

LES ONDES GRAVITATIONNELLES

Y. De Rop

*Université de Liège, Institut d'Astrophysique et de Géophysique
Allée du 6 Août, 17
4000 Liège, Belgique*

1. Introduction

De nombreux phénomènes physiques se caractérisent par la propagation, dans un milieu donné, d'une perturbation appelée *onde matérielle* : la houle à la surface de la mer, les vibrations dans une corde de guitare, un tremblement de terre... Dans toutes ces situations, on interprète le phénomène comme une propriété du milieu et son analyse se rapporte entièrement aux lois de la *mécanique*. Ainsi, le son consiste en une succession de compressions et dilatations du milieu où il se propage, un gaz par exemple, et on peut calculer sa vitesse à partir des propriétés thermodynamiques de celui-ci.

Au début du XIXe siècle, on rangea dans cette catégorie la lumière elle-même. Son substrat, intellectuellement indispensable mais doté de propriétés paradoxales, reçut un nom : l'*éther*. Cependant, aucune expérience n'a jamais pu le mettre en évidence clairement. Quelques dizaines d'années plus tard, au terme d'une brillante synthèse théorique publiée dans son *Treatise on Electricity and Magnetism* (1873), J.C. Maxwell découvrait la nature *électromagnétique* de la lumière. Mais l'invention de la théorie de la *relativité restreinte*, par A. Einstein en 1905, allait ravalier l'éther au rang des abstractions inutiles, obligeant les physiciens à concevoir désormais la lumière comme une *oscillation autonome* du champ électromagnétique ne nécessitant aucun substrat matériel. La *théorie classique des champs* était née, affranchie de la vision mécaniste du monde.

La *relativité générale* (1915), « soleil couchant de la physique classique » et œuvre d'Einstein également, est la théorie relativiste de la gravitation. Elle prédit l'existence d'*ondes gravitationnelles* qui sont l'homologue de la lumière en électromagnétisme et constituent le thème central de cet article. Celui-ci est divisé en trois parties.

La section 2 est consacrée à la première théorie scientifique de la gravitation, publiée en 1687 par I. Newton dans son livre *Principia mathematica philosophiae naturalis*. Newton y développait l'idée d'une *gravitation universelle*, de portée et de vitesse de propagation infinies : tous les corps s'attirent selon une loi unique valable sur la Terre comme dans les cieux, et toute modification survenue à l'un d'entre eux quelque part à un moment donné, se fait ressentir immédiatement et partout dans l'espace.

Newton avait remarqué le caractère irrationnel de cette action à distance

instantanée mais il s'en accommodait : « hypothèses non fingo », commenta-t-il, « je ne forge pas d'hypothèses ». Sa théorie, non seulement se trouvait en accord avec l'observation, mais aussi a permis de prévoir quantité de phénomènes terrestres et astronomiques. C'est d'ailleurs bien le moins que l'on puisse attendre d'une lecture scientifique du monde. Cependant, peut-on affirmer *comprendre* ce que l'on n'est même pas capable d'*imaginer* ? En fait, l'être humain ne peut concevoir que des interactions de contact se propageant de proche en proche, et il paraît plus naturel de supposer qu'un « message » se déplace à une vitesse *finie* de mesure c , pour « informer » progressivement tout l'espace d'une modification survenue au niveau des sources.

Une telle hypothèse sera avancée dans la section 3. Par définition, elle dégage la place nécessaire à la possibilité d'une propagation de la gravité par ondes. Nous tenterons d'en construire une image mentale simple mais aussi pertinente que possible, en développant une argumentation heuristique basée sur l'électromagnétisme de Maxwell, théorie cohérente où le champ électrique joue le rôle et possède, en première approximation, les propriétés que nous allons attribuer au champ gravifique. Certes, celles-ci résultent, en définitive, de la relativité générale. Mais notre objectif, à ce stade, est d'*induire* les propriétés ondulatoires de la gravitation en partant de la théorie de Newton, et pas de les *déduire* d'une théorie achevée.

Enfin, dans la section 4 nous étudierons les ondes gravitationnelles dans leur cadre théorique naturel, la relativité générale. Nous donnerons notamment les relations exprimant la perte d'énergie et de moment cinétique d'un système matériel sous forme de rayonnement. Pour illustrer le propos, deux exemples seront traités avec quelques détails : deux masses oscillant aux extrémités d'un ressort et deux masses en orbite circulaire uniforme l'une autour de l'autre.

2. La gravitation selon Newton

Dans la théorie de la gravitation universelle, tout corps constitue la source d'un champ de gravitation, défini en tout point de l'espace par l'accélération \vec{g} qu'y prendrait une particule-test (c'est-à-dire, de masse négligeable).

On appelle *lignes du champ* les courbes tangentes en tout point au vecteur \vec{g} . Dans le cas d'une source ponctuelle ou à symétrie sphérique de masse M , ce sont des droites convergeant vers la source. L'intensité d'un tel champ, notée g , varie comme l'*inverse du carré de la distance* r à la source selon la loi

$$g(r) = \frac{GM}{r^2}, \quad (1)$$

où le nombre G est une constante dont la valeur sera mesurée par Cavendish en 1798 :

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}^2 \text{ kg}.$$

(Voir figure 1.)

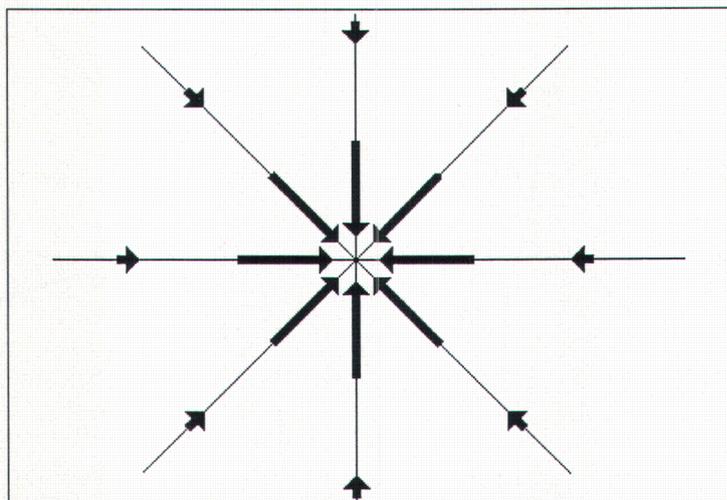


FIG. 1: *Le champ newtonien.*

Le champ engendré par plusieurs sources est la somme des champs engendrés par chacune d'entre elles. On dit que la théorie newtonienne est *linéaire*.

Comme la vitesse de propagation de la gravité est infinie, toute modification au niveau des sources se fait ressentir immédiatement et partout dans l'espace. Ainsi, de partout dans l'espace et à tout instant, les lignes de champ pointent en direction d'une source ponctuelle, quel que soit son mouvement.

L'allure des lignes du champ fournit un renseignement sur son intensité. Sur la figure 1, on voit que le nombre de lignes par unité de surface sphérique centrée sur la source, décroît comme l'inverse du carré de son rayon, c'est-à-dire comme l'intensité du champ gravitationnel. Il s'agit là d'une propriété généralisable à des sources quelconques (figure 2). En un point P donné, soit une petite surface d'aire dA perpendiculaire à un certain nombre de lignes de champ. Celles-ci rencontrent perpendiculairement, en un point P' situé plus loin, une autre surface d'aire dA' . On peut démontrer que l'intensité du champ varie comme la densité des lignes¹ :

$$\frac{g(P)}{g(P')} = \frac{dA'}{dA}. \quad (2)$$

¹ Cette conséquence du *théorème de Gauss* n'est correcte que si le « tube » canalisant les lignes ne contient aucune source.

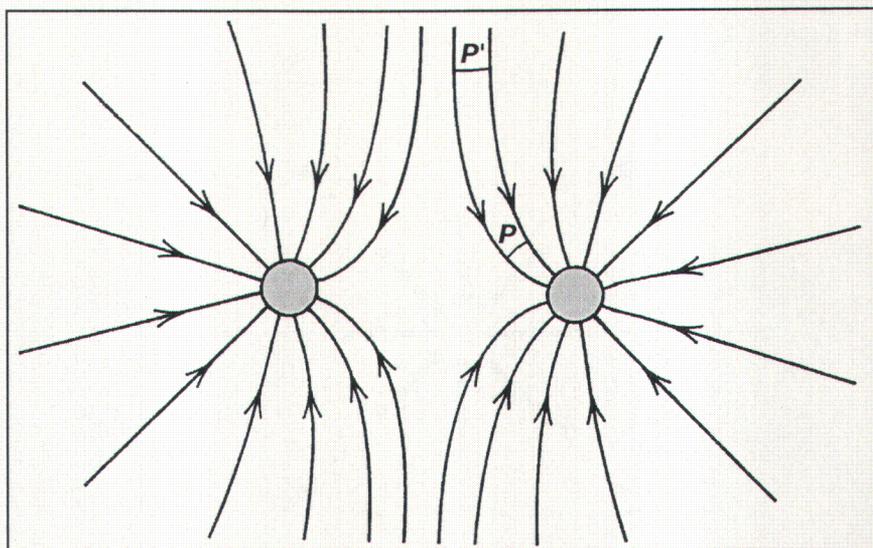


FIG. 2: *Source constituée de deux sphères de masses identiques. Par symétrie, le champ doit être nul au milieu du segment de droite qui les relie, et effectivement dans son voisinage les lignes de champ se raréfient considérablement.*

Il existe une autre façon de décrire l'état gravitationnel d'un système, fondée sur l'utilisation d'un champ scalaire, le *potentiel gravitationnel* Φ , plus commode à manipuler que le champ vectoriel \vec{g} . On peut le calculer en observant les deux règles suivantes :

- le potentiel est nul à l'infini ;
- la variation $\Delta\Phi$ du potentiel sur une petite distance Δn le long et dans le sens d'une ligne de champ de mesure g , est donnée par $\Delta\Phi = -g \Delta n$.

A la distance r d'une source sphérique de masse M , on obtient ainsi le résultat

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}.$$

Le potentiel est constant sur chaque cercle centré sur la source et donc, *les lignes équipotentielles sont perpendiculaires aux lignes de champ*. On peut démontrer que cette dernière propriété subsiste dans le cas général (figure 3).

Que vaut le potentiel engendré par une distribution de plusieurs particules ? La réponse théorique est simple : vu la linéarité de la gravitation newtonienne, il est égal à la somme des potentiels individuels. Il existe cependant une ingénieuse technique permettant de donner à cette question une réponse approchée mais plus facile à exploiter. Nous allons l'illustrer en calculant le potentiel engendré

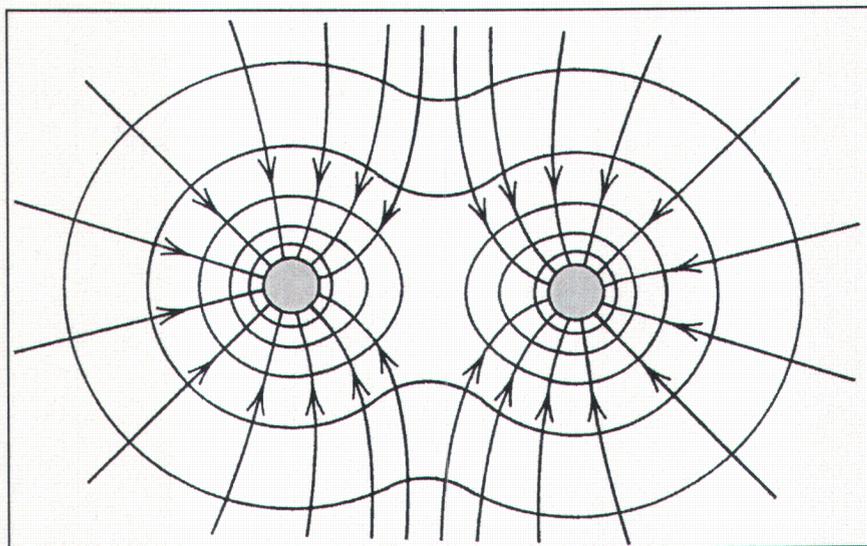


FIG. 3: Equipotentielles et lignes de champ autour de deux sphères de masses identiques.

par un système de deux corps à symétrie sphérique 1 et 2, de masses respectives M_1 et M_2 .

Si aucune force extérieure n'agit sur ce système, son *centre de masse* — que nous noterons O — se meut en translation rectiligne et uniforme par rapport à l'espace absolu et des axes cartésiens (Ox, Oy, Oz) déterminent un repère inertiel. Appelons $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ les coordonnées de la source 1, et $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ celles de la source 2. Par définition du centre de masse, on a

$$M_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2 = 0. \quad (3)$$

Si $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ désigne le norme de \vec{r}_1 et $r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$ celle de \vec{r}_2 , les particules 1 et 2 sont séparées par une distance

$$d = r_1 + r_2. \quad (4)$$

Soit enfin un point P de coordonnées $\vec{r} = (x, y, z)$, éloigné de O d'une distance $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (figure 4).

Si

$$r \gg d,$$

le potentiel en P est égal, en première approximation, au potentiel $\Phi^{(0)}$ généré

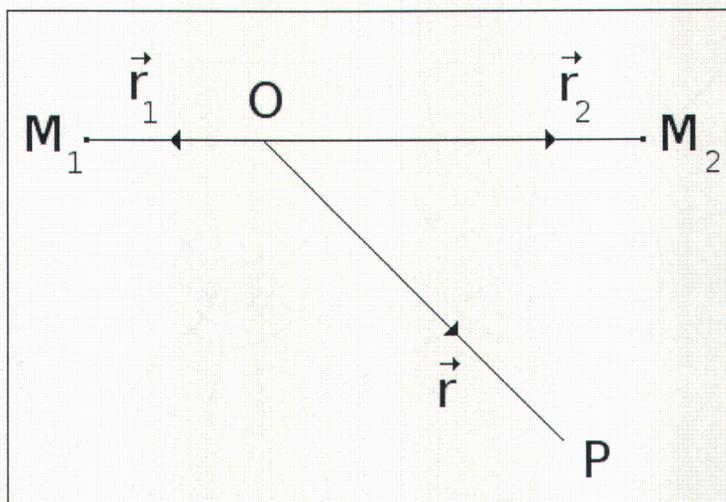


FIG. 4: Calcul, au point P, du potentiel engendré par deux particules 1 et 2.

par une seule source sphérique de masse $M_1 + M_2$ placée à l'origine :

$$\Phi^{(0)}(x, y, z) = -\frac{G(M_1 + M_2)}{r}.$$

La méthode dite de *développement en série des potentiels multipolaires* consiste à calculer les corrections progressives $\Phi^{(1)}$, $\Phi^{(2)}$... permettant d'affiner cette première estimation. Cette procédure est judicieuse car chaque terme $\Phi^{(l)}$ varie comme $1/r^{l+1}$ et apporte une correction de plus en plus petite lorsque l augmente. Notant

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r} \quad (5)$$

le *vecteur radial unitaire* au point P, on obtient notamment les résultats suivants.

Le *potentiel dipolaire* est donné par

$$\Phi^{(1)}(x, y, z) = \frac{-G}{r^2} \sum_{i=1}^3 D_i n_i$$

où

$$\vec{D} = M_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2 \quad (6)$$

est le *vecteur moment dipolaire du système des deux particules*, calculé par rapport à l'origine O. Or, cette quantité est nulle en vertu de la relation (3).

Le potentiel quadrupolaire vaut

$$\Phi^{(2)}(x, y, z) = \frac{-G}{2r^3} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 Q_{ij} n_i n_j$$

où

$$(\mathbf{Q}) = \sum_{i=1}^2 M_i \begin{pmatrix} 3x_i^2 - r_i^2 & 3x_i y_i & 3x_i z_i \\ 3x_i y_i & 3y_i^2 - r_i^2 & 3y_i z_i \\ 3x_i z_i & 3y_i z_i & 3z_i^2 - r_i^2 \end{pmatrix}$$

est un tenseur d'ordre deux appelé moment quadrupolaire du système.

En résumé, on a

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{G(M_1 + M_2)}{r} - \frac{G}{2r^3} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 Q_{ij} n_i n_j + O(1/r^4). \quad (7)$$

La théorie de Newton généralise habilement la notion d'énergie cinétique pour rendre compte de l'interaction de la matière avec le champ de gravitation : c'est le concept d'énergie potentielle. Dans le cas des deux particules décrites ci-dessus, elle vaut

$$E = -G \frac{M_1 M_2}{d}. \quad (8)$$

La loi de conservation de l'énergie totale, cinétique plus potentielle, permet de rendre compte de certains phénomènes plus ou moins compliqués : par exemple, comment évolue la vitesse relative des deux particules en fonction de leur distance.

Dans les présentations modernes, on remplace le concept d'énergie potentielle des particules par celui d'énergie du champ \vec{g} , définie comme suit :

$$E = \frac{-1}{8\pi G} \int_{R^3} |\vec{g}(x, y, z)|^2 dx dy dz. \quad (9)$$

Pour deux particules, \vec{g} est la somme des champs \vec{g}_1 et \vec{g}_2 générés respectivement par chacun des deux corps, et le calcul de (9) restitue le résultat (8).²

Cependant, s'il possède de l'énergie, le champ newtonien ne peut pas en transférer d'un endroit à l'autre. Ceci résulte du caractère instantané de la transmission de la gravitation. Ainsi, le champ, dont l'énergie ne constitue qu'une traduction mathématique de l'énergie potentielle des particules, reste cantonné dans un rôle d'intermédiaire *passif*, utile pour le calcul des forces gravitationnelles mais sans dynamique véritable.³

² A strictement parler, il faut retirer de l'intégrale (9) l'énergie d'auto-interaction des particules ponctuelles (infinie mais constante au cours d'un mouvement).

³ La quantité de mouvement totale des sources est nulle dans le référentiel de leur centre de masse. A ce stade, il est donc sans objet d'essayer de la loger dans le champ.

Tout au long de cet article, nous traiterons deux exemples concrets en supposant que les deux particules étudiées plus haut se trouvent, soit reliées par un ressort de longueur au repos L et de constante de raideur k (mouvement harmonique ; l'interaction gravitationnelle entre les deux particules est négligeable, ainsi que la masse du ressort), soit en mouvement circulaire uniforme autour de leur centre de masse. On obtient le potentiel newtonien de chacun de ces systèmes en écrivant simplement, dans la relation (7), le moment quadrupolaire correspondant, c'est-à-dire

$$(\mathbf{Q}) = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} [A \sin(\omega t) + L]^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

pour deux particules reliées par un ressort le long de l'axe des z , où A désigne l'amplitude du mouvement et où la vitesse angulaire est donnée par

$$\omega = \sqrt{\frac{k(M_1 + M_2)}{M_1 M_2}}; \quad (11)$$

et

$$(\mathbf{Q}) = (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2) \begin{pmatrix} 3 \cos^2(\omega t) - 1 & 3 \sin(\omega t) \cos(\omega t) & 0 \\ 3 \sin(\omega t) \cos(\omega t) & 3 \sin^2(\omega t) - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

pour deux particules en rotation dans le plan (x, y) , si l'on mesure les angles à partir de l'axe x . Le paramètre ω est quelconque si l'on considère le champ généré par une haltère en rotation (deux masses sans interaction gravitationnelle reliées par un barreau de masse négligeable) et vaut

$$\omega = \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{(r_1 + r_2)^3}} \quad (13)$$

si la rotation résulte de l'interaction gravitationnelle entre les deux corps.

3. Approche intuitive du concept d'onde gravitationnelle

Nous allons dorénavant supposer que l'information sur l'état gravitationnel d'un système se déplace à une vitesse *finie* de mesure c .

À la lumière de ce nouveau postulat, considérons alors la situation suivante. Une particule ponctuelle, initialement au repos à l'origine O des coordonnées, prend soudain au temps $t = 0$ une accélération a pendant un bref instant Δt

qui l'amène au point O' , et poursuit ensuite sa route en mouvement rectiligne et uniforme avec la vitesse acquise

$$\Delta V = a\Delta t \ll c.$$

Pour fixer les idées, supposons l'accélération dirigée vers la droite le long d'un axe horizontal. Quel est l'aspect des lignes de champ au temps $t > 0$?

Dans les régions de l'espace situées en-dehors d'une sphère S de centre O et de rayon

$$R = ct,$$

l'information concernant l'accélération n'est pas encore parvenue et les lignes de champ continuent à converger vers l'origine.

Entre la sphère S et une deuxième sphère S' de rayon

$$R' = c(t - \Delta t)$$

centrée sur O' , se trouve l'information « la particule accélère ». Si

$$t \gg \Delta t,$$

on peut considérer que S' est également centrée sur l'origine : pratiquement, la région entre les deux sphères est alors une couronne sphérique centrée sur l'origine, de rayon R et d'épaisseur $c\Delta t$.

Pour visualiser ce qui se passe à l'intérieur de S' , il faut effectuer la remarque importante suivante : *si une particule source se déplace en mouvement rectiligne et uniforme par rapport à l'espace absolu, les lignes de champ la suivent en continuant à converger vers elle, comme si la vitesse de propagation de la gravitation était infinie!* En quelque sorte, le champ anticipe la position d'une source possédant une vitesse constante. En effet, dans le référentiel concomitant de la particule, celle-ci se trouve au repos et engendre des lignes de force statiques et radiales; et d'après le principe de relativité de Galilée et Descartes, cette propriété doit rester vraie quel que soit le référentiel inertiel dans lequel on l'envisage.⁴ Ainsi, *à l'intérieur de S' les lignes de champ suivent instantanément la particule en translation uniforme.*

En raccordant continûment les lignes de champ d'une région à l'autre on obtient la figure 5.

⁴ L'accélération est en effet vectorielle pour le groupe de Galilée : il en va donc de même pour le champ gravifique newtonien. Dans une théorie complète, il faudrait s'inquiéter des conséquences de l'hypothèse de la finitude de la vitesse c de propagation de la gravitation, sur la nature du groupe de transformations permettant de passer d'un référentiel inertiel à un autre. En électromagnétisme, il s'agit du groupe de Lorentz : il en résulte, pour les lignes de champ électrique, la propriété mentionnée dans le texte, à la nuance près que le champ n'est plus isotrope pour des vitesses de l'ordre de c . Nous n'envisageons pas ici l'équivalent d'un champ magnétique, pourtant essentiel dans la théorie de Maxwell car il contribue pour moitié à l'énergie émise sous forme ondulatoire.

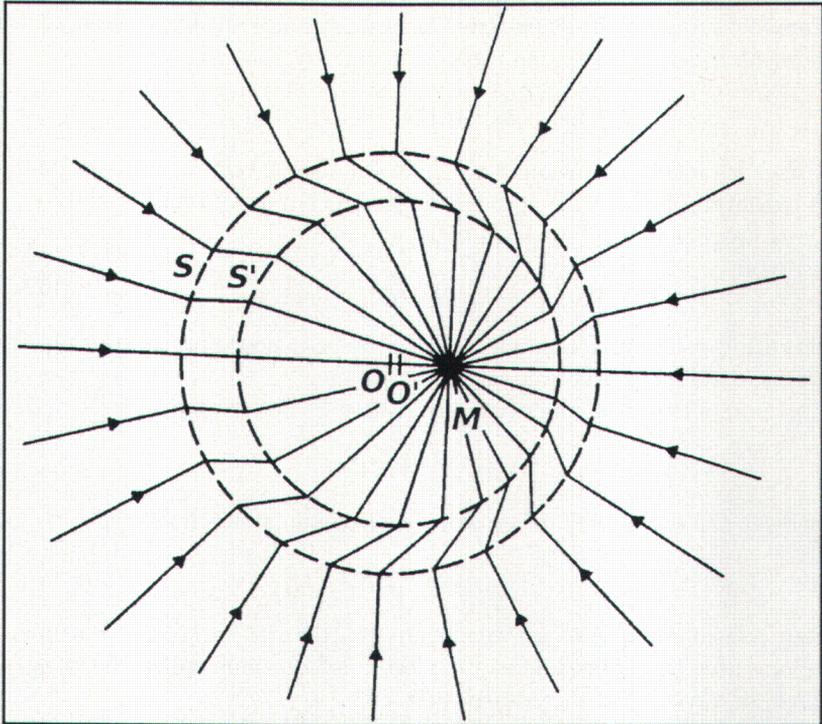


FIG. 5: En $t = 0$ une particule de masse M , initialement immobile en O , est accélérée horizontalement vers la droite pendant un bref instant Δt , ce qui l'amène en O' . L'onde gravitationnelle est créée pendant cette phase d'accélération : au temps t , elle se trouve localisée entre une sphère S de rayon $R = ct$ et une sphère S' de rayon $R' = c(t - \Delta t)$. En-dehors de cette coquille, les lignes de champ possèdent la structure « en forme d'oursin » évoquant un champ statique. (Adapté du livre de H.C. Ohanian, *Classical Electrodynamics*, Allyn and Bacon, 1988.)

Au temps $t \gg \Delta t$, les centres des deux « pelotes d'aiguilles » sont séparés, approximativement, par la distance $t\Delta V = R\Delta V/c$, et comme $\Delta V \ll c$ on a

$$t\Delta V \ll R.$$

Les lignes de champ émanant de chacun de ces deux centres dans la direction θ sont alors distantes de

$$t\Delta V \sin \theta = \Delta V/c R \sin \theta \ll R.$$

La ligne de gauche intersecte la couronne de rayon R perpendiculairement sur sa surface extérieure S et celle de droite, perpendiculairement (moyennant les

approximations effectuées ci-dessus) sur sa surface intérieure S' . On peut considérer qu'elles sont *toutes les deux* orthogonales à S et S' . Dans la direction θ , une ligne de champ pénétrant à l'intérieur de la couronne subit un décalage latéral égal à $\Delta V/c R \sin \theta$ pour un décalage radial égal à $c\Delta t$ (figure 6). La densité des lignes de champ à l'intérieur d'un faisceau mince de direction θ se trouve ainsi multipliée par $a \sin \theta R/c^2$. Or, l'intensité du champ gravifique varie proportionnellement à la concentration des lignes de champ [relation (2)] et, juste en-dehors de la couronne, prend la valeur $g = GM/R^2$ en vertu de la relation (1). Par conséquent, à l'intérieur de la couronne le vecteur \vec{g} , caractérisant l'onde gravitationnelle, est perpendiculaire à la direction radiale et sa norme

$$g(R, \theta) = a \sin \theta GM/Rc^2$$

varie comme l'inverse de la distance à la source.

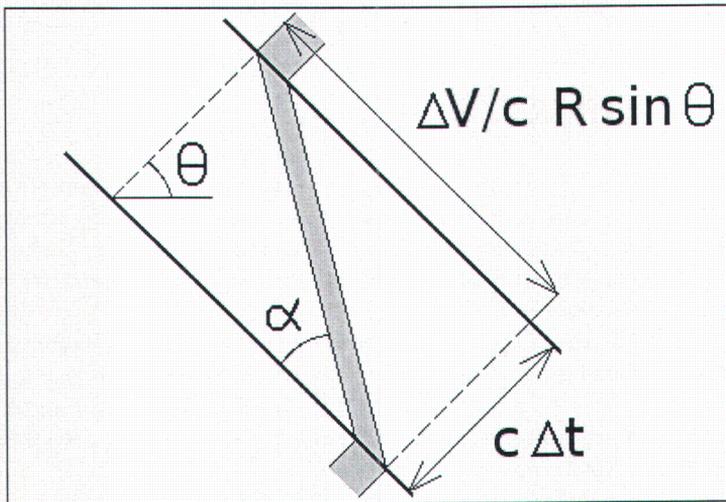


FIG. 6: La couronne sphérique d'épaisseur $c\Delta t$, où se trouvent localisées les lignes de champ générées lors de l'accélération d'une particule de masse M , pour R grand et dans la direction déterminant avec l'horizontale un angle θ . En gris on a représenté un tube contenant une quantité donnée de lignes de champ. En pénétrant à l'intérieur de la couronne, elles subissent, dans la direction perpendiculaire au rayon, un décalage linéaire égal à $\Delta V/c R \sin \theta$, formant ainsi un coude d'angle $\pi/2 - \alpha$ où $\alpha = c^2\Delta t/(\Delta V R \sin \theta)$ est un petit angle. L'intensité du champ gravitationnel correspondant, donc de l'onde, vaut ainsi $g(R, \theta) = 1/\alpha GM/R^2 = a \sin \theta GM/Rc^2$, où $a = \Delta V/\Delta t$ désigne l'accélération de la particule. On doit ce raisonnement à J.J. Thomson.

Nous supposons que notre raisonnement reste valable si la source accélère à tout instant. Dès lors, une particule de masse M soumise à une accélération \vec{a} émet un champ d'ondes gravitationnelles dont la valeur, à grande distance r et dans la direction de vecteur unitaire \vec{n} , est donnée par

$$\vec{g}(t) = \frac{GM}{rc^2} [\vec{n} \wedge \vec{a}(t')] \wedge \vec{n}. \quad (14)$$

Le symbole t' porte le nom de *temps retardé* et exprime le fait qu'une onde parvenant à la distance r au temps t , résulte d'une accélération survenue à l'origine r/c secondes plus tôt : on a donc

$$t' = t - r/c. \quad (15)$$

Ceci étant, la situation que nous venons de décrire n'est pas réaliste car une particule seule ne peut accélérer spontanément. Pour fixer les idées en raisonnant sur un cas concret, considérons, en gardant les notations de la figure 4, un système de deux corps en interaction. D'après (14) ils émettent, au total, le champ d'ondes

$$\vec{g}(t) = \frac{G}{rc^2} [\vec{n} \wedge (M_1 \vec{a}_1 + M_2 \vec{a}_2)(t')] \wedge \vec{n}. \quad (16)$$

Or, la quantité $M_1 \vec{a}_1 + M_2 \vec{a}_2$ est nulle en vertu de la loi de conservation de la quantité de mouvement dans un système isolé. Elle est d'ailleurs égale à la dérivée deuxième, par rapport au temps, du moment dipolaire \vec{D} du système [voir (6)]. Pour cette raison, on dit qu'une onde gravitationnelle ne présente pas de composante dipolaire.⁵

Faut-il en conclure qu'un système de deux masses ne peut rayonner ? Certainement pas, pour la raison suivante : les deux masses ne sont pas à distance égale de l'observateur P , aussi les informations relatives à leurs accélérations mettent-elles, en fait, des temps *différents* pour y parvenir. La grossière relation (15) doit être remplacée par

$$t'_1 = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_1(t'_1)|}{c}, \quad t'_2 = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_2(t'_2)|}{c}, \quad (17)$$

respectivement pour chacune des deux sources, et la relation (16) devient

$$\vec{g}(t) = \frac{G}{rc^2} \{ \vec{n} \wedge [M_1 \vec{a}_1(t'_1) + M_2 \vec{a}_2(t'_2)] \} \wedge \vec{n}. \quad (18)$$

Les équations (17) expriment les temps retardés t'_1 et t'_2 *implicitement* en fonction de t et sont difficiles à résoudre. Mais trois hypothèses judicieuses permettent de poursuivre le traitement analytique des calculs.

⁵ En électromagnétisme, l'équivalent de ce terme est non nul si la rapport de la charge à la masse n'est pas le même pour toutes les particules.

• *Les mouvements des sources sont bornés, c'est-à-dire localisés à l'intérieur d'une sphère de diamètre donné d .*

• *L'observateur est très éloigné de l'origine par rapport à la dimension caractéristique des sources, c'est-à-dire $r \gg d$.*

On peut alors écrire

$$|\vec{r} - \vec{r}_1(t'_1)| = r - \vec{n} \cdot \vec{r}_1(t'_1) + O\left(\frac{d^2}{r}\right), \quad |\vec{r} - \vec{r}_2(t'_2)| = r - \vec{n} \cdot \vec{r}_2(t'_2) + O\left(\frac{d^2}{r}\right), \quad (19)$$

donc, vu (17) :

$$t'_1 \simeq t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_1(t'_1)}{c}, \quad t'_2 \simeq t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_2(t'_2)}{c}. \quad (20)$$

• *Les vitesses des sources sont largement inférieures à la vitesse de propagation de la gravitation, c'est-à-dire $|\vec{V}_1| \ll c$, $|\vec{V}_2| \ll c$.*

De (20), il découle ainsi

$$\begin{aligned} \vec{r}_1(t'_1) &\simeq \vec{r}_1(t - r/c) + O(r_1) \frac{\vec{V}_1(t - r/c)}{c} \simeq \vec{r}_1(t - r/c) \\ \vec{r}_2(t'_2) &\simeq \vec{r}_2(t - r/c) + O(r_2) \frac{\vec{V}_2(t - r/c)}{c} \simeq \vec{r}_2(t - r/c). \end{aligned} \quad (21)$$

On obtient finalement une approximation de (17) pour la valeur des temps retardés, plus satisfaisante que la relation (15) : posant toujours $t' = t - r/c$, on a

$$t'_1 \simeq t' + \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_1(t')}{c}, \quad t'_2 \simeq t' + \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_2(t')}{c}. \quad (22)$$

Il est facile d'interpréter ces résultats si le point d'observation P se trouve dans le plan de l'orbite des deux corps (figure 7).

On peut maintenant écrire, en notant par un point les dérivées temporelles :

$$\vec{a}_1(t'_1) \simeq \vec{a}_1(t') + \dot{\vec{a}}_1(t') \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_1(t')}{c} \quad (23)$$

$$\vec{a}_2(t'_2) \simeq \vec{a}_2(t') + \dot{\vec{a}}_2(t') \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_2(t')}{c}. \quad (24)$$

Le deuxième terme constitue bien une petite correction apportée au premier. En effet, dans le cas d'un mouvement borné de vitesse angulaire typique $\omega \simeq V/r$, on a $|\dot{\vec{a}}| \simeq \omega |\vec{a}|$ et le deuxième terme est de l'ordre de $aV/c \ll a$.⁶

⁶ Il faut faire ici une remarque technique. En électromagnétisme, le champ d'ondes en $1/r$ généré par une particule de charge Q , soit l'équivalent de la relation (14), est donné par

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \frac{\vec{n} \wedge [(\vec{n} - \vec{V}(t')/c) \wedge \dot{\vec{a}}(t')]}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{V}(t')/c)^3} + O(V^2/c^2).$$

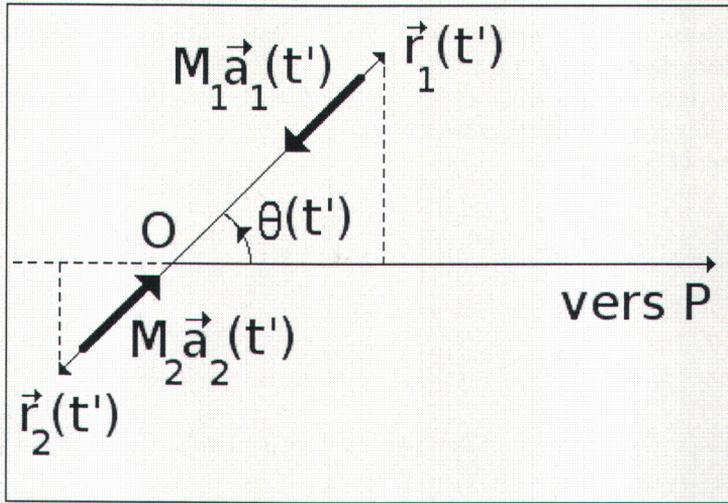


FIG. 7: Si l'observateur P est situé dans le plan de l'orbite des deux corps à une distance r de leur centre de masse O telle que $r \gg r_1$, $r \gg r_2$, alors les vecteurs $\vec{r} - \vec{r}_1$ et $\vec{r} - \vec{r}_2$ sont à peu près parallèles à OP . Dès lors, $|\vec{r} - \vec{r}_1| \simeq r - r_1 \cos \theta$ et $|\vec{r} - \vec{r}_2| \simeq r + r_2 \cos \theta$. Comme on peut prendre les positions des deux sources à l'instant $t' = t - r/c$, les temps retardés sont donnés par $t'_1 = t' + r_1(t') \cos \theta(t')/c$ et $t'_2 = t' - r_2(t') \cos \theta(t')/c$.

Dès lors,

$$M_1 \vec{a}_1(t'_1) + M_2 \vec{a}_2(t'_2) \simeq M_1 \dot{\vec{a}}_1(t') \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_1(t')}{c} + M_2 \dot{\vec{a}}_2(t') \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_2(t')}{c}.$$

Ce vecteur est *non nul* en général. Le champ d'ondes observé dans la direction \vec{n} est alors donné par la relation (18), et son énergie est calculable par (9).

Notamment, lorsque deux particules oscillent, le long de l'axe des z , aux extrémités d'un ressort de longueur propre L et de constante de raideur k , on obtient

$$\begin{aligned} M_1 \vec{a}_1(t'_1) + M_2 \vec{a}_2(t'_2) &= \frac{-1}{c} Ak\omega n_3 [A \sin(\omega t') + L] \cos(\omega t') (0, 0, 1) \\ \vec{g}(t) &\sim \frac{G}{rc^3} [\vec{n} \wedge \ddot{\vec{Q}}(t')] \wedge \vec{n} \end{aligned} \quad (25)$$

Il contient des termes en v/c , qui peuvent être négligés pour l'étude du rayonnement dipolaire mais sont du même ordre de grandeur que les deuxièmes termes du développement en série dans (23) et (24), et doivent donc être pris en compte à partir de ce niveau d'approximation. Le raisonnement intuitif et approché conduisant à (14) ne mène pas à dégager de tels termes. C'est la raison pour laquelle, en fait, une partie seulement du moment quadrupolaire apparaît dans les équations (25) et (26).

où

$$Q_i = \sum_{j=1}^3 Q_{ij} n_j.$$

Ainsi, le champ se calcule à partir de l'expression (10), en dérivant trois fois le moment quadrupolaire des deux particules vibrant aux extrémités du ressort. Pour cette raison, on peut qualifier l'expression (25) de *composante quadrupolaire* de l'onde gravitationnelle.

Si deux sources gravitent l'une autour de l'autre en mouvement circulaire uniforme dans le plan (x, y) à des distances respectives r_1 et r_2 de l'origine, on obtient, dans la direction $\vec{n} = (1, 0, 0)$ (voir figure 8) :

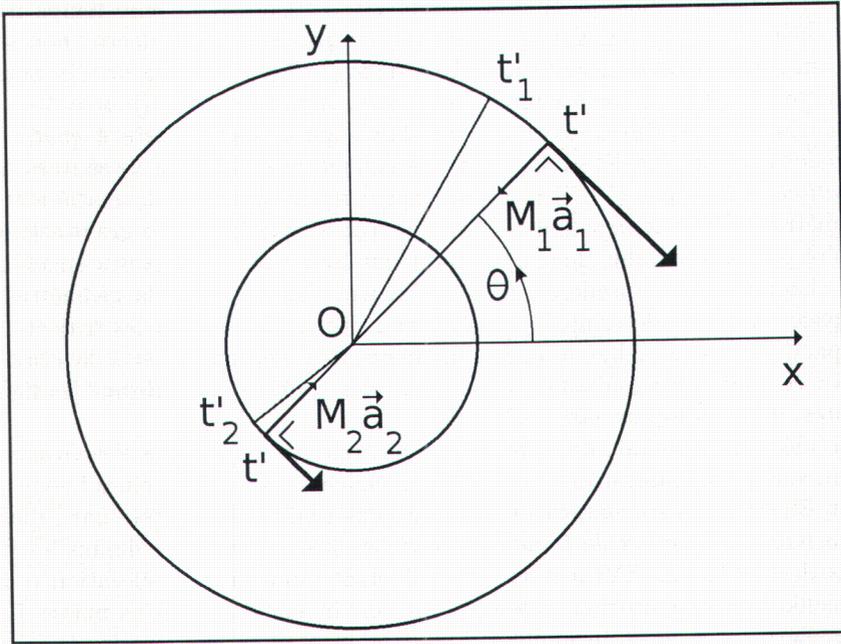


FIG. 8: Soit deux particules sources de masses respectives M_1 et M_2 , en mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω . On a $\theta(t') = \omega t'$. Les vecteurs $M_1 \vec{a}_1$ et $M_2 \vec{a}_2$ s'annulent à tout instant (il n'existe pas d'onde gravitationnelle dipolaire). Mais la variation du premier entre les temps retardés t' et $t'_1 > t'$ possède la même direction et le même sens que la variation du second entre les temps retardés t' et $t'_2 < t'$. Ces deux termes (vecteurs tangents aux cercles, en gras) s'additionnent pour générer la première contribution non nulle à l'émission de rayonnement gravitationnel, dite quadrupolaire.

un tenseur d'énergie-impulsion permettant d'évaluer les flux d'énergie et de moment cinétique.⁸

Dans le cadre des hypothèses de travail énoncées dans la section 3 et de l'approximation des champs faibles (27), les résultats sont les suivants. Il existe un système de coordonnées, appelé en anglais *Transverse-Traceless gauge* et noté *TT*, dans lequel

$$h_{00}^{TT}(r, t) = O(1/r^2) \quad (28)$$

$$h_{0j}^{TT}(r, t) = O(1/r^2) \quad (29)$$

$$h_{jk}^{TT}(r, t) = \frac{2G}{3rc^4} \ddot{Q}_{jk}^{TT}(t') + O(1/r^2) \quad (30)$$

où $t' = t - r/c$, comme ci-dessus ; les indices latins prennent les valeurs 1, 2 ou 3 ; et

$$Q_{jk}^{TT} = \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 \left(P_{ja} P_{bk} - \frac{1}{2} P_{jk} P_{ab} \right) Q_{ab} \quad (31)$$

où \mathbf{P} est l'opérateur de projection dans le plan perpendiculaire à \vec{n} :

$$P_{ab} = \delta_{ab} - n_a n_b.$$

En fait, les six composantes h_{jk}^{TT} sont liées par quatre contraintes. Elles peuvent ainsi s'exprimer à partir de deux fonctions seulement, notées h_+ et h_\times et traduisant la répartition de l'onde selon deux modes de polarisation. Leur signification géométrique apparaît clairement dans la base normalisée des coordonnées sphériques. (Il s'agit d'une base orthonormée que l'on peut se représenter en imaginant, en tout point de l'espace, la sphère centrée sur l'origine passant par ce point. Les pôles nord de toutes les sphères sont alignés. Le premier vecteur de base est alors le vecteur radial unitaire \vec{e}_r orthogonal à la sphère, le deuxième est le vecteur unitaire \vec{e}_θ dirigé selon la latitude θ , comptée à partir du pôle nord, et le troisième vecteur unitaire \vec{e}_φ pointe selon la longitude φ .) Le tenseur \mathbf{h}^{TT} y prend la forme

$$(\mathbf{h}^{TT}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_+ & h_\times \\ 0 & 0 & h_\times & -h_+ \end{pmatrix} \quad (32)$$

⁸ La théorie en est due aux physiciens soviétiques L. Landau et E. Lifchitz. A proprement parler, cet objet n'est tensoriel que pour les transformations linéaires de coordonnées, ce qui est bien en accord avec l'impossibilité, résultant du principe d'équivalence, de décrire les ondes gravitationnelles à l'aide de tenseurs. Cependant, dans l'approximation des champs faibles l'espace-temps (formel) est celui de Minkowski et les seules transformations de coordonnées autorisées sont alors les transformations linéaires de Lorentz.

avec

$$h_+ = -h_{11}^{TT} \sin^2 \varphi - h_{22}^{TT} \cos^2 \varphi + h_{12}^{TT} \sin(2\varphi) \quad (33)$$

$$h_\times = \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi (h_{22}^{TT} - h_{11}^{TT}) + \cos \theta \cos(2\varphi) h_{12}^{TT} + \sin \theta \sin \varphi h_{13}^{TT} - \sin \theta \cos \varphi h_{23}^{TT}. \quad (34)$$

Lorsque l'onde gravitationnelle atteint une particule non relativiste, c'est-à-dire de vitesse largement inférieure à c , celle-ci est soumise à l'équation de mouvement

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \sum_{j=1}^3 h_{ij}^{TT} \frac{dx^j}{dt} = 0. \quad (35)$$

Dans le référentiel TT , une particule de vitesse initiale nulle demeure donc immobile à tout instant ! En fait cependant, l'onde gravitationnelle déforme l'espace-temps et la distance physique entre deux particules A et B s'en trouve affectée (elle peut être mesurée à partir du temps nécessaire à la lumière pour parcourir l'aller-retour ABA). L'effet de la composante h_+ est le suivant : dans le plan sous-tendu par les vecteurs \vec{e}_θ et \vec{e}_φ , un anneau de particules-test, initialement au repos, se déforme en une ellipse d'axes dirigés selon ces vecteurs. Plus précisément, la distance physique entre deux particules données est multipliée par $1 + h_+/2$ selon \vec{e}_θ , et par $1 - h_+/2$ selon \vec{e}_φ . L'effet de la composante h_\times est identique mais tourné de $\pi/4$ (figure 9). Comme le plan est perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde, celle-ci est dite *transversale*.

La relativité générale confère au champ gravitationnel une dynamique propre en le dotant de propriétés physiques analogues à celles des particules : quantité de mouvement, énergie, moment cinétique. Dans le système de coordonnées TT utilisé ci-dessus, les trois composantes spatiales du quadrivecteur énergie-impulsion des sources s'annulent. Il reste qu'un système perd, par rayonnement, de l'énergie :

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\frac{G}{45c^5} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \ddot{Q}_{ij}(t') \ddot{Q}_{ij}(t') \quad (36)$$

et du moment cinétique⁹ :

$$\frac{dL_i(t)}{dt} = -\frac{2G}{45c^5} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \epsilon_{ijk} \ddot{Q}_{jl}(t') \ddot{Q}_{kl}(t'). \quad (37)$$

Ainsi que nous l'avions annoncé dans la section 3, on remarquera l'intervention des dérivées troisièmes du moment quadrupolaire, notamment dans la relation (36). Mais si notre théorie newtonienne modifiée permettait de rendre

⁹ Le calcul en est particulièrement technique et requiert, entre autres, la prise en compte des termes en $1/r^2$ dans l'expression de h_{00} et h_{0j} .

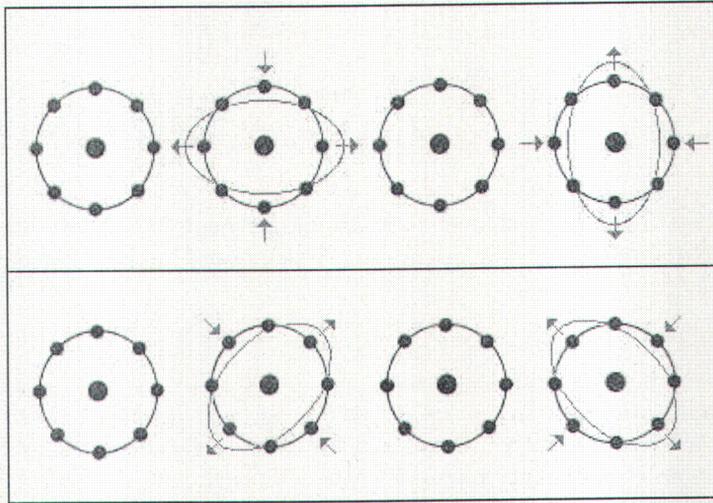


FIG. 9: Les deux modes de polarisation d'une onde gravitationnelle atteignant un anneau de particules-test à grande distance des sources (onde plane) lorsque $h_+ = h_\times = A \sin(\omega t')$. En abscisse, le vecteur \vec{e}_θ ; en ordonnée, le vecteur \vec{e}_φ . En haut, le mode h_+ ; en bas, le mode h_\times . De gauche à droite, $\omega t'$ prend successivement les valeurs $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$.

compte qualitativement des résultats de la relativité générale, elle en diffère cependant dans ses détails quantitatifs.

On peut interpréter les pertes d'énergie et de moment cinétique dans un langage newtonien. En fait, tout se passe comme si chaque particule source α , de masse m_α et de coordonnées x_α^j , était soumise à une force de frottement donnée par

$$F_i = -\frac{2Gm_\alpha}{15c^5} \sum_{j=1}^3 \frac{d^5 Q_{ij}}{dt^5} x_\alpha^j. \quad (38)$$

Reprenons l'exemple des deux corps de masses respectives M_1 et M_2 reliés, le long de l'axe z , par un ressort de longueur au repos égale à L et de constante de raideur k . Les composantes du tenseur décrivant l'onde gravita-

tionnelle émise sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 h_{11}^{TT} &= \frac{K}{r} [A \cos(2\omega t') - L \sin(\omega t')] (n_1^4 - n_1^2 + n_2^2 + n_1^2 n_2^2) \\
 h_{22}^{TT} &= \frac{K}{r} [A \cos(2\omega t') - L \sin(\omega t')] (n_1^2 + n_2^4 - n_2^2 + n_1^2 n_2^2) \\
 h_{33}^{TT} &= \frac{K}{r} [A \cos(2\omega t') - L \sin(\omega t')] (-n_1^4 - n_2^4 - 2n_1^2 n_2^2) \\
 h_{12}^{TT} &= \frac{K}{r} [A \cos(2\omega t') - L \sin(\omega t')] n_1 n_2 (n_1^2 + n_2^2 - 2) \\
 h_{13}^{TT} &= \frac{K}{r} [A \cos(2\omega t') - L \sin(\omega t')] n_1 n_3 (n_1^2 + n_2^2) \\
 h_{23}^{TT} &= \frac{K}{r} [A \cos(2\omega t') - L \sin(\omega t')] n_2 n_3 (n_1^2 + n_2^2)
 \end{aligned}$$

avec

$$K = \frac{-2GAk}{c^4}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k(M_1 + M_2)}{M_1 M_2}}, \quad \vec{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta).$$

A l'aide de (34), on vérifie aisément que le mode h_{\times} est nul. L'onde émise par un ressort est donc complètement polarisée. Les figures 10 et 11 montrent la composante h_{+} pour diverses valeurs du temps.

A l'aide de (10), (36) et (37), on calcule

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{4Gk^3(M_1 + M_2)(4A^4 + A^2L^2)}{15c^5M_1M_2} \quad (39)$$

et

$$\frac{dL_1}{dt} = \frac{dL_2}{dt} = \frac{dL_3}{dt} = 0. \quad (40)$$

Dans le cas des deux corps de masses respectives M_1 et M_2 gravitant en mouvement circulaire uniforme dans le plan (x, y) à des distances de l'origine respectivement égales à r_1 et r_2 , on obtient :

$$\begin{aligned}
 h_{11}^{TT} &= \frac{K}{2r} \cos(2\omega t') [(1 - n_1^2)^2 - n_1^2 n_2^2 + n_3^2] - \frac{K}{r} \sin(2\omega t') n_1 n_2 (1 - n_1^2) \\
 h_{22}^{TT} &= \frac{K}{2r} \cos(2\omega t') [-(1 - n_2^2)^2 + n_1^2 n_2^2 - n_3^2] - \frac{K}{r} \sin(2\omega t') n_1 n_2 (1 - n_2^2) \\
 h_{33}^{TT} &= \frac{K}{2r} \cos(2\omega t') [n_1^2 + n_1^2 n_3^2 - n_2^2 - n_2^2 n_3^2] + \frac{K}{r} \sin(2\omega t') n_1 n_2 (1 + n_3^2) \\
 h_{12}^{TT} &= \frac{K}{2r} \cos(2\omega t') n_1 n_2 (n_1^2 - n_2^2) + \frac{K}{r} \sin(2\omega t') (n_3^2 + n_1^2 n_2^2) \\
 h_{13}^{TT} &= \frac{K}{2r} \cos(2\omega t') n_1 n_3 (n_1^2 - n_2^2 - 2) + \frac{K}{r} \sin(2\omega t') n_2 n_3 (n_1^2 - 1) \\
 h_{23}^{TT} &= \frac{K}{2r} \cos(2\omega t') n_2 n_3 (n_1^2 - n_2^2 + 2) + \frac{K}{r} \sin(2\omega t') n_1 n_3 (n_2^2 - 1)
 \end{aligned}$$

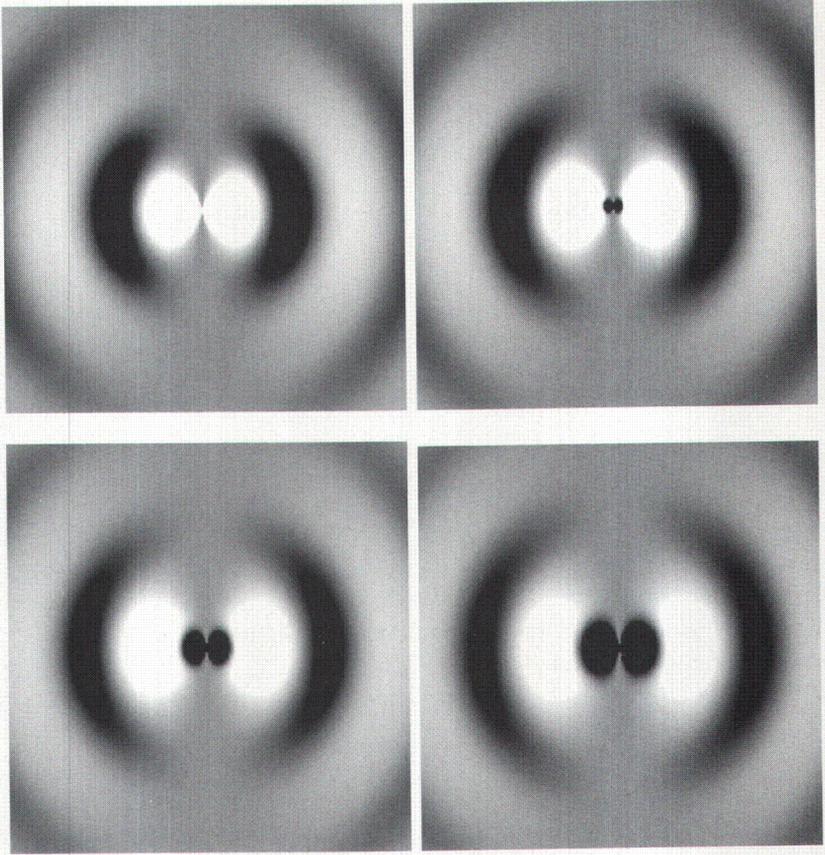


FIG. 10: Représentation, dans un plan vertical, de la composante h_+ émise par un ressort vertical placé au centre. Dans les unités géométriques $c = G = 1$, on a choisi $M_1 = M_2 = 2$, $A = 0.2$, $L = 1$, $k = 1$. Dans ces conditions, la période du mouvement harmonique vaut $T = 2\pi$ et la dimension caractéristique du ressort $d = 1.2$. La vitesse des sources est de l'ordre de d/T , raisonnablement inférieure à 1 comme les approximations de la section 3 l'exigent. La fenêtre a pour dimensions 20×20 , ce qui permet d'observer à des distances grandes par rapport à d , conformément à ces approximations. L'intensité de l'onde est traduite par un dégradé de gris (noir si $h_+ \leq -0.05$; blanc si $h_+ \geq 0.05$), successivement aux temps $t = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$. Programme écrit par Pierre-Guillaume Sprimont, Université de Liège, 2006.

avec

$$K = -\frac{4G^2 M_1 M_2}{c^4 d}, \quad \omega = \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{d^3}}, \quad d = r_1 + r_2.$$

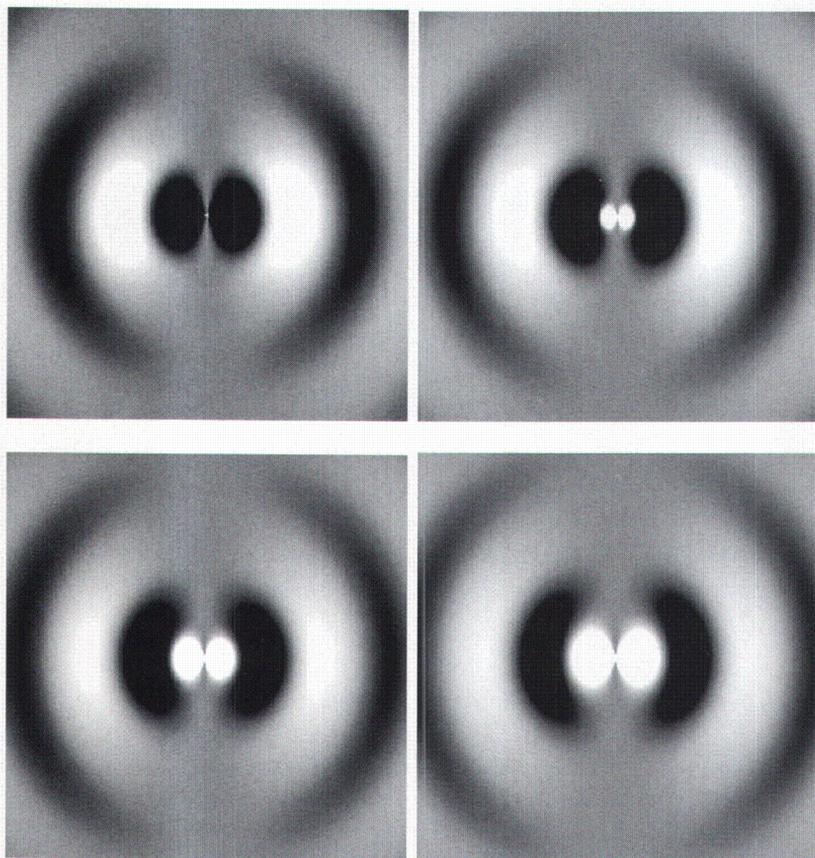


FIG. 11: *Même légende que pour la figure 10, aux temps $t = \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4$.*

Quelques représentations des modes h_+ et h_\times sont proposées en figures 12 et 13.

A l'aide de (12), (36) et (37), on calcule

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{32G^4 M_1^2 M_2^2 (M_1 + M_2)}{5c^5 d^5} \quad (41)$$

et

$$\frac{dL_1}{dt} = 0, \quad \frac{dL_2}{dt} = 0, \quad \frac{dL_3}{dt} = -\frac{32\sqrt{G^7} M_1^2 M_2^2 \sqrt{M_1 + M_2}}{5c^5 \sqrt{d^7}}. \quad (42)$$

Ainsi, le système Terre-Soleil rayonne 200 W sous forme d'ondes gravitationnelles et perd chaque seconde une quantité de moment cinétique égale à 10^9

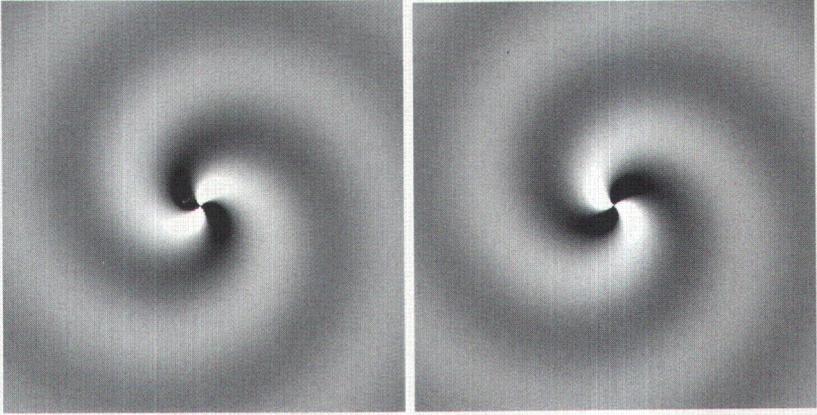


FIG. 12: Représentation, dans le plan $z = 0$, de la composante h_+ émise par deux corps en rotation dans ce plan, aux temps $t = 0$ et $t = 2\pi$. En unités géométriques, $M_1 = M_2 = 2$, $d = 4$. La période du mouvement vaut 8π et celle de l'onde est égale à 4π . La fenêtre a pour dimensions 40×40 . Noir si $h_+ \leq -0.5$, blanc si $h_+ \geq 0.5$.

$\text{kg m}^2/\text{s}$ (ces deux quantités sont d'ailleurs liées car les orbites ont été supposées circulaires). Il en résulte que leur distance mutuelle décroît au cours du temps : la Terre devrait s'effondrer sur le Soleil, que nous supposons ici immuable, dans cent mille milliards de milliards d'années. Dans le cas d'un mouvement elliptique quelconque, on peut montrer que l'excentricité des orbites tend vers zéro et donc, les trajectoires tendent vers des cercles.

La théorie quantique des champs a établi une symétrie entre ondes et particules, rompant ainsi avec une vision dichotomique présente dès la pensée grecque classique (la matière est-elle constituée d'éléments continus divisibles à l'infini, ou bien de particules indestructibles ?), et fourni un cadre théorique au concept de particule lumineuse, le *photon*. On prévoit l'existence de son homologue gravitationnel, le *graviton*, dont certaines propriétés sont déjà dégagées mais dont l'intégration dans une théorie cohérente demeure problématique.

Pour terminer, signalons que les ondes gravitationnelles font actuellement l'objet de recherches observationnelles très actives. Des interféromètres LASER ont été installés sur Terre [LIGO (Etats-Unis), VIRGO (France, Italie), GEO600 (Royaume-Uni, Allemagne), TAMA (Japon)] ou le seront dans l'espace [projet LISA (NASA-ESA)] afin d'épier les perturbations de l'espace-temps trahissant le passage d'une onde.

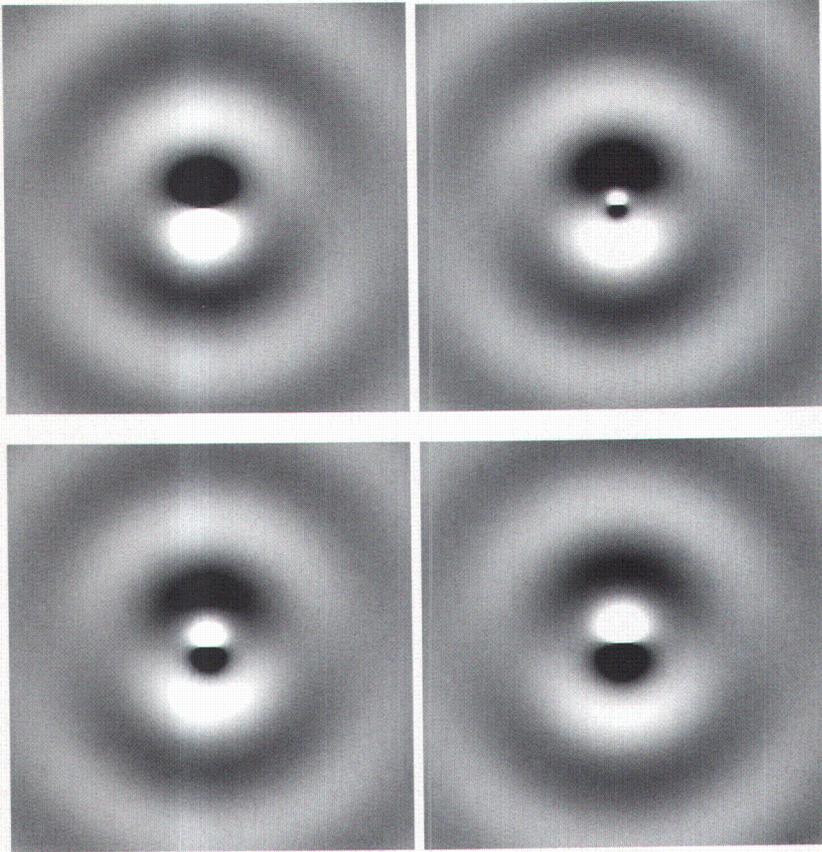


FIG. 13: Représentation, dans le plan $x = 0$, de la composante h_x émise par deux corps en rotation dans le plan $z = 0$, aux temps $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Mêmes paramètres que pour la figure 12.