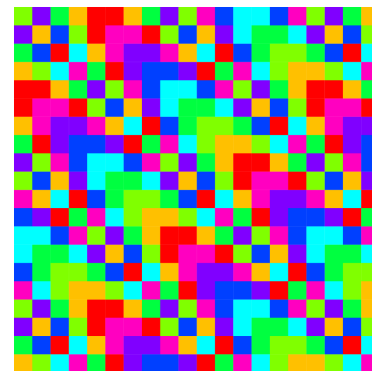


## *Game Over : mathématiques et jeux vidéos*

**Michel Rigo**

**<http://www.discmath.ulg.ac.be/>**



# Il y a des maths dans...

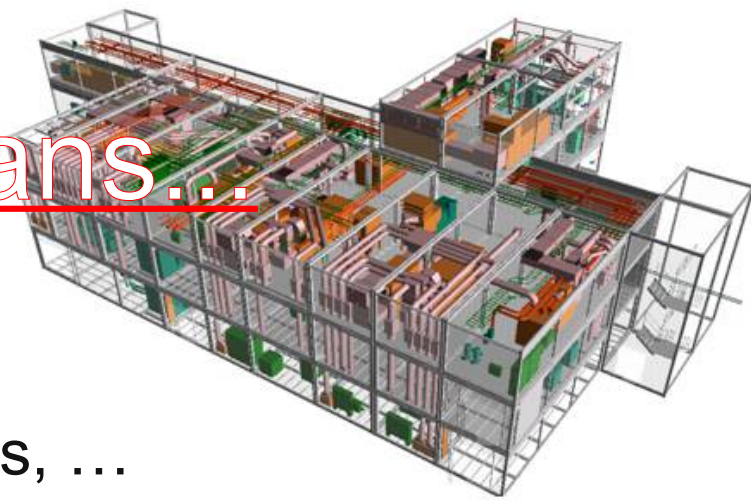
**Jeux vidéos** : (Duke Nukem 3D, Quake, Crysis, Call of Duty, ... )

**Cinéma** : films d'animation (Shrek, Toy Story, Avatar, Wall-e, ...),  
effets spéciaux (Terminator 2, Jurassic Park, Seigneur des anneaux, ...)

**Infographie** : design, publicités, ...



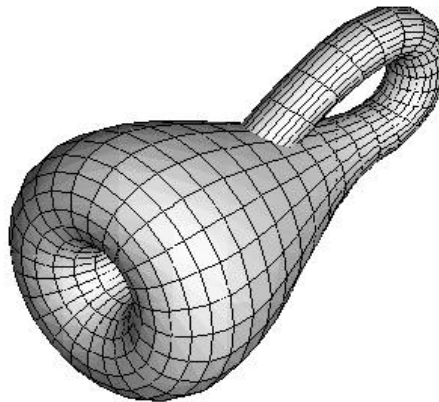
# Il y a des maths dans...



*Conception* : architecture, usinage de pièces, ...

*Simulation* : réalité virtuelle, mondes virtuels, simulateurs de vols, ...

*Imagerie médicale* : reconstruction d'images, aide aux opérations, ...



# Quelques outils

*Géométrie* : vue en perspective, repère, coordonnées, produit vectoriel, produit scalaire, transformations, ...

*Algèbre* : calcul matriciel, matrices de rotation, nombres complexes, quaternions, ...

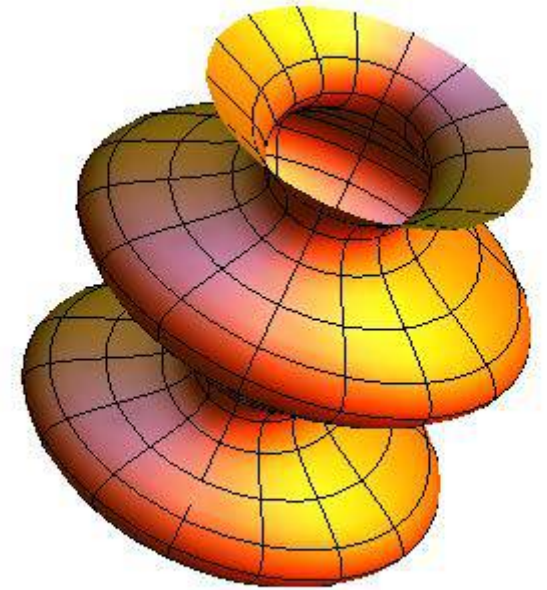
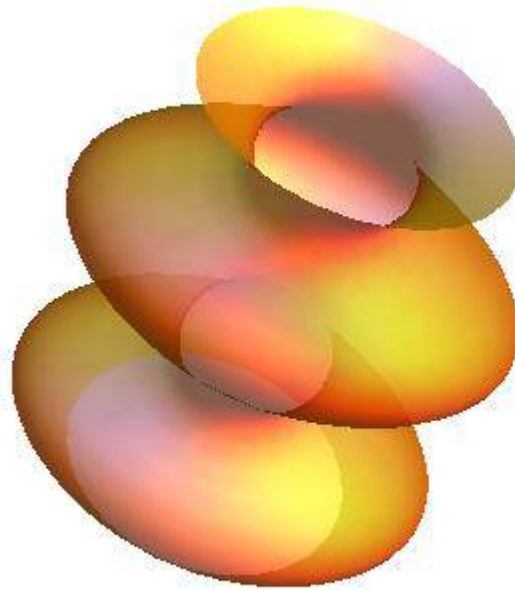
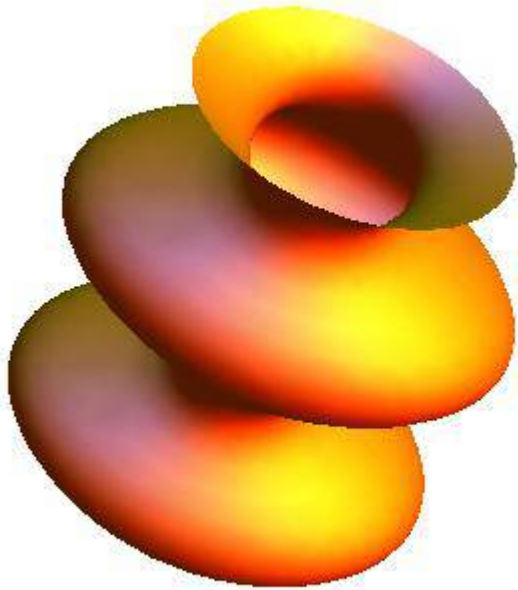
*Analyse* : courbes de Bézier, splines, polynômes, interpolation, textures procédurales (fonctions, paramètres, ...), fractals, convergence de suites, ...

*Physique* : rendu réaliste, modélisation de la nature, matériaux, lumière, ombres, diffusion, réflexion, réfraction (lois de l'optique, ...)

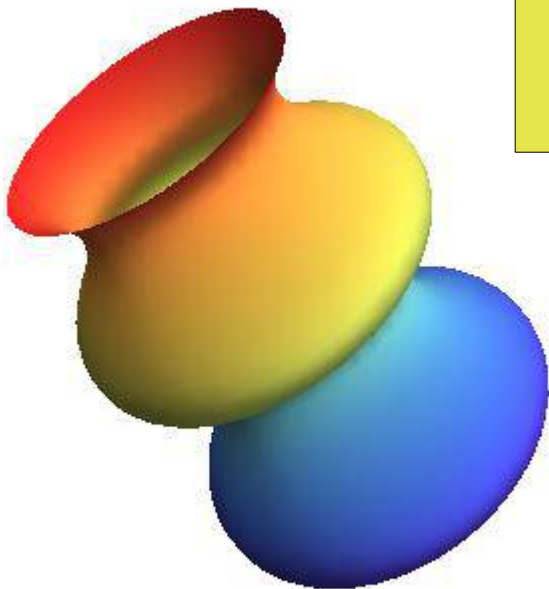
*Thème 1* : Images en trois dimensions...

repères, coordonnées, perspective,  
produits scalaire et vectoriel



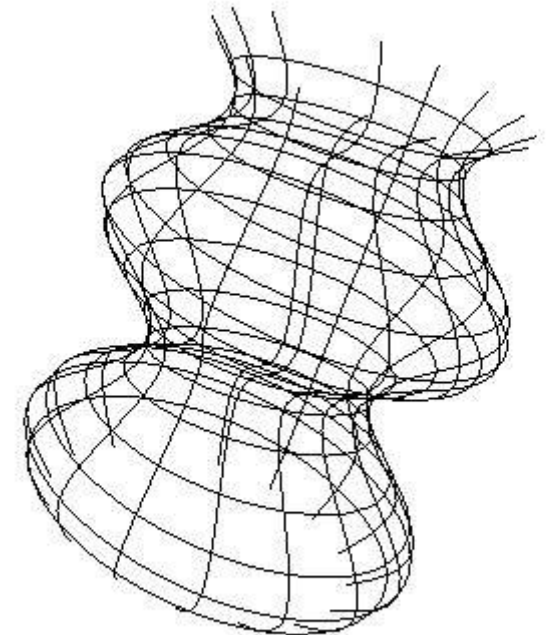
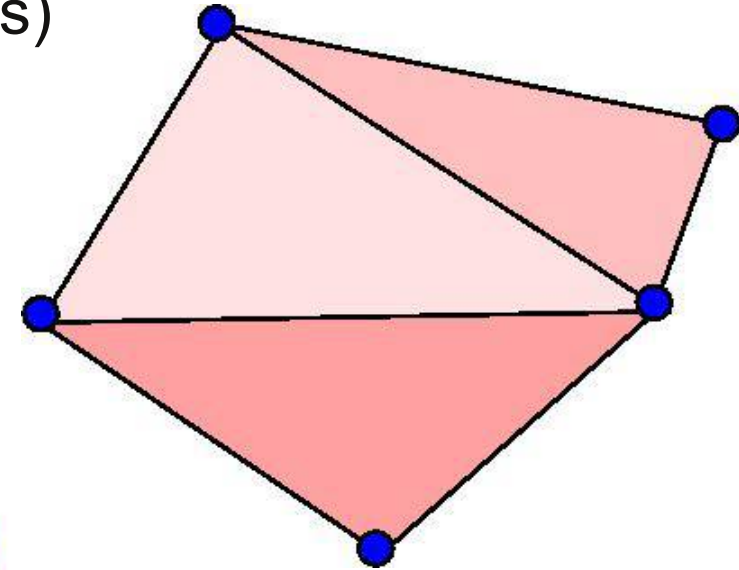
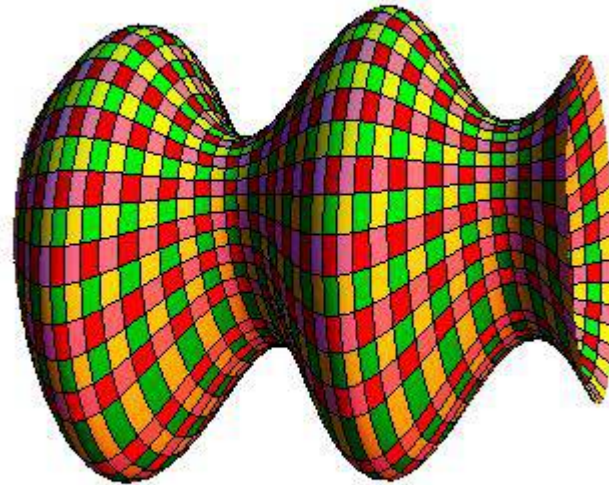


*Comment représenter / manipuler  
dans la mémoire d'un ordinateur un objet 3D ?*



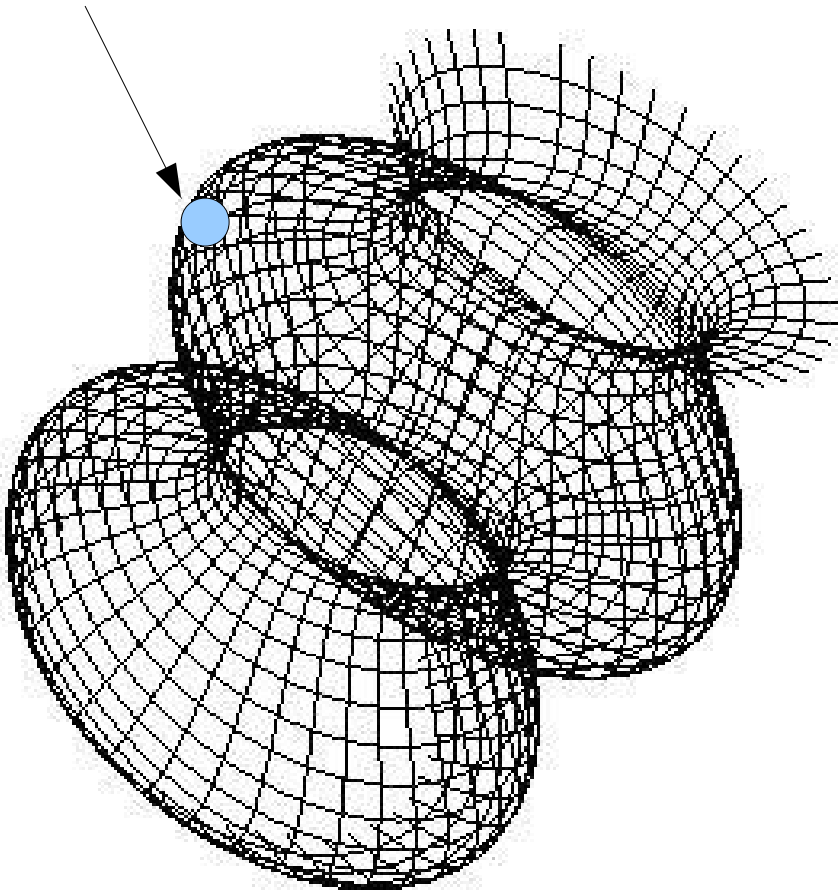
- 1)** concept / modèle, liste de **points** et de **facettes**, *structure de données*
- 2)** *affichage & animation*

*Une solution* : un objet est constitué de facettes élémentaires  
(triangles, rectangles, trapèzes)



*Ici*, 2 paramètres pour décrire une surface

$$P(u,v) = ( (2+\sin(2u)) \cos(v), (2+\sin(2u)/2) \sin(v), u )$$



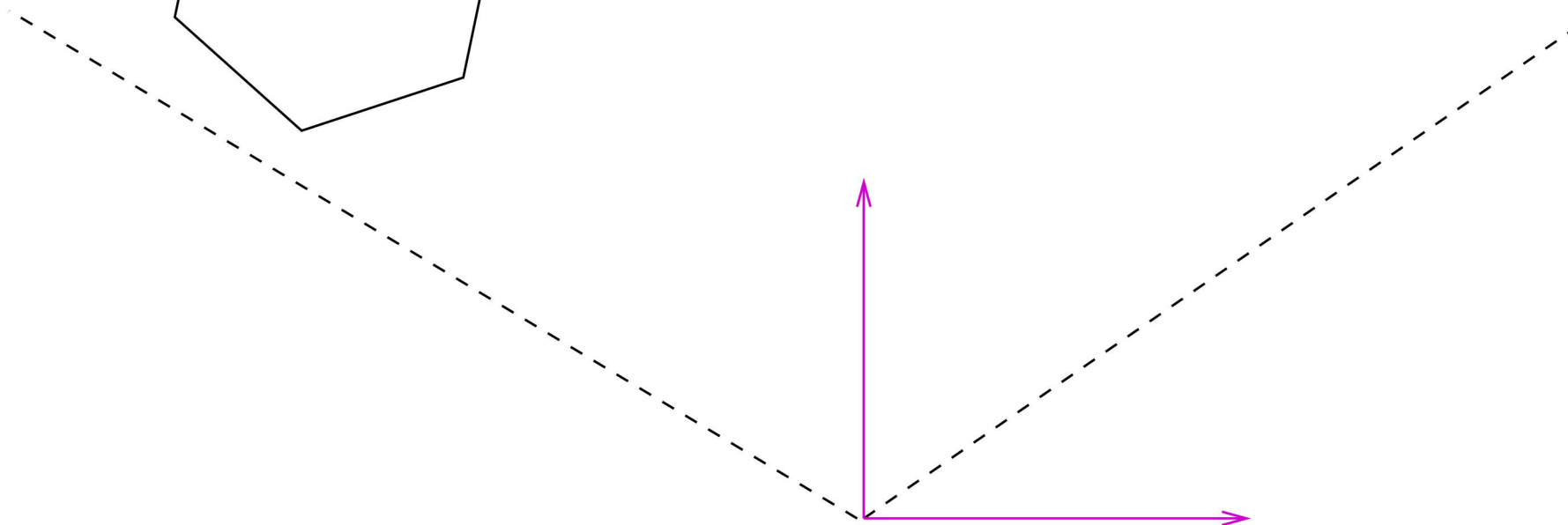
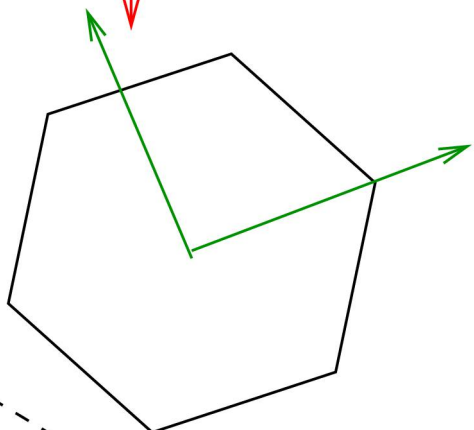
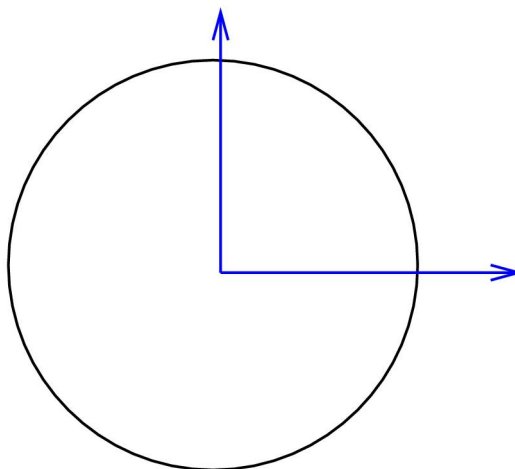
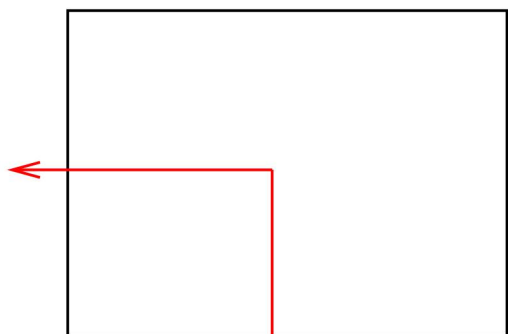
..., (1.0806, 1.68294, 0.),  
(-0.832294, 1.81859, 0.),  
(-1.97998, 0.28224, 0.),  
(2.9093, 0., 1.),  
(1.5719, 2.06552, 1.),  
(-1.21069, 2.23201, 1.),  
(-2.88018, 0.3464, 1.),  
(1.2432, 0., 2.),  
(0.671702, 1.36453, 2.),  
(-0.517353, 1.47452, 2.),  
(-1.23076, 0.22884, 2.),  
(1.72058, 0., 3.),

...

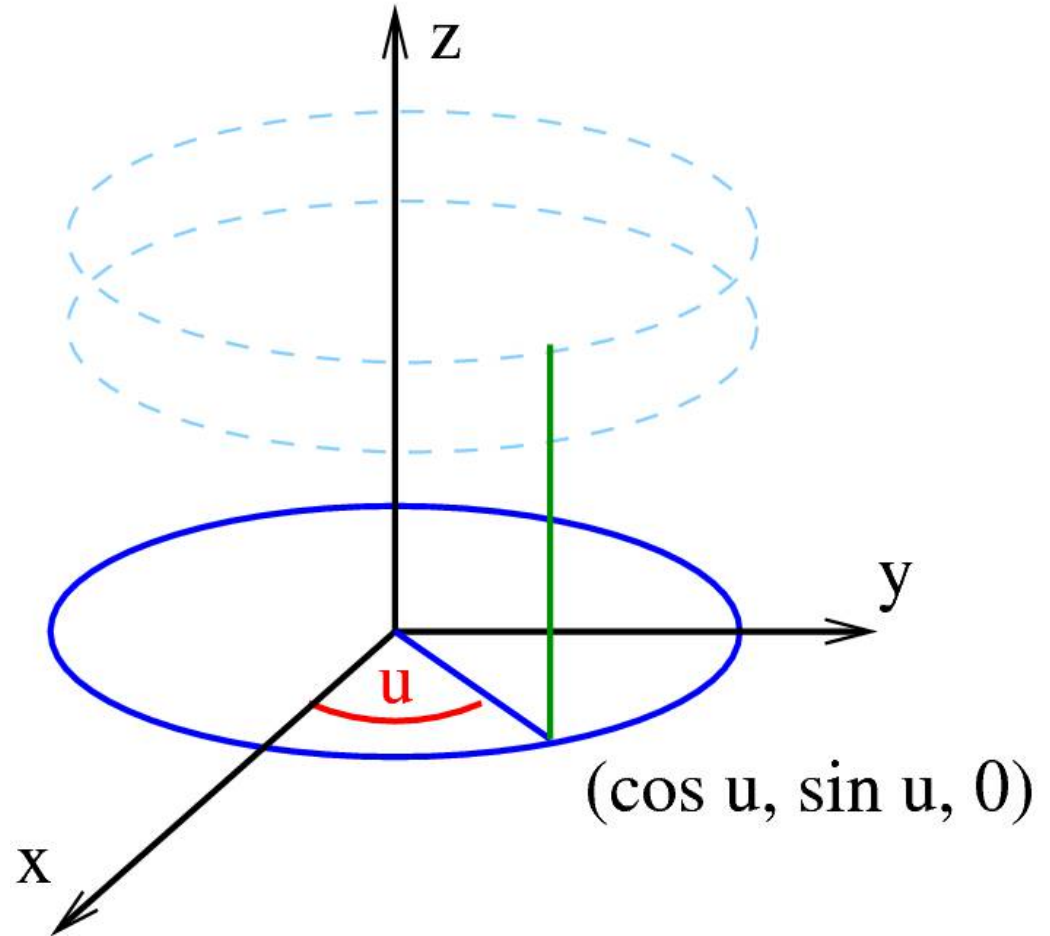
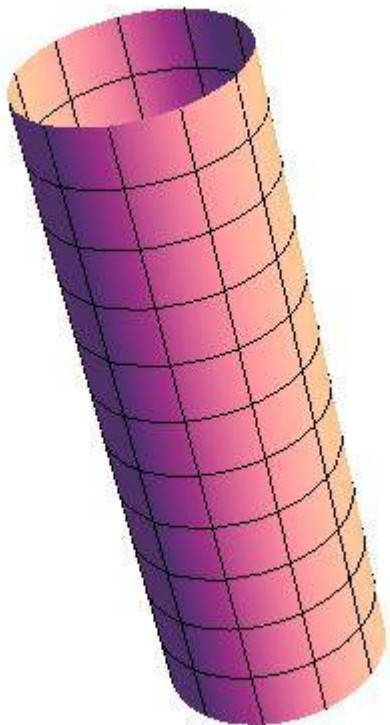
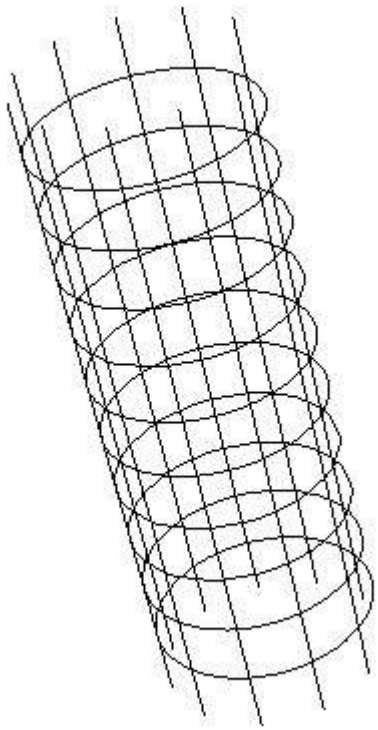
**Dans un repère, tout point possède des coordonnées**

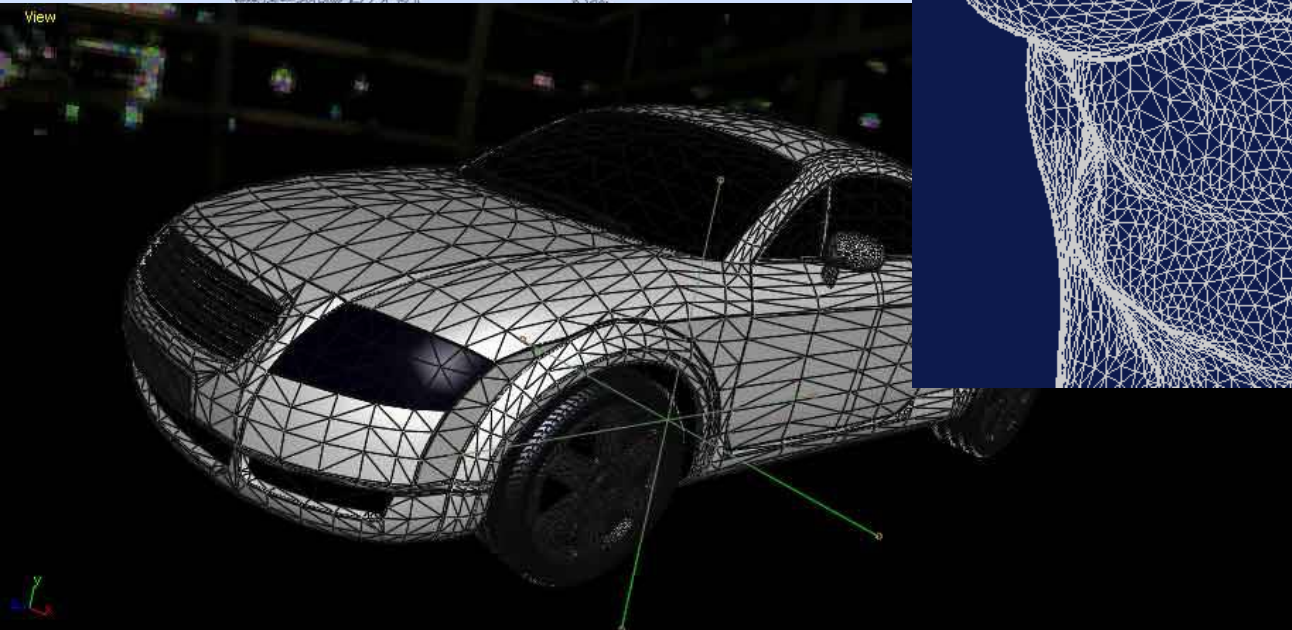
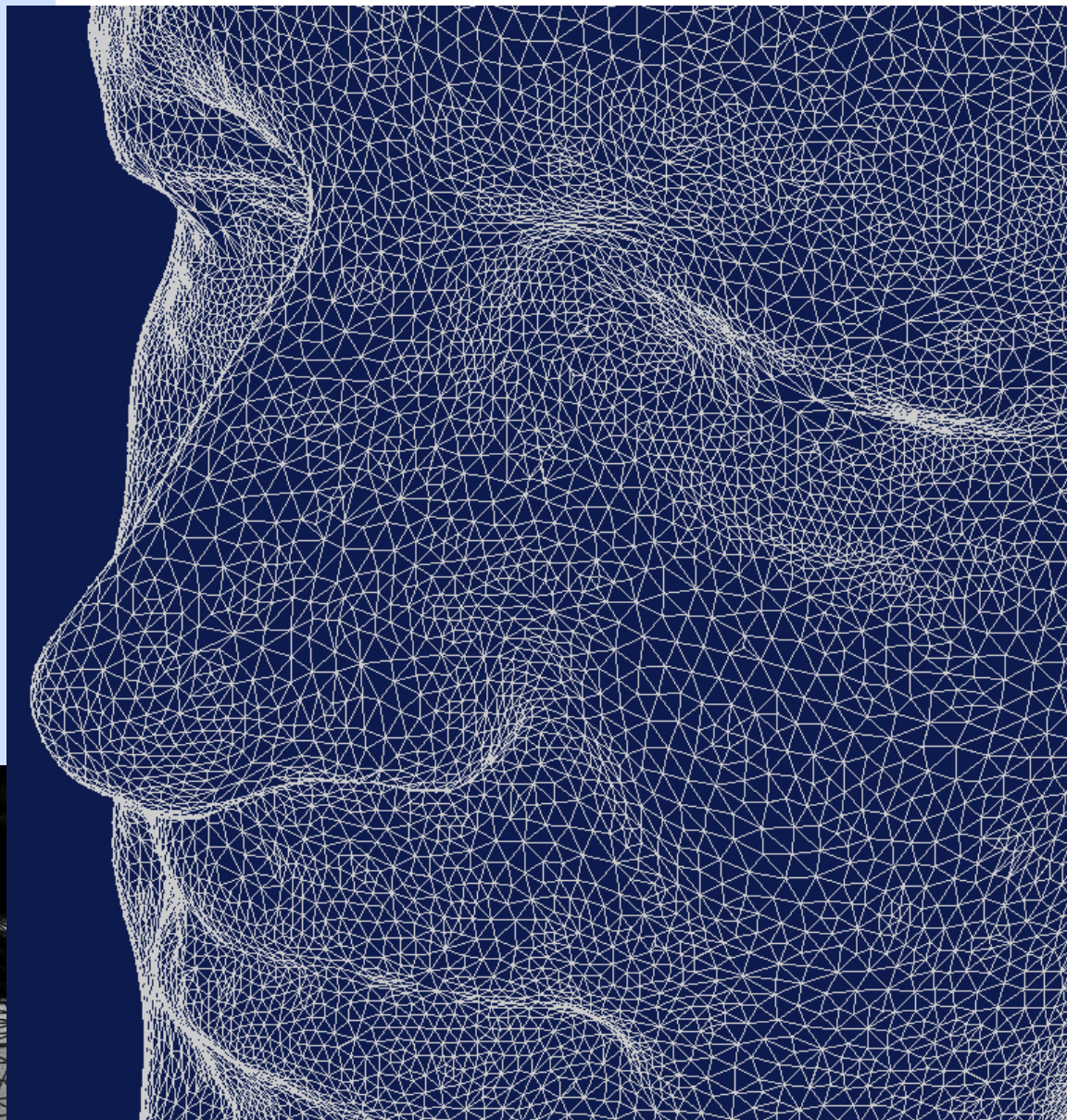
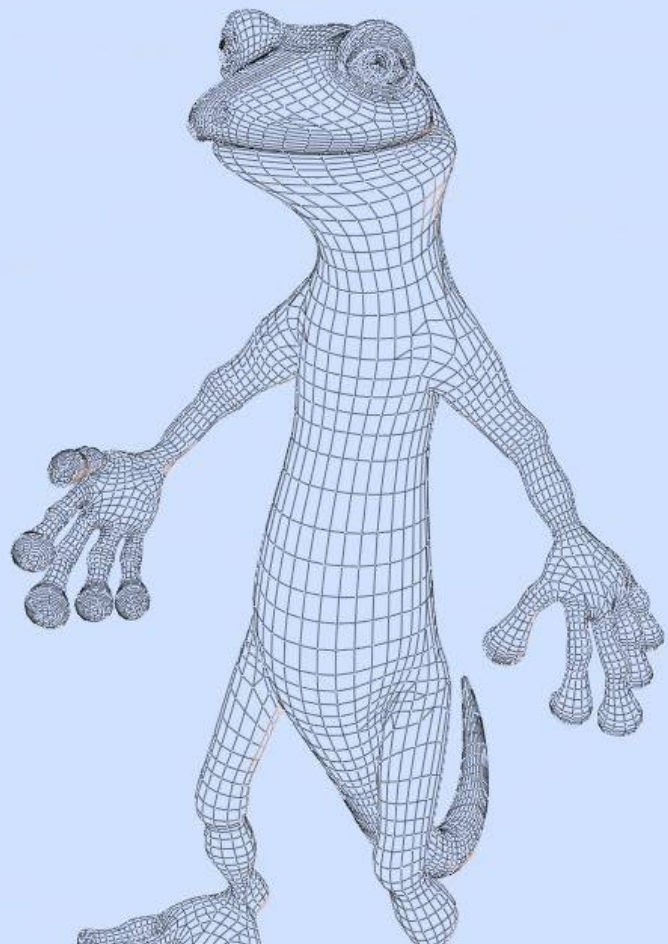
Système de coordonnées local vs. global (changement de repère)



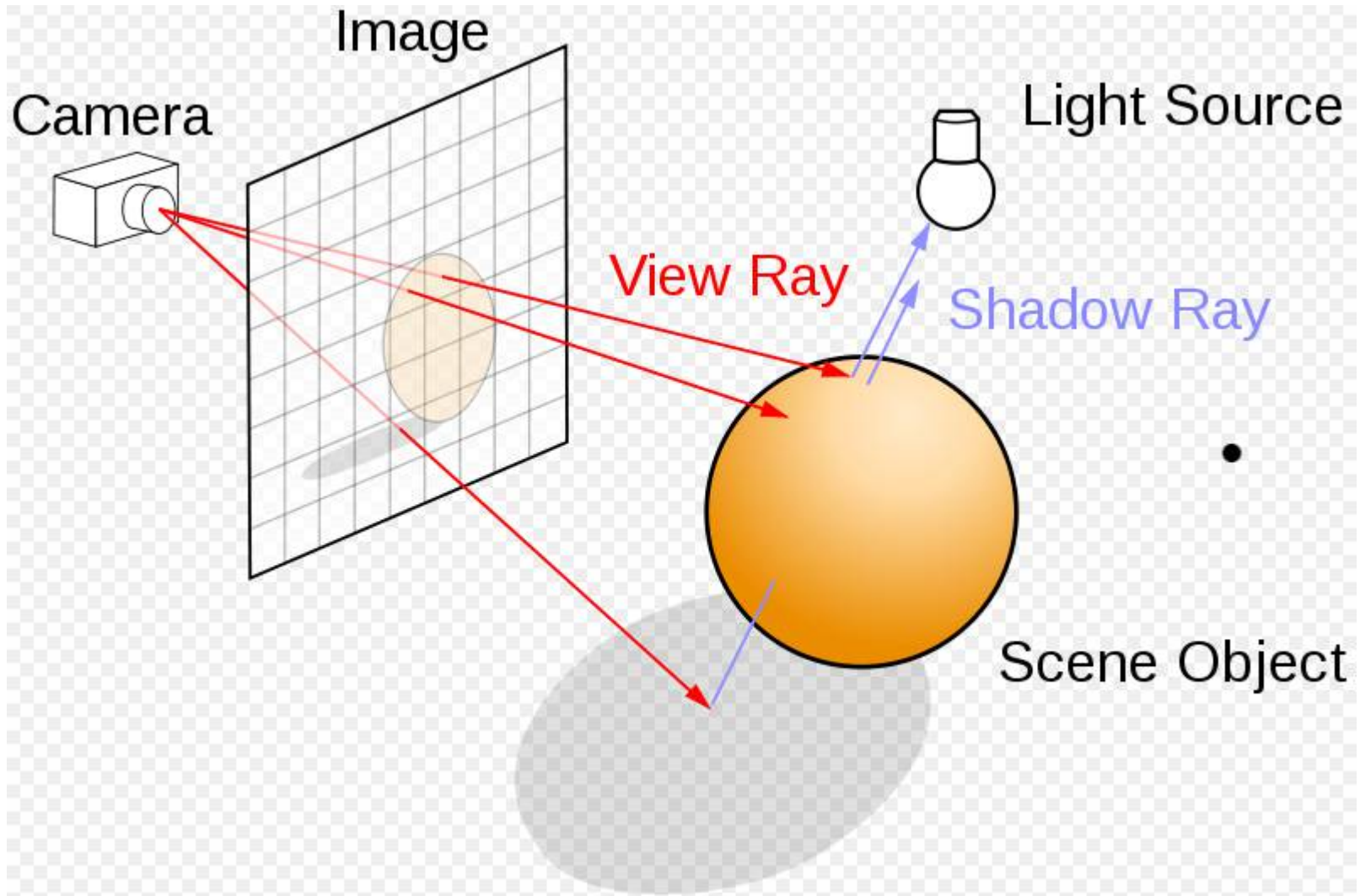


$$P(u,v)=(\cos(u), \sin(u), v)$$

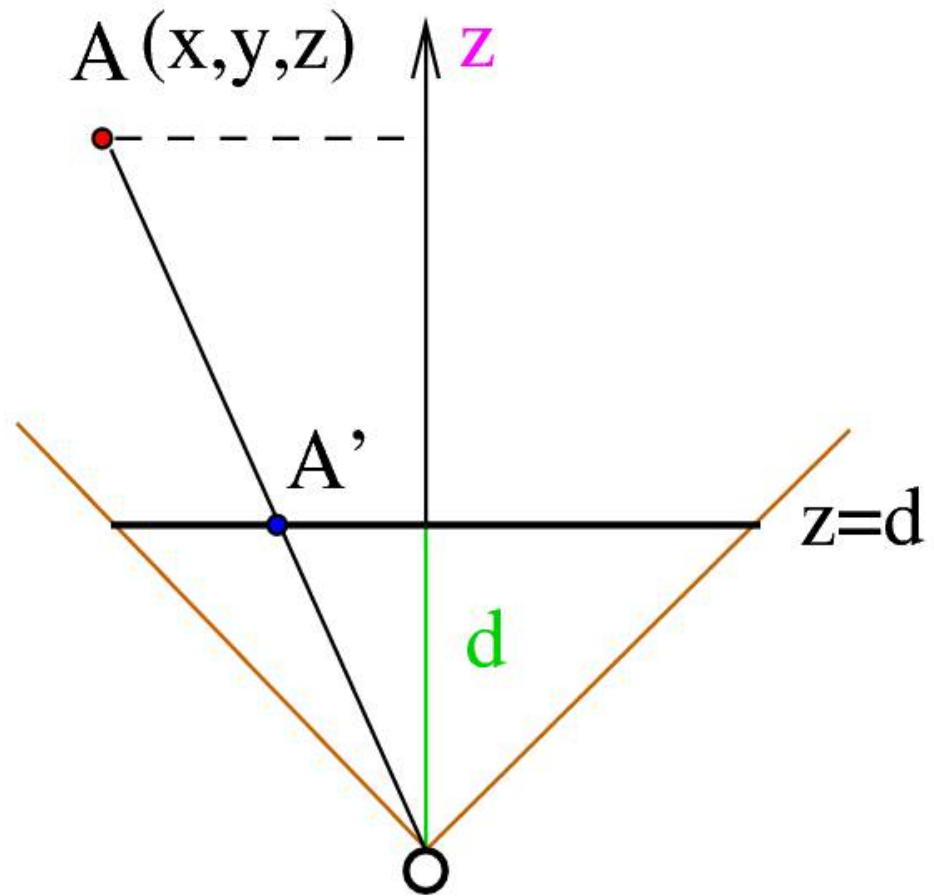
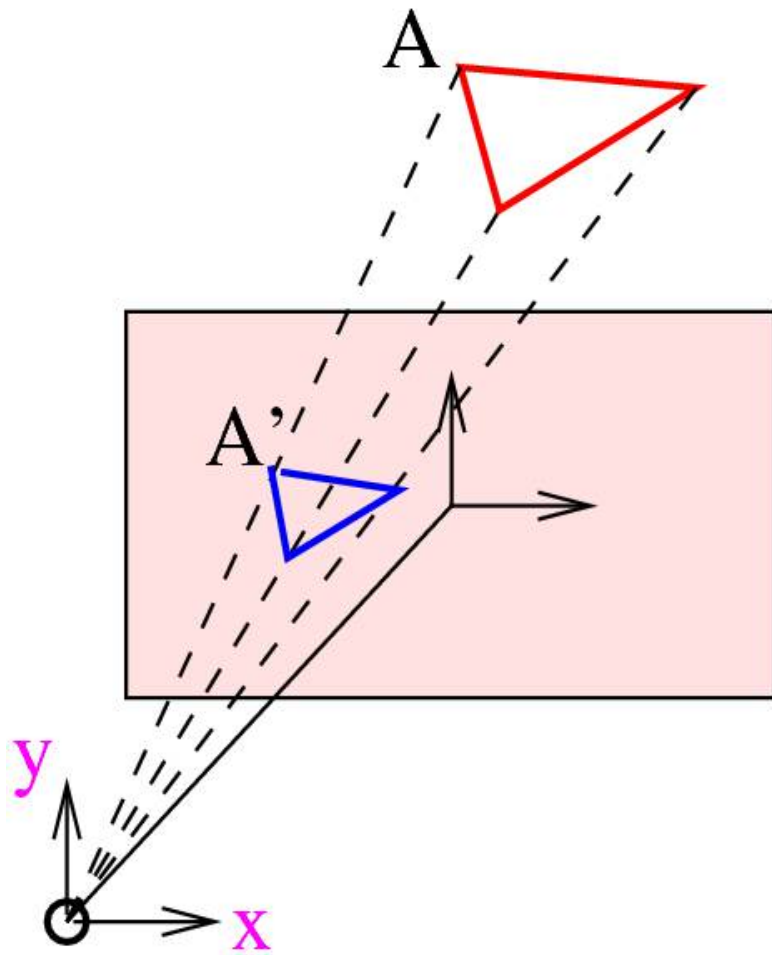




## Principe du lancer de rayons (ray tracing)



Calcul de projection en perspective...



$$\frac{x'}{d} = \frac{x}{z}, \quad \frac{y'}{d} = \frac{y}{z}$$

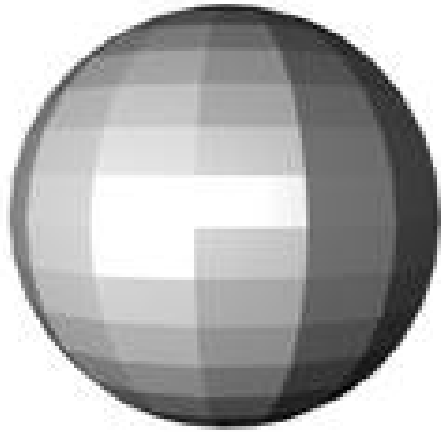
Pour une scène dont les objets sont constitués de facettes

Lancer d'un rayon

Intersection d'une droite et d'un plan

Elimination des parties cachées

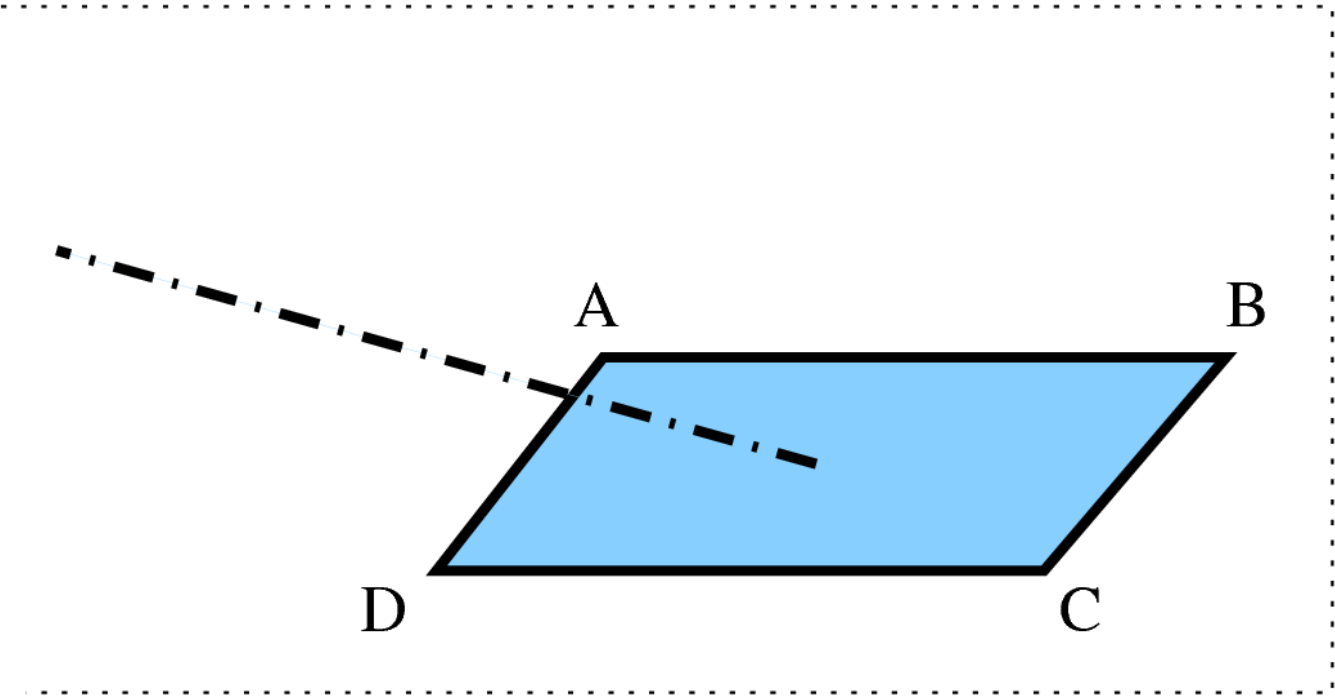
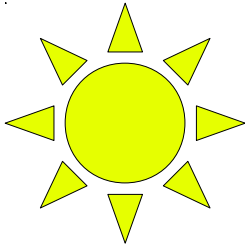
Calcul de distances (*algorithme du z-buffer*)



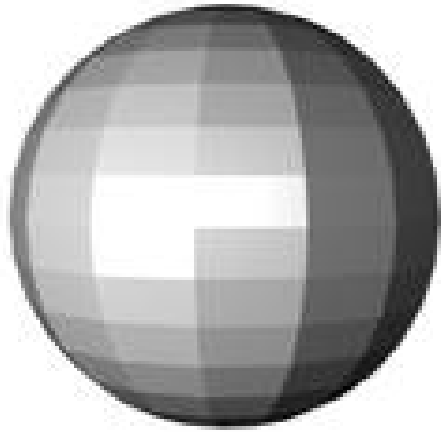
# Un premier modèle d'illumination

4 points : A, B, C, D

Source lumineuse

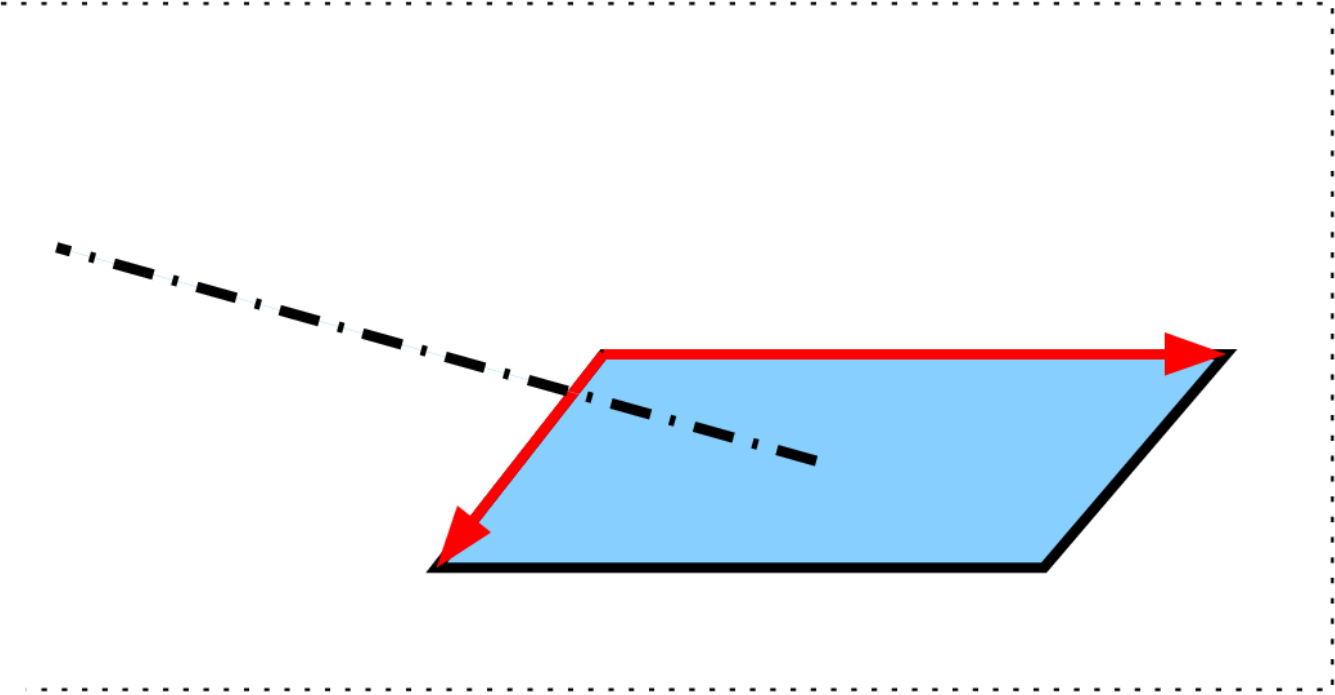


facette

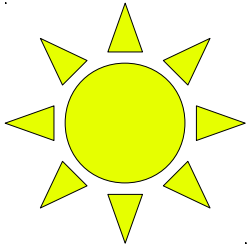


# Un premier modèle d'illumination

2 vecteurs



Source lumineuse



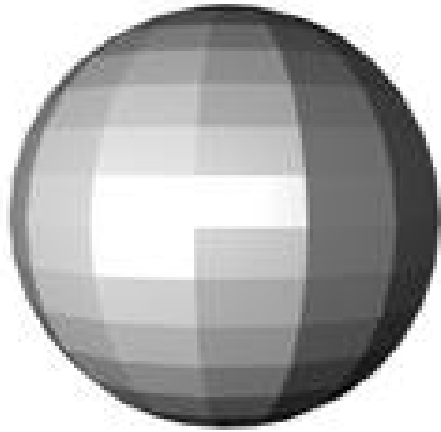
$$\vec{AB}, \vec{AD}$$

$$(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

$$(d_1 - a_1, d_2 - a_2, d_3 - a_3)$$

facette

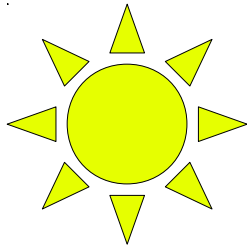




## Un premier modèle d'illumination

Un vecteur normal ou orthogonal (produit vectoriel)

Source lumineuse

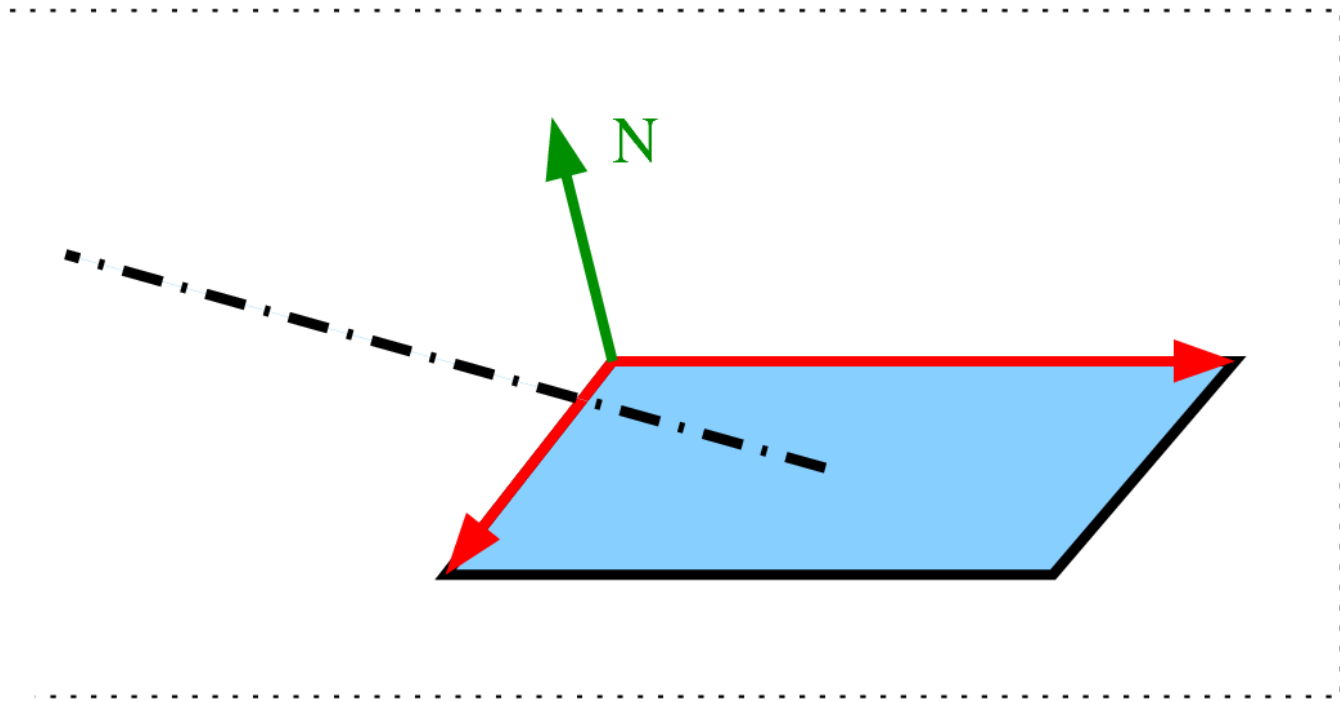


$$\vec{AB} \wedge \vec{AD}$$

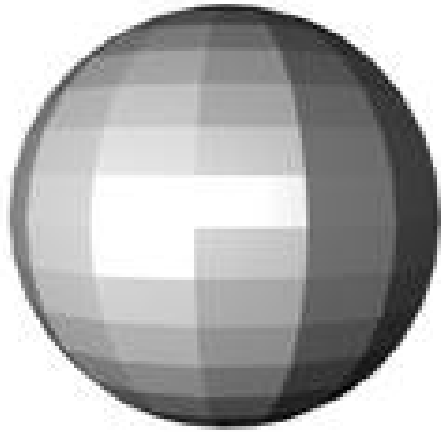
$$(a, b, c)$$

$$(d, e, f)$$

$$(bf - ec, cd - af, ae - bd)$$



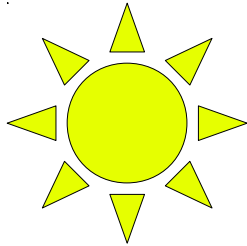
facette



## Un premier modèle d'illumination

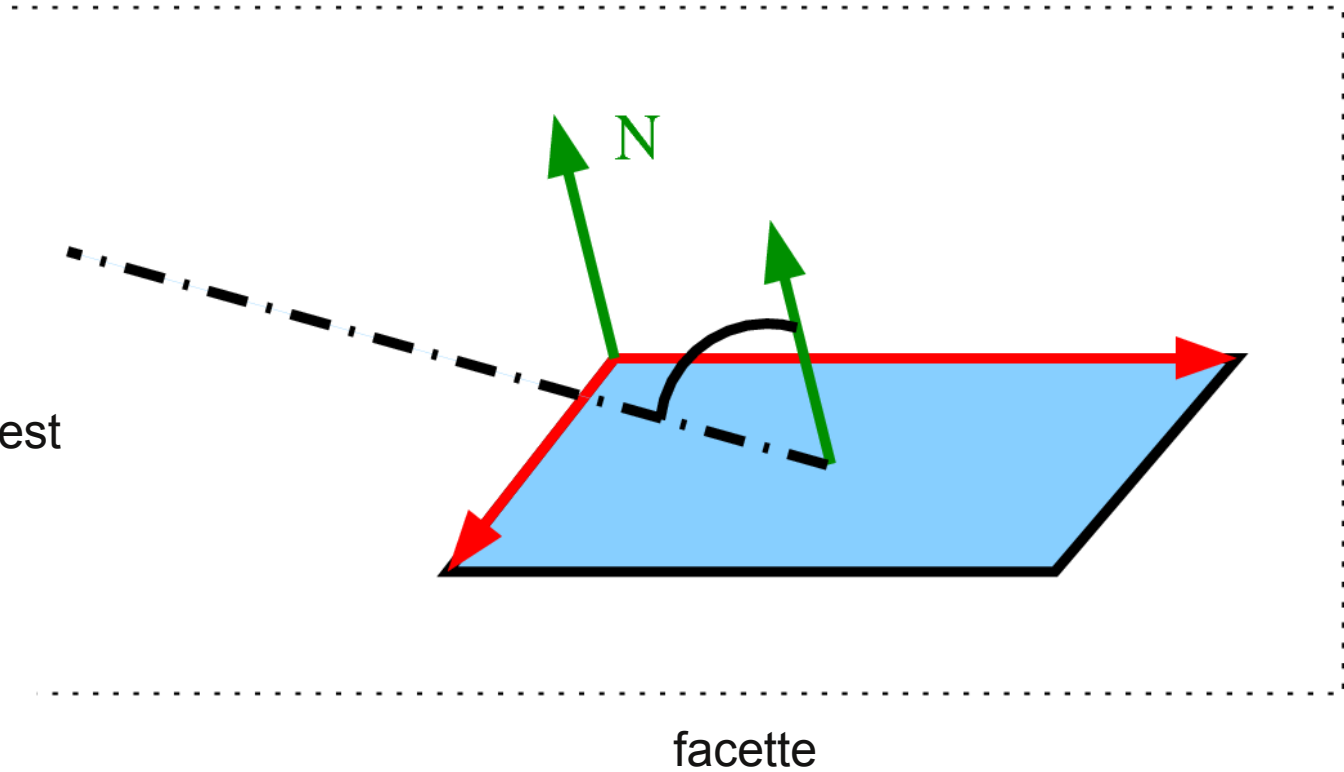
Angle entre deux vecteurs ? vecteur normal à la facette  
et vecteur dirigé vers la source lumineuse

Source lumineuse



L'intensité lumineuse renvoyée est proportionnelle à

$$\cos \alpha = \frac{\vec{N} \cdot \vec{L}}{|\vec{N}| |\vec{L}|}$$



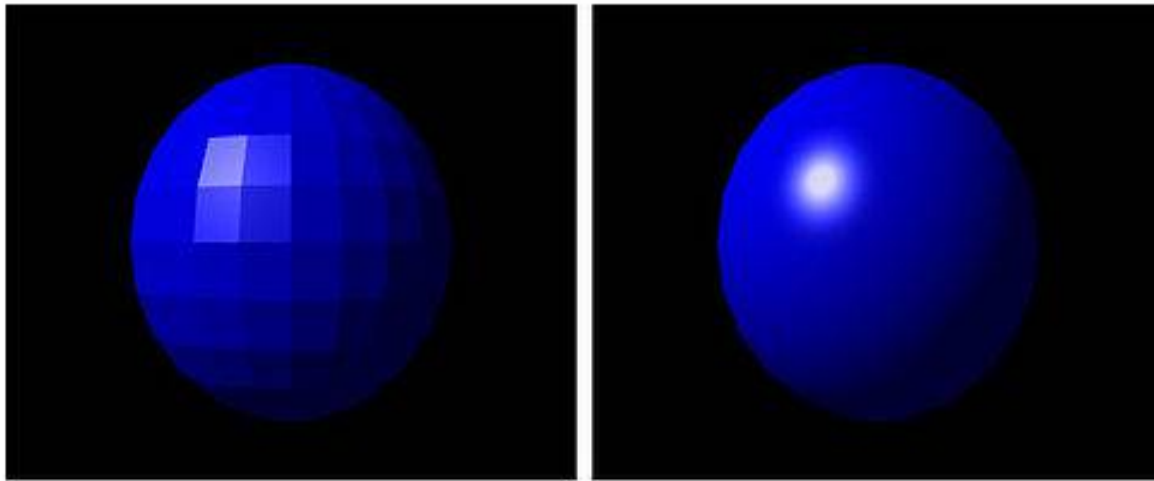
- Augmenter le nombre de facettes, coûteux ;-)
- Lissage et interpolation, les modèles les plus connus :

**H. Gouraud**, Continuous shading of curved surfaces,  
*IEEE Transactions on Computers*, **C-20** (1971) 623–629.

On interpole l'intensité lumineuse renvoyée à partir de celle aux sommets

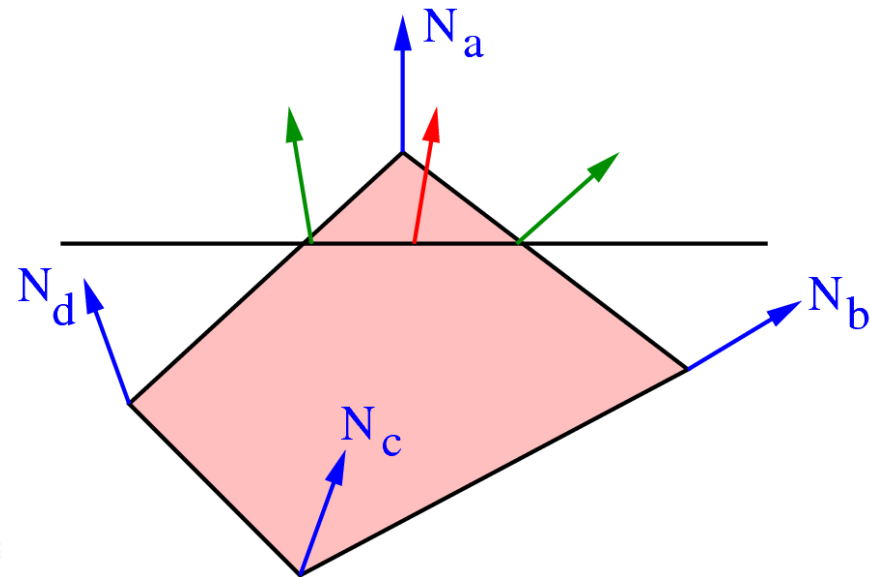
**B. T. Phong**, Illumination for computer generated pictures,  
*Communications of ACM* **18** (1975), no. 6, 311–317.

On interpole le vecteur normal à partir des normales aux sommets



FLAT SHADING

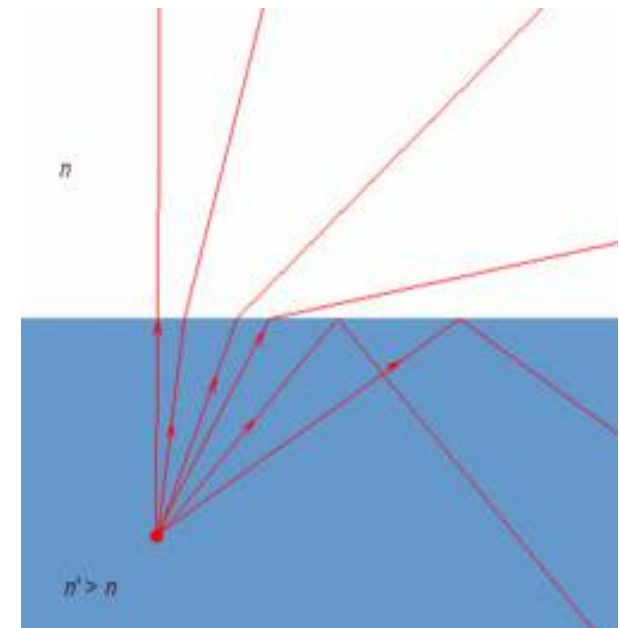
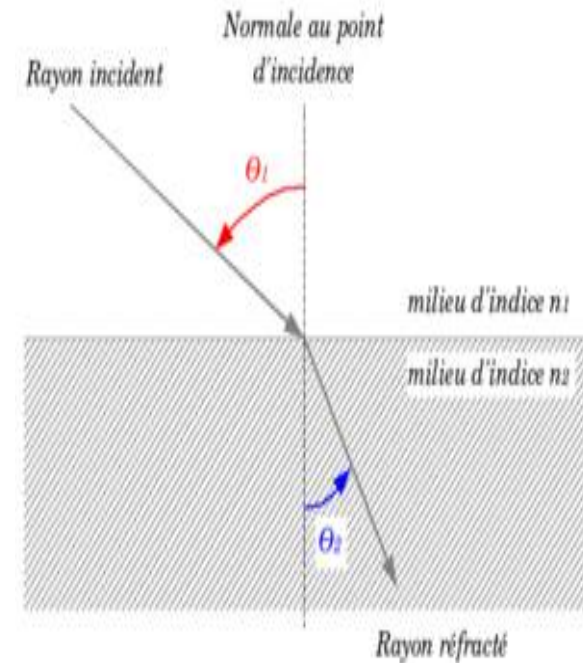
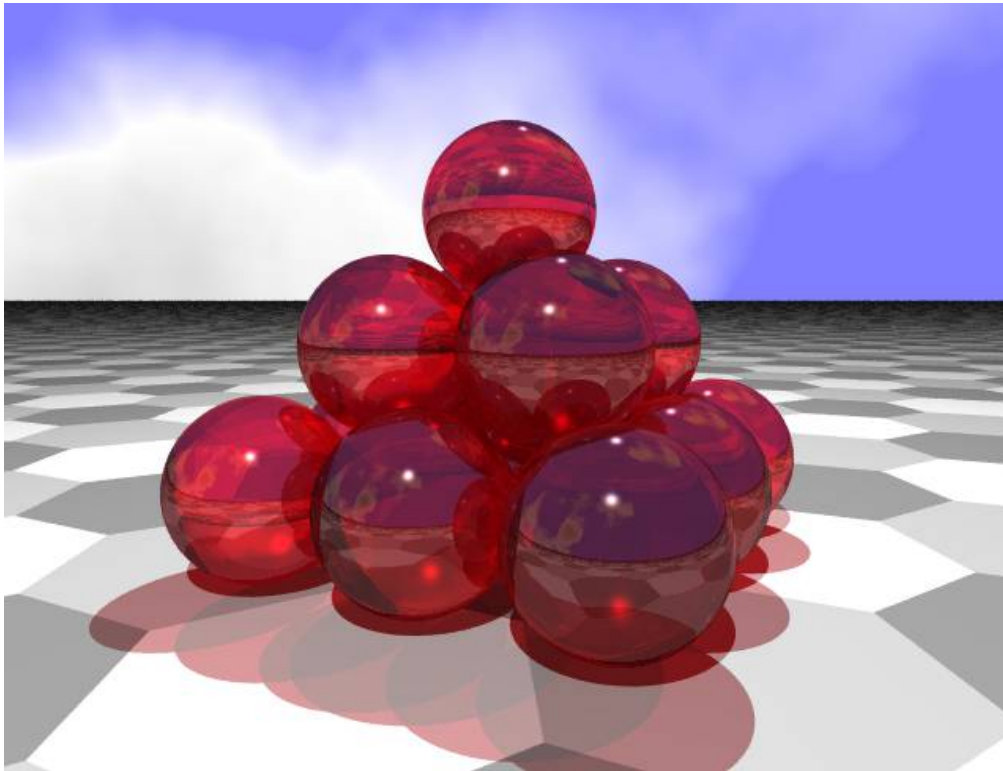
PHONG SHADING



Il faut suivre le trajet d'un rayon en fonction du milieu traversé, des sources de lumière, etc.

Loi de Snell-Descartes

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$$



Au-delà d'une certaine inclinaison, les rayons sont réfléchis

## Les outils de modélisation...

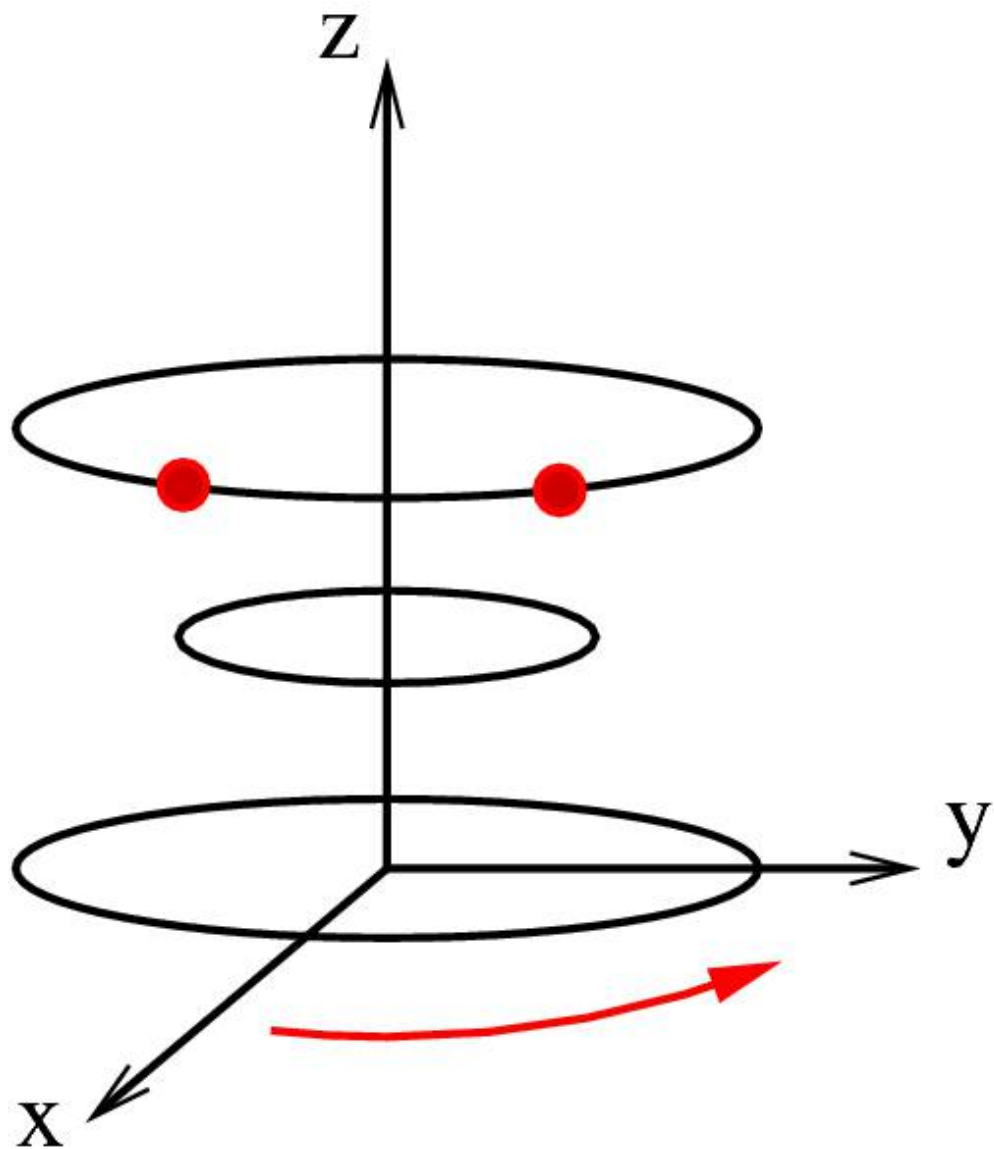


Gaspard Monge (1746-1818)  
et la *géométrie descriptive*

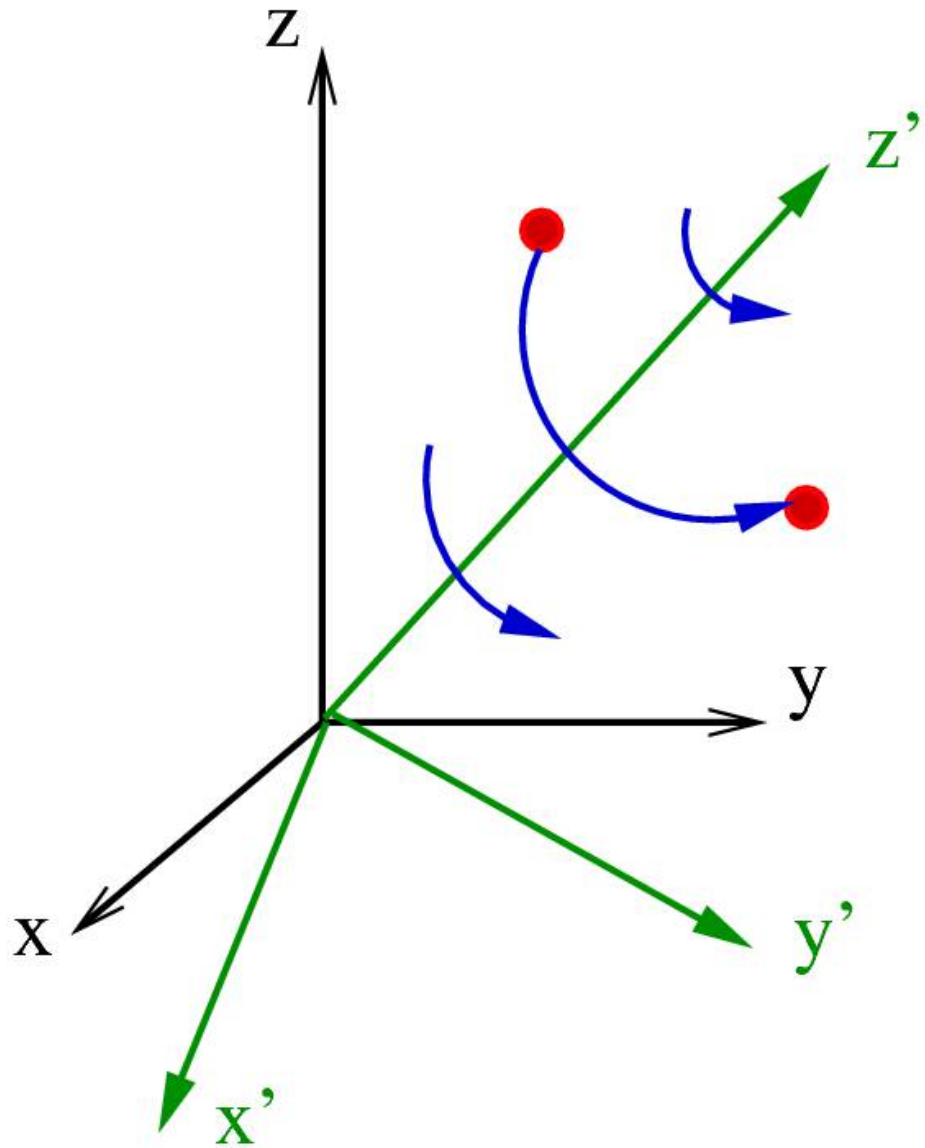


*Thème 2* : Faisons bouger tout ça !

matrices de rotation,  
nombres complexes et quaternions,  
applications affines

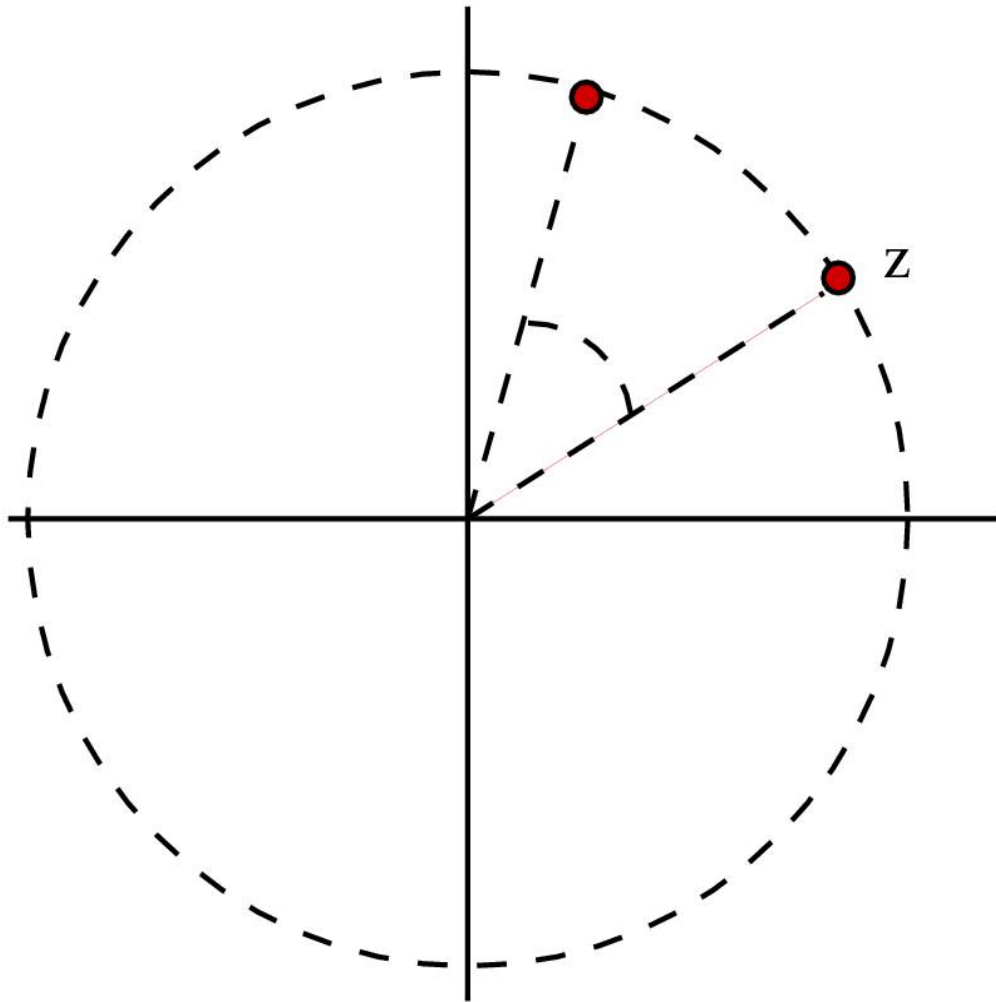


$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$



Pour un axe de rotation quelconque, on peut changer de repère...





$$z \in \mathbb{C}$$

$$z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$z = \rho (\underbrace{\cos \theta + i \sin \theta}_{\text{cis } \theta}) = \rho e^{i\theta}$$

$$z \cdot e^{i\theta}$$

La multiplication par un nombre complexe de module 1 correspond, dans le plan, à une rotation

Et dans l'espace ?

$\mathbb{H}$

$$a + ib + jc + kd, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j,$$

$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j,$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$



William Rowan Hamilton  
(1805-1865)

Algèbre non commutative (tout comme les rotations de l'espace...)

Il existe une “forme polaire”

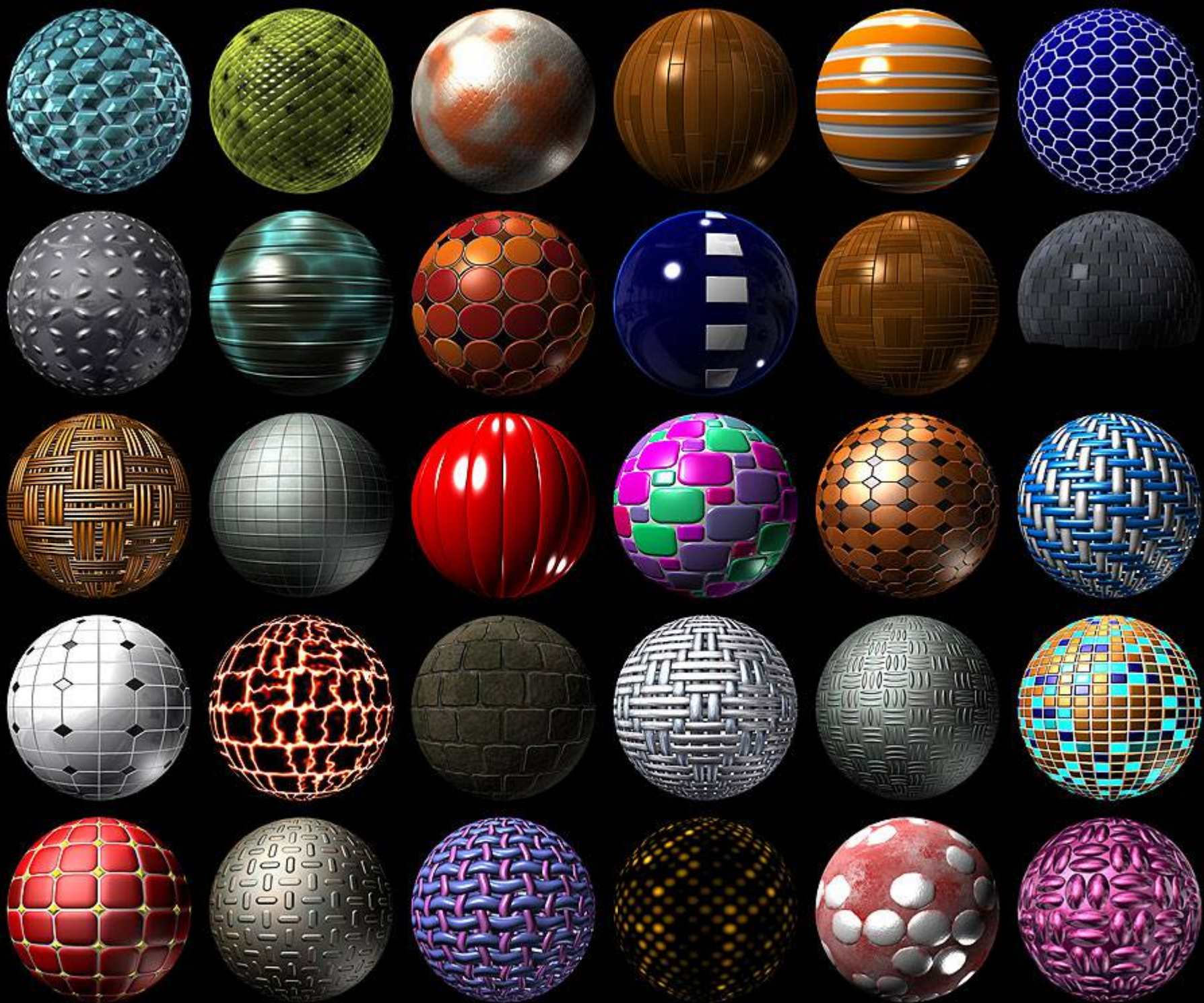
$$\rho \cos \theta + \rho \sin \theta U$$

où  $U$  est un quaternion unitaire de composante réelle nulle

*Thème 3 : textures*

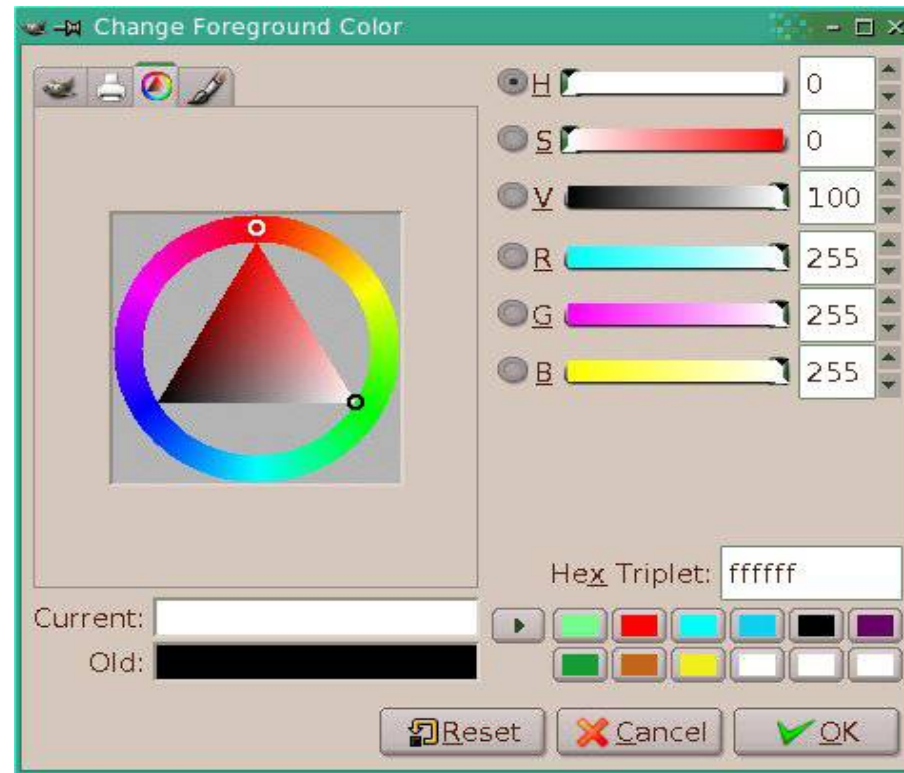
Étude de fonctions



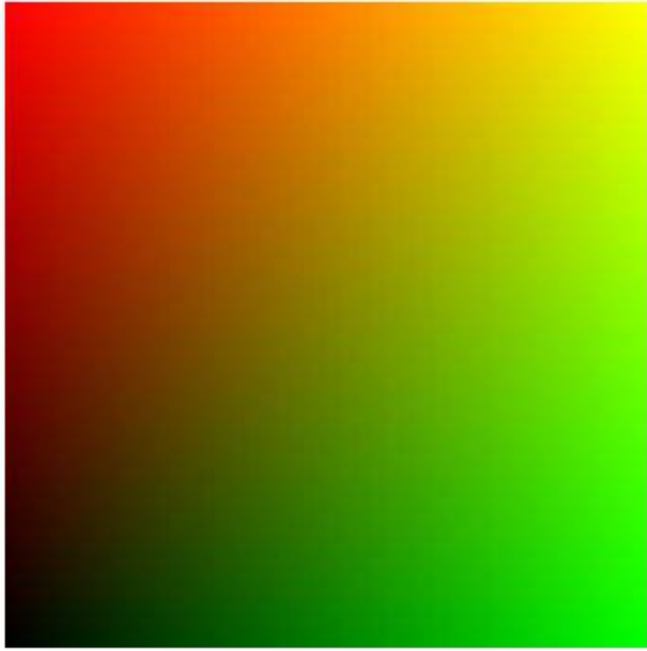


On peut faire du **plaquage de texture** (à partir d'un fichier image)  
Nécessite de stocker de gros fichiers, lourd à manipuler  
Si l'objet est complexe, on peut difficilement plaquer...

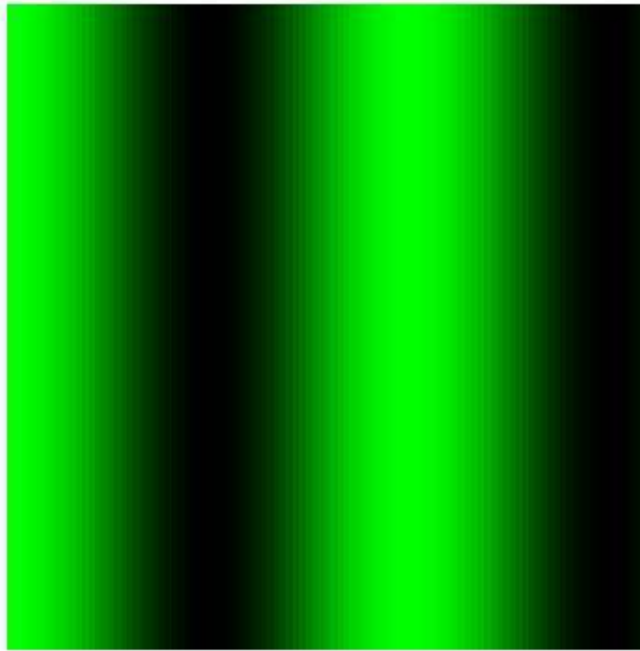
On peut définir une **fonction** qui à tout point de l'objet associe une couleur  
Fonction définie en tout point, possibilités d'animation



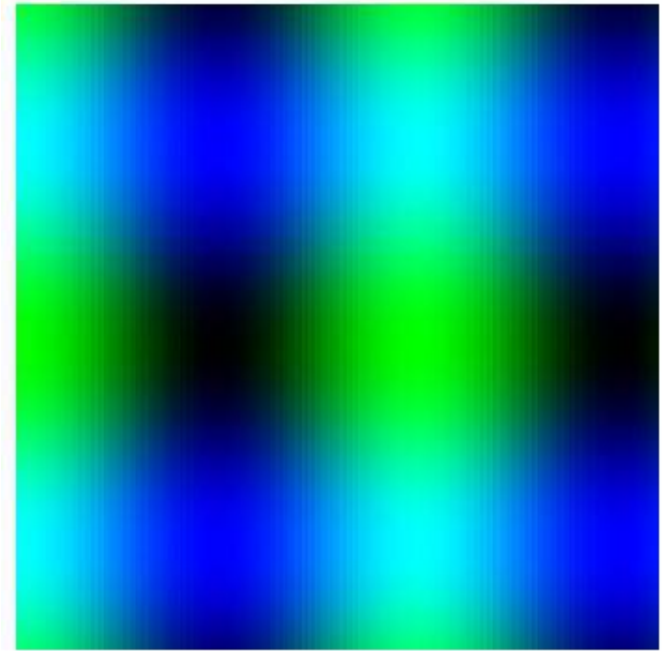
Un exemple en 2 dimensions :



$$\begin{aligned}R(x,y) &= y \\V(x,y) &= x \\B(x,y) &= 0\end{aligned}$$

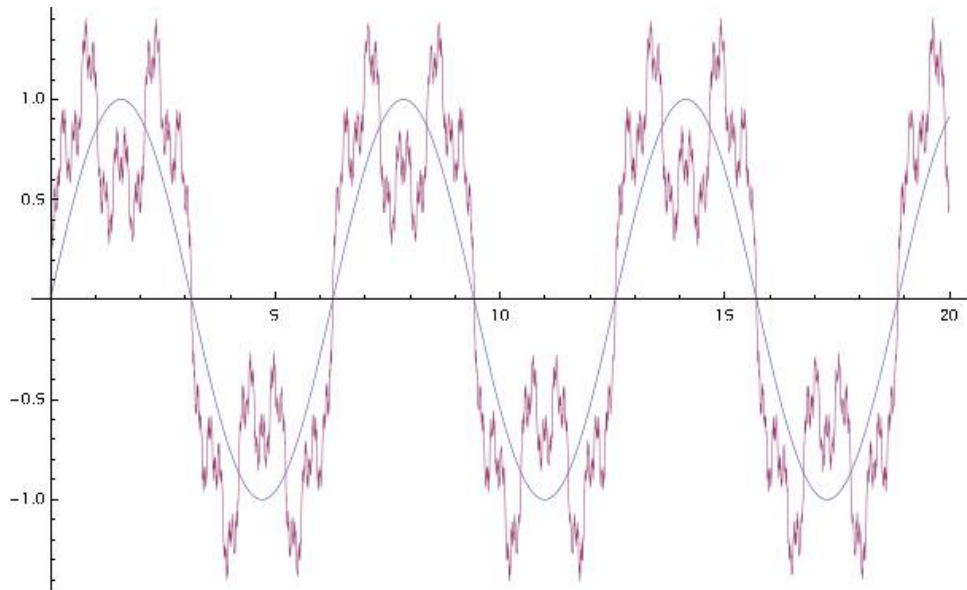
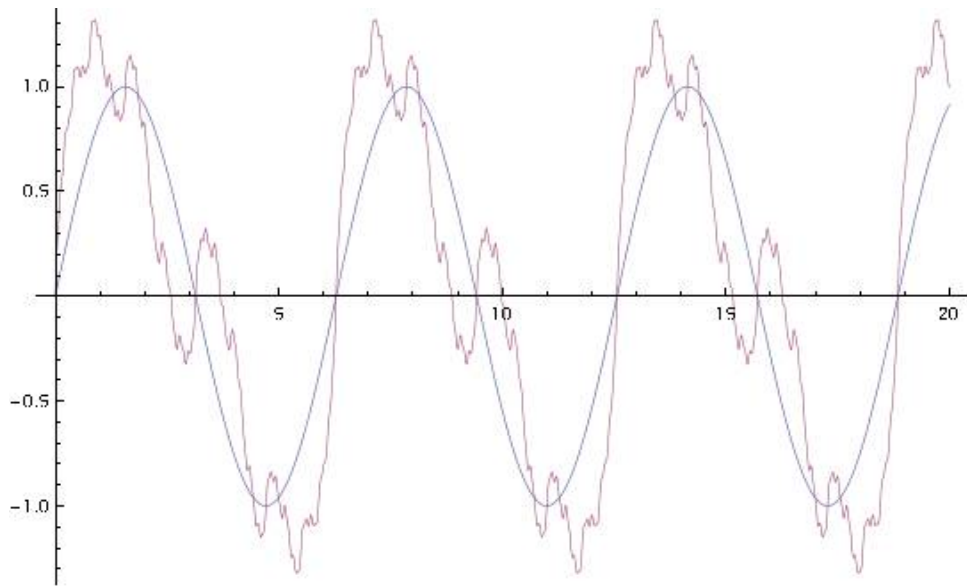


$$\begin{aligned}R(x,y) &= 0 \\V(x,y) &= (1+\cos(x))/2 \\B(x,y) &= 0\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}R(x,y) &= 0 \\V(x,y) &= (1+\cos(x))/2 \\B(x,y) &= (1+\sin(y))/2\end{aligned}$$

Ajouter du bruit...



Ken Perlin, An Image Synthesizer  
*Computer Graphics*, **19** (1985), 287-296.

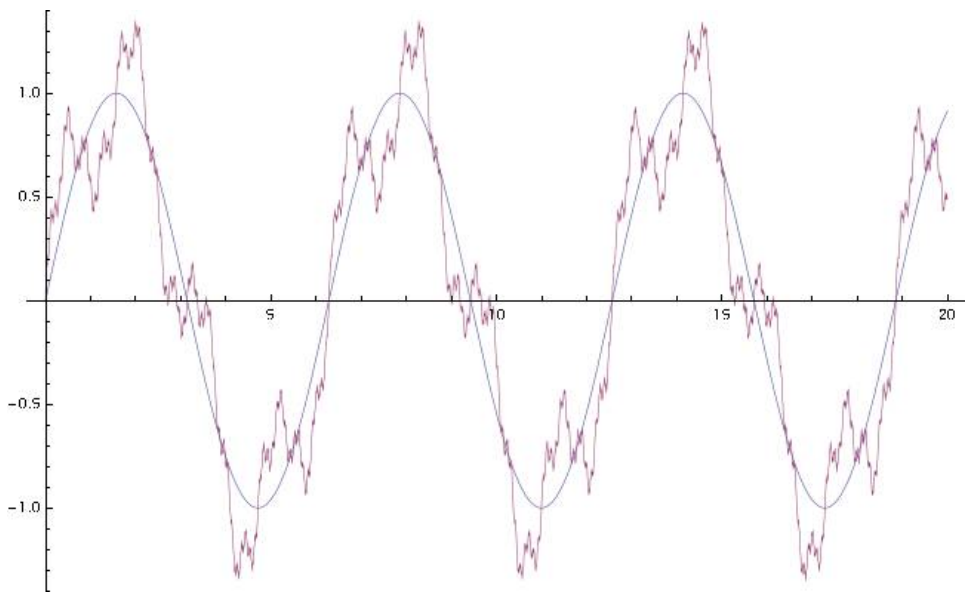
$$\sum_{i=0}^6 \frac{\sin(2^i x)}{2^i}$$



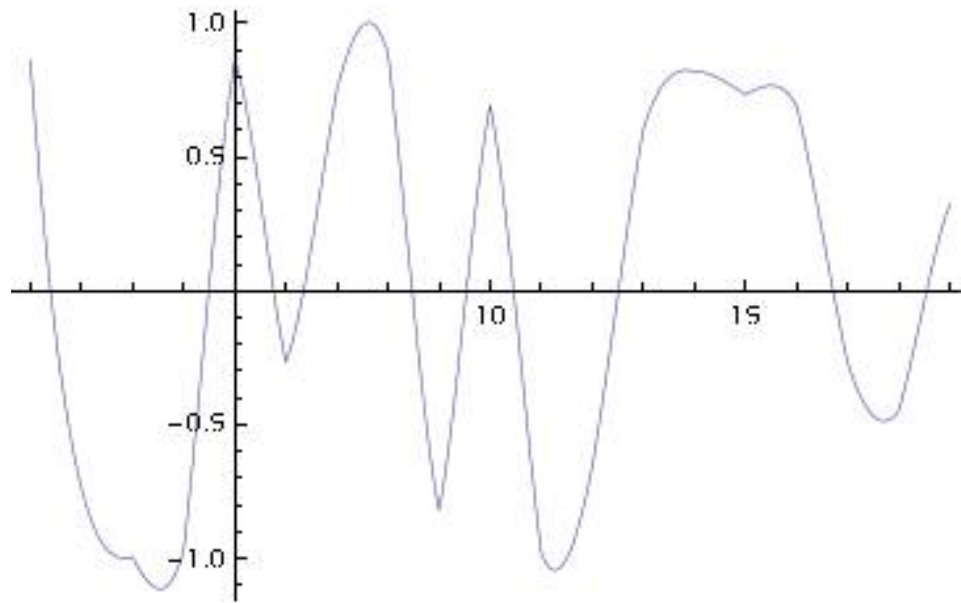
En dimension 1,2,3,4 !

$$\sum_{i=0}^6 \frac{\sin(3^i x)}{2^i}$$

D. Ebert *et al.*, *Texturing and Modeling, A Procedural Approach*, AP Professional, Cambridge, 1998.

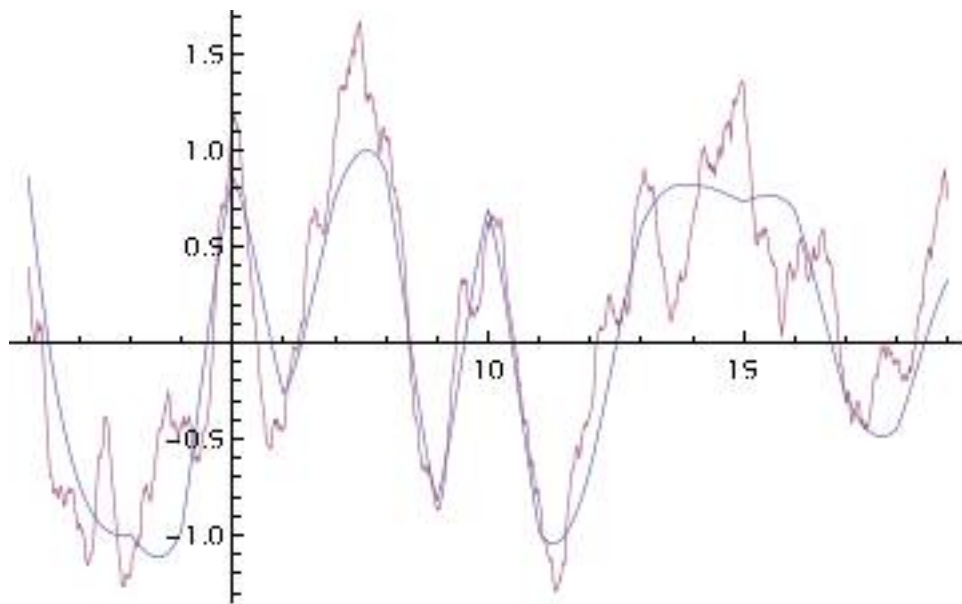


$$\sum_{i=0}^6 \frac{\sin(4^i x)}{3^i}$$

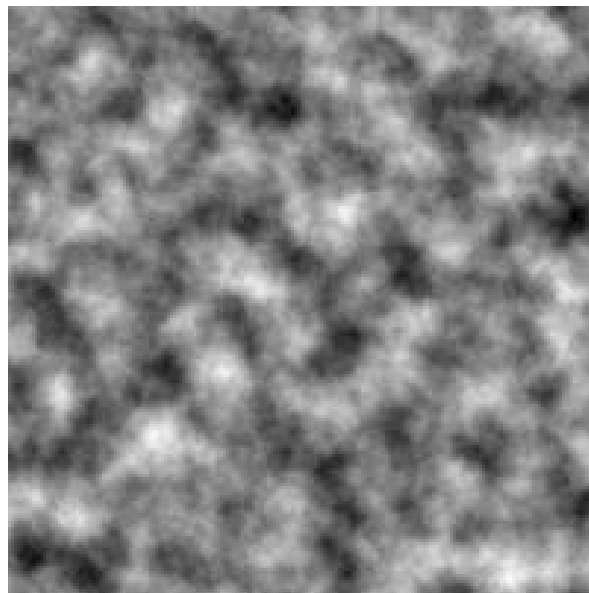


Interpolation de points  
aléatoires

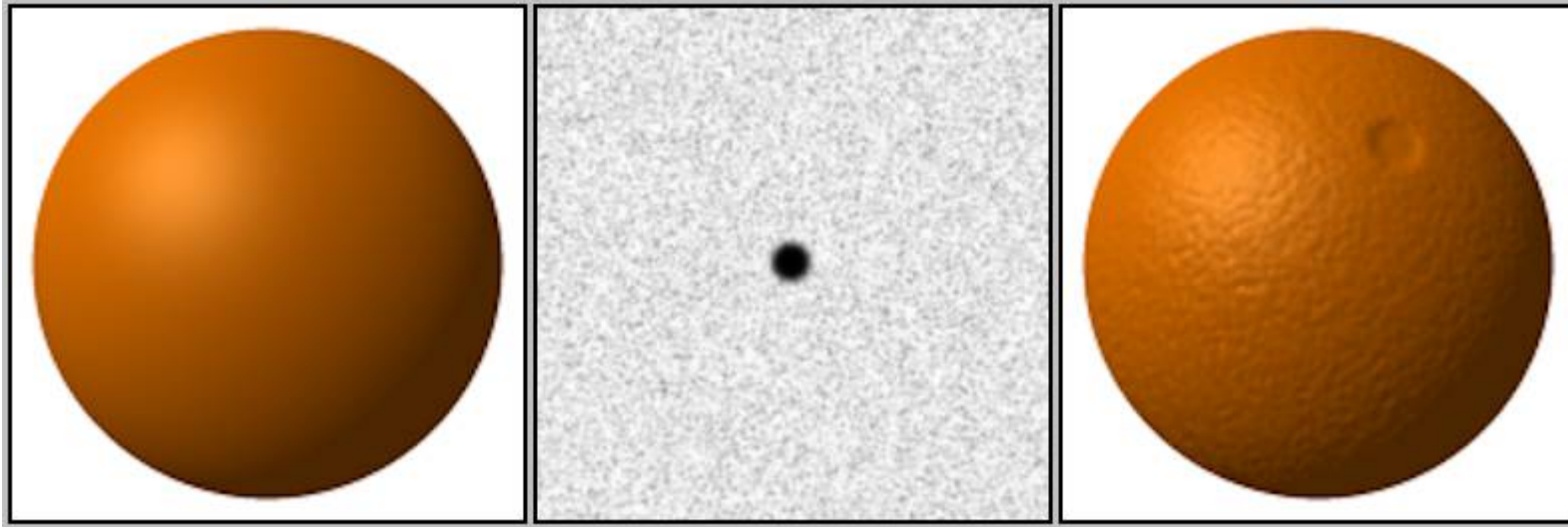




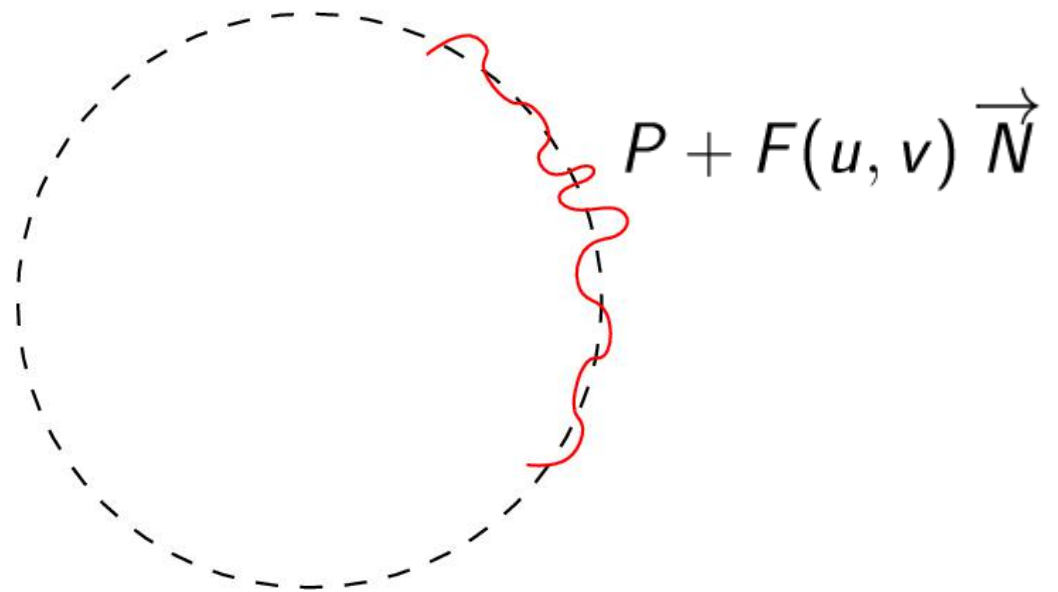
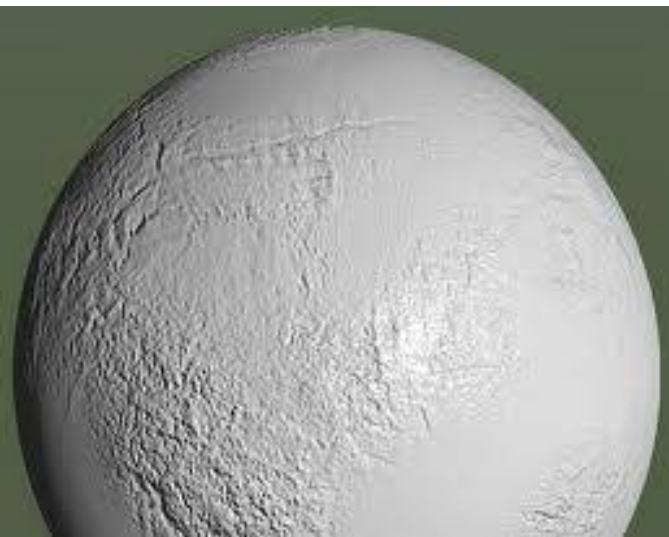
$$\sum_{i=0}^6 \frac{F(2^i x)}{2^i}$$



# Le "bump mapping" ou carte de déformation

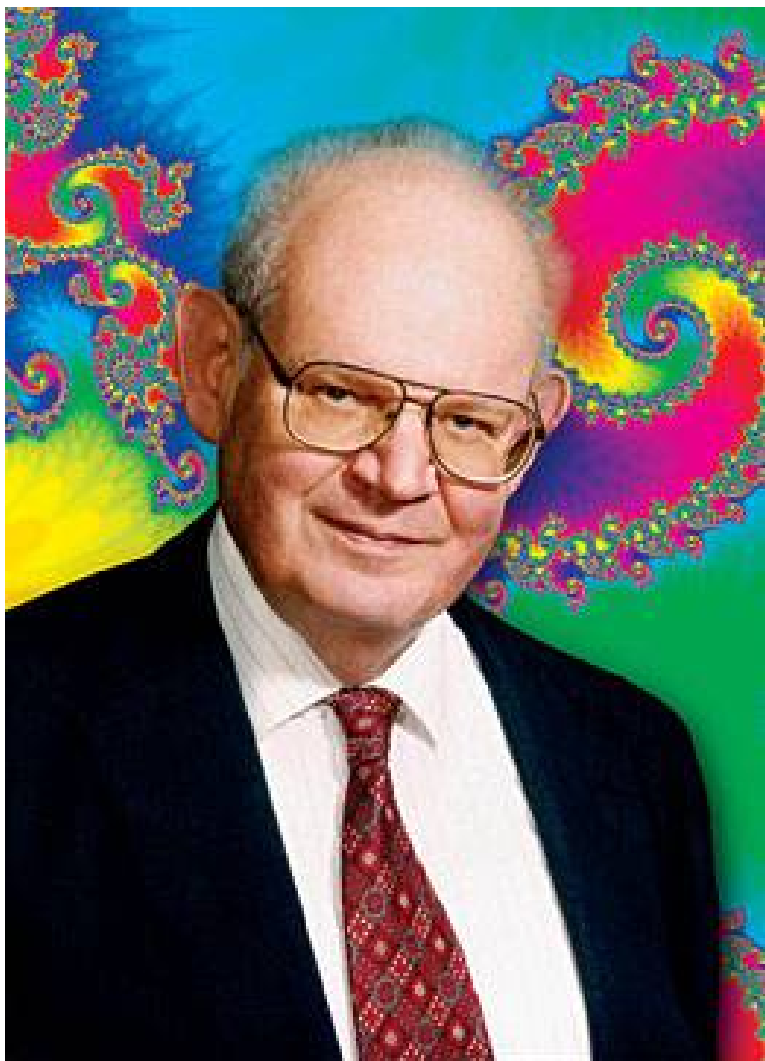


En chaque point, la fonction définit une élévation par rapport à la surface de l'objet



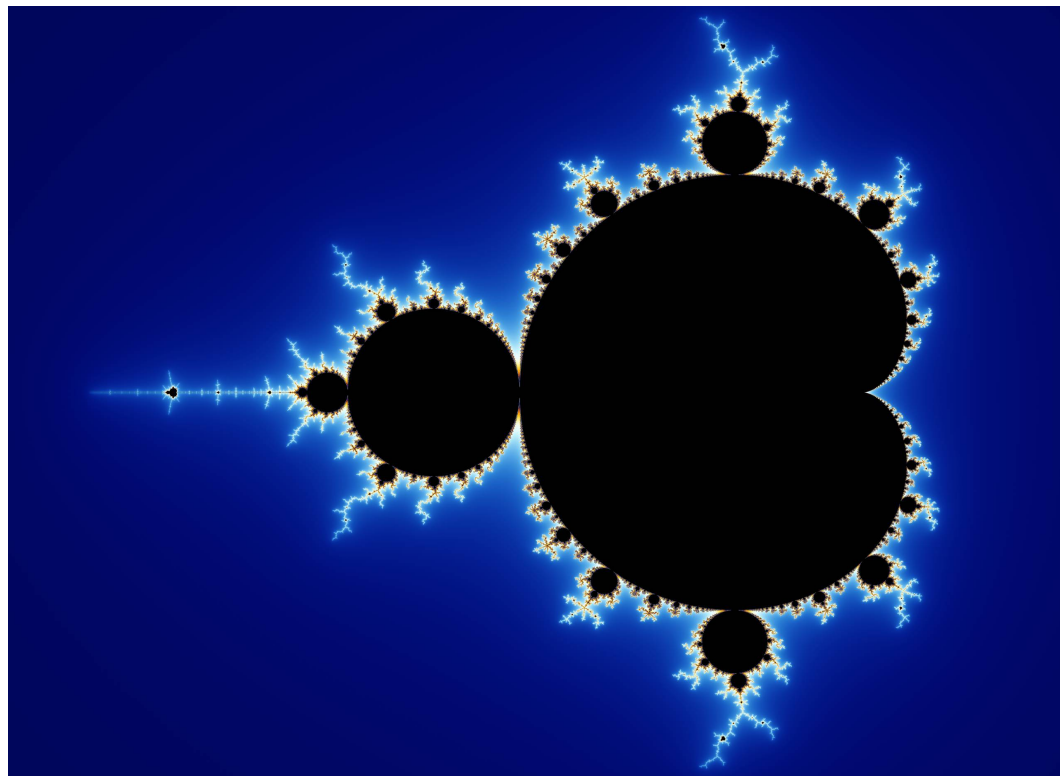
*Thème 4 : Fractal...*

itérations et convergence de suites



Benoît Mandelbrot (1924-2010)

*How Long Is the Coast of Britain?* (1967)



$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad z_0 = 0, \quad c \in \mathbb{C}$$

Wikipédia : une courbe ou surface de forme irrégulière ou morcelée qui se crée en suivant des règles déterministes ou stochastiques impliquant une homothétie interne. Dans la *théorie de la rugosité* développée par Mandelbrot, un fractal désigne des objets dont la structure est invariante par changement d'échelle (“self-similarité”).



Pierre Fatou (1878-1929)

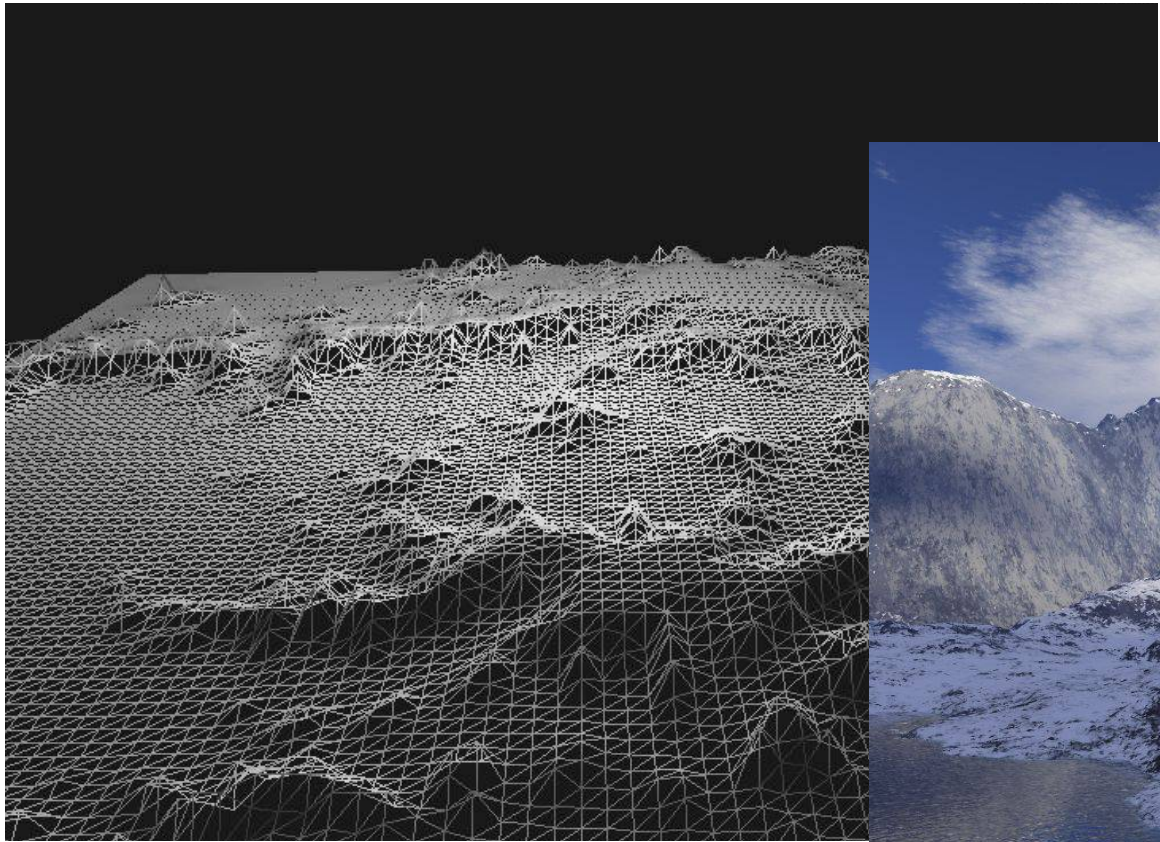
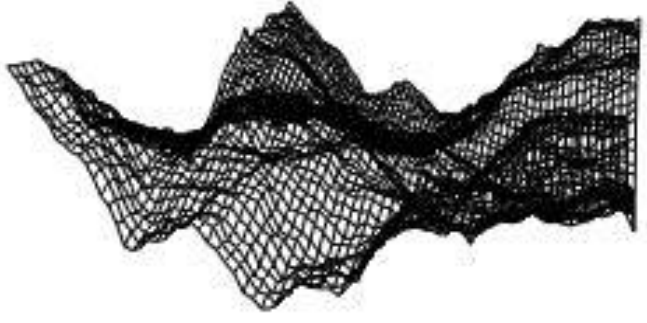
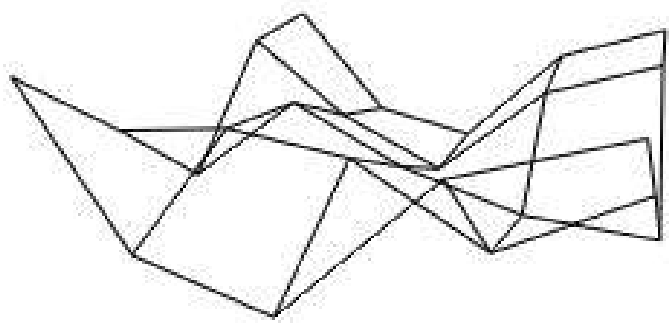
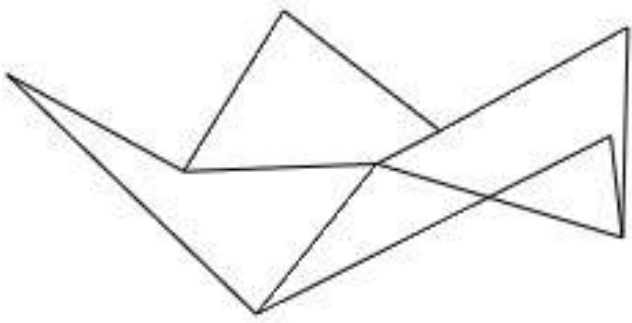


Gaston Julia (1893-1978)



Félix Hausdorff (1868-1942)

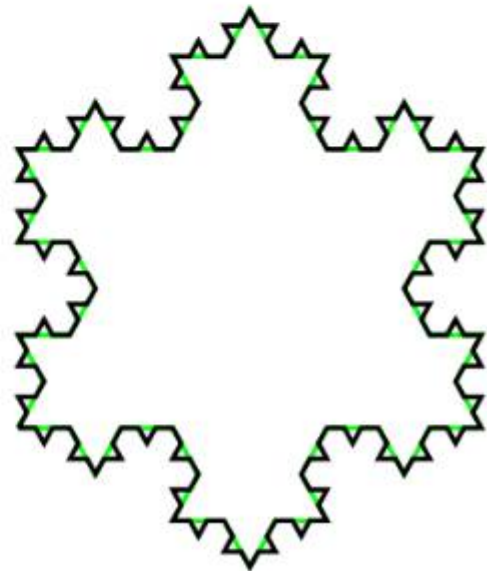
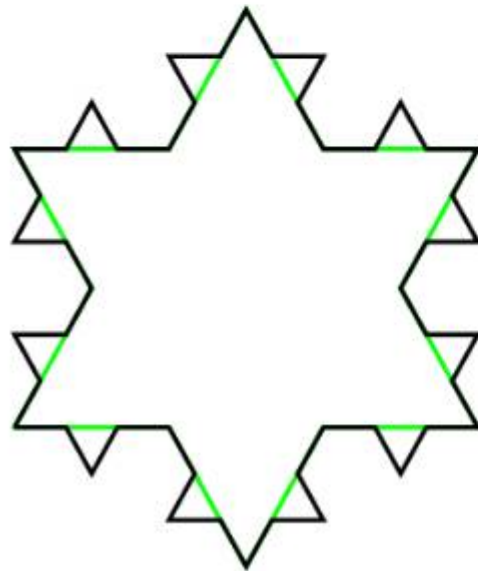
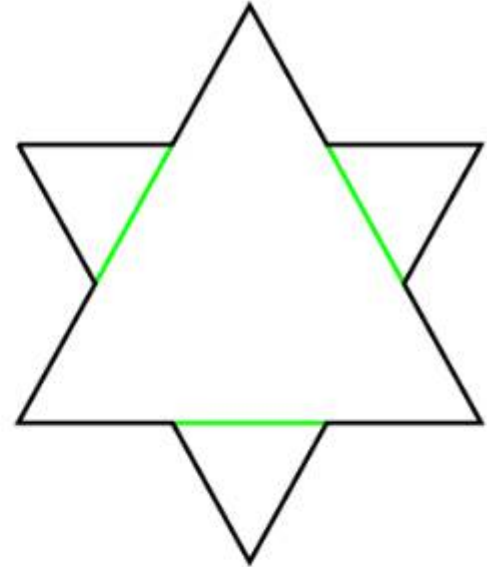
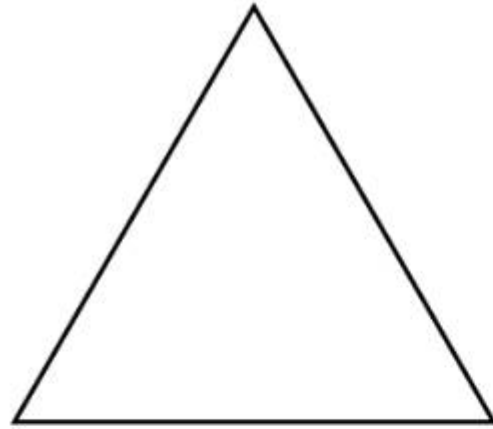
La géométrie “fractale” permet de modéliser de nombreux phénomènes naturels...

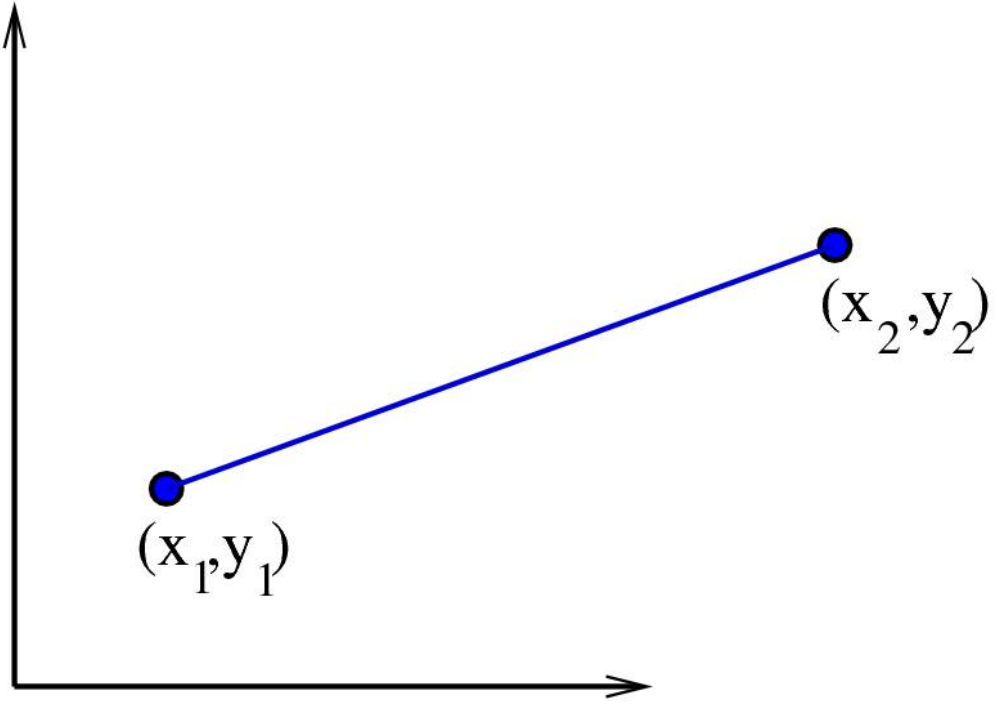


<http://www.gameprogrammer.com/fractal.html>



Helge von Koch  
(1870-1924)





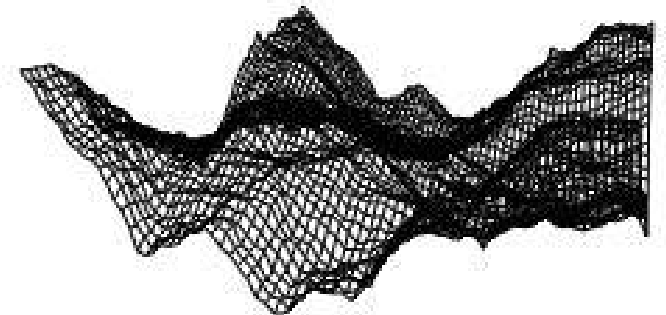
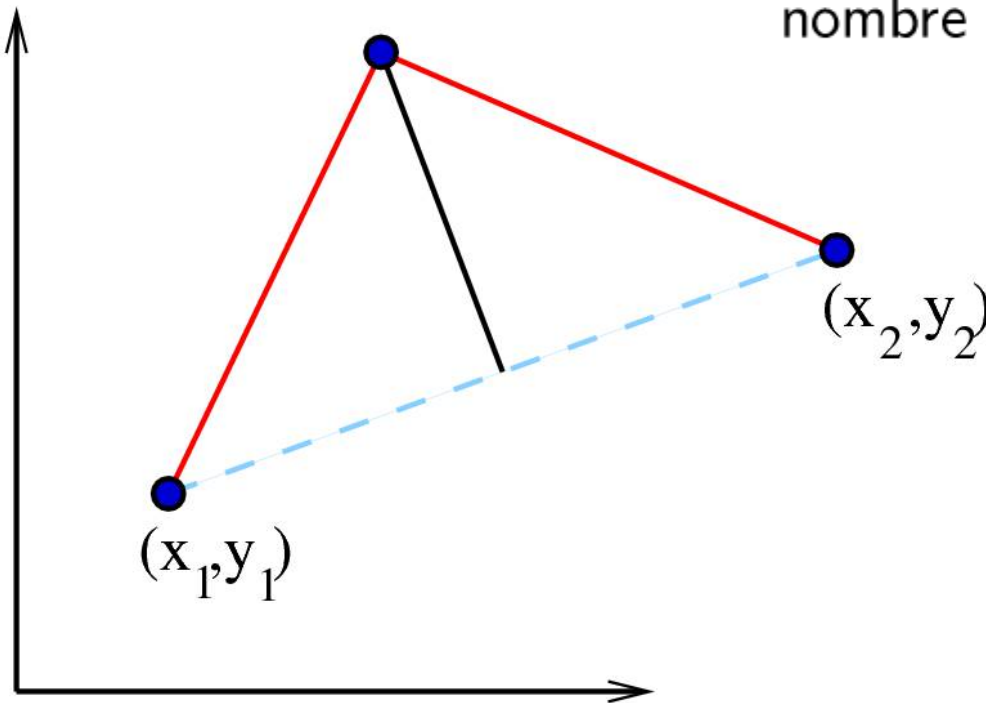


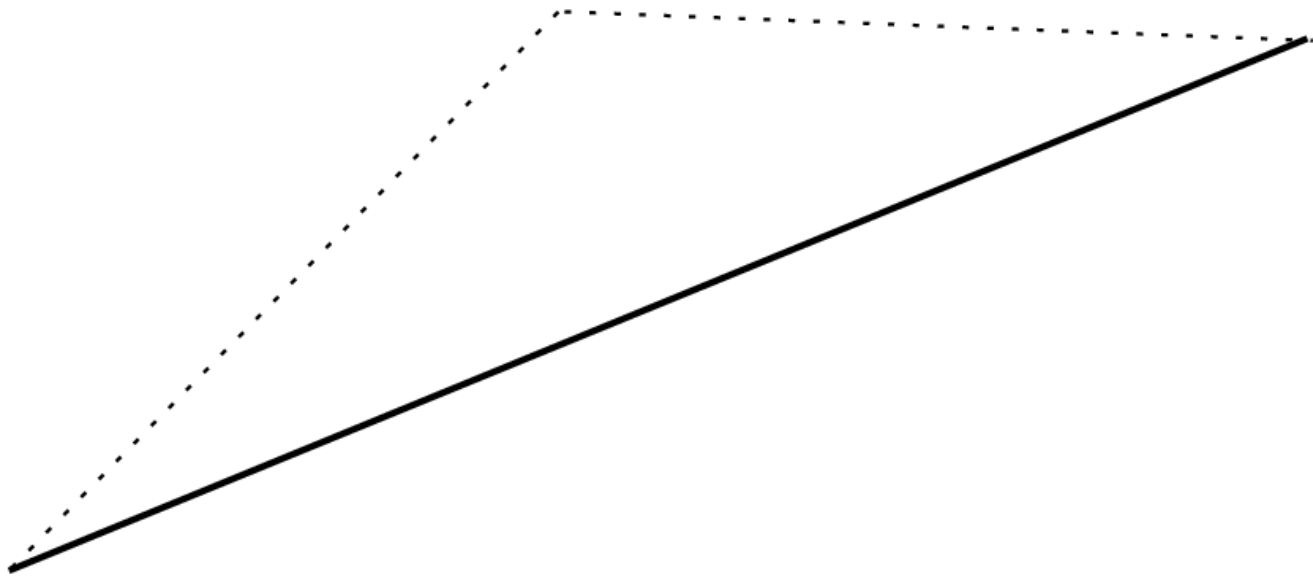
$$X = \frac{x_1 + x_2}{2} - \rho(y_2 - y_1)r$$

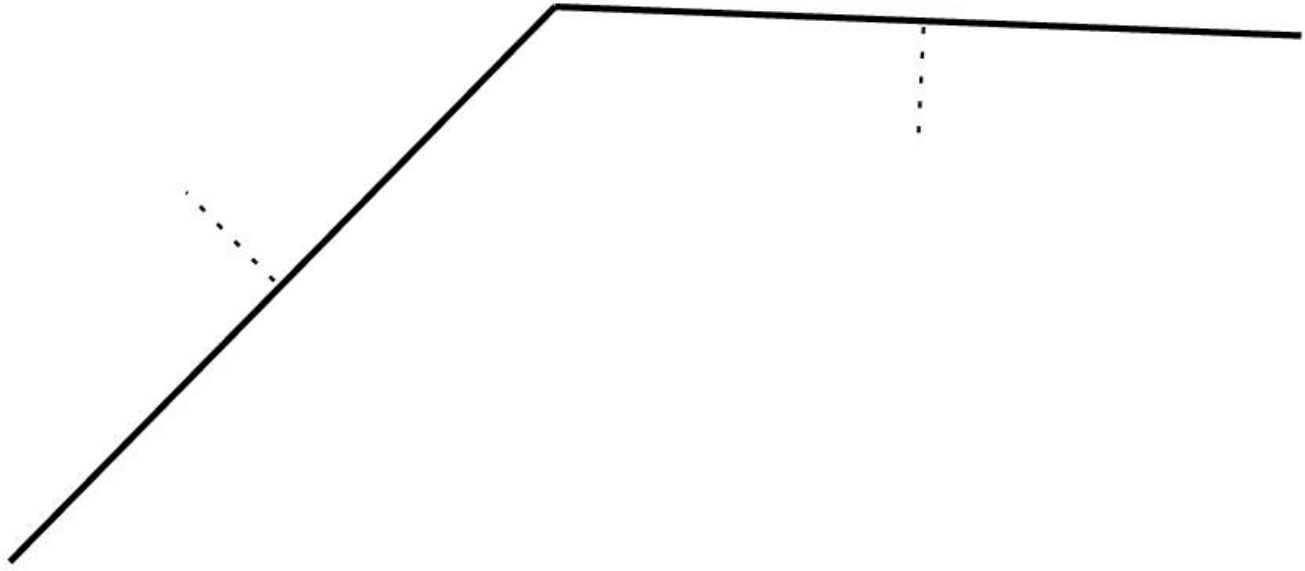
$$Y = \frac{y_1 + y_2}{2} + \rho(x_2 - x_1)r$$

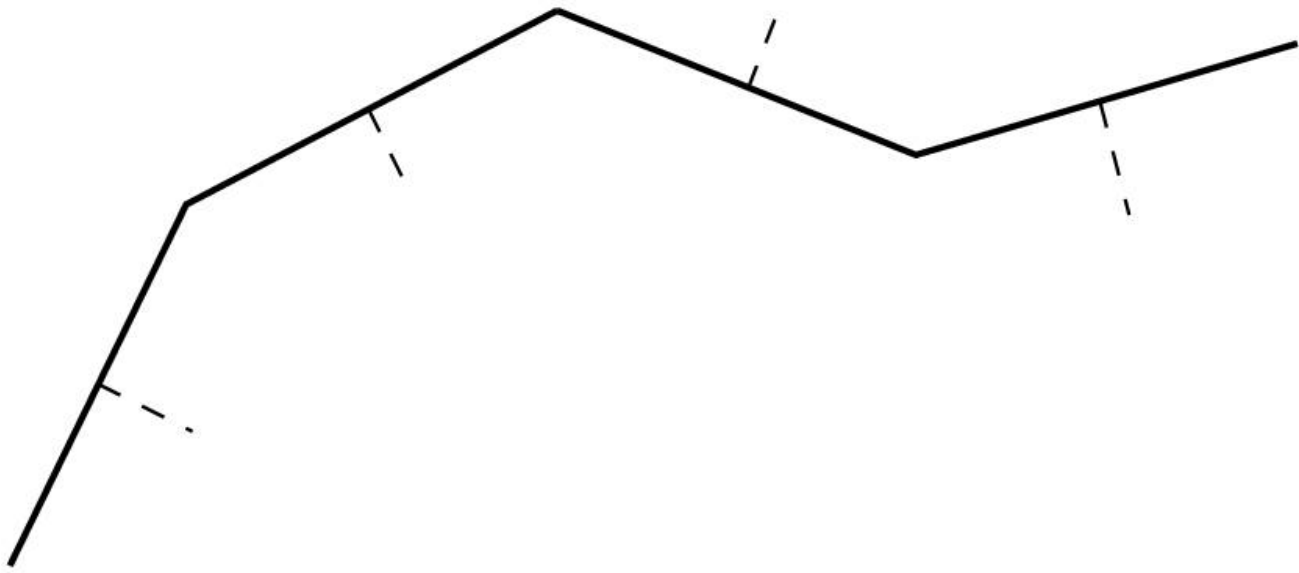
nombre aléatoire :  $r \in [-1, 1]$

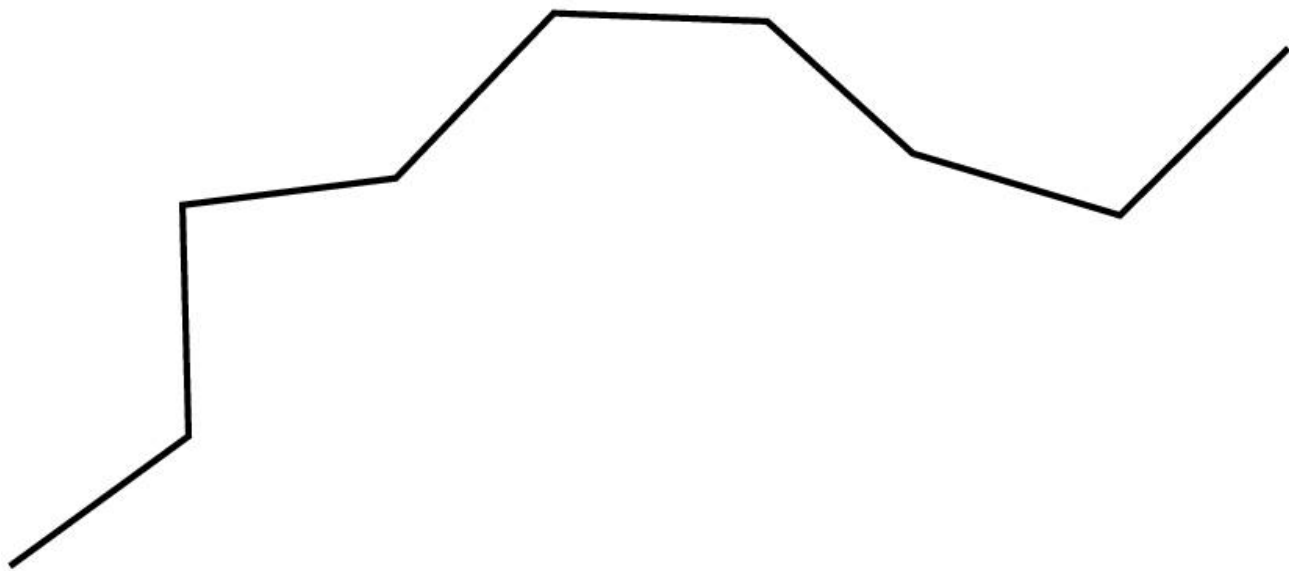
paramètre :  $\rho$





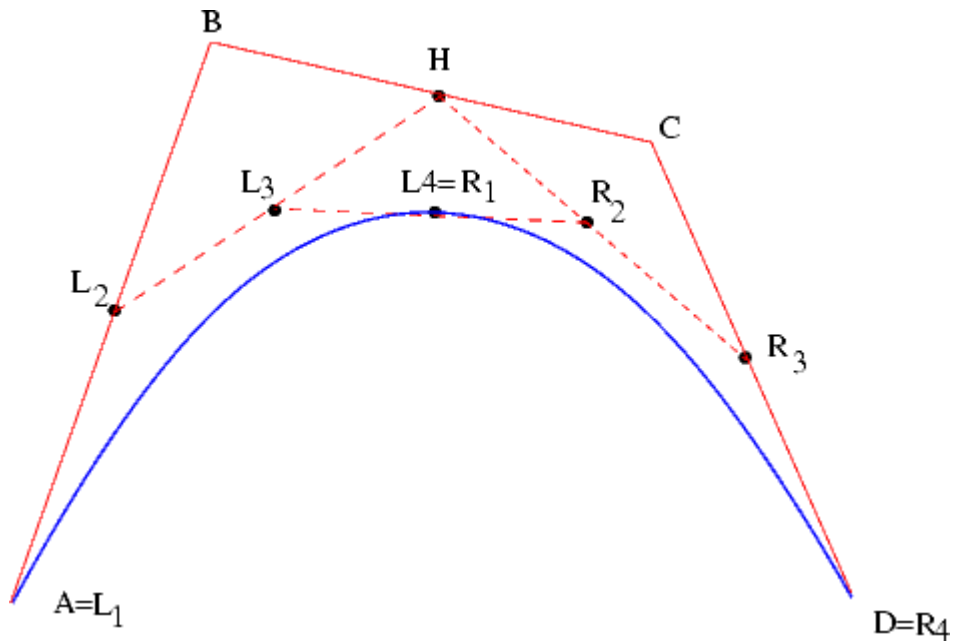






*Thème 5* : courbes de Bézier, splines

combinaisons affines, polynômes,  
binôme de Newton, interpolation

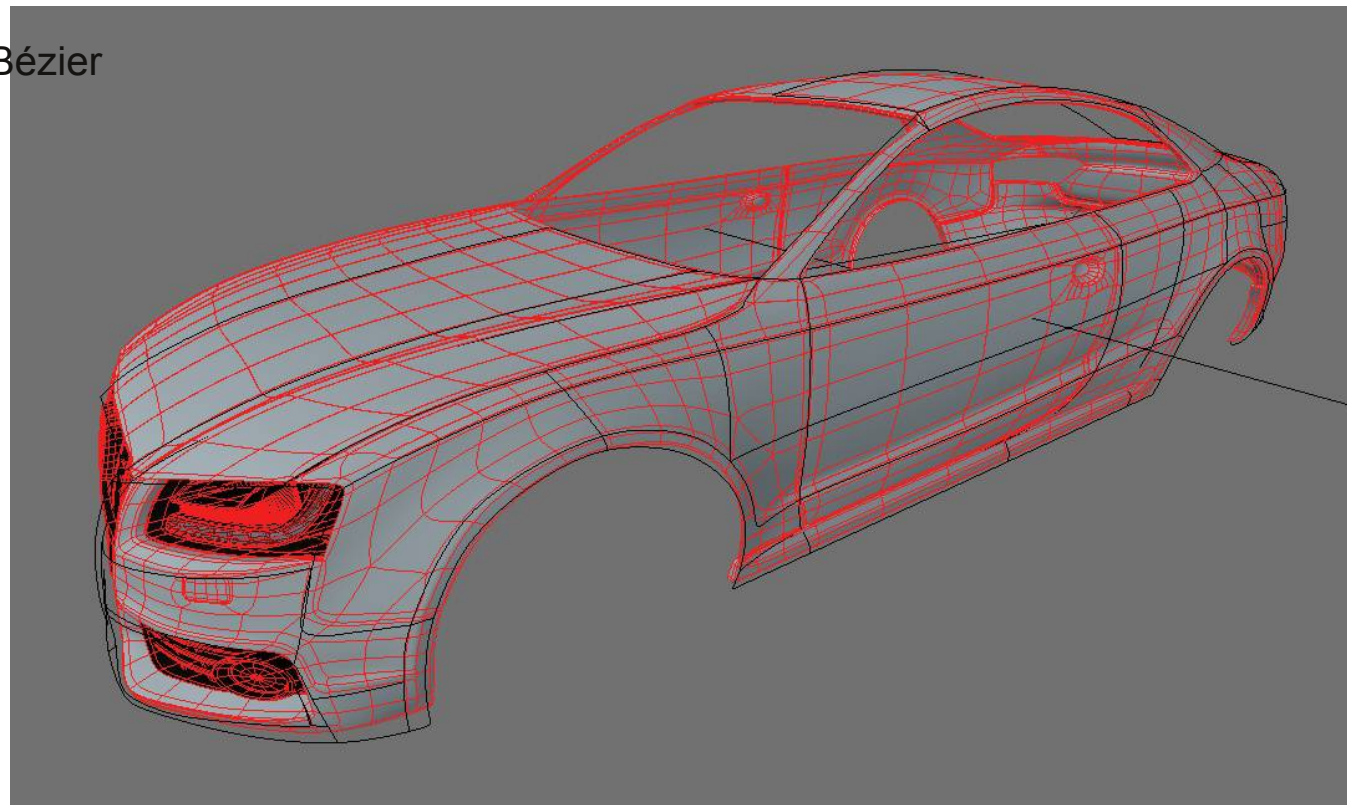


## 1) les courbes de Bézier

Modélisation d'objets,  
trajet d'une caméra,  
mouvements d'objets en animation,

...

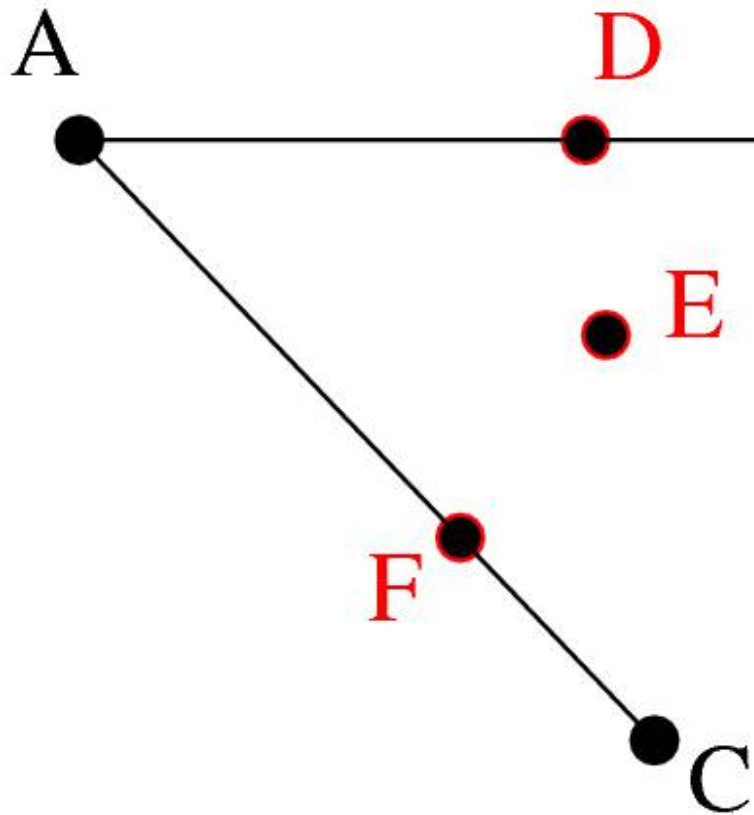
[http://fr.wikipedia.org/wiki/Courbe\\_de\\_Bézier](http://fr.wikipedia.org/wiki/Courbe_de_Bézier)



Pierre Bézier, *Numerical control: Mathematics and Applications*, Wiley (1972). (Renault)

De Casteljaou, technical report (Citroën)

D'abord un peu de géométrie affine...



$$D = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$F = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}C = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$E = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

Combinaisons affines de points



# Polynômes de Bernstein

$$B_{i,n}(x) = C_n^i x^i (1-x)^{n-i}, \quad i = 0, \dots, n$$

Par exemple,

$$B_{0,3}(x) = (1-x)^3, \quad B_{1,3}(x) = 3x(1-x)^2,$$

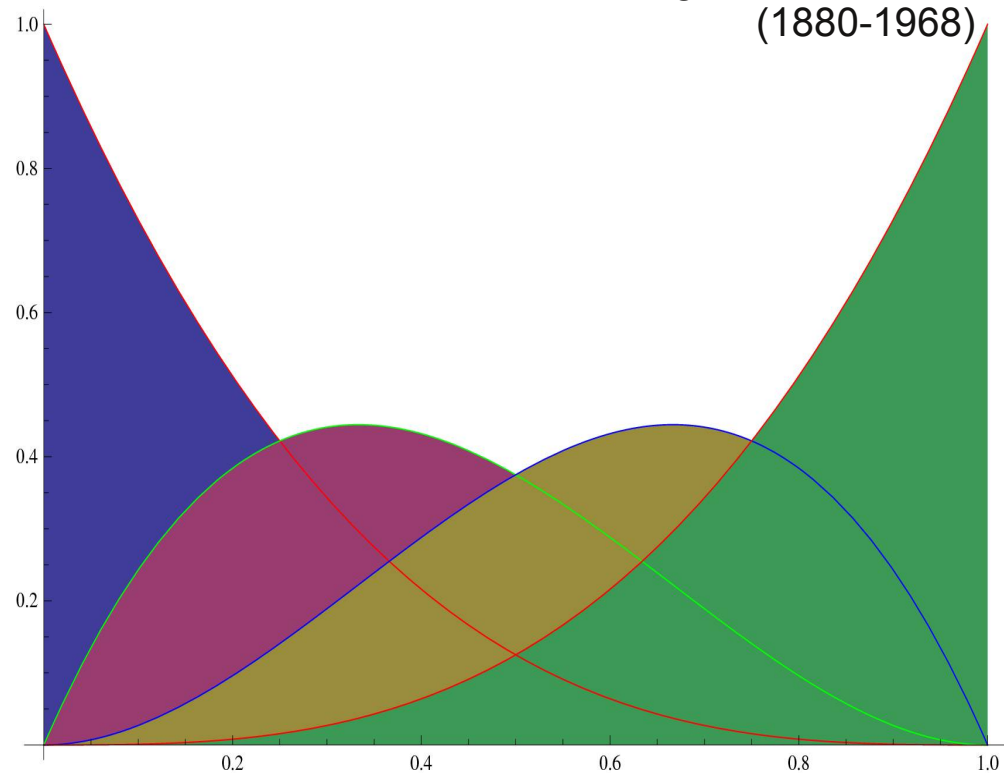
$$B_{2,3}(x) = 3x^2(1-x), \quad B_{3,3}(x) = x^3$$

Que vaut  $B_{0,3}(x) + B_{1,3}(x) + B_{2,3}(x) + B_{3,3}(x)$  ?

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(x) = ?$$



Sergei Natanovich Bernstein  
(1880-1968)



●  
 $P_0$

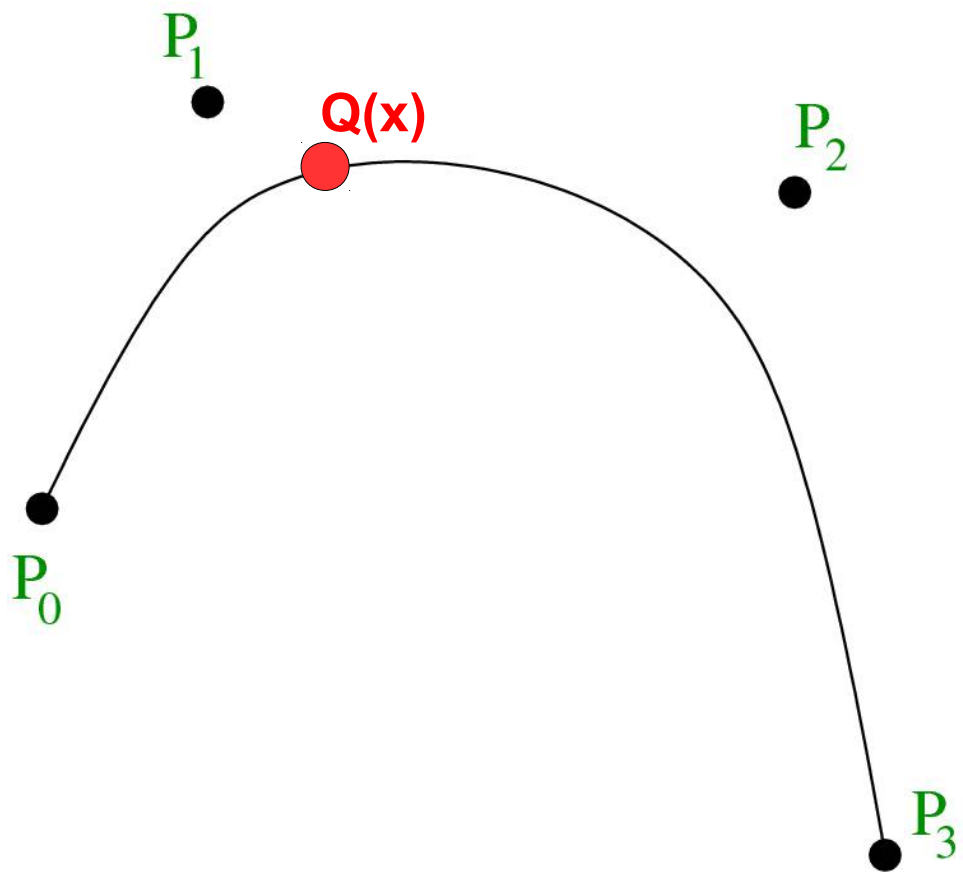
$P_1$   
●

●  
 $P_2$

●  
 $P_3$

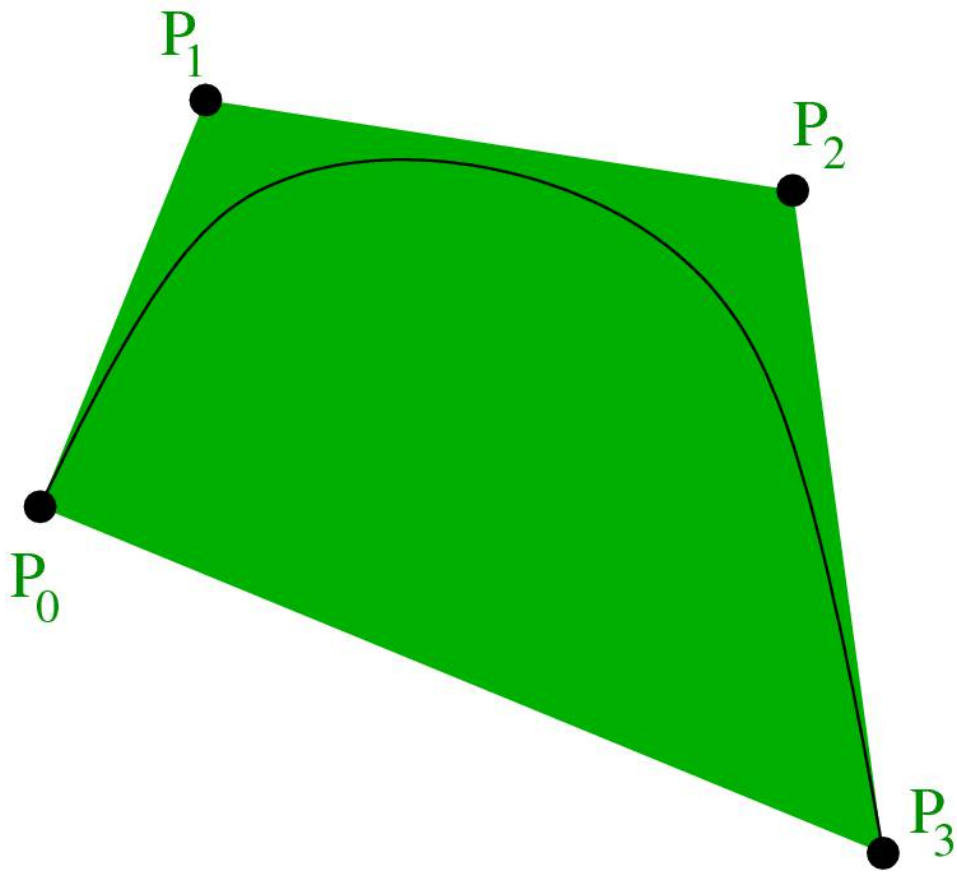
$$B_{0,3}(x) P_0 + B_{1,3}(x) P_1 + B_{2,3}(x) P_2 + B_{3,3}(x) P_3$$

$$x \in [0, 1]$$



$$Q(x) = B_{0,3}(x) P_0 + B_{1,3}(x) P_1 + B_{2,3}(x) P_2 + B_{3,3}(x) P_3$$

$$x \in [0, 1]$$



Quelques propriétés :

- Tangentes aux extrémités
- Enveloppe convexe
- Forme matricielle
- Représentation de De Casteljau
- Bien adaptés aux manipulations, e.g., déplacement des points de contrôle
- “*patch-splitting*” algorithm
- Invariance affine

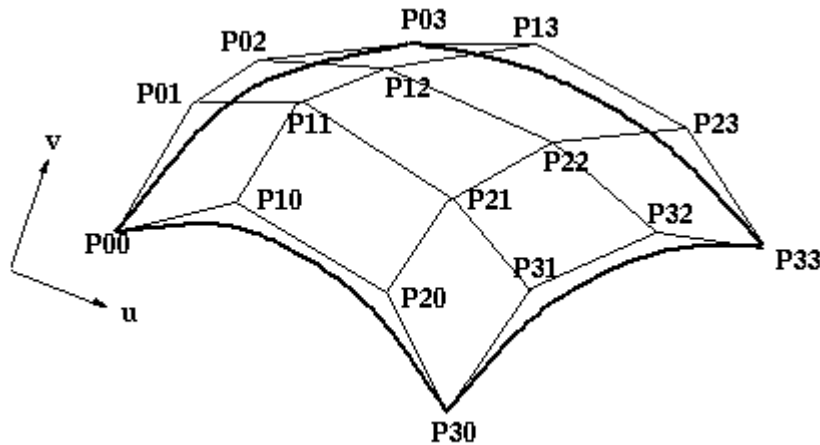
$$\Phi(Q(x)) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(x) \Phi(P_i)$$

Remarque : on peut définir une courbe de Bézier avec un nombre arbitraire  $n+1$  de points mais **polynômes de deg.  $n$**

Coûteux et nuit à la précision

Problème du contrôle global :  
Modifier un seul point de contrôle affecte toute la courbe

## 2) surfaces de Bézier

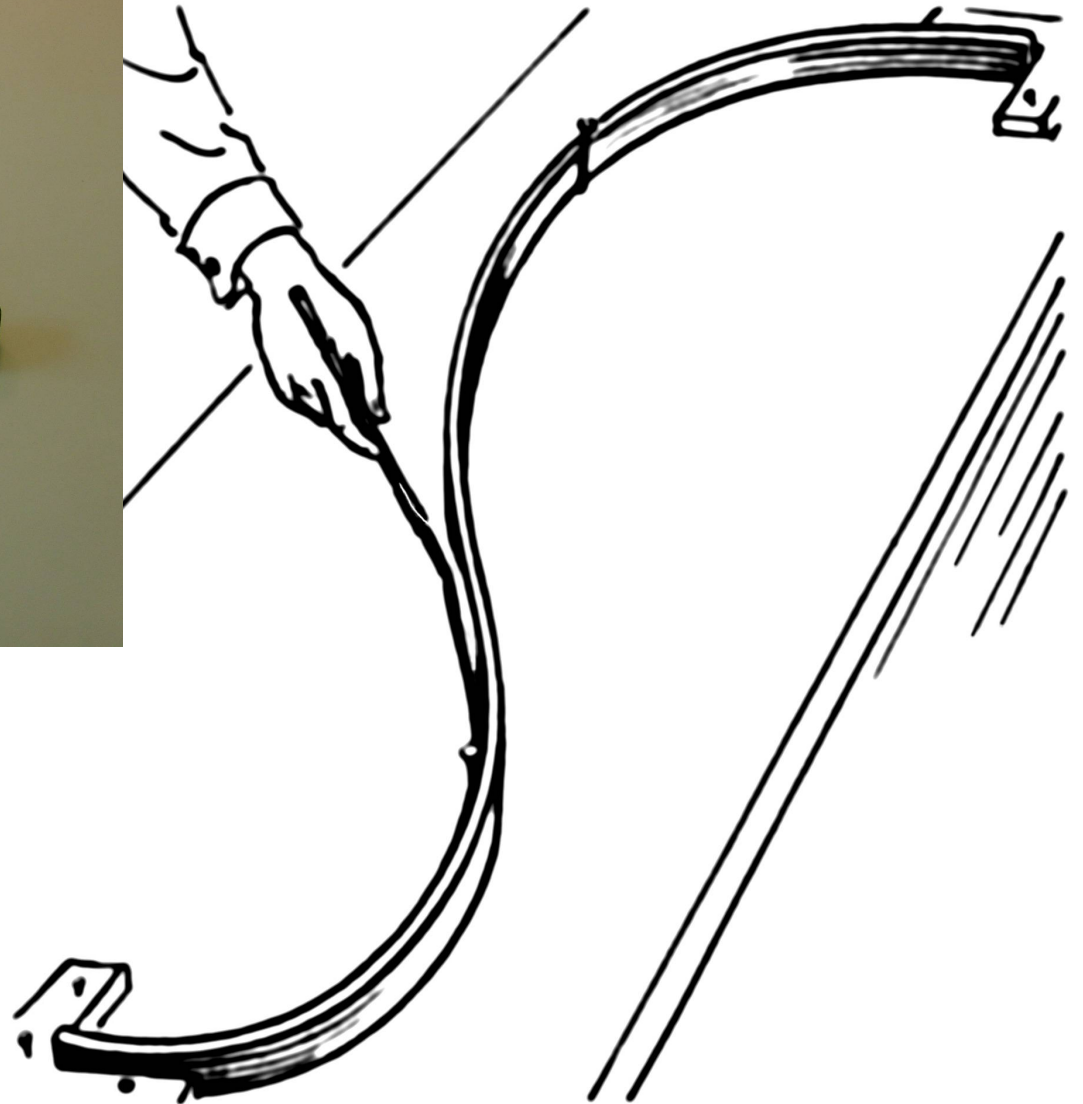
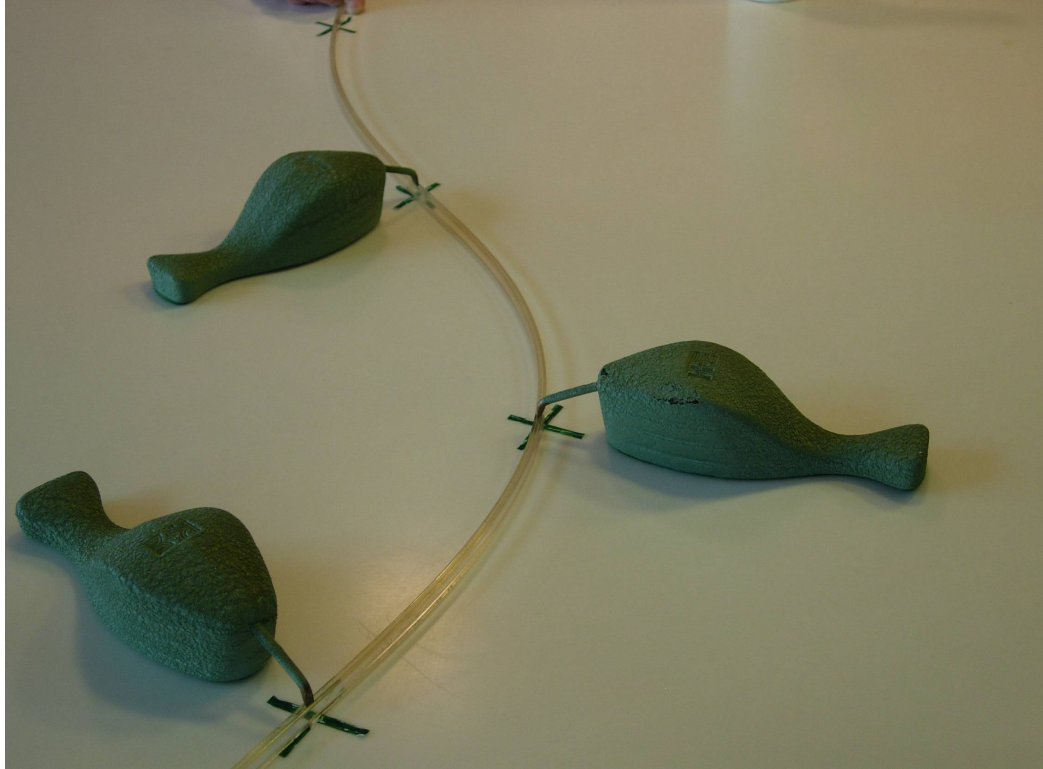


$$Q(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_{i,3}(u) B_{j,3}(v) P_{i,j}$$

On peut vérifier que :

$$\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_{i,3}(u) B_{j,3}(v) = 1, \forall u, v \in [0, 1]$$

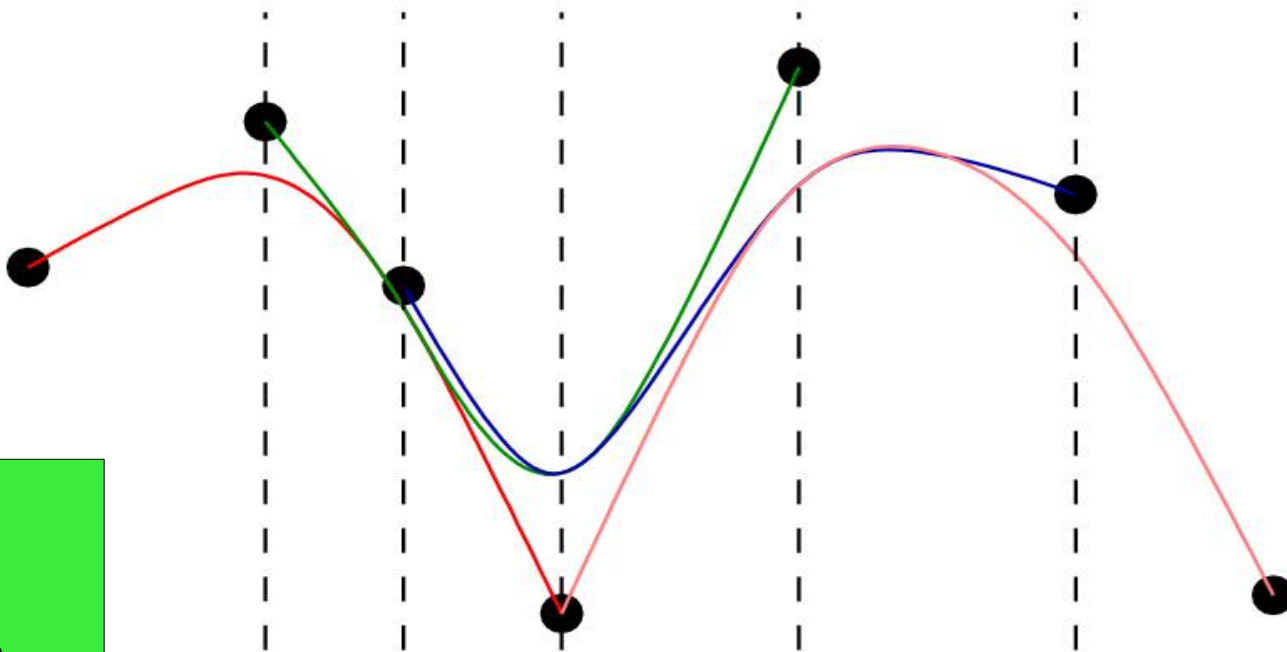
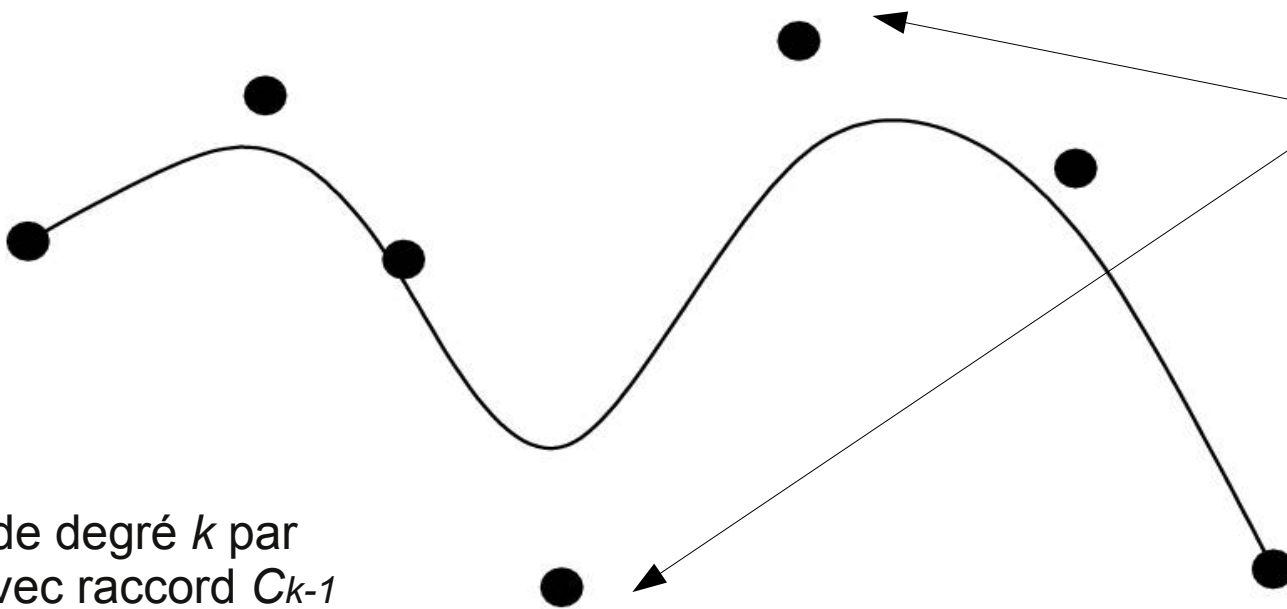
### 3) Splines



Interpolation

Approximation

Polynômes de degré  $k$  par morceaux avec raccord  $C_{k-1}$



Avantages :

- Contrôle local
- Degré peu élevé, par exemple cubique

- P. Cooley, *The essence of computer graphics*, Pearson education (2001), Prentice Hall.
- A. Watt, M. Watt, *Advanced Animation and Rendering Techniques, Theory and Praticce*, ACM Press, Addison Wesley (1992).
- R. Malgouyres, *Algorithmes pour la synthèse d'images et l'animation 3D*, Dunod (2002).
- L. Garnier, *Mathématiques pour la modélisation géométrique, la représentation 3D et la synthèse d'images*, Ellipses (2007)
- A. Paeth, *Graphic gems V*, The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics.
- A.S. Glassner, *An introduction to ray-tracing*, Academic Press (1989).
- G. Glaeser, *Fast Algorithms for 3D-Graphics*, Springer (1994).
- F. Dunn, I. Parberry, *3D Math Primer for Graphics and Game Development*, Wordware Game Math Library, Jones & Bartlett Publishers (2002)