

# La précession du plan d'oscillation du pendule de Foucault :

## Une approche géométrique intuitive

PAR

YVES DE ROP<sup>(1)</sup> ET OLIVIER MOREAU<sup>(1,2)</sup>

*(1) Institut d'Astrophysique, Université de Liège,  
Allée du 6 Août 17, B-4000 Liège*

*(2) Laboratoire d'Astronomie de l'Université Lille 1, Impasse de  
l'Observatoire, F-59000 Lille*

**Résumé:** L'expérience du pendule de Foucault permet de mettre en évidence de manière très parlante la rotation de la Terre. Simple en apparence, elle n'en est pas moins délicate à expliquer de manière didactique. Nous proposons ici une approche intuitive de l'étude de l'évolution du plan d'oscillation de ce pendule permettant en particulier le calcul de sa période de rotation. S'il ne prétend en aucun cas remplacer une démonstration rigoureuse, ce point de vue présente l'avantage pédagogique d'être basé sur un raisonnement purement géométrique, autrement dit, purement cinématique.

### 1. L'expérience du pendule de Foucault

Réalisée pour la première fois en public le 3 février 1851 dans la salle méridienne de l'Observatoire de Paris, la célèbre expérience du physicien Léon Foucault [1819-1868] permet de mettre en évidence de manière simple la rotation de la Terre sur elle-même. L'expérience souleva à l'époque un grand intérêt dans le monde scientifique, à tel point par exemple que le 10 février de la même année, le mathématicien et astronome Jacques Binet [1786-1856], répondant à un appel public de Foucault, en présentait déjà devant l'Académie des Sciences de Paris une théorie analytique basée sur

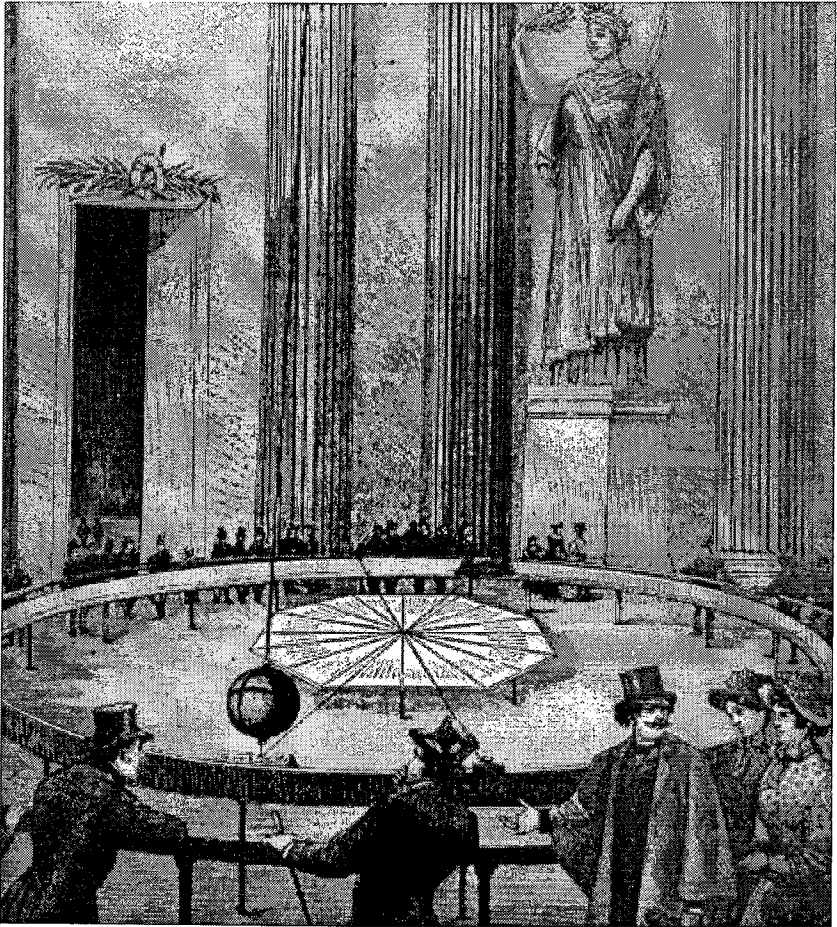


Figure 1 – *l'expérience publique du pendule de Foucault au Panthéon, à Paris, en mars 1851 (Conservatoire National des Arts et Métiers).*

les équations de la dynamique. L'expérience du pendule de Foucault fut répétée le mois suivant devant un public très nombreux, sous la coupole de 67m de haut du Panthéon. Depuis, le balancement majestueux du pendule et la simplicité apparente de la démonstration font partout de chaque présentation publique de cette expérience un événement qui attire toujours de nombreux curieux. Elle consiste, rappelons-le, à observer l'évolution du plan d'oscillation d'un grand pendule constitué d'une masse d'une di-

zaine de kilogrammes au moins (celle de Foucault pesait 28kg) suspendue au plafond d'un grand édifice à l'aide d'un fil d'acier de quelques dizaines de mètres de long (pour plus de détails, voir par exemple Barsics et al., 1993).

Dès les premières minutes de l'expérience, on constate que le plan d'oscillation du pendule de Foucault tourne par rapport au sol dans le sens des aiguilles d'une montre, à la vitesse angulaire d'environ 1 degré toutes les 5 minutes, pour un lieu situé sous une latitude de l'ordre de  $50^\circ$  nord. Pour être précis, la période de rotation du plan d'oscillation du pendule de Foucault est égale à la période de rotation de la Terre (23h 56min 04s) divisée par le sinus de la latitude du lieu. Faisant appel à la notion d'inertie, cette expérience qui pose la question de l'existence d'un repère absolu auquel se rapportent les lois de la mécanique présente un intérêt indéniable pour la physique et la cosmologie.

## 2. Une approche intuitive

L'expérience du pendule de Foucault est extrêmement parlante mais, si l'on veut être précis et aller au fond des choses, son explication didactique n'est pas simple, sauf si on la réalise au pôle nord ! Bien entendu, en prenant en compte l'accélération de Coriolis, expression de l'inertie en repère tournant, on peut effectuer une démonstration exacte de la rotation observée du plan d'oscillation du pendule. Cependant, on prend alors le risque pédagogique, dans le secondaire et *a fortiori* devant le grand public, de rester trop abstrait et n'apporter rien d'autre à l'auditoire que le sentiment frustrant d'être incapable d'accéder à l'essentiel.

Nous proposons une manière intuitive d'expliquer le mouvement de rotation du plan d'oscillation du pendule. Elle repose sur la proposition suivante: *l'axe autour duquel oscille la masse du pendule a tendance à se maintenir fixe par rapport à un repère absolu que l'on considérera lié aux astres lointains*, et d'autre part sur l'observation de la contrainte suivante: *cet axe doit toujours rester perpendiculaire à la verticale du lieu*.

Qu'entendons-nous par là ? Nous savons que la Terre est animée, par rapport aux astres lointains, d'un mouvement de rotation d'ouest en est et effectue un tour complet sur elle-même en 24 heures sidérales, c'est-à-dire 23h 56min 04s. Considérons à un instant donné le plan d'oscillation du pendule déterminé, comme illustré à la figure 2, par la verticale du lieu et une horizontale,

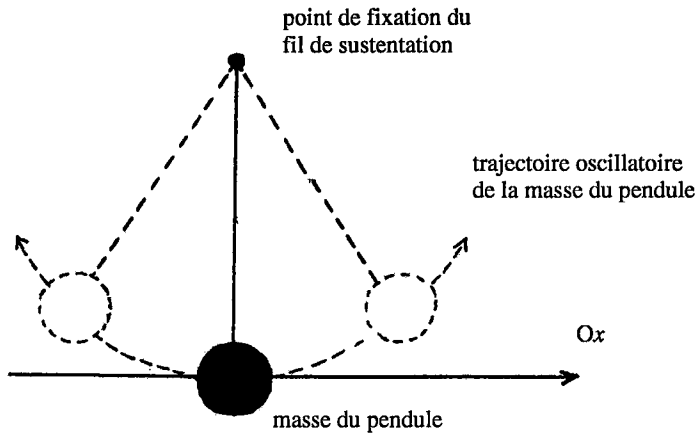


Figure 2 – le pendule de Foucault vu dans son plan d'oscillation. L'axe  $Ox$  indique la direction dans laquelle oscille la masse du pendule.

l'axe  $Ox$ . Pour fixer les idées, supposons qu'à un instant donné l'axe  $Ox$  pointe vers une étoile attachée à un repère « absolu ». Cette étoile se trouve donc à l'horizon, en train de se lever ou de se coucher compte tenu du mouvement apparent que lui donne la rotation de la Terre. Admettons par exemple qu'elle se couche. Nous pouvons alors imaginer notre axe  $Ox$  tentant, par inertie, de suivre cette direction fixe dans le référentiel absolu mais ne pouvant cependant pas traverser le plancher de la salle où a lieu l'expérience. A chaque instant, l'axe  $Ox$  a donc tendance à suivre le mouvement d'une étoile de hauteur nulle ; cependant, à l'instant suivant, l'étoile a plongé sous l'horizon et l'axe  $Ox$  se met à tenter de suivre une nouvelle étoile de hauteur nulle. Ainsi, dans le référentiel des spectateurs de l'expérience, *la vitesse angulaire de rotation de l'axe d'oscillation du pendule, donc de son plan d'oscillation, est donnée à chaque instant par le taux instantané de variation de la direction d'une étoile située à l'horizon, c'est-à-dire en termes techniques la dérivée de son azimut par rapport au temps.*

Il faut bien souligner le fait qu'il ne s'agit là que d'une *tendance instantanée* du plan vertical d'oscillation à suivre une étoile située sur l'horizon. Il est en général faux d'affirmer que ce plan

contiendra toujours la même étoile fixe, quelle que soit la hauteur de cette dernière dans le ciel. Si c'était le cas, sa période de rotation serait alors systématiquement égale à 24 heures sidérales, ce qui n'est vrai qu'aux pôles.

Il est encore plus incorrect d'imaginer que le plan d'oscillation reste fixe à tout instant par rapport aux étoiles. Cette affirmation, curieusement assez répandue, se trouve manifestement en conflit avec la condition de verticalité du balancement du pendule. Insistons donc sur cette contrainte fondamentale qu'il faut absolument intégrer dans toute tentative d'explication : la masse du pendule n'est pas en sustentation mais est maintenue en l'air par un câble situé dans un plan vertical. L'axe  $Ox$  doit donc rester constamment perpendiculaire à la verticale du lieu qui, elle, est entraînée par la rotation de la Terre.

En résumé, le mouvement de la masse du pendule résulte d'un compromis entre la tendance à l'inertie et la nécessité d'obéir à la loi d'une accélération gravifique terrestre sans laquelle, d'ailleurs, il n'oscillerait pas et qui, par rapport à un référentiel « absolu », a une direction variable dans le temps.

Notre présentation permet d'expliquer qualitativement la précession du plan d'oscillation du pendule de Foucault et même de prédire le sens de la dépendance de la période de ce mouvement par rapport à la latitude du lieu. En effet, la composante horizontale du mouvement d'une étoile à son lever ou à son coucher est plus ou moins grande selon la latitude  $\varphi$ , il suffit d'assister à une séance de planétarium pour s'en convaincre. Ainsi par exemple, le plan d'oscillation d'un pendule placé au pôle nord aurait une période de rotation de 24 heures sidérales, puisque dans ce cas très particulier il pourrait satisfaire constamment sa tendance à suivre les étoiles situées sur l'horizon, celles-ci restant indéfiniment à une hauteur nulle et faisant un tour complet en azimut toutes les 23h 56min 04s. Autre exemple, le plan d'oscillation d'un pendule de Foucault situé à l'équateur ne connaît aucune précession puisque, les étoiles se levant et se couchant verticalement sous ces latitudes, leur variation d'azimut est alors nulle et avec elle la vitesse de rotation du plan de notre pendule. Finalement, aux latitudes intermédiaires, où nous savons que les astres se lèvent et se couchent selon une trajectoire oblique par rapport à l'horizon, il est bien intuitif que la période de rotation du plan d'oscillation du pendule de Foucault se situera quelque part entre 24 heures sidérales et l'infini.

### 3. Calcul de la période de rotation du plan du pendule

Notre raisonnement n'a nécessité jusqu'à présent aucune technique de calcul et, à ce titre, il nous paraît accessible à des élèves terminant leur cycle secondaire. Il explique, pensons-nous, la quintessence du phénomène. Cependant, il se prête également à des développements quantitatifs. Dans cette section, en utilisant deux techniques mathématiques différentes mais au fond équivalentes, nous retrouvons la valeur correcte de la rotation par rapport à la Terre du plan d'oscillation du pendule de Foucault. La première démonstration fait usage des relations de passage entre systèmes de coordonnées célestes issues de la trigonométrie sphérique tandis que la seconde nécessite la connaissance des matrices de rotation.

#### 3.1 Calcul par l'astronomie sphérique

Les relations de passage du système de coordonnées célestes horaires  $(H, \delta)$  vers le système horizontal  $(a, h)$  tels que définis en annexe, nous sont donnés par les formules de la trigonométrie sphérique qui sont naturellement adaptées à la géométrie de la sphère céleste. Pour un lieu d'observation de latitude  $\varphi$ , ces relations de passage sont les suivantes (voir par exemple Moreau, 1997) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H \quad (1) \\ \sin a = \frac{\cos \delta \sin H}{\cos h} \quad (2) \\ \cos a = \frac{\sin \varphi \cos \delta \cos H - \cos \varphi \sin \delta}{\cos h} \quad (3) \end{array} \right.$$

Nous allons utiliser ici les deux dernières relations, qui donnent l'azimut  $a$  d'un astre en fonction de sa hauteur  $h$ , de  $\varphi$  et de ses coordonnées  $(H, \delta)$  et calculer la loi d'évolution de cet azimut  $a$  en supposant constante la position de l'astre sur la sphère céleste — exprimée par ses coordonnées équatoriales  $(\alpha, \delta)$  —, ce qui est tout à fait justifié, à l'échelle de quelques jours, pour les astres lointains comme le sont les étoiles (autres que le Soleil, bien sûr).

Nous allons pour cela dériver par rapport au temps la relation (3) :

$$\begin{aligned}
 & -\sin a \frac{da}{dt} \\
 & = -\frac{\sin \varphi \cos \delta \sin H \frac{dH}{dt}}{\cos h} + \frac{\sin \varphi \cos \delta \cos H - \cos \varphi \sin \delta}{\cos^2 h} \sin h \frac{dh}{dt}
 \end{aligned}$$

On en tire, en utilisant l'équation (2), la relation donnant, quel que soit l'azimut, sa variation avec le temps :

$$\frac{da}{dt} = \sin \varphi \frac{dH}{dt} - \left( \frac{\sin \varphi}{\tan H} \right) - \frac{\cos \varphi}{\sin H} \tan \delta \tan h \frac{dh}{dt}$$

soit, pour un astre de hauteur nulle :

$$\frac{da}{dt} = \sin \varphi \frac{dH}{dt}$$

d'où, enfin, connaissant la relation  $H = S - \alpha$  entre l'angle horaire  $H$  et l'ascension droite  $\alpha$  d'un astre d'une part et l'heure sidérale  $S$  d'autre part (cf. l'annexe),

$$\frac{da}{dt} = \sin \varphi \frac{dS}{dt}$$

la relation donnant la vitesse angulaire de rotation de l'axe  $Ox$ , que l'on a identifiée à  $\frac{da}{dt}$  pour un astre de hauteur nulle. On a alors, en termes de période de rotation,

$$T_a = \frac{T_S}{\sin \varphi}$$

La période de rotation de l'axe  $Ox$ , identifiée à  $T_a$ , est donc égale à la période de variation de l'heure sidérale,  $T_S$ , divisée par le sinus de la latitude du lieu. Or cette période  $T_S$  est celle du mouvement diurne qui vaut évidemment 23h 56min 04s, période de rotation de la Terre. D'autre part, en identifiant la vitesse de rotation du plan d'oscillation du pendule de Foucault à la variation d'azimut d'une étoile au coucher ou au lever, on retrouve bien le sens observé de cette rotation : dans le sens des aiguilles d'une montre — soit une déviation vers la droite — dans l'hémisphère nord (et inversement dans l'hémisphère sud, où  $\varphi < 0$ ).

### 3.2 Calcul à l'aide de la formule de Poisson

Supposons que l'expérience du pendule de Foucault soit réalisée en un point M de latitude  $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ . Définissons-y une base cartésienne solide de la Terre, constituée de trois vecteurs  $(\vec{E}_P, \vec{E}_M, \vec{E}_V)$  dirigés respectivement selon le parallèle, le méridien et la verticale du lieu. Désignons par  $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$  la base obtenue par continuité au pôle nord en faisant glisser  $(\vec{E}_P, \vec{E}_M, \vec{E}_V)$  le long du méridien considéré.

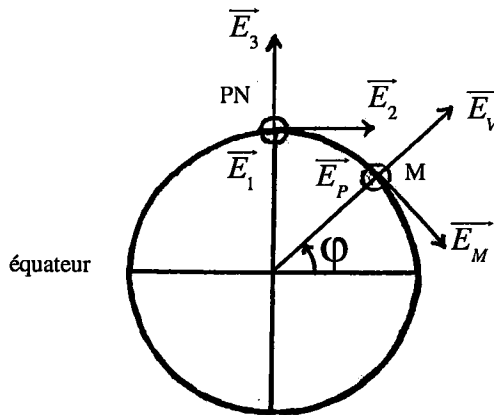


Figure 3 – une base cartésienne  $(\vec{E}_P, \vec{E}_M, \vec{E}_V)$  est définie au point M de latitude  $\varphi$ ; elle devient  $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$  une fois déplacée au pôle nord PN.

On a, par rotation d'angle  $\frac{\pi}{2} - \varphi$ ,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \vec{E}_P \\ \vec{E}_M \\ \vec{E}_V \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) & -\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) \\ 0 & \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) & \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & -\cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{pmatrix} \quad (4) \end{aligned}$$

Considérons cette base  $(\vec{E}_P, \vec{E}_M, \vec{E}_V)$  attachée au point M telle qu'elle était à l'instant  $t$ , choisi comme origine, où elle pointait exactement vers trois astres lointains. Nous noterons



$(\vec{e}_P, \vec{e}_M, \vec{e}_V)$  cette base fixe par rapport aux étoiles et correspondant, au temps  $t = 0$ , à  $(\vec{E}_P, \vec{E}_M, \vec{E}_V)$ . De même au pôle nord, on peut définir à l'instant  $t = 0$  la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , repérée par rapport à d'autres étoiles et qui servira de référence fixe au cours du temps, pour étudier l'évolution de la base  $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$  sous l'effet de la rotation de la Terre.

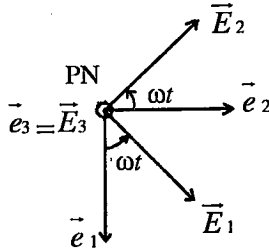


Figure 4 - vue à la verticale du pôle nord, la rotation de la Terre transforme, en le temps  $t$ , la base de référence  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  dans la nouvelle base  $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$ .

On a, par rotation d'angle  $\omega t$ ,

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{pmatrix}$$

avec  $\omega = \frac{2\pi}{T_S}$  où  $T_S$  est la période de rotation de la Terre, valant 24 heures sidérales. Or, en appliquant la relation (4) envisagée à l'instant  $t = 0$ ,

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_P \\ \vec{e}_M \\ \vec{e}_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & -\cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_P \\ \vec{e}_M \\ \vec{e}_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & -\cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{pmatrix}$$

$$= R(t) \begin{pmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{pmatrix}$$

relation qui montre comment, considérés dans la base  $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$  attachée à la Terre, et plus particulièrement au pôle nord, les vecteurs  $\vec{e}_P$ ,  $\vec{e}_M$  et  $\vec{e}_V$  dépendent du temps. Dans cette base  $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$  leur dérivée par rapport au temps s'écrit donc

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{e}_P \\ \vec{e}_M \\ \vec{e}_V \end{pmatrix} = \frac{dR(t)}{dt} \begin{pmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{pmatrix} = \frac{dR(t)}{dt} R^{-1}(t) \begin{pmatrix} \vec{e}_P \\ \vec{e}_M \\ \vec{e}_V \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{e}_P \\ \vec{e}_M \\ \vec{e}_V \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & -\cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega \sin(\omega t) & -\omega \cos(\omega t) & 0 \\ \omega \cos(\omega t) & -\omega \sin(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \quad \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \\ 0 & -\cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_P \\ \vec{e}_M \\ \vec{e}_V \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & -\cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \quad \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \\ 0 & -\cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_P \\ \vec{e}_M \\ \vec{e}_V \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega \sin \varphi & -\omega \cos \varphi \\ \omega \sin \varphi & 0 & 0 \\ \omega \cos \varphi & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_P \\ \vec{e}_M \\ \vec{e}_V \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en utilisant le (pseudo-) vecteur de rotation  $\vec{\omega} = \omega \cos \varphi \vec{e}_M - \omega \sin \varphi \vec{e}_V$ ,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{e}_P \\ \vec{e}_M \\ \vec{e}_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\omega} \wedge \vec{e}_P \\ \vec{\omega} \wedge \vec{e}_M \\ \vec{\omega} \wedge \vec{e}_V \end{pmatrix}$$

Il s'avère que  $\vec{\omega}$  est indépendant de  $\varphi$  car on a, quel que soit  $\varphi$ ,  $\vec{\omega} = -\omega \vec{e}_3$ .

Soit alors  $\vec{x}$  un vecteur fixe par rapport aux astres lointains :

$$\vec{x} = x_P \vec{e}_P + x_M \vec{e}_M + x_V \vec{e}_V$$

avec  $x_P$ ,  $x_M$ ,  $x_V$  constants. Vu dans la base  $(\vec{E}_P, \vec{E}_M, \vec{E}_V)$  attachée à la Terre au point M, le vecteur  $\vec{x}$  dépend du temps et

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = x_P \frac{d}{dt} \vec{e}_P + x_M \frac{d}{dt} \vec{e}_M + x_V \frac{d}{dt} \vec{e}_V = \vec{\omega} \wedge \vec{x}$$

Cette relation constitue un cas particulier de la formule du mathématicien Denis Poisson [1781-1840], exprimant comment un vecteur  $\vec{x}$  fixe dans un référentiel donné — dans notre cas la base  $(\vec{e}_P, \vec{e}_M, \vec{e}_V)$  liée aux étoiles — en rotation par rapport à un autre — ici la base  $(\vec{E}_P, \vec{E}_M, \vec{E}_V)$  liée à la Terre —, varie relativement à ce dernier. Nous pouvons développer :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{x}(t) &= (\omega \cos \varphi \vec{e}_M - \omega \sin \varphi \vec{e}_V) \wedge (x_P \vec{e}_P + x_M \vec{e}_M + x_V \vec{e}_V) \\ &= (\omega \cos \varphi x_V + \omega \sin \varphi x_M) \vec{e}_P \\ &\quad - \omega \sin \varphi x_P \vec{e}_M - \omega \cos \varphi x_P \vec{e}_V \end{aligned}$$

Supposons  $x_V = 0$ , c'est-à-dire  $\vec{x}$  situé dans le plan  $(\vec{e}_P, \vec{e}_M)$ . On a alors

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \omega \sin \varphi x_M \vec{e}_P - \omega \sin \varphi x_P \vec{e}_M - \omega \cos \varphi x_P \vec{e}_V$$

Or, à l'instant particulier  $t = 0$ , le plan  $(\vec{e}_P, \vec{e}_M)$  coïncide avec le plan  $(\vec{E}_P, \vec{E}_M)$  qui correspond à l'horizon de l'observateur situé au point M et, d'autre part, la relation précédente s'écrit

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{dt} \vec{x}(t) \right]_{t=0} &= \omega \sin \varphi x_M \vec{E}_P - \omega \sin \varphi x_P \vec{E}_M - \omega \cos \varphi x_P \vec{E}_V \end{aligned}$$

Le troisième terme montre que la variation temporelle de  $\vec{x}(t)$  dans la base  $(\vec{E}_P, \vec{E}_M, \vec{E}_V)$  présente une composante verticale. Quant

aux deux premiers termes, ils signifient que, en  $t = 0$ , la projection de  $\vec{x}(t)$  dans le plan horizontal ( $\vec{E}_P, \vec{E}_M$ ) évolue comme le vecteur

$$\vec{y}(t) = y_P(t) \vec{E}_P + y_M(t) \vec{E}_M$$

coïncidant avec  $\vec{x}(t)$  en  $t = 0$  et en rotation dans le plan ( $\vec{E}_P, \vec{E}_M$ ) avec une vitesse angulaire  $-\omega \sin \varphi$ , c'est-à-dire dans le sens horlogique si  $\varphi > 0$  (hémisphère nord) et direct si  $\varphi < 0$  (hémisphère sud) :

$$\begin{pmatrix} y_P(t) \\ y_M(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega \sin \varphi t) & \sin(\omega \sin \varphi t) \\ -\sin(\omega \sin \varphi t) & \cos(\omega \sin \varphi t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_P \\ x_M \end{pmatrix}$$

C'est ce que nous voulions démontrer : si l'on admet que le plan d'oscillation du pendule (contenant nécessairement la verticale de vecteur directeur  $\vec{E}_V$ ) tend à suivre instantanément la direction d'une étoile située sur l'horizon — à son lever ou à son coucher donc —, alors ce plan est animé d'une précession uniforme de période

$$\frac{2\pi}{|\omega \sin \varphi|} = \frac{T_S}{|\sin \varphi|}$$

dans le sens horlogique, pour l'hémisphère nord, ou bien direct, pour l'hémisphère sud.

#### 4. Conclusion

Nous avons développé une analyse intuitive de l'évolution du plan d'oscillation du pendule de Foucault pouvant présenter un intérêt didactique dans la mesure où elle ne nécessite pas, pour la compréhension fondamentale du phénomène dans un premier temps, de développements mathématiques. Cette approche, basée sur la propriété que possède ce plan de tendre à suivre une étoile lointaine située sur l'horizon sans pouvoir toutefois se soustraire à la condition de verticalité, permet de retrouver, *via* cette fois une phase calculatoire, la période exacte de sa rotation par rapport au sol, égale à la période de rotation de la Terre sur elle-même, divisée par le sinus de la latitude du lieu.

Remarquons que la propriété énoncée ci-dessus est purement cinématique et notre raisonnement diffère en cela de la démonstration de Binet ; notons que Foucault, dans sa note de 1851 à

l'Académie des Sciences, ainsi que le mathématicien Joseph Liouville [1809-1882], dans le même volume des compte-rendus, suggèrent en effet cette voie sans en publier cependant le développement détaillé. Ladite propriété ne découle donc que du principe d'inertie et n'est pas liée à un choix particulier d'équations dynamiques (pour autant, bien entendu, qu'elles respectent ce principe). C'est probablement ce que voulait suggérer le mathématicien Louis Poincaré [1777-1859], dans sa note publiée dans le même volume encore des compte-rendus de l'Académie des Sciences, en écrivant : « Ce mouvement est un phénomène purement géométrique, et dont l'explication doit être donnée par la simple géométrie, comme l'a fait M. Foucault, et non point par des principes de dynamique qui n'y entrent pour rien ».

### Annexe : systèmes de coordonnées célestes et relations de passage

Les coordonnées horizontales, dites également azimutales, permettent de repérer les astres par rapport à un plan de référence naturel de la sphère céleste : l'horizon. Elles sont composées de l'azimut  $a$ , que l'on compte de  $0^\circ$  à  $360^\circ$  à partir du point cardinal sud dans le sens des aiguilles d'une montre, et de la hauteur  $h$ , comptée quant à elle de  $-90^\circ$  à  $+90^\circ$  vers le zénith, de telle sorte que les astres visibles à un instant donné — c'est-à-dire situés au dessus de l'horizon — aient une hauteur positive. Les coordonnées horizontales  $a$  et  $h$ , représentées à la figure 3, sont intuitives mais inconfortables car variables avec le temps à cause du mouvement diurne, le mouvement apparent de rotation de la sphère céleste qui fait se lever et se coucher les astres. Ce système ne permet donc pas d'établir un catalogue universel de positions d'étoiles.

Le système des coordonnées horaires diffère du précédent par son plan de référence choisi cette fois comme l'équateur céleste, prolongement vers la sphère céleste de l'équateur terrestre. La déclinaison,  $\delta$ , est une coordonnée indépendante du mouvement diurne, c'est-à-dire invariante au cours de la nuit ; on la compte de  $-90^\circ$  à  $+90^\circ$  vers le pôle céleste nord.  $H$  est l'angle horaire, on le compte dans le sens des aiguilles d'une montre à partir du méridien local de 0 à 24 heures ; cette coordonnée est par contre toujours variable avec le temps puisque son origine n'est pas en-

traînée dans le mouvement diurne comme les astres le sont.

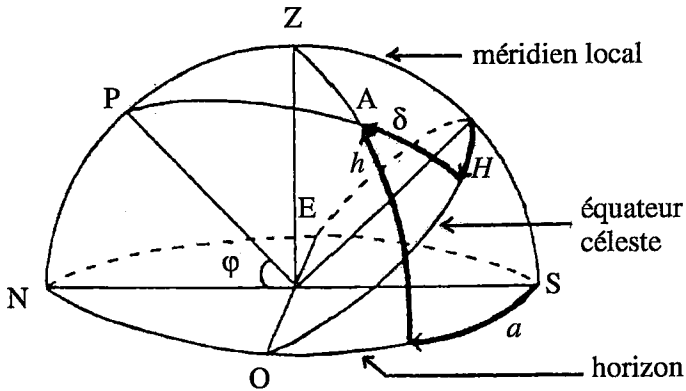


Figure 5 – les coordonnées horizontales  $a$  et  $h$  et horaires  $H$  et  $\delta$  d'un même astre  $A$ .  $Z$  est le zénith du lieu d'observation de latitude  $\varphi$ ,  $P$  le pôle céleste nord, et  $N$ ,  $E$ ,  $S$  et  $O$  sont les points cardinaux.

On définit encore un troisième système, celui des coordonnées équatoriales. Le progrès apporté par ce nouveau système consiste à choisir sur l'équateur céleste une origine qui soit entraînée dans la rotation de la sphère céleste ; on a choisi le point vernal qui est la position apparente du Soleil dans le ciel le jour de l'équinoxe de printemps. On retrouve dans ce système la coordonnée  $\delta$  à laquelle on adjoint l'ascension droite  $\alpha$ , comptée de 0 à 24 heures dans le sens inverse des aiguilles d'une montre à partir du point vernal. La coordonnée  $\alpha$  a les mêmes propriétés d'invariabilité que  $\delta$  ; les coordonnées équatoriales sont par conséquent bien adaptées au repérage permanent des astres sur la sphère céleste, elles sont utilisées dans tous les atlas et catalogues d'étoiles.

Par définition également, l'heure sidérale  $S$  en un lieu donné est égale à l'angle horaire du point vernal. La relation avec l'angle horaire  $H$  d'un astre d'ascension droite  $\alpha$  est alors immédiate :

$$H = S - \alpha$$

Pour plus de détails sur les systèmes de coordonnées et l'astronomie sphérique en général, voir entre autres Moreau (1997).

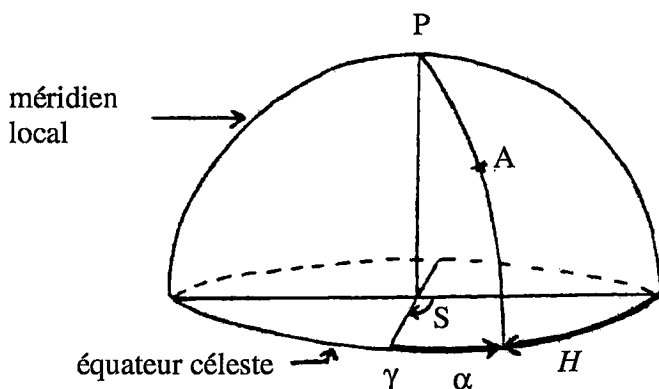


Figure 6 – les coordonnées équatoriales  $\alpha$  et  $\delta$  du même astre  $A$ . Le point  $\gamma$  est le point vernal, d'angle horaire  $S$  égal à la somme de l'angle horaire  $H$  et de l'ascension droite  $\alpha$  de  $A$ .

### Références bibliographiques

- BARSICS J., DE ROP Y., LAUSBERG A. ET MANFROID J. : 1993, *Autour du pendule de Foucault*, Publication de la Société Astronomique de Liège.
- BINET J. : 1851, *Compte-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **32**, 157 et 197.
- FOUCAULT L. : 1851, *Compte-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **32**, 135.
- LIUVILLE J. : 1851, *Compte-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **32**, 159.
- MOREAU O. : 1997, *Mieux Connaître la voûte céleste*, Editions J.-P. Gisserot.
- POINSOT L. : 1851, *Compte-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **32**, 206.

### Remerciements :

Nous sommes reconnaissants à nos amis Franco Caterina, Priscilla Maréchal, Ave Martinne et Alain Zeippen d'avoir bien voulu relire et critiquer notre texte et pour les discussions parfois animées que nous avons eues sur le sujet. Nous voudrions également remercier la Médiathèque d'Histoire des Sciences de la Cité des Sciences et de l'Industrie à Paris

qui nous a permis de consulter les précieux documents cités plus haut et dont le personnel nous a toujours reçu avec courtoisie et professionnalisme. C'est enfin grâce aux généreux efforts déployés par les bénévoles de la Société Astronomique de Liège pour présenter au public en 1993, en 1998 puis à nouveau en 2001 la fameuse expérience, que nous est venue l'envie d'écrire ce petit article.