frac{\partial \underline{F}_M}{\partial p_w} & \frac{\partial \underline{F}_M}{\partial p_{mw}} & \frac{\partial \underline{F}_M}{\partial T} \\ \frac{\partial \underline{F}_W}{\partial \underline{x}_M} & \frac{\partial \underline{F}_W}{\partial p_w} & \frac{\partial \underline{F}_W}{\partial p_{mw}} & \frac{\partial \underline{F}_W}{\partial T} \\ \frac{\partial \underline{F}_{Nw}}{\partial \underline{x}_M} & \frac{\partial \underline{F}_{Nw}}{\partial p_w} & \frac{\partial \underline{F}_{Nw}}{\partial p_{mw}} & \frac{\partial \underline{F}_{Nw}}{\partial T} \\ \frac{\partial \underline{F}_T}{\partial \underline{x}_M} & \frac{\partial \underline{F}_T}{\partial p_w} & \frac{\partial \underline{F}_T}{\partial p_{mw}} & \frac{\partial \underline{F}_T}{\partial T} \end{bmatrix} \quad (5.95)$$

Dans cette matrice, tous les termes non-diagonaux sont liés aux couplages entre les degrés de liberté. Par exemple, la sous-matrice  $\underline{\underline{K}}_{MW}$  est lié au couplage de l'écoulement de l'eau sur la mécanique (via l'utilisation des contraintes effectives).

Un calcul précis de cette matrice tangente permet une convergence quadratique lors de la résolution d'un problème.

Deux méthodes principales existent pour résoudre un problème couplé : l'approche étagée (ou semi-couplée) et l'approche monolithique (ou couplée). Dans la première, les problèmes mécanique et d'écoulement sont traités séparément avec échanges d'informations à certains moments. Dans la deuxième, les deux problèmes sont traités simultanément et les informations sont échangées à chaque pas de temps.

L'approche monolithique permet une prise en compte fine de l'ensemble des couplages, au prix du calcul de la matrice tangente complète, qui peut s'avérer complexe comme nous allons le montrer maintenant. Le temps de calcul peut être plus long (que la méthode étagée) mais dans les problèmes très couplés, cette méthode est à nos yeux la meilleure solution.

Afin de calculer la matrice tangente complète, deux approches sont possibles : un calcul analytique ou un calcul numérique par perturbation des champs de vitesse.

Le calcul analytique consiste à déterminer terme par terme la matrice tangente. Si nous prenons par exemple la sous-matrice  $\underline{K}_{WW}$ , elle est définie par la relation suivante:

$$\begin{aligned} K_{WW} = K_{L3,M3} &= \frac{\partial F_{Lpw}}{\partial p_{wM}^B} \\ &= \sum_{PI} \left( \frac{\partial \dot{S}_w}{\partial p_{wM}^B} N_L - \frac{\partial V_{pw1}}{\partial p_{wM}^B} \frac{\partial N_L}{\partial x_1} - \frac{\partial V_{pw2}}{\partial p_{wM}^B} \frac{\partial N_L}{\partial x_2} \right) ep |J| W_{PI} \end{aligned} \quad (5.96)$$

où  $p_{wM}^B$  est la pression d'eau fin de pas au nœud  $M$  et  $F_{Lpw}$  est la force nodale du degré de liberté de la pression d'eau relative au nœud  $L$ .

Connaissant la discrétisation spatiale et temporelle de la pression, nous pouvons écrire :

$$p_w = N_L P_{wL} \text{ et } p_w = (1 - \theta) p_w^A + \theta p_w^B \quad (5.97)$$

Ce qui permet de calculer les différentes dérivées :

$$\frac{\partial \dot{S}_w}{\partial p_{wM}^B} = \frac{\partial \dot{S}_w}{\partial p_w} \frac{\partial p_w}{\partial p_{wM}^B} = \frac{\partial \dot{S}_w}{\partial p_w} \theta N_M = CWAT3 N_M \quad (5.98)$$

$$\frac{\partial V_{pw2}}{\partial p_{wM}^B} = \frac{\partial \left( \rho_w \left[ -\frac{k_{int}^w}{\mu_w} \right] \left[ \frac{\partial p_w}{\partial x_2} + \rho_w \cdot g \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x_2} \right] \right)}{\partial p_{wM}^B} \quad (5.99)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{p_{w2}}}{\partial p_{wM}^B} = & \left[ \left[ \frac{\partial p_w}{\partial x_2} + \rho_w \cdot g \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x_2} \right] \frac{\partial \left( \rho_w \cdot \left[ -\frac{k_{int}^w}{\mu_w} \right] \right)}{\partial p_w} + \rho_w \cdot \left[ -\frac{k_{int}^w}{\mu_w} \right] \frac{\partial \left( \rho_w \cdot g \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x_2} \right)}{\partial p_w} \right] \cdot \theta N_M \\ & + \rho_w \cdot \left[ -\frac{k_{int}^w}{\mu_w} \right] \cdot \theta \frac{\partial N_M}{\partial x_2} = -CWAT5 N_M - CWAT2 \frac{\partial N_M}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (5.100)$$

L'ensemble de ces équations peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} K_{WW} = & \sum_{PI} [CWAT3 N_M N_L \\ & + (CWAT1 \frac{\partial N_M}{\partial x_1} + CWAT7 \frac{\partial N_M}{\partial x_2} + CWAT4 N_M) \frac{\partial N_L}{\partial x_1} \\ & + (CWAT2 \frac{\partial N_M}{\partial x_2} + CWAT7 \frac{\partial N_M}{\partial x_1} + CWAT5 N_M) \frac{\partial N_L}{\partial x_2}] t |J| W_{PI} \end{aligned} \quad (5.101)$$

où le terme  $CWAT7$  apparaît uniquement lorsque la perméabilité est anisotrope.

Ce calcul peut rapidement devenir très complexe lorsque l'expression des flux est plus compliquée, comme par exemple, dans le modèle avec changement de phase et présence de vapeur. Dans ce cas, il est intéressant de calculer ces termes de matrice numériquement, par différences finies entre un état perturbé et un état non-perturbé. Une boucle supplémentaire est effectuée au niveau de la loi ; chaque composante de la vitesse au point d'intégration est successivement perturbée et permet le calcul du terme de la matrice correspondant à la perturbation.

Ainsi, le terme  $CWAT1$  est calculé lorsque la composante du gradient selon  $x$  de la pression d'eau est perturbée :

$$CWAT1 = \frac{V_{p_w}^{pert}(x) - V_{p_w}^0(x)}{\Delta \varepsilon} \quad (5.102)$$

où  $V_{p_w}^{pert}(x)$  est le flux d'eau selon  $x$  lorsque le gradient de pression selon  $x$  est perturbé,  $V_{p_w}^0(x)$  est le flux d'eau pour un état non-perturbé et  $\Delta \varepsilon$  est la perturbation.

Le tableau 5.1 indique pour chaque terme de la matrice tangente écoulement, quelle perturbation numérique effectuer.

	$Vp_{w(x)}$	$Vp_{w(y)}$	$S_w$	$Vp_{a(x)}$	$Vp_{a(y)}$	$S_a$	$V_{T(x)}$	$V_{T(y)}$	$S_T$
grad $p_{w,x}$	CWAT1	CWAT7	0	0	0	0	CWT2	CWT4	0
grad $p_{w,y}$	CWAT7	CWAT2	0	0	0	0	CWT4	CWT3	0
$p_w$	CWAT4	CWAT5	CWAT3	CWA1	CWA2	CWA3	CWT5	CWT6	CWT1
grad $p_{a,x}$	0	0	0	CAIR1	CAIR7	0	CAT2	CAT4	0
grad $p_{a,y}$	0	0	0	CAIR7	CAIR2	0	CAT4	CAT3	0
$p_a$	CAW1	CAW2	CAW3	CAIR4	CAIR5	CAIR3	CAT5	CAT6	CAT1
grad $T_{,x}$	0	0	0	CTA4	CTA7	0	CTHE1	CTHE7	0
grad $T_{,y}$	0	0	0	CTA7	CTA5	0	CTHE7	CTHE2	0
$T$	CTW2	CTW3	CTW1	CTA1	CTA2	CTA3	CTHE4	CTHE5	CTHE3

Tableau 5.1: Calcul des termes de la matrice tangente par perturbation

La matrice  $\underline{\underline{K}}_{MM}$  peut être calculée selon la même méthodologie en dérivant les forces nodales mécaniques par rapport aux coordonnées  $x$  et  $y$  :

$$K_{Li,Mj} = \frac{\partial F_{Li}}{\partial x_{Mj}} \quad (5.103)$$

Nous nous limitons à une seule force nodale, à une seule coordonnée et à l'état plan déformation par esprit de clarté. Deux contributions vont apparaître :

$$K_{Li,Ml} = \frac{\partial F_{Li}}{\partial x_{Ml}} = \sum_{PI} \left( \frac{\partial \sigma_{I1}}{\partial x_{M1}} \frac{\partial N_L}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{I2}}{\partial x_{M1}} \frac{\partial N_L}{\partial x_2} \right) ep |J| W_{PI} \\ + \sum_{PI} \left( \sigma_{I1} \frac{\partial}{\partial x_{M1}} \left( \frac{\partial N_L}{\partial x_1} |J| \right) + \sigma_{I2} \frac{\partial}{\partial x_{M1}} \left( \frac{\partial N_L}{\partial x_2} |J| \right) \right) ep W_{PI} \quad (5.104)$$

Le premier terme donne la matrice des petites déformations, classique dans le domaine des petites déformations, le deuxième donne la matrice des contraintes initiales, spécifique de l'aspect géométriquement non linéaire. En effet, il provient de l'effet des modifications de la géométrie sur les forces nodales.

Le calcul de la matrice des petites déformations demande de connaître la dérivée des contraintes de fin de pas par rapport aux coordonnées :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^B}{\partial x_{Ma}^B} = \frac{\partial \sigma_{ij}^B}{\partial L_{kl}^B} \frac{\partial L_{kl}^B}{\partial x_{Ma}^B} = C_{ijkl}^T \frac{\partial L_k^{Bl}}{\partial x_{Ma}^B} \quad (5.105)$$

Dans cette expression apparaît un opérateur tangent  $\underline{\underline{C}}^T$ , appelé matrice d'incidence, qu'il est important mais difficile de calculer exactement [CHARLIER, 1987]. Il est égal au rapport des variations de la contrainte en fin de pas et des variations du gradient de vitesse lorsque celles-ci sont arbitrairement petites. Or le calcul de la contrainte en fin de pas résulte d'un processus complexe. Calculer analytiquement cette



dérivée analytique est quasi impossible, nous la déterminons donc de manière numérique, par perturbations successives du gradient de vitesse au niveau de la loi.

A l'inverse, le calcul de la matrice des contraintes initiales est complexe, mais il peut être réalisé analytiquement.

Il faut noter que le calcul numérique de la matrice tangente par perturbation au niveau des lois ne permet pas de déterminer les termes de couplage mécanique-fluide de la matrice. Pour faire cela, il est nécessaire de réaliser cette perturbation au niveau de l'élément, ce qui fournit alors la matrice complète. Cette méthode est toutefois peu économique car elle demande de perturber la vitesse de chaque nœud ; elle nécessite donc 164 appels des routines d'intégration pour un élément à huit nœuds et quatre points d'intégration.

Nous venons de montrer comment calculer la matrice tangente locale à un élément ; les matrices de l'ensemble des éléments doivent être ensuite assemblées classiquement élément par élément, comme dans un programme linéaire, et enfin on résout le système global, par la méthode de Gauss par exemple. Ces deux opérations (calcul et résolution) sont particulièrement coûteuses en temps ordinateur.

D'un autre côté, des formulations étagées sont proposées dans la littérature [ZIENCKIEWICZ *et al.*, 1988,1989], leurs avantages sont nombreux. Dans un problème d'écoulement, une sollicitation brutale provoque des oscillations spatiales de la pression, il est dès lors intéressant de réaliser des plus grands pas de temps. Par contre, dans un problème mécanique, il est préférable de réaliser de plus petits pas afin d'intégrer facilement la loi. L'approche semi-couplée est intéressante car elle permet d'utiliser des pas de temps différents pour les deux problèmes, voire même des maillages différents. Rien n'interdit non plus d'employer des codes différents pour traiter les deux problèmes. De plus, il n'est plus nécessaire de calculer les termes de couplages de la matrice tangente, cette dernière est dès lors plus petite et les calculs sont effectués plus rapidement.

Cette approche est donc très séduisante mais elle souffre de deux principaux inconvénients. Il faut tout d'abord gérer l'échange d'information entre la loi écoulement et la loi mécanique et vice versa. La procédure étagée suivante peut être utilisée dans le code LAGAMINE [RADU *et al.*, 1994] :

- Définition d'un macro-pas  $\Delta t_{\text{flow}}$  pour l'analyse écoulement et d'un micro-pas  $\Delta t_{\text{mec}}$  pour la modélisation mécanique.
- De  $t_i$  à  $t_i + \Delta t_{\text{flow}}$  : analyse mécanique avec une série de micro-pas  $\Delta t_{\text{mec}}$ . A chaque pas, les données d'écoulement sont interpolées grâce à la simulation écoulement du macro-pas précédent.

$$p(t_i + \Delta t_{\text{flow}}) = p_i + \dot{p}_{t_i} \cdot \Delta t_{\text{flow}} \quad (5.106)$$

Les incréments de déformations volumiques sont sommés pour chaque micro-pas et stockés dans une variable.

- Calcul du macro-pas écoulement avec les coordonnées spatiales et un emmagasinement tenant compte des déformations volumiques obtenues précédemment en  $t_i + \Delta t_{\text{flow}}$ .
- La vitesse de pressions utilisée au premier point est celle du pas précédent. Une nouvelle vitesse vient d'être calculée au point précédent. Il faut alors itérer et recommencer cette procédure avec la nouvelle estimation de la vitesse, jusqu'à la convergence des pressions définie par la norme suivante sur les pressions :

$$\|p\| = \sqrt{\frac{\sum_{\text{noeuds}} (p_I - p_P)^2}{\sum_{\text{noeuds}} (p_I - p_0)^2}} \quad (5.107)$$

où  $p_0$  est la pression au début du macro-pas  $I$ , c'est-à-dire celle obtenue à la fin du macro-pas précédent,  $p_I$  est la pression obtenue actuellement à la fin du macro pas  $I$  et  $p_P$  est la pression obtenue à la fin de l'analyse précédente du macro-pas  $I$ .

Nous voyons donc que cette procédure est relativement lourde à mettre en œuvre.

Enfin, cette méthode approxime les termes de couplage. Dès lors, pour des problèmes où ces couplages deviennent importants, une approche semi-couplée ne converge plus ou converge vers une mauvaise solution. Dans ce cas, l'approche couplée complète (ou monolithique) devient nécessaire.

Voulant traiter des problèmes où les couplages sont importants, nous avons choisi délibérément de travailler avec une approche couplée complète pour l'ensemble des simulations. Il n'est pas certain que cette approche soit toujours la plus efficace en temps de calcul mais elle nous a permis de réaliser l'ensemble des calculs présentés aux chapitres suivants.

## 5. CONDITIONS AUX LIMITES

Dans un problème couplé, nous distinguons les conditions aux limites mécaniques et celles liées à l'écoulement et à la thermique. Nous décrivons les éléments spécifiques aux conditions limites en supposant que le milieu est discrétisé par des éléments MWAT à huit nœuds et quatre points d'intégration.

En mécanique, nous pouvons imposer aux frontières soit des déplacements nodaux soit des forces nodales. Afin d'imposer des contraintes le long d'un contour ou sur une surface, nous utilisons respectivement des éléments linéiques de chargement (appelés LICH) et surfaciques (appelés SUCH) dont le seul rôle est de calculer les forces nodales énergétiquement équivalentes.

Dans un modèle d'écoulement monophasique anisotherme, les conditions limites sont similaires. Nous pouvons imposer soit une variation de pression (ou la température) soit des débits nodaux de fluide (ou de chaleur). Par défaut, une frontière sans imposition particulière est imperméable. Nous utilisons également des éléments linéiques (LICHT) et surfacique (SUCHT) afin d'imposer des flux d'écoulement ou de chaleur, le long d'un contour ou sur une surface.

Dans les problèmes thermiques, il est également possible de modéliser les échanges convectifs entre une paroi et le milieu extérieur à l'aide d'un élément spécifique (CONRA). Cet élément utilise quatre nœuds (figure 5.15) : les trois premiers correspondent aux nœuds de la paroi et le quatrième permet la définition de la température extérieure. Le flux thermique est défini par la relation suivante:

$$f_T^{Conv} = h_{Conv} \cdot (T^{ext} - T) \quad (5.108)$$

où  $h_{Conv}$  est le coefficient d'échange convectif,  $T^{ext}$  est la température extérieure et  $T$  est la température au point d'intégration.

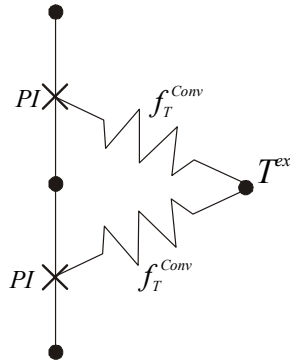


Figure 5.15 : Elément de convection CONRA

Avec un modèle d'écoulement biphasique, de nouvelles conditions limites apparaissent en relation avec des conditions variables de saturation. Dans le cas d'un barrage en terre par exemple, l'eau ruisselle sur le parement aval uniquement si ce dernier est saturé en eau. Dans un puits de réservoir pétrolier, l'huile est le fluide principalement produit. Toutefois, suite à des injections d'eau, il se peut que de l'eau atteigne le puits. Dans ces deux exemples, nous observons un contour, initialement imperméable à un fluide, qui devient perméable suite à des variations de conditions de saturation.

Une première manière de modéliser cette condition est d'utiliser l'élément FMILC qui permet de définir un flux de sortie nul si la pression est inférieure à une valeur pivot et non-nul dans le cas contraire (figure 5.16). La situation idéale correspond à la situation suivante :

$$\begin{aligned}
q &= 0 \text{ si } p < p^{ext} \\
q &\neq 0 \text{ si } p = p^{ext} \\
p &> p^{ext} : \text{interdit}
\end{aligned}
\tag{5.109}$$

Cette situation idéale est toutefois très difficile à réaliser numériquement. La solution adoptée ici consiste à pénaliser la relation (5.109) qui devient alors :

$$\begin{aligned}
q &= 0 \text{ si } p \leq p^{ext} \\
q &= K^{num} \cdot (p^{ext} - p) \text{ si } p > p^{ext}
\end{aligned}
\tag{5.110}$$

où  $p^{ext}$  est la pression extérieure (ou de puits),  $p$  est la pression au point d'intégration et  $K^{num}$  est une constante numérique quantifiant les échanges avec le milieu extérieur.

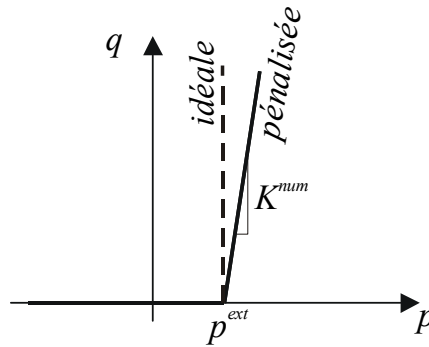


Figure 5.16 : Loi de transfert de l'élément FMILC

Cet élément peut également servir à limiter les variations de pression en un point. La détermination du paramètre de pénalisation  $K^{num}$  est malheureusement délicate.

Au niveau d'un puits de production de réservoirs pétroliers, le contrôle peut s'effectuer en pression, en débit ou les deux à la fois. La modélisation du contrôle du puits à un débit maximum n'est pas possible avec l'élément FMILC car on contrôle uniquement les pressions. En conséquence, l'élément WEPRO a été développé ; les relations suivantes proviennent du programme ECLIPSE [ECLIPSE, 2000]. Des flux d'eau et d'huile sont calculés en fonction de la différence de pression entre le puits et le réservoir :

$$f_w = T^{well} \cdot \frac{k_{rw}}{\mu_w} (p_w - p_{well}) \tag{5.111}$$

$$f_o = T^{well} \cdot \frac{k_{ro}}{\mu_o} (p_o - p_{well}) \tag{5.112}$$

où  $k_{rw}$  et  $k_{ro}$  sont les perméabilités relatives à l'eau et à l'huile,  $p_w$  et  $p_o$  sont les pressions d'eau et d'huile dans le réservoir,  $p_{well}$  est la pression de puits et  $T^{well}$  est une transmissivité qui dépend de la perméabilité et des effets de peau au puits.

Lorsque le réservoir est saturé en huile, la perméabilité à l'eau est nulle et le puits ne produit que de l'huile. Dans des cas intermédiaires, lorsque les perméabilités relatives aux deux fluides sont non-nulles, le puits produit simultanément les deux fluides. Au niveau de l'élément, le flux d'eau (attaché au degré de liberté eau de la roche) et le flux d'huile (attaché au degré de liberté huile de la roche) sont produits au même degré de liberté au niveau du nœud de puits (figure 5.17). Ainsi, un débit imposé en ce nœud peut selon les cas représenter un débit d'eau, d'huile ou des deux à la fois.

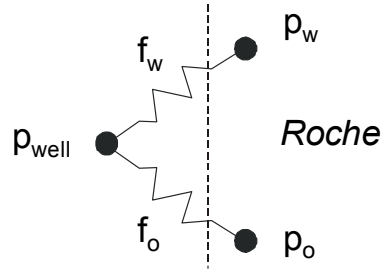


Figure 5.17 : Élément de puits WEPRO

Au puits d'injection d'eau, le flux d'eau est proportionnel à la somme des perméabilité relative des deux fluides :

$$f_w = T^{well} \left( \frac{k_{rw}}{\mu_w} + \frac{k_{ro}}{\mu_o} \right) (p_w - p_{well}) \quad (5.113)$$

Il est ainsi possible de modéliser les conditions limites aux puits de production et d'injection d'un réservoir.

Dans un modèle multiphasique anisotherme avec changement de phase, chaque phase fluide est composée de plusieurs espèces chimiques. Dans ce cas, nous avons fait le choix de grouper les flux d'eau liquide et de vapeur et de les relier au degré de liberté 'pression d'eau' (DDL 3). Les flux d'air sec et d'air dissous sont reliés au degré de liberté 'pression de gaz' (DDL 4), qui correspond à la somme de la pression d'air sec et de vapeur.

Il faut remarquer qu'imposer un flux sur le troisième degré de liberté revient à imposer un flux total d'eau, résultant de la somme des flux d'eau liquide et de vapeur d'eau. Il est donc impossible d'imposer un flux d'eau liquide uniquement. De manière similaire, il est impossible d'imposer un flux gazeux (air sec + vapeur d'eau) mais uniquement un flux global d'air sec et d'air dissous. Ce problème est une conséquence directe de nos choix de formulation.

## 6. CONCLUSIONS

Dans les chapitres précédents, nous avons décrit la physique des phénomènes que nous voulons étudier. Nous avons construit des modèles et nous les avons introduits

dans le code d'éléments finis LAGAMINE. Cela a demandé le développement de certains outils numériques que nous avons décrits dans ce chapitre.

L'élément fini MWAT est un élément couplé à cinq degrés de liberté (coordonnées spatiales, pression d'eau, pression de gaz et température) qui permet d'étudier des problèmes thermo-hydro-mécaniques couplés. Nous avons choisi une approche monolithique et nous avons calculé avec soin l'ensemble des termes de couplages de la matrice tangente afin d'obtenir une convergence quadratique.

De plus, le modèle de comportement mécanique correspond à une surface de plasticité composée de trois mécanismes ; elle présente dès lors des coins et arêtes où la normale n'est plus unique. En conséquence, l'intégration de cette loi est plus complexe, nous avons utilisé une méthode proposée par Simo & Hughes (1998) afin de régler ce problème.

Enfin, pour modéliser les conditions aux limites en saturation partielle, nous avons développé des éléments spécifiques permettant un écoulement biphasique couplé aux frontières d'un modèle. Ces éléments sont plus particulièrement dédiés aux problèmes d'écoulement aux puits d'un réservoir pétrolier.

Nous pouvons passer à présent à la validation des modèles, suivie d'exemples d'application.

## **CHAPITRE VI**

### **Validation des modèles**





## CHAPITRE VI

### VALIDATION DES MODELES

#### 1. INTRODUCTION

Le modèle d'écoulement multiphasique anisotherme est très complexe lorsque tous les phénomènes sont pris en compte. Il est donc particulièrement nécessaire de valider avec soin cet outil avant de l'utiliser pour des applications. Pour ce faire, nous allons comparer la réponse de notre modèle pour des cas limites, pour lesquels il existe une solution analytique ou une réponse numérique déjà publiée. Cela permet également de mieux comprendre comment les effets de couplages se manifestent.

Ces simulations ont été effectuées dans le cadre de notre participation au projet européen CATSIUS Clay et au réseau Alert Géomatériaux. CATSIUS Clay (acronyme de Calculation and Testing of Behaviour of Unsaturated Clay) est un projet européen coordonné par le professeur E. ALONSO (Espagne). Ses objectifs sont les suivants :

- Evaluer la précision et la fiabilité des prédictions numériques des participants.
- Rendre les codes des participants capables de modéliser les comportements thermo - hydro - mécaniques d'une barrière argileuse non-saturée.
- Evaluer les capacités des laboratoires à déterminer les paramètres des modèles thermo - hydro - mécaniques implantés dans les logiciels.

Les différents participants à ce projet sont :

- Agence Nationale pour la gestion des Déchets Radioactifs EPIC (ANDRA, France)
- Clay Technology Lund AB (Clay Technology, Suède)
- Istituto Sperimentale Modelli e Strutture S.p.A (ISMES, Italie)
- Centre d'Etude de l'énergie Nucléaire (CEN.SCK, Belgique)
- Universitat Politècnica de Catalunya (UPC, Espagne)
- Université de Liège (ULg, Belgique)
- University of Wales College of Cardiff (UWCC, Grande-Bretagne)

La loi de comportement de la craie non-saturée est un modèle complexe à quatre surfaces de plasticité. Nous allons utiliser les résultats expérimentaux obtenus dans le cadre du projet européen PASACHALK afin de valider notre modèle. Les partenaires dans ce projet sont les suivants :

- Université de Liège
- Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (CERMES, France)

- TotalFinaElf Exploration Norway (AS, Norvège)

La coordination de ce projet est effectuée par C. SCHROEDER (ULg).

## 2. MODELE D'ECOULEMENT NON-SATURE ANISOTHERME

Nous procédons à la validation d'une manière identique au développement du modèle : nous traitons des cas simples en ajoutant progressivement de la complexité.

### 2.1. Ecoulement saturé anisotherme

Une première étape dans la vérification de notre modèle consiste à étudier les écoulements saturés anisothermes. Dans un centre de stockage de déchets souterrain, la formation géologique hôte entourant les déchets peut généralement être considérée comme saturée et est soumise à des variations de température. Cette hypothèse sur l'état de saturation est une simplification car on peut supposer que la réalisation des galeries perturbe l'état hydrique de la formation. Toutefois, cette simplification permet la réalisation de premières études sur le comportement à long terme de ce genre d'ouvrage.

Le cas que nous allons étudier à présent a été proposé par HODGKINSON (1980) et a constitué un exercice de vérification dans le cadre du projet CATSIUS Clay [ALONSO *et al.*, 1999a]. Un centre de stockage à plusieurs niveaux est représenté par une sphère chauffante dont l'énergie dissipée décroît en fonction du temps afin de modéliser l'activité décroissante des déchets nucléaires. Le milieu est considéré comme infini et, partant d'une situation initiale à l'équilibre, l'étude porte sur les mouvements d'eau qui vont être provoqués par le dégagement de chaleur. La connaissance de ces flux d'eau est importante car, si des radionucléides sont libérés par les fûts de déchets, elle permet de déterminer le temps mis par ces éléments pour atteindre une zone plus sensible.

Ce premier exemple permet donc de bien mettre en évidence les couplages possibles entre écoulement d'eau et transfert de chaleur, sans considérer toutefois la vaporisation de l'eau.

#### 2.1.1. DESCRIPTION DU PROBLEME

Une sphère chauffante dégage de la chaleur dans un milieu isotrope rigide de dimensions infinies. Les caractéristiques de la sphère sont son rayon  $A$  et la chaleur  $Q(t)$  qu'elle produit. Elle est constituée du même matériau que la couche géologique qui l'entoure. Cette énergie émise décroît dans le temps au fur et à mesure que l'activité des déchets diminue ; elle est supposée être répartie uniformément dans la sphère. La charge  $Q(t)$  est définie par l'expression suivante :

$$Q(t) = \frac{3Q_0}{4\pi A^3} e^{-\lambda^c t} \quad [\text{W/m}^3] \quad (6.1)$$

où  $Q_0$  est l'énergie thermique initiale de la sphère,  $\lambda^c$  est la constante de décroissance et  $t$  est le temps.

Le milieu est constitué de grains solides et d'une phase liquide (eau) saturant les pores. Les propriétés de l'eau sont supposées constantes : viscosité dynamique  $\mu_w$ , conductibilité thermique  $\Gamma_w$  et capacité thermique  $c_{p,w}$ . Seule la masse volumique de l'eau dépend de la température :

$$\rho_w(T) = \rho_{w0} \cdot [1 - \alpha_w^T \cdot (T - T_0)] \quad (6.2)$$

où  $\rho_{w0}$  est la masse volumique à la température  $T_0$  et  $\alpha_w^T$  est le coefficient d'expansion thermique de l'eau.

Les propriétés de la phase solide sont constantes : masse volumique des grains  $\rho_s$ , conductibilité thermique  $\Gamma_s$  et capacité thermique  $c_{p,s}$ .

Le milieu possède une perméabilité intrinsèque  $k_{int}$  constante et une conductivité thermique exprimée par la formule suivante :

$$\Gamma_m = n \cdot \Gamma_f + (1 - n) \cdot \Gamma_s \quad (6.3)$$

où  $n$  est la porosité du milieu.

Deux valeurs de porosité sont envisagées et correspondent à un milieu de très faible porosité (cas A) et de forte porosité (cas B).

L'ensemble des données du problème est repris dans le tableau 6.1.

Les conditions initiales considérées correspondent à un état en équilibre thermique et hydraulique. La température initiale  $T_0$  est uniforme et la pression d'eau est hydrostatique. Nous analyserons les variations de température et de pression et il n'est donc pas nécessaire de définir les conditions initiales plus en détails. Aux limites infinies du milieu, on suppose qu'il n'y a pas de variation de pression ni de température.

Hodgkinson (1980) a trouvé une solution analytique au problème proposé sous réserve que les hypothèses suivantes soient vérifiées : l'approximation de Boussinesq est valable et la convection de chaleur par l'eau est négligeable. L'approximation de Boussinesq consiste à tenir compte des variations de masse volumique de fluide uniquement dans l'équation de Darcy. Il n'y a donc pas d'emménagement possible.

Ces hypothèses sont valables si la perméabilité du milieu est très faible et si la porosité n'est pas trop importante. En effet, dans un sol peu perméable, les écoulements de fluide sont très lents et la quantité de chaleur transportée par le fluide est donc faible en comparaison au transfert par conduction.

Paramètres	Symbole	Valeur	Unité
Rayon de la sphère	$A$	250	m
Energie thermique initiale	$Q_o$	$1.00 \cdot 10^7$	W
Constante de décroissance	$\lambda^c$	$7.3215 \cdot 10^{-10}$	$s^{-1}$
Masse volumique des grains	$\rho_s$	$2.60 \cdot 10^3$	$kg.m^{-3}$
Conductivité thermique des grains	$\Gamma_s$	2,51	$W.m^{-1}.^{\circ}K^{-1}$
Chaleur spécifique des grains	$c_{p,s}$	$8.79 \cdot 10^2$	$J.kg^{-1}.^{\circ}K^{-1}$
Masse volumique initiale de l'eau	$\rho_{w0}$	$9.92 \cdot 10^2$	$kg.m^{-3}$
Coefficient de dilatation de l'eau	$\alpha_w^T$	$3.85 \cdot 10^{-4}$	$^{\circ}K^{-1}$
Viscosité dynamique de l'eau	$\mu_w$	$6.53 \cdot 10^{-4}$	Pa.s
Conductivité thermique de l'eau	$\Gamma_w$	$6.23 \cdot 10^{-1}$	$W.m^{-1}.^{\circ}K^{-1}$
Chaleur spécifique de l'eau	$c_{p,w}$	$4.18 \cdot 10^3$	$J.kg^{-1}.^{\circ}K^{-1}$
Perméabilité intrinsèque du milieu	$k_{int}$	$1.00 \cdot 10^{-16}$	$m^2$
Porosité du milieu (cas A)	$n$	$1.00 \cdot 10^{-4}$	-
(cas B)	$n$	$1.00 \cdot 10^{-1}$	-
Accélération de la gravité	$g$	9.81	$m.s^{-2}$

Tableau 6.1 : Données du milieu saturé anisotherme

Dans notre problème, seul le cas A répond à ces conditions et nous pouvons donc comparer la solution analytique à la réponse numérique fournie par le modèle pour le milieu à faible porosité. Dans le cas B, cette comparaison n'est plus possible. La solution proposée par Hodgkinson est présentée dans [ALONSO *et al.*, 1999a].

### 2.1.2. PREDICTIONS DU MODELE

Les lois utilisées pour résoudre ce problème proviennent du modèle d'écoulement saturé anisotherme développé au chapitre II, paragraphe 3. Nous rappelons ci-après les principales équations utilisées. L'équation de bilan en eau s'écrit :

$$\frac{\partial \rho_w \cdot n}{\partial t} + \text{div}(\rho_w \cdot \underline{q}_w) = 0 \quad (6.4)$$

où  $\underline{q}_w$  est le flux de Darcy.

L'équation de conservation de l'énergie du système peut s'écrire en terme d'enthalpie :

$$\frac{\partial [n \cdot \rho_w \cdot c_{p,w} + (1-n) \cdot \rho_s \cdot c_{p,s}] \cdot (T - T_0)}{\partial t} + \text{div}(\underline{V}_T) - Q_T = 0 \quad (6.5)$$

où  $\underline{V}_T$  est le transfert de chaleur par conduction et par convection.

$$\underline{V}_T = \underbrace{-(n \cdot \Gamma_w + (1-n) \cdot \Gamma_s) \cdot \nabla T}_{\text{conduction}} + \underbrace{(\rho_w \cdot c_{p,w} \cdot \underline{q}_w) \cdot (T - T_0)}_{\text{convection}} \quad (6.6)$$

Nous pouvons utiliser ce modèle avec les éléments finis couplés MWAT dont les degrés de liberté sont les coordonnées spatiales, la pression d'eau, la pression d'air et la température. Dans le cas qui nous occupe d'un milieu rigide saturé, seule la pression d'eau et la température sont utilisées ; les autres degrés de liberté sont fixés et n'interviennent pas dans le calcul.

Vu la symétrie du problème, nous pouvons l'étudier en 2D axi-symétrique. Le domaine étant infini, les limites de notre modèle éléments finis doivent être repoussées suffisamment loin de la sphère chauffante de manière à ne pas influencer la solution. Nous avons choisi un modèle d'un rayon de 3000 m. La pression d'eau et la température sont constantes au périmètre du domaine.

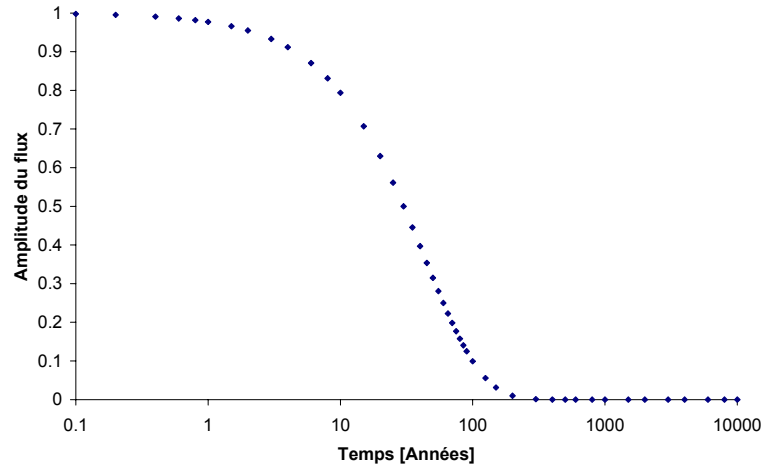


Figure 6.1 : Evolution temporelle du flux (normalisé) émis par la sphère

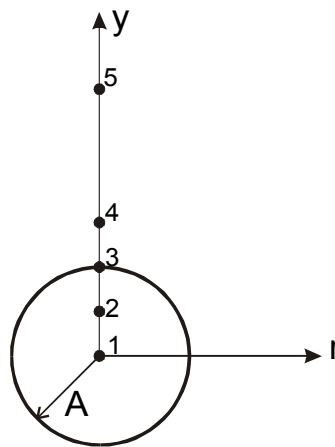
Le maillage est composé de 3361 nœuds, 18 éléments MWAT à 6 nœuds pour la zone correspondant à la sphère et 1062 éléments MWAT à 8 nœuds pour le reste du maillage. Le chauffage est simulé par 18 éléments SUCHT. Les éléments ont une

longueur de 50 m dans la direction radiale et une ouverture de  $10^\circ$  dans la direction circonférentielle.

La figure 6.1 représente l'évolution de la chaleur émise par la sphère en fonction des pas de temps utilisés pour la modélisation.

#### 2.1.2.1. Cas A : Faible porosité

Afin d'analyser les résultats du modèle, nous donnons les variations de pression et de température prédites aux points définis à la figure 6.2.



*Figure 6.2 : Définition des points caractéristiques où sont donnés les résultats du modèle*

A la figure 6.3-a-b, les courbes de variations de pression et de température sont données pour des points compris entre  $y_1 = 0$  m et  $y_5 = 750$  m, après des temps de 50, 100, 500 et 1000 années. L'augmentation de température se produit essentiellement sur les 250 premiers mètres correspondant à la position de la sphère. A 750 m du centre de la sphère, l'influence de cette dernière est quasi nulle. L'augmentation est la plus importante après 100 ans, ensuite la température diminue ce qui correspond à la diminution de l'énergie produite par la sphère. L'augmentation de pression est maximum à une distance d'environ 250 m du centre de la sphère ; au centre, la variation de pression est nulle. L'influence du chauffage se fait sentir sur une distance plus importante car à 750 m la pression est encore modifiée après 1000 ans.

Les figures 6.3-c-d montrent l'évolution temporelle des variations de pression et température aux points  $y_1 = 0$  m,  $y_2 = 125$  m,  $y_3 = 250$  m et  $y_4 = 375$  m. On observe que la température maximale atteinte dépend de la distance au centre de la sphère : plus le point considéré est éloigné, plus la température maximale est faible. La variation de pression est nulle au centre de la sphère et est maximum à 250 m. Le pic de pression apparaît après 100 ans environ. Après 10000 ans, la situation initiale est rétablie.

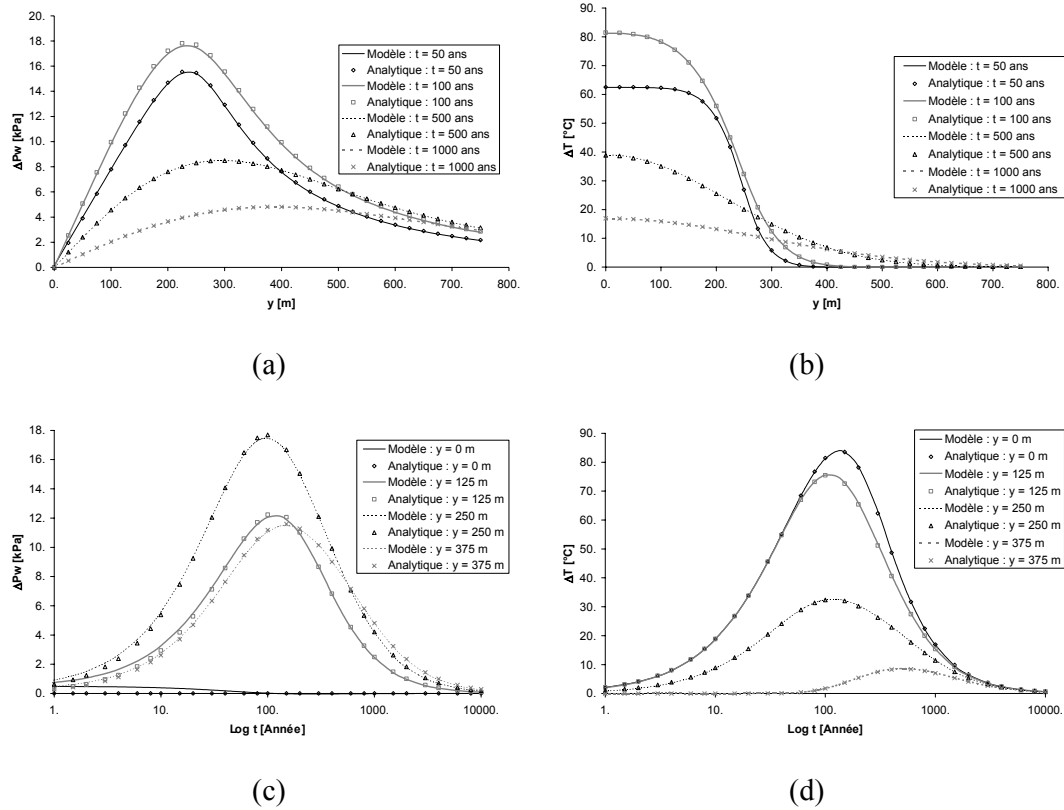


Figure 6.3 : Prédictions du modèle et réponses analytiques dans le cas A (faible porosité)

La comparaison entre le modèle et la solution analytique de référence montre que les réponses sont tout à fait semblables. Cela signifie que les hypothèses prises par Hodgkinson sont valables. En effet, des calculs numériques supplémentaires réalisés avec notre modèle sans tenir compte de la convection fournissent des résultats similaires et montrent que la convection n'influence pas la réponse. Celle-ci pouvait donc bien être négligée par Hodgkinson.

#### 2.1.2.2. Cas B : Forte porosité

Dans ce milieu à forte porosité, l'approximation de Boussinesq n'est plus valable. Nous ne pourrions donc plus comparer les deux solutions. La figure 6.4-b-d montre les évolutions temporelles et spatiales de la température. En fait, les températures sont similaires à celles du cas précédent et les mêmes observations peuvent être faites. Cela confirme que le transfert de chaleur est essentiellement conductif et que la convection est négligeable.

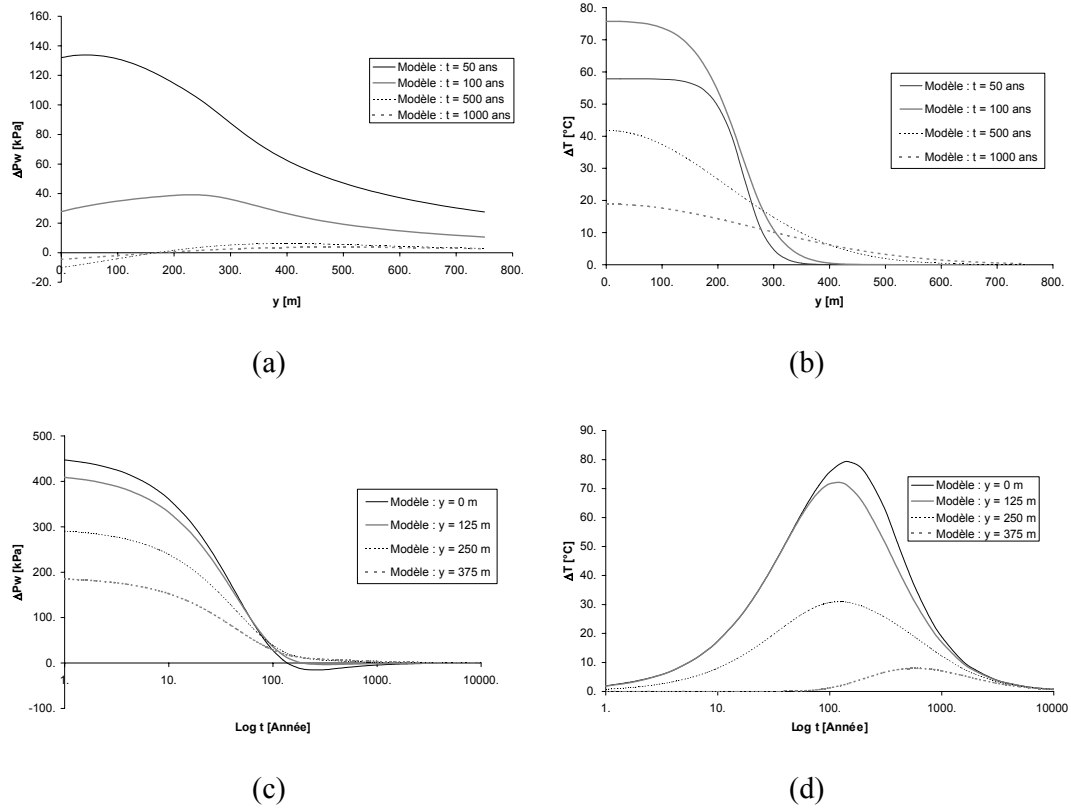


Figure 6.4 : Prédictions du modèle et réponses analytiques dans le cas B (forte porosité)

Les variations de pression sont par contre beaucoup plus importantes que celles du cas précédent (figures 6.4-a et c). L'augmentation de pression est la plus importante (450 kPa) au début du chauffage près du centre de la sphère. Ensuite, une diminution de pression est observée. Nos résultats sont en parfait accord avec ceux obtenus par nos partenaires dans le projet [ALONSO *et al.*, 1999a].

### 2.1.2.3. Conclusions

Le transfert de chaleur dans les deux cas est essentiellement lié à la conduction. La convection est négligeable, il en résulte que la température dépend uniquement de la distance au centre de la sphère et que le couplage hydro-thermique se résume ici à un couplage de la thermique sur l'écoulement du fluide.

La distribution des pressions dépend par contre de la valeur de la porosité. Dans le cas A, le terme d'emménagement de l'équation (6.4) est négligeable et l'approximation de Boussinesq est valable. Il est alors possible de montrer que la pression est anti-symétrique par rapport à l'axe horizontal [ALONSO *et al.*, 1999a] ce qui est par ailleurs confirmé par la figure 6.5-a. Une distribution de pression typique d'une cellule de convection apparaît ; au-dessus et en dessous de l'axe horizontal, on observe



respectivement une surpression et une dépression. Ceci peut s'expliquer intuitivement [ALONSO *et al.*, 1999a] : à cause de l'échauffement, l'eau a tendance à s'écouler vers le haut et la masse d'eau devant être conservée, des flux vers le bas apparaissent là où l'élévation de température est moins importante (en dehors de la sphère).

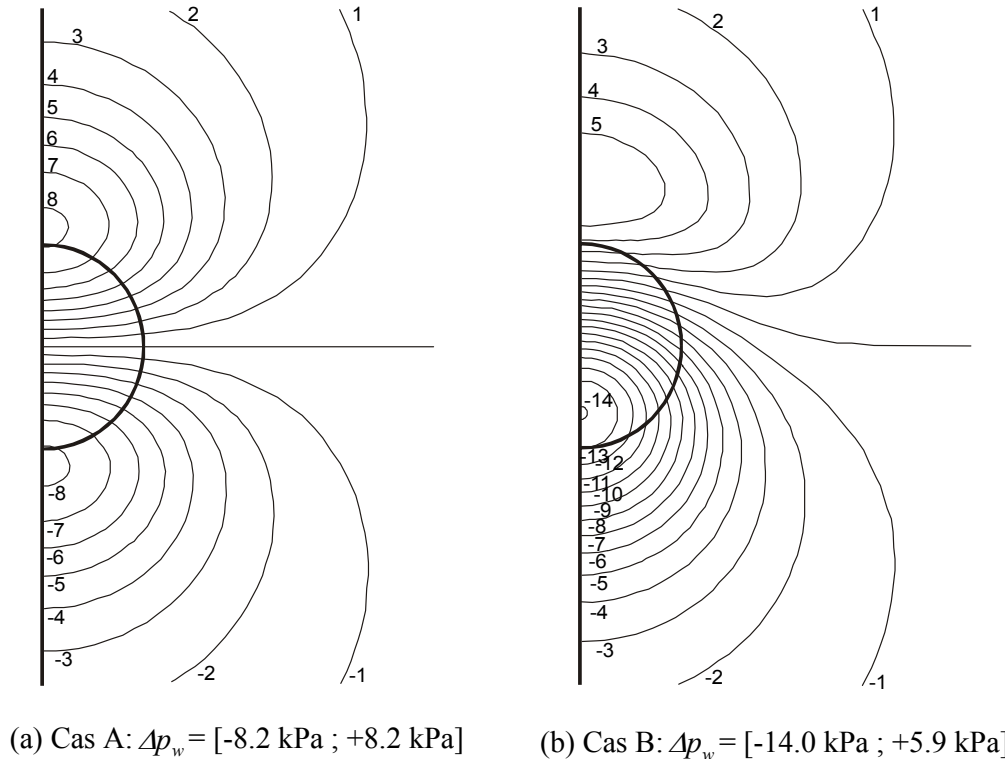


Figure 6.5 : Variation de la pression après 500 ans.

Dans le cas B, le terme d'emmagasinement est plus important et la variation dans celui-ci de la masse volumique de l'eau ne peut plus être négligé ; l'hypothèse de Boussinesq n'est plus valable. Une distribution de pression typique d'une cellule de convection existe également (figure 6.5-b) mais l'axe de la cellule ne correspond plus à l'axe horizontal. Cela explique pourquoi la pression au centre de la sphère augmente dans un premier temps puis diminue ensuite. En effet, ce point se trouve alors dans la partie dépressionnaire de la cellule de convection.

## 2.2. Écoulement non-saturé isotherme

Les couplages dans un problème thermo-hydro-mécanique sont nombreux ; nous allons à présent étudier les écoulements multiphasiques au supposant pour l'instant qu'il n'y a pas d'échanges thermiques. De nombreux modèles existent afin de traiter les transferts hydriques en milieux non-saturés. Toutefois, le passage d'un état non-saturé à saturé constitue une difficulté importante pour les modèles numériques.

Dans le cadre du programme 4 : Thermo-hydrromechanical coupling du réseau ALERT Géomatériaux, un benchmark a été proposé, relatif aux écoulements multiphasiques dans un milieu poreux [GAWIN *et al.*, 1996b]. Ce calcul est basé sur des expérimentations réalisées par LIAKOPOULOS (1965) qui a étudié le drainage par gravité d'une colonne de sable. Les résultats des différents participants au benchmark sont présentés par [JOMMI *et al.*, 1997].

### 2.2.1. DESCRIPTION DU PROBLEME

Une colonne en Perspex d'une hauteur de 1 mètre est remplie de sable Del Monte. Avant le début de l'expérimentation, un flux d'eau (à pression atmosphérique) est imposé à la partie supérieure de la colonne qui est drainée à sa base par une pierre poreuse. L'injection continue jusqu'à l'obtention d'un flux uniforme. L'essai commence par l'arrêt de l'arrivée d'eau et on mesure alors l'évolution des pressions d'eau lors du drainage de la colonne.

Pour ce benchmark, le problème est quelque peu modifié : la distribution initiale des pressions est hydrostatique, la pression au sommet de la colonne est égale à la pression atmosphérique. L'essai est simulé en amenant à la pression atmosphérique la pression d'eau à la base de la colonne. La pression d'air est initialement uniformément égale à 101325 Pa.

Les surfaces latérales de la colonne sont imperméables aux fluides. L'eau ne peut sortir qu'à la base de la colonne. La pression d'air est supposée fixée aux deux extrémités du domaine. Aucune charge autre que la gravité n'est appliquée au système. La colonne de Perspex est supposée indéformable ; les déformations du sol sont donc uniquement verticales.

Nous supposons que l'eau est compressible mais que sa viscosité est constante. L'air se comporte comme un gaz parfait, sa viscosité est constante.

Les caractéristiques mécaniques du sable n'ont pas été déterminées ; le matériau est supposé élastique et nous utiliserons les modules élastiques proposés par GAWIN (1996a).

La courbe de rétention et les courbes de perméabilité relative à l'eau et à l'air sont données par les relations suivantes :

$$S_{r,w} = 1 - 1,9722 \cdot 10^{-11} \cdot s^{2,4279} \quad (6.7)$$

où  $s$  est la succion définie par  $p_a - p_w$  et est exprimée en Pascal.

$$k_{r,w} = 1 - 2,207 \cdot (1 - S_{r,w})^{1,0121} \quad (6.8)$$

$$k_{r,a} = (1 - S_e)^2 \cdot (1 - S_e^{5/3}) \text{ avec } S_e = \frac{S_{r,w} - 0,2}{1 - 0,2} \quad (6.9)$$

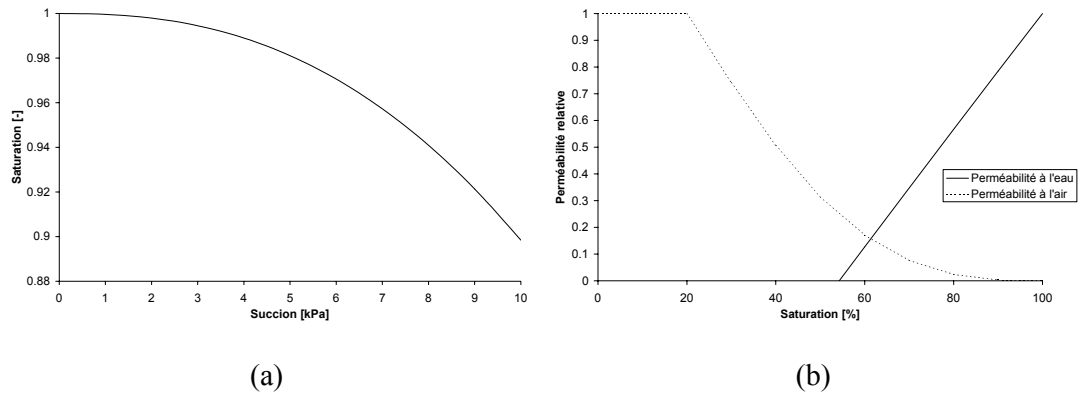


Figure 6.6 : Courbe de rétention (a) et courbes de perméabilité relative (b) du sable Del Monte

L'ensemble des données du problème sont synthétisées dans le tableau 6.2.

Paramètres	Symbole	Valeur	Unité
Masse volumique des grains	$\rho_s$	$2.00 \cdot 10^3$	Kg.m <sup>-3</sup>
Masse volumique de l'eau	$\rho_w$	$1.00 \cdot 10^3$	kg.m <sup>-3</sup>
Module de compressibilité de l'eau	$\chi_w$	$3 \cdot 10^9$	Pa
Viscosité dynamique de l'eau	$\mu_w$	$1.00 \cdot 10^{-3}$	Pa.s
Masse volumique initiale de l'air	$\rho_{a0}$	1.00	kg.m <sup>-3</sup>
Viscosité dynamique de l'air	$\mu_a$	$1.80 \cdot 10^{-5}$	Pa.s
Perméabilité intrinsèque du milieu	$k_{int}$	$4.51 \cdot 10^{-13}$	m <sup>2</sup>
Porosité du milieu	$n$	$2.975 \cdot 10^{-1}$	-
Module de Young	$E$	$1.3 \cdot 10^6$	Pa
Coefficient de Poisson	$\nu$	0.4	-
Accélération de la gravité	$g$	9.81	m.s <sup>-2</sup>

Tableau 6.2 : Données du milieu non-saturé isotherme

Quatre cas sont étudiés dans le cadre de ce problème : tout d'abord la pression d'air est considérée comme constante et le sol est indéformable (noté 1PH\_ND) ou déformable (noté 1PH\_D). Ensuite, les mouvements de la phase gazeuse seront étudiés pour un sol rigide (noté 2PH\_ND) ou déformable (noté 2PH\_D).

Le calcul mécanique est effectué avec un modèle élastique linéaire en utilisant les contraintes effectives de Bishop (chapitre III, paragraphe 3).

$$\underline{\sigma}^{tot} = \underline{\sigma}' + (S_{r,w} \cdot p_w + (1 - S_{r,w}) \cdot p_a) \underline{I} \quad (6.10)$$

où  $\underline{\sigma}^{tot}$  est la contrainte totale,  $\underline{\sigma}'$  est la contrainte effective de Bishop et  $\underline{I}$  est la matrice identité.

La condition initiale des pressions correspond à un état saturé en eau. Dans ce cas, la contrainte effective de Bishop est équivalente à la contrainte effective de Terzaghi. La contrainte initiale est due à la gravité, et peut s'exprimer selon:

$$\underline{\sigma}'_{ini}(y) = \underline{\sigma}'_{ini}(1) + (\rho_{app} - \rho_w) \cdot g \cdot (1 - y) \quad (y \text{ en m}) \quad (6.11)$$

où  $\underline{\sigma}'_{ini}(1)$  est la contrainte effective au sommet de la colonne ( $y = 1$  m) qui est nulle et  $\rho_{app}$  est la masse volumique apparente du sol saturé d'eau qui dans notre cas vaut:

$$\rho_{app} = (1 - n) \cdot \rho_s + n \cdot \rho_w = 1702.5 \text{ kg/m}^3 \quad (6.12)$$

## 2.2.2. PREDICTIONS DU MODELE

Pour traiter ce problème, nous allons utiliser le modèle développé dans le chapitre II, paragraphe 4. Nous rappelons ci-après les équations de bilan pour les fluides présents :

$$\frac{\partial n \cdot S_{r,w} \cdot \rho_w}{\partial t} + \text{div}(\rho_w \cdot \underline{q}_w) - Q_w = 0 \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial n \cdot S_{r,a} \cdot \rho_a}{\partial t} + \text{div}(\rho_a \cdot \underline{q}_a) - Q_a = 0 \quad (6.14)$$

$\underline{q}_w$  et  $\underline{q}_a$  représentent les flux de Darcy de l'eau et de l'air dont la formulation s'écrit :

$$\underline{q}_\alpha = - \frac{k_{int}^{sat} \cdot k_{r,\alpha}}{\mu_\alpha} \cdot [\underline{grad}(p_\alpha) + \rho_\alpha \cdot g \cdot \underline{grad}(y)] \quad (6.15)$$

où  $k_{int}^{sat}$  est la perméabilité intrinsèque et  $k_{r,\alpha}$  est la perméabilité relative.

Nous pouvons utiliser ce modèle avec les éléments finis couplés MWAT dont les degrés de liberté sont les coordonnées spatiales, la pression d'eau, la pression d'air et la température. Dans le cas qui nous occupe d'un milieu isotherme, seule la température est fixée ; les deux coordonnées, les pressions d'eau et d'air seront utilisées de manière à permettre un couplage complet entre les écoulements multiphasiques et les déformations mécaniques.

Le problème traité présente une difficulté numérique importante : pour un état saturé en eau, l'équation de bilan d'air devient évanescence car il n'y a plus d'air dans le système et la perméabilité à l'air est nulle. Il s'ensuit une impossibilité de résoudre numériquement ce problème. Deux solutions sont possibles afin de surmonter cette difficulté. La première consiste à définir une perméabilité à l'air minimale, de manière à conserver un faible flux d'air même pour un état saturé. Ce transfert d'air n'a pas de signification physique et la perméabilité minimale doit être choisie la plus faible possible sans pour autant compromettre la stabilité du calcul.

La seconde solution proposée par VAUNAT (1997) réside dans la prise en compte de l'air dissous dans l'eau. Le volume d'air dissous dans un liquide en contact avec l'air est donné par la loi de Henry, qui s'écrit dans le cas qui nous intéresse :

$$\theta_{a-d} = V_{a-d} = H.n.S_{r,w} \quad (6.16)$$

où  $H$  est la constante d'Henry.

L'équation de bilan d'air peut être adaptée et s'écrit en négligeant la diffusion d'air dissous dans l'eau (voir Chapitre II, paragraphe 5, équation 2.133) :

$$\frac{\partial n.S_{r,a}.\rho_a}{\partial t} + \frac{\partial H.n.S_{r,w}.\rho_a}{\partial t} + \text{div}(\rho_a.\underline{q}_a) + \text{div}(H\rho_a.\underline{q}_w) = 0 \quad (6.17)$$

où apparaissent les contributions de l'air sec et de l'air dissous.

En conditions saturées, la loi de Henry n'est toutefois plus valide car la phase gazeuse n'existe plus et n'est donc plus en contact avec l'eau. Pour résoudre ce problème, une pression d'air fictive est introduite telle que la relation entre la masse d'air dissous et le volume d'eau soit identique à la relation utilisée en conditions non-saturées. La pression d'air n'est donc plus une pression de la phase gazeuse mais bien la pression de l'air dissous [VAUNAT *et al.*, 1997]. La transition entre ces deux situations intervient lorsque les pressions d'air sec et d'eau sont égales.

#### 2.2.2.1. Calcul avec une perméabilité minimum

Afin d'éviter les problèmes numériques pour des états saturés, nous introduisons une perméabilité relative minimum. La valeur choisie doit être la plus faible possible, nous avons opté pour une perméabilité minimum  $k_{r,min}$  égale  $10^{-4}$ . L'équation de bilan (6.14) peut alors être utilisée aussi bien en non-saturé qu'en saturé.

Le problème étudié est unidimensionnel mais nous utilisons tout de même des éléments 2D. Le maillage est composé de 103 nœuds et 20 éléments MWAT à 8 nœuds de 5 cm de longueur. Un élément de chargement LICH est également nécessaire afin d'imposer la pression atmosphérique à la face supérieure. En effet, habituellement on utilise des pressions relatives (la pression atmosphérique étant la référence) et la pression est donc nulle sur la face supérieure. Mais dans ce problème, nous utilisons des pressions absolues et il est donc nécessaire d'imposer une contrainte totale de 101325 Pa pour équilibrer la pression de fluide à la partie supérieure.

Les premières simulations réalisées à pression d'air constante (figure 6.7) montrent l'évolution des pressions d'eau qui traduisent bien le drainage de la colonne par la face inférieure. Ces pressions n'évoluent plus après 240 min. La succion a une évolution comparable à celle de la pression d'eau (car la pression d'air est fixée) et la saturation diminue jusqu'à 90,5 % dans la colonne. Après 20 min, la colonne est déjà désaturée ( $S_{r,w} < 1$ ) sur 80 % de la hauteur. Le tassement de la colonne est de 3,5 mm ce qui traduit le couplage du modèle écoulement sur la loi mécanique. Cette déformation du sol entraîne une diminution du volume des pores. C'est pourquoi la pression d'eau est plus importante en régime transitoire dans le modèle couplé par rapport au modèle indéformable.

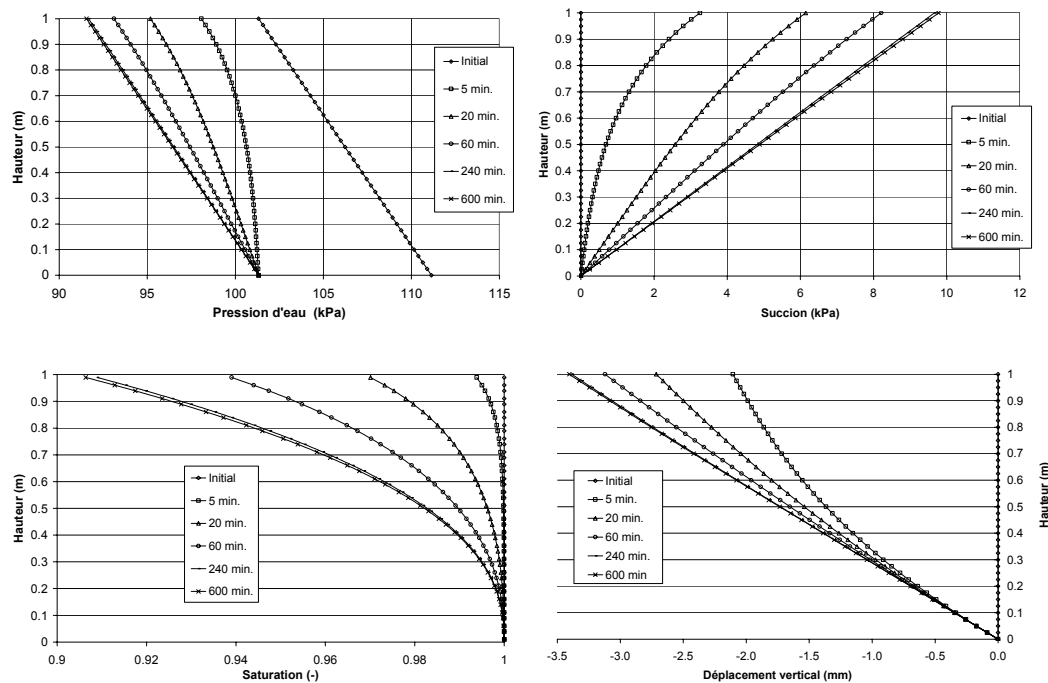


Figure 6.7 : Simulation à pression d'air constante (IPH\_D)

Dans une deuxième série de simulations, le transfert des deux phases a été étudié (figure 6.8). La succion est très différente du cas précédent car la pression d'air varie dans la colonne. Le front de saturation se marque plus clairement mais il n'y a pas de rupture de pente dans la courbe de saturation. On voit que la colonne se désature plus lentement. Dans un premier temps, la pression d'air diminue avec un minimum au niveau du front de saturation ; ensuite la pression d'air tend à reprendre son profil initial. Après 600 min, la pression d'air n'est toujours pas stationnaire. Le déplacement final de la tête de la colonne est identique au cas précédent et des conclusions similaires peuvent être tirées par rapport au couplage hydro-mécanique.

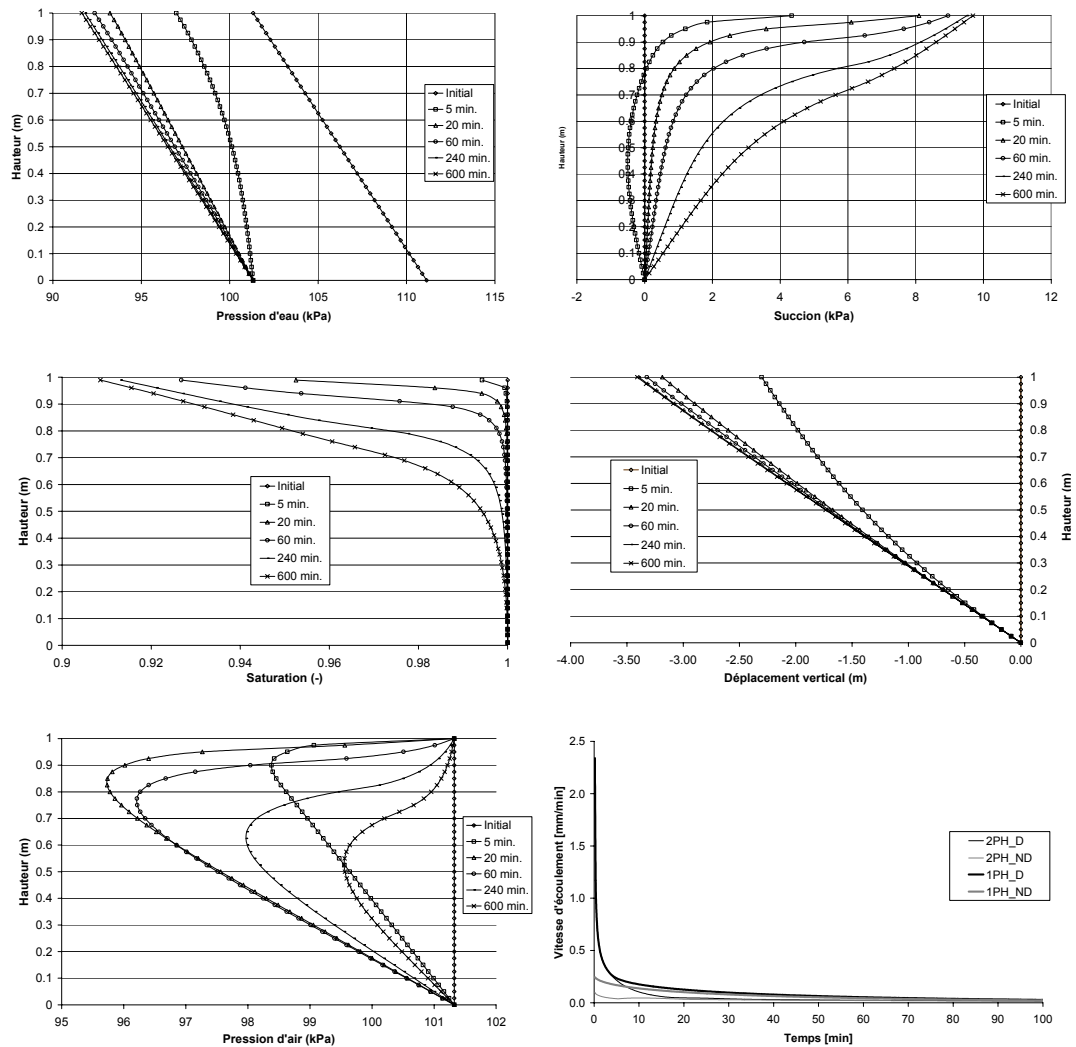


Figure 6.8 : Simulation à pression d'air variable (2PH\_D)

Le drainage de la colonne s'effectue le plus rapidement dans la simulation couplée hydro-mécanique à pression d'air constante. La vidange est plus rapide dans une simulation couplée par rapport au cas d'un sol rigide. Les résultats numériques obtenus sont très similaires à ceux obtenus par les autres participants au benchmark Alert (voir [JOMMI *et al.*, 1997]).

#### 2.2.2.2. Calcul avec l'air dissous

Pour ces simulations, nous avons pris en compte l'air dissous dans la phase liquide et nous avons pu ainsi écrire une équation de bilan d'air en conditions saturées sans utiliser une perméabilité minimum (équation 6.16). Nous avons choisi un coefficient de Henry constant de 2%. Les calculs ont été effectués avec des éléments couplés MWAT à 8 nœuds et 9 points d'intégration.

La figure 6.9 donne les résultats de la simulation d'une colonne déformable avec prise en compte de l'air dissous. Les profils de pressions d'eau sont similaires aux calculs précédents : l'eau est progressivement drainée à sa base (à pression atmosphérique) et tend vers un équilibre hydrostatique.

La pression d'air présente par contre un profil différent : une rupture de pente apparaît au niveau du front de saturation. En zone saturée, la pression d'air est contrôlée par la quantité d'air dissous ; au-dessus du front de saturation, le flux d'air est essentiellement lié au mouvement d'air sec. Ce profil de pression d'air influence la succion et la saturation : un front de saturation apparaît clairement avec une pente infinie dans la courbe de saturation.

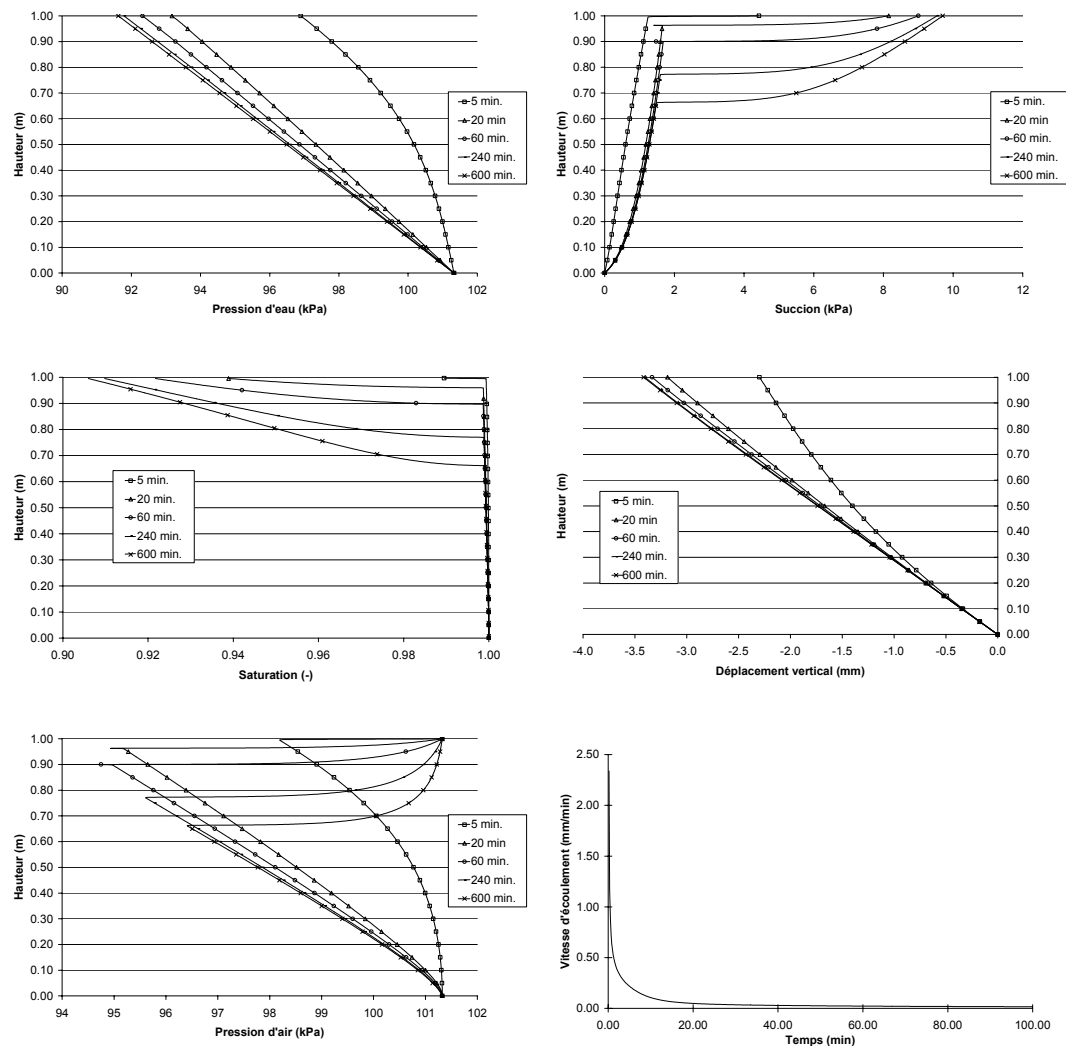


Figure 6.9 : Simulation à pression d'air variable avec air dissous



La déformation finale de la colonne est identique à celle des cas précédents et la vitesse d'écoulement est égale à celle du cas correspondant avec une perméabilité minimum.

Dangla [DANGLA *et al.*, 1998] a réalisé des simulations de ce problème et a donné une justification mathématique de l'existence de ce front. Pour ces calculs, en faisant l'hypothèse d'un milieu indéformable saturé par deux fluides incompressibles, l'équation de conservation de l'air peut être remplacée par l'équation suivante :

$$n \cdot \frac{\partial S_{r,w}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi(S_{r,w})}{\partial z^2} + \frac{\partial f_1(S_{r,w}, t)}{\partial z} \quad (6.18)$$

où  $\varphi(S_{r,w})$  et  $f_1(S_{r,w}, t)$  sont des fonctions définies par les relations suivantes :

$$f_1(S_{r,w}, t) = \frac{k_w \cdot k_a}{k_w + k_a} (\rho_w - \rho_a) - \frac{k_a}{k_w + k_a} \cdot Q(t)$$

$Q(t) = q_w + q_a$  supposé constant sur la colonne

$$\varphi(S_{r,w}) = \int_1^{S_{r,w}} f_2(S_r) \cdot dS_r$$

$$f_2(S_{r,w}) = - \frac{k_w \cdot k_a}{k_w + k_a} \cdot \frac{ds}{dS_{r,w}}.$$

En utilisant cette équation et la théorie des surfaces singulières, il est possible de montrer l'existence d'un front de saturation et d'y montrer la valeur infinie du gradient de saturation. La solution numérique obtenue avec l'air dissous prédit bien la présence de ce front et doit donc être considérée comme la meilleure solution.

### 2.2.2.3. Conclusions

Les simulations à pression d'air constante prédisent la vidange la plus rapide de la colonne. Toutefois, elle ne représente pas bien le front de saturation qui se développe lors du drainage. Pour étudier plus en détails les phénomènes se déroulant près de ce front, il est nécessaire d'utiliser des modèles d'écoulement multiphasique. Pour éviter les problèmes numériques liés à l'équation de bilan d'air en conditions saturées, nous avons utilisé deux techniques : une perméabilité minimum à l'air et la prise en compte de l'air dissous.

Ces deux techniques permettent une meilleure simulation du déplacement du front de saturation mais le modèle avec air dissous permet de mieux s'en approcher (figure 6.10). Malheureusement, les résultats dépendent des valeurs de perméabilité minimum ou de constante de Henry choisies. Il est certain qu'en utilisant une valeur plus faible de  $k_{r,min}$ , nous tendrions vers la solution prédite par les simulations avec air dissous.

Dans notre modèle, le terme d'emménagement de fluides peut être calculé par un schéma tangent ou sécant (voir chapitre V). Pour les simulations à pression d'air constante, les deux schémas fonctionnent et donnent des résultats identiques. Toutefois,

pour les simulations avec écoulement multiphasique, les non-linéarités deviennent trop importantes et seul le schéma sécant assure la convergence du calcul.

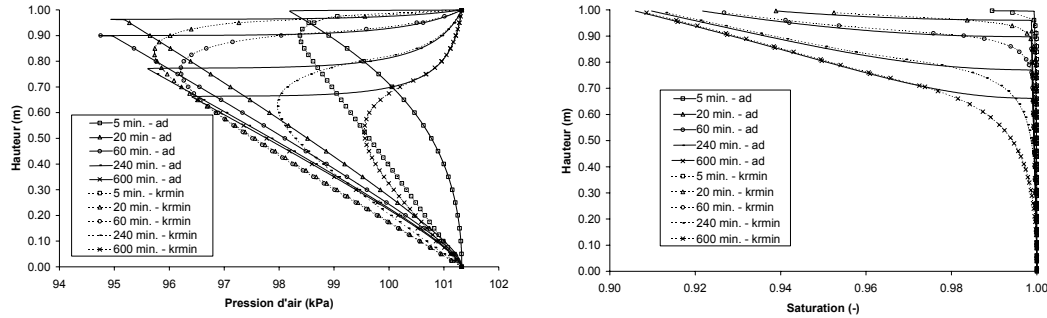


Figure 6.10 : Comparaison entre les simulations avec perméabilité min.(krmin) et air dissous (a-d)

### 2.3. Ecoulement non-saturé anisotherme

A présent, nous allons aborder le problème des écoulements multiphasiques dans un milieu anisotherme. Outre les phénomènes déjà étudiés dans les paragraphes précédents, nous devons maintenant prendre en compte le possible changement d'état de l'eau liquide en vapeur. Les flux d'eau seront fortement influencés par la présence de vapeur dans le milieu mais les échanges thermiques seront également modifiés par la consommation d'énergie nécessaire au changement de phase.

Le problème étudié ci-après a été proposé par Pollock [POLLOCK, 1986] qui a modélisé les transferts de fluides et de chaleur dans une couche non-saturée d'alluvions, dans lesquelles un site de stockage de déchets radioactifs était projeté. Ce site est supposé être suffisamment large, de manière à étudier le problème par un modèle uniaxial. De précédents travaux de Pollock ont indiqué que cette approximation était correcte si les fûts de déchets n'étaient pas trop éloignés.

La chaleur dégagée par les déchets génère de la vapeur d'eau qui influence les échanges de fluides et le transfert de chaleur. Ce problème est donc fortement couplé et sert de validation de notre modèle avec vapeur.

#### 2.3.1. DESCRIPTION DU PROBLEME

Le site de stockage est réalisé dans une couche non-saturée d'alluvions de 500 m de profondeur. Ce site idéalisé a 4 m d'épaisseur et est situé à 100 m de profondeur. L'activité thermique des déchets est modélisée par une source de chaleur décroissante dans le temps. Initialement, le taux de production de chaleur équivaut à  $2,5 \text{ W/m}^3$ . L'évolution temporelle de la charge thermique est donnée à la figure 6.11.

Le milieu est constitué par les grains solides, l'eau liquide, la vapeur d'eau et l'air sec. Les propriétés de l'eau sont supposées constantes : masse volumique, viscosité dynamique et capacité thermique  $c_{p,w}$ .

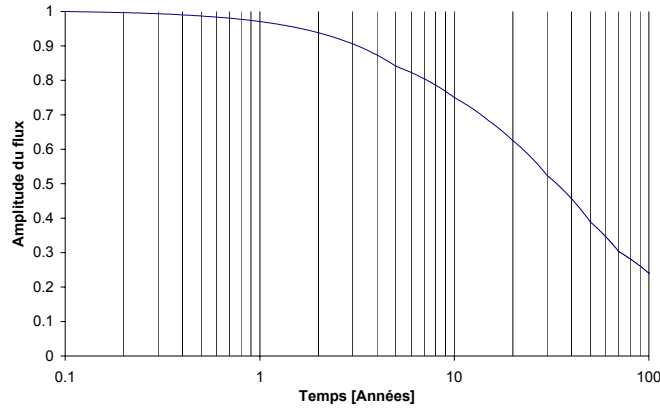


Figure 6.11 : Evolution temporelle du flux (normalisé) émis par la source

L'air se comporte comme un gaz parfait, sa masse volumique dépend de la pression et de la température. Par contre, nous avons supposé que sa viscosité dynamique et sa capacité thermique sont constantes.

Les propriétés de la vapeur d'eau suivent le modèle que nous avons développé au chapitre II, paragraphe 2.1.4. On suppose que la vapeur est en équilibre avec l'eau liquide; elle est considérée comme un gaz parfait. La capacité thermique de la vapeur est constante et on suppose que la chaleur latente de vaporisation est indépendante de la température et de la pression.

Les propriétés de la phase solide sont constantes : masse volumique des grains  $\rho_s$  et capacité thermique  $c_{p,s}$ .

Le milieu possède une perméabilité intrinsèque  $k_{int}$  constante et une conductivité thermique qui dépend des fluides saturant les pores :

$$\Gamma_m = S_{r,g} \cdot \Gamma(0) + S_{r,w} \cdot \Gamma(1) \quad (6.19)$$

où  $\Gamma(0)$  et  $\Gamma(1)$  sont la conductivité du milieu à saturation en eau nulle et totale.

La courbe de rétention s'exprime par les relations suivantes :

$$s = 10^5 \cdot \exp(-15,27 S_{r,w} + 6,062) \text{ si } 0,1 < S_{r,w} < 1 \quad (6.20)$$

$$s = 10^5 \cdot \exp(314,84 \cdot S_{r,w}^2 - 78,24 S_{r,w} + 9,21) \text{ si } S_{r,w} < 0,1 \quad (6.21)$$

où  $s$  est exprimée en Pascal.

Ces relations ont été transformées afin d'exprimer la saturation en fonction de la succion.

Les courbes de perméabilité relative à l'eau et à l'air sont données par:

$$k_{r,w} = \frac{(S_{r,w} - 0,1)^7}{(1 - 0,1)^7} \text{ si } S_{r,w} > 0,1 \text{ et } k_{r,w} = 0 \text{ sinon} \quad (6.22)$$

$$k_{r,a} = 1 \quad (6.23)$$

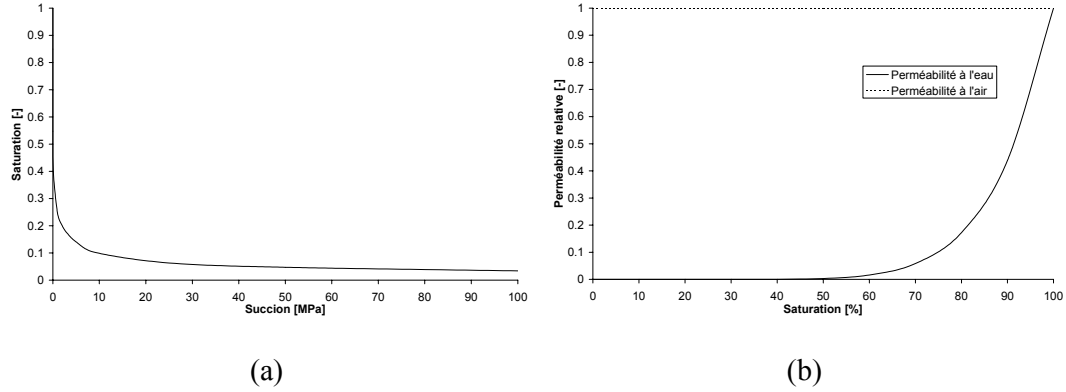


Figure 6.12 : Courbe de rétention (a) et courbe de perméabilité relative (b) du problème de Pollock

L'ensemble des données du problème est synthétisé dans le tableau 6.3. Ces données provenant de Pollock (1986) sont pour la plupart des valeurs représentatives mais ne résultent pas de mesures expérimentales.

Initialement, le terrain est supposé être dans un état d'équilibre avec un gradient thermique de 0,03 °C/m et une distribution des pressions d'eau et de gaz liée à la gravité. A la surface, la température est de 20°C et la pression de gaz est égale à la pression atmosphérique (100 kPa). La pression d'eau correspond à une distribution hydrostatique avec un niveau de nappe situé à 500 m sous le terrain naturel.

La température et la pression d'air sont fixées à la surface du terrain qui constitue une frontière imperméable à l'eau. Le maillage descend jusqu'à une profondeur de 475 m qui est supposée être suffisamment éloignée de la source de chaleur. A cette cote, la température (34,25 °C) et les pressions d'eau (-245,25 kPa) et de gaz (105,5 kPa) sont fixées.

Paramètres	Symbole	Valeur	Unité
Epaisseur du site	$H$	4	m
Energie thermique initiale	$Q_o$	2,5	W/m <sup>3</sup>
Masse volumique des grains	$\rho_s$	$2.65 \cdot 10^3$	kg.m <sup>-3</sup>
Chaleur spécifique des grains	$c_{p,s}$	$8.37 \cdot 10^2$	J.kg <sup>-1</sup> .°K <sup>-1</sup>
Masse volumique de l'eau	$\rho_w$	$1.00 \cdot 10^3$	kg.m <sup>-3</sup>
Viscosité dynamique de l'eau	$\mu_w$	$1.009 \cdot 10^{-3}$	Pa.s
Chaleur spécifique de l'eau	$c_{p,w}$	$4.184 \cdot 10^3$	J.kg <sup>-1</sup> .°K <sup>-1</sup>
Masse volumique initiale de l'air	$\rho_{a0}$	1.18	kg.m <sup>-3</sup>
Viscosité dynamique de l'air	$\mu_a$	$1.80 \cdot 10^{-5}$	Pa.s
Chaleur spécifique de l'air	$c_{p,a}$	$1.00 \cdot 10^3$	J.kg <sup>-1</sup> .°K <sup>-1</sup>
Chaleur spécifique de la vapeur	$c_{p,v}$	$1.90 \cdot 10^3$	J.kg <sup>-1</sup> .°K <sup>-1</sup>
Chaleur latente de vaporisation	$L$	$2.50 \cdot 10^6$	J.kg <sup>-1</sup>
Perméabilité intrinsèque du milieu	$k_{int}$	$5.00 \cdot 10^{-12}$	m <sup>2</sup>
Tortuosité du milieu	$\tau$	0.5	-
Porosité du milieu	$n$	0.35	-
Accélération de la gravité	$g$	9.81	m.s <sup>-2</sup>

Tableau 6.3 : Données du milieu non-saturé anisotherme

### 2.3.2. PREDICTIONS DU MODELE

Afin de résoudre ce problème, nous avons utilisé le modèle d'écoulement non-saturé anisotherme développé au chapitre II, paragraphe 5. Nous rappelons ci-après les principales équations utilisées. Les équations de bilan sont écrites par espèce chimique et non par phase ; nous obtenons donc la conservation de la masse d'eau liquide et de vapeur:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_w \cdot n \cdot S_{r,w}) + \text{div}(\rho_w \cdot \underline{q}_l) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho_v \cdot n \cdot S_{r,g}) + \text{div}(\underline{i}_v) + \text{div}(\rho_v \cdot \underline{q}_g) - Q_{eau} = 0 \quad (6.24)$$

où  $\underline{q}_l$  et  $\underline{q}_g$  sont des flux advectifs et  $\underline{i}_v$  est le flux diffusif de vapeur.

L'équation de conservation d'air sec s'écrit en négligeant la présence d'air dissous dans ce problème :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_a . n . S_{r,g}) + \text{div}(\rho_a . \underline{q}_g) + \text{div}(\underline{i}_a) - Q_{air} = 0 \quad (6.25)$$

où  $\underline{i}_a$  est le flux diffusif d'air sec.

L'équation de bilan thermique doit à présent comprendre l'énergie nécessaire à la vaporisation de l'eau :

$$\dot{S}_T + \dot{S}_v . L + \text{div}(\underline{i}_{cond}) + \text{div}(\sum_i H_i^T . \underline{V}_i^{eff}) + \text{div}(\underline{V}_v) . L - Q_T = 0 \quad (6.26)$$

où  $L$  est la chaleur latente de vaporisation,  $\underline{i}_{cond}$  est le flux conductif et  $\sum_i H_i^T . \underline{V}_i^{eff}$  correspond aux flux convectifs.

Nous pouvons utiliser ce modèle avec les éléments finis couplés MWAT. Dans ce dernier cas, seules les coordonnées mécaniques sont bloquées et nous pouvons donc étudier les divers couplages entre les écoulements des fluides et le transfert de chaleur.

Bien que le problème soit uniaxial, nous avons utilisé des éléments bidimensionnels. Le maillage est composé de 582 nœuds, 290 éléments MWAT à 4 nœuds et le chauffage est simulé par 20 éléments SUCHT. Ces éléments sont distribués de manière variable selon la profondeur. Cette répartition provient du projet '*Thermal-hydraulic-mechanical and geochemical behaviour of the clay barrier in radioactive waste repositories (Model development and validation)*' [VOLKAERT *et al.*, 1996], dans lequel ce problème constituait un exercice de vérification.

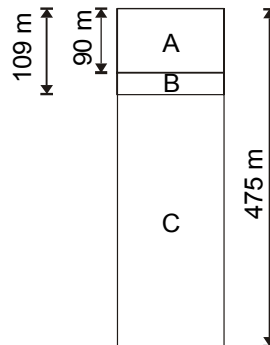


Figure 6.13 : Maillage éléments finis utilisé

Dans la zone A (figure 6.12), 125 éléments sont définis avec une longueur variant de 1,75 m à la surface à 0,2 m à 90 m de profondeur. La zone B est constituée de 95

éléments de 0,2 m de longueur. Dans la zone C, nous avons défini 70 éléments d'une longueur allant de 0,2 m à 109 m, à 24,5 m à la frontière inférieure de notre modèle.

La figure 6.14 présente les résultats de la simulation. Suite à la production de chaleur, une augmentation rapide se produit dans la zone d'enfouissement des déchets (figure 6.14-a). La température au centre du site augmente jusqu'à 120°C en 60 ans, ensuite la température semble se stabiliser suite à la diminution de l'activité des déchets (figure 6.14-b). L'augmentation de température entraîne la production de vapeur qui diffuse de part et d'autre du site.

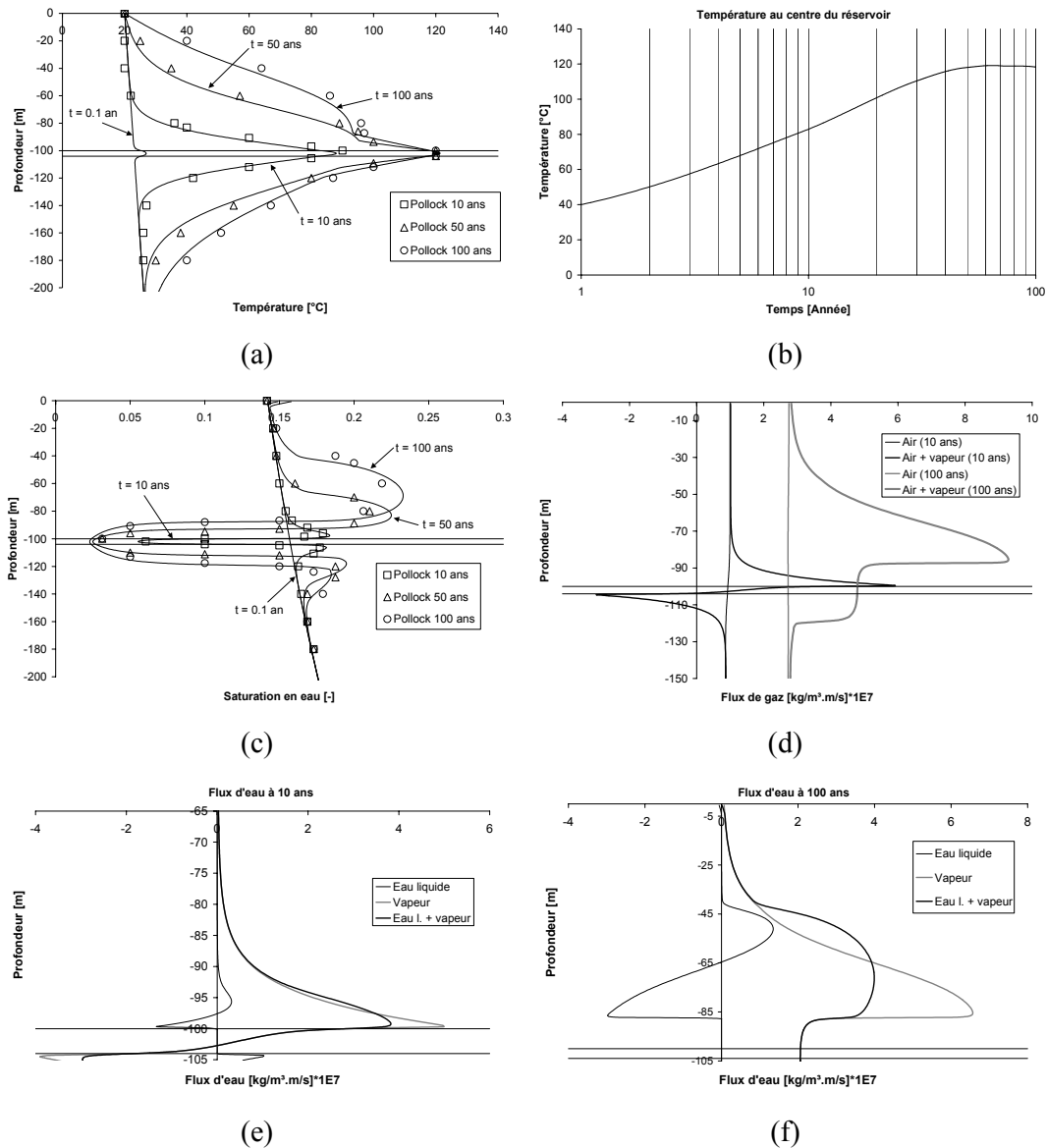


Figure 6.14 : Résultats de la simulation du problème de Pollock

A la figure 6.14-d-e-f, les flux dirigés vers le haut sont pris positifs. Ce transfert en phase vapeur provoque la désaturation des couches de stockage où la saturation diminue à moins de 5 %. La vapeur se retrouve dans des zones plus froides et condense : cela explique pourquoi la saturation augmente de part et d'autre des déchets.

Toutefois, après 100 ans, la saturation en eau est trop faible et la quantité d'eau liquide n'est plus suffisante pour produire de la vapeur. C'est pourquoi une zone sèche (au centre des déchets) se développe où les flux d'eau liquide sont nuls et les flux de vapeur plus faibles (figure 6.14-f). La production de vapeur se produit en avant du front de désaturation où la température est diminuée à cause de la chaleur latente de vaporisation.

La comparaison de nos résultats et de ceux publiés par Pollock montre une très bonne correspondance entre les deux modèles, tant au niveau de la température que de la saturation calculées.

Grâce à cette simulation, nous avons mis en évidence l'importance de la vapeur dans notre modèle : le chauffage provoque une désaturation et la vapeur ainsi créée se condense ensuite dans les zones plus froides. Les mouvements d'eau sont fortement modifiés par la présence de vapeur. L'importance des flux de vapeur d'eau est d'autant plus importante que le milieu est peu perméable. Les échanges thermiques sont également influencés, dans une moindre mesure, par la vapeur dont la production nécessite de l'énergie.

## **2.4. Conclusions**

Les différents cas que nous avons traités ont montré que notre modèle est capable de simuler des phénomènes complexes fortement couplés. La comparaison des résultats des simulations avec des solutions analytiques ou des réponses numériques déjà publiées sont tout à fait acceptables et permettent de conclure à la validation de notre modèle d'écoulements multiphasiques anisothermes.

Les calculs ont permis de mettre en évidence différents phénomènes et couplages existants dans les problèmes traités. L'augmentation de température entraîne des mouvements d'eau typiques d'une cellule de convection dans le cas du milieu saturé rigide (1<sup>er</sup> exemple). La distribution des températures n'est par contre pas influencée par les flux d'eau et le transfert de chaleur est principalement conductif. Dans un milieu non-saturé isotherme (2<sup>ème</sup> exemple), la transition entre état saturé et non-saturé constitue un problème numérique assez complexe. La prise en compte de l'air dissous dans l'eau est une manière élégante de résoudre ce problème. En conditions non-saturées (3<sup>ème</sup> exemple), l'élévation de température provoque la production de vapeur dans les pores. Cette diffusion de vapeur d'eau provoque l'assèchement des pores suite à un chauffage. Ces transferts en phase vapeur sont fort importants dans les milieux peu perméables.

Notre modèle étant validé, nous passerons au chapitre suivant à des exemples d'applications nécessitant l'utilisation de modèles d'écoulement très développés.



### 3. MODELE DE COMPORTEMENT D'UNE CRAIE NON-SATUREE

Le modèle de comportement mécanique d'une craie non-saturée est une loi élasto-plastique associant quatre surfaces de plasticité. Afin de le valider, nous allons comparer la réponse du modèle à des résultats d'essais réalisés sur la craie de Lixhe dans le cadre du projet PASACHALK.

Nous considérons tout d'abord des essais en conditions saturées afin de ne pas avoir d'influence de la variation de succion. Ensuite, nous modélisons des essais de waterflooding pour lesquels nous disposons de nombreuses mesures expérimentales en conditions non-saturées.

Les paramètres de la loi que nous utilisons sont ceux que nous avons déterminés au chapitre IV pour la craie de Lixhe et rappelés au tableau 6.4.

#### 3.1. Craie saturée

L'ensemble des essais que nous allons modéliser ont été réalisés dans la cellule triaxiale auto-compensée décrite au chapitre IV, paragraphe 5. La craie est en conditions saturées : le fluide remplissant les pores est soit de l'eau en équilibre chimique avec la craie, soit du Soltrol qui a des propriétés similaires aux huiles de réservoir. Nous allons à présent montrer des résultats d'essais triaxiaux et oedométriques.

Pour ces simulations, nous utilisons les paramètres définis dans le tableau 6.4.

	Eau	Huile
Angle de frottement $\phi [^\circ]$	22	22
Cohésion $c$ [MPa]	1,5	2,0
Pré-consolidation $p_0$ [MPa]	10	21
$K$ [MPa]	612	726
$G$ [MPa]	500	700
Indice de compressibilité $\lambda$	0,195	0,195

Tableau 6.4 : Paramètres du modèle de craie saturée

##### 3.1.1. ESSAIS TRIAXIAUX

Les essais modélisés comprennent une phase de chargement isotrope, suivie d'un déchargement isotrope pour se terminer par une phase de cisaillement triaxiale. Les comparaisons entre la réponse du modèle et les mesures expérimentales sont fournies aux figures 6.15 et 6.16.

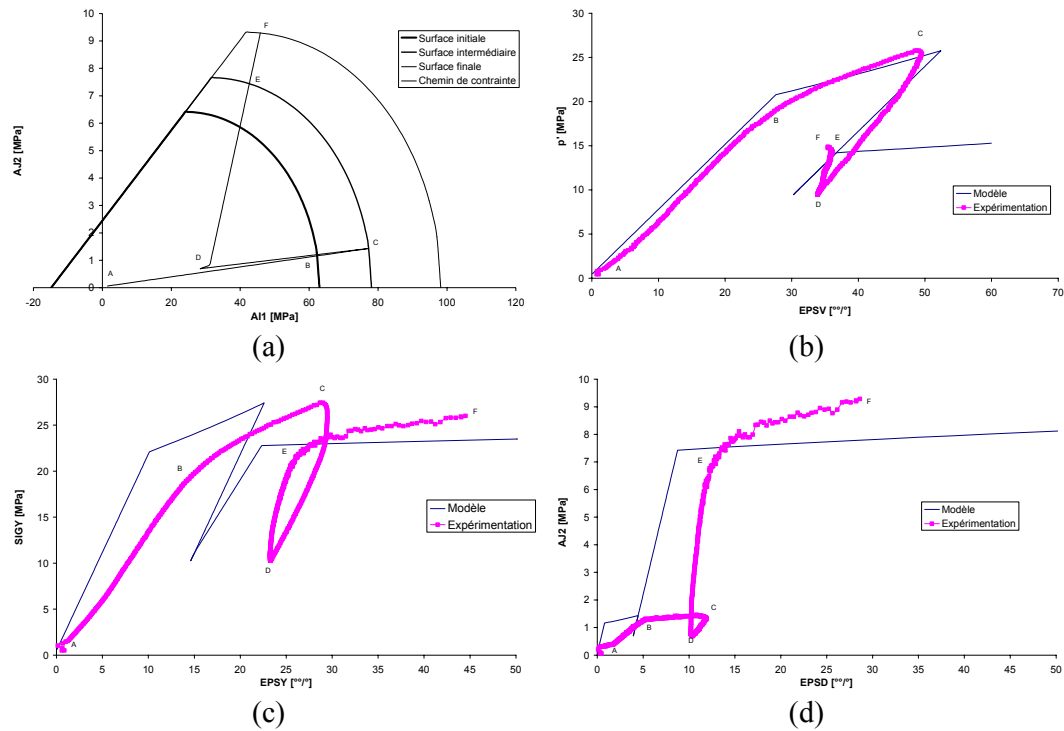
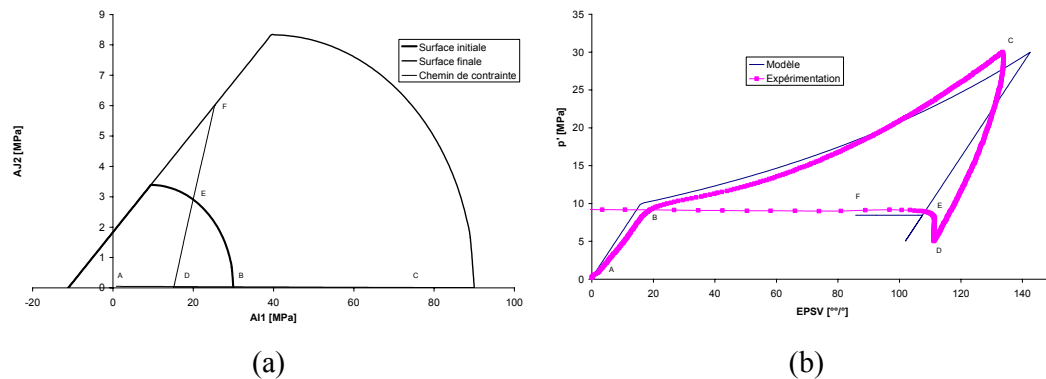


Figure 6.15 : Essai triaxial sur un échantillon saturé en huile

Ces figures montrent une réponse du modèle proche du comportement expérimental, spécialement pour le comportement volumique (figures 6.15-a et 6.16-a). La composante déviatorique (figures 6.15-d et 6.16-d) est moins bien représentée dans la première partie du chargement (chemin A-D) ; elle correspond en fait à un chargement isotrope où la précision des déformations est plus faible. Toutefois, lors du cisaillement de l'échantillon (chemin D-F), la comparaison est acceptable.

Plus particulièrement, notre modèle prédit bien l'entrée en plasticité de la craie. De plus, les pentes élastiques (début du chargement ou décharge) sont bien estimées. La comparaison des courbes dans le domaine plastique montre que les règles de dilatance et d'écrouissage sont satisfaisantes. Dès lors, nous pouvons estimer que notre modèle est capable de reproduire de manière correcte le comportement de la craie saturée.



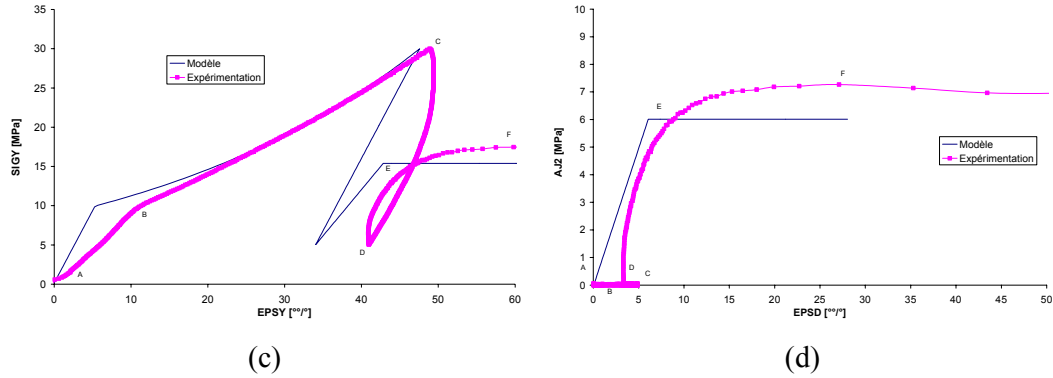


Figure 6.16 : Essai triaxial sur un échantillon saturé en eau

### 3.1.2. ESSAIS $K_0$

Des essais  $K_0$  ont également été réalisés dans la cellule triaxiale. Deux procédures de chargement ont été utilisées (voir le paragraphe 5.2.2 du chapitre IV). Nous avons donc modélisé ces deux types d'essai mais uniquement dans leur phase oedométrique proprement dite. Nous débutons chaque simulation avec un état de contraintes imposé correspondant à celui de l'expérimentation au début de la phase  $K_0$ .

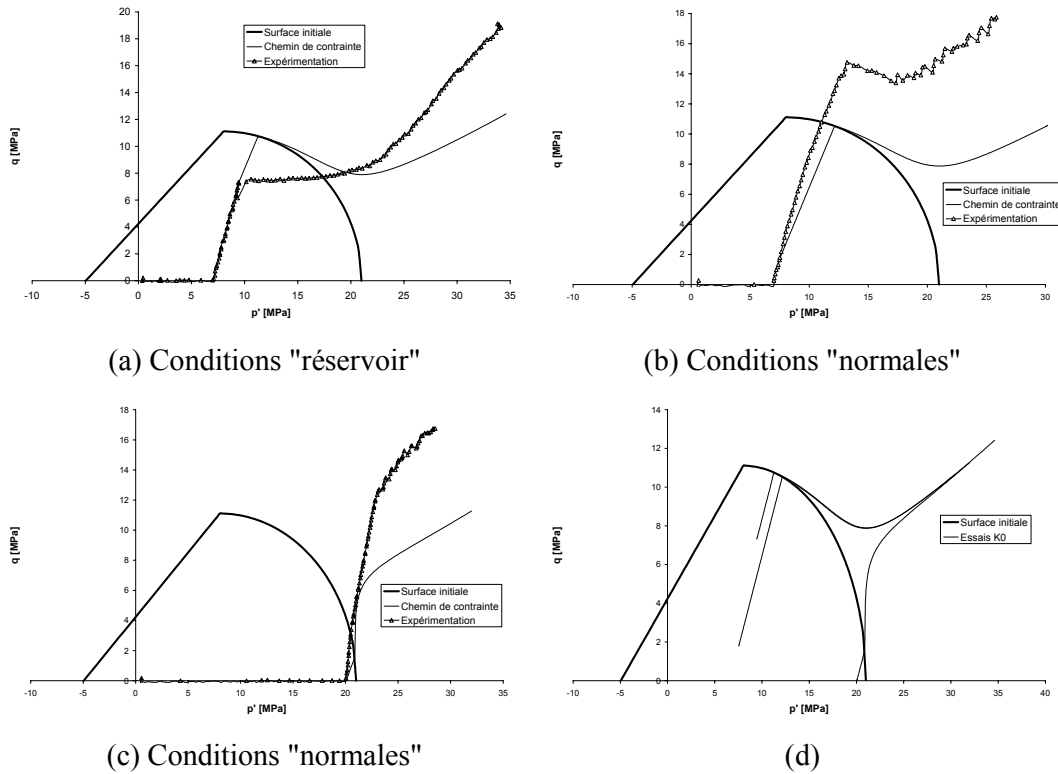


Figure 6.17 : Essais  $K_0$  sur un échantillon saturé en huile

La figure 6.17 montre la comparaison entre les chemins de contraintes numériques et expérimentaux. Les chemins suivis sont fort différents dans les domaines élastique et plastique. La figure 6.17-d montre que le modèle reproduit bien le phénomène du *pore collapse* qui correspond à une augmentation ou une diminution du déviateur selon le point d'entrée en plasticité (chapitre IV, paragraphe 5.2.2).

La différence entre l'expérience et le modèle résulte du mode de contrôle des conditions oedométriques. En effet, l'essai  $K_0$  est obtenu en adaptant la contrainte latérale afin d'empêcher toute déformation latérale. En pratique, la pression de confinement est adaptée lorsque les capteurs LVDT mesurent un déplacement latéral de 0,02 mm. Il n'est pas possible de choisir un seuil plus faible car on atteint la précision du capteur. Malheureusement, la déformation élastique de la craie à pression latérale constante est du même ordre de grandeur que cette précision et de plus le système n'a pas une raideur infinie.

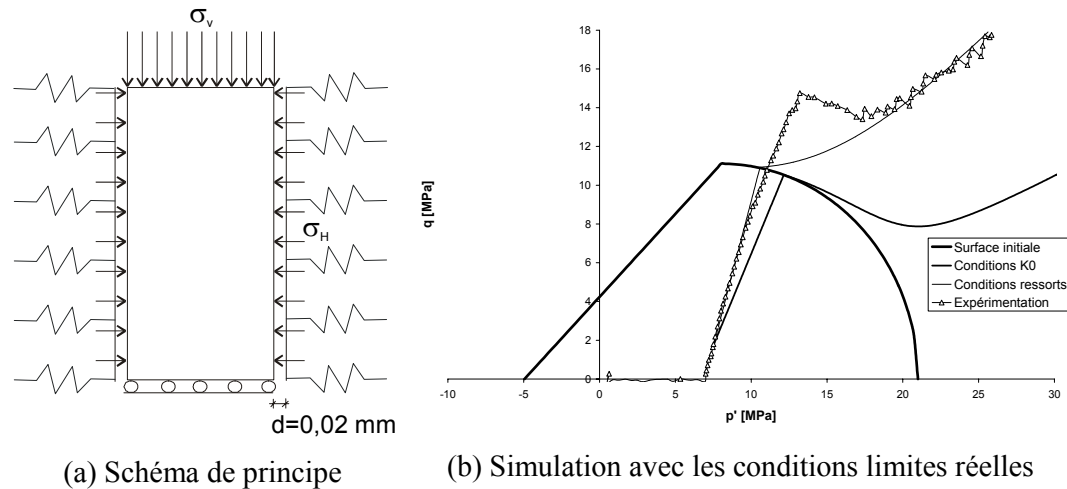


Figure 6.18 : Essais  $K_0$  avec ressorts élastiques

Nous avons alors essayé de reproduire ces conditions numériquement afin de connaître la réponse du modèle. Nous avons donc introduit des ressorts agissant à partir d'un déplacement latéral de 0,02 mm ; avant ce dernier, les conditions correspondent à une pression latérale constante. Pour une raideur du ressort équivalant à dix fois le module de Young de la craie, nous obtenons la réponse de la figure 6.18. Nous voyons alors que la comparaison entre l'expérimentation et le modèle est bien meilleure (les paramètres de la loi restent inchangés) et que les conditions limites peuvent expliquer les différences initialement observées.

### 3.1.3. VARIABILITE DES PROPRIETES DU MATERIAU

Les propriétés de la craie présentent naturellement une certaine dispersion. Pour s'en rendre compte, il suffit de réaliser des essais sur des échantillons provenant de blocs différents. Mais, même au sein d'un même bloc d'apparence homogène, les caractéristiques élastiques et plastiques présentent une certaine variabilité. A côté de cette dispersion matérielle, il ne faut pas non plus oublier les erreurs inhérentes aux

méthodes et aux appareils de mesures eux-mêmes, qui influencent également la mesure des paramètres caractéristiques du matériau.

Dans l'approche déterministe que nous avons utilisée, nous choisissons une valeur unique de chaque paramètre, censée représenter le comportement moyen. Nous avons ainsi déterminé un module élastique, une valeur du pore collapse et un module d'écrouissage uniques. A titre d'exemple, nous montrons à la figure 6.19 les mesures de module cubique pour des chemins isotropes ainsi que la courbe moyenne et la modélisation 'déterministe' effectuée.

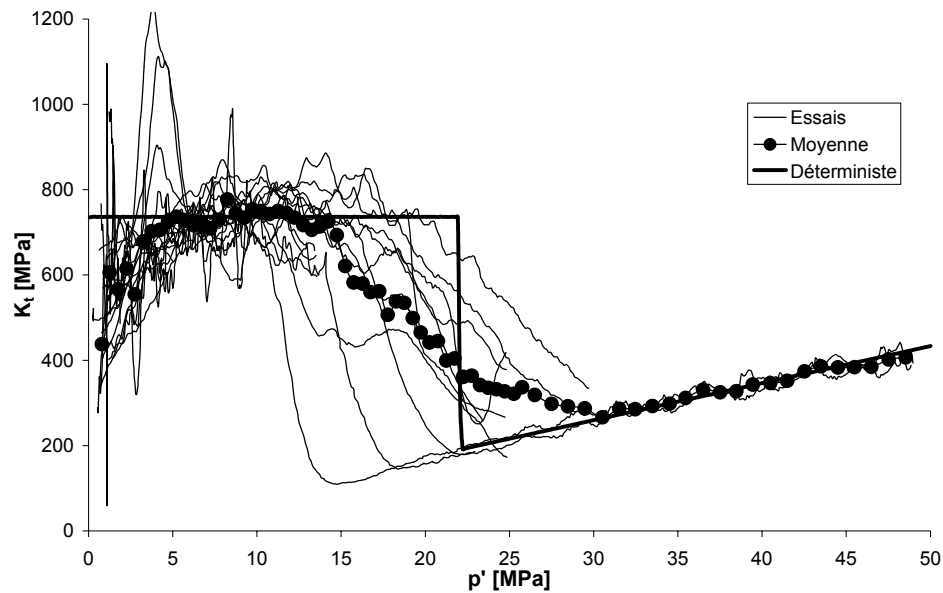


Figure 6.19 : Module cubique tangent pour chemin isotrope

Nous remarquons ainsi que la phase plastique est bien reproduite par le modèle. Par contre, les mesures expérimentales du module cubique présentent une variabilité plus importante ; mais surtout, le pore collapse semble débiter avant 22 MPa et la transition est moins brutale que dans le modèle déterministe.

Il est alors intéressant de voir ce que devient la réponse du modèle pour un échantillon avec une distribution aléatoire de caractéristiques. Nous pouvons ainsi modéliser l'essai isotrope avec un maillage comprenant 20 éléments sur la hauteur (50 mm) et 5 éléments sur le rayon (12,5 mm). Afin de ne pas trop multiplier les calculs, nous avons choisis de faire uniquement varier le paramètre  $p_0$  définissant le début du pore collapse.

Un problème supplémentaire apparaît car il est pertinent de se dire que les valeurs ne sont pas spatialement indépendantes. En effet, si nous attribuons une valeur forte de  $p_0$  à un élément, il y a une probabilité importante que la valeur de ce paramètre soit également forte pour des éléments proches. Nous devons alors mettre en œuvre des outils probabilistes plus complexes afin de résoudre ce problème.

La méthode que nous utilisons est décrite très clairement dans [BOLLE, 1995]. Elle consiste tout d'abord à définir un modèle représentant la relation entre la valeur de  $p_0$  en un point et la valeur de ce même paramètre en tout point situé à une distance  $d$  du premier. Cela revient à définir l'autocorrélation entre ces points qui est définie comme la corrélation entre les valeurs de la propriété en tout point et les valeurs de cette même propriété à une distance  $d$  de ce point ; l'autocorrélation est notée  $\rho(d)$ . Il faut donc définir l'autocorrélogramme. Nous avons choisi un simple modèle linéaire (figure 6.20).

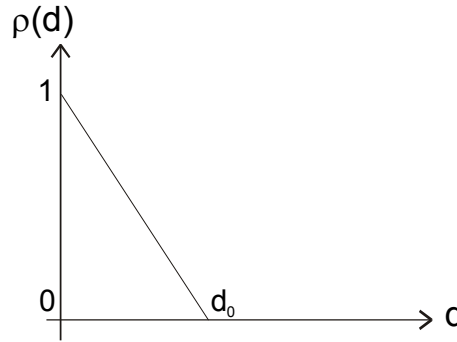


Figure 6.20 : Autocorrélogramme linéaire

Ce modèle prédit, pour une distance nulle, que la corrélation vaut l'unité. Par contre pour une distance supérieure à  $d_0$ , la corrélation est nulle. Ce modèle est isotrope, il n'y a pas de direction préférentielle ; cela correspond bien aux observations réalisées sur la craie.

Nous ne pouvons donc pas choisir les 100 ( $20 \times 5$  éléments) valeurs  $p_{0,N}$  de manière totalement aléatoire, puisqu'il y a des relations entre elles. Pour résoudre ce problème, nous allons réaliser un changement de variable (ici la variable  $p_0$  de chaque élément) afin de travailler en variables principales, de manière à découpler chaque valeur. Pour ce faire, la première étape de la méthode suivie consiste à définir de nouvelles variables aléatoires, centrées et normées, de moyenne nulle et de variance unitaire, notées  $T_{0,N}$  :

$$T_{0,N} = \frac{p_{0,N} - \hat{p}_{0,N}}{\sigma_{p_{0,N}}} \quad (6.27)$$

où  $p_{0,N}$  est la valeur de  $p_0$  de l'élément N,  $\hat{p}_{0,N}$  est la valeur moyenne de la distribution de  $p_{0,N}$  et  $\sigma_{p_{0,N}}$  est l'écart-type de la distribution de  $p_{0,N}$ .

Afin de passer des variables  $T_{0,N}$  corrélées aux variables  $Z_{0,N}$  indépendantes (ou non-corrélées), il faut construire la matrice de corrélation des  $\underline{T}$  (identique à celle des  $p_{0,N}$ ) qui est définie par:

$$\underline{\underline{R}}(\underline{T}) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \rho_{1,N} \\ \dots & 1 & \dots \\ \rho_{N,1} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

où  $\rho_{i,j}$  est déterminée par l'autocorrélogramme à partir de la distance entre les éléments  $i$  et  $j$  ( $\rho_{i,j} = \rho_{j,i}$ )

En déterminant les valeurs propres de cette matrice  $\underline{\underline{R}}$  ainsi que la matrice  $\underline{\underline{A}}$  formée des vecteurs propres associés aux valeurs propres trouvées, nous pouvons calculer les variables indépendantes  $Z_{0,N}$  par la relation suivante :

$$\underline{Z} = \underline{\underline{A}} \underline{T} \quad (6.29)$$

Chaque valeur  $Z_{0,N}$  présente une distribution dont la moyenne est nulle et dont l'écart-type est égal à la racine carrée de la valeur propre correspondante.

Nous avons à présent les outils pour calculer la distribution aléatoire de  $p_{0,N}$  spatialement corrélés. Il convient de construire la matrice de corrélation  $\underline{\underline{R}}(T) = \underline{\underline{R}}(p_0)$ , d'en déterminer ses valeurs propres et vecteurs propres. Ensuite, il faut réaliser un tirage des  $Z_{0,N}$  indépendants et respectant une distribution normale de moyenne nulle et de variance égale à la racine carrée de la valeur propre correspondante. Enfin, il est alors possible de passer à la matrice  $\underline{T}$  en inversant la relation (6.29) et de là, trouver les valeurs de  $p_{0,N}$  corrélées spatialement et respectant une distribution normale de moyenne égale à 25 MPa et d'écart-type 6 MPa.

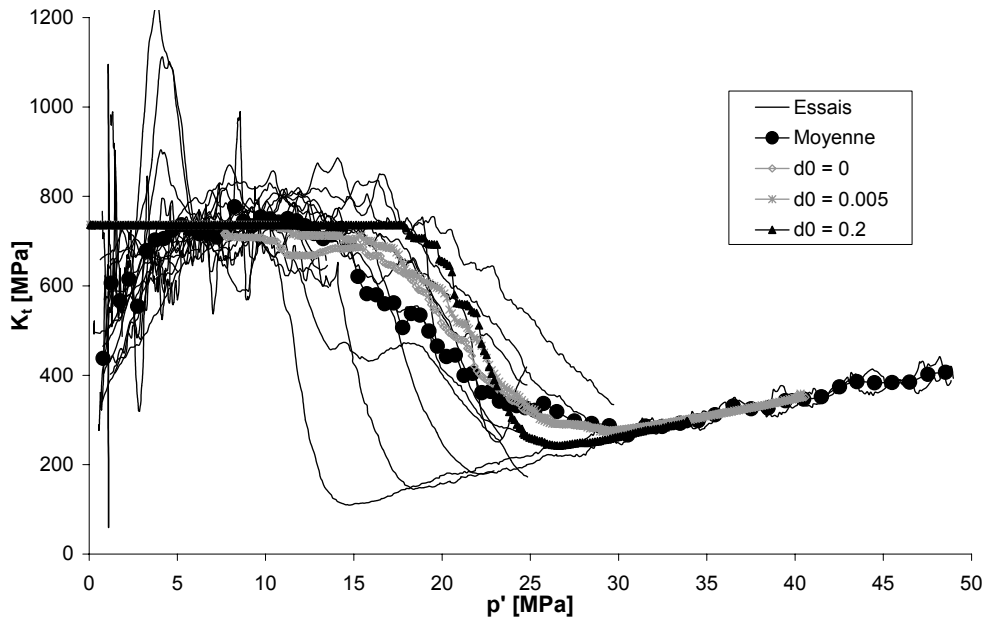


Figure 6.21 : Essais isotropes avec  $p_0$  aléatoire

Nous pouvons donc appliquer cette méthode et modéliser un essai isotrope. Le dernier problème à résoudre est le choix de la valeur de  $d_0$  dans l'autocorrélogramme. Cela introduit une sorte de longueur interne au problème ; nous avons donc réalisé des simulations avec différentes valeurs de  $d_0$  (figure 6.21).

En effet, si  $d_0$  ( $= 0,005$  m) est petit (par rapport à la dimension de l'échantillon), cela signifie que l'ensemble des valeurs  $p_{0,N}$  seront fortement découplées et on s'aperçoit que le comportement tend alors vers le comportement moyen de tous les essais. A la limite, si  $d_0$  est nulle, l'ensemble des valeurs est aléatoire et nous n'observons pas de différences dans l'évolution du module cubique par rapport au cas précédent.

Par contre, pour des valeurs de  $d_0$  plus importantes ( $d_0 = 0,2$  m), le comportement tend plus vers celui d'un essai unique et non plus de la moyenne des essais. La transition entre l'état élastique et plastique est plus raide. Cela permet de tirer des conclusions intéressantes : les valeurs de  $p_0$  dans les échantillons doivent être relativement homogènes même si elles peuvent varier d'un échantillon à l'autre. Par contre, à plus grande échelle (celle d'un réservoir par exemple), l'évolution du module cubique devrait plutôt tendre vers la courbe moyenne des essais. On observerait donc un changement de comportement en changeant d'échelle.

Dans le cadre de ce travail, nous nous limiterons à ces considérations ; d'autres développements pourraient être certainement réalisés dans cette approche probabiliste mais nous voulons uniquement montrer ici les possibilités de ce genre d'étude, qui peut constituer à elle seule une autre thèse de doctorat.

### 3.2. Craie non-saturée : Waterflooding

L'essai de waterflooding consiste à injecter de l'eau dans un échantillon saturé initialement en huile. La succion varie au cours de l'expérimentation ; nous devons donc utiliser le modèle mécanique avec la courbe LC et également le modèle d'écoulement multiphasique eau-huile.

Dans le tableau 6.5, nous donnons les paramètres nécessaires (outre ceux déjà donnés au tableau 6.4) à la définition de la courbe LC (relation 4.146) et du modèle élastique (relations 4.151 et 4.152). De plus, nous supposons que la surface SI n'est pas active ; nous devons dès lors déterminer uniquement le coefficient  $\kappa_s$ . Ce dernier sera évalué par analyse inverse des résultats des essais.

Paramètre	Valeur
$k_s$ [-]	38
$g_s$ [-]	66,67
$dp_0$ [MPa]	12
$s^*$ [MPa]	0,2

Tableau 6.5 : Paramètres du modèle de craie non-saturée



Les caractéristiques d'écoulement multiphasique sont la porosité, la perméabilité et les propriétés de rétention. La porosité est mesurée sur l'échantillon avant la réalisation de l'essai. La perméabilité intrinsèque de la craie est d'environ 1 mDarcy. Cette valeur sera déterminée par analyse inverse des résultats expérimentaux.

La courbe de rétention de la craie a été déterminée par le CERMES, par la méthode osmotique (mesure directe) et à partir de la courbe porosimétrique d'intrusion au mercure (mesure indirecte). Nous savons que la courbe de rétention présente une hystérésis en mouillage et en séchage. La méthode osmotique consiste à imposer une succion à un échantillon (initialement fortement saturé en huile et entouré d'une membrane semi-perméable) en le plongeant dans une solution de PEG (voir chapitre III). Cette méthode correspond à un chemin de mouillage. La méthode porosimétrique permet de déterminer la courbe de rétention à partir du volume injecté et de la pression du mercure. Cette méthode est très bien détaillée par CUI (1993) ; elle correspond à un chemin de séchage.

La figure 6.22 présente les résultats obtenus par le CERMES pour des échantillons de craie de Lixhe. Nous avons choisi de les modéliser par deux courbes : la courbe de mouillage est définie point par point et celle de séchage est définie par la relation suivante et par les paramètres du tableau 6.6 :

$$S_w = \frac{CSR3}{\pi} \arctan\left(-\frac{s + CSR2}{CSR1}\right) + \frac{CSR3}{2} \quad (6.30)$$

Lors de l'essai d'injection d'eau, nous suivons un chemin de mouillage ; ainsi, dans les simulations suivantes, nous utiliserons uniquement la courbe de rétention de mouillage.

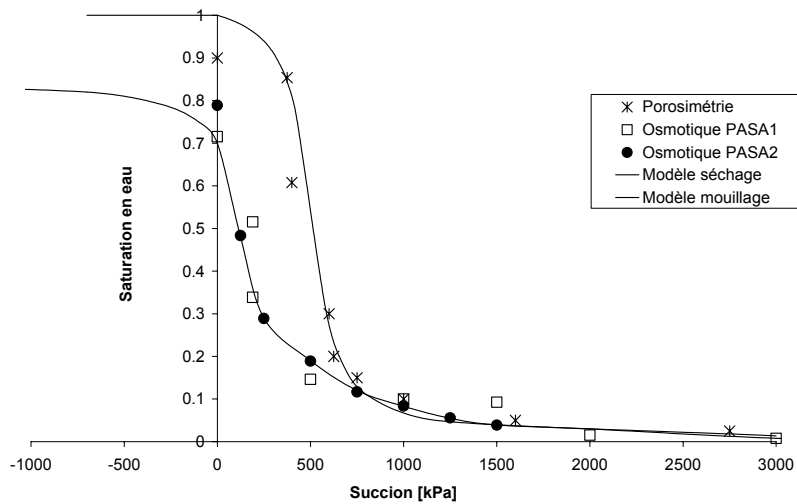


Figure 6.22 : Courbes de rétention de la craie de Lixhe

	Séchage
$CSR1 [kPa]$	100
$CSR2 [kPa]$	-505
$CSR3 [-]$	1,0665

Tableau 6.6 : Paramètres du modèle de craie non-saturée

Paramètres	Symbole	Valeur	Unité
Masse volumique des grains	$\rho_s$	$2,70 \cdot 10^3$	$\text{kg.m}^{-3}$
Masse volumique de l'eau	$\rho_w$	1000	$\text{kg.m}^{-3}$
Module de compressibilité de l'eau	$\chi_w$	$3 \cdot 10^9$	Pa
Viscosité dynamique de l'eau	$\mu_w$	$1,009 \cdot 10^{-3}$	Pa.s
Masse volumique initiale de l'huile	$\rho_{o0}$	782,551	$\text{kg.m}^{-3}$
Module de compressibilité de l'huile	$\chi_o$	$3 \cdot 10^9$	Pa
Viscosité dynamique de l'huile	$\mu_o$	$3.0085 \cdot 10^{-3}$	Pa.s

Tableau 6.7 : Propriétés physiques des différentes phases

Par contre, nous possédons moins d'informations sur les courbes de perméabilité relative. Nous avons choisi de nous baser sur des résultats expérimentaux de EBELTOFT *et al.* (1996) afin de calibrer les relations suivantes :

$$k_{r,o} = (1 - S_e)^{CKA1} (1 - S_e^{CKA2}) \quad (6.31)$$

$$k_{r,w} = S_e^{CKW1} \quad (6.32)$$

$$S_e = \frac{S_{r,w} - S_u}{1 - S_u} \quad (6.33)$$

avec  $CKA1 = 2$ ;  $CKA2 = 7$ ;  $CKW1 = 9$  et  $S_u = 0,1$ .

Les figures 6.23 présentent les résultats expérimentaux (courbes A,B et C) et la courbe par laquelle nous les avons modélisés.

Les propriétés physiques des différentes phases sont listées dans le tableau 6.7.

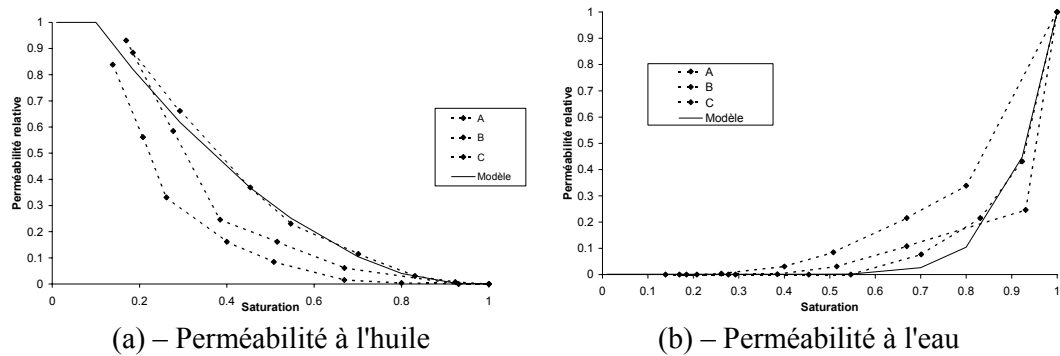


Figure 6.23 : Courbes de perméabilité relative

### 3.2.1. DESCRIPTION DES ESSAIS

L'essai de waterflooding (balayage par l'eau) [SCHROEDER *et al.*, 1998] est réalisé sur des échantillons cylindriques dont les dimensions sont les suivantes : 25 mm de diamètre et 50 mm de hauteur. La craie est initialement saturée en Soltrol ; la procédure de saturation consiste à la sécher au four durant 48 heures (ou jusqu'à poids constant) à 105°C. Ensuite, l'échantillon est saturé à l'huile sous vide et est enfin placé dans la cellule triaxiale où il est soumis à un flux d'huile (trois fois le volume poreux) afin d'assurer une saturation maximale.

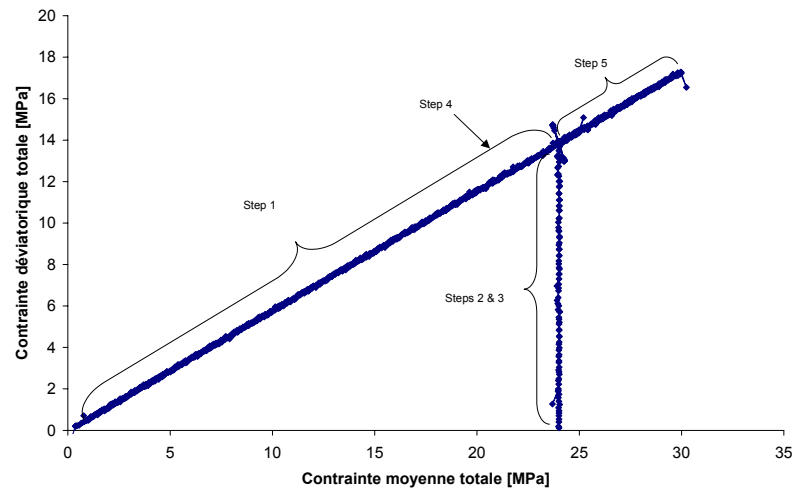


Figure 6.24 : Chemin de contrainte suivis pour réaliser l'essai de waterflooding en condition anisotrope

Dans les expérimentations que nous allons présenter, l'injection d'eau est réalisée sous contrainte. Nous pouvons donc distinguer différentes phases dans l'essai : la mise en contrainte, l'injection d'eau, un éventuel chargement suivi d'un déchargement final. Nous considérons deux états de contrainte possibles : un état isotrope de 18 MPa et un état anisotrope obtenu par un chemin proportionnel. Dans ce dernier cas, nous avons étudié l'influence de la direction de la contrainte majeure ; nous pouvons ainsi définir

deux groupes d'essais anisotropes (type I et type II). Dans les essais de type I, l'injection est réalisée à une contrainte moyenne de 24 MPa mais durant la phase de déchargement/chargement précédant l'injection d'eau, la contrainte latérale devient supérieure à la contrainte axiale. Dans les essais de type II, la contrainte moyenne est identique, mais la contrainte axiale reste la contrainte majeure.

L'échantillon est initialement saturé en huile à la pression de 100 kPa. Si nous supposons que la succion est de 3 MPa, la pression d'eau est donc égale à -2,9 MPa et la saturation d'eau correspondante est de 0,9%.

Lors de l'injection à la base de l'échantillon, la pression d'eau est portée à 0,9 MPa. L'huile peut sortir par la face supérieure de l'échantillon où est maintenue une pression de 100 kPa. Tant que de l'huile est présente (et mobile) dans la craie, celle-ci sort par la face supérieure. Quand l'eau atteint le haut de l'échantillon, l'huile n'est plus produite et seule l'eau peut sortir. Nous avons donc une condition limite variable en fonction de l'état de saturation.

En fait, lorsque l'eau est injectée, un front d'eau apparaît qui déplace l'huile et qui s'accompagne d'une déformation instantanée d'environ 2-3%. Afin de suivre l'évolution de ce front avec les déformations, différentes jauges de contraintes sont collées sur l'échantillon (figure 6.25). Cela fournit une information sur la déformation locale. De plus, deux LVDT nous renseignent sur les déplacements moyens respectivement dans la direction axiale et radiale (au milieu de l'échantillon). Les déformations moyennes sont alors évaluées par les relations suivantes :

$$EPSX = \frac{\Delta R_{LVDT}}{R_{initial}} \text{ et } EPSY = \frac{\Delta H_{LVDT}}{H_{initial}} \quad (6.34)$$

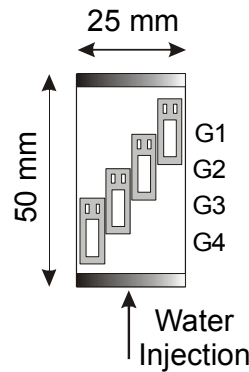


Figure 6.25 : Schéma de l'échantillon de craie

La validation de notre modèle écoulement s'effectue sur une comparaison des volumes de fluides échangés. La qualité du modèle mécanique est vérifiée en observant son aptitude à reproduire les déformations mesurées aux capteurs locaux et globaux.

### 3.2.2. PREDICTION DU MODELE

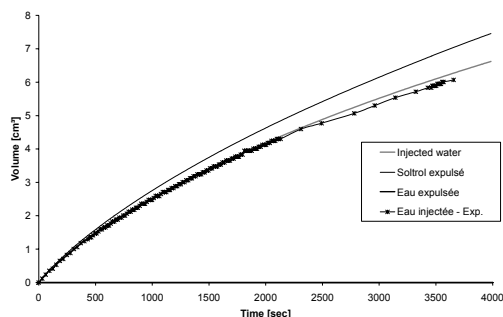
Nous avons modélisé ce problème en considérant les conditions d'axisymétrie. Le modèle de 12,5 mm de rayon et 50 mm de hauteur est maillé régulièrement par 10 x 30 éléments MWAT, soit 982 nœuds. Les conditions de confinement sont appliquées à l'aide de 40 éléments de chargement LICH. La condition limite à la partie supérieure de l'échantillon est modélisée par des éléments WEPRO ; la pression du puits fictif est de 100 kPa.

En condition de contrainte isotrope, nous modélisons uniquement la phase de waterflooding et nous disposons de la réponse des jauges de contraintes. Par contre, en condition anisotrope, nous modélisons l'ensemble des phases mais nous connaissons uniquement la réponse des capteurs LVDT.

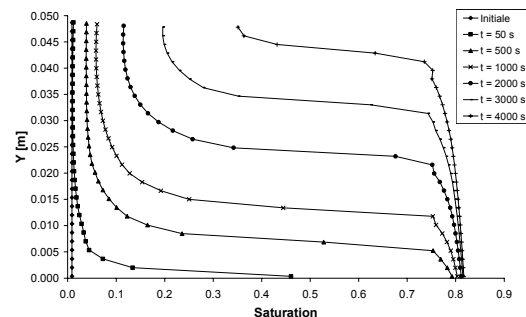
Lors de l'injection d'eau, la saturation en eau augmente aux environs de 80% et la perméabilité à l'huile tend vers zéro. Au devant du front d'eau, la craie est toujours saturée en huile et la perméabilité à l'eau est nulle. Afin d'éviter des problèmes numériques (voir paragraphe 2.2), nous avons introduit une perméabilité relative minimum de 0,01. Une valeur inférieure provoque des oscillations dans la réponse du modèle.

#### 3.2.2.1. Etat de contrainte isotrope

Nous avons tout d'abord déterminé la perméabilité permettant de reproduire au mieux la courbe expérimentale d'entrée d'eau. Nous avons obtenu une perméabilité intrinsèque de  $1,4 \cdot 10^{-15} \text{ m}^2$  et la comparaison entre la réponse numérique et la courbe d'entrée d'eau expérimentale montre l'aptitude du modèle écoulement à reproduire les transferts de fluide observés expérimentalement (figure 6.26-a). Après 3500 sec., le front d'eau n'a pas encore atteint la face supérieure de l'échantillon et le profil de saturation en eau (figure 6.26-b) montre clairement le déplacement d'un front d'eau et une saturation finale aux environs de 80%.



(a) – Transferts de fluide



(b) – Profil de saturation

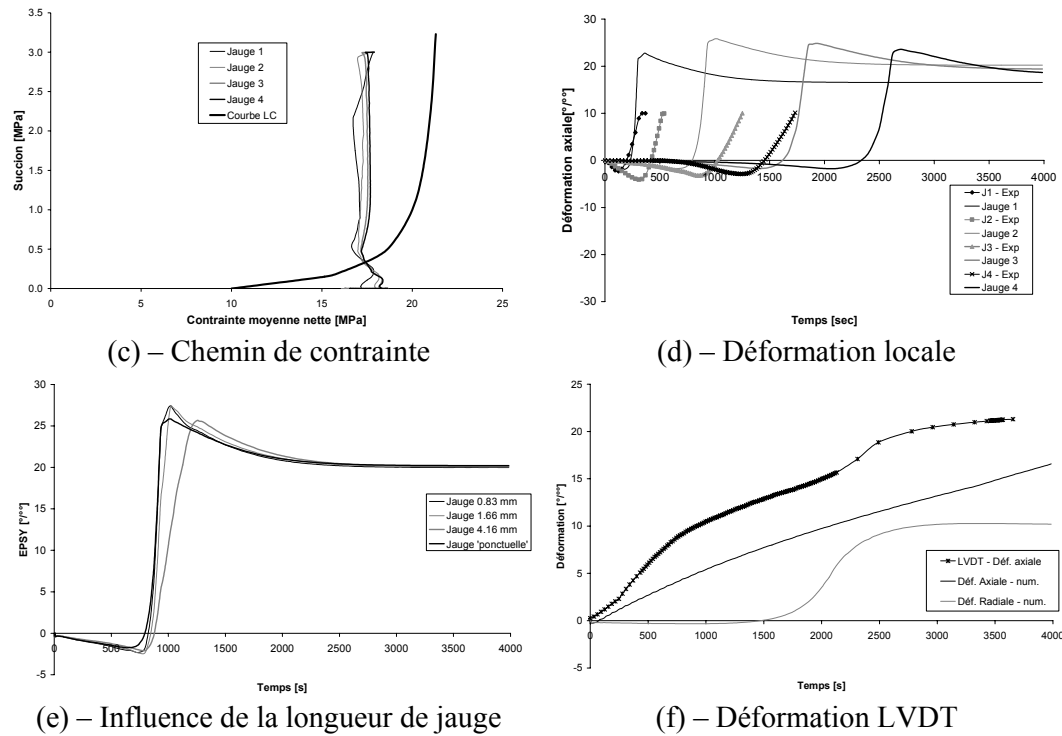


Figure 6.26 : Essai de waterflooding en conditions de contrainte isotrope

Les mesures de déformation locale (figure 6.26-d) présentent un gonflement d'environ 0,3% suivi d'une brutale déformation de compression qui s'arrête après 1 % suite à la rupture de jauge. Le modèle mécanique est capable de reproduire le gonflement avant le *collapse*. En effet, ce gonflement est directement relié au paramètre  $\kappa_s$  qui gère les déformations élastiques liées à des variations de suction. Pour cette simulation, nous avons choisi une valeur de 0,001. Le *collapse* apparaît lorsque le chemin de contrainte touche la courbe LC et l'écrouit (figure 6.26-c). La comparaison entre la réponse numérique et les mesures expérimentales montre un décalage entre ces courbes. Ce dernier peut être relié à la saturation en eau après waterflooding. En effet, les mêmes calculs effectués avec une saturation résiduelle de 70% (au lieu de 80%) présentent un décalage moins prononcé [COLLIN *et al.*, 2002].

La figure 6.26-e montre que la longueur des jauges ne peut pas expliquer le gonflement observé. En effet, la déformation calculée par la distance entre des points espacés respectivement de 0,83 mm, 1,66 mm et 4,16 est approximativement identique (figure 6.26-e). La différence réside dans le fait que plus la jauge est longue, moins le *collapse* est brutal.

La figure 6.26-f présente la mesure du LVDT axial. La comparaison avec la réponse numérique montre que l'amplitude finale de la déformation axiale est qualitativement prédite.

La figure 6.27 montre une carte de la porosité et des déformations axiales, pour un front d'eau à mi-hauteur. On remarque clairement deux zones. La première est déjà

atteinte par le front d'eau ; la porosité vaut environ 37,6 % et la déformation axiale est compressive ( $\approx 2,8\%$ ). Dans la seconde partie, la craie présente ses propriétés originales : la porosité égale 40,55% et les déformations axiales sont légèrement en extension.

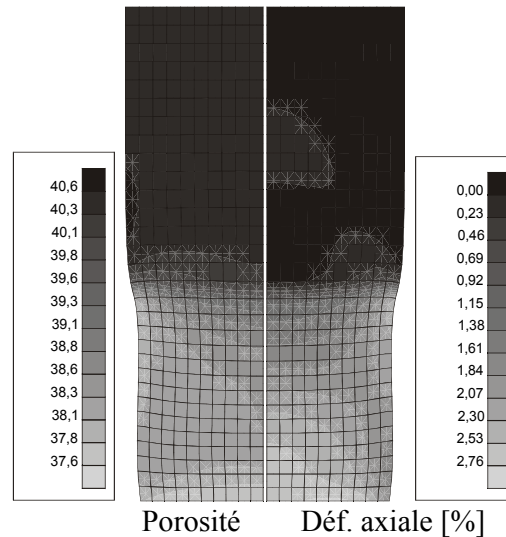


Figure 6.27: Cartes de porosité et déf. axiale (amplification de la déformée : 10 fois)

### 3.2.2.2. Etat de contrainte anisotrope

Nous passons à présent à la modélisation des essais de waterflooding en conditions anisotropes (type I et II). Nous avons tout d'abord déterminé la perméabilité de l'échantillon afin de reproduire les courbes d'entrées d'eau. Nous avons ainsi trouvé des valeurs de  $1,72 \cdot 10^{-15} \text{ m}^2$  (type I) et  $2,2 \cdot 10^{-15} \text{ m}^2$  (type II). La valeur du paramètre  $\kappa_s$  trouvée précédemment est conservée pour ces simulations. Les figures 6.28-a et 6.29-a montrent que les transferts de fluides sont bien reproduits par le modèle.

Dans ces simulations, l'ensemble du chargement est modélisé : le chemin proportionnel, le waterflooding et le chargement final. Les figures 6.28-b-c montrent le chemin de contrainte suivi dans les plans  $(p-s)$  et  $(I_\sigma, II_\sigma)$ . Ce dernier chemin est similaire dans les deux types de simulations.

La comparaison des mesures au LVDT est réalisée grâce aux figures 6.28-d-e-f (type I). Dans la première, l'ensemble des phases est représenté ; le modèle surestime les déformations plastiques du chemin AC. Durant le waterflooding (figure 6.28-e), les déformations de compression (environ 3%) apparaissent dans la direction radiale, leur amplitude est bien prédite par le modèle. Durant le chemin de rechargement (EF), le déplacement des capteurs est surestimé par le modèle.

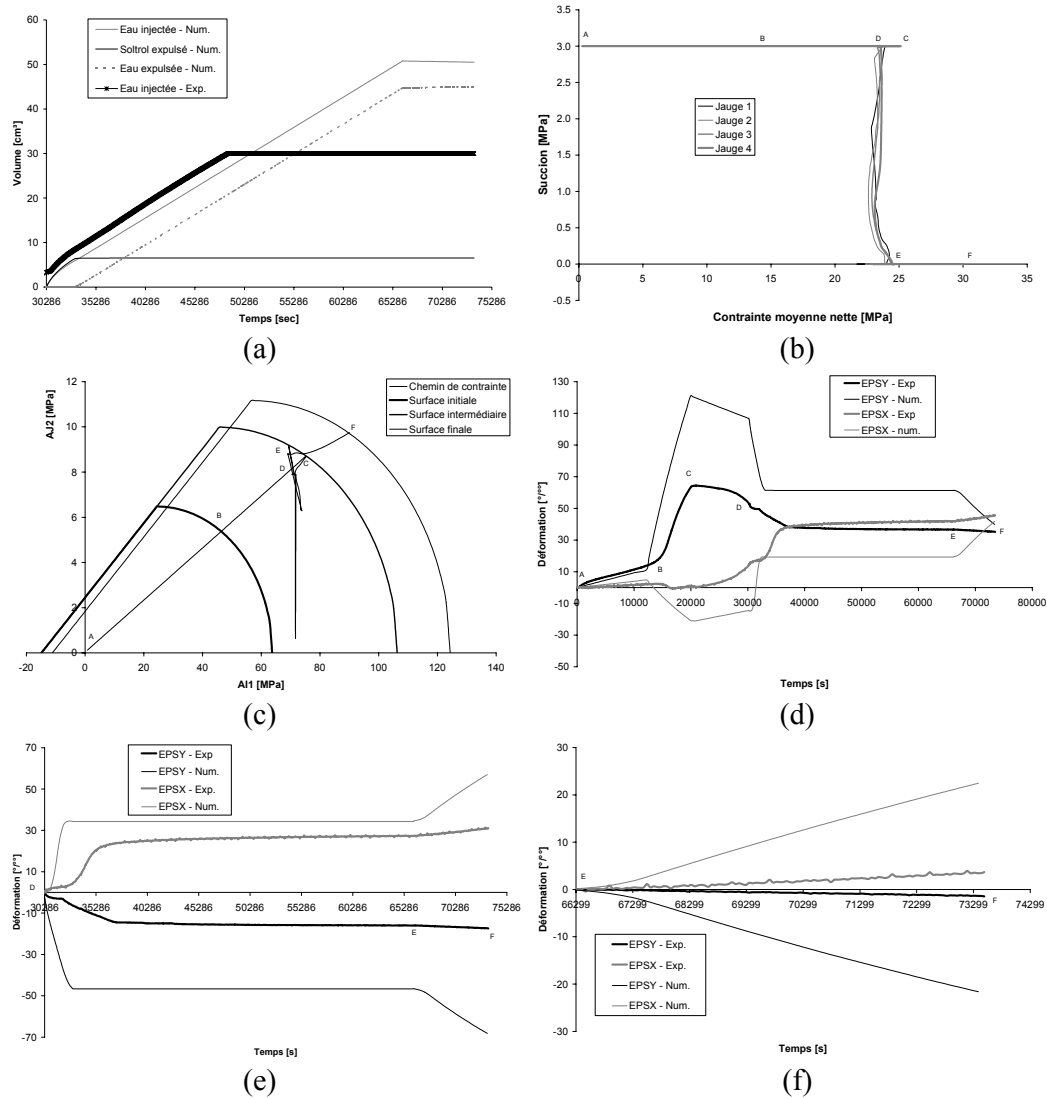


Figure 6.28 : Essai de waterflooding en conditions de contrainte anisotrope (type I)

Pour les essais de type II, les conclusions sont similaires au cas précédent avec toutefois une différence importante : les déformations de compression (environ 5%) apparaissent dans la direction axiale.

En conclusion, le modèle est capable de reproduire qualitativement le comportement de la craie durant l'ensemble des essais anisotropes. Le *collapse* apparaît dans la direction de la contrainte majeure, ce qui est bien prédit par le modèle. Toutefois, les déformations du matériau sont surestimées.



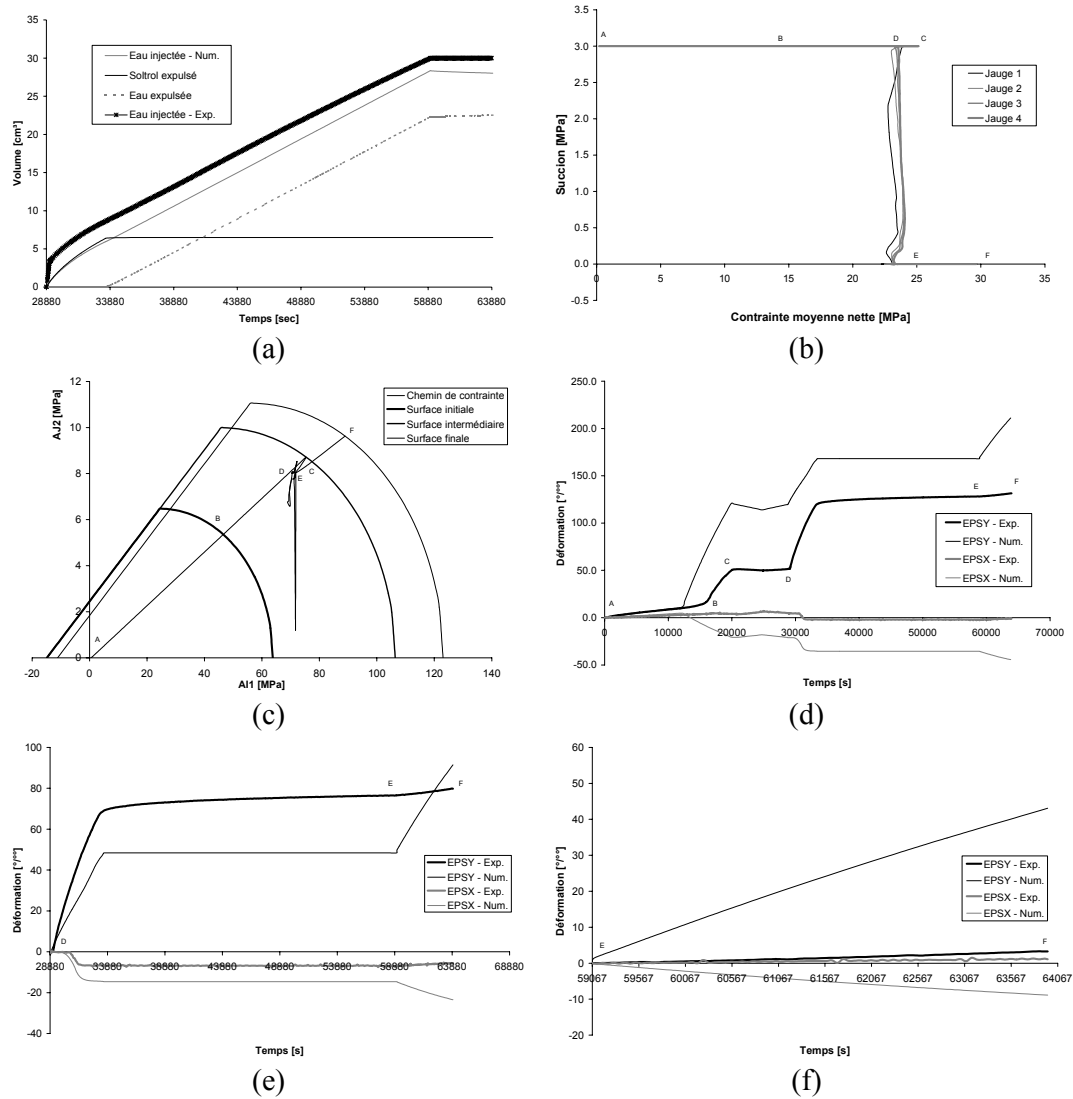


Figure 6.29 : Essai de waterflooding en conditions de contrainte anisotrope (type II)

### 3.3. Conclusions

Les paramètres de la craie que nous avons déterminés dans le chapitre IV nous ont bien permis de reproduire correctement le comportement de ce matériau. En conditions saturées, les prédictions du modèle pour des essais triaxiaux complexes sont très proches des mesures expérimentales, quel que soit le mécanisme plastique activé.

En conditions non-saturées, nous avons simulé des essais de waterflooding en conditions isotropes et anisotropes de contraintes. Ces expérimentations ont permis de déterminer le coefficient  $\kappa_s$  à une valeur de 0,001. Ces simulations couplées ont confirmé que le modèle développé d'écoulement multiphasique est capable de reproduire les transferts de fluides dans la craie. Le modèle mécanique est également en mesure de reproduire qualitativement les mesures expérimentales dont nous disposons.

Notamment, en conditions anisotropes, le modèle prédit bien un collapse dans la direction de la contrainte majeure.

#### 4. CONCLUSIONS

Vu les nombreux couplages des phénomènes étudiés, les modèles développés pour reproduire les écoulements multiphasiques et le comportement mécanique de la craie, présentent une certaine complexité. Il est donc nécessaire de valider ces derniers.

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons utilisé le modèle d'écoulement dans différents cas limites pour lesquels nous disposons de solution analytique ou de réponse numérique déjà publiées. L'ensemble des comparaisons est très satisfaisant ; la réponse du modèle est proche des solutions proposées. De plus, cela nous a permis de mettre en évidence certains effets de couplage.

Dans la seconde partie, la validation de la loi mécanique s'est effectuée, en conditions saturées, sur base de résultats d'essais triaxiaux saturés en eau ou en huile. Les déformations prédites par le modèle sont très proches de celles mesurées expérimentalement. En conditions non-saturées, les essais de waterflooding nous ont permis de mieux comprendre le comportement de la craie, dans des conditions proches de celles d'un réservoir soumis à une injection d'eau. La comparaison des déformations mesurées nous a montré que le modèle est capable de reproduire les phénomènes de tassements observés lors du passage du front d'eau et ce dans diverses conditions de contraintes.

Nous pouvons donc à présent aborder le dernier chapitre qui concerne les exemples d'applications.

## **CHAPITRE VII**

### **Applications**



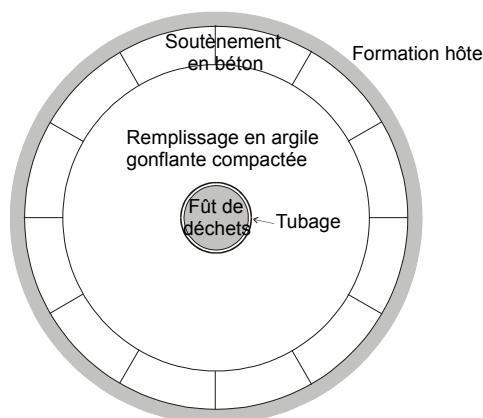
## CHAPITRE VII

### APPLICATIONS

#### 1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons aborder les exemples d'applications des deux problèmes qui nous intéressent : le stockage de déchets nucléaires et la compaction des réservoirs pétroliers de Mer du Nord.

Une des solutions retenues pour le stockage de déchets nucléaires à longue durée de vie est de les entreposer en profondeur dans des couches géologiques peu perméables. Afin de tester la faisabilité de cette approche, des URL (Underground Research Laboratories) ont été créés dans différents pays du monde. Différentes expérimentations peuvent être réalisées. Tout d'abord, à l'échelle de la galerie de stockage (figure 7.1), différentes mesures peuvent être réalisées dans des conditions très proches de celles qui seront créées une fois les déchets nucléaires installés.



*Figure 7.1 : Galerie de stockage de déchets*

Toutefois, il est également intéressant de réaliser des expériences à échelle réduite de manière à tester à moindre coût différentes configurations de barrières d'étanchéité. Ces essais sur le matériau de remplissage (souvent de l'argile) reproduisent les conditions dans la galerie : une resaturation par la formation hôte et un chauffage à cause de l'énergie dégagée par les déchets.

Dans le cadre du projet CATSIUS CLAY, deux modélisations concernent ce genre d'expérimentation : le benchmark 2.2 que nous allons décrire et le benchmark 3.2 qui a été présenté dans la thèse de LI (2000). L'idée est la suivante : si les modèles sont capables de reproduire les expérimentations, ils pourront être utilisés pour étudier l'évolution à long terme de la barrière dans les conditions réelles.

D'autre part, nous avons déjà parlé, dans le chapitre IV, du problème de la compaction de réservoirs crayeux suite à des injections d'eau. Notre modèle mécanique utilise la succion comme variable fondamentale permettant d'expliquer ce phénomène ; ce fut d'ailleurs présenté par DELAGE *et al.* (1996) sur base du chemin hydro-mécanique suivi dans le réservoir depuis sa création jusqu'à l'injection (figure 7.2).

Dans le plan  $(p - p_{oil}, s)$ , la première phase correspond au dépôt de craie au fond de la mer. A ce moment, il n'y a pas encore d'huile dans le réservoir et la succion est donc nulle (chemin OA). Dans une seconde phase, on suppose que l'huile s'infiltre dans le réservoir durant le dépôt des couches argileuses constituant l'overburden. La succion commence à se créer (chemin AB). Ensuite, durant le chemin BC, l'infiltration de l'huile continue après la fin du dépôt de l'argile.

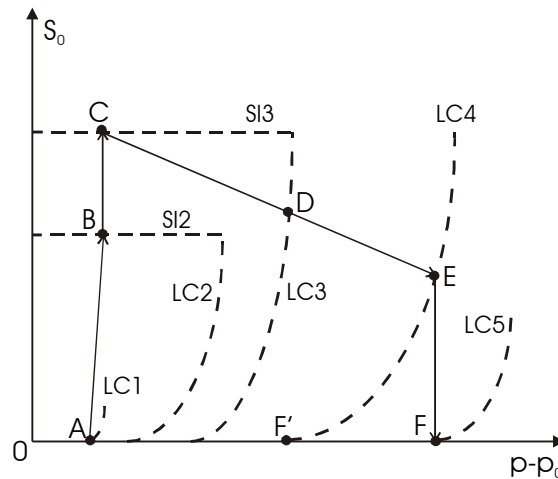


Figure 7.2 : Histoire hydro-mécanique d'un réservoir (d'après [DELAGE *et al.*, 1996])

A partir du point C, débute la production du réservoir ; en conséquence, la pression d'huile dans le réservoir diminue et la contrainte nette augmente. Le chemin suivi reste élastique jusqu'au moment où l'état de contrainte atteint la courbe LC (point D) où le comportement devient plastique. Au point E, l'injection d'eau dans le réservoir occasionne une diminution brutale de la succion alors que la contrainte nette moyenne ne varie pas beaucoup. Ce chemin de mouillage (chemin EF) provoque un écrouissage de la courbe LC et s'accompagne donc de déformations plastiques : cela explique la compaction observée.

Nous allons donc modéliser des réservoirs à partir de la phase de production et vérifier que le raisonnement que nous venons de présenter se vérifie dans le calcul et qu'une compaction est bien prédite !

## 2. PROJET CATSIUS CLAY

Nous avons déjà présenté au chapitre précédent des exercices de benchmark (dans le cadre du projet CATSIUS CLAY) qui valident le modèle d'écoulement multiphasique que nous avons développé. Dans le cadre de ce projet, nous avons également réalisé une prédiction du comportement d'une argile soumise à hydratation et chauffage. Les résultats de cette expérience sont connus ([VILLAR *et al.*, 1994], [VOLKAERT *et al.*, 1996]) mais la simulation reste une prédiction car les différents partenaires du projet sont libres d'utiliser des modèles différents. Une série d'essais réalisés sur l'argile ([VILLAR *et al.*, 1994], [PINTADO *et al.*, 1997]) permettent de déterminer les paramètres des modèles.

### 2.1. Définition du problème

L'argile utilisée dans l'expérimentation est une bentonite appelée Bentonite S2, qui est une montmorillonite provenant d'Almeria en Espagne. Cette argile a été compactée uniaxialement à une densité sèche donnée au tableau 7.1. Elle a ensuite été placée dans une cellule en acier dont les dimensions (en cm) sont données à la figure 7.3.

Paramètre	Symbole	Valeur	Unité
Masse volumique sèche	$\rho_d$	1,66	g/cm <sup>3</sup>
Teneur en eau	$w$	11,8	%
Degré de saturation	$S_r$	49	%

Tableau 7.1 : Caractéristiques initiales de la bentonite

Durant l'expérience qui a duré au total 2401,6 heures, l'échantillon a été saturé et chauffé et différentes mesures de température et de teneur en eau ont été effectuées en cours d'essai :

- La sonde chauffante est un cylindre métallique placé verticalement dans la partie supérieure de la cellule (figure 7.3). Elle consiste en une résistance régulée électroniquement à l'aide d'un thermocouple. Elle délivre une puissance de 40 W jusqu'à obtention d'une température de 100°C et se coupe ensuite jusqu'au moment où la température descend en dessous de 97°C. La cellule contenant l'échantillon est en contact direct avec l'air ambiant du laboratoire que nous supposons être à une température de 25°C.
- L'hydratation de l'échantillon est effectuée par sa base à l'aide d'une pierre poreuse dont les dimensions coïncident avec celles de la cellule. La pression d'injection est 1,1 MPa.
- Durant l'expérimentation, l'évolution du volume d'eau injecté est enregistrée ainsi que celle de la pression (contrainte) totale mesurée à l'aide du capteur de

pression. De plus, les différents thermocouples permettent de connaître l'évolution de la température au sein de l'échantillon tout au long de l'expérience. Après 2401,6 heures, la cellule est démontée et l'échantillon est découpé en tranches. Cela a permis de connaître la distribution finale de la teneur en eau.

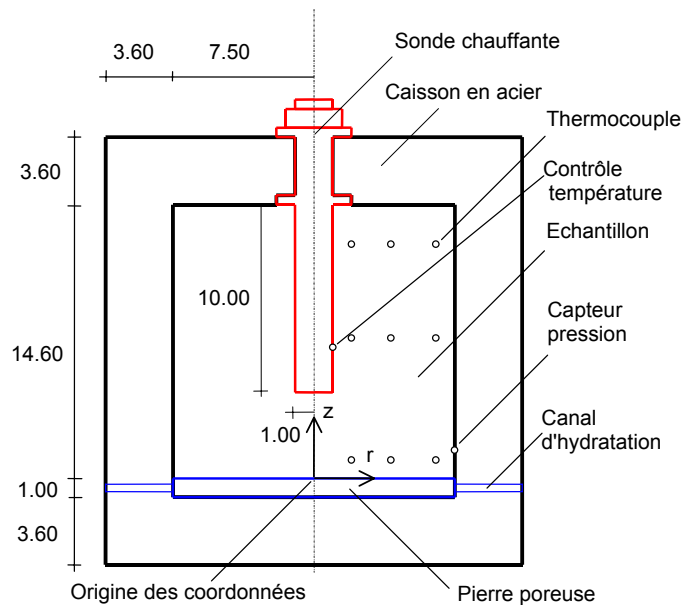


Figure 7.3 : Schéma de l'expérimentation

L'objectif du calcul est de reproduire les différentes mesures réalisées au cours de l'expérience. A ce propos, il faut remarquer que l'information sur le comportement mécanique dont nous disposons est très pauvre. En effet, nous connaissons uniquement la contrainte totale en un point. Nous ne pourrions donc pas tirer beaucoup de conclusions sur le comportement mécanique du matériau.

Par contre, les mesures de température et de teneur en eau sont beaucoup plus nombreuses. Elles permettent une meilleure compréhension des échanges hydriques au cours de l'expérience.

## 2.2. Paramètres du modèle

Grâce aux essais réalisés sur la bentonite ([VILLAR *et al.*, 1994], [PINTADO *et al.*, 1997]), nous pouvons déterminer une partie des paramètres des modèles mécaniques et d'écoulement.

Le modèle mécanique utilisé pour la simulation est la loi de comportement d'Alonso-Gens (1991) qui a été implémentée dans le code par X-L Li [LI, 2000]. Nous avons également présenté ce modèle dans le chapitre III, paragraphe 3.3. Dans le cadre de ce benchmark, nous disposons d'essais oedométriques à succion contrôlée : une



première série est réalisée sous contrainte verticale constante, la deuxième consiste en des essais à succion constante.

Nous nous contenterons ici de présenter dans le tableau 7.2 les paramètres obtenus à partir de ces essais. Cette détermination a été effectuée par X-L Li et est commentée plus en détails dans Li (2000) et Collin *et al.* (2002a).

Paramètres	Symboles	Valeurs	Unités
Index de compressibilité (saturé)	$\lambda(0)$	0,4041	-
Index de compressibilité élastique	$\kappa$	0,015	-
Contrainte de préconsolidation (saturé)	$p_0^*$	0,6	MPa
Compressibilité élastique pour des chemins en succion	$\kappa_s$	0,11	-
Compressibilité plastique pour des chemins en succion	$\lambda_s$	0,25	-
Pression de référence	$p_c$	0,45	MPa
Constante $r = \lambda(s) / \lambda(0)$	$r$	0,3	-
Paramètre contrôlant l'augmentation de raideur avec la succion	$\omega$	0,041	MPa <sup>-1</sup>

Tableau 7.2 : Paramètres mécaniques de la bentonite S-2

Nous pouvons ainsi représenter la courbe LC (figure 7.4). Elle est très importante car elle permet de modéliser certains aspects du comportement des sols non-saturés comme l'augmentation de résistance avec la succion et le phénomène de *collapse* lors de chemin de mouillage.

Dans l'approche de Barcelone, la courbe SI permet de modéliser les déformations irréversibles lors de chemins contrôlés en succion. Cette courbe est définie par le paramètre  $s_0$  qui représente la plus grande succion à laquelle l'échantillon a été soumis. Dans ce calcul, nous supposons que  $s_0$  correspond à la succion initiale dans la bentonite. Nous la déterminons à partir de la courbe de rétention de ce matériau, en connaissant la saturation initiale (49%).

D'autres paramètres restent par contre totalement inconnus, comme l'angle de frottement, la cohésion, le coefficient de Poisson. Ils sont pourtant très importants car ils conditionnent la résistance au cisaillement et les déformations de cisaillement. Pour la modélisation, nous avons pris les valeurs suivantes :  $\phi = 35^\circ$ ,  $c = 0,1$  MPa et  $\nu = 0,4$ .

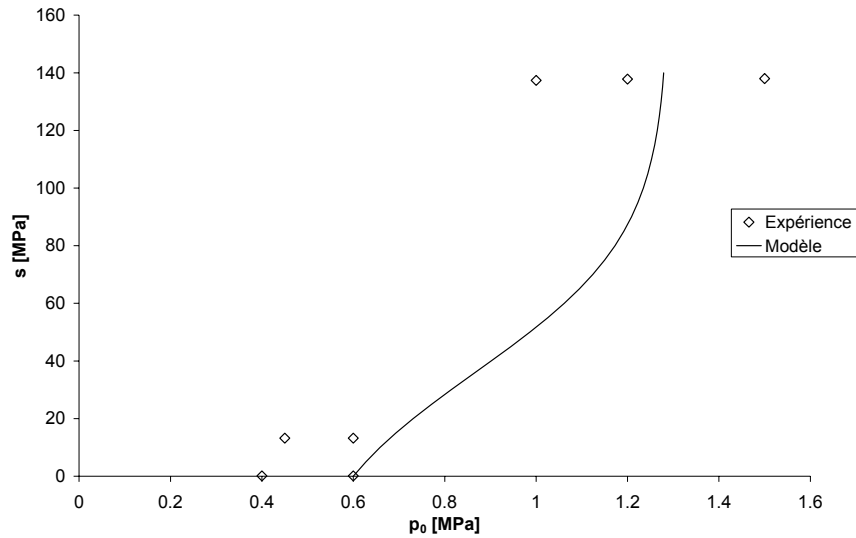


Figure 7.4 : Courbe LC de la bentonite S-2

A côté du modèle mécanique, nous devons également déterminer les propriétés hydrauliques et thermiques du milieu. Pour étudier l'écoulement de fluides dans la bentonite, nous avons besoin de connaître la porosité, la perméabilité et la courbe de rétention.

A partir des caractéristiques initiales de la bentonite (tableau 7.1), nous pouvons calculer la porosité par la formule suivante:

$$n = \frac{\rho_d}{\rho_w} \frac{w}{S_{r,w}} = 0,40 \quad (7.1)$$

Pour modéliser les écoulements non-saturés de l'eau, il est très important de connaître la courbe de rétention. Un nombre important de mesures expérimentales nous est fourni sous la forme de couples de valeurs teneur en eau – succion. Toutefois, dans le code, les courbes de rétention doivent être écrites sous la forme de relations entre la saturation et la succion. Nous devons donc transformer la teneur en eau donnée en une saturation en supposant une porosité de 40%. Cette hypothèse amène des valeurs de saturation en eau supérieure à 100%. Dans ce cas, nous avons décidé de ramener ces valeurs à 100%.

Ces mesures ont été réalisées à différentes densités sèches variant de 1.55 g/cm<sup>3</sup> à 1.95 g/cm<sup>3</sup>. La figure 7.5-a représente les points correspondant à une densité de 1,65 qui est approximativement celle de l'échantillon. A la figure 7.5-b, nous avons repris l'ensemble des données expérimentales (quelle que soit la valeur de la densité) et nous ne voyons pas une influence claire de la densité. Sur ces deux figures, nous avons également représenté la courbe de rétention par laquelle nous avons modélisé ces données. Elle s'exprime selon la relation 7.2 :

$$S_{r,w} = S_{res} + \frac{CSW3 \cdot (1 - S_{res})}{CSW3 + (CSW1 \cdot s)^{CSW2}} \quad (7.2)$$

avec  $CSW1 = 3,5 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$ ,  $CSW2 = 0,90$ ,  $CSW3 = 120$ ,  $S_{res} = 0,1$  et  $s$  est la succion.

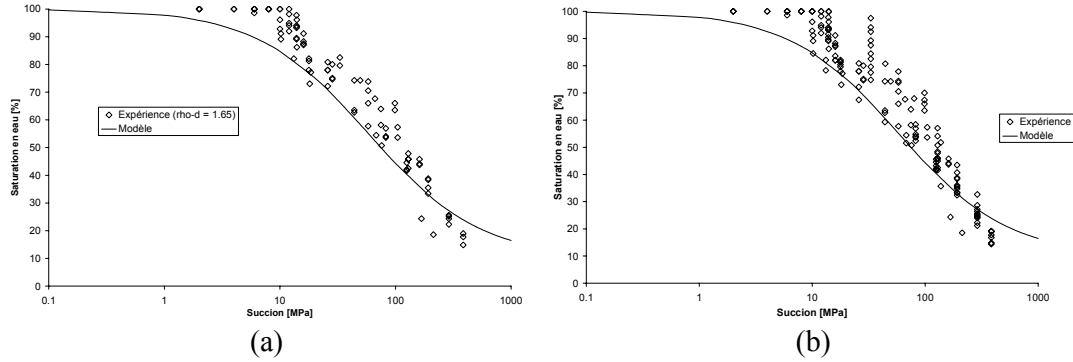


Figure 7.5 : Courbe de rétention de la bentonite S-2

Des mesures expérimentales de la courbe de rétention à différentes températures sont également disponibles ; toutefois, cette influence ne peut pas être prise en compte dans l'état actuel de notre modèle.

Les mesures de perméabilité (en m/s) du milieu saturé en eau montrent également une influence de la température. Nous avons interprété ce phénomène en le reliant à une variation de viscosité du fluide. Nous pouvons ainsi calculer une perméabilité intrinsèque à l'aide de la relation 7.3 :

$$k_{int} = K \frac{\mu_w}{\rho_w g} \quad (7.3)$$

où  $k_{int}$  est la perméabilité intrinsèque [ $\text{m}^2$ ],  $K$  est la perméabilité exprimée en m/s,  $\mu_w$  est la viscosité cinématique de l'eau.

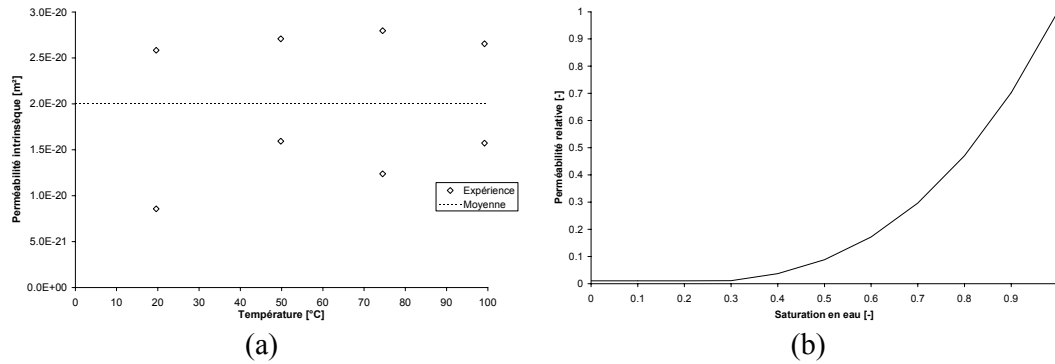


Figure 7.6 : Perméabilité de la bentonite

La figure 7.6-a présente les valeurs de perméabilité intrinsèque obtenues. Elles sont peu dépendantes de la température avec une valeur moyenne de  $2,0 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2$ .

Toutefois, dans la modélisation, afin de reproduire la courbe d'entrée d'eau, nous avons adopté une valeur de perméabilité de  $0,6 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2$ .

Afin de modéliser les écoulements d'eau dans l'échantillon désaturé, nous avons également besoin de connaître la perméabilité relative à l'eau en fonction de la saturation. Toutefois, aucune mesure expérimentale n'a été effectuée à ce propos et nous avons dès lors pris la formule suivante :

$$k_{r,w} = \text{MAX} \left[ \frac{(S_{r,w} - 0,1)^3}{(1 - 0,1)^3}, k_{r \min} \right] \quad (7.4)$$

où  $k_{r \min}$  est la perméabilité relative minimum qui est égale à 0,01.

Des mesures thermiques ont également été réalisées. Nous avons donc une information sur la conductivité thermique du milieu en fonction de la saturation. A priori, un milieu saturé d'eau est plus conducteur qu'un milieu désaturé ; plusieurs formulations '*analytiques*' sont proposées dans le chapitre II, en fonction de la conductibilité de chaque phase du milieu. Toutefois, nous préférons nous servir des données disponibles (figure 7.7-a) afin de trouver une droite de régression, que nous avons implémentée dans le code:

$$\Gamma = CL1 S_{rw} + CL2 \quad (7.5)$$

où  $CL1 = 1,0507$  et  $CL2 = 0,3633$ .

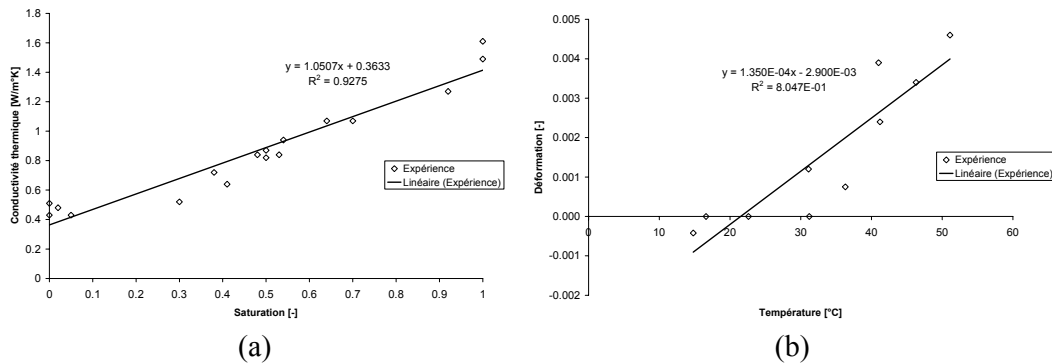


Figure 7.7 : Propriétés thermiques de la bentonite

A la figure 7.7-b, nous reprenons les mesures des déformations thermiques réalisées sur la bentonite. Nous modélisons l'effet de la température sur le comportement mécanique par un coefficient de dilation élastique thermique. A partir des données, nous trouvons un coefficient de  $1,35 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ .

Un dernier paramètre important du milieu est la tortuosité à laquelle les flux de vapeur sont directement proportionnels. Malheureusement, aucune mesure expérimentale n'est disponible. Nous avons pris une valeur de  $\tau = 0,15$  qui permet de bien représenter les mouvements d'eau. Cette valeur est proche de celle de  $\tau = 0,1$ , utilisée par l'équipe de Barcelone [ALONSO *et al.*, 1999b].

Paramètres	Symbole	Valeur	Unité
Masse volumique des grains	$\rho_s$	2750	kg.m <sup>-3</sup>
Chaleur spécifique des grains	$c_{p,s}$	879	J.kg <sup>-1</sup> .°K <sup>-1</sup>
Masse volumique de l'eau	$\rho_w$	1000	kg.m <sup>-3</sup>
Compressibilité de l'eau	$\chi_w$	3 10 <sup>9</sup>	Pa
Coef. de dilatation therm.	$\alpha_w^T$	3.8 10 <sup>-4</sup>	°K <sup>-1</sup>
Viscosité dynamique de l'eau	$\mu_w$	1.00910 <sup>-3</sup>	Pa.s
Coef. de var. therm. de la viscosité	$\beta_w^T$	0.01	°K <sup>-1</sup>
Chaleur spécifique de l'eau	$c_{p,w}$	4180	J.kg <sup>-1</sup> .°K <sup>-1</sup>
Masse volumique initiale de l'air	$\rho_{a0}$	1.205	kg.m <sup>-3</sup>
Viscosité dynamique de l'air	$\mu_a$	1.8010 <sup>-5</sup>	Pa.s
Coef. de dilatation therm.	$\alpha_a^T$	-2.5 10 <sup>-3</sup>	°K <sup>-1</sup>
Chaleur spécifique de l'air	$c_{p,a}$	1000	J.kg <sup>-1</sup> .°K <sup>-1</sup>
Chaleur spécifique de la vapeur	$c_{p,v}$	1.90 10 <sup>3</sup>	J.kg <sup>-1</sup> .°K <sup>-1</sup>
Chaleur latente de vaporisation	$L$	2.50 10 <sup>6</sup>	J.kg <sup>-1</sup>
Accélération de la gravité	$g$	9.81	m.s <sup>-2</sup>

*Tableau 7.3 : Propriétés des différentes phases de la bentonite*

Dans les tableaux 7.3 et 7.4, nous avons listé les propriétés physiques des différentes phases respectivement dans l'échantillon et dans le caisson métallique et la pierre poreuse.

Paramètres	Symbole	Valeur	Unité
Masse volumique de l'acier	$\rho_s$	7850	kg.m <sup>-3</sup>
Chaleur spécifique de l'acier	$c_{p,s}$	4610	J.kg <sup>-1</sup> .°K <sup>-1</sup>
Conductivité thermique de l'acier	$\Gamma_s$	46.5	W.m <sup>-1</sup> .°K <sup>-1</sup>
Masse volumique de la pierre	$\rho_s$	2750	kg.m <sup>-3</sup>
Chaleur spécifique de la pierre	$c_{p,s}$	879	J.kg <sup>-1</sup> .°K <sup>-1</sup>
Conductivité thermique de la pierre	$\Gamma_s$	2	W.m <sup>-1</sup> .°K <sup>-1</sup>

Tableau 7.4 : Propriétés de l'acier et de la pierre poreuse

### 2.3. Prédictions du modèle

Nous avons choisi de modéliser l'échantillon, la pierre poreuse et le caisson métallique. La sonde chauffante n'est pas prise en compte dans le maillage. Nous avons tenu compte des conditions d'axi-symétrie afin d'étudier uniquement une tranche radiale (figure 7.8). Ce maillage est composé de : 630 nœuds, 102 éléments MWAT représentant l'échantillon, 68 éléments MWAT représentant le caisson, 7 éléments MWAT représentant la pierre poreuse, 38 éléments CONRA modélisant les échanges convectifs entre le caisson et l'air ambiant, 11 éléments LICHT simulant un flux thermique de 40 W et enfin 11 éléments FMILC permettant le contrôle de la température de la sonde.

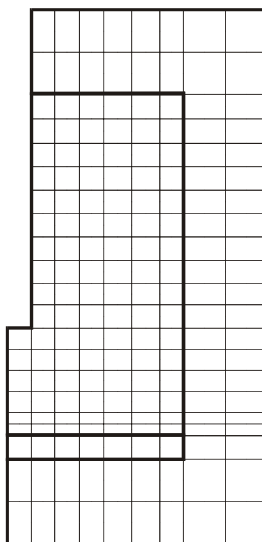


Figure 7.8 : Maillage de l'expérimentation

### 2.3.1. CONDITIONS INITIALES

L'échantillon est placé à la température ambiante de 25°C dans le caisson métallique. L'air présent dans les pores est à la pression atmosphérique de 100 kPa et la pression de l'eau est donnée par la succion correspondant à la saturation initiale de 49%. Elle vaut donc -78,53 MPa pour la courbe de rétention que nous utilisons.

L'échantillon n'est pas initialement soumis à des contraintes : la contrainte totale est donc nulle. Dans ce calcul non-saturé, nous utilisons la contrainte nette dans la loi constitutive qui vaut initialement :

$$\bar{\sigma} = \sigma - p_g = -100 \text{ kPa}$$

### 2.3.2. CONDITIONS LIMITES

Le caisson est imperméable à l'eau ; la seule entrée d'eau possible se situe au niveau de la pierre poreuse par où on injecte de l'eau à 1,1 MPa. De plus, nous supposons que la pression de gaz reste constante et égale à sa valeur initiale de 100 kPa. Cela suppose que l'air sec peut s'évacuer suffisamment rapidement sans provoquer de surpression. Cette hypothèse importante est toutefois faite par l'ensemble des participants [ALONSO *et al.*, 1999b]. Nous avons étudié l'influence de la variation de pression d'air et montré qu'elle avait pour conséquence de diminuer la désaturation près de la sonde [COLLIN *et al.*, 2002a].

D'un point de vue thermique, un flux de chaleur correspondant à 40 W est imposé au niveau du contact sonde-bentonite. Le contrôle de la température est réalisé par les éléments FMILC qui obligent la température à rester en dessous de 100°C. De plus, un flux de sortie par convection est modélisé entre la surface externe du caisson et l'air du laboratoire. Nous avons choisi un coefficient d'échange de 6,5 W/m².

Les conditions limites mécaniques sont relativement simples : le caisson métallique et la pierre poreuse sont infiniment rigides et nous supposons un contact parfaitement glissant entre l'échantillon et son confinement (caisson, pierre poreuse et sonde).

### 2.3.3. RESULTATS

Afin d'étudier cette modélisation très couplée, nous avons tout d'abord considéré uniquement le problème thermique. Cela permet de calibrer une première fois le coefficient de convection. De plus, les calculs ultérieurs ont montré que le champ de température n'est que peu influencé par l'écoulement et la mécanique. Le problème thermique est donc essentiellement conductif. Toutefois, nous avons montré que la conductivité thermique du milieu dépend du degré de saturation en eau ; dès lors, une mauvaise prédiction des échanges d'eau induit des variations dans les températures calculées. Les résultats présentés ci-dessous correspondent au cas totalement couplé.

A la figure 7.9-a-b-c, nous présentons une comparaison des températures mesurées expérimentalement et numériquement (pour le modèle T-H-M couplé), respectivement à la base, au milieu et à la partie supérieure de l'échantillon. La prédiction est très proche des mesures, excepté au milieu de l'échantillon près de la sonde, où le modèle surestime la température. Ces résultats montrent naturellement que la température est plus importante près de la sonde : environ  $75^{\circ}\text{C}$  à 1 cm de la sonde. Le matériau est par contre plus froid lorsqu'on s'éloigne de la source chaude : la température est alors conditionnée par la température extérieure.

Il est également important de remarquer que les températures ne varient pas beaucoup en fonction du temps entre 25,6 heures et la fin de l'expérience. En fait, l'état permanent thermique est atteint après 13 heures [VILLAR *et al.*, 1994] ; ensuite, les variations de température sont liées aux variations de conductibilité thermique en fonction de la saturation.

La puissance fournie est suffisante pour atteindre  $100^{\circ}\text{C}$  à la sonde. Dans un premier temps, la puissance développée vaut 27 W. Ensuite, elle diminue jusqu'à 23 W pour enfin augmenter durant le reste de l'expérience suite à la resaturation progressive de l'échantillon.

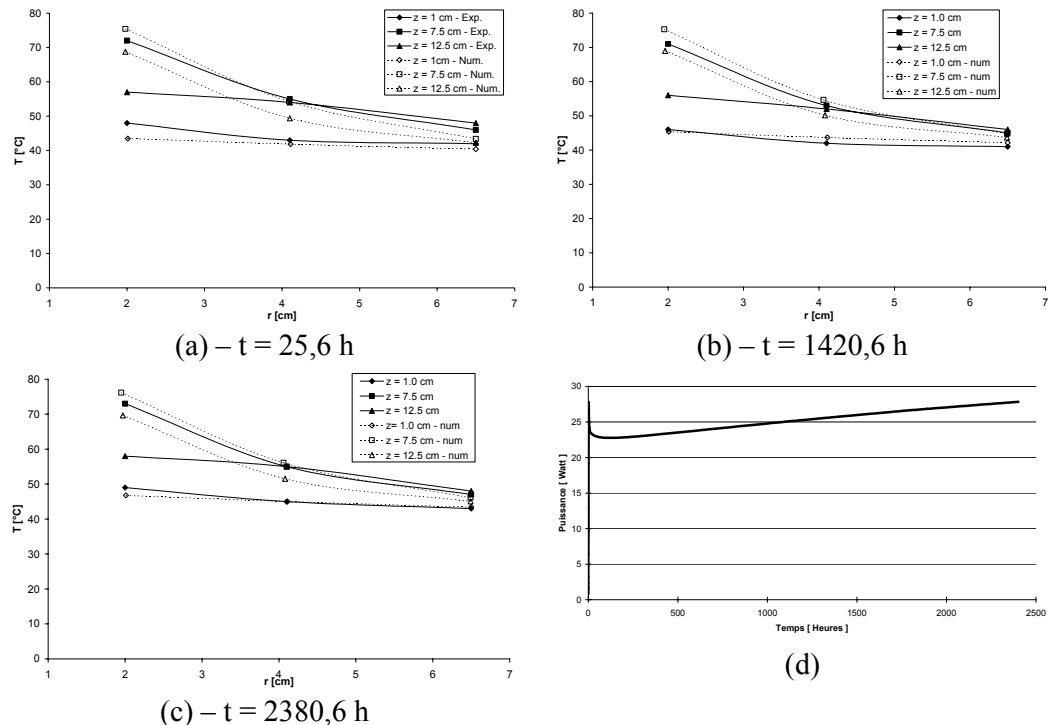


Figure 7.9 : Température dans l'échantillon

Dans l'expérience, une injection d'eau est réalisée à la base de l'échantillon. La figure 7.10-a montre que le modèle reproduit extrêmement bien la courbe d'entrée d'eau. Celle-ci dépend essentiellement de la perméabilité de la bentonite. Elle est par contre peu influencée par le problème thermique. Sur base de différentes expérimentations,



VILLAR *et al.* (1994) concluent que l'influence de la teneur en eau initiale est plus importante que celle du mode de chauffage.

L'expérience montre clairement une resaturation de l'échantillon à sa base et un assèchement de la bentonite près de la sonde suite à l'échauffement et le transfert d'eau en phase vapeur (figure 7.10-b-c). Dès lors, pour reproduire cette désaturation, il est obligatoire de prendre en compte dans le modèle les transferts en phase vapeur ; dans le cas contraire, la désaturation n'est pas très importante.

Le paramètre réglant l'intensité des flux de vapeur est la tortuosité. La valeur choisie dans la modélisation est calibrée de manière à reproduire la bonne teneur en eau près de la sonde. La comparaison des résultats numériques et expérimentaux n'est pas mauvaise.

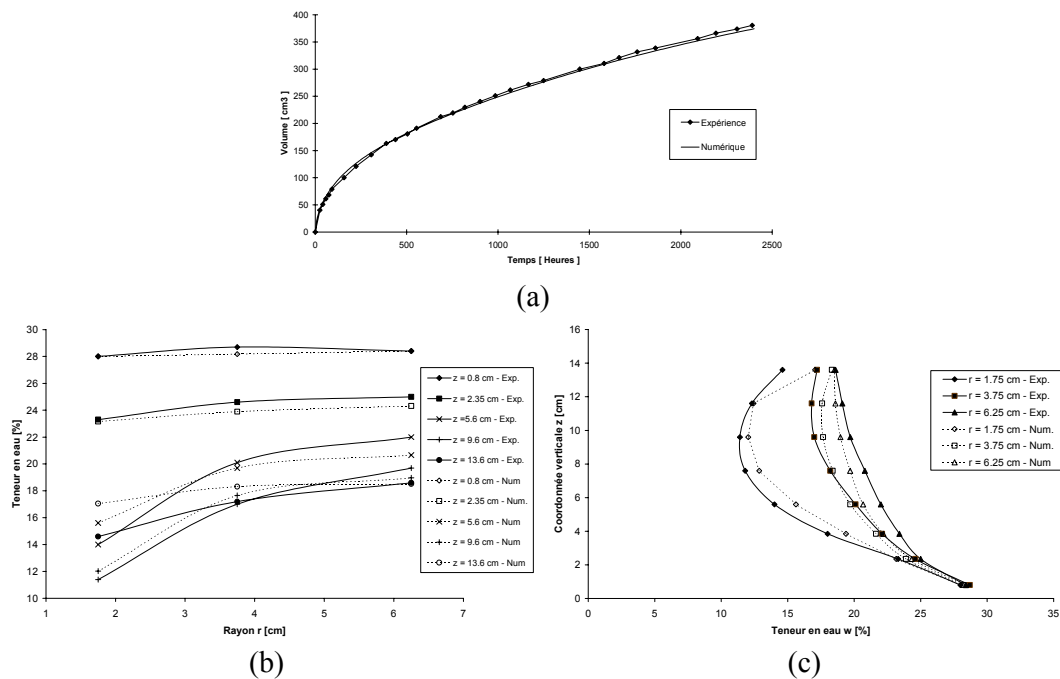


Figure 7.10 : Transferts hydriques dans l'échantillon

La figure 7.11 présente la saturation et la teneur en eau à la fin de l'expérience. Malgré l'injection d'eau à la base, on voit clairement que la teneur en eau diminue près de la sonde car l'eau s'y vaporise. Par contre à la base de l'échantillon, la saturation en eau est totale et nous avons une teneur en eau de l'ordre de 35%. Ce gradient important de la teneur en eau résulte d'un fort gradient de déformation.

La pression de vapeur d'eau est présentée à la figure 7-12 ; elle atteint au maximum 53,30 kPa près de la sonde. Nous montrons également les courbes de niveau de la variation de température : le maximum montre que l'on a bien environ 100°C près de la zone chauffée.

Vu les conditions limites mécaniques, l'échantillon ne peut pas subir de grandes déformations ; cela va entraîner une contrainte de gonflement qui est mesurée près de la pierre poreuse. La figure 7.13 permet une comparaison entre la prédiction du modèle et la mesure expérimentale. La pression mesurée à la fin de l'expérience est sous-estimée dans nos calculs ; la réponse du modèle reste toutefois qualitativement bonne.

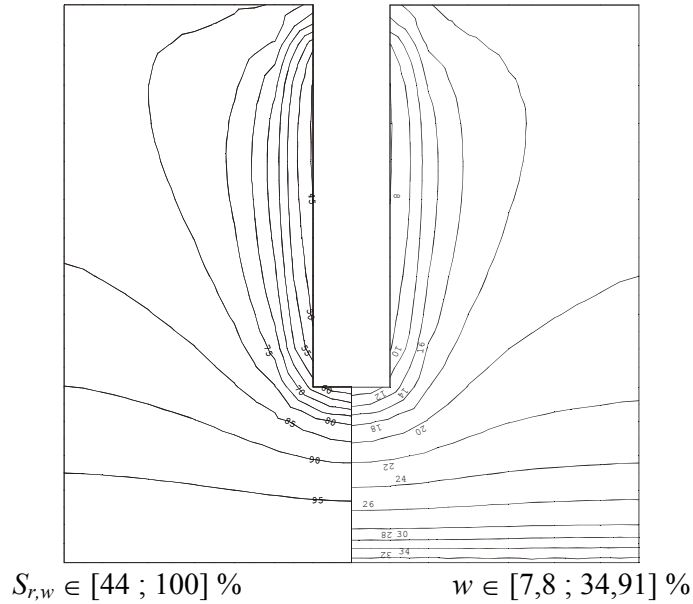


Figure 7.11 : Courbes de niveau de la saturation et la teneur en eau

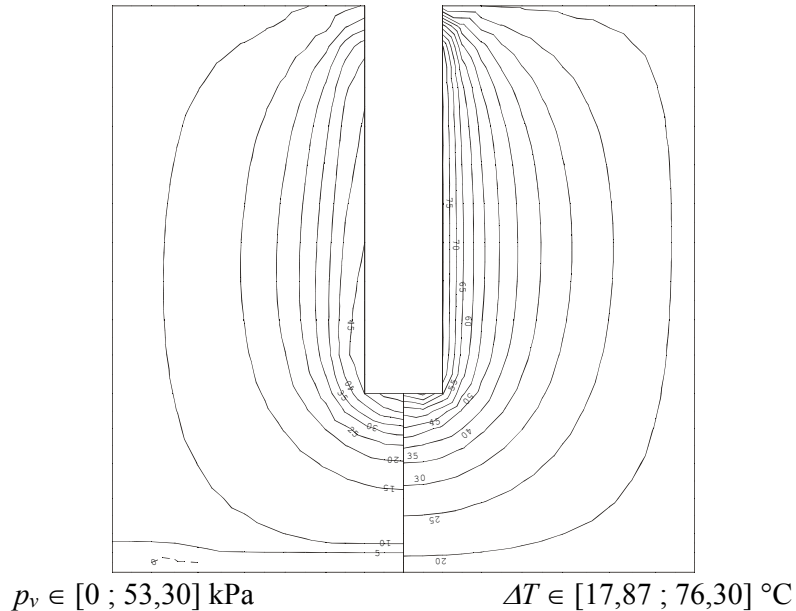


Figure 7.12 : Courbes de niveau de la pression de vapeur [kPa] et de la variation de température [°C]

Il est difficile de tirer des conclusions sur le comportement mécanique vu le peu de mesures expérimentales dont on dispose. Nous pouvons toutefois affirmer, sur base

de nos calculs, que la prise en compte des déformations du milieu n'a pas beaucoup d'influence sur la courbe d'entrée d'eau et la température dans l'échantillon.

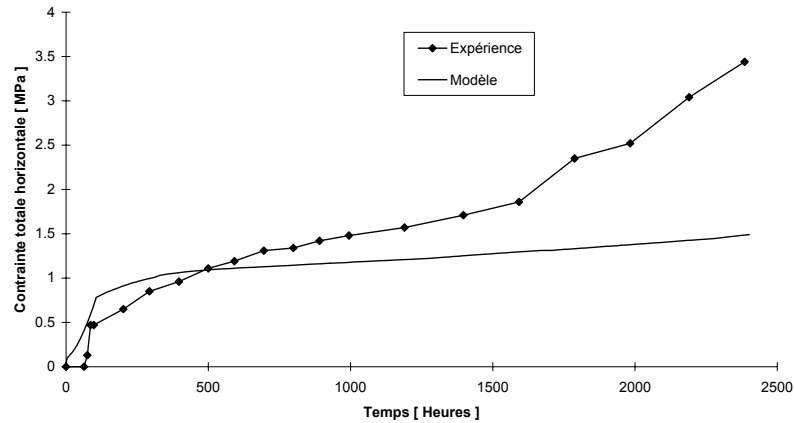


Figure 7.13 : Contrainte totale à la base de l'échantillon

## 2.4. Conclusions

Nous venons de montrer que le modèle développé est capable de bien prédire le comportement de la bentonite soumise à des sollicitations thermo-hydro-mécaniques. Les résultats de température sont très proches des mesures expérimentales : la zone chaude ( $T = 100\text{ °C}$ ) se trouve près de la sonde tandis que la température près du caisson métallique est contrôlée par la condition d'échange convectif avec l'air ambiant.

Les teneurs en eau sont également similaires aux mesures : une zone saturée se trouve près de la pierre poreuse. L'échantillon n'est pas totalement saturé car à cause de la chaleur, l'eau se vaporise près de la sonde où le matériau s'assèche. Il est dès lors très important de tenir compte des transferts en phase vapeur dans ce genre de calcul.

L'expérience ne comportant pas beaucoup d'effets mécaniques (à cause des conditions limites), nous ne pouvons pas tirer de conclusion à ce sujet.

Enfin, il faut remarquer que cette modélisation a été possible grâce à l'importante campagne d'essais réalisés sur la bentonite. Nous avons pu ainsi déterminer ses propriétés mécaniques, hydrauliques et thermiques. Le modèle demande en effet un grand nombre de paramètres mais cela provient du fait que nous étudions des problèmes complexes !

### 3. RESERVOIR PETROLIER

Nous nous proposons maintenant de mettre en œuvre les lois de comportement mécanique et d'écoulement afin de prédire les compactions observées dans les réservoirs de craie lors d'injections d'eau. Cela nécessite dès lors de créer un modèle de réservoir avec les nombreux paramètres qui le caractérisent : la géométrie du réservoir, les différentes couches qui le composent (épaisseur et propriétés), les conditions limites, ...

D'un point de vue écoulement, les frontières du réservoir sont supposées étanches, ce qui explique d'ailleurs la création de celui-ci (voir chapitre II, paragraphe 1). Les entrées et sorties de fluides peuvent uniquement s'effectuer par les puits suite à des injections ou des pompages.

Du point de vue mécanique, les conditions sont un peu plus complexes. En effet, le comportement mécanique du réservoir va être influencé par les terrains adjacents : sideburden, overburden et underburden. Dans notre étude, nous nous limitons aux seules couches du réservoir et nous supposons que les conditions limites sont de type oedométrique : il n'y a pas de déplacement latéral des bords du réservoir et l'action de l'overburden est prise en compte en imposant à la partie supérieure du réservoir la contrainte verticale correspondant au poids des couches supérieures. Enfin, l'underburden est supposé indéformable.

La question se pose également d'un modèle  $2D$  ou  $3D$ . Dans un réservoir, la géométrie est *a priori* tridimensionnelle ; de plus, les positions des puits de production et d'injection ne présentent pas non plus de conditions de symétrie. Sauf circonstances exceptionnelles, le modèle devrait donc être  $3D$ .

Toutefois, afin de mieux comprendre les phénomènes en jeu, sans entrer dans la complexité d'un maillage  $3D$ , nos simulations sont uniquement des modèles  $2D$  en état plan de déformation et axisymétrique. Nous montrerons ainsi les limites de ces approches.

Enfin, nous faisons l'hypothèse que les modèles de comportement que nous avons développés dans les chapitres précédents restent valables à l'échelle du réservoir. De plus, nous utilisons les paramètres mécaniques de la craie de Lixhe pour représenter le comportement des craies de réservoir.

#### 3.1. Modèle homogène

Le premier modèle que nous présentons est une simulation  $2D$ -axisymétrique d'un réservoir dont les propriétés sont homogènes. Ce calcul est inspiré du modèle proposé par HOMAND (2000). Nous considérons un réservoir d'un rayon de 2,5 km et de 300 m d'épaisseur (figure 7.14). Le puits de production se trouve à un rayon de 2,25 km et le puits d'injection est central. De part les conditions d'axisymétrie, les puits de production forment un cercle de 2,25 km de rayon autour du puits d'injection!

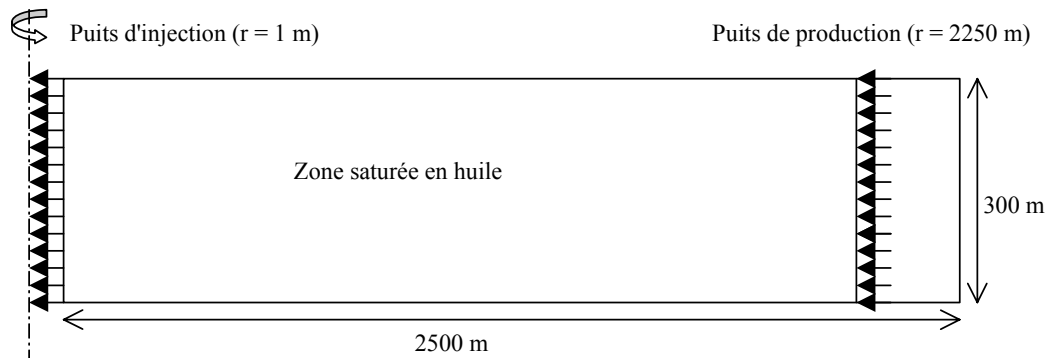


Figure 7.14 : Schéma du premier modèle

Le schéma de production est celui proposé par Homand (2000) (figure 7.15). Les puits sont contrôlés en pression : au puits de production, elle diminue de 10 MPa en 5 ans et reste constante ensuite jusqu'à la fin de la simulation. A partir de 20 ans d'exploitation, la pression d'eau au puits d'injection est augmentée de 5 MPa en 5 ans et est maintenue ensuite.

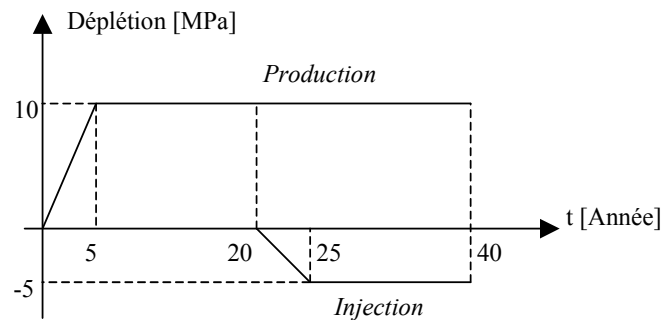


Figure 7.15 : Schéma de production

Dans ces calculs, nous reprenons les paramètres mécaniques de la craie de Lixhe définis dans les tableaux 6.4 et 6.5 du chapitre VI, paragraphe 3. La définition des paramètres d'écoulement est un peu plus complexe ; en effet, la courbe de rétention présente une hystérésis entre le chemin de séchage et de mouillage. Or la distribution initiale de la saturation dans le réservoir correspond à une courbe de séchage mais, lors de l'injection d'eau, nous suivons un chemin de mouillage. Notre modèle d'écoulement n'est toutefois pas prévu pour définir deux courbes de rétention pour un même matériau ni pour gérer le passage d'une à l'autre ; nous devons donc en choisir une seule. Nous faisons le choix de prendre la courbe de mouillage. Nous l'avons toutefois quelque peu modifiée pour des raisons de stabilité numérique (figure 7.16).

De plus, la perméabilité de la craie que nous avons utilisée pour la modélisation du waterflooding correspond à celle d'un échantillon non-fracturé : c'est la perméabilité de matrice. Toutefois, à l'échelle du réservoir, le matériau comprend des fractures qui ne sont pas nécessairement nombreuses, mais qui sont suffisantes pour influencer la perméabilité 'en grand' du réservoir. Nous prenons ainsi une perméabilité de  $7 \cdot 10^{-14} \text{ m}^2$

au lieu de  $3,5 \cdot 10^{-15} \text{ m}^2$  dans la simulation de waterflooding. Les autres paramètres hydrauliques de la craie sont ceux définis au chapitre VI, paragraphe 3.2.

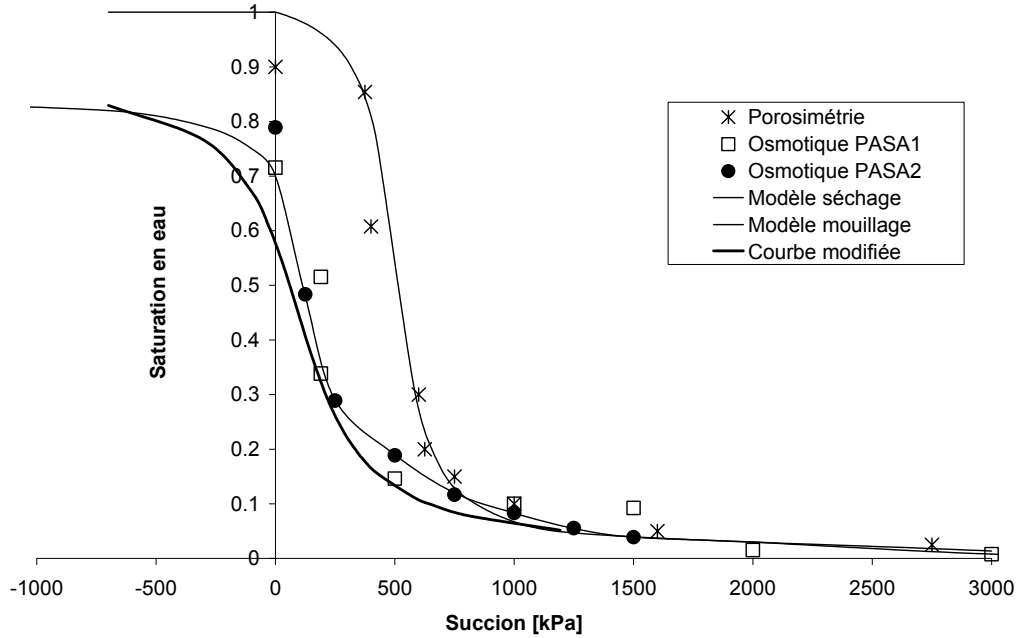
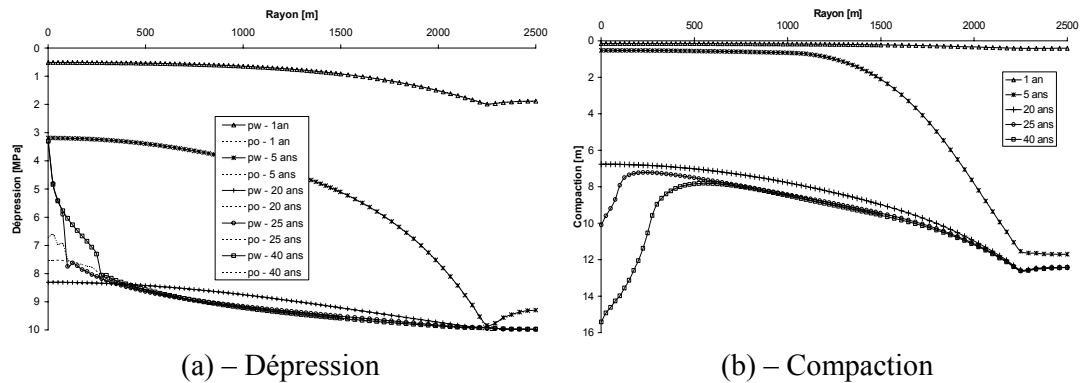


Figure 7.16 : Courbe de rétention utilisée

Les conditions initiales sont celles du réservoir d'Ekofisk : la contrainte verticale (totale) vaut 62 MPa et la contrainte horizontale égale 55 MPa. La pression de fluide est initialement égale à 49 MPa. Nous avons donc un coefficient  $K_0$  de 0,4615. Nous utilisons la courbe LC employée dans les simulations de waterflooding. La contrainte de préconsolidation  $p_0$  de la craie varie entre 10 MPa (craie-eau) et 22 MPa (craie-huile).

Nous négligeons l'effet de la gravité sur l'épaisseur du réservoir. Les contraintes et les pressions de fluides sont initialement uniformes. Nous avons choisi une succion initiale de 300 kPa ; elle correspond à une pression d'huile et d'eau respectivement de 49 MPa et 48,7 MPa.



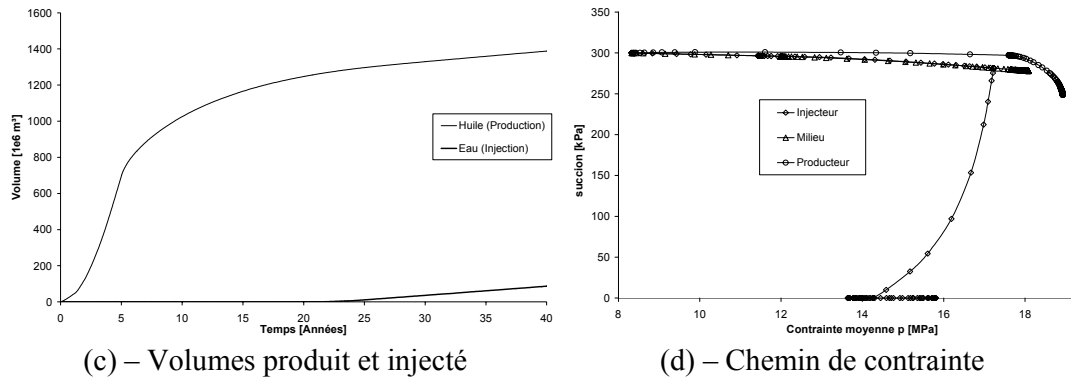


Figure 7.17 : Réservoir homogène (2D – Axisymétrique)

La figure 7.17 présente les résultats de la simulation en axisymétrie. Dans la première phase (production seule), la diminution de pression d'huile est la plus importante au puits de production (figure 7.17-a). Après 20 ans, on a déjà produit une grande partie de l'huile disponible par déplétion : le profil de pression est quasi-horizontale. Cela se remarque également à la figure 7.17-c où la production d'huile semble atteindre une valeur asymptotique après 20 ans de simulation. Il faut remarquer que la variation de la pression d'eau est quasi égale à la variation de la pression d'huile et ce, même si nous ne contrôlons que la pression d'huile. En fait, en diminuant la pression d'huile, le volume évacué permet une détente de l'eau qui provoque une chute de pression d'eau qui devrait être exactement la même si il n'y avait pas de déformations mécaniques et si la compressibilité des deux fluides était égale. Pendant la production, la compaction est plus importante au puits de production (figure 7.17-b); après 1 an, le tassement est modéré car le matériau est toujours élastique mais après 5 et 20 ans, le profil de compaction est bien plus marqué au niveau du puits de production, suite à l'entrée en plasticité du matériau.

Lorsque débute l'injection, cela provoque une augmentation de la pression d'eau et d'huile au puits d'injection. Un tassement supplémentaire apparaît immédiatement à ce puits suite à la variation de succion. Cette compaction se propage dans le réservoir au fur et à mesure que le front d'eau progresse. Le taux de production d'huile augmente à nouveau grâce à la compaction du réservoir et au balayage de l'huile par l'eau.

La figure 7.17-d présente les chemins de contraintes (plan  $p-s$ ) suivis dans des éléments situés au puits de production, au puits d'injection et entre les deux. Lors de la phase de production, le chemin est quasi horizontal : cela confirme que la succion ne varie pas beaucoup durant cette phase. Lorsque débute l'injection, la succion chute brutalement au puits injecteur et cela provoque la compaction additionnelle observée à la figure 7.17-b. Par contre, au puits de production et au point milieu, la succion ne varie pas beaucoup pendant la période de temps considérée car le front d'eau ne les a pas encore atteints.

Ces conclusions sont valables pour un puits d'injection central et des puits de production annulaires. Si nous inversons la configuration des puits, une production localisée au centre du réservoir ne provoque qu'une dépression très localisée et nous

observons à terme une resaturation en eau du puits. De plus, lors de l'injection d'eau, la resaturation en eau provoque un tassement qui est contrebalancé par une repressurisation globale du réservoir amenant un gonflement élastique !

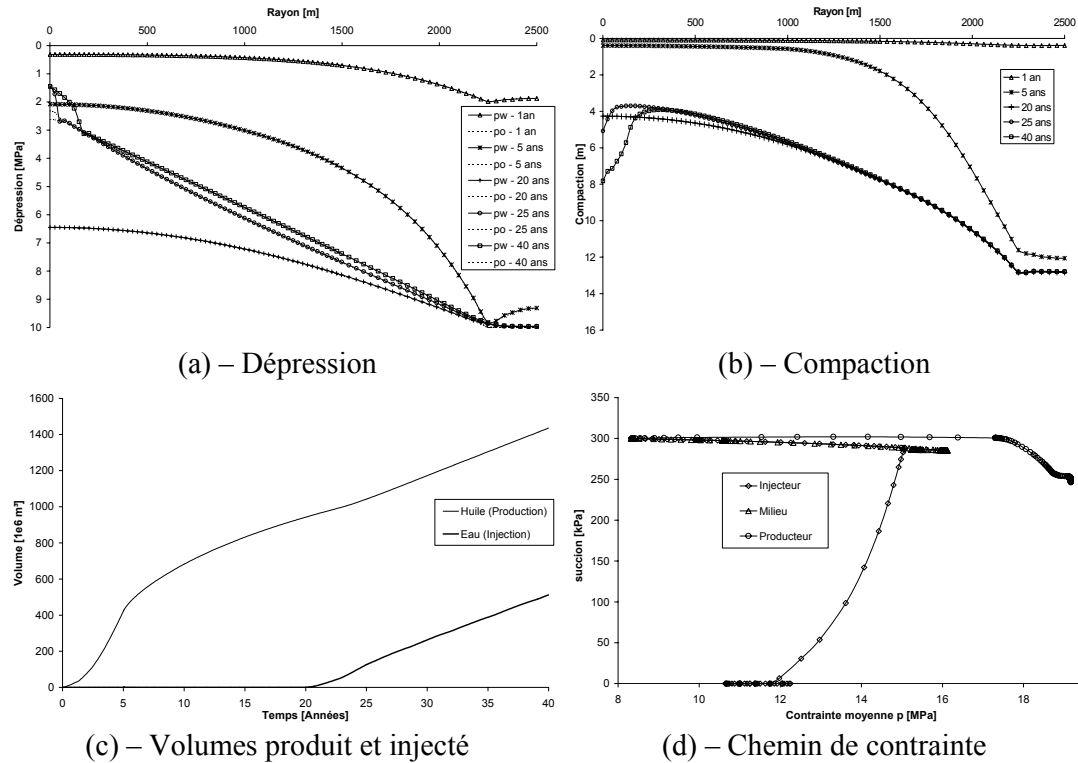


Figure 7.18 : Réservoir homogène (2D – Etat-plan déformation)

Nous avons également réalisé une modélisation en état plan de déformation en gardant le même schéma de réservoir (figure 7.14) et le même schéma de production. L'épaisseur (hors plan) du modèle est choisie de manière à avoir un réservoir du même volume que le précédent.

La figure 7.18 présente les résultats de cette simulation. On remarque que ces derniers sont en fait fort semblables aux résultats du modèle axisymétrique. Le profil des pressions est naturellement différent mais des conclusions qualitativement identiques au cas précédent peuvent être tirées.

Une comparaison peut également être effectuée par rapport au facteur de récupération de l'huile dans le réservoir (tableau 7.5). Nous voyons qu'à 20 ans ceux-ci sont très différents selon la simulation considérée : on récupère beaucoup plus d'huile en axi-symétrique. La tendance semble toutefois s'inverser après 40 ans.



Simulation	20 ans	40 ans
Axi-symétrique	67	74
Etat-plan	51	77

Tableau 7.5 : Récupération de l'huile en pourcent

Ces premières simulations permettent de mieux comprendre les chemins de contraintes suivis lors de la production et de l'injection. La compaction du réservoir est bien prévue par le modèle lorsque l'eau resature le réservoir : ce chemin de mouillage s'accompagne d'une diminution de la succion et de la résistance de la craie.

Mais nous sommes encore loin d'une simulation de réservoir plus proche de la réalité : les conditions de puits doivent être mieux modélisées (pertes de charge au puits, contrôle des vitesses de pompage et d'injection), il faut tenir compte de l'hétérogénéité du réservoir, les propriétés des fluides doivent être déterminées en conditions de réservoir. C'est pour ces raisons que nous avons réalisé les modèles décrits au paragraphe suivant.

### 3.2. Modèle multi-couches

Cette deuxième modélisation a été proposée par S. Thibeau (TFE – Norvège) dans le cadre du projet PASACHALK, afin de comparer la réponse de notre modèle à une solution de référence donnée par le programme ECLIPSE de modélisation par différences finies des écoulements multiphasiques 3D dans un réservoir pétrolier. Cette simulation correspond à un modèle simplifié 2D (état plan de déformation) du champ de Valhall.

Le calcul s'effectue en deux étapes : la première consiste en une simulation écoulement pur (roche incompressible dans LAGAMINE et compressibilité de la roche négligeable dans ECLIPSE) en production seule et la seconde est une simulation comprenant des puits producteur et injecteur.

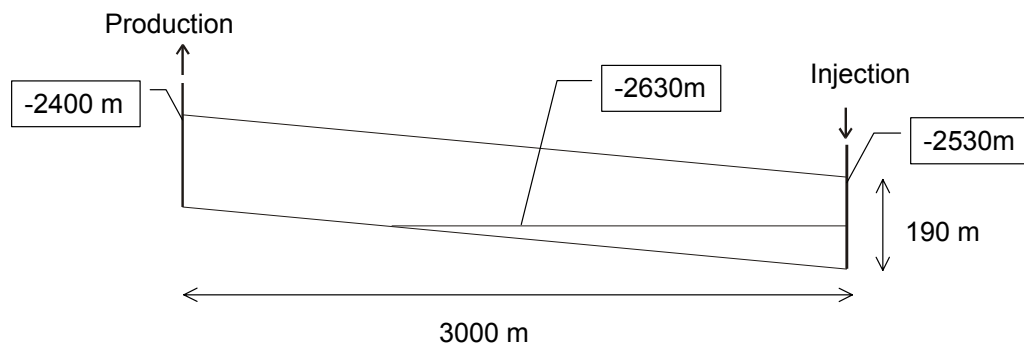


Figure 7.19 : Schéma du réservoir

Le réservoir a une longueur de 3000 m, une hauteur de 190 m et une épaisseur hors plan de 300 m (figure 7.19). Il est constitué de six couches dont les caractéristiques sont données dans le tableau 7.6 de la couche supérieure (Tor-1) à la couche inférieure (Hod 5-6). Il faut remarquer que les couches 2 et 3 sont très fines, ce qui peut amener des difficultés numériques de stabilité spatio-temporelle.

Couche	Formation	Epaisseur m	Porosité -	$k_h$ mD	$k_v$ mD	$k_h$ $10^{-16} m^2$	$k_v$ $10^{-19} m^2$
1	Tor-1 (fracturée)	40.0	0.45	100.0	0.420	986,92	4145,1
2	Tor-2	10.0	0.40	1.3	0.130	12,830	1283,0
3	Barrière	5.0	0.30	0.3	0.001	2,9608	9,8692
4	Hod 1-3	45.0	0.30	0.3	0.030	2,9608	296,08
5	Hod 4	30.0	0.33	1.7	0.170	16,778	1677,8
6	Hod 5-6	60.0	0.25	0.2	0.020	1,9738	197,38

Tableau 7.6 : Propriétés des différentes couches

Nous supposons toutefois que la courbe de rétention et les courbes de perméabilité relative sont identiques pour toutes les couches (figure 7.20).

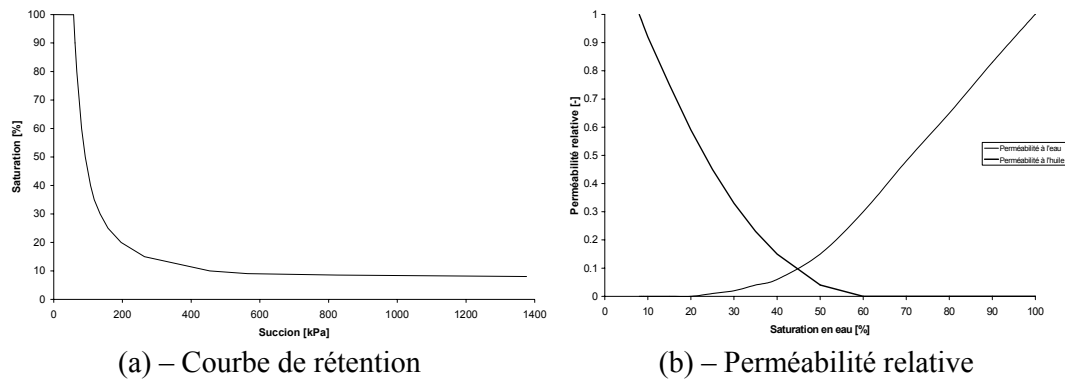


Figure 7.20 : Caractéristiques du réservoir

Dans le réservoir, les deux fluides présents sont l'huile et l'eau dont la distribution de pression est hydrostatique. Le contact huile-eau (plan horizontal à succion nulle) est placé à 2630 m de profondeur pour une pression initiale de 50 MPa. Les propriétés des fluides sont données dans le tableau 7.8. La masse volumique est donnée en condition standard (pression 1 atm et température 15.6 °C) ; des facteurs de volume sont définis pour passer aux conditions réelles de réservoir. Un facteur de volume en huile de 2,42  $Rm^3/Sm^3$  signifie donc qu'un  $Sm^3$  en condition standard représente 2,42  $Rm^3$  dans le réservoir.

$S_{r,w}$ (%)	$k_{r,w}$	$k_{r,o}$	Succion [kPa]
8	0	1	1376
8.5	0	0.98	826
9	0	0.96	564
10	0	0.92	454
15	0	0.75	264
20	0	0.59	196
25	0.01	0.45	158
30	0.02	0.33	135
35	0.04	0.23	118
40	0.06	0.15	107
50	0.15	0.04	92
60	0.3	0	81
70	0.48	0	74
80	0.65	0	67
90	0.83	0	62
99.9	1	0	58
100	1	0	0

Tableau 7.7 : Caractéristiques du réservoir (Valeurs numériques)

	Huile	Eau	Unité
Pression de référence	55	45	MPa
Facteur de volume	2,42	1,03	Rm3/Sm3
Compressibilité	$2,3 \cdot 10^{-9}$	$4,0 \cdot 10^{-10}$	MPa <sup>-1</sup>
Viscosité	$2,9 \cdot 10^{-4}$	$3,5 \cdot 10^{-4}$	Pa.s
Masse volumique	840	1040	kg/Sm <sup>3</sup>
Masse volumique	347.107	1009,709	kg/Rm <sup>3</sup>

Tableau 7.8 : Propriétés des fluides

Dans le modèle, nous avons deux puits verticaux, perforés sur toute la hauteur du réservoir : le puits producteur en X=0m et le puits injecteur en X=3000m. Le producteur est contrôlé par un débit maximum de 3000 Sm3/jour (huile+eau) et une pression de

fond minimum de 10 MPa à la côte de référence de 2500 m. L'injecteur est contrôlé par un débit d'injection maximum de 3000 Sm<sup>3</sup>/jour d'eau, avec une pression de fond d'injection maximale de 90 MPa à 2500 m.

Il est également important de bien modéliser les conditions de puits. En fait, pour un écoulement stationnaire, le débit produit dans un puits est fonction de la pression par la relation suivante :

$$p - p_{wf} = \frac{q\mu}{2\pi kh} \ln \frac{r}{r_w} \quad (7.6)$$

où  $p$  est la pression du réservoir à une distance  $r$  du puits,  $h$  est l'épaisseur du réservoir,  $p_{wf}$  et  $r_w$  sont respectivement la pression de fond et le rayon du puits.

La perméabilité est la perméabilité intrinsèque du milieu. Si plusieurs fluides sont présents dans les pores, il faudra utiliser la perméabilité intrinsèque en conditions non-saturées. Pour l'huile, nous aurons par exemple :

$$p - p_{wf} = \frac{q\mu_o}{2\pi k_o h} \ln \frac{r}{r_w} \quad (7.7)$$

$$k_o = k_{ro} \cdot k \quad (7.8)$$

où  $k_{ro}$  est la perméabilité relative à l'huile.

De plus, dans la zone près du puits, des pertes de charges supplémentaires existent qui altèrent les flux radiaux (et horizontaux) convergeant dans le puits. Un effet de peau  $s$  est introduit pour tenir compte de ces phénomènes. Fondamentalement, ce nombre sans dimensions définit une zone de faible épaisseur qui provoque une perte de charge (due au remaniement de la roche lors du forage et aux interactions avec le tubage), conventionnellement définie par :

$$\Delta p_s = \frac{q\mu}{2\pi kh} s \quad (7.9)$$

Additionnant les deux équations, nous obtenons :

$$p - p_{wf} = \frac{q\mu}{2\pi kh} \left( \ln \frac{r}{r_w} + s \right) \quad (7.10)$$

Ainsi, à débit constant, une valeur positive de l'effet de peau  $s$  demande une pression de puits plus faible. Pour la production ou l'injection, une valeur positive est donc désavantageuse car elle demande de diminuer plus fortement la pression de puits.

En réécrivant la relation précédente, nous pouvons obtenir :

$$\frac{q}{p - p_{wf}} = \frac{2\pi kh}{\mu \left( \ln \frac{r}{r_w} + s \right)} \quad (7.11)$$

Le membre de gauche de l'équation définit l'index de productivité du puits. On remarque donc que la valeur de  $kh$  a une grande importance pour les pétroliers. Malheureusement, il n'est guère possible de modifier un des termes. L'autre paramètre est la pression  $p$  dans le réservoir ; une réduction de cette pression diminuera donc la production du puits.

Le rôle de l'ingénieur de production est donc de maximiser l'index de productivité en diminuant l'effet de peau ou la pression de puits. Toutefois, la pression de puits a une valeur limite inférieure afin d'empêcher ou de retarder des phénomènes comme la production de sable par exemple.

Dans le programme ECLIPSE, le débit de production est défini par la relation suivante [ECLIPSE, 2000] :

$$q = T_{well} M (p - p_{well} - H_{well}) \quad (7.12)$$

où  $T_{well}$  est le facteur de transmissibilité,  $M$  est le facteur de mobilité,  $p$  est la pression dans le réservoir,  $p_{well}$  est la pression de fond de puits et  $H_{well}$  est la hauteur entre le point considéré et le fond du puits.

Cette dernière relation peut être comparée à la relation (7.11) transformée en :

$$q = \frac{2\pi kh}{\left( \ln \frac{r}{r_w} + s \right)} \frac{k_{ro}}{\mu_o} (p - p_{wf}) \quad (7.13)$$

Nous pouvons à présent définir les différents termes de la relation (7.12). Le facteur de mobilité  $M$  et le facteur de transmissibilité  $T_{well}$  (pour des grilles cartésiennes) sont définis, dans le programme ECLIPSE, respectivement par :

$$M = \frac{k_{ro}}{\mu_o} \quad (7.14)$$

$$T_{well} = \frac{c\theta kh}{\ln \frac{r_0}{r_w} + s} \quad (7.15)$$

où  $c$  est un facteur de conversion d'unité,  $\theta$  est l'angle en radian de connexion entre la cellule de discrétisation en différences finies et le puits, et  $r_0$  est un rayon équivalent, lié à la taille de la cellule.

Nous avons adapté la formule (7.12) dans les éléments de puits WEPRO en utilisant les relations suivantes, pour le puits de production (voir chapitre V, paragraphe 5):

$$f_w = T_{well} \cdot \frac{k_{rw}}{\mu_w} (p_w - p_{well}) \quad (7.16)$$

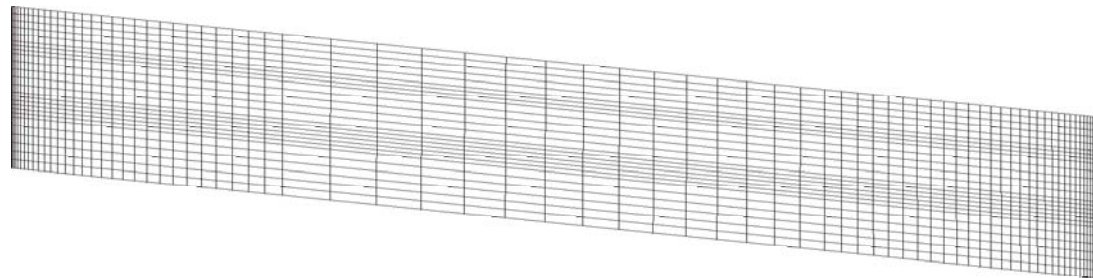
$$f_o = T_{well}^{well} \cdot \frac{k_{ro}}{\mu_o} (p_o - p_{well}) \quad (7.17)$$

Les valeurs des facteurs de transmissibilité  $T_{well}$  sont celles utilisées par le programme ECLIPSE. Elles ont été calculées par les formules de Peaceman (1978), pour un diamètre de puits de 20 cm. Il n'est pas certain que ces valeurs n'auraient pas dû être modifiées pour notre calcul car elles dépendent de la taille du maillage. Ces valeurs sont fournies en m³/jour.cP/bar et nous les avons transformées en m³/s.Pa.s/Pa. Elles sont identiques pour le producteur et l'injecteur.

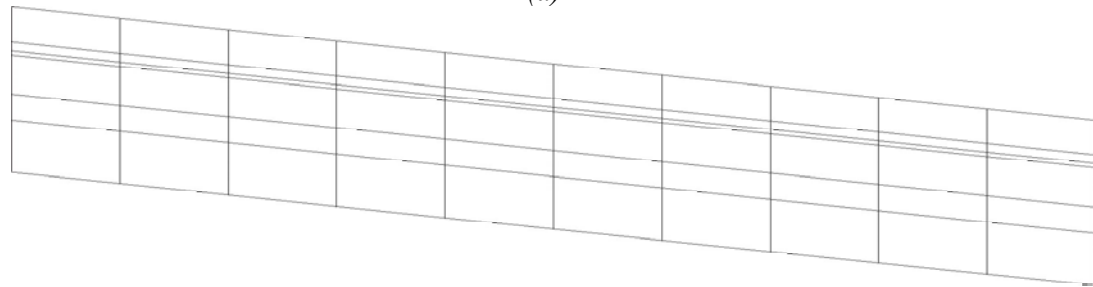
Couche	Eclipse	Lagamine
1	34,83627	4,032 10 <sup>-12</sup>
2	0,113218	1,310 10 <sup>-14</sup>
3	0,013063	1,512 10 <sup>-15</sup>
4	0,117573	1,361 10 <sup>-14</sup>
5	0,444162	5,141 10 <sup>-14</sup>
6	0,104506	1,210 10 <sup>-14</sup>

Tableau 7.9 : Facteur de transmissibilité

Pour ces calculs, le maillage (figure 7.21-a) comprend 5878 nœuds, 1875 éléments MWAT, 2 \* 25 éléments de puits WEPRO, 2 \* 25 éléments TUYAU et enfin 2 éléments FMILC pour contrôler la pression dans chaque puits.



(a)



(b)

Figure 7.21 : Maillage utilisé (a) et maillage ECLIPSE (b)

Le producteur est contrôlé par un débit maximum de 3000 Sm<sup>3</sup>/jour (huile+eau) qui équivaut à 29,1667 kg/s pour 300 m d'épaisseur, soit à 0,09722 kg/s pour 1 m d'épaisseur. L'injecteur est contrôlé par un débit d'injection maximum de 3000 Sm<sup>3</sup>/jour d'eau qui équivaut à 36,1111 kg/s pour 300 m d'épaisseur, soit à 0,12037 kg/s pour 1 m d'épaisseur.

### 3.2.1. PRODUCTION SEULE

La comparaison entre les deux programmes s'effectue à partir de la pression de champ et du débit de production, prédits par les deux modèles. En effet, le débit de pompage doit être contrôlé de manière à limiter la chute de pression dans le puits. La pression de champ est une valeur moyenne de la pression dans le réservoir ; elle est donnée par la formule suivante:

$$P_{field} = \frac{\sum_{Nr\,él.} V_{él.} \cdot n \cdot S_{r,o} \cdot p_o}{\sum_{Nr\,él.} V_{él.} \cdot n \cdot S_{r,o}} \quad (7.18)$$

Dans notre modèle d'écoulement, la perméabilité ne peut pas être nulle. Nous avons dès lors choisi une perméabilité minimum de 0,001 pour les différentes couches du réservoir. Dans l'élément de puits, nous avons par contre pu prendre une valeur minimum nulle de manière à bien modéliser les arrivées de fluides dans le puits.

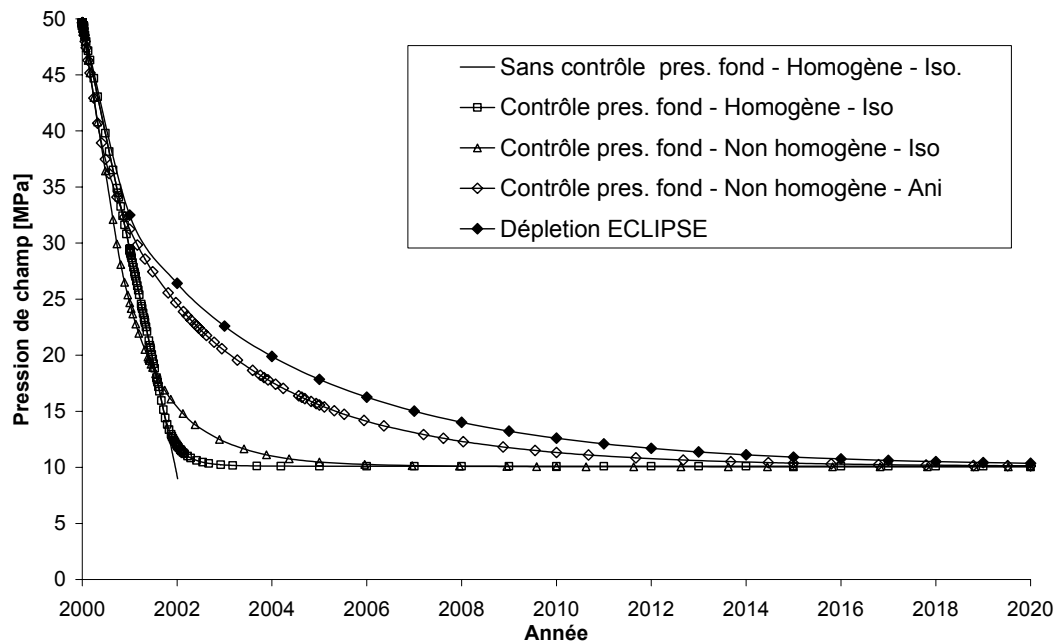


Figure 7.22 : Pression de champ

Afin de bien comprendre la dynamique d'un réservoir, nous avons réalisé différentes simulations (de la plus simple à la plus complexe). Tout d'abord une

simulation sans contrôle de la pression de fond du producteur (en prenant des propriétés identiques pour toutes les couches) : les figures 7.22 et 7.23 montrent que le débit reste bien constant et que la pression de champ chute alors très rapidement. Le contrôle de la pression de fond permet un maintien de la pression de champ à 10 MPa et la production est terminée après 4 ans.

En considérant les propriétés réelles de chaque couche (mais avec une perméabilité isotrope), la pression diminue moins rapidement et la production par déplétion est terminée après 10 ans. Ce résultat est logique car un laps de temps plus long est nécessaire afin d'extraire l'huile dans les couches les moins perméables.

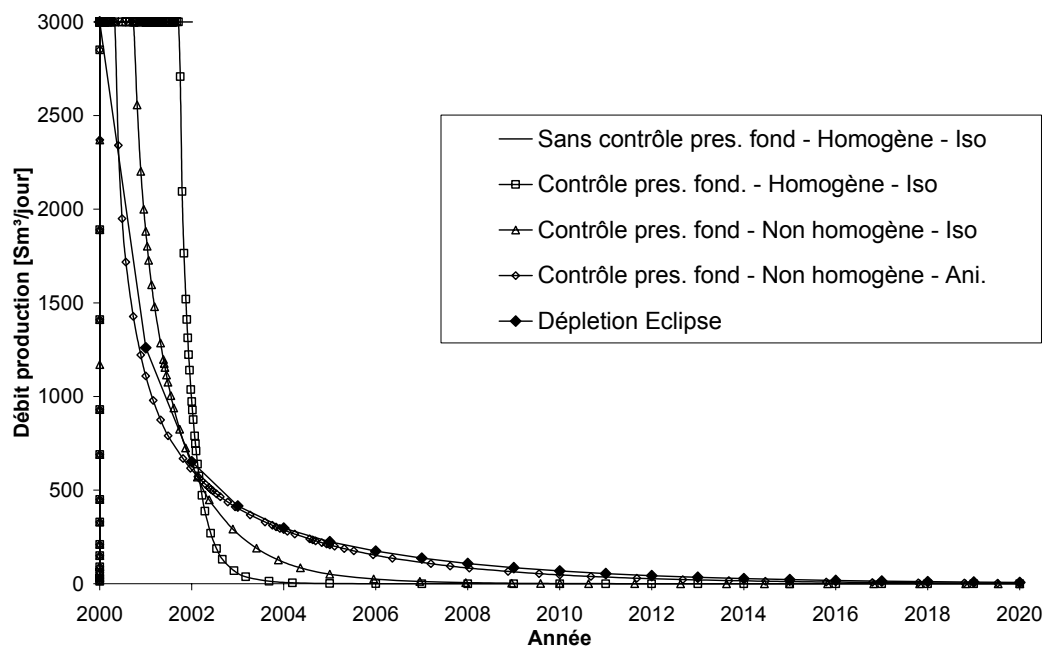
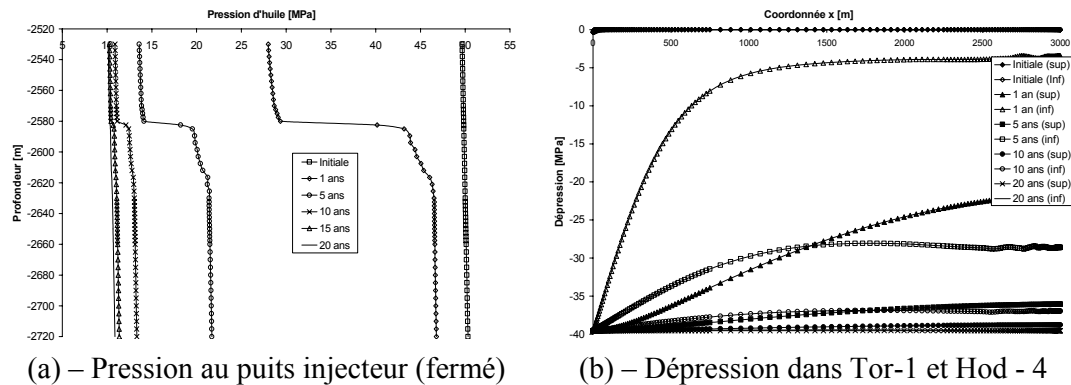


Figure 7.23 : Débit de production



(a) – Pression au puits injecteur (fermé)

(b) – Dépression dans Tor-1 et Hod - 4

Figure 7.24 : Pression d'huile dans le réservoir



L'anisotropie augmente également la durée de production. En effet, la perméabilité verticale est beaucoup plus faible que l'horizontale ; il y a donc des échanges beaucoup moins importants entre les différentes couches. Il n'est alors plus possible de bien drainer les couches imperméables par celles qui le sont moins (figure 7.24). Cela se marque très clairement sur les résultats car il faut attendre 20 ans pour terminer la production !

Nous remarquons également que la saturation ne varie pas pendant les 20 ans de la production ; nous avons obtenu le même résultat au paragraphe précédent. Notons enfin que les deux programmes utilisés (Eclipse et Lagamine) fournissent des résultats tout à fait similaires.

### 3.2.2. PRODUCTION ET INJECTION

Dans ce deuxième modèle, les deux puits sont ouverts : la production et l'injection commencent dès le début de la simulation. Nous avons également progressé par étapes en allant du calcul le plus simple au plus compliqué. Dans le premier calcul, l'ensemble des couches possèdent les mêmes propriétés et dans le dernier, toute la complexité du modèle est introduite.

La figure 7.25 présente les résultats de ces simulations en terme de pression de champ. Pour les modèles homogènes, la pression de champ chute rapidement pour se stabiliser aux environs de 130 bars, c'est-à-dire légèrement au-dessus de la pression de fond minimale du producteur. Par contre, pour les modèle non-homogènes, la pression décroît durant les quatre premières années mais ré-augmente ensuite à cause d'un effet plus marqué de l'injection.

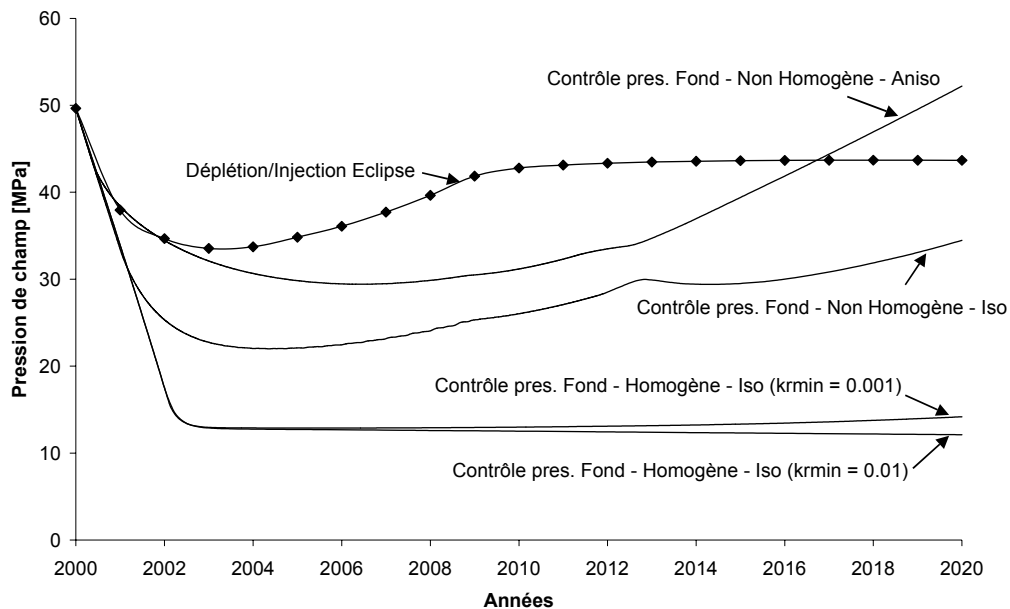


Figure 7.25 : Pression de champ

Les figures 7.26 et 7.27 expliquent cette différence de comportement. Au puits d'injection, l'eau pénètre de préférence dans les couches les plus perméables à l'eau. Dans le modèle homogène où toutes les couches possèdent la même perméabilité, l'eau est injectée dans les couches déjà saturées en eau. La figure 7.26 montre ainsi que le niveau du contact eau-huile monte progressivement ; entre 5 et 10 ans, l'eau atteint la base du puits de production.

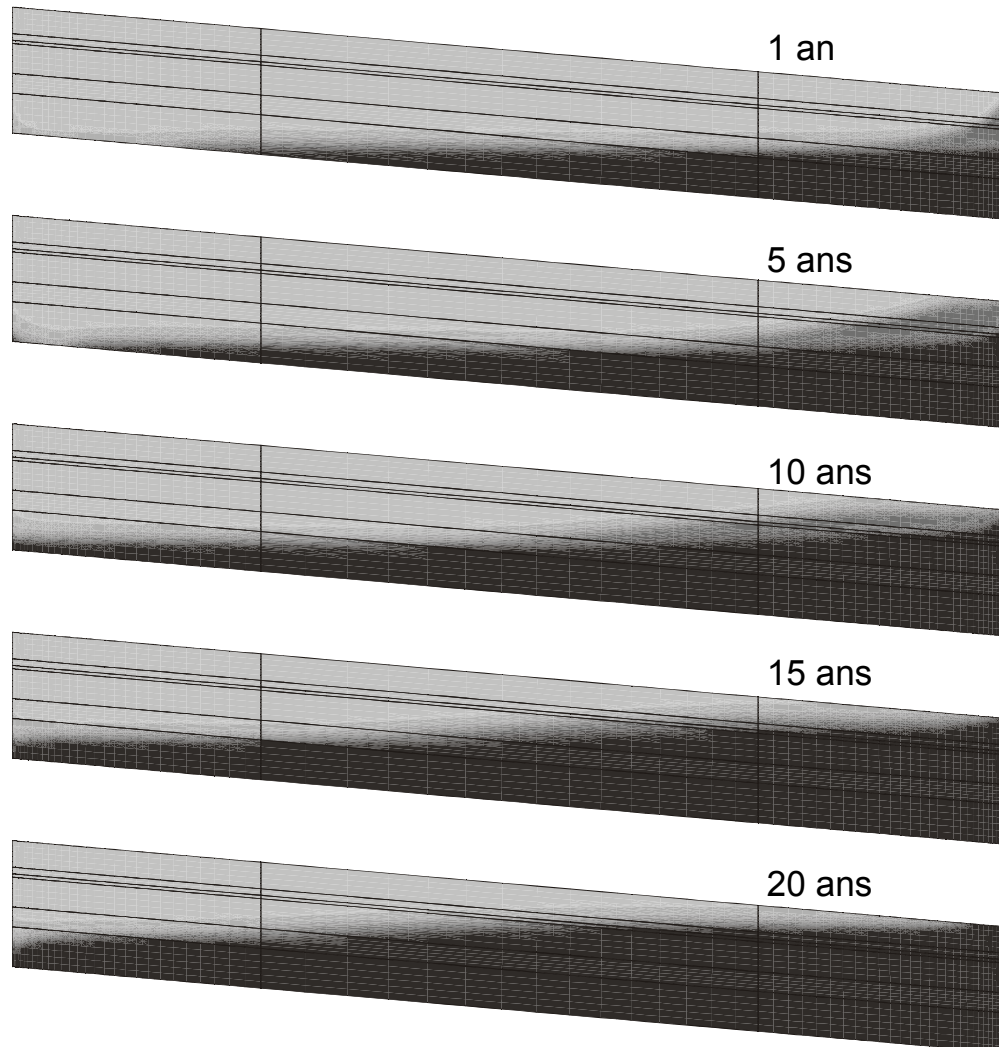


Figure 7.26 : Saturation en eau dans le modèle homogène  $S_{r,w} \in [8, 100] \%$

Dans le modèle non-homogène (figure 7.27), la couche la plus perméable n'est plus celle qui est saturée en eau. En effet, la formation supérieure présente une perméabilité environ 100 fois supérieure aux autres. Dès lors, l'eau pénètre dans cette couche et le niveau du contact eau-huile dans les couches sous-jacentes ne varie que légèrement. Le front d'eau arrive au puits de production par la couche supérieure, entre 10 et 15 ans après le début de l'injection.

Cette différence du mode de déplacement des fluides explique d'ailleurs que la dernière simulation soit beaucoup plus délicate numériquement. C'est la raison pour laquelle nous avons dû modifier certains paramètres. Tout d'abord, nous avons adopté une valeur de perméabilité relative minimum de 0,01 au lieu de 0,001. Cela ne modifie pas fortement la pression de champ (figure 7.25) mais permet un gain appréciable de temps de calcul.

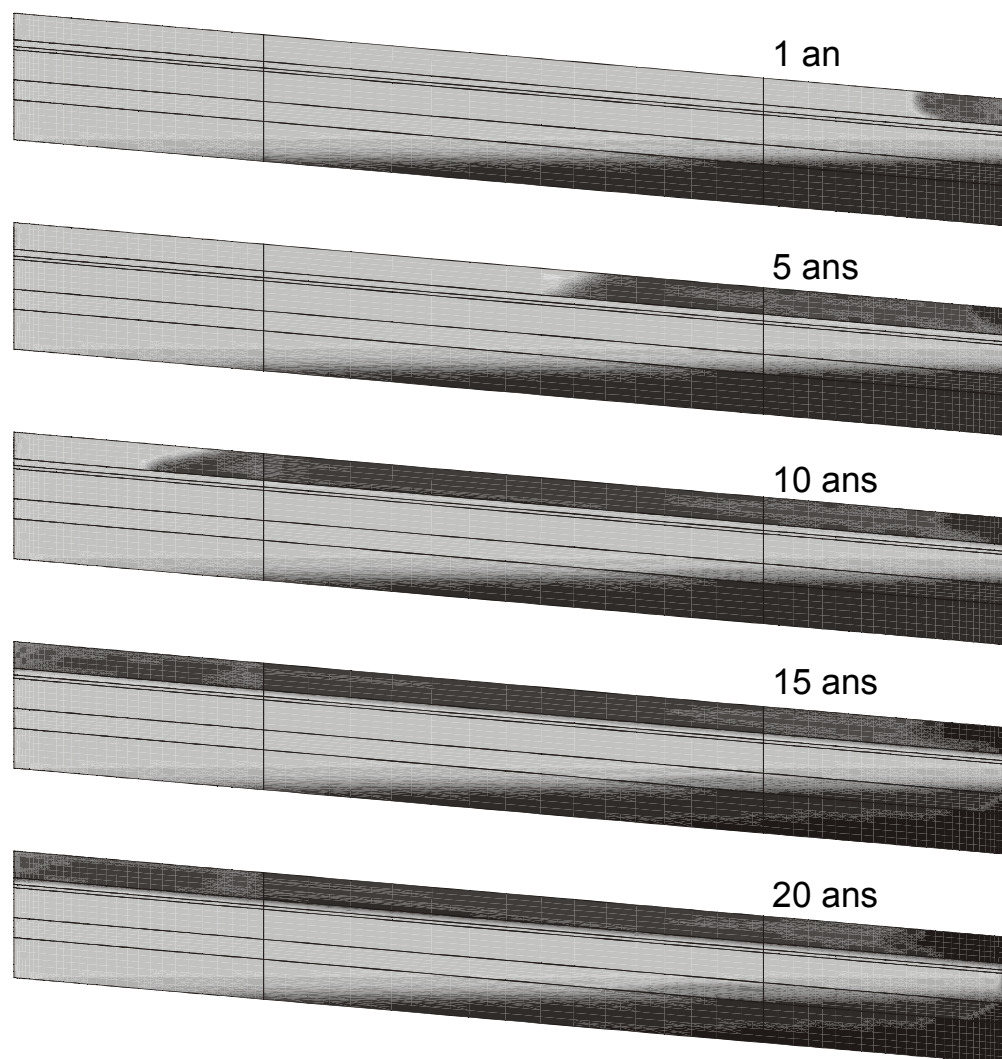


Figure 7.27 : Saturation dans le modèle non-homogène  $S_{r,w} \in [8, 99] \%$

Dans un deuxième temps, nous avons également modifié la courbe de rétention de manière à adoucir quelque peu la rupture de pente dans celle-ci (figure 7.28). Nous avons choisi une courbe de rétention plus continue à faible succion et qui présente une saturation résiduelle à l'huile de 1%.

Grâce à ces modifications, les calculs ont pu être menés à bien. Toutefois, la comparaison entre les résultats Eclipse et Lagamine (figure 7.25) est moins bonne : nos

résultats montrent bien une ré-augmentation de la pression de champ mais pas aussi rapidement que dans le modèle Eclipse. De plus, nous n'obtenons pas de stabilisation de la pression de champ.

Nous pouvons également comparer les débits au puits de production (figure 7.29). Dans ces simulations, ce puits produit uniquement de l'huile dans un premier temps, jusqu'à l'arrivée du front d'eau. A ce moment, le débit d'huile chute car nous avons imposé un débit total (eau + huile) constant, sous réserve d'une pression de fond minimale respectée.

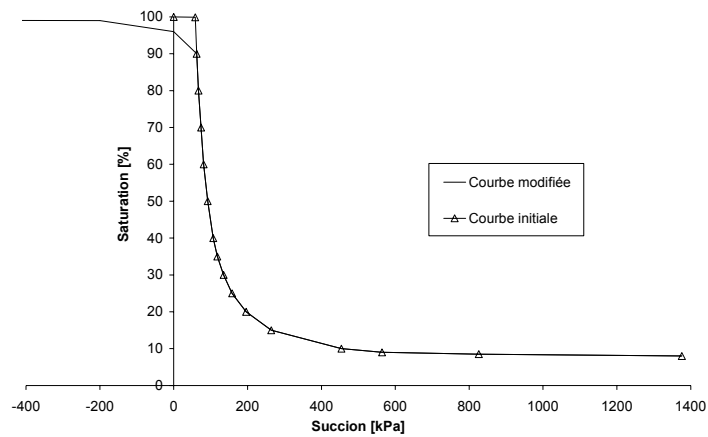


Figure 7.28 : Modification de la courbe de rétention

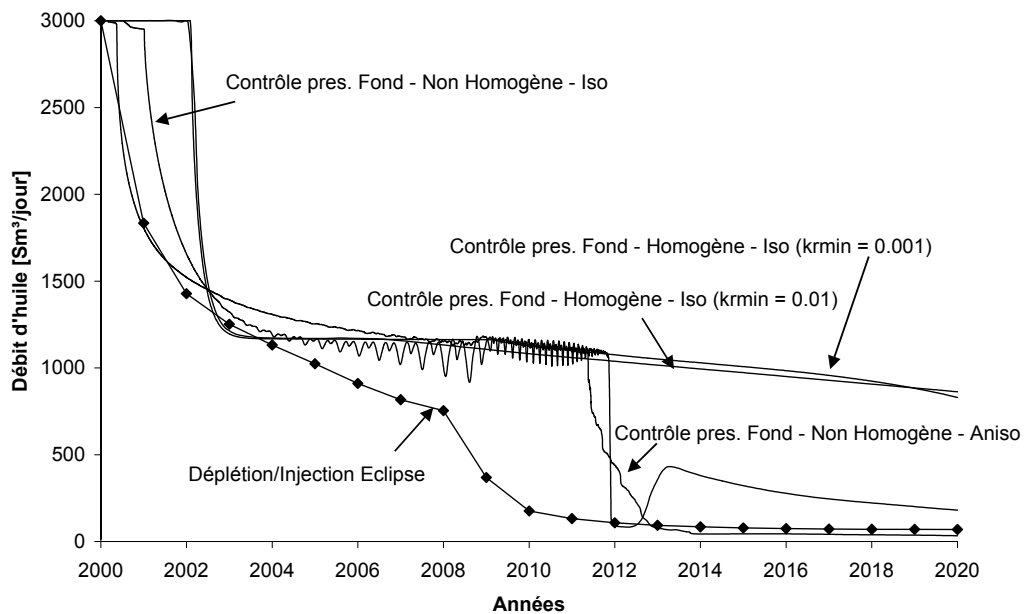


Figure 7.29 : Débit d'huile au puits de production

La comparaison entre la courbe Eclipse et celle de la simulation non-homogène anisotrope montre que les résultats sont similaires dans les 4 premières années. Toutefois, l'arrivée d'eau dans le puits (chute du débit d'huile) est prédite trop tardivement dans le modèle Lagamine : 12 ans au lieu de 8 ans. Des conclusions similaires peuvent être tirées à propos des débits d'eau au puits de production (figure 7.30).

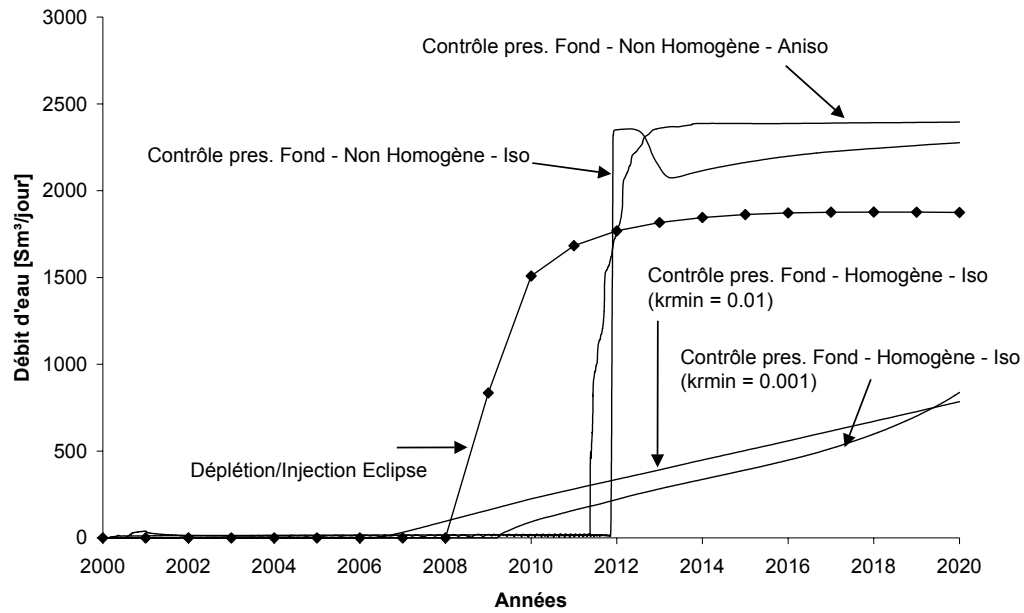


Figure 7.30 : Débit d'eau au puits de production

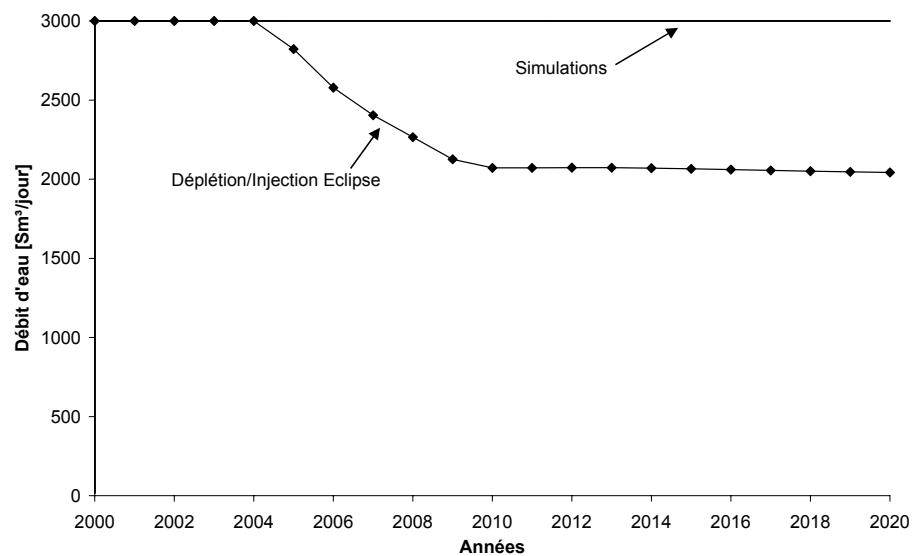


Figure 7.31 : Débit d'eau au puits d'injection

L'origine de ces différences de réponses peut notamment se trouver au puits d'injection (figure 7.31) où nous voyons que le débit d'eau est constant dans toutes nos simulations, alors qu'il diminue dans la simulation Eclipse. Cela signifie que l'augmentation de pression au puits d'injection n'est pas assez importante dans nos calculs. Cela peut expliquer la pression de champ plus faible et une arrivée d'eau plus tardive, vu que la pression d'injection est moins grande.

### 3.3. Conclusions

Les simulations de réservoir que nous venons de présenter apportent une meilleure compréhension des phénomènes prenant place dans ces formations. Les premiers modèles couplés montrent bien que la phase de production induit une diminution de pression quasi-identique des deux fluides présents. Cela signifie que la succion ne varie guère pendant cette phase. La compaction observée provient de l'augmentation de la contrainte effective suite à la diminution des pressions de fluides. Durant la phase d'injection, un front d'eau apparaît ; il s'accompagne d'une diminution brutale de la succion qui induit une compaction additionnelle. Notre modèle et les hypothèses qui le sous-tendent permettent donc bien d'expliquer cette compaction !

Dans une deuxième partie, nous avons utilisé un modèle plus proche des réservoirs: il comprend six couches avec des propriétés différentes et des perméabilités anisotropes. Nous avons ainsi pu réaliser une comparaison entre notre modèle et celui du programme Eclipse. En phase de production, nous avons montré l'importance de cette hétérogénéité sur les temps de production. En production et injection simultanées, la différence de comportement est très importante selon la configuration choisie. Dans le modèle non-homogène, un front d'eau se forme dans la couche la plus perméable et atteint ainsi le puits producteur. La comparaison Eclipse-Lagamine est tout à fait satisfaisante dans le modèle de production seule ; par contre, certaines améliorations devraient être apportées en phase d'injection.

## 4. CONCLUSION

La simulation du test d'hydratation et de chauffage de l'échantillon de bentonite nous a prouvé l'aptitude des modèles à bien représenter les échanges hydriques et de chaleur qui sont créés dans l'argile. Vu le confinement de l'échantillon, l'expérimentation consiste essentiellement en un essai de gonflement. L'unique capteur de pression ne nous a pas permis de tirer beaucoup de conclusions sur la bonne modélisation du comportement mécanique du matériau.

Il faut bien noter que ce calcul est possible grâce à une importante campagne expérimentale qui permet de déterminer l'ensemble des paramètres mécaniques, hydrauliques et thermiques. Malgré tout, certains coefficients demeurent inconnus et nous avons pris des valeurs par défaut. Il faudrait en toute rigueur réaliser une étude de sensibilité de ces valeurs.

Dans les simulations de réservoir, les phénomènes de compaction observés en mer du Nord sont qualitativement bien représentés par les lois constitutives développées.

Dans les modèles simples (homogènes), nous avons montré l'origine de la compaction pendant les phases de production et d'injection. Pendant la première, le tassement est lié à une diminution de la pression du réservoir. Dans la seconde, les déformations proviennent de la diminution de la succion.

Dans les modèles plus complexes (multi-couches), les calculs nous ont apporté une meilleure compréhension des échanges de fluides dans les réservoirs. Nous avons ainsi mis en évidence l'importance de l'anisotropie de la perméabilité et du contraste des propriétés d'écoulement entre les différentes couches.





## **CHAPITRE VIII**

### **Conclusions et perspectives**



## CHAPITRE VIII

### CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

#### 1. SYNTHÈSE

Dans ce travail, nous avons essayé de montrer l'importance des couplages et l'apport des simulations numériques pour deux applications : le stockage de déchets et l'exploitation des réservoirs pétroliers en mer du Nord. Les interactions entre les différents phénomènes en présence rendent difficile la compréhension, sans modèle numérique, du cas étudié dans son ensemble, même si chaque phénomène individuel est bien perçu. Afin de réaliser ces simulations, nous avons développé un modèle d'écoulement multiphasique et une loi constitutive décrivant le comportement mécanique de la roche.

Le modèle d'écoulement suppose l'existence d'une phase solide et de deux phases fluides (deux liquides ou un liquide et un gaz) qui peuvent éventuellement être composées de plusieurs espèces chimiques. Il permet ainsi la simulation des écoulements des phases fluides du milieu en tenant compte du changement de phase d'un composant. Il modélise également les échanges de chaleur en conditions non saturées, en supposant que chaque composant du milieu présente la même température en un même point.

En conditions non saturées, la succion est une notion importante : elle représente une mesure de la quantité d'énergie nécessaire pour extraire de l'eau d'un géomatériau. Elle comprend un terme lié à la capillarité mais également d'autres contributions, comme les effets osmotiques par exemple.

La succion est également importante dans le modèle mécanique. En effet, un couple de variables d'état indépendantes est nécessaire pour bien représenter le comportement d'un géomatériau non saturé. Une contrainte seule, qu'elle soit effective ou nette, ne suffit pas. Nous avons ainsi choisi le couple formé par la contrainte nette et la succion. Ces mêmes variables sont utilisées dans le modèle de Barcelone qui est une référence pour les argiles moyennement expansives et dont nous nous sommes inspirés pour développer notre modèle de comportement de roche.

On pourrait *a priori* s'étonner de l'étude au sein d'une même thèse de deux matériaux aussi différents que la craie et l'argile. Mais nous avons montré la similitude de comportement mécanique d'une craie très poreuse et d'une argile partiellement saturée : lors d'un chargement isotrope, elles présentent toutes deux une 'contrainte de préconsolidation' qui augmente avec la succion et un effondrement est observé pour des chemins de mouillage sous fortes contraintes.

Notre loi élasto-plastique est un modèle à chapeau composé de quatre surfaces de plasticité : une loi à frottement interne représente la rupture par cisaillement, un modèle

CamClay idéalise le pore collapse, un critère de résistance en traction limite les contraintes d'extension et la surface SI gère les déformations liées à la succion.

Grâce à l'ensemble des essais réalisés sur la craie saturée par différents fluides (eau, huile, air) ou non saturée, nous avons pu déterminer les paramètres de notre modèle. Parmi les propriétés de la craie qui déterminent sa résistance, l'angle de frottement ne semble pas influencé par la succion au contraire de la cohésion et de la contrainte de pré-consolidation  $p_0$ . Nous avons ainsi supposé une augmentation linéaire de la cohésion avec la succion. Le concept de la courbe LC du modèle de Barcelone a été utilisé pour modéliser l'évolution de  $p_0$  avec la succion. Nous ne disposons malheureusement pas de beaucoup d'informations dans le domaine en extension : nous avons dès lors supposé que la résistance en traction isotrope ne dépend pas de la succion.

Dans ce travail, nous avons déterminé le module d'écrouissage du modèle CamClay pour différentes succions. Il apparaît que la compressibilité plastique est indépendante du fluide saturant, contrairement à ce qui est habituellement observé dans les argiles. Cela nous a amené à utiliser une formulation de la courbe LC qui est différente du modèle de Barcelone, mais les concepts de ce modèle restent applicables.

Les essais nous ont également permis d'étudier l'influence de l'état de contrainte et de la succion sur les caractéristiques élastiques de la craie. La succion a clairement une influence sur la rigidité du matériau : une craie quasi-saturée en huile est plus raide qu'une craie saturée en eau. Les mesures du module cubique semblent peu influencées par l'état de contrainte : nous avons dès lors pris une valeur constante. Les conclusions sur le module de cisaillement sont plus difficiles à tirer car les résultats présentent une certaine dispersion : nous avons choisi dans ce modèle de prendre également une valeur constante pour ce module.

Grâce à nos partenaires, nous avons disposé de mesures de la courbe de rétention de la craie qui présente une hystérésis entre le chemin de mouillage et de séchage. Malheureusement, notre modèle d'écoulement ne gère pas ce cas de figure et nous avons dès lors utilisé une des deux courbes selon le chemin de succion suivi lors des simulations effectuées.

Le développement de modèles de comportement relativement complexes nécessite la détermination de nombreux paramètres. Celle-ci est uniquement possible si l'on dispose de résultats expérimentaux suffisamment nombreux et de qualité. Nous avons eu la chance de pouvoir disposer dans le cadre du projet européen PASACHALK d'une base de données expérimentales conséquente grâce au travail de nos partenaires. Nous tenons d'ailleurs à les en remercier.

Afin de valider nos deux modèles (écoulement et mécanique), nous avons réalisé différentes simulations qui nous ont montré les possibilités de notre outil numérique et qui nous ont déjà permis de tirer certaines conclusions sur les problèmes étudiés. Concernant l'écoulement et le transfert de chaleur dans des argiles peu perméables, nous pouvons dire premièrement que, si la variation de température peut provoquer des

mouvements de fluides, le transfert de chaleur n'est pas très influencé par ces écoulements. Le mode de transport de chaleur est essentiellement conductif ; il dépend donc principalement des propriétés thermiques du milieu comme la conductibilité et la capacité thermique. Ces dernières dépendent par contre de l'état de saturation du géomatériau. Deuxièmement, la transition de l'état non-saturé à l'état saturé est une phase délicate numériquement. En effet, l'équation de bilan d'une des phases fluides devient évanescence. Différentes techniques sont proposées pour dépasser ce problème : l'utilisation d'une perméabilité minimum ou la prise en compte de l'air dissous dans l'eau. Ces solutions permettent d'améliorer le problème mais les simulations restent tout de même délicates. Enfin, dans le cas du couple de fluides eau-air, il est très important de tenir compte des échanges en phase vapeur. Ils permettent la modélisation de l'assèchement de l'argile dans les zones chaudes et de la condensation de l'eau dans les régions plus froides.

Concernant le modèle mécanique, les simulations montrent que la loi est capable de reproduire le comportement du matériau saturé. Dans le calcul de l'essai oedométrique dans une cellule triaxiale, nous avons montré comment la prise en compte des conditions limites réelles de l'expérience pouvait expliquer la différence de comportement apparente entre le modèle et l'expérimentation. Nous avons aussi réalisé des simulations en tenant compte d'une certaine variabilité spatiale des propriétés ; il est alors possible de se rapprocher plus des mesures expérimentales de modules (tout en gardant le même modèle déterministe). Cela ouvre également des pistes pour passer du comportement de la craie à l'échelle de l'échantillon à celle du réservoir. Enfin, les simulations de waterflooding en conditions isotropes et anisotropes de contraintes sont tout à fait satisfaisantes ; elles montrent que l'effondrement mesuré lors du balayage se produit toujours dans la direction de la contrainte majeure.

Dans notre dernier chapitre, nous avons simulé deux applications qui se rapprochaient au mieux des problèmes que nous voulions traiter. La modélisation de l'essai de chauffage et d'hydratation d'une argile de scellement nous a permis de tirer certaines conclusions. Premièrement, malgré la pression d'injection, il a été impossible de resaturer en eau l'échantillon pendant la durée de l'expérience. En effet, à cause de l'élévation de température, des flux de vapeur d'eau sont générés et l'argile s'assèche dans les zones chaudes. La prise en compte de ces transferts de vapeur est obligatoire dans ces milieux peu perméables. De plus, lors de l'hydratation, l'argile présente un gonflement qui est empêché par le confinement. Une pression de gonflement est générée qui atteint plusieurs MPa. Cette simulation est rendue possible par la quantité importante de résultats d'essais réalisés sur le matériau et dont nous disposons dans le cadre du projet CATSIUS CLAY. Il nous faut de nouveau dire qu'un nombre important de paramètres doit être déterminé ; ce nombre est naturellement en relation directe avec la complexité des phénomènes étudiés.

Les simulations de réservoir ont montré que nos modèles et concepts sont capables de reproduire la compaction observée pendant la phase de production mais également durant l'injection d'eau. En fait, la phase de production correspond à une diminution des pressions de fluides à succion constante alors que, durant l'injection, on observe une augmentation de pression s'accompagnant d'une forte diminution de la

succion. Lors de ce chemin de mouillage, la courbe LC est écrouie, ce qui provoque la compaction additionnelle liée à l'injection.

Dans les modèles plus proches des conditions réelles de réservoir (multi-couches), nous avons montré que les transferts de fluides pouvaient être plus complexes. Nous pouvons toutefois conclure qu'ils valident nos lois de comportement. Nous avons uniquement utilisé des modèles 2D-axisymétrique et état plan de déformation ; ils permettent une première étude et une compréhension des phénomènes. Il faudrait toutefois passer dans le futur (proche) à un modèle tridimensionnel !

## 2. APPORTS ORIGINAUX DE CETTE THESE

Cette thèse portant sur les couplages thermo-hydro-mécaniques dans les sols et les roches tendres non saturés se place dans la continuité des thèses de X-L Li sur le comportement hydromécanique des sols fins (argile essentiellement) et de Ch. Schroeder sur l'approche phénoménologique du comportement de la craie. De nombreux aspects présentés dans cette thèse ont donc déjà été abordés précédemment.

L'originalité de ce travail consiste donc essentiellement dans l'implémentation et le développement numérique de ces concepts et modèles dans un code aux éléments finis. Mais nous estimons que les simulations couplées réalisées sont également originales car peu de codes de calcul sont capables de les effectuer.

Parmi les différents aspects que nous avons présentés, nous pensons que les points suivants méritent une attention particulière :

- le modèle d'écoulement multiphasique anisotherme avec changement de phase (chapitre II, paragraphe 5) permet de tenir compte des transferts en phase vapeur dans un milieu saturé par l'eau (liquide et vapeur) et l'air (sec et dissous dans l'eau).
- le modèle de comportement d'une craie partiellement saturée par l'eau et l'huile, où la succion permet d'expliquer les variations de résistance du matériau en fonction du fluide saturant (chapitre IV, paragraphe 4). Des modèles existaient déjà dans ce domaine mais ils consistent (pour les plus évolués) à définir deux surfaces de charge avec un ressaut entre les deux. Dans notre modèle, le passage d'un comportement à l'autre se fait de manière continue grâce à la courbe LC.
- la détermination des paramètres de la craie (chapitre IV, paragraphe 5) est originale par l'importance des résultats d'essais, la richesse et la cohérence de l'information que nous avons su extraire (détermination des modules d'élasticité par exemple).
- le développement d'éléments finis permet la modélisation de conditions limites spéciales : éléments de puits, éléments de ruissellement (chapitre V, paragraphe 5). Cette possibilité n'est pas très fréquente dans un code de calcul éléments finis.
- dans les exemples de validation de nos modèles, certains calculs sont particulièrement intéressants : l'écoulement non-saturé anisotherme, l'essai

oedométrique en cellule triaxiale, la prise en compte de la variabilité spatiale des propriétés. Mais la modélisation du waterflooding est vraiment originale car elle constitue le premier calcul totalement couplé de cette expérimentation.

- Enfin, dans le chapitre VII, les calculs de réservoirs sont relativement originaux car ce sont des modèles couplant les aspects mécaniques et d'écoulement biphasique au sein d'un même code.

### 3. PERSPECTIVES

Les développements effectués dans cette thèse nous ont permis de réaliser des simulations relatives au stockage de déchets nucléaires et aux réservoirs pétroliers de mer du Nord. Dans cette optique, les modélisations devraient être poursuivies et améliorées.

Il faudrait notamment réaliser les simulations couplées des réservoirs complexes (multicouches) mais aussi et surtout passer à un modèle 3D qui représente le mieux le problème étudié. Au niveau de la loi de comportement de la craie, un effort devrait être produit afin de mieux comprendre le mécanisme microscopique responsable de la variation de la résistance du matériau en fonction de la succion. D'autres aspects, qui n'ont pas été abordés dans ce travail, mériteraient également des développements, comme la viscosité, la mouillabilité.

Il est à noter que ce travail pourrait trouver des prolongements dans d'autres domaines. En effet, certains réservoirs de gaz présentent également des problèmes de compaction et nos concepts pourraient également être appliqués au problème d'étanchéité des couvertures argileuses.

Nos simulations relatives au stockage de déchets se sont essentiellement concentrées sur les phénomènes prenant place dans l'argile de scellement. Il serait intéressant de réaliser une analyse de bifurcation lors de ces calculs car elle fournirait une information précieuse sur de possibles localisations de déformations qui peuvent mener à une fissuration du matériau. Il serait également utile de développer des modèles qui tiennent compte de la viscosité de l'argile et de son interaction possible avec les fluides percollants.

Ces modèles trouvent certainement des applications dans des simulations en vraies grandeurs à l'échelle de la galerie mais également dans des calculs de stabilité de barrière d'étanchéité dans un centre d'enfouissement technique.

D'une manière plus générale, l'aspect thermique du comportement de l'argile et de la craie pourrait certainement être étudié plus en profondeur. Nous avons également montré l'intérêt de disposer d'un modèle d'écoulement tenant compte de l'hystérésis de la courbe de rétention. Enfin, l'approche probabiliste permettant de considérer la variabilité spatiale des propriétés a seulement été ébauchée dans ce travail mais elle ouvre des voies de recherches intéressantes pour de futurs chercheurs !





## REFERENCES



## RÉFÉRENCES

- ALONSO E.E., GENS A. & HIGHT D.W. – Special problem soils. General Report – *Proceedings 9<sup>th</sup> European Conf. Soil Mech. Mech. Fdn Engng*, Dublin, **3**, pp. 1087-1146, 1987.
- ALONSO E. E., GENS A. & JOSA A. – A constitutive model for partially saturated soils – *Géotechnique* **40**(3), pp 405-430, 1990.
- ALONSO E. & ALCOVERRO J. – CATSIUS CLAY PROJECT , Calculation and Testing of Behaviour of Unsaturated Clay as Barrier in Radioactive Waste Repositories, Stage 1 : Verification exercises – *Publication Tecnica Num. 10/99 ENRESA*, 1999a.
- ALONSO E. & ALCOVERRO J. – CATSIUS CLAY PROJECT , Calculation and Testing of Behaviour of Unsaturated Clay as Barrier in Radioactive Waste Repositories, Stage 2 : Validation exercises at laboratory scale – *Publication Tecnica Num. 11/99 ENRESA*, 1999b.
- ALONSO E. & OLDECOP L. – Comportement des remblais en enrochements – *Actes de la journée scientifique internationale ENPC "21 ans du CERMES"*, pp. 187-234, 2001.
- ANDERSEN M.A., FOGED N. & PEDERSEN H.F. – The link between Waterflood-Induced Compaction and rate-sensitive behavior in a weak North Sea Chalk – *Proceedings 4<sup>th</sup> North Sea Chalk Symposium*, Deauville, 1992.
- BARNICHON J.D. – Finite Element Modelling in Structural and Petroleum Geology – *Thèse de doctorat de l'Université de Liège*, 1998.
- BEAR J. – Dynamics of fluids in porous media – *American Elsevier Environmental science series*, 1972.
- BEAR J. & VERRUIJT A. – Theory and Applications of Transport in Porous media – Modelling Groundwater Flow and Pollution, with Computer Programs for simple cases, *D. Reidel Publishing Company*, 1987.
- BISHOP A.W. & DONALD I.B. – The experimental study of partly saturated soil in the triaxial apparatus – *Proceedings 5th Int. Conf. on Soil Mechanics and Found. Eng.*, **1**, pp13-21, 1961.
- BISHOP A.W. & BLIGHT G.E. – Some aspects of effective stress in saturated and partly saturated soils – *Géotechnique*, **3**, pp. 177-197, 1963.
- BOIS A.P. – Pasachalk Research Project, Evaluation after two years – *Rapport interne AmsaTech non-publié*, 2000.

- BOIS A.P., SHAN P., MAURY V., PIAU J.M. & HALLE G. – Subsidence induced by water injection in water sensitive Rocks: Numerical simulation of compaction measurements in Ekofisk Wells C11 and C11A – *SPE 49327*, 1998.
- BOLLE A. – Approche probabiliste en reconnaissance et en simulation – *Notes de cours, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège*, 1995.
- BOLZON G., SCHREFLER B.A., ZIENKIEWICS O.C. – Elastoplastic soil constitutive laws generalize to partially saturated states – *Géotechnique* **46(2)**, pp. 279-289, 1996.
- BOWEN R.M. – Incompressible Porous Media Models By Use of the Theory of Mixtures – *Int. J. Engng. Sci.*, **18**, pp. 1129-1148, 1980.
- BOYCE H.R. – A non-linear model for the elastic behaviour of granular materials under repeated loading – *Proceedings International Symposium on Soils under Cyclic and Transient Loading*, Swansea, **1**, pp. 285-294, 1980.
- BRIGNOLI M., SANTARELLI F.J. & RIGHETTI C. – Capillary phenomena in an impure chalk – *Proceedings Eurock 94*, pp. 837-843, 1994.
- BURGER A., RECORDON E., BOVET D., COTTON L. & SAUGY B. – Thermique des nappes souterraines – *Presses Polytechniques Romandes*, 1985.
- CHARLIER R. – Approche unifiée de quelques problèmes non linéaires de mécanique des milieux continus par la méthode des éléments finis – *Thèse de doctorat, Université de Liège*, 1987.
- CHARLIER R., RADU J.P. & CESCOTTO S. – The effects of Hydromechanical Coupling on the Numerical Modelling of Strain Localisation – *Proceedings of COMPLAS 5*, Barcelona, 1997.
- CHARLIER R., COLLIN F., SCHROEDER C., ILLING P., DELAGE P., CUI Y.J. & De GENNARO V. – A constitutive model for North Sea Chalk. Application to reservoir compaction and to waterflooding – *Biot conference*, Grenoble, 2002.
- COLLIN F. – Développement d'un modèle d'écoulement multiphasique: loi WAVAT. – Rapport interne, 1998.
- COLLIN F., LI X.L., RADU J.P. & CHARLIER R. – Thermo-hydro-mechanical coupling in clay barriers – *Engineering Geology*, **64**, pp. 179-193, 2002a.
- COLLIN F., CUI Y.J., SCHROEDER C. & CHARLIER R. – Mechanical behaviour of Lixhe chalk partly saturated by oil and water: experiment and modelling – *Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **26**, pp. 897-924, 2002b.

- COLEMAN J.D. – Stress strain relations for partly saturated soil. Correspondence – *Géotechnique* **12**(4), pp. 348-450, 1962.
- COUSSY O. – Mechanics of Porous Continua – *Wiley London*, 1995.
- CUI Y.J. – Etude du comportement d'un limon compacté non saturé et de sa modélisation dans un cadre élasto-plastique – *Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, CERMES*, Paris, 1993.
- CUI Y.J. & DELAGE P. – Yielding and plastic behaviour of an unsaturated compacted silt – *Géotechnique*, **46**(2), pp. 291-311, 1996.
- DANGLA P., COUSSY O. & EYMARD R. – A Vanishing diffusion process in unsaturated soils – *Int. J. Non-Linear Mechanics*, **33**(6), pp. 1027-1037, 1998.
- DA SILVA F., MONJOIE A., SCHROEDER C., PRIGNON P., YERNAUX C. & DEBANDE G. – Establishment of constitutive laws of chalks and long term tests – *Third North Sea Chalk Symposium*, Copenhagen, 1990.
- DELAGE P. – Aspects du comportement des sols non saturés – *Revue Française de Géotechnique*, **40**, pp. 33-43, 1987.
- DELAGE P., SURAJ De SILVA G.P.R. & VICOL T. – Suction controlled testing of non-saturated soils with an osmotic consolidometer – *Proceedings 7<sup>th</sup> International Conf. on expansive Soils*, Dallas, pp. 206-211, 1992.
- DELAGE P., AUDIGUIER M., CUI Y.J. & DEVEUGHELE M. – Water retention properties and microstructure of various geomaterials – *Proceedings of the 11th ECSMFE*, Copenhagen, **3**, pp. 43-48, 1995.
- DELAGE P., SCHROEDER C. & CUI Y.J. – Subsidence and capillary effects in chalk – *Eurock 96 Proceedings*, Turin, pp. 1291 – 1298, 1996.
- DELAGE P. & CUI Y.J. – L'eau dans les sols non-saturés – *Extrait de la collection : Techniques de l'Ingénieur C301*, 2001a.
- DELAGE P. & CUI Y.J. – Comportement mécanique des sols non saturés – *Extrait de la collection : Techniques de l'Ingénieur C302*, 2001b.
- DESAI C.S. & SIRIWARADANE H.J. – Constitutive laws for engineering materials with emphasis on geologic materials – *Prentice-Hall*, 1984.
- DHATT G. & TOUZOT G. – Une présentation de la méthode des éléments finis – *Maloine (Paris) et les Presses de l'Université Laval (Québec)*, 1981.
- DRUCKER D.C. & PRAGER W. – Soil mechanics and plasticity analysis or limit design – *Quarterly Applied Mathematics*, **10**(2), pp. 157-165, 1952.

- DORSEY N.E. – Properties of Ordinary Water-Substances – *Amer. Chemical Soc, Mono. Series*, New York:Reinhold, 1940.
- EBELTOFT E., NORDTVEDT J.E., SYLTE A. & OXNEVAD I.E.I – Two- and three-phase relative permeabilities and capillary pressures in chalks – *JCR5 5<sup>th</sup> North Sea Chalk Symposium*, Reims, 1996.
- ECLIPSE TECHNICAL DESCRIPTION, *Copyright 1982-2000 Schlumberger*, 2000.
- ENGSTROM F. – Rock Mechanical Properties of Danish North Sea Chalk – *Fourth North Sea Chalk Symposium*, 1992.
- ESCARIO V. & SAEZ J. – The Shear Strength of partly saturated soils – *Géotechnique*, **36**(3), pp. 453-456, 1986.
- EWEN J. & THOMAS H.R. – Heating unsaturated medium sand – *Géotechnique*, **3**, pp. 455-470, 1989.
- FOGED N., CHRISTENSEN H.F. & ANDERSEN M.A. – Rock mechanics and water injection – *Proceedings 5<sup>th</sup> North Sea Chalk Symposium*, Reims, France, 1996.
- FREDLUND D.J. – Appropriate concepts and technology for unsaturated soils – *Canadian Geotechnical Journal*, **16**(1), pp. 121-139, 1979.
- FREDLUND D.J. & MORGENSTERN N.R. – Stress state variables for unsaturated soils – *ASCE J. Soil Mech. and Found. Eng., GT5*, pp. 447-466, 1977.
- FREDLUND D.J., MORGENSTERN N.R. & WIDGER R.A. – The Shear Strength of Unsaturated Soils – *Can. Geotech. J.*, **15**(3), pp. 313-321, 1978.
- FREDLUND D.G. & RAHARDJO H. – Soil Mechanics for Unsaturated Soils – *A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons inc.*, 1993.
- GAWIN D. & SCHREFLER B.A. – Thermo-hydro-mechanical analysis of partially saturated porous materials – *Engineering Computations*, **13**(7), pp 113-143, 1996a.
- GAWIN D., SIMONI L. & SCHREFLER B.A. – Multiphase flow in porous media : proposal of a benchmark – *ALERT Program 4 : Thermo-hydromechanical coupling*, 1996b.
- GENS A. & ALONSO E.E. – A framework for the behaviour of unsaturated expansive clays – *Can. Geotech. J.*, **29**(6), pp. 1013-1032, 1992.
- GENS A. & OLIVELLA S. – THM phenomena in saturated and unsaturated porous media, Fundamentals and formulation – *Environmental Geomechanics* Ed. R. Charlier & A. Gens, *Revue française de génie civil*, **5**(6), pp. 693-717, 2001.

- GODINAS A. & CESCOTTO S. – Calcul des gradients de vitesse constants au cours d'un pas – *Rapport interne n°159, MSM, Université de Liège*, 1984.
- HABRAKEN A.M. – Contribution à la modélisation du formage des métaux par la méthode des éléments finis – *Thèse de Doctorat, Université de Liège*, 1989.
- HASSANIZADEH M. & GRAY W. G. – General conservation equations for multi-phase systems: 1. Averaging procedure – *Advances in Water Resources*, **2**, pp. 131-144, 1979a.
- HASSANIZADEH M. & GRAY W. G. – General conservation equations for multi-phase systems: 2. Mass, momenta, energy, and entropy equations – *Advances in Water Resources*, **2**, pp. 191-208, 1979b.
- HASSANIZADEH M. & GRAY W. G. – General conservation equations for multi-phase systems: 3. Constitutive theory for porous media flow – *Advances in Water Resources*, **3**, pp. 25-40, 1980.
- HASSANIZADEH M. – Derivation of basic equations of mass transport in porous media, Part 1. Macroscopic balance laws – *Advances in Water Resources*, **9**, pp. 196-206, 1986.
- HODGKINSON D. P. – A Mathematical Model for Hydrothermal Convection around a Radioactive Waste Depository in Hard Rock – *Annals of Nuclear Energy*, **7**, pp. 313-334, 1980.
- HOMAND S. – Comportement mécanique d'une craie très poreuse avec prise en compte de l'effet de l'eau : de l'expérience à la simulation – *Thèse de doctorat, Université de Lille I*, 2000.
- HOMAND S. & SHAO J.F. – Mechanical behaviour of a porous chalk and effect of saturating fluid – *Mechanics of Cohesive-Frictional materials*, **5**, pp. 583-606, 2000.
- HOULSBY G.T. – The use of a variable shear modulus in elastic-plastic models for clays – *Computers and Geotechnics*, **1**, pp. 3-13, 1985.
- JENNINGS J.E.B. & BURLAND J.B. – Limitations to the use of effective stresses in partly saturated soils – *Géotechnique*, **12**(2), pp. 125-144, 1962.
- JOMMI C., VAUNAT J., GENS A., GAWIN D. & SCHREFLER B. – Multiphase flow in porous media : a numerical benchmark – *Proceedings NAFEMS World Congress Stuttgart*, 1997.
- JOSA A., ALONSO E.E., LLORET A. & GENS A. – Stress-strain behaviour of partially saturated soils – *Proceedings 9<sup>th</sup> European Conf. Soil Mech. Mech. Fdn Engng*, Dublin, **2**, pp. 561-564, 1987.

- LADE P.V. – Elasto-plastic stress strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces – *Int. J. Solids Structures*, **13**, pp. 1019-1035, 1977.
- LADE P.V. & NELSON R.B. – Modelling the elastic behaviour of granular materials – *Int. Journal for numerical and analytical methods in Geomechanics*, **11**, pp. 521-542, 1987.
- LI X.L. – Comportement hydromécanique des sols fins : de l'état saturé à l'état non-saturé – *Thèse de doctorat de l'Université de Liège*, 2000.
- LLORET A. & ALONSO E.E. – State surface for partially saturated soils – *Proceedings 11<sup>th</sup> Int. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng.*, **2**, pp. 557-562, 1985.
- LORET B. – Short communication on the choice of elastic parameters for sand – *Int. J. Numer. Anal. meth. Geomech.*, **9**, pp. 285-292, 1985.
- LORET B. & KHALILI N. – A three-phase model for unsaturated soils – *Int. J. Numer. Anal. meth. Geomech.*, **24**, pp. 893-927, 2000.
- MAINGUY M., COUSSY O. & EYMARD R. – Modélisation des transferts hydriques isothermes en milieu poreux. Application au séchage des matériaux à base de ciment – *Publication du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées : Ouvrage d'art-OA32*, 1999.
- MASSON P., LAURENT L.J. & D'HEUR M. – La géologie de la mer du Nord, Bilan de 15 années d'exploration pétrolière – *Hommage à Léon Calembert*, Ed. Georges Thone, Liège, pp. 147-181, 1980.
- MATYAS E.L. & RADHAKRISHNA H.S. – Volume change characteristics of partially saturated soils – *Géotechnique*, **18**, pp. 432-448, 1968.
- MAURY V. & PIAU J.M. – Subsidence induced by water injection in water sensitive reservoir rocks : the example of Ekofisk – *Fifth North Sea Chalk Symposium, JCR program*, Reims, 1996.
- MAYHEW Y.R. & ROGERS G.F.C. – Thermodynamic and transport properties of fluids – *2<sup>nd</sup> Ed.*, Oxford Blackwell, 1976.
- MESTAT P. – Lois de comportement hyperélastiques – *Revue française de Génie Civil*, **4**(2), pp. 505-510, 1998.
- MILLY P.C.D. – Moisture and heat transport in hysteretic, inhomogeneous porous media: A matrix head-based formulation and a numerical model – *Water Resources Research*, **18**(3), pp 489-498, 1982.



- MONJOIE A., SCHROEDER C., Da SILVA F., DEBANDE G., HALLEUX L., DETIEGE C. & POOT B. – Mechanical behaviour of chalks – *Second North Sea Chalk Symposium*, Stavanger, 1985.
- MONJOIE A., SCHROEDER C., PRIGNON P., YERNAUX C., Da SILVA F. & DEBANDE G. – Establishment of constitutive laws of chalk and long term tests – *Third North Sea Chalk Symposium*, Copenhagen, 1990.
- NELSON I. & BARON M.L. – Application of Variable moduli models to soil behavior – *Int. J. Solids Structures*, **7**, pp. 399-417, 1971.
- OLIVELLA S., CARRERA J., GENS A. & ALONSO E.E. – Nonisothermal Multiphase Flow of Brine and Gas Through Saline Media – *Transport in Porous Media*, **15**, pp 271-293, 1994.
- OLIVELLA S., GENS A. , CARRERA J. & ALONSO E.E. – Numerical formulation for a simulator (CODE\_BRIGHT) for the coupled analysis of saline media – *Engineering Computations* , **13**(7), pp 87-112, 1996.
- OTEO-MAZO C., SAEZ AUNON J. & ESTEBAN F. – Laboratory tests and equipment with suction control – *Proceedings 1<sup>st</sup> Int. Conf. on Unsaturated Soils Unsat'95*, Paris, **3**, pp. 1509-1515, 1995.
- PANDAY S. & CORAPCIOGLU M.Y. – Reservoir Transport Equations by Compositional Approach – *Transport in Porous Media*, **4**, pp 369-393, 1989.
- PAPAMICHOS E., BRIGNOLI M. & SANTARELLI F. J. – An experimental and theoretical study of partially saturated collapsible rock – *Mechanics of cohesive-frictional materials*, **2**, pp. 251-278, 1997.
- PEACEMAN D.W. – Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation – SPE 6893, 1978.
- PHILIP J.R. & DE VRIES D.A. – Moisture movement in porous materials under temperature gradients – *EOS Trans. AGU*, **38**(2), pp 222-232, 1957.
- PLISCHKE B. – Some aspects of numerical simulation of water-induced chalk compaction – *Fifth North Sea Chalk Symposium*, Reims, 1996.
- PIAU J.M. & MAURY V. – Mechanical effects of water injection on chalk reservoirs – *Proceedings Eurock'94*, pp. 819-828, Balkema, Rotterdam, 1994.
- PIAU J.M., BOIS A.B., ATAHAN C., MAURY V. & HALLE G. – Water/chalk (or collapsible soil) interaction: Part I. Comprehensive evaluation of strain and stress jumps at the water front – *SPE/ISRM 47390, Eurock 98*, pp. 419-428, 1998.

- PINTADO X., LLORET A. & al – TMH Laboratory tests in FEBEX phase 3 – *UPC Report 70-UPC-L-3-01*, Barcelona, 37 pp, 1997.
- POLLOCK D.W. – Simulation of Fluid Flow and Energy Transport Processes Associated With High-Level Radioactive Waste Disposal in Unsaturated Alluvium – *Water Resources Research*, **22**(5), pp 765-775, 1986.
- RAZNJEVIC K. – Tables et Diagrammes Thermodynamiques – *Ed. Eyrolles*, 1970.
- RADU J.P. & CHARLIER R. – Modelling of hydromechanical coupling for non linear problems: fully coupled and staggered approaches – *Proceedings 8<sup>th</sup> Int. Conf. of the Int. Ass. for Computer Methods and Advances in Geomechanics*, West Virginia, USA, 1994.
- REVIEW PANEL – Engineering concepts of moisture equilibria and moisture changes in soils – *Moisture Equilibria and Moisture Changes in Soils beneath Covered Areas*, pp. 7-21, Butterworth, Sidney, 1965.
- RICHARDS L.A. – A pressure-membrane extraction apparatus for soil suction – *Soil science*, **51**, pp. 377-386, 1941.
- RISNES R. & FLAAGENG O. – Mechanical properties of chalk with emphasis on chalk-fluid interaction and micromechanical aspects – *Oil & Gas Science and Technology Revue IFP*, **54**(6), pp. 751-758, 1999a.
- RISNES R., KORSNES R.I. & VATNE T.A. – Tensional strength of chalks in direct and Brazilian tests. *Proceedings 9th International Congress on Rock Mechanics*, Paris. Rotterdam, Balkema, 1999b.
- ROSCOE K.H. & BURLAND J.B. – On the Generalized Stress-Strain Behavior of wet Clay – *Engineering Plasticity*, J. Heyman and F.A. Leckie (Eds), Cambridge University Press, Cambridge, pp. 535-609, 1968.
- SCHROEDER C., MONJOIE A., YERNAUX C., HENRY J.P. & SHAO J.F. – Chalk Research Program Phase II Project 1 Mechanical properties of chalk Subproject 5. *Internal report*, 1988.
- SCHROEDER C. & SHAO J.F. – Plastic deformation and capillary effects in chalks – *Fifth North Sea Chalk Symposium*, Reims, 1996.
- SCHROEDER C., BOIS A.P., MAURY V. & HALLE G. – Water/chalk (or collapsible soil) interaction: Part II. Results of tests performed in laboratory on Lixhe chalk to calibrate water/chalk models – *Proceedings de Eurock'98*, SPE 47587, Trondheim, 1998.
- SCHROEDER C., BOIS A.-P., CHARLIER R., COLLIN F., CUI Y.J., DELAGE P., GOULOIS A., ILLING P. & MAURY V. – PASACHALK project (Partially

- saturated chalk) : Constitutive modelling, determination of parameters using specific stress paths and application to the waterflooding (Extended abstract & Posters) – *JCR V Symposium Brighton*, 2000.
- SCHROEDER C., ILLING P., CHARLIER R., COLLIN F., DELAGE P., CUI Y.J., DE GENNARO V., DE LEEBEEK A., KEÜL P., BOIS A.P. – EC PROJECT PASACHALK. Mechanical behaviour of partially and multiphase saturated chalks Fluid-skeleton interaction : Main factor of chalk oil reservoirs compaction and related subsidence. *Final report Contract N°JOF3CT970033 of Non Nuclear Energy Programme JOULE III*, 2000.
- SCHROEDER C., ILLING P., CHARLIER R., COLLIN F., DELAGE P., CUI Y.J., DE GENNARO V., KEÜL P. – EC PROJECT PASACHALK II. Mechanical behaviour of partially and multiphase saturated chalks Fluid-skeleton interaction : Main factor of chalk oil reservoirs compaction and related subsidence – Part 2. *Contract N°ENK6-2000-00089 of Energy, Environment and Sustainable Development Programme*, 1998-2002.
- SCHROEDER C. – La mécanique des Roches en milieux insaturés, Application aux champs pétroliers – *Journée d'étude du GBMR-BVRM*, 2001.
- SCHROEDER C. – Du coccolithe au réservoir pétrolier. Approche phénoménologique du comportement mécanique de la craie en vue de sa modélisation à différentes échelles – *Thèse de Doctorat, Université de Liège*, 2002.
- SCHROEDER C., ILLING P., CHARLIER R., COLLIN F., DELAGE P., CUI Y.J., DE GENNARO V., KEÜL P., THIBEAU S., FONTAINE G – EC PROJECT PASACHALK II. *Mid term Report of Contract N°ENK6-2000-00089 of Energy, Environment and Sustainable Development Programme*, 2002.
- SHAO J.F. & HENRY J.P. – Development of an elastoplastic model for porous rock – *International Journal of Plasticity*, **7**, pp. 1-13, 1991.
- SHAO J.F. – Modélisation et validation du comportement mécanique de roches – *Mémoire d'habilitation à diriger des recherches*, 1992.
- SIMO J.C. & TAYLOR R.L. – Consistent tangent operators for rate-independent elasoplasticity – *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **48**, pp. 101-118, 1985.
- SIMO J.C. & HUGHES T.J.R. – Computational Inelasticity – *Interdisciplinary applied Mathematics*, **7**, pp 198-218, 1998.
- SPEYERER H. – *Zeit. Für techn. Physik*, **4**(11), pp 430, 1923.
- TEUFEL L.W. & FARREL H.E. – *In situ stress and natural fracture distribution in the Ekofisk Field, North Sea – Third North Sea Chalk Symposium*, Copenhagen, 1990.

- THOMAS H.R. & HE Y. – Analysis of coupled heat, moisture and air transfer in a deformable unsaturated soil – *Géotechnique*, **45**(4), pp 677-689, 1995
- VAN EEKELEN H.A.M. – Isotropic yield surfaces in three dimensions for use in soil mechanics – *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **4**, pp. 98-101, 1980.
- VAUNAT J., GENS A. & JOMMI C. – A Strategy for Numerical Analysis of the Transition between Saturated and Unsaturated Flow Conditions – *Numerical Models in Geomechanics*, pp. 297-302, 1997.
- VAUNAT J., CANTE J.C., LEDESMA A. & GENS A. – A stress point algorithm for an elastoplastic model in unsaturated soils – *International Journal of Plasticity*, **16**, pp. 121-141, 2000.
- VANDIJCKE S. – *Communications personnelles* – 2002.
- VILLAR M.V. & al – Modelling and validation of the thermal-hydraulic-mechanical and geochemical behaviour of the clay barrier – *Final report 1991-1994 CEC Contract FI2W-CT91-0102 (DOEO), CIEMAT Madrid*, 1994.
- VOLCKAERT G., BERNIER F., ALONSO E., GENS A., SAMPER J., VILLAR M., MARTIN-MARTIN P.L., CUEVAS J., CAMPOS R., THOMAS H., IMBERT C. & ZINGARELLI V. – Thermal-hydraulic-mechanical and geochemical behaviour of the clay barrier in radioactive waste repositories (Model development and validation) – *Final report Contract Nos FI2W/CT90/0033 and FI2W/CT91/0102, European Commission, Nuclear science and technology*, 1996.
- WANG X.C. – Modélisation numérique des problèmes avec localisation en bandes de cisaillement – *Thèse de Doctorat, Université de Liège*, 1993.
- WEAST R.C. – Handbook of Chemistry and Physics – *CRC-Press, Cleveland, OH*, 51<sup>ème</sup> Ed., 1971.
- WHEELER S.J. & SIVAKUMAR V. – An elasto-plastic critical state framework for unsaturated soil – *Géotechnique*, **45**(1), pp. 35-53, 1995.
- WILKE C.R. – A Viscosity Equation for Gas Mixtures – *The Journal of Chemical Physics*, **18**(4), pp 517-519, 1950.
- ZIENKIEWICZ O.C. & TAYLOR R.L. – The finite element method (Fifth edition) – *Butterworth-Heinemann*, 2000.
- ZYTYNSKI M., RANDOLPH M.F., NOVA R. & WROTH C.P. – Short communications on modelling the unloading-reloading behaviour of soils – *Int. Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **2**, pp. 87-94, 1978