

LA GEOMETRIE DE LOBACHEVSKI

Yves De Rop et Pierre-Guillaume Sprimont
Université de Liège, Institut d'Astrophysique et de Géophysique
Allée du 6 Août, 17
4000 Liège, Belgique

1. Introduction

Si, à un enfant terminant l'école primaire, vous posez la question : « Qu'est-ce qu'un rectangle ? », il répondra assurément, à juste titre, quelque chose du genre : « Il s'agit d'une figure géométrique plane, un quadrilatère pour être précis, admettant quatre angles droits ». Si vous poursuivez en demandant : « Est-ce que ce type d'objet existe dans la réalité ? », il réagira probablement à peu près comme suit, non sans quelque impatience : « Voyons, c'est évident. Je peux tracer une telle figure dans mon cahier en vérifiant, à l'aide de mon équerre, qu'elle satisfait bien aux propriétés que vous lui imposez ».

Cette conversation n'est pas aussi futile qu'il y paraît. Elle pose en fait deux questions qui se chevauchent. *Primo* : « Un rectangle est-il logiquement possible ? », et *secundo* : « Qu'est-ce qui me permet d'utiliser ce concept lorsque je décris la nature ? » La première question est interne aux mathématiques et son développement constitue un des objectifs de cet article. La seconde concerne l'articulation entre le monde mathématique et le monde physique.

Lorsqu'un écolier découvre la géométrie, il associe intuitivement des référents simples aux concepts fondamentaux. La ligne droite est matérialisée par une règle ou toute image apparentée, comme un fil parfaitement tendu ou la trajectoire d'un rayon lumineux dans la poussière ; le cercle apparaît dans le visage de la pleine Lune, et on peut le tracer à l'aide d'un compas ; les bulles de savon sont sphériques ; les rails du chemin de fer fournissent une représentation du parallélisme. Cette géométrie, proche de l'expérience quotidienne, est appelée *euclidienne*, en hommage au philosophe Euclide d'Alexandrie (né vers -325) qui en a présenté une première synthèse déductive dès l'Antiquité. Elle se déploie en milliers de théorèmes logiquement cohérents reposant sur quelques axiomes fondamentaux.

On dit souvent que les axiomes de la géométrie euclidienne se réduisent aux cinq suivants :

- 1) Toute paire de points définit un segment de droite et un seul.
- 2) Tout segment de droite peut être prolongé indéfiniment pour former une droite.
- 3) On peut construire un cercle de centre et de rayon arbitraires.
- 4) Tous les angles droits sont congruents.¹
- 5) Par un point on ne peut mener qu'une parallèle à une droite donnée.

Cependant, cette liste est loin d'être exhaustive. D'abord, Euclide cite d'autres axiomes, qui ne sont d'ailleurs pas de nature géométrique, par exemple : « Deux quantités égales à une même troisième sont égales entre elles ». Ceux-ci sont difficiles à traquer, parce qu'ils s'imposent à l'esprit humain comme évidents et inéluctables. Ensuite, Euclide utilise implicitement d'autres axiomes, sans les identifier comme tels. Par exemple, il exploite abondamment la possibilité de déplacer une figure autour d'un point, ou d'un point à l'autre, à la manière d'un corps solide, c'est-à-dire sans modifier ses longueurs intrinsèques

1. Cela signifie que deux angles droits quelconques peuvent être déplacés sans déformation jusqu'à se superposer.

et ses angles. En 1899, le grand mathématicien David Hilbert (1862-1943) a résolu le problème ardu d'établir un inventaire complet d'axiomes, et répertorié *vingt* postulats dont on peut déduire la géométrie euclidienne. Il est intéressant de remarquer qu'ils font intervenir trois objets primitifs *qui ne sont pas définis* : le point, la droite et le plan. Ainsi conçue, la géométrie, affranchie de son lien au monde des figures, relève des mathématiques pures.

A partir de ces règles du jeu, on peut démontrer, notamment, que la somme des angles d'un triangle est égale à cent quatre-vingts degrés ; ou encore, le théorème de Pythagore.

Parmi les cinq axiomes cités ci-dessus, les quatre premiers sont relativement triviaux. Mais le cinquième, encore appelé *postulat des parallèles*, semble plus engagé. En fait, il ressemble à un théorème. Durant le Moyen Age, divers auteurs ont tenté de le prouver à partir des autres axiomes. Plusieurs démonstrations en ont été proposées, toutes fausses.

Au début du XVIII^e siècle, le Père Giovanni Saccheri (1667-1733) releva le défi à sa façon, en raisonnant par l'absurde : en niant le postulat des parallèles et en engrangeant de nouveaux théorèmes, il espérait aboutir tôt ou tard à une contradiction. Mais ses efforts furent vains et Saccheri mourut, brisé par l'échec (pensait-il) de son projet.

Johann Heinrich Lambert (1728-1777) se préoccupa lui aussi de sonder les conséquences d'une géométrie affranchie du cinquième axiome. Mieux, il semble avoir compris qu'il étudiait ainsi les propriétés des figures tracées sur une « sphère de rayon imaginaire ». Il parvint à démontrer que, dans ces conditions, la somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à π moins une constante fois l'aire du triangle.

Progressivement donc, la possibilité de l'existence d'autres géométries se fraya un chemin. Insistons sur le fait que l'on ne contestait pas la validité logique de la géométrie euclidienne : l'enjeu consistait plutôt à accepter ou non le postulat des parallèles (les autres n'étant pas remis en cause).

En 1829, Nicolas Lobachevski (figure 1) publie ses premiers résultats concernant une



FIGURE 1: *Nicolaï Ivanovich Lobachevski (1792-1856).*

géométrie nouvelle, qu'il qualifie d'*hyperbolique*. Il y admet l'idée que, par un point, puissent passer une infinité de droites parallèles à une droite donnée. Ces recherches étaient dans l'air du temps : Janos Bolyai fit la même découverte à la même époque, tandis que Riemann

allait développer un troisième type de géométrie, dite *elliptique*, dans laquelle on ne peut tracer, par un point extérieur à une droite, aucune parallèle à cette droite. Chacune de ces géométries décrit un espace homogène et isotrope, c'est-à-dire dont les propriétés sont indépendantes de la position et de l'orientation. Selon le cas, on l'appelle *espace à courbure négative constante* (Lobachevski), *espace plat, ou à courbure nulle* (Euclide) ou *espace à courbure positive constante* (Riemann). Sur le podium, Euclide occupe la place centrale.

Signalons d'ores et déjà que les nouvelles géométries autorisent la présence d'un paramètre constant possédant les dimensions d'une longueur. En d'autres termes, elles admettent l'existence d'une longueur privilégiée. A l'époque, certains mathématiciens s'en sont offusqués : Giusto Bellavitis (1803-1880) qualifiait les travaux de Lobachevski de « géométrie pour hôpital psychiatrique » ! Il faut reconnaître que les nouveaux résultats sont déconcertants. Parmi d'autres bizarreries, signalons celles-ci :

- La somme des angles d'un triangle est inférieure à π radians.
- Le rectangle est impossible.
- Les cercles existent (axiome 3) mais leur centre est parfois rejeté à l'infini.
- Le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre est supérieur à π .
- Le théorème de Thalès n'est plus valable, celui de Pythagore a disparu.

Dans cet article, nous allons d'abord expliciter les premières conséquences du rejet de l'axiome cinq. Cependant, malgré leur intérêt logique, ces raisonnements sont un peu abstraits et donc, modérément convaincants. Heureusement, il existe des représentations visuelles de l'espace de Lobachevski à deux dimensions. Nous allons nous familiariser avec l'une des plus courantes d'entre elles : le *demi-plan de Poincaré*. Celui-ci fournit des référents simples pour les droites, les angles et les cercles ; ce qui permet d'illustrer les théorèmes. Ensuite, afin de développer notre intuition, nous envisagerons les projections de figures euclidiennes dans le demi-plan de Poincaré. Il s'agit d'une démarche analogue à celle des géographes, qui arrivent à se forger une bonne idée de la surface terrestre, sphérique, à l'aide de projections cartographiques planes. Enfin, nous étudierons une deuxième représentation, qui utilise une surface courbe plongée dans l'espace euclidien : la *pseudo-sphère de Beltrami*.

2. Premières conséquences

2.1 L'angle de parallélisme

La nouveauté fondamentale introduite par Lobachevski est la suivante. Soit un point P extérieur à une droite D donnée. Il est toujours possible d'abaisser depuis P une perpendiculaire (unique) à D , notons-la PQ (figure 2). Ceci définit la distance a entre le point P et la droite D . Les droites passant par P peuvent être caractérisées par l'angle θ qu'elles déterminent avec PQ . Certaines coupent D et d'autres lui sont parallèles. Ces deux classes sont départagées par un angle limite θ_0 dépendant de a , dit *angle de parallélisme*. On peut démontrer que sa valeur est donnée par

$$\tan \frac{\theta_0}{2} = e^{-a/\mathcal{R}} \quad (1)$$

où $\mathcal{R}$ est une longueur constante mais arbitraire, que nous appellerons *facteur d'échelle*. On constate que, si $a = \mathcal{R}$, alors $\theta_0 = 40^\circ 24'$; mais si a est petit par rapport à $\mathcal{R}$, on a la

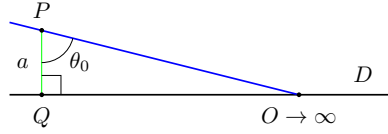


FIGURE 2: Par le point P passent, non seulement une infinité de droites coupant D , mais également une infinité de droites non sécantes, c'est-à-dire parallèles à D . (La définition des droites parallèles est la même que chez Euclide : ce sont des droites situées dans un même plan et qui ne se rencontrent pas.) La frontière s'obtient comme limite de la droite PO , lorsque $O \rightarrow \infty$ sur D . Elle détermine avec PQ un angle limite $\theta_0 < \pi/2$ et fait elle-même partie de la classe des droites parallèles à D . Signalons cependant que l'angle POQ tend vers zéro. Bien entendu, il existe une droite équivalente à gauche du point Q .

formule approchée

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{a}{\mathcal{R}}. \quad (2)$$

Ainsi, le deuxième terme du membre de droite disparaît si a est négligeable devant $\mathcal{R}$. Ceci montre que la géométrie euclidienne s'obtient comme limite de celle de Lobachevski pour un facteur d'échelle arbitrairement grand : il n'existe alors qu'une seule droite passant par P et parallèle à D , associée à l'angle $\theta_0 = \pi/2$. Autrement dit, le facteur d'échelle donne l'ordre de grandeur des distances à partir desquelles la géométrie euclidienne se trouve en complète rupture avec la nouvelle géométrie.

2.2 Le théorème de Thalès

Une des caractéristiques les plus significatives de la géométrie euclidienne est la possibilité de tracer des figures semblables, c'est-à-dire de grandeur différente mais de même forme. On y démontre le *théorème de Thalès* : si, sur deux droites sécantes en un point O , on porte respectivement deux points P et P' à égale distance L du point d'intersection, alors tous les triangles isocèles du type POP' sont semblables. Notamment, la longueur du segment PP' est proportionnelle à L : une règle de longueur d , dont les extrémités sont situées à un mètre d'un observateur O , intercepte le même angle α qu'une règle de longueur $2d$ placée à deux mètres (figure 3).

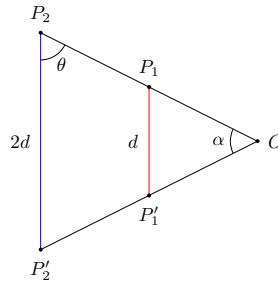


FIGURE 3: *Théorème de Thalès*. Si la distance $OP_2 = OP'_2$ est double de la distance $OP_1 = OP'_1$, alors le segment $P_2P'_2$ possède une longueur double de $P_1P'_1$.

Si l'angle α est petit, c'est-à-dire si L est beaucoup plus grand que d , on peut considérer que tous les points du segment sont à peu près à la même distance L de l'observateur. Les lois de la géométrie euclidienne prescrivent alors

$$\alpha \simeq d/L.$$

Ainsi, sachant la distance de l'objet et l'angle qu'il sous-tend, on connaît sa taille intrinsèque : si un insecte, repéré à trente centimètres de distance, intercepte un angle de un degré, c'est qu'il possède approximativement la taille d'une fourmi ; mais si quelqu'un détecte à trois cents mètres un hyménoptère interceptant le même angle, il fera bien de modifier sa route.

De même, si un observateur se déplace le long du segment PP' en pointant à tout instant son index vers O , le doigt va balayer, au total, un angle α . Ce phénomène est bien connu en astronomie, où l'on appelle *parallaxe* la quantité $\pi/2 - \theta = \alpha/2$ (figure 3). Supposons, pour simplifier, que la Terre décrive un cercle autour du Soleil. En six mois, elle se déplace d'une distance d égale au diamètre de son orbite (environ trois cents millions de kilomètres), et la mesure de la parallaxe d'une étoile O permet d'en déduire sa distance. Par exemple, la parallaxe de l'étoile 61 Cygni vaut 31 centièmes de seconde d'arc, correspondant à une distance de 10,5 années-lumière. Remarquons que si l'étoile s'éloigne arbitrairement, sa parallaxe tend vers zéro, ce qui signifie que l'angle θ tend vers $\pi/2$.

Chez Lobachevski le théorème de Thalès n'est plus valable : si, sur deux droites sécantes, on porte deux points P et P' à égale distance L du point d'intersection, alors la longueur du segment PP' croît plus rapidement que L . (Il en résulte que deux triangles semblables sont nécessairement congruents.) Si deux objets, placés à une distance double l'un de l'autre, possèdent des diamètres angulaires égaux, alors le plus éloigné est *plus de deux fois plus grand* que le premier ; en d'autres termes, si un objet donné s'approche d'un observateur, son diamètre angulaire croît plus vite qu'en géométrie euclidienne : une bestiole sous-tendant un angle de un degré à trente centimètres peut être un monstre !

3. Le demi-plan de Poincaré

Il est possible de fournir des représentations tout à fait probantes de la nouvelle géométrie, et donc de rendre celle-ci plus accessible à l'intuition. Nous allons exposer ici une méthode permettant de tracer des figures concrètes qui se comportent selon les préceptes de Lobachevski. (Pour fixer les idées, nous nous concentrerons dorénavant sur le cas $\mathcal{R} = 1$.)

Prenez un demi-plan, portez l'axe des X sur sa frontière. Tracez ensuite l'axe des Y perpendiculairement à celle-ci. Les axes sont gradués comme dans les coordonnées cartésiennes habituelles et les angles sont mesurés à l'aide d'un rapporteur traditionnel. Jusqu'ici, cela ressemble donc à une recette euclidienne. Mais, et c'est là que réside toute la finesse, pour mesurer les *distances* on utilise un « mètre » dont la longueur se dilate proportionnellement à l'ordonnée Y . On réalise ainsi une représentation commode du plan de Lobachevski, appelée *demi-plan de Poincaré* (et découverte, en fait, par le mathématicien italien Eugenio Beltrami, voir figure 4). On la dit *conformément euclidienne* : comme la dilatation des règles ne dépend que du point, et pas de la direction, elle n'affecte pas la forme des petits objets, ni la mesure des angles.²

2. Il existe d'autres représentations importantes, parmi lesquelles : le *disque de Poincaré*, également conforme et largement utilisé, dans le contexte artistique, par M. Escher (*Limite Circulaire IV*, par exemple) ; ou le modèle projectif, appelé *disque de Klein* ; ou encore, le *modèle hémisphérique*. Elles ont toutes été découvertes par Beltrami !



FIGURE 4: *Eugenio Beltrami (1835-1900).*

Parmi toutes les trajectoires reliant deux points donnés A et B , le segment de droite est défini comme la courbe de plus courte longueur. Cependant, si A et B possèdent des abscisses différentes, il ne s'agit pas de la ligne droite traditionnelle. En effet, compte tenu de la dilatation des règles il s'avère avantageux de prendre un chemin passant au-dessus de celle-ci. On peut montrer que le meilleur compromis est un *arc de cercle* (au sens euclidien du terme) de centre C situé sur l'axe des X . Si les deux points ont la même abscisse, le segment de droite est vertical, comme en géométrie euclidienne (figure 5).

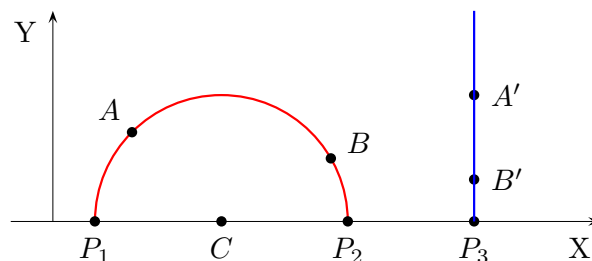


FIGURE 5: *Droites déterminées par deux points dans le demi-plan de Poincaré. Si les points n'ont pas la même abscisse, la droite qui les relie est un « demi-cercle » (en rouge) de centre C situé sur l'axe des abscisses. Sinon, elle est parallèle à l'axe des ordonnées (en bleu).*

Dans tous les cas, le premier axiome d'Euclide est de toute évidence satisfait, car deux points différents déterminent un et un seul segment de droite. Celui-ci peut être prolongé à l'infini de part et d'autre. En effet, comme les règles servant à mesurer deviennent infiniment petites au voisinage de l'axe des X , les points P_1 , P_2 et P_3 de la figure 5 sont à distance infinie des points d'ordonnée $Y > 0$. Aussi le deuxième axiome se trouve-t-il également vérifié.

Considérons toutes les droites sécantes en un point C quelconque et reportons-y, de part et d'autre de C , une longueur R arbitraire mais constante. Le résultat est le cercle de centre C et de rayon R . Manifestement, le troisième axiome d'Euclide est vérifié. Curieusement, la forme d'un cercle est celle que suggère une intuition euclidienne ; mais le centre est plus bas (il peut d'ailleurs être reporté à l'infini, c'est-à-dire sur l'axe des abscisses, si le cercle est tangent à cet axe). Tous ses diamètres le coupent à angle droit.

Enfin, tous les angles droits sont congruents (axiome 4) puisque la représentation de Poincaré n'altère pas les angles.

Si la nouvelle géométrie ne modifie pas la notion de perpendicularité, elle induit par contre des modifications drastiques dans le domaine du parallélisme. Il est en effet facile de trouver des contre-exemples au postulat des parallèles, montrant l'existence d'un angle de parallélisme $\theta_0 < \pi/2$. Il suffit pour cela de traduire la figure 2 dans le demi-plan de Poincaré : le résultat est la figure 6.

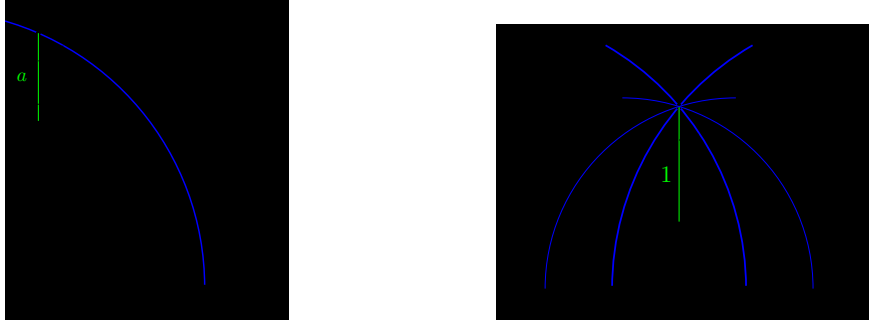


FIGURE 6: *A gauche, traduction de la figure 2 dans le demi-plan de Poincaré. On voit clairement que la somme des angles du triangle POQ est égale à $\theta_0 + \pi/2 < \pi$. A droite : si la distance a entre le point P et la droite D est égale à l'unité, alors $\theta_0 = 40^\circ 24'$. Les droites déterminant avec la verticale un angle supérieur ou égal à cette quantité (en bleu) sont parallèles à D .*

Tous les théorèmes reposant, à une étape quelconque de leur démonstration, sur le postulat des parallèles, s'en trouvent affectés. En voici un exemple important. Lorsqu'on prolonge dans un même sens tous les côtés d'un polygone convexe, la somme des angles extérieurs ainsi formés est égale à 2π plus l'aire du polygone.

– Première conséquence : dans la nouvelle géométrie, la somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à π moins l'aire du triangle. Les angles peuvent même être tous nuls, comme le montre la figure 7.

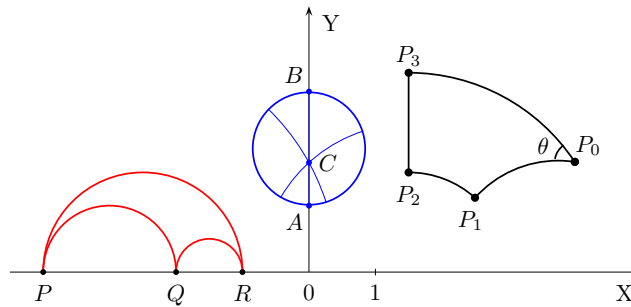


FIGURE 7: *A gauche, triangle PQR à trois angles nuls et donc, d'aire égale à π . Au centre, cercle de centre $C(0, \sqrt{e})$ et rayon $1/2$. Les points A et B ont pour ordonnée, respectivement, 1 et e . Les longueurs $\overline{AC}$ et $\overline{BC}$ valent $1/2$. On a tracé deux autres diamètres : remarquer la position du centre. A droite, quadrilatère à trois angles droits (en P_1 , P_2 et P_3). Le quatrième angle, θ , est strictement inférieur à $\pi/2$.*

– Deuxième conséquence : la somme des angles intérieurs d'un quadrilatère est égale à 2π moins l'aire du quadrilatère. C'est la raison pour laquelle le rectangle a disparu du paysage lovachevskien.

Mais il y a plus déroutant encore. D'abord une définition : on dit qu'un vecteur est *transporté parallèlement le long d'une droite* si sa longueur est préservée et s'il détermine un angle constant avec le vecteur tangent à cette droite. Alors, si l'on déplace un vecteur parallèlement le long d'un polygone, le vecteur obtenu après un tour complet diffère du vecteur initial d'un angle α égal à la somme des angles extérieurs du quadrilatère moins 2π , c'est-à-dire l'aire du quadrilatère. En d'autres termes, *si l'on transporte un vecteur parallèlement d'un point donné à un autre, le résultat dépend du chemin emprunté* (figure 8). Le parallélisme n'est plus une notion absolue. Cela n'a aucun sens de se demander si

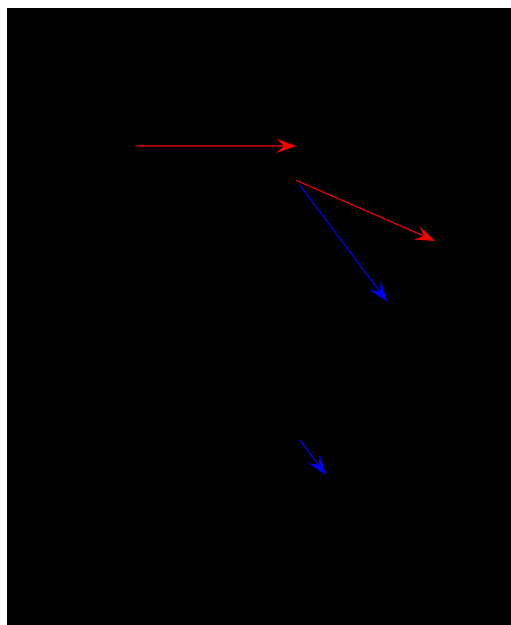


FIGURE 8: *Transport parallèle d'un vecteur défini initialement en P_0 , d'une part selon le chemin $P_0P_1P_2$ (en bleu), et d'autre part selon le chemin $P_0P'_1P_2$ (en rouge). Le dessin tient compte du fait que la longueur du vecteur est constamment préservée, si on la mesure comme d'habitude avec des règles dilatées proportionnellement à l'ordonnée. Les deux vecteurs résultants sont décalés l'un par rapport à l'autre d'un angle α égal à l'aire du quadrilatère.*

deux vecteurs, définis en deux points différents, sont parallèles ou non, si l'on ne précise pas le chemin connectant les deux points. Il s'agit là d'une propriété fondamentale du demi-plan de Poincaré, et donc du plan de Lobachevski.

La géométrie de Lobachevski et celle d'Euclide admettent cependant un certain nombre de théorèmes communs : ce sont ceux qui ne font pas intervenir le postulat des parallèles. Par exemple, un point est également distant des côtés d'un angle si et seulement si il appartient à la bissectrice de cet angle. Dans un triangle, les bissectrices des angles intérieurs se coupent en un point, qui est par conséquent le centre du cercle inscrit à ce triangle (figure 9).

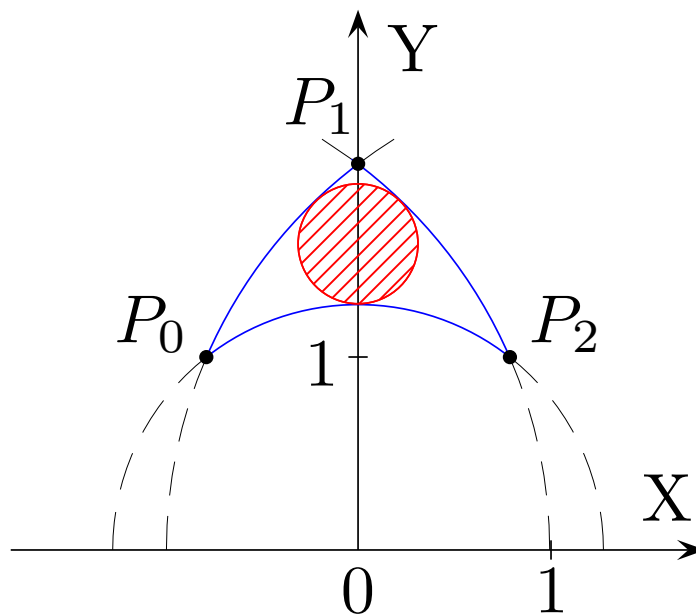


FIGURE 9: Cercle inscrit dans le triangle $P_0P_1P_2$.

4. Le groupe des isométries

A ce stade, le lecteur pourrait se récrier : « Vous avez beau jeu d'utiliser vos règles dilatées et d'en tirer ces droites courbes, ces flasques triangles et autres cercles décentrés. Vous modifiez les règles du jeu et engendrez un tas de bizarreries. Soit. Mais à ce compte, n'importe qui, avec un peu d'imagination, pourrait inventer n'importe quelle géométrie ». Cette critique n'est pas fondée, et nous allons nous en expliquer.

Quand je dis : « Les diagonales d'un rectangle ont même longueur », je n'ai pas besoin de préciser si le rectangle se trouve à Londres ou à Paris, avec un sommet tourné vers Berlin ou Stockholm. Les propriétés géométriques doivent être universelles, indépendantes de la position (*homogénéité de l'espace*) et de l'orientation (*isotropie de l'espace*). Et ce qui en suggère la possibilité, c'est l'existence matérielle de *corps rigides*. Par exemple, on peut découper le rectangle dans une plaque métallique et le déplacer dans l'espace physique au moyen de translations ou de rotations. Il en va de même pour toute construction plus élaborée. La géométrie est donc l'étude des propriétés des corps rigides. Mais comment peut-on s'assurer qu'un corps est rigide ? En constatant que ses propriétés métriques (longueurs, angles, etc.) sont indépendantes de la position ou de l'orientation. Comment ? A l'aide de règles rigides ! Le cercle vicieux est évident.

On perçoit mieux la thèse de Poincaré, pour qui l'adoption d'une géométrie plutôt qu'une autre repose sur une *convention* : on ne peut faire autrement que *choisir* un critère de rigidité, par exemple en déclarant unitaires des règles dont la longueur, évaluée par un observateur euclidien, se dilaterait, en fait, proportionnellement à leur ordonnée. Cependant, *conventionnel* ne veut pas dire *arbitraire*. On comprend en effet qu'un objet donné doit pouvoir être transporté en un point quelconque de l'espace étudié, et sous une orien-

tation quelconque. Les déplacements autorisés doivent donc être suffisamment généraux pour cela. De plus, la combinaison de plusieurs déplacements doit être un déplacement ; la façon de les combiner ne peut avoir d'importance ; et on doit toujours pouvoir trouver un déplacement neutralisant l'effet d'un déplacement donné. En bref, on dit que l'espace constitue l'*orbite d'un groupe de déplacements*.

Mais ce n'est pas tout. La dilatation des règles ne peut être quelconque lorsqu'on les transporte d'un point à l'autre. Si l'on déplace toutes les particules d'un corps, le déplacement ne sera rigide (et le corps réputé solide) que si les angles et les distances sont préservés, ce qui implique notamment que les droites soient appliquées sur des droites. Le coefficient de dilatation des règles est donc soumis à des contraintes sévères de nature purement mathématique, il est une fonction non arbitraire de la position. On dit que les déplacements doivent constituer un *groupe d'isométries*. La géométrie de Lobachevski satisfait à ce critère, elle admet un groupe d'isométries sous l'action duquel ses axiomes de base sont invariants et donc, les théorèmes qui en découlent.

Ces réflexions amènent la définition suivante : *une géométrie (métrique) est l'étude des propriétés invariantes sous l'action d'un groupe d'isométries*. Pour la géométrie euclidienne, il s'agit du groupe des rotations et des translations, au sens intuitif du terme. Pour la géométrie de Lobachevski, c'est le *groupe de Lorentz*, bien connu des physiciens utilisant la théorie de la relativité : l'opération permettant de transporter rigidelement une figure d'un point de l'espace à un autre n'est pas une translation ; celle qui fait tourner cette figure autour d'un point n'est pas une rotation ; mais ce sont ces nouvelles transformations qui définissent la solidité. Un observateur pétri de géométrie euclidienne n'y verra qu'un monde surréaliste peuplé de figures molles, comme dans les peintures de Dali. Et inversement, un adulte élevé depuis son enfance dans la géométrie de Lobachevski considérerait que les translations et rotations euclidiennes déforment affreusement les figures.

Donnons un exemple. Nous avons vu que le lieu des points situés à distance fixe d'un point donné possède la forme d'un cercle euclidien. Mais l'image par une isométrie du centre euclidien d'un cercle n'est pas le centre euclidien du cercle image : *cette notion n'est donc pas un invariant pour la géométrie de Lobachevski*. Certes, ce point peut être obtenu par une construction géométrique. Ainsi, s'il se trouve à l'intersection de deux droites données, il conservera cette propriété pour les droites correspondantes lors d'une transformation isométrique. Mais il n'est pas naturellement associé au cercle.

On peut montrer que les isométries sont réalisées par les *transformations homographiques*. Si l'on pose

$$Z = X + iY,$$

où i est le nombre complexe de carré égal à -1 , ces transformations sont définies par la relation

$$Z' = X' + iY' = \frac{aZ + b}{cZ + d}$$

avec $ad - bc = 1$. Deux isométries de paramètres

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

se combinent selon la loi du produit matriciel (figure 10).

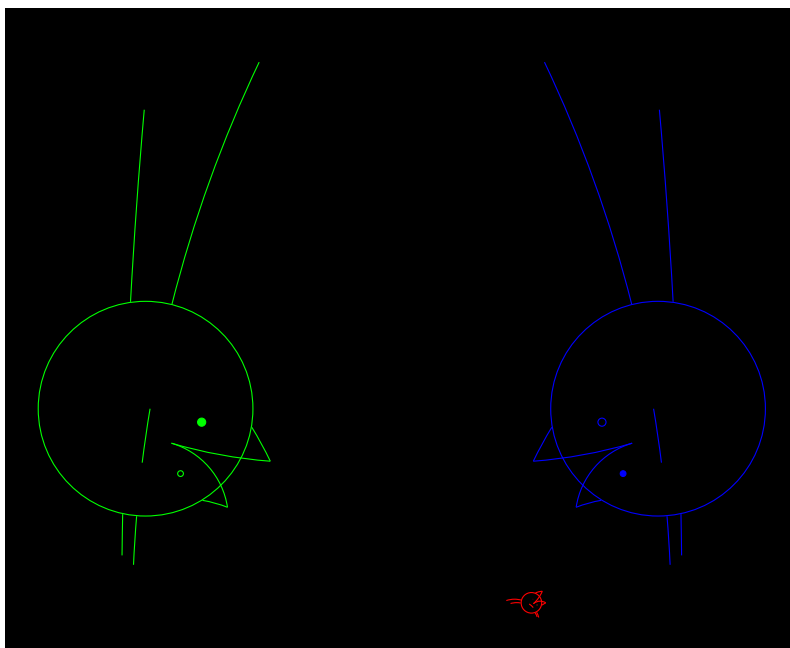


FIGURE 10: En noir, figure constituée de cercles et de droites dans le plan hyperbolique. La « bouche », les « moustaches » et une partie des « oreilles » sont réalisées par des segments de droite. Le centre véritable (géométrique) du cercle principal est au milieu de la « bouche ». Son centre euclidien coïncide avec l'intersection des deux autres portions de cercle. En bleu, transformation de cette figure par l'isométrie de paramètres $a = d = 0$, $b = -3$, $c = 1/3$. En rouge, image de la précédente par la transformation $a = -2/3$, $b = 2$, $c = -1$, $d = 3/2$. Enfin, l'homographie $a = d = 0$, $b = -2$, $c = 1/2$ la transporte à gauche (en vert). Toutes ces figures sont congruentes : elles possèdent la même aire, et les angles sont localement identiques. On voit clairement que le centre euclidien n'est pas un invariant pour la géométrie de Lobachevski.

5. Projections cartographiques dans le demi-plan de Poincaré

Nous pouvons mieux comprendre les relations qu'entretiennent les géométries courbes avec la géométrie euclidienne traditionnelle en mentionnant les projections cartographiques en géographie. Dans ce dernier cas, il s'agit de représenter un espace bidimensionnel à courbure positive (la surface sphérique de la Terre) à l'aide d'images planes. Or, les deux géométries sont globalement incompatibles. Il faut en quelque sorte choisir entre les distances et les angles. Il existe de nombreux types de projections, parmi lesquels nous retiendrons les projections conformes et les projections équivalentes.

- *Les projections conformes*, qui conservent localement une échelle uniforme dans toutes les directions, et donc préservent les angles autour de chaque point. Ainsi, les figures infinitésimales sont transformées par une similitude et gardent leur forme (cercle, carré...). Cependant, les aires sont modifiées. L'archétype en est la *projection de Mercator* (1569 ; figure 11). Un méridien et un parallèle y sont représentés par des droites qui se coupent à angle droit.
- *Les projections équivalentes*, qui respectent les aires, et dont les plus célèbres sont la *projection sinusoidale* et la *projection de Mollweide* (1805 ; figure 12). Elles modifient les formes (l'image d'un cercle n'est pas un cercle).

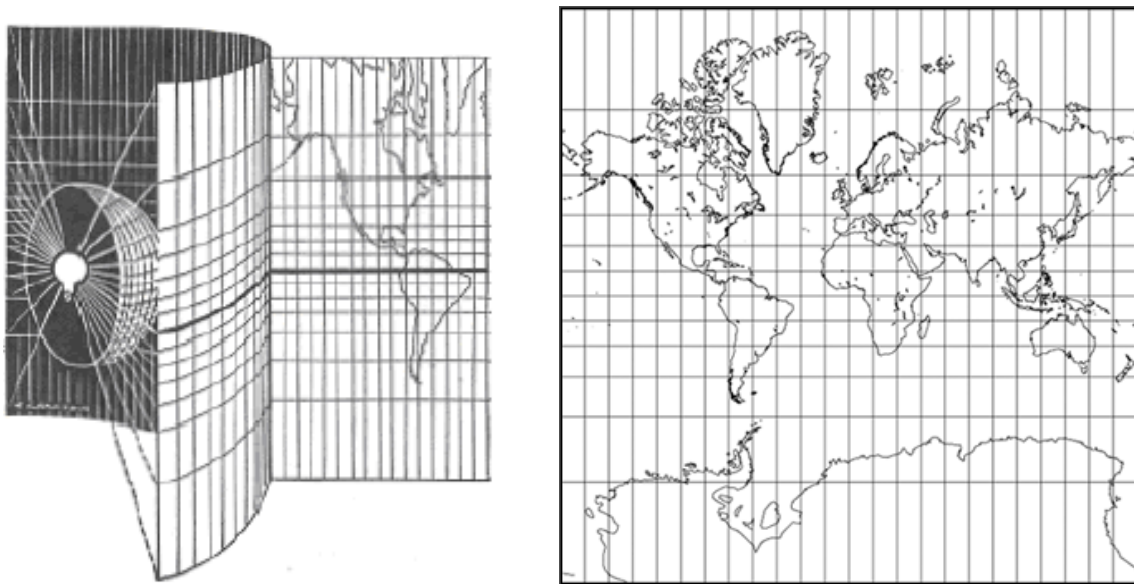


FIGURE 11: *Projection de Mercator, obtenue en plaçant tangentiellement à la Terre, au niveau de l'équateur, un cylindre de rayon égal au rayon terrestre. Les aires ne sont pas conservées : les régions proches de l'équateur sont défavorisées par rapport aux régions polaires. Ainsi, l'Amérique du Sud, bien que plus de huit fois plus grande que le Groenland, semble plus petite. Par contre, les angles sont préservés. Les loxodromies, c'est-à-dire les trajectoires coupant les méridiens et les parallèles sous des angles constants, sont donc des droites.*

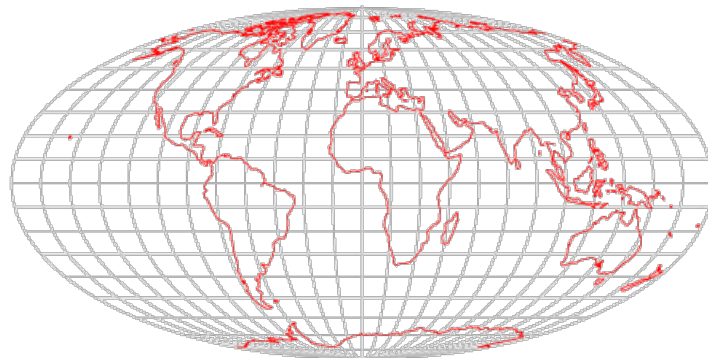


FIGURE 12: *Projection de Mollweide, conservant les aires, et donc très utile pour représenter des densités. Les parallèles et le méridien central sont des lignes droites.*

Nous nous proposons de mieux faire connaissance avec le demi-plan de Poincaré en exploitant l'idée inverse des cartographes : y projeter une figure plane, appelons-la Z (figure 13 gauche). Comme le demi-plan de Poincaré conserve les angles, la projection conforme de Z s'obtient tout simplement en plaquant la figure plane telle quelle dans le demi-plan (figure 13 droite). Cette projection ne conserve manifestement pas les aires : pour obtenir la projection équivalente de Z , il faut en dilater judicieusement les ordonnées (figure 14).

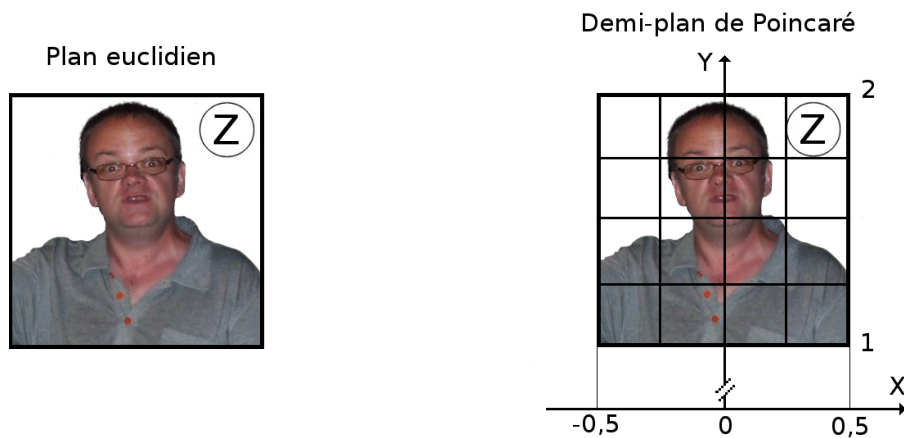


FIGURE 13: A gauche, figure plane euclidienne « Z ». Il s'agit d'un carré de côté 1. Donc, les quatre angles sont droits et l'aire de la figure vaut 1. A droite, projection conforme de Z dans le demi-plan de Poincaré. Les angles sont conservés mais l'aire de la figure vaut $1/2$. La figure est divisée en « quadrilatères » possédant quatre angles droits mais dont l'aire varie d'une rangée horizontale à l'autre. Malgré les apparences, il ne s'agit pas de carrés car seuls les côtés verticaux sont des segments de droite.

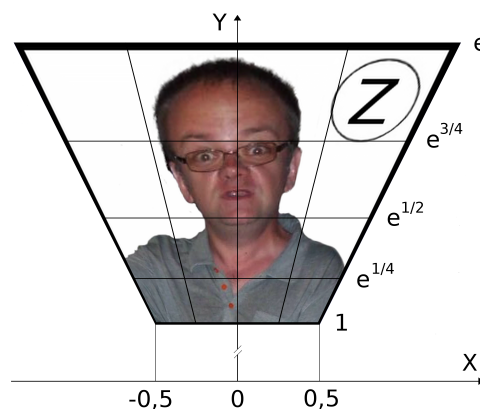


FIGURE 14: Projection équivalente de Z dans le demi-plan de Poincaré. L'image devient un « trapèze » dont la petite base, la grande base et la hauteur ont une longueur effective égale à 1. Les bords latéraux ont pour équation $X = \pm Y/2$. Ils délimitent des segments parallèles à l'axe des X et de longueur unitaire : en effet, leurs extrémités admettent des abscisses dont la différence est égale à leur ordonnée. L'aire de l'image est ainsi égale à 1. On a divisé la base et la hauteur en 4 parties de même longueur, générant ainsi 16 petits « trapèzes ». Les ordonnées des droites horizontales sont donc $\exp(k/4)$, $k = 0, \dots, 4$ et les lignes obliques ont pour équation $X = kY/4$, $k = -2, \dots, 2$ (elles convergent en fait vers l'origine : on a dû interrompre l'axe des Y pour raison de place). Chacun des petits trapèzes, correspondant aux « carrés » de la figure 13, possède ainsi une grande base, une petite base et une hauteur de longueur égale à $1/4$, et sa mesure est égale à $1/16$. Enfin, il est évident que les angles de Z ont été modifiés. Ils varient d'ailleurs d'une rangée verticale à l'autre.

6. La pseudosphère de Beltrami

Il est possible de visualiser intuitivement la portion $Y \geq 1$ du demi-plan de Poincaré à l'aide d'une surface immergée dans l'espace euclidien à trois dimensions, rapporté aux coordonnées cartésiennes (x, y, z) . Pour cela, il faut connaître les fonctions « sinus hyperbolique de u », « cosinus hyperbolique de u » et « tangente hyperbolique de u », définies respectivement par

$$\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}, \quad \cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad \tanh u = \frac{\sinh u}{\cosh u}.$$

Considérons la surface d'équations paramétriques

$$x = \frac{\cos \varphi}{\cosh u}, \quad y = \frac{\sin \varphi}{\cosh u}, \quad z = u - \tanh u \quad \text{avec} \quad u \geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi[. \quad (3)$$

Si l'on pose $r = 1/\cosh u \in]0, 1]$, les quantités (r, φ) constituent les coordonnées polaires dans le plan horizontal (x, y) . Cette surface est nommée *pseudosphère* (figure 15 gauche). Sa section par un plan vertical est une courbe appelée *tractrice*. La tangente à cette courbe en un point P d'abscisse $r = 1/\cosh u$ et d'ordonnée $z = u - \tanh u$ rencontre l'axe vertical en P' d'ordonnée $z = u$ (figure 15 droite). Il est assez facile de montrer que la distance

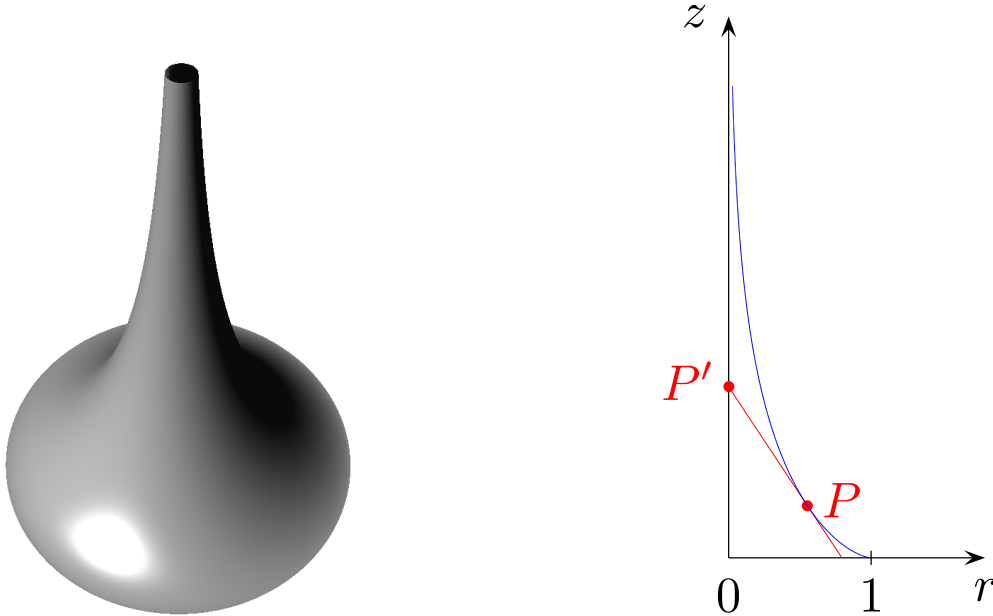


FIGURE 15: La pseudosphère (à gauche) et la tractrice (à droite).

PP' est toujours égale à 1. La tractrice matérialise ainsi, par exemple, la trajectoire suivie par un bateau tiré le long d'un canal, au bout d'une corde de longueur unitaire, par un cheval se déplaçant sur le chemin de halage. Historiquement, elle suscita beaucoup d'intérêt auprès de scientifiques aussi prestigieux que Huygens, Newton, Leibniz ou les Bernoulli.

La loi

$$X = \varphi, \quad Y = \frac{1}{r} = \cosh u, \quad u \geq 0 \quad (4)$$

applique chaque point $(X, Y \geq 1)$ du demi-plan de Poincaré sur un point (x, y, z) de la pseudosphère.³ Cette transformation possède une propriété remarquable : *elle préserve les distances*. Cela signifie que deux points proches A et B , séparés par une distance d mesurée à l'aide des règles dilatées dans le demi-plan de Poincaré, sont appliqués sur deux points A' et B' séparés par la même distance d mesurée à l'aide d'un mètre-ruban posé sur la pseudosphère. Il est essentiel de bien comprendre que le mètre-ruban mesure les distances *euclidiennes*, mais le long de la surface.

On définit sur la pseudosphère la *géodésique* reliant deux points quelconques P_1 et P_2 , comme la courbe (unique) de plus petite longueur passant par ces deux points. D'après ce qui vient d'être dit, les droites (resp. les cercles) du demi-plan de Poincaré sont appliquées sur les géodésiques (resp. les cercles) de la pseudosphère. Celle-ci permet ainsi de traduire tous les théorèmes de la géométrie de Lobachevski en termes de géométrie euclidienne – c'est là son principal mérite. Cette propriété fut découverte en 1868 par Beltrami. La pseudosphère réalise ainsi une surface homogène et isotrope. Cela signifie que, si l'on y découpe une figure quelconque, on pourra la transporter partout et dans n'importe quelle orientation, sans qu'il soit besoin de la froncer ou de la déchirer. Vu de l'extérieur, un disque de rayon donné se présente comme une « selle de cheval » et peut être appliqué sur le « disque-selle de cheval » de rayon identique extrait de n'importe quel autre endroit.

La projection conforme de Z sur la pseudosphère s'obtient en appliquant les lois de transformation (4) aux points de la figure 13 droite. Le résultat est montré en figure 16.



FIGURE 16: *Projection conforme de Z sur la pseudosphère. Le côté inférieur de l'image est tangent au bord de la surface ($Y = 1$ correspond à $u = 0$, ou encore $r = 1$) et sous-tend un angle $\Delta\varphi = 1$ radian (il possède donc une longueur unitaire). Les bords latéraux suivent les géodésiques méridiennes, orthogonales aux parallèles, jusqu'en $Y = 2$, c'est-à-dire $r = 1/2$. Leur longueur vaut $\ln 2$. Le bord supérieur a pour longueur $1/2$. Remarquer la conservation des angles, et la similitude des formes peu étendues avec leur correspondant euclidien.*

Considérations analogues pour la projection équivalente de Z (la projection de la figure 14

3. En faisant varier φ dans l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, on peut considérer que la pseudosphère couvre la portion $X \in]-\infty, +\infty[$, $Y \geq 1$ du demi-plan de Poincaré. A ce titre, les points (r, φ) et $(r, \varphi + 2\pi)$ ne peuvent plus être identifiés.

donne la figure 17).



FIGURE 17: *Projection équivalente de Z sur la pseudosphère. Chaque maille a conservé son aire égale à $1/16$. Le côté inférieur de l'image est tangent au bord de la surface ($r = 1$), comme dans la figure 16. Les bords latéraux interceptent des segments de parallèles de longueur 1 et ne constituent pas des géodésiques. Eux-mêmes ont pour longueur $\sqrt{5}/2$. Ils progressent jusqu'en $Y = e$, c'est-à-dire le parallèle d'équation $r = 1/e$, où ils sous-tendent un angle horizontal de e radians.*

La figure 18 montre deux objets isométriques dans le demi-plan de Poincaré. Une fois encore, nous remarquons qu'un regard euclidien ne perçoit pas immédiatement leur congruence. Cette propriété devient cependant évidente sur la pseudosphère (figure 19).

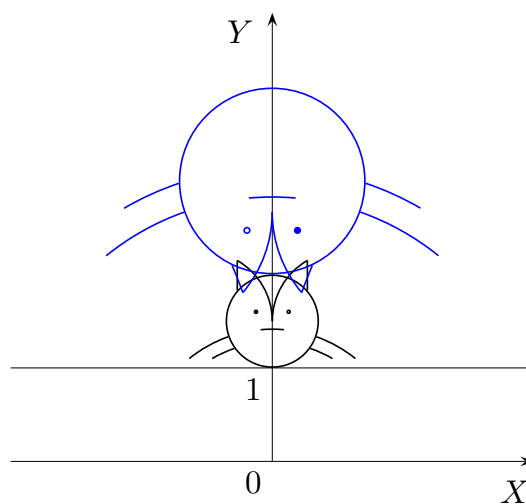


FIGURE 18: *L'isométrie de paramètres $a = d = 0$, $b = -2$, $c = 1/2$ laisse fixe le point $(0, 2)$. On dit qu'elle appartient au sous-groupe d'isotropie en ce point.*

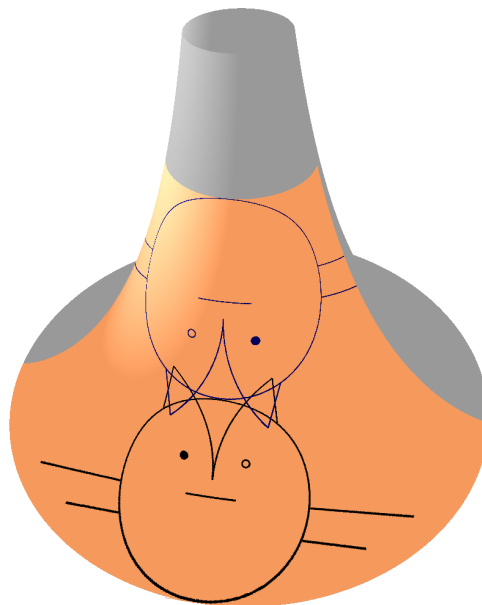


FIGURE 19: *Projection de la figure 18 sur la pseudosphère. Les deux objets sont manifestement congruents : en payant le prix de les dessiner sur cette surface courbe, on peut les faire glisser sans les déformer intrinsèquement, et les superposer dans l'espace intuitif régi par la géométrie euclidienne.*

7. Le tenseur métrique

Les deux représentations du plan hyperbolique exposées ci-dessus (sections 3 et 6) ont des apparences très différentes. Et pourtant, elles décrivent la même géométrie : les théorèmes issus du demi-plan de Poincaré sont en parfaite correspondance avec les théorèmes démontrables sur la pseudosphère. On comprend donc qu'au-delà de leurs dissemblances, ces deux modèles possèdent une même structure mathématique intrinsèque. On l'appelle le *tenseur métrique*. Il s'agit d'un être géométrique généralisant le concept de vecteur. Il existe indépendamment des coordonnées utilisées, mais son expression est fonction de celles-ci. Il permet de calculer des quantités invariantes lors d'un changement de représentation, essentiellement les longueurs et les angles associés aux objets géométriques (points, droites, cercles). Par exemple, si P_1 et P_2 sont deux points proches définis dans le demi-plan de Poincaré et si P'_1 et P'_2 sont leurs homologues sur la pseudosphère (donc dotés d'autres coordonnées), le tenseur métrique détermine leur distance, en fournissant le même résultat dans les deux représentations. La géométrie de Lobachevski se caractérise ainsi par la donnée, en tout point, d'un certain type de tenseur métrique. Celle d'Euclide en utilise un autre.

En pratique, on spécifie le tenseur métrique en donnant son expression dans un système de coordonnées. Mais concrètement, comment attribue-t-on des coordonnées aux points ? Nous avons abordé cette question en partant des coordonnées cartésiennes intuitives dans le demi-plan de Poincaré, ce qui nous a permis de tracer des figures dans ce demi-plan et, partant, dans n'importe quelle autre représentation. Comme on le voit, il est possible de systématiquement relire la géométrie hyperbolique avec un œil euclidien. A ce titre,

rappelons le propos de Monseigneur G. Lemaître, scientifique réputé pour ses travaux en mathématiques, en relativité générale et en cosmologie⁴ :

« ... notre imagination est irrémédiablement euclidienne... »

8. Conclusion

Dès lors que la géométrie euclidienne n'est plus la seule possible logiquement, la question de sa « vérité » se pose avec une acuité nouvelle.

De nombreux philosophes et scientifiques ont discuté le problème mathématique de l'espace. Emmanuel Kant (1724-1804) l'avait déjà soulevé dans sa *Critique de la raison pure* (1781). Il n'y conçoit, implicitement, pas d'autre géométrie qu'euclidienne :

« La géométrie est une science qui détermine synthétiquement, et pourtant *a priori*, les propriétés de l'espace. »⁵

Lobachevski lui-même s'est interrogé sur l'adéquation de sa géométrie au monde physique, en maintenant l'hypothèse selon laquelle la lumière se propage en ligne « droite ». Or, c'est de son époque que datent les premières mesures fiables de parallaxe stellaire (Bessel, 1838). Lobachevski en a déduit une borne inférieure pour la valeur du facteur d'échelle de son espace. En effet, si d est le diamètre de l'orbite terrestre et si O représente une étoile à distance finie (mais forcément grande par rapport à d), alors la quantité $\alpha/2 = \pi/2 - \theta$ définit la parallaxe de cette étoile (figure 3). De la relation (2), on tire

$$\mathcal{R} > \frac{d/2}{\pi/2 - \theta} = \frac{d}{\alpha}.$$

Or, d et α sont mesurables : compte tenu des données obtenues pour 61 Cygni (voir section 2.2), Lobachevski pouvait déjà déduire que $\mathcal{R}$ est supérieur à une dizaine d'années-lumière. Cela signifiait que, le cas échéant, la géométrie euclidienne pratique ne pourrait être remise en cause qu'à partir d'une telle échelle de distances.

Egalement sensible à ces questions, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) entreprit, vers 1820, de mesurer la somme des angles déterminés par trois sommets montagneux près de Göttingen ; mais il ne put déceler aucune incompatibilité entre la géométrie traditionnelle et le monde physique. Son élève Bernhard Riemann (1826-1866) a (vainement) tenté d'édifier une théorie de la gravitation dans le cadre d'une géométrie non euclidienne où l'espace serait courbe. Hermann von Helmholtz (1821-1894) s'est, lui aussi, longuement étendu sur ces questions, comme bien d'autres penseurs que nous ne mentionnerons pas ici.

Henri Poincaré (figure 20) y revient dans son essai *La science et l'hypothèse*, publié en 1902. Dans une analyse critique magistrale, il aborde des thèmes dignes des philosophes présocratiques, mais avec les connaissances d'un mathématicien de la fin du XIXe siècle. Traitant plus particulièrement des relations entre la géométrie et l'expérience, il écrit :

« L'expérience [...] nous fait reconnaître non quelle est la géométrie la plus vraie, mais quelle est la plus *commode*.

[...]

Si la géométrie de Lobatchevsky est vraie, la parallaxe d'une étoile très éloignée sera finie [...]

4. G. Lemaître, *L'hypothèse de l'atome primitif*, Editions Culture et Civilisation, Bruxelles, 1972, pp. 51-52.

5. E. Kant, *Critique de la raison pure*, édition publiée sous la direction de F. Alquié, traduit de l'allemand par A. J.-L. Delamarre et F. Marty à partir de la traduction de J. Berni, folio essais numéro 145, Gallimard, 1980, p. 93.



FIGURE 20: *Jules Henri Poincaré (1854-1912).*

Mais ce qu'on appelle ligne droite en astronomie, c'est simplement la trajectoire du rayon lumineux. Si donc, par impossible, on venait [...] à démontrer que toutes les parallaxes sont supérieures à une certaine limite, on aurait le choix entre deux conclusions : nous pourrions renoncer à la géométrie euclidienne ou bien modifier les lois de l'optique et admettre que la lumière ne se propage pas rigoureusement en ligne droite.

Inutile d'ajouter que tout le monde regarderait cette solution comme plus avantageuse.

La géométrie euclidienne n'a donc rien à craindre d'expériences nouvelles. »

Quelques années plus tard, cependant, Albert Einstein (figure 21) allait consacrer un autre point de vue. Dans la théorie de la relativité générale (1915), la lumière est pesante, et donc déviée par un corps massif. Mais Einstein continue d'attribuer le statut de ligne droite à sa trajectoire, ainsi d'ailleurs qu'à celle de toute particule test plongée dans un champ de gravitation. Il en résulte un espace-temps doté d'une géométrie courbe (*variété riemannienne*) dont les propriétés sont déterminées par la masse du corps défecteur. Plus précisément, les composantes du tenseur métrique constituent les potentiels du champ gravitationnel et dépendent des masses en présence. Quant aux coordonnées, elles sont autant que possible élaborées à partir des symétries de la situation étudiée.

En 1949, Einstein commentait son approche comme suit :

« A l'encontre de la suggestion faite par Poincaré, il faut signaler que ce qui importe réellement, ce n'est pas tant d'obtenir le maximum de simplicité pour la géométrie que d'obtenir le maximum de simplicité pour la physique (y compris la géométrie). C'est bien ce qui est en cause dans le fait qu'aujourd'hui nous ne puissions accepter de nous en tenir à la géométrie euclidienne. »

En d'autres termes, il s'avère avantageux d'attribuer aux particules des trajectoires droites dans un espace-temps courbe, plutôt que des trajectoires courbes dans un espace-temps droit (euclidien).

L'impact des géométries non euclidiennes sur la genèse de la relativité générale est donc

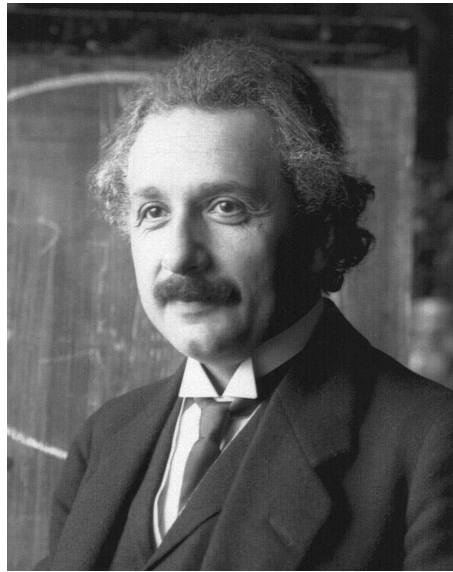


FIGURE 21: *Albert Einstein (1879-1955).*

indéniable. Cependant, dans cette théorie l'espace-temps n'est, habituellement, ni homogène ni isotrope. Par conséquent, le mouvement d'une figure invariable y est impossible et on ne peut y démontrer des théorèmes de géométrie.

Il existe néanmoins une exception notable : dans le contexte de la cosmologie, on fait souvent l'hypothèse d'un univers admettant des sections spatiales homogènes et isotropes (modèles de Friedmann-Lemaître). L'espace de Lobachevski apparaît alors comme une des solutions possibles, avec un facteur d'échelle évoluant dans le temps selon les équations d'Einstein. La limite où il tend vers zéro a été appelée *Big Bang*.

Pour terminer, signalons que la notion même d'espace, quoique apparemment irréductible (Kant parlait d'*intuition a priori*) devra peut-être, à terme, être évacuée du discours scientifique. Dans une lettre adressée à Hans Joachim et datée du 16 juin 1948, Einstein déclarait :

« Votre hypothèse, ou plutôt votre conviction la plus profonde, semble être que le caractère quantique et atomique de la réalité physique ne pourra pas être compris en prenant pour base le continuum d'espace-temps. Naturellement, c'est ce que j'ai moi-même souvent soupçonné, sans jamais arriver à voir comment rendre compte de la réalité physique grâce à du discontinu... Certes, je soupçonne fortement qu'il faudra essayer de se débarrasser du continuum : je ne suis pas pour autant *persuadé* que ce soit la chose à faire. » ⁶

Remerciements

Merci à Nathan Meynaert pour sa lecture critique du manuscrit.

6. *Albert Einstein, œuvres choisies 1*, textes choisis et présentés par F. Balibar, O. Darrigol et B. Jech, Seuil, 1989, p. 256.