

---

## Rapport F.R.I.A. 1997-1998

Première bourse — Première année

---

Formulation Arbitraire Lagrangienne-Eulérienne pour le contact lubrifié  
entre solides. Applications aux opérations de mise à forme.

R.Boman

24 janvier 2007



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
1.1	Présentation générale du travail . . . . .	7
1.2	Première année de thèse . . . . .	9
1.3	Permutation de deux tâches . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Pilotage en force de matrices de contact rigides</b>	<b>13</b>
2.1	Introduction . . . . .	13
2.1.1	Position du problème . . . . .	13
2.2	L'élément "force" . . . . .	14
2.3	Calcul de la matrice de raideur tangente élémentaire . . . . .	15
2.3.1	Vérification pour un élément 1D . . . . .	17
2.3.2	Remarque sur la symétrie de la matrice . . . . .	17
2.4	Applications . . . . .	18
2.4.1	Introduction . . . . .	18
2.4.2	Le test plan-plan . . . . .	19
2.4.3	Le test d'emboutissage complet . . . . .	21
2.5	Conclusions . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Théorie de la lubrification</b>	<b>27</b>
3.1	Introduction . . . . .	27
3.1.1	Tribologie et éléments finis . . . . .	27
3.1.2	Lois de frottement . . . . .	29
3.2	Tribologie . . . . .	32
3.2.1	Introduction . . . . .	32
3.2.2	Le régime hydrodynamique . . . . .	33
3.2.3	Le régime élasto-hydrodynamique . . . . .	34
3.2.4	Régime mixte . . . . .	34
3.2.5	Régime limite . . . . .	34
3.3	Loi de Stribeck . . . . .	35
3.3.1	Courbe de Stribeck . . . . .	35
3.3.2	Calcul des paramètres dans le contexte E.F. . . . .	36
3.3.3	Modélisation numérique de la courbe de Stribeck . . . . .	37
3.4	Application : le phénomène 'stick-slip' (test plan-plan) . . . . .	42

3.4.1	Introduction . . . . .	42
3.4.2	Résultats . . . . .	43
3.5	Conclusions et perspectives . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Formulation Arbitraire Lagrangienne Eulérienne</b>	<b>51</b>
4.1	Introduction . . . . .	51
4.2	Formulation lagrangienne et eulérienne . . . . .	53
4.2.1	Formalisme de Lagrange . . . . .	53
4.2.2	Formalisme d'Euler . . . . .	54
4.3	Formulation Arbitraire Lagrangienne Eulérienne . . . . .	56
4.4	Cinématique et dérivée particulière . . . . .	56
4.5	Lois de conservation en formulation ALE . . . . .	61
4.6	Résolution des équations . . . . .	63
4.6.1	Introduction . . . . .	63
4.6.2	Résolution des équations couplées . . . . .	63
4.6.3	Difficultés liées à la résolution couplée . . . . .	64
4.6.4	Séparation des opérateurs . . . . .	65
4.6.5	Phase lagrangienne pure . . . . .	66
4.6.6	Phase eulérienne-lagrangienne . . . . .	66
4.7	Un algorithme mixte EF/VF pour le transfert des données . . . . .	75
4.7.1	Application à la mécanique du solide . . . . .	77
4.7.2	Algorithme proposé . . . . .	78
4.7.3	Prise en compte des conditions aux limites . . . . .	83
4.7.4	Etude numérique du schéma à 1D . . . . .	84
4.7.5	Organigramme de l'algorithme mixte . . . . .	89
4.7.6	Conclusions . . . . .	89
4.8	Un algorithme SUPG pour la phase convection . . . . .	91
4.8.1	Introduction . . . . .	91
4.8.2	Discrétisation spatiale de l'équation . . . . .	92
4.8.3	Choix du paramètre $\bar{k}$ . . . . .	95
4.8.4	Discrétisation temporelle des équations . . . . .	97
4.8.5	Schéma explicite . . . . .	98
4.8.6	Transfert des grandeurs volumiques . . . . .	98
4.8.7	Création et gestion du maillage . . . . .	99
4.8.8	Prise en compte des conditions aux limites . . . . .	100
4.8.9	Analyse théorique du schéma . . . . .	101
4.8.10	Stabilisation du schéma par diffusion artificielle . . . . .	105
4.8.11	Stabilisation du schéma par diagonalisation . . . . .	108
4.8.12	Organigramme de la méthode . . . . .	109
4.8.13	Conclusions . . . . .	110
4.9	Etude 1D des algorithmes proposés . . . . .	112
4.9.1	Introduction . . . . .	112
4.9.2	L'algorithme mixte EF/VF . . . . .	113

4.9.3	L'algorithme SUPG . . . . .	117
4.9.4	Comparaison des deux algorithmes . . . . .	121
4.10	Etude 2D des deux algorithmes proposés . . . . .	122
4.10.1	Introduction . . . . .	122
4.10.2	Comparaison des deux algorithmes . . . . .	122
4.10.3	Comparaison du temps de calcul . . . . .	126
4.10.4	Comparaison de la mémoire utilisée . . . . .	127
<b>5</b>	<b>Exemples numériques</b>	<b>129</b>
5.1	Introduction . . . . .	129
5.2	Filière . . . . .	130
5.2.1	Description du problème . . . . .	130
5.2.2	Résultats . . . . .	131
5.3	Ecrasement d'un lopin . . . . .	142
5.3.1	Description du problème . . . . .	142
5.3.2	Résultats . . . . .	143
5.4	Impact de la barre de Taylor . . . . .	153
5.4.1	Description du problème . . . . .	153
5.4.2	Résultats . . . . .	154
5.5	Laminage . . . . .	157
5.5.1	Description du problème . . . . .	157
5.5.2	Résultats . . . . .	158
5.6	Conclusions et perspectives . . . . .	161
<b>6</b>	<b>Conclusions</b>	<b>165</b>
6.1	Résultats de première année . . . . .	165
6.2	Suite du travail et perspectives . . . . .	167
6.2.1	Pilotage en force des matrices rigides . . . . .	167
6.2.2	Simulation du contact lubrifié . . . . .	167
6.2.3	Formalisme arbitraire lagrangien-eulérien . . . . .	167



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Présentation générale du travail

Ce rapport donne une idée précise sur les premiers développements effectués dans le cadre de ma thèse de doctorat financée par le F.R.I.A.

Le but final de ce travail, planifié sur quatre ans, est d'arriver à simuler de manière satisfaisante le contact entre solides déformables ou non lors de processus de mise à forme des matériaux. Nous nous intéressons plus particulièrement au frottement et à sa modélisation par la méthode des éléments finis.

En effet, les études numériques consacrées à la simulation des procédés de mise à forme ont été surtout focalisées sur le développement d'éléments performants et le traitement des lois de comportement des matériaux. Cependant, pour traiter des cas concrets, représentatifs de situations industrielles, la seule prise en compte du comportement de la matière n'est pas suffisante : l'influence d'autres paramètres propres au procédé, tels que le frottement entre le matériau d'une part, et les outils d'autre part, est loin d'être négligeable. Elle est même, dans certains cas, primordiale. Suivant le cas, le frottement aura tantôt un rôle bénéfique (laminage), tantôt un rôle parasite (tréfilage, extrusion, usinage). Mais dans tous les cas, il intervient et la prise en compte des effets qu'il induit est essentielle.

En dépit de l'importance de la lubrification dans les opérations de mise à forme, il y a, à ce jour, relativement peu d'interactions entre les tribologues et les numériciens. C'est pourquoi il est tout à fait courant de trouver des codes de calculs où sont combinées des théories très sophistiquées du traitement de la plasticité et des hypothèses simplistes pour la théorie du frottement. Ainsi, la loi de Coulomb, si souvent décriée, est souvent la seule loi de frottement disponible.

Cette dernière contient un coefficient qui est trop souvent utilisé comme un paramètre bien pratique qui permet d'ajuster les résultats numériques aux résultats expérimentaux.

Par exemple, dans la littérature, les valeurs du coefficient de frottement sont rarement justifiées alors qu'elles dépendent d'un grand nombre de paramètres (géométrie, aspect des surfaces en contact, vitesse de glissement, température, présence d'un lubrifiant, présence d'impuretés, réactions chimiques, ...).

Cette façon de faire est en totale contradiction avec la démarche scientifique correcte qui consiste à modifier le modèle et non les paramètres physiques pour obtenir une concordance entre la simulation et la réalité.

Il est donc important de se pencher sur le sujet pour permettre de simuler efficacement les processus courants de formage des matériaux où le frottement joue un rôle important. Le laminage à froid et l'emboutissage seront donc souvent considérés dans ce travail.

Dans le laminage, c'est la rotation du cylindre qui entraîne le produit dans l'emprise. Or, l'engagement ne peut avoir lieu que si les forces de friction entre le cylindre et la tôle sont suffisantes. Une bonne connaissance de celles-ci est donc très utile pour mettre au point une opération de laminage.

Une fois que le processus est amorcé, on étudie un phénomène stationnaire. Nous aurons recours à une formulation arbitraire lagrangienne eulérienne qui nous permettra, dans ce cas, de fixer le maillage de la tôle dans l'espace et d'étudier le flux de matière passant à travers les mailles.

Si la prise en compte du contact est facilitée dans ce cas (un noeud en contact reste en contact), les effets convectifs, provenant de la différence entre la vitesse du maillage et celle de la matière, vont être une source de problèmes. En effet, des méthodes sophistiquées doivent être mises en oeuvre pour éviter les instabilités et les oscillations, bien connues en mécanique des fluides où on utilise très souvent un maillage eulérien.

L'emboutissage, par contre est un processus transitoire très difficile à modéliser correctement à l'heure actuelle. En effet, les conditions de contact et de frottement varient au cours du temps et en fonction de l'endroit d'observation. Ainsi, on remarque un frottement très sévère au niveau des épaules de la matrice et juste en dessous du poinçon. A ces endroits, le film de lubrifiant est réduit à quelques couches moléculaires et la pression de contact est supportée par les aspérités de la tôle. On parle dans ce cas de régime de lubrification limite.

Ailleurs, on observe des forces de contact moins importantes et des épaisseurs de film d'huile supérieures à la hauteur moyenne des aspérités. C'est le régime de lubrification hydrodynamique dans lequel les propriétés du lubrifiant jouent un grand rôle.

Dans les zones de transition entre ces deux régimes, on observe un régime mixte, combinaison des deux précédents où les couplages entre le lubrifiant et la tôle sont très complexes.

Ceci montre qu'il est illusoire de vouloir simuler une opération d'emboutissage en utilisant un coefficient de frottement global et constant. Le phénomène de frottement est un



phénomène local (spatialement et temporellement) et doit être traité comme tel.

## 1.2 Première année de thèse

Nous résumons ci-dessous le contenu de ce rapport :

Après cette introduction, le chapitre 2 est dédié à un sujet totalement différent de la lubrification mais tout aussi intéressant dans le cadre de cette thèse. Il s'agit du pilotage en force de matrices de contact rigides. Ces dernières ne pouvaient être pilotées qu'en déplacement avant ce travail et cela limitait le nombre de problèmes mécaniques qu'on pouvait envisager. En effet, lors d'une opération d'emboutissage ou, plus simplement, lors d'un test tribométrique, les forces appliquées sont généralement imposées par des systèmes hydrauliques et il est important de respecter cette "condition aux limites" lors de la résolution numérique. Il n'est, par exemple, pas possible de simuler le phénomène de stick-slip, étudié à la section 3.4, en imposant un déplacement.

Quelques applications numériques sont effectuées (test plan/plan, emboutissage) pour valider les développements.

Le chapitre 3 regroupe notre travail sur la simulation du frottement. Après une brève introduction, nous expliquons la mise au point d'une loi de frottement à coefficient de frottement variable basée sur la loi de Stribeck. Nous analysons ensuite le phénomène de stick-slip.

Le chapitre 4 décrit le formalisme lagrangien-eulérien qui sera utilisé tout au long de ce travail. Ce formalisme permet de résoudre un problème mécanique en laissant le maillage se déplacer librement, selon les désirs de l'utilisateur du code. La structure est remaillée continuellement pendant le calcul et on évite ainsi les mailles écrasées. De ce formalisme découle naturellement les formalismes eulérien (maillage fixe dans l'espace) et lagrangien (maillage fixé à la matière). Nous nous intéresserons particulièrement aux maillages eulériens pour pouvoir traiter des problèmes stationnaires (laminage, extrusion, filière, ...)

Ce chapitre, inspiré de la thèse de J.-P. Ponthot [45], introduit les définitions fondamentales et déduit les équations à résoudre. Nous justifions ensuite le choix d'une résolution étagée des équations. Celle-ci décompose le problème initial, difficile à résoudre, en deux problèmes plus simples. Le premier est lagrangien et le maillage suit la matière. Nous ne nous attarderons pas à cette étape puisqu'elle est identique à celle d'un calcul purement lagrangien.

La seconde étape, par contre, fait l'objet de toute la fin du chapitre. Nous introduisons deux méthodes pour traiter l'équation de convection qui suit le remaillage de la structure. Cette équation s'applique à toutes les grandeurs définies aux points de Gauss du maillage étudié. Cette étape permet également le transfert de la mémoire du matériau de l'ancien

maillage vers le nouveau et est nécessaire parce que nous utilisons des lois constitutives non linéaires pour traiter la plasticité.

Deux algorithmes sont décrits :

Le premier est une méthode mixte éléments finis / volume finis proposé par Casadei, Huerta et Donéa [7]. Elle consiste à définir 4 volumes finis par élément fini et de mettre à jour les grandeurs aux points de Gauss en appliquant la méthode de Godunov. Une intégration temporelle explicite permet de résoudre l'équation de convection de manière rapide. Notre implémentation de cette méthode présentée dans ce rapport a été optimisée du point de vue de la mémoire utilisée mais doit encore faire l'objet d'améliorations du point de vue du temps de calcul.

Le deuxième est un algorithme original basé sur la célèbre méthode Streamline Upwind Petrov Galerkin (SUPG) initialement proposée par Hugues et Brooks en 1982 [6]. L'idée principale est la construction d'un maillage auxiliaire reliant les points de Gauss du maillage élément fini. La résolution s'effectue en appliquant la méthode des résidus pondérés sur l'équation de convection. L'avantage certain de cette méthode est l'absence de diffusion transverse, quelle que soit la direction de convection par rapport à celle des mailles.

Une procédure similaire doit être appliquée pour transférer la pression qui n'est définie qu'en un seul point de Gauss pour éviter le blocage (locking volumique) des éléments quadrangulaires.

L'intégration temporelle de l'équation se fait par la méthode du point milieu généralisé. Celle-ci permet de choisir une résolution explicite ou implicite. Dans ce dernier cas, la résolution du système d'équations pénalise l'algorithme mais fournit une stabilité inconditionnelle.

Une routine de création automatique des deux maillages auxiliaires a été mise au point. Le stockage en mémoire de ces deux derniers est un point faible de la méthode.

Après la description complète des deux algorithmes de convection, nous effectuons une étude de stabilité par la méthode de Von Neumann. Celle-ci nous donnera le domaine de stabilité de manière analytique et nous montrons l'effet d'une diagonalisation de la matrice du système. Nous montrons aussi l'effet d'une discrétisation spatiale non consistante avec la méthode des résidus pondérés.

Le reste du chapitre est consacrée à une étude et une comparaison numérique des deux méthodes sur des cas simples 1D et 2D. On y vérifie la limite de stabilité obtenue analytiquement ainsi que la présence ou non de diffusion transverse.

Le chapitre 5 montre quatre applications numériques en mécanique du solide.

La première est la simulation du passage de matière dans une filière. Le maillage est eulérien pur et les effets convectifs sont très importants. Nous examinons la convergence des grandeurs aux points de Gauss et nous montrons la divergence de la solution en utilisant

les anciens algorithmes présents dans le logiciel METAFOR [45].

Le second est un test d'écrasement d'un lopin de matière. Ce problème nous permet de comparer nos résultats à ceux présenté par Casadei, Huerta et Donéa [7].

Nous abordons le problème de la barre de Taylor comme troisième problème. Nos résultats sont comparés avec ceux obtenus par J.-P. Ponthot [45].

Enfin, nous abordons brièvement une simulation de laminage pour laquelle la tôle et le rouleau sont traité par le formalisme ALE. La résolution de ce problème sera poursuivi lorsque nous établirons des lois de frottement plus élaborées.

Tous ces développements informatiques viennent enrichir le code de calcul METAFOR [45, 48, 53, 55], développé au laboratoire des Techniques Aéronautiques et Spatiales (Thermomécanique & Milieux Continus). de l'Université de Liège.

## 1.3 Permutation de deux tâches

Si on se réfère au plan de travail proposé en début d'année et au contenu de ce travail, on constate qu'il existe quelques différences.

Après quelques mois de recherche bibliographique, nous avons mis au point le pilotage en force de matrices rigides pour pouvoir retrouver les résultats obtenus au Laboratoire de Mécanique de d'Acoustique de Marseille [8, 11, 20].

Le but suivant était la modélisation du frottement par des lois simples de type Stribeck. Celle-ci ne posa pas de problèmes de programmation. Cependant, nous nous sommes retrouvés en face de gros problèmes d'instabilités numériques qui nous ont poussés à remettre à plus tard l'étude de la lubrification par éléments finis.

Un choix devait être fait à ce stade : soit continuer dans la direction de la tribologie et la lubrification en mettant au point une résolution locale de l'équation de Reynolds. Soit changer momentanément de direction pour résoudre l'équation de convection qui posait tant de problèmes, rendant l'utilisation du formalisme ALE impossible (les maillages eulériens ne pouvaient pas être utilisés).

Nous avons choisi l'ALE pour pouvoir disposer, dans le futur, de bases solides lors de l'établissement des lois de frottement. Ces développements étaient prévus dans la deuxième année de thèse.

Nous reportons donc le travail de la fin de la première année au début de la deuxième, de telle sorte que le programme soit respecté en fin de deuxième année.



## Chapitre 2

# Pilotage en force de matrices de contact rigides

## 2.1 Introduction

### 2.1.1 Position du problème

Le travail consiste à permettre à METAFOR [45] de piloter des matrices de contact rigides au cours d'une simulation, non pas en déplacements mais en forces. Cette extension n'est pas triviale puisque le processus incrémental de calcul utilisé (Newton-Raphson) suppose que les déplacements des matrices de contact sont connus a priori et que les forces qui s'exercent sur ces dernières sont calculées uniquement sur demande explicite de l'utilisateur (leurs valeurs ne sont pas nécessaires lors du calcul).

Grâce à ce travail, il sera possible de simuler d'une manière plus correcte les processus de formage des matériaux en grandes transformations tels que l'emboutissage ou les tests tribologiques pour mesurer le coefficient de frottement d'un matériau. En effet, lors de ces processus, les forces sont généralement maintenues constantes par des systèmes hydrauliques et mécaniques. Dans METAFOR, par contre, les outils sont généralement pilotés en déplacements pour des raisons de simplicité algorithmique alors que dans la réalité, un pilotage en déplacements nécessite un capteur de position très précis et une boucle de feed-back qui, en fonction de l'erreur sur le déplacement, corrige la valeur de la force.

D'un point de vue algorithmique, nous sommes face au problème inverse : nous allons piloter la matrice en déplacements et corriger celui-ci grâce à l'erreur sur la force.

La matrice 2D sera considérée comme un corps possédant 2 degrés de liberté (nous ne considérons que les translations) qui viennent s'ajouter aux degrés de liberté du problème.

Après avoir introduit la matrice de raideur tangente utilisée pour corriger la position de la matrice pilotée, nous vérifierons le bon fonctionnement de l'algorithme sur deux cas tests : le test plan/plan et une simulation d'emboutissage.

## 2.2 L'élément "force"

Nous allons introduire de nouveaux degrés de liberté pour toutes les matrices pilotées en force. Si une matrice est pilotée en force selon une seule direction, nous n'introduirons qu'un seul degré de liberté pour celle-ci. A chaque matrice de contact sont associés des éléments de contact (ce sont des noeuds du maillage). Il faut donc établir un couplage entre les déplacements de ces noeuds et ceux de la matrice de contact de telle manière à ce qu'elle exerce une force donnée sur la structure.

Faire un dessin

Nous nous intéressons ici à un calcul quasi-statique (implicite). Le cas dynamique ne sera pas abordé ici parce qu'il n'est informatiquement pas simple d'étendre les résultats obtenus à ce schéma dans METAFOR (vu son architecture Fortran).

La recherche de l'équilibre d'une structure est un processus incrémental. On incrémente progressivement les charges en jeu (pas de temps) et on recherche, pour chacun de ces pas, une configuration équilibrée. Cette recherche se fait itérativement par l'algorithme de Newton-Raphson : des incréments déplacements de la structure sont calculés en résolvant un système d'équations. La matrice du système est appelée *matrice de raideur tangente* et est assemblée à l'aide de toutes les contributions élémentaires.

Les équations d'équilibre s'écrivent :

$$F_i^{int} = F_i^{ext} \quad \text{où} \quad i = 1, \dots, \text{NDDL} \quad (2.1)$$

avec NDDL, le nombre de degrés de libertés du système. Dans le cadre de la méthode de Newton-Raphson, on linéarise cette dernière équation de la manière suivante :

$$\underbrace{\left( \frac{\partial F_i^{int}}{\partial x_j} - \frac{\partial F_i^{ext}}{\partial x_j} \right)}_{(K_T)_{ij}} \Delta x_j^n = - (F_i^{int}(x^n) - F_i^{ext}(x^n)) = -R_j(x^n) \quad (2.2)$$

où  $K_T$  est la matrice de raideur tangente,  
 $F^{int}$  sont les forces internes,  
 $F^{ext}$  sont les forces externes,  
 $R$  est le résidu d'équilibre,  
 $\Delta x^n$  est l'incrément de déplacement à l'itération  $n$ ,  
 $x_j$  est la position du degré de liberté numéro  $j$  de la structure.

Comme n'importe quel autre degré de liberté, les nouveaux degrés de liberté vont être considérés comme des inconnues du système du processus de Newton-Raphson. Il faudra

donc calculer leurs contributions dans la matrice de raideur totale en déterminant une matrice de raideur élémentaire.

La correction sur les positions (d.d.l. structure et matrices pilotées) s'écrit :

$$x^{n+1} = x^n + \Delta x^n \quad (2.3)$$

Ce processus est poursuivi jusqu'à ce que la norme du résidu d'équilibre soit inférieure à une tolérance fixée par l'utilisateur (généralement  $10^{-3}$ ). Cette norme est calculée exactement de la même manière que dans le cas où il n'y a pas de pilotage en force.

## 2.3 Calcul de la matrice de raideur tangente élémentaire

Les degrés de liberté des matrices de contact pilotées en force vont être couplés avec les noeuds qui sont en contact avec elle. Ce couplage se traduit par une matrice de raideur tangente. Celle-ci sera de dimension :

$$\dim(K_T) = \text{NODDL} * \text{NC} + \text{I} \quad (2.4)$$

où NODDL est le nombre de d.d.l. par noeud de contact,  
 NC est le nombre de noeuds en contact avec la matrice considérée,  
 I est le nombre de d.d.l. de la matrice qui sont pilotés en force.

On voit que la dimension de cette matrice n'est pas une constante au cours du calcul puisque elle dépend du nombre de noeuds en contact (inconnu a priori).

Pour la construire, on va faire une boucle sur les noeuds en contact avec la matrice et chaque noeud ajoutera sa contribution. Dans les formules qui suivent, nous nous limitons au cas 1D pour réduire la taille des matrices.

Ecrivons la matrice de raideur lorsqu'il n'y a qu'un noeud en contact :

$$K_T = \begin{pmatrix} K_{EC/EC} & K_{EC/M} \\ K_{M/EC} & K_{M/M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{EC_i}^{int}}{\partial x_{EC_i}} - \frac{\partial F_{EC_i}^{ext}}{\partial x_{EC_i}} & \frac{\partial F_{EC_i}^{int}}{\partial x_M} - \frac{\partial F_{EC_i}^{ext}}{\partial x_M} \\ \frac{\partial F_M^{int}}{\partial x_{EC_i}} - \frac{\partial F_M^{ext}}{\partial x_{EC_i}} & \frac{\partial F_M^{int}}{\partial x_M} - \frac{\partial F_M^{ext}}{\partial x_M} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

où les indices  $M$  sont relatifs à la matrice de contact pilotée et les indices  $EC$  sont relatifs à l'élément de contact.

Remarquons que  $F_M^{ext}$  est la force résultante imposée appliquée par le corps en contact sur la matrice et dont l'amplitude est fixée par l'utilisateur. Ce n'est donc pas la force exercée par la matrice sur le corps, mais bien son opposée par le principe de l'action et de

*Faire un dessin*

la réaction. Si on appelle  $F$  la force appliquée par la matrice sur le corps (c'est ce nombre qui est introduit par l'utilisateur), on a :

$$F_M^{ext} = -F \quad (2.6)$$

On remarque directement que les dérivées spatiales de la force imposée sont nulles. La force interne de la matrice de contact est la résultante des forces externes sur les noeuds de contact. D'une manière compacte, on écrit :

$$F_M^{int} = - \sum_{k=1}^{NC} F_{EC_k}^{ext} \quad (2.7)$$

L'élément  $K_T(1, 1)$  est déjà calculé par METAFOR. La dérivée des forces internes par la routine `MATANUM.FOR` (raideur numérique) ou `MATAN.FOR` (raideur analytique) et la dérivée des forces externes par `CONTACT.FOR`.

Examinons les autres éléments : L'élément  $K_T(2, 1)$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_M^{int}}{\partial x_{EC_i}} - \frac{\partial F_M^{ext}}{\partial x_{EC_i}} &= \frac{\partial F_M^{int}}{\partial x_{EC_i}} \\ &= - \sum_{k=1}^{NC} \frac{\partial F_{EC_k}^{ext}}{\partial x_{EC_i}} \\ &= - \frac{\partial F_{EC_i}^{ext}}{\partial x_{EC_i}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

L'élément  $K_T(1, 2)$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{EC_i}^{int}}{\partial x_M} - \frac{\partial F_{EC_i}^{ext}}{\partial x_M} &= - \frac{\partial F_{EC_i}^{ext}}{\partial x_M} \\ &= \frac{\partial F_{EC_i}^{ext}}{\partial x_{EC_i}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

L'élément  $K_T(2, 2)$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_M^{int}}{\partial x_M} - \frac{\partial F_M^{ext}}{\partial x_M} &= \frac{\partial F_M^{int}}{\partial x_M} \\ &= - \sum_{k=1}^{NC} \frac{\partial F_{EC_k}^{ext}}{\partial x_M} \\ &= \sum_{k=1}^{NC} \frac{\partial F_{EC_k}^{ext}}{\partial x_{EC_k}} \end{aligned} \quad (2.10)$$



Si  $RTC = -\frac{\partial F_{EC_k}^{ext}}{\partial x_{EC_k}}$  est déjà calculé par METAFOR, pour chaque élément de contact, il est donc possible de compléter la matrice de raideur tangente globale en assemblant la matrice :

$$K_T^{EC_i} = \begin{pmatrix} RTC & -RTC \\ RTC & -RTC \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

### 2.3.1 Vérification pour un élément 1D

Soit un élément 1D (ressort) dont on a fixé un des deux degrés de liberté. Nous avons ici 2 d.d.l. : le déplacement du deuxième d.d.l. du ressort et la position de la matrice de contact.

*Faire un dessin*

Supposons que le ressort a une raideur  $k$  et qu'en ce qui concerne le contact, on utilise une loi de pénalisation avec un coefficient de pénalité  $\alpha$ . Initialement, les deux d.d.l. sont confondus.

Ici,  $RTC = \alpha$ . La loi constitutive du ressort est :  $k\Delta x = F^*$  avec  $F^*$ , la force interne au ressort. On impose que la matrice exerce une force  $F$  sur le ressort (on a  $F = F^*$ ).

Calculons l'incrément de déplacement du système :

$$\begin{pmatrix} k + \alpha & -\alpha \\ \alpha & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta x_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

On a, en développant la deuxième équation du système :

$$\alpha(\Delta x - \Delta x_M) = -F \quad (2.13)$$

et en utilisant ce résultat dans la première :

$$k\Delta x = F = F^* \quad (2.14)$$

Autrement dit, on obtient, dans ce cas très simple, les deux équations d'équilibre (matrice et ressort) vérifiées en une itération.

### 2.3.2 Remarque sur la symétrie de la matrice

Il serait préférable d'obtenir une matrice de raideur symétrique pour des raisons évidentes d'inversion. Pour ce faire, nous allons multiplier les équations relatives aux matrices pilotées en force par -1.

Ceci revient à considérer que la force qu'on applique sur le poinçon est une force interne et que la résultante des forces de contact est une force externe qui vient s'appliquer sur la

matrice. C'est-à-dire :

$$F_M^{int} = -F \quad (2.15)$$

$$F_M^{ext} = - \sum_{k=1}^{NC} F_{EC_k}^{ext} \quad (2.16)$$

On obtient donc :

$$K_T^{EC_i} = \begin{pmatrix} \text{RTC} & -\text{RTC} \\ -\text{RTC} & \text{RTC} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Avec, dans le second membre la force exercée par la matrice sur la structure ( $F$ ) et non plus l'opposée.

## 2.4 Applications

### 2.4.1 Introduction

Pour vérifier la bonne implémentation de l'algorithme, nous considérons deux cas 2D assez simples. Ces deux simulations sont tirées des références [9, 20].

Le premier est le test plan/plan très utile pour déterminer de manière expérimentale le coefficient de frottement global d'un processus de serrage de tôle entre deux matrices planes.

Le second test est une simulation complète d'emboutissage en état plan de déformation. La partie intéressante du calcul sera la mise en charge du jonc et le maintien d'une force constante sur ce dernier durant tout le processus.

Ces deux calculs ont été étudiés récemment avec METAFOR en imposant un déplacement équivalent par essai et erreur.

Un troisième calcul, non présenté dans ce rapport, mettant en jeu une tôle cintrée sur un cylindre lors d'un test de frottement a été analysé sans succès. En effet, le jeu de données de ce test provient d'un cas test réalisé pour le congrès NUMIFORM'98 par D.Graillet [9] mais il n'est pas possible de le faire converger avec la version actuelle des routines de contact. Il faudra donc attendre une nouvelle actualisation de METAFOR pour profiter de derniers développements de D.Graillet et pour faire converger ce test.

Remarquons que dans ce dernier cas-test, l'impossibilité de faire converger le processus ne vient pas de l'algorithme de pilotage, qui jusqu'au bout, maintient la force à la valeur imposée par l'utilisateur.

Module de Young	$E = 69804 \text{ MPa}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
Loi d'écrouissage	$\sigma_0 = 589 (10^{-4} + \varepsilon^p)^{0.216} \text{ N/mm}^2$
Coefficient de frottement	$\mu = 0.15$

TAB. 2.1: Caractéristiques du matériau pour le test plan/plan

## 2.4.2 Le test plan-plan

### 2.4.2.1 Description du test

Le test plan/plan est un test tribométrique simple de frottement. La demi géométrie étudiée est représentée à la figure 2.1. Le chargement de ce cas test se déroule comme suit :

- On impose tout d'abord une force de serrage de 600 Newtons sur le patin.
- On impose ensuite un déplacement de 10 mm à l'extrémité droite de la tôle en maintenant la force de serrage a une valeur constante.

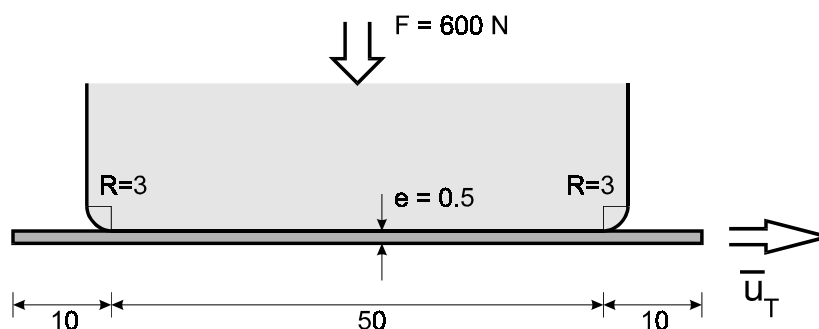


FIG. 2.1: Géométrie de la moitié supérieure du test plan-plan (longueurs en mm)

Les caractéristiques du matériau utilisé sont données dans la tableau 2.1.

On utilise 2 éléments sur la hauteur et 110 sur la longueur. Ce qui donne 1206 degrés de liberté.

### 2.4.2.2 Résultats numériques

Le calcul est effectué en 185 pas de temps et 308 itérations.

La figure 2.2 montre l'évolution des deux résultantes intéressantes dans ce cas test : la force verticale imposée sur le patin et celle qui est nécessaire pour imposer le déplacement de l'extrémité.

On constate que la force est imposée correctement. En effet, on obtient une erreur

proportionnelle à la tolérance du processus de Newton-Raphson (ici, fixée à  $10^{-6}$ ). En choisissant une autre précision, nous aurions pu améliorer cette erreur (qui n'est pas visible à l'oeil nu sur ce graphe).

Pour ce qui est de la force horizontale, on remarque deux “sauts” sur la courbe. Nous n'avons pas déterminé avec certitude l'explication de ce phénomène. Il semblerait que ces sauts proviennent de la perte de contact d'un noeud. En effet, à ce moment, les forces doivent se redistribuer sur un nombre de noeuds plus faible, d'où une résultante plus importante par noeud. Certains noeuds qui glissaient au pas de temps précédent redeviennent momentanément collants.

D'autres tests devraient être effectués en raffinant le maillage pour valider cette explication. Quoi qu'il en soit, ce phénomène ne provient pas de l'algorithme de pilotage en force étudié ici.

Si, maintenant, on regarde les valeurs de ce graphe, on constate qu'on obtient bien, quand la tôle glisse, un rapport de force de 0.15 entre les composantes verticales et horizontales, c'est-à-dire égal au coefficient de frottement choisi.

Tracer les  
épaisseurs -  
montrer la  
différence avec  
un  
rigide/plastique

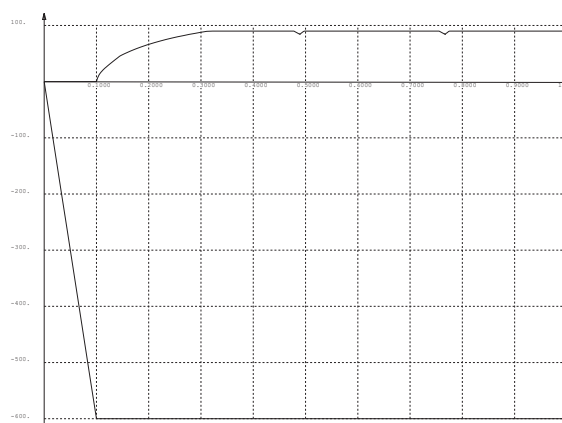


FIG. 2.2: Force verticale sur le patin (imposée à -600 N) et force horizontale.

A titre d'information, nous avons tracé, sur le maillage final (figure 2.3), des vecteurs représentant les forces extérieures qui sont ici les forces de contact et les réactions sur l'axe de symétrie.

### 2.4.2.3 Un autre cas de charge

Pour tester la robustesse de l'algorithme présenté, nous avons effectué le même cas test avec un cas de charge complexe comportant des points anguleux, des charges et des décharges. La figure 2.4 montre la force imposée et la force obtenue. Il n'y a pas de différence à la précision choisie (ici  $10^{-3}$ ).

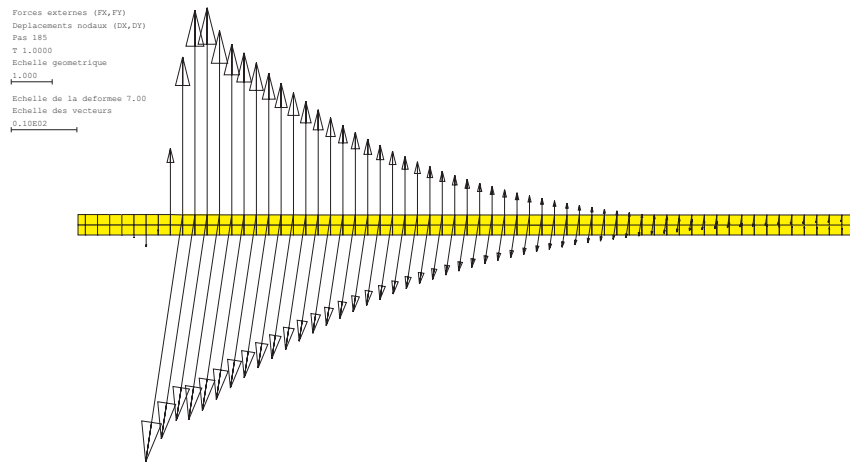


FIG. 2.3: Forces externes au dernier pas.

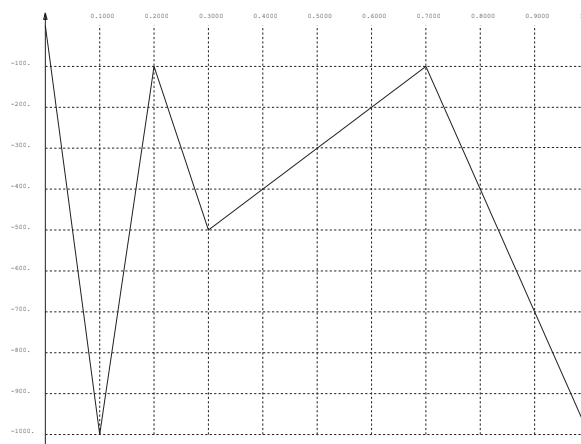


FIG. 2.4: Fonction de chargement complexe.

## 2.4.3 Le test d'emboutissage complet

### 2.4.3.1 Description du test

Nous allons simuler un test d'emboutissage complet. La géométrie du test est présentée à la figure 2.5.

Les dimensions relatives à la figure 2.5 ainsi que les caractéristiques du matériau utilisé sont donnés ci-dessous :

$R_1$	=	6 mm	$E$	=	200000 MPa
$R_2$	=	3 mm	$\nu$	=	0.3
$R_3$	=	6.75 mm	$\sigma_0(\varepsilon^p)$	=	$200(1 + 2.5 \varepsilon^p)$ N/mm <sup>2</sup>
$R_4$	=	6.35 mm	$\mu$	=	0.15
$R_5$	=	50.8 mm	Longueur tôle	=	179.18 mm
$L_1$	=	25 mm			
$L_2$	=	59.18 mm			
$e$	=	0.86 mm			

### 2.4.3.2 Résultats numériques

Ce cas test pose beaucoup de problèmes pour l'algorithme présenté dans ce rapport. En effet, si on veut réaliser l'emboutissage complet, c'est-à-dire les deux phases (descente du jonc puis descente du poinçon sphérique), nous sommes obligés d'utiliser un coefficient de pénalité assez petit. Nous utilisons 100 N/mm. Ceci produit des gaps normaux de l'ordre de 0.23 mm (plus d'un quart de l'épaisseur de la tôle) !

Cependant, on pourrait montrer que, malgré ces pénétrations, nous obtenons des résultats très proches de l'expérience. Une matrice pilotée en déplacement avec des valeurs données par une approche essais-erreurs donne des résultats bien plus éloignés de l'expérience même si on peut, dans ce dernier cas, utiliser un coefficient de pénalité beaucoup plus élevé ( $10^4$  N/mm par exemple). En effet, il est très difficile de trouver la fonction de déplacement qui conduit à une charge constante. Bien sûr, si on arrivait à la déterminer, les résultats seraient meilleurs puisque la pénalité utilisée peut être choisie plus grande.

Pour améliorer les résultats, il faudrait pouvoir séparer les deux phases en deux calculs. Dans la première phase, on piloterait la matrice en déplacements jusqu'à l'obtention de la force de serrage voulue. On utiliserait, pour ce faire, une grande pénalité. Dans la seconde phase, on reprendrait le premier calcul en pilotant la matrice en force durant la descente du poinçon. A notre avis, la pénalité pourrait rester relativement élevée (en général, si le serrage a pu être calculé jusqu'au bout, le reste du calcul ne pose pas de problème).

Nous avons essayé d'automatiser une telle procédure (pilotage en force et déplacement au cours du même calcul) mais la tâche est beaucoup plus compliquée que prévu et nous avons abandonné provisoirement.

Une autre manière de faire serait de modifier la pénalité en cours de calcul, juste avant la phase 2 ou d'utiliser la technique du lagrangien augmenté.

La figure 2.6 montre la déformée à la fin du calcul. On constate que les mâchoires du jonc ne sont pas complètement serrées. Cependant, nous n'obtenons pas les valeurs de déplacement de [20].

La figure 2.7 représente le déplacement de la matrice pilotée en fonction de l'avancement

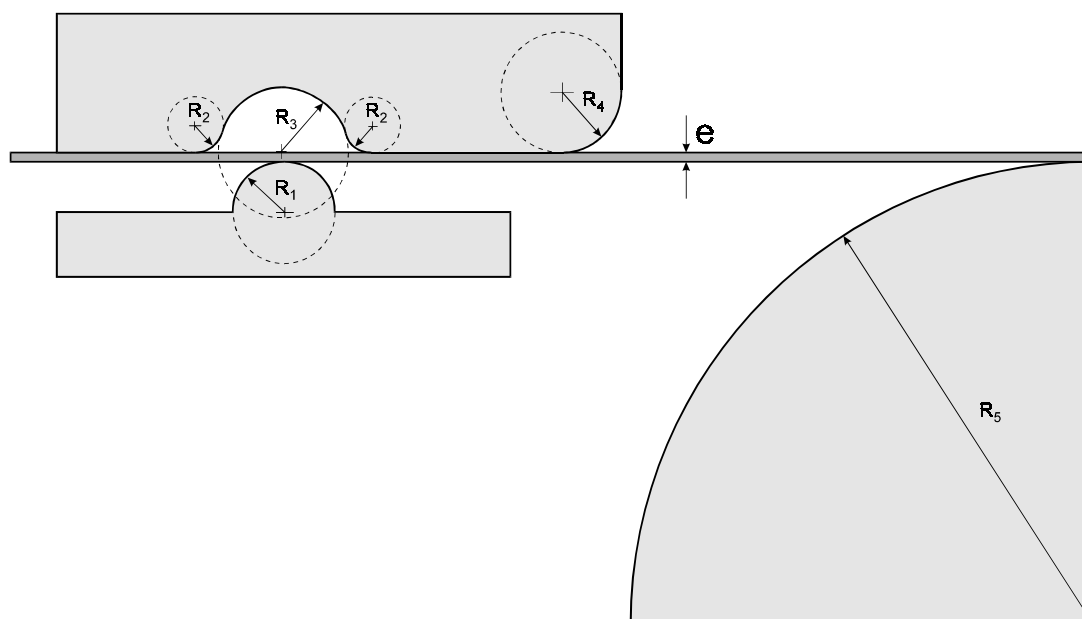


FIG. 2.5: Géométrie initiale du test d'emboutissage complet.

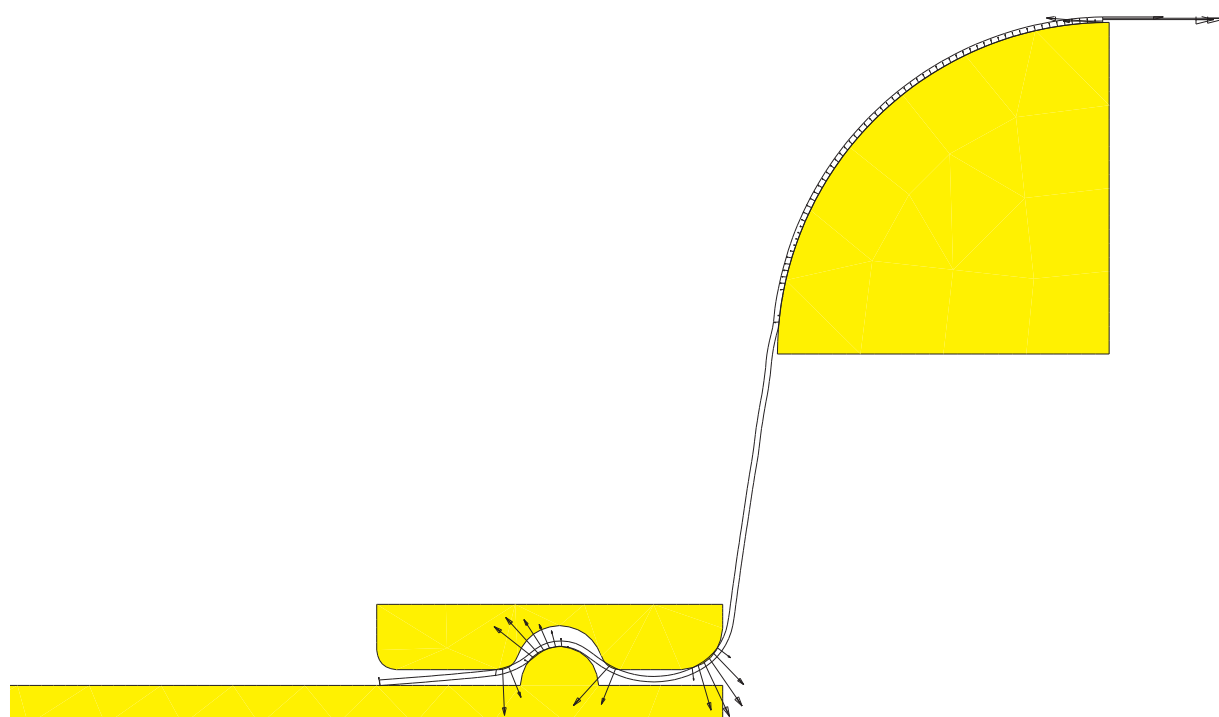


FIG. 2.6: Déformée de la tôle à la fin de l'opération d'emboutissage.

du poinçon.

*Comparer la solution avec une solution obtenue avec le déplacement moyen ou final*

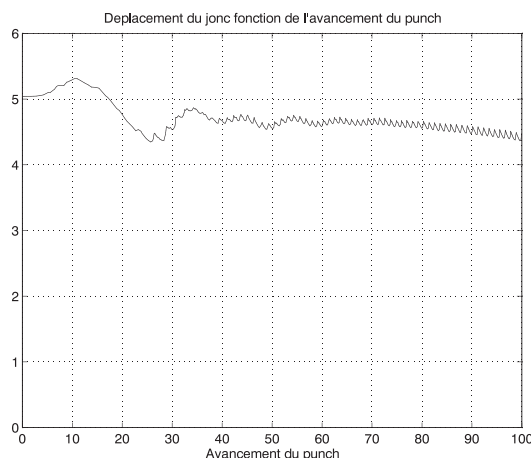


FIG. 2.7: Déplacement du jonc en fonction de l'avancement du punch.

## 2.5 Conclusions

L'algorithme de pilotage en force est un atout précieux pour pouvoir simuler efficacement les processus de formage des matériaux. Dans le cadre de ce travail sur la lubrification, il nous permettra de simuler d'une manière exacte les tests tribométriques usuels tels que le test plan/plan.

Il ne faut cependant pas considérer ce travail comme étant terminé : beaucoup d'améliorations sont possibles. Signalons, par exemple, les limitations suivantes :

- Seul le pilotage en translation selon  $x$  et  $y$  est possible actuellement. Le pilotage en rotation pose d'autres problèmes, notamment pour le calcul de la matrice de raideur tangente élémentaire.
- Il n'est pas possible de piloter un des deux d.d.l. d'une matrice en force et l'autre en déplacement (non nul). Ceci pourrait être facilement réalisé en modifiant la routine `POSMAT.FOR`.
- Les routines d'assemblage (`SKYASS.FOR`) et de pré-assemblage (`PROMI1.FOR`) ne sont pas écrites pour le solveur itératif. Pour pouvoir utiliser le solveur itératif, il suffira de modifier les routines `RBASS.FOR` et `PROMI1.FOR`.
- La largeur de bande n'est pas optimisée : les degrés de liberté des matrices de contact sont placés à la fin de la matrice de raideur ce qui conduit à une augmentation considérable de la largeur de bande. Cependant, ceci ne ralentit pas trop le code puisque, en pratique, il y a peu de matrices de contact et, en conséquence, la largeur de bande moyenne reste pratiquement à la même valeur. Optimiser la largeur de bande nécessite des modifications dans la routine de Sloan.



- Les routines sont, pour l'instant, incompatibles avec les problèmes thermiques et le contact thermomécanique. En effet, aucune modification n'a été faite dans les routines thermiques. La principale raison est que le contact thermomécanique est mal géré dans la version actuelle de METAFOR (les vecteurs de localisation sont calculés à un mauvais endroit).

Ces améliorations pourront être étudiées lorsque l'avancement de notre travail de thèse le demandera.



# Chapitre 3

## Théorie de la lubrification

### 3.1 Introduction

#### 3.1.1 Tribologie et éléments finis

La simulation correcte du frottement est une tâche très difficile. La tribologie, science étudiant les interactions entre deux surfaces, modélise les phénomènes qui entrent en jeu lors du contact de la pièce à déformer et de l'outil. Malgré les récents progrès réalisés par les tribologues, la plupart des codes éléments finis dispose d'une seule et unique loi pour modéliser le frottement. Celle-ci a été publiée la première fois par G. Amontons en 1699 et appliquée à des problèmes d'ingénieur en 1779 par Coulomb [16]. Elle traduit le fait que la résistance de frottement lors d'un glissement est proportionnelle à la pression de contact.

Cette loi de 300 ans n'a pas encore été remplacée alors que chacun sait qu'elle appréhende très mal la réalité. Ceci s'explique par la difficulté de cerner tous les facteurs qui interviennent lorsque deux surfaces glissent l'une sur l'autre. La vitesse de glissement, la pression de contact, la température, l'état de surface, les caractéristiques du matériau, la géométrie, la présence de lubrifiant sont les principaux paramètres du problème. Il ne faut cependant pas oublier que l'environnement, les impuretés, l'usure de la tôle jouent aussi un rôle qui est, bien que très significatif, difficilement quantifiable [12].

*Parler du  
comportement  
des aspérités*

La tribologie moderne commence à apporter des réponses au problème du frottement lubrifié et le calcul de certains types d'opérations de formage de matériau (emboutissage, laminage, extrusion) est possible sous certaines hypothèses. Les travaux de Wilson [59–64] sur le sujet sont remarquables. Les résultats sont cependant très difficiles à mettre en oeuvre par la méthode des éléments finis parce que les formules établies dépendent généralement du cas traité. Ainsi, le travail des tribologues suppose très souvent que l'on connaît à tout instant la déformée du corps étudié. Les formules relatives au contact entre le rouleau de laminage et de la tôle sont donc complètement différentes de celles relatives au contact

entre le poinçon et la matrice d'une opération d'emboutissage.

Lorsqu'on cherche un peu plus de généralité dans la procédure de résolution, on constate qu'il n'existe pas grand chose à l'heure actuelle. Dans la plupart des publications sur la méthode des éléments finis, on retrouve la loi de Coulomb ou des variantes de celle-ci qui améliorent légèrement les résultats. Par exemple, ter Haar [56] utilise plusieurs coefficients de frottement pour les différents types de contact en emboutissage (tôle/serre flan, tôle/épaule de la matrice, tôle/poinçon).

Des lois un peu plus élaborées sont basées sur les courbes de Stribeck [11, 38, 56]. Celles-ci donnent un coefficient de frottement local lorsque la pression de contact, la vitesse de glissement et la viscosité du lubrifiant sont connues. Nous nous attarderons sur ce type de loi dans ce chapitre.

Toujours par la méthode des éléments finis, certains auteurs tentent d'inclure les résultats analytiques fournis par la tribologie dans leur code de calcul.

Par exemple, Shen et Sun [10] utilisent des éléments finis de membranes et résolvent l'équation de Reynolds pour traiter l'emboutissage d'une tôle par un poinçon cylindrique. D'autres géométries ne sont pas considérées et le rayon du poinçon apparaît dans toutes les formules. Abo-Elkhier [1] simule le laminage à froid par une méthode similaire.

Montmitonnet [40] discrétise par différences finies l'équation de Reynolds pour trouver l'épaisseur de film d'huile dans le contexte d'un calcul par élément fini de l'écrasement d'un lopin de matière (upsetting).

Liu [37] va plus loin en discrétisant l'équation de Patir & Cheng [43, 44] pour tenir compte de l'influence des aspérités lorsque celles-ci perturbent l'écoulement du lubrifiant sans être en contact avec celles de la surface opposée (film d'huile mince).

Un autre article de Liu [36] présente une résolution couplée des équations d'équilibre de la tôle et celles de Navier-Stokes pour le lubrifiant. Le film d'huile est maillé, tout comme la tôle. On montre que lorsque le nombre d'éléments utilisés pour discrétiser le film d'huile augmente, on retrouve les résultats de l'article précédent (le temps de calcul, non fourni, doit cependant être largement supérieur).

Mis à part ces deux derniers exemples, un coupage fluide/structure pour le traitement du contact dans un code de calcul par élément fini tel que METAFOR n'existe pas encore.

Le but final de ce travail de thèse est d'arriver à introduire dans METAFOR des lois de frottement plus représentatives de la réalité physique que la loi de Coulomb. Nous avons commencé par implémenter des lois de type Stribeck et nous comptons poursuivre en augmentant progressivement la difficulté. La prochaine étape consistera à retrouver les résultats obtenus par Liu. Nous essayerons alors d'étendre le modèle pour pouvoir traiter les régimes de lubrification plus complexes où les aspérités entrent en contact et se déforment plastiquement.

Nous ne nous attendons pas à obtenir des résultats aussi précis que Wilson lorsqu'il considère un cas particulier. Nous essayerons seulement de formuler le problème d'une manière générale par la méthode des éléments finis pour pouvoir traiter de manière identique toutes les opérations de mise à forme courantes et obtenir des résultats meilleurs qu'avec la loi de Coulomb.

## 3.1.2 Lois de frottement

### 3.1.2.1 Introduction

Le frottement joue un rôle important dans les opérations de mise à forme des matériaux (laminage, forgeage, etc). Ce rôle est d'autant plus prononcé qu'on considère des produits minces et donc des opérations telles que le laminage à froid et l'emboutissage. En effet, le rapport entre la surface du corps et son volume est élevé et, en conséquence, les effets surfaciques tels que le frottement sont importants.

Nous présentons, ci-dessous, les différentes lois globales de frottement généralement rencontrées dans les codes de calcul de grandes déformations. Ces lois ne tiennent pas compte des effets locaux tels que la pression, la vitesse, la température locale, etc.

### 3.1.2.2 Lois globales

La plus célèbre loi est celle de Amontons-Coulomb. Le frottement est décrit globalement par un paramètre adimensionnel  $\mu$  (coefficient de frottement) qui exprime le rapport entre la force de cisaillement et la force normale de contact lorsque les deux corps glissent l'un sur l'autre. Dans ce cas, la force de frottement a la même direction que le vecteur vitesse relatif entre les deux corps en contact et est de sens opposé. Le coefficient de frottement est supposé indépendant de l'aire de contact ainsi que de tous les paramètres physiques locaux.

La loi s'exprime mathématiquement par :

$$F_T \leq \mu F_N \quad (3.1)$$

La valeur  $\mu F_N$  est donc une limite supérieure pour la force de frottement. Si les deux corps ne glissent pas l'un sur l'autre, la force de frottement est une inconnue du problème.

Numériquement, la loi de Coulomb est implémentée dans METAFOR grâce à la méthode de la pénalité. Nous décrivons cette méthode dans la section 3.3.3.1.

Quelques variantes ont été proposées par la suite. Le *modèle d'Orowan*, par exemple, définit le domaine de validité de la loi de Coulomb. En effet, il n'est pas pensable que

l'effort de frottement produise un cisaillement supérieur au cisaillement maximum calculé par le critère de plasticité utilisé. Si cette limite est dépassée, le matériau le moins résistant commencera à plastifier et la force de frottement n'augmentera plus (en considérant l'absence d'écrouissage). Cette valeur maximale est donnée par  $0.5 \sigma_Y$  dans le cas du critère de Von-Mises et  $0.577 \sigma_Y$  pour le critère de Tresca ( $\sigma_Y$  est la limite apparente d'élasticité).

Le modèle d'Orowan-Tresca n'est pas implémentée dans METAFOR pour deux raisons :

- Le contact calculé aux noeuds sur la frontière du maillage. Or, la limite apparente d'élasticité est connue uniquement aux points de Gauss des éléments. L'application de la loi d'Orowan nécessite donc une extrapolation des informations stockées aux points de Gauss vers les noeuds. Cette opération peut donner, dans certains cas, une très mauvaise approximation de la limite apparente d'élasticité réelle au noeud. La limite supérieure calculée n'est donc pas fiable.
- Cette loi de frottement est toujours globale. En conséquence, elle est sujette aux mêmes critiques que la loi de Coulomb. En particulier, la détermination du coefficient de frottement reste difficile et sa valeur dépend du cas envisagé.

Un autre modèle, le *modèle de Tresca*, définit la relation entre la contrainte tangentielle de l'interface et la limite d'élasticité du matériau. On obtient :

$$\tau = m \tau_Y, \quad \text{avec} \quad \tau_Y = \sigma_Y/2 \text{ ou } \sigma_Y/\sqrt{3}. \quad (3.2)$$

où  $m$  est le facteur de cisaillement.

Le *modèle de Norton-Hoff* est légèrement plus sophistiqué que les trois autres. Il établit une relation entre la contrainte de cisaillement due au frottement et la vitesse de glissement relative des corps l'un par rapport à l'autre. Elle s'exprime par :

$$\tau = -\beta \|v\|^n \frac{v_g}{\|v_g\|} \quad (3.3)$$

où  $\beta$  est un paramètre à déterminer en fonction des caractéristiques surfaciques des corps en contact et  $n$ , en fonction de la rhéologie de l'interface. Ces deux valeurs sont cependant difficiles à déterminer expérimentalement.

### 3.1.2.3 Difficultés des modèles globaux

Une première difficulté de ces modèles est de déterminer les coefficients  $\mu, m, \beta, n$  pour obtenir une bonne simulation de la réalité.

Bien qu'il existe des expériences simples pour déterminer un coefficient de frottement global dans des conditions simples, il n'est jamais assuré que la valeur trouvée à l'aide de ce test de frottement est applicable à une opération de mise à forme particulière. En effet, sa valeur dépend de nombreux paramètres. Nous en citons quelques-uns ci-dessous :

- Les caractéristiques des matériaux (limite d'élasticité, écrouissage, anisotropie, etc) en présence joue un grand rôle [21]. En particulier, l'état de surface de la tôle, de

Rapport avec  
Tresca plus  
haut ?

l'outil, de la matrice influence le frottement (aciers revêtus ou non, couche de zinc protégeant de la corrosion, aspérités, défauts). De plus, dans le cas du laminage, pour faciliter le transport du lubrifiant, il est courant de procéder à des opérations de gravage des cylindres (grenaillage, Electro discharge Technology, Lasertex, Electron beam Technology). Ces opérations influencent le comportement du lubrifiant et donc le frottement entre la tôle et l'outil.

- L'analyse du comportement du lubrifiant, si on en utilise un, est aussi capitale pour déterminer les conditions de frottement. Les caractéristiques du lubrifiant (viscosité) sont importantes mais aussi la façon dont la lubrification est effectuée lors du processus réel.
- On remarque aussi une influence de la pression, de la vitesse et de la température. Ces grandeurs vont influencer le comportement du lubrifiant car la viscosité est généralement une fonction croissante de la pression et décroissante de la température. De plus, la résolution des équations du mouvement du lubrifiant montre que la force de frottement dépend directement de ces variables (voir la solution de l'équation de Reynolds).
- Le frottement dépend aussi des impuretés (oxydes, usure, ...) présentes entre les deux corps en contact. Une connaissance de la quantité d'oxyde ou de particules libres sur les surfaces n'est pas suffisante. Une loi d'évolution de ces grandeurs est nécessaire parce qu'il existe des réactions chimiques et un endommagement des surfaces lors de l'opération de mise à forme.
- Enfin, le frottement dépend énormément de la géométrie étudiée et, donc, du processus envisagé. Lors d'une opération d'emboutissage, on remarque, par exemple, que le frottement sur les épaules de la matrice (petit rayon de courbure), n'est pas le même que celui présent entre la tôle et le poinçon ou encore la tôle et le serre flan [56]. Un effet direct de la géométrie est la rotation des grains de métal qui constituent la tôle : si la tôle subit une grande rotation non rigide, la rotation des grains et le réarrangement de ceux-ci provoque l'apparition de nouvelles aspérités et, par conséquent, des conditions de contact différentes par rapport à une tôle non déformée.

### 3.1.2.4 Solutions envisageables

Pour améliorer la prise en compte du frottement dans le cadre d'un code de calcul par éléments finis, on peut envisager plusieurs solutions. Nous en présentons trois, dans l'ordre de difficulté de mise en oeuvre croissante.

- Utiliser un  $\mu$  variable suivant le type de contact (serre-flan, épaule de la matrice, poinçon, ...) et basé sur l'expérience. C'est la solution proposée par ter Harr [56]. Elle nécessite un dispositif expérimental complet et les résultats obtenus pour une simulation ne sont pas directement exploitables pour un autre type de processus de mise à forme. De plus, si on modifie un paramètre tel que la vitesse d'avancement du poinçon pour un emboutissage, ou la force exercée sur les serre-flans, le travail doit être recommencé. cette méthode revient à effectuer une moyenne des effets locaux du

frottement non pas sur tout le problème considéré mais plutôt sur plusieurs endroits où les valeurs obtenues sont a priori fort différentes. Par conséquent, nous décidons de ne pas retenir cette solution dans le cadre de cette thèse.

- Utiliser un  $\mu$  local dépendant de paramètres locaux. Cette solution est déjà beaucoup plus proche de la physique du phénomène. En effet, on n'essaye plus de moyenner l'influence locale du frottement à l'aide d'un coefficient global. On utilise la courbe de Stribeck qui est obtenue en effectuant différents tests de frottement (test plan/plan par exemple) pour plusieurs valeurs des paramètres intervenant dans le problème (pression, vitesse relative et viscosité du lubrifiant). La courbe donne le coefficient de frottement global obtenu et celui-ci est ensuite utilisé localement avec une loi de Coulomb classique. Nous avons mis au point ce type de modèle dans METAFOR.
- Utiliser un modèle couplant le lubrifiant, considéré comme un fluide newtonien et le matériau solide. C'est la solution proposée par Liu [36, 37]. Les équations de Navier-Stokes ou celles de Reynolds sont résolues pour le lubrifiant et l'effort de frottement est déduit des résultats obtenus. Nous envisageons de mettre au point un tel algorithme dans le courant de notre deuxième année de bourse.

Comme nous l'avons déjà dit, la tribologie a déjà apporté beaucoup de solutions à l'heure actuelle et des modèles complexes existent (bien que particularisés à des géométries précises) ; ils ne sont cependant pas encore appliqués à la méthode des éléments finis dans le cadre d'une formulation générale.

## 3.2 Tribologie

### 3.2.1 Introduction

Pour étudier le contact lubrifié entre solides, on définit, en tribologie, quatre grands régimes de lubrification [61] à l'aide du paramètre  $h/\sigma$ . Celui-ci représente le rapport de la hauteur du film d'huile ( $h$ ) et de la hauteur moyenne des aspérités ( $\sigma$ ). La figure 3.1 montre ces quatre régimes de lubrification.

Dans les sections suivantes, nous décrivons brièvement chacun de ces quatre régimes. Ceux-ci seront à la base du modèle général que nous envisageons de mettre au point. La procédure de détermination du régime de lubrification local à un instant donné sera déterminé comme suit : lors de la présence de contact entre corps, il nous faudra d'abord déterminer localement le régime de lubrification dans lequel on se trouve. Dans cette optique, nous modéliserons le lubrifiant comme un troisième corps interagissant avec les solides environnants. Pour décrire cette interface, il nous faudra, outre les variables externes ("vitesse relative de glissement" et "pression de contact") ajouter au modèle trois nouvelles variables internes : l'épaisseur du film d'huile  $h$  et la rugosité de chacun des corps en présence, soit  $\sigma_a$  et  $\sigma_b$ , avec la grandeur composite  $\sigma$  définie comme  $\sigma = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}$ . En se basant sur l'analogie avec les éléments finis cinématiquement admissibles, la grandeur cinématique  $h$



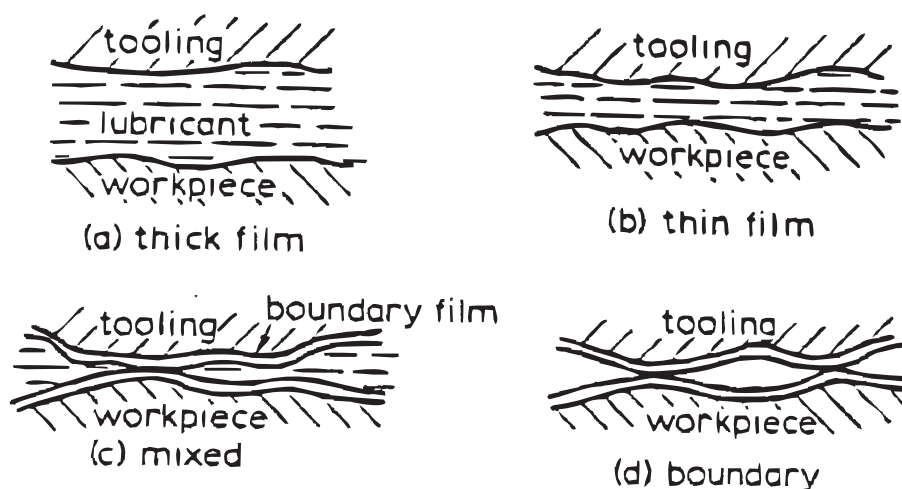


FIG. 3.1: Les quatre régimes de lubrification

sera discrétisée tandis qu'une équation d'évolution pour  $\sigma_a$  et  $\sigma_b$  devra être intégrée temporellement (de manière similaire à une loi constitutive hypoélastique). Une fois le système intégré, le régime de lubrification sera déterminé en fonction des valeurs locales du rapport  $h/\sigma$ . Dans un premier temps, afin de simplifier le modèle, on supposera  $\sigma_a$  et  $\sigma_b$  constants.

### 3.2.2 Le régime hydrodynamique ou la lubrification par film épais ("thick film")

Ce régime est défini par  $h/\sigma \geq 10$ . Dans ce cas, l'épaisseur du film est significativement plus grande que la taille des aspérités; il n'y a donc aucun contact entre les aspérités des deux corps en présence et, en outre, ces aspérités n'influencent pas significativement l'écoulement du lubrifiant. C'est donc typiquement la situation où les équations de Reynolds sont valables en bonne approximation pour le film fluide.

L'équation de Reynolds est déduite des équations de Navier-Stokes sous les hypothèses suivantes :

- Les forces de volume sont négligées. En particulier, la force de gravité n'intervient pas dans le problème. Cette hypothèse est toujours utilisée en tribologie. De plus, l'inertie du fluide est négligée.
- La pression et la viscosité du lubrifiant sont considérées comme constantes sur l'épaisseur du film d'huile. Ceci est vrai tant que l'épaisseur du film d'huile reste petite.
- La courbure des surfaces lubrifiées est très grande en comparaison avec l'épaisseur du film.
- Il n'y a pas de glissement entre le lubrifiant et les deux surfaces le délimitant.
- Le lubrifiant est newtonien.
- L'écoulement du lubrifiant est laminaire.

*Il faudra montrer comment en EF on pourra supprimer certaines de ces hypothèses – forces de gravité, d'inertie, etc*

### 3.2.3 Le régime élasto-hydrodynamique ou la lubrification par film mince (“thin film”)

Ce régime est observé lorsque  $3 \leq h/\sigma \leq 10$ . Dans ce cas, même si les contacts entre aspérités sont rares voire inexistantes, la taille moyenne de ces dernières est telle qu’elles influencent significativement l’écoulement du lubrifiant.

Pour modéliser ce régime, Patir & Cheng [43, 44] et Tripp [57] ont proposé des modifications de l’équation de Reynolds qui semblent donner satisfaction. Celles-ci consistent à multiplier certains termes de l’équation de Reynolds par des facteurs de flux (flow factors) pour traduire la différence de pression due à la présence des aspérités. Les valeurs de ces facteurs sont obtenues par voie numérique en utilisant des moyennes statistiques sur des distributions d’aspérités.

### 3.2.4 Régime mixte

Le régime mixte est atteint lorsque  $1 \leq h/\sigma \leq 3$ . Dans ce cas, la pression d’interface est supportée à la fois par des contacts directs entre aspérités et par la pression du lubrifiant au sein des vallées inter-aspérités. Un modèle représentatif de ce régime est proposé par Sheu et Wilson [54, 63].

Cette théorie tient compte non seulement du fait qu’une fraction (évoluant) de la charge est supportée par le fluide, tandis que l’autre est reprise par le contact entre aspérités, mais qui prend en compte l’aplatissement plastique de ces dernières, ce qui constitue une première difficulté.

Une autre difficulté provient du fait que dans le régime mixte, les mécanismes frictionnels entrant en jeu sont fondamentalement différents en ce qui concerne le comportement au voisinage des aspérités (plateau), où le processus est similaire au cas du régime limite décrit ci-après, et entre celles-ci (vallées), où le mécanisme frictionnel est similaire à celui décrit dans le cas du film mince.

### 3.2.5 Régime limite

Le régime limite est défini par la relation  $h/\sigma < 1$ . Dans ce cas, la charge normale est totalement supportée par les contacts entre aspérités, ce qui ne signifie pas pour autant que la présence du lubrifiant soit insignifiante puisqu’il est tout de même présent en couches ultra-minces (quelques couches moléculaires) évitant ainsi le contact métal-métal.

Pour modéliser ce dernier régime, les avis recueillis dans la littérature divergent. Certains auteurs préconisent l’utilisation d’un coefficient constant, comme dans la loi de Coulomb, tandis que d’autres préfèrent une dépendance du coefficient de frottement avec la

pression. Selon ces derniers auteurs (voir par exemple Monfort [39]), la valeur du coefficient de frottement  $\mu$  diminuerait avec l'augmentation de la pression. Cette décroissance étant de forme exponentielle.

## 3.3 Loi de Stribeck

### 3.3.1 Courbe de Stribeck

La courbe de Stribeck [11, 38, 56] traduit la dépendance du coefficient de frottement vis à vis du paramètre  $H = \eta_0 v/p$ . Ce paramètre n'étant pas adimensionnel, certains auteurs (dont [56]) utilisent plutôt un nombre de Sommerfeld défini par

$$L = \frac{\eta_0 v}{p Ra}, \quad (3.4)$$

où

$p$	est la pression de contact,
$v$	est le module de la vitesse relative de glissement des deux surfaces,
$\eta_0$	est la viscosité du lubrifiant aux conditions normales de température et de pression,
$Ra$	est une mesure de la rugosité combinée des deux surfaces.

*Pq  $\eta_0$  et pas  $\eta$  ?*

*Rapport  $Ra$  avec  $\sigma$  ?*

Jusqu'à présent, nous avons choisi de négliger l'influence de la rugosité des surfaces et nous parlerons, dans la suite, indifféremment du paramètre  $H$  ou  $L$ .

La figure 3.2 présente une courbe de Stribeck. On constate que pour des valeurs faibles du nombre de Sommerfeld, on a un coefficient de frottement élevé. C'est le cas quand la pression est forte (le lubrifiant est écrasé et les aspérités entrent en contact) ou que la vitesse ou la viscosité sont faibles (les effets hydrodynamiques sont alors faibles). On se trouve dans ce cas dans le régime limite où le frottement est maximal.

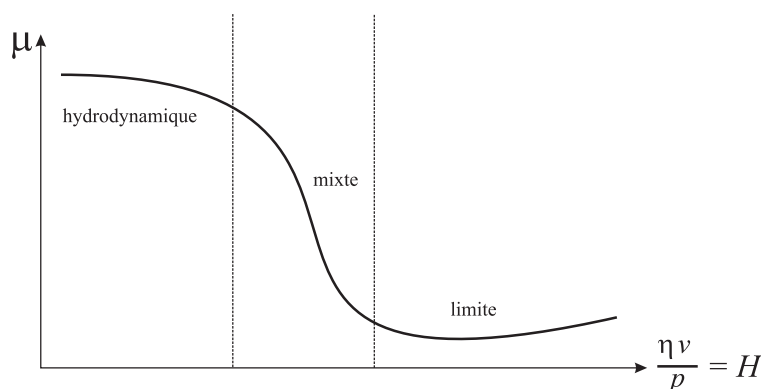


FIG. 3.2: La courbe expérimentale de Stribeck

Lorsqu'on augmente progressivement la valeur de  $L$ , le coefficient de frottement diminue brusquement. Cette variation correspond au régime mixte qui fait la transition entre le régime limite ( $\mu$  élevé) et le régime à film mince ou épais ( $\mu$  petit).

On atteint ensuite le régime hydrodynamique et le coefficient de frottement atteint sa valeur minimale.

Si on décide d'augmenter encore le nombre de Sommerfeld, on constate une légère augmentation du coefficient de frottement qui s'explique par la présence des effets thermiques. En effet, plus la vitesse est élevée, plus la dissipation thermique est importante. Une augmentation de température entraîne une diminution de la viscosité de l'huile et un retour vers le régime mixte [61].

### 3.3.2 Calcul des paramètres dans le contexte E.F.

L'introduction d'une loi de Stribeck dans un code de calcul par éléments finis nécessite le calcul des différentes grandeurs intervenant dans le nombre de Sommerfeld.

Soit NC, le numéro du noeud en contact pour lequel on veut déterminer ces grandeurs.

#### 3.3.2.1 Calcul de la pression

Dans le contexte de la méthode éléments finis (EF), nous n'avons pas accès à la pression nodale sur la surface du maillage mais plutôt aux forces qui agissent en ces noeuds.

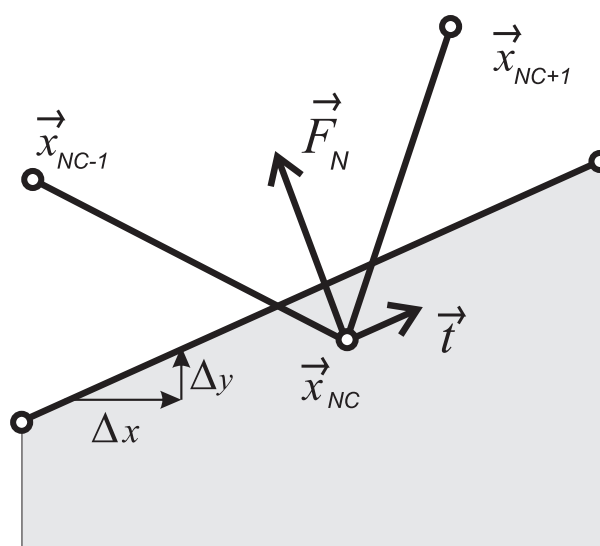


FIG. 3.3: Calcul de la pression

Pour déduire la pression à partir des forces de contact, nous exprimons que la force concentrée au noeud NC est la résultante d'une distribution de pression triangulaire pour laquelle  $p = p_{NC}$  au noeud NC et  $p = 0$  pour les deux noeuds adjacents. On obtient la formule :

$$F_N^{NC} = \frac{|(\vec{x}_{NC-1} - \vec{x}_{NC}) \cdot \vec{t}| + |(\vec{x}_{NC+1} - \vec{x}_{NC}) \cdot \vec{t}|}{2} p_{NC}. \quad (3.5)$$

où toutes les grandeurs sont définies sur la figure 3.3.

Il suffit alors d'inverser la relation (3.5) pour déduire l'inconnue  $p_{NC}$  en fonction de la valeur de la force de contact au même noeud.

### 3.3.2.2 Calcul de la vitesse

La vitesse de glissement relative est assez simple à calculer : nous utilisons simplement une différence finie entre la position finale et initiale du noeud considéré. Il suffit d'y retrancher la valeur de la vitesse locale de la matrice de contact pour obtenir la vitesse relative.

$$\begin{cases} v = \left| \left( \frac{\vec{x}_{NC}^1 - \vec{x}_{NC}^0}{\Delta t} - \vec{V}_M \right) \cdot \vec{t} \right| & \text{si le noeud glisse,} \\ v = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.6)$$

Ce calcul n'est cependant valable uniquement pour des surfaces de contact planes. Dans le cas de contacts avec des surfaces courbes, il serait préférable d'effectuer la différence des abscisses curvilignes sur la matrice pour obtenir une formulation objective (cette méthode est bien sûr valable également dans le cas de surfaces planes mais elle est plus coûteuse).

### 3.3.2.3 Calcul de la viscosité

La viscosité locale dépend, en toute généralité, de la pression et de la température locale. Pour l'instant, nous ne nous occupons pas des effets thermiques. La loi utilisée sera la loi de Barrus où la viscosité varie exponentiellement en fonction de la pression de contact :

$$\eta = \eta_0 \exp(\alpha p) \quad (3.7)$$

D'autres lois plus sophistiquées existent. Il sera intéressant de cerner l'influence des variations de viscosité dans la suite de ce travail.

## 3.3.3 Modélisation numérique de la courbe de Stribeck

Numériquement, la courbe de Stribeck est approximée, soit par trois segments de droite (voir Chertier [11]), soit par une courbe de type arctangente ou tangente hyperbolique (voir

ter Haar [56]). Nous utiliserons ces trois types d'approximations dans METAFOR.

La figure 3.4 montre les différences obtenues par ces trois approximations. L'approximation par des droites est certainement la plus simple et la plus rapide à implémenter mais elle contient deux discontinuités de normale qui ne sont jamais favorables d'un point de vue numérique.

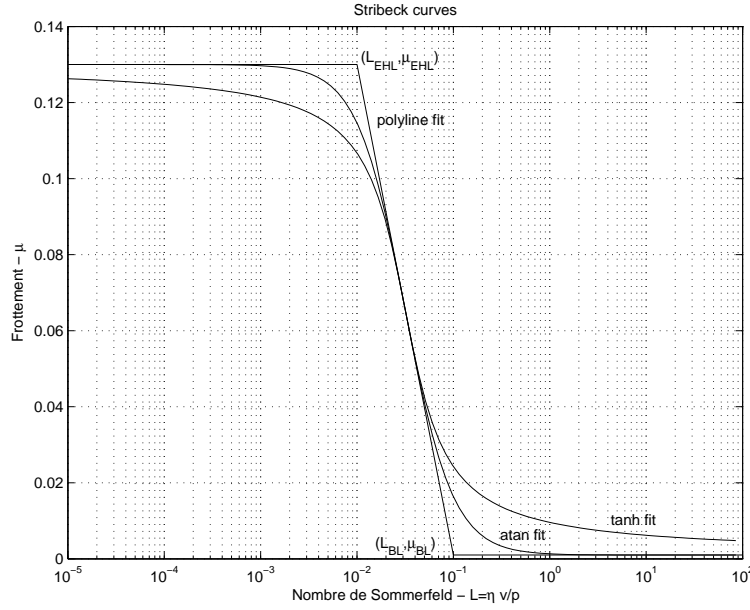


FIG. 3.4: Trois approximations de la courbe expérimentale de Stribeck

D'un point de vue mathématique, si  $L$  est le nombre de Sommerfeld local et si on a préalablement défini le point  $(L_{BL}, \mu_{BL})$  et  $(L_{EHL}, \mu_{EHL})$  comme les points de transition respective du régime limite (Boundary Lubrication) vers le régime mixte et du régime élasto-hydrodynamique (Elasto-Hydrodynamic Lubrication) vers le régime mixte, la formulation de ces trois approximations peut s'écrire comme suit :

- Approximation par ligne brisée :

$$\begin{cases} \mu = \mu_{BL} & \text{si } L < L_{BL} \\ \mu = \mu_{EHL} \frac{\log(L_{EHL}) - \log(L)}{\log(L_{EHL}) - \log(L_{BL})} (\mu_{BL} - \mu_{EHL}) & \text{si } L_{BL} < L < L_{EHL} \\ \mu = \mu_{EHL} & \text{si } L > L_{EHL} \end{cases} \quad (3.8)$$

- Approximation par la fonction arctangente :

$$\mu = \mu_{EHL} + (\mu_{BL} - \mu_{EHL}) \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{atan} \left( b \log \frac{L}{L_0} \right) \right] \quad (3.9)$$

- Approximation par la fonction tangente hyperbolique :

$$\mu = \mu_{EHL} + (\mu_{BL} - \mu_{EHL}) \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh \left( c \log \frac{L}{L_0} \right) \right] \quad (3.10)$$

avec les définitions suivantes :

$$L_0 = 10^{\frac{\log(L_{EHL}) + \log(L_{BL})}{2}} \quad (3.11)$$

$$b = -\frac{\pi}{\log(L_{BL}/L_{EHL})} \quad (3.12)$$

$$c = -\frac{2}{\log(L_{BL}/L_{EHL})} \quad (3.13)$$

### 3.3.3.1 Gestion du frottement par la méthode de la pénalité

Dans cette section, nous rappelons la méthode de la pénalité pour traiter le contact entre un solide déformable et une matrice de contact rigide. Celle-ci a l'avantage d'être très simple et très rapide ; elle autorise cependant une pénétration du corps déformable dans la matrice de contact. La situation physique n'est donc pas parfaitement modélisée.

La méthode est basée sur le calcul d'un prédicteur collant et d'une correction glissante. On retrouve une forte analogie entre cette façon de faire et la méthode du retour radial pour traiter la plasticité.

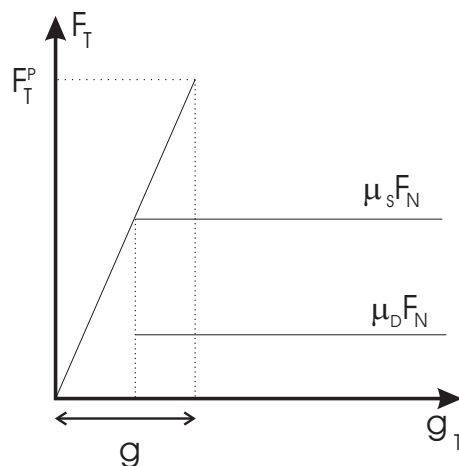


FIG. 3.5: Gestion du contact par la méthode de la pénalité

La figure 3.5 montre la force tangentielle  $F_T$  en fonction du gap tangentiel  $g_T$ . Ce gap est l'équivalent de la pénétration des deux corps en contact dans le cas de la force normale. La loi de Coulomb peut être représentée sur ce graphe par deux lignes horizontales : si le gap est positif, la force tangentielle vaut  $\mu F_N$  ; s'il est négatif, elle vaut l'opposé et si il est nul, la force de frottement est inconnue a priori et comprise entre  $\mu F_N$  et  $-\mu F_N$ .

La méthode de la pénalité régularise la loi de Coulomb en ajoutant une ligne oblique d'équation  $F_T = g_T k_T$  où  $k_T$  est le coefficient de pénalité. Plus celui-ci est élevé, mieux la loi de Coulomb est représentée.

Pratiquement, pour calculer la force de frottement lorsque la force normale et le gap tangentiel sont connus, on effectue un prédicteur collant par la formule

$$F_T^p = g_T k_T \quad (3.14)$$

Autrement dit, on fait comme si le noeud collait et on calcule la force donnée par la méthode de la pénalité. On compare ensuite la valeur obtenue avec la valeur de  $\mu F_N$ . Si elle est plus grande, le noeud glisse, la force de frottement est égale à  $\mu F_N$  et le gap tangentiel est actualisé à  $\mu F_N / k_T$ . Sinon, le contact est collant et la force de frottement est égale à la valeur calculée pour le prédicteur ( $F_T = F_T^p$ ).

Lorsqu'on utilise une loi de Stribeck, la situation est légèrement plus compliquée puisque le coefficient de frottement statique (contact collant,  $L = 0$ ) n'est pas égal au coefficient de frottement dynamique (contact glissant,  $L > 0$ ).

Dans ce cas, le prédicteur collant est toujours donné par 3.14. On compare ensuite cette valeur avec la valeur  $F_T^M = \mu_M F_N$  où  $\mu_M = \mu_{\text{statique}} = \mu(v = 0)$ . Si cette valeur critique est dépassée, le contact est glissant et le coefficient de frottement dynamique donné par la loi de Stribeck est utilisé pour calculer la valeur de la force de frottement. En résumé, on a :

$$\begin{aligned} F_T^p < \mu_M F_N &\rightarrow F_T = F_T^p \\ F_T^p \geq \mu_M F_N &\rightarrow F_T = \mu(\eta v / p) F_N \text{ et } g_T = \mu_M F_N / k_T \end{aligned} \quad (3.15)$$

La mise à jour de la valeur du gap tangentiel est importante. En effet, si on la laisse à l'ancienne valeur qui a provoqué un glissement, il est possible qu'au pas de temps suivant, le noeud en contact effectue un mouvement en arrière tout en étant toujours considéré glissant par la méthode de la pénalité. Les gaps s'accumulent et le noeud ne devient plus jamais collant sauf s'il retourne à la position de son contact initial.

Remarquons que le modèle présenté ci dessus possède un paradoxe : vu qu'un noeud en contact peut voir son abscisse curviligne varier au cours du temps tout en restant considéré comme collant (tant que le déplacement est inférieur au gap minimal qui provoque le glissement), on peut observer, dans certain cas, des noeuds possédant une grande vitesse (et donc un grand nombre de Sommerfeld local) mais aussi un coefficient de frottement maximal (car ils sont collants). Ce paradoxe est d'autant plus important que la pénalité choisie par l'utilisateur est faible.

Utiliser un prédicteur glissant au lieu d'un prédicteur collant n'arrange pas les choses. En effet, les noeuds en contact ont alors tendance à glisser beaucoup trop vite et la valeur  $\mu_M F_N$  n'est jamais atteinte.

### 3.3.3.2 Correction itérative des positions

Pour accélérer la convergence des itérations de Newton-Raphson à chaque pas de temps, une matrice de raideur tangente consistante avec la loi de frottement doit être établie.



Pour ce faire, les forces de frottement (qui sont des forces externes à la structure étudiée) doivent être dérivées par rapport aux positions des noeuds du maillage. Si  $\Delta x$  et  $\Delta y$  est le vecteur tangent à la matrice de contact, au noeud considéré, un changement de repère des axes locaux vers les axes structuraux permettent de calculer la force de contact dans les coordonnées structurales :

$$\begin{cases} F_x &= F_T \Delta x - F_N \Delta y \\ F_y &= F_T \Delta y + F_N \Delta x \end{cases} \quad (3.16)$$

On dérive alors ces expressions et on voit apparaître les dérivées spatiales du coefficient de frottement. On est amené à calculer les dérivées de  $\mu$  en fonction de la vitesse et de la pression :

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial |v|} \frac{\text{sign}(v)}{\Delta t} + \text{terme de pression}. \quad (3.17)$$

Ces expressions ont été calculées uniquement dans le cas de la loi polyligne et le résultat a été introduit dans METAFOR.

## 3.4 Application : le phénomène ‘stick-slip’ (test plan-plan)

### 3.4.1 Introduction

Pour mettre en évidence l'utilité d'un coefficient de frottement variable, nous considérons le cas du test plan/plan (voir section 2.4.2 pour une description précise du test).

ajouter a  
nouveau la figure  
relative au test  
plan/plan

Expérimentalement, lorsqu'on effectue ce test tribométrique, on observe le phénomène de stick-slip : la tôle ne glisse pas uniformément au cours du temps. Au début du test, la tôle est immobile. Au fur et à mesure que l'on tire sur une de ses extrémités, la partie de la tôle située du côté où on applique la traction commence à glisser (le traction entraîne un amincissement de la tôle à ce endroit par effet de Poisson). La fraction collante de l'aire de contact diminue ainsi progressivement jusqu'à ce que toute la tôle entre en glissement et effectue un saut en avant à très grande vitesse (théoriquement infinie si les effets inertiels ne sont pas pris en compte). Dans la nouvelle position d'équilibre, la totalité du contact entre la tôle et le patin redevient alors collant et le processus peut recommencer.

Le tableau 3.1 regroupe toutes les données du test. Le maillage utilisé est identique à celui utilisé pour la validation du pilotage en force de matrice rigides au chapitre 2.

Données matériau	:	$E$	=	70000 MPa	$e$	=	0.79 mm
	:	$\nu$	=	0.35	$L_{\text{tôle}}$	=	170 mm
	:				$L_{\text{patin}}$	=	50 mm
Pression de serrage	:	$P$	=	1 MPa			
Vitesses d'avalement	:	$V$	=	0.5, 1, 4, 10 m/min			

TAB. 3.1: Données du problème de stick-slip

On utilise le nouvel algorithme de pilotage en force et la force totale exercée sur la tôle est fixée à 50 N. D'un point de vue pratique, on fait tout d'abord descendre le patin sur la tôle en imposant une force qui croît linéairement avec le temps. Dans cette première phase, aucun effort de traction n'est exercé sur les extrémités de la tôle. La seconde phase consiste à tirer une des deux extrémité de la tôle tout en maintenant la force de serrage à sa valeur obtenue à la fin de la première phase.

Nous effectuons un calcul quasistatique pour pouvoir comparer nos résultats avec ceux obtenus au LMA de Marseille [11].

Pour la loi de frottement, nous utilisons une approximation polyligne avec  $L_{BL} = 10$ ,  $L_{EHL} = 200$ ,  $\mu_{BL} = 0.18$  et  $\mu_{EHL} = 0.04$ .

La vitesse d'avelement est de 0.5, 1, 4 et 10 m/min, ce qui donne 8.33, 16.66, 66.66 et 166.66 mm/s. Nous utiliserons cependant 8.66 mm/s comme dans la référence précitée.

### 3.4.2 Résultats

Les figures 3.6 et 3.7 montrent les résultats obtenus pour les différentes vitesses considérées. On constate que le coefficient de frottement moyen est d'autant plus petit que la vitesse de glissement est élevée. En particulier, on n'observe pas le phénomène de stick-slip dans le cas de la plus petite vitesse.

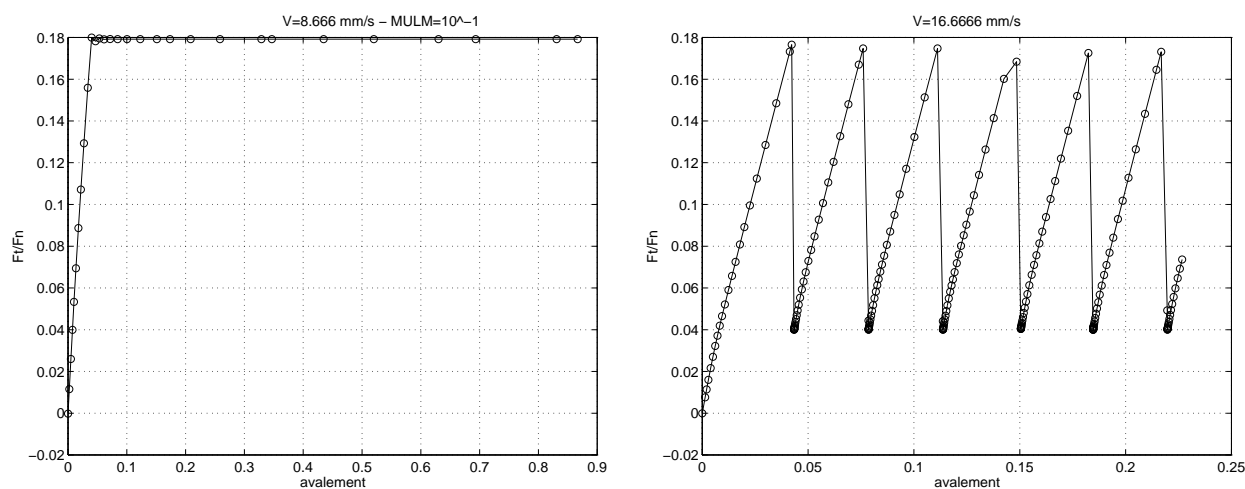


FIG. 3.6:  $F_T/F_N$  en fonction de l'avelement pour  $v = 8.66$  et  $16.66$  mm/s.

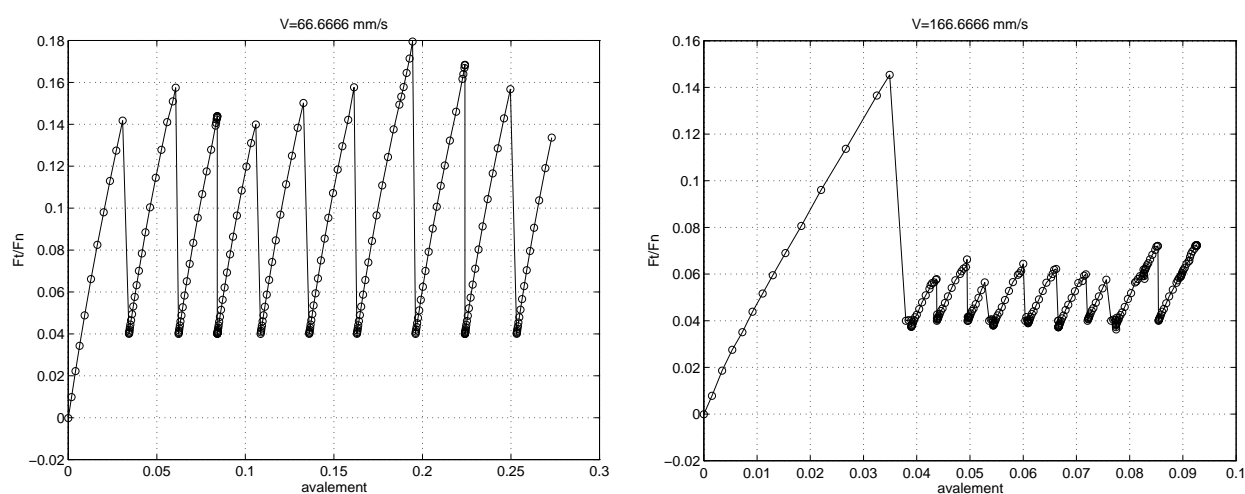


FIG. 3.7:  $F_T/F_N$  en fonction de l'avelement pour  $v = 66.66$  et  $166.66$  mm/s.

Les figures suivantes permettent de mieux comprendre le phénomène : Le graphique de gauche de la figure 3.8 montre le champ de pression au cours du temps. On constate que la

pression augmente tout d'abord uniformément sur toute la longueur de la zone en contact lorsque la force de serrage est progressivement appliquée au début du calcul. Ensuite, la symétrie est perdue à partir du moment où on commence à tirer. La pression augmente alors à l'arrière du patin et diminue fortement à l'avant. Cette diminution est due à l'effet de Poisson.

La figure de droite montre l'effort de cisaillement au cours du temps sur la zone de contact. L'axe  $x$  représente l'abscisse curviligne de la zone de contact et doit être retourné pour obtenir des résultats en concordance avec la figure de gauche et celle donnant la géométrie des tests. Cette remarque est valable pour tous les graphes qui suivent.

On constate, sur cette figure, que l'effort de cisaillement est tout d'abord négatif d'un côté et positif de l'autre. Ceci traduit l'écrasement subi par la tôle dans la première phase du calcul. Au fur et à mesure qu'on tire sur la tôle, la force de frottement augmente et devient positive (négative si on passe des axes locaux aux axes globaux) sur toute la zone de contact. Lorsque la force tangentielle ne peut plus augmenter, c'est-à-dire lorsque le maximum se situe au dernier noeud en contact, la tôle est sur le point de glisser et le processus recommence.

*il manque les  
labels des axes et  
les unités*

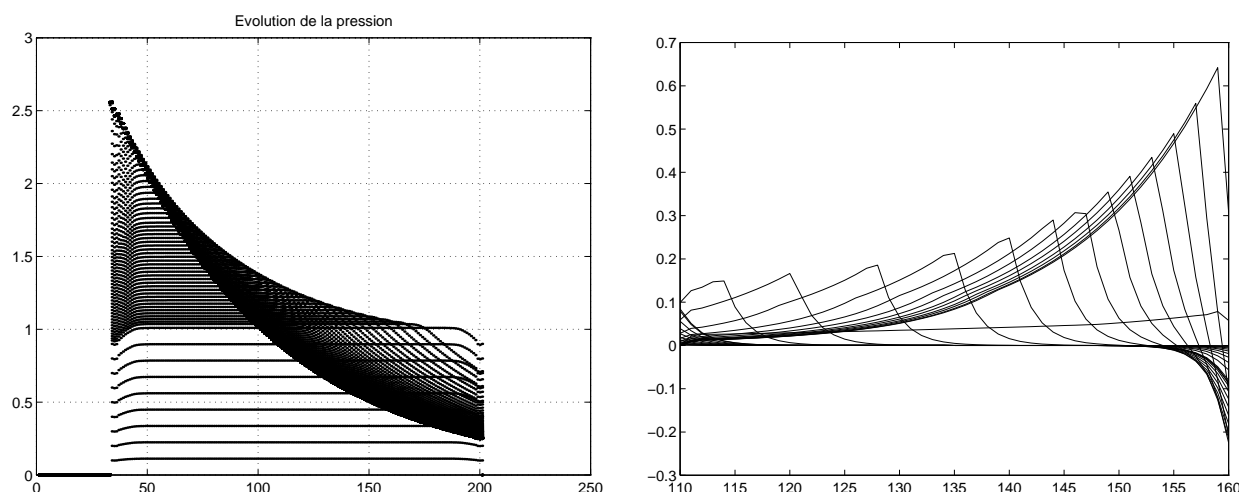


FIG. 3.8: Champ de pression et force tangentielle au cours du temps.

Les deux graphiques de la figure 3.9 comparent, pour deux instants différents, la valeur de la force tangentielle de contact avec le maximum autorisé localement, à savoir  $\mu < F_N$ . Lorsque les deux courbes sont confondues, cela signifie que les noeuds concernés glissent. On remarque que la zone de glissement a augmenté au cours du temps et que sur le graphique de droite, seuls les derniers noeuds en contact à l'arrière du patin restent collants.

La figure 3.10 montre l'évolution du coefficient de frottement local au cours du temps. On voit que celui-ci est tout d'abord égal à 0.18, sa valeur maximale puisque tous les noeuds collent. Il chute ensuite progressivement vers la valeur minimale lors de l'application de la force. Lorsque le dernier noeud commence à glisser, le coefficient de frottement de tous les

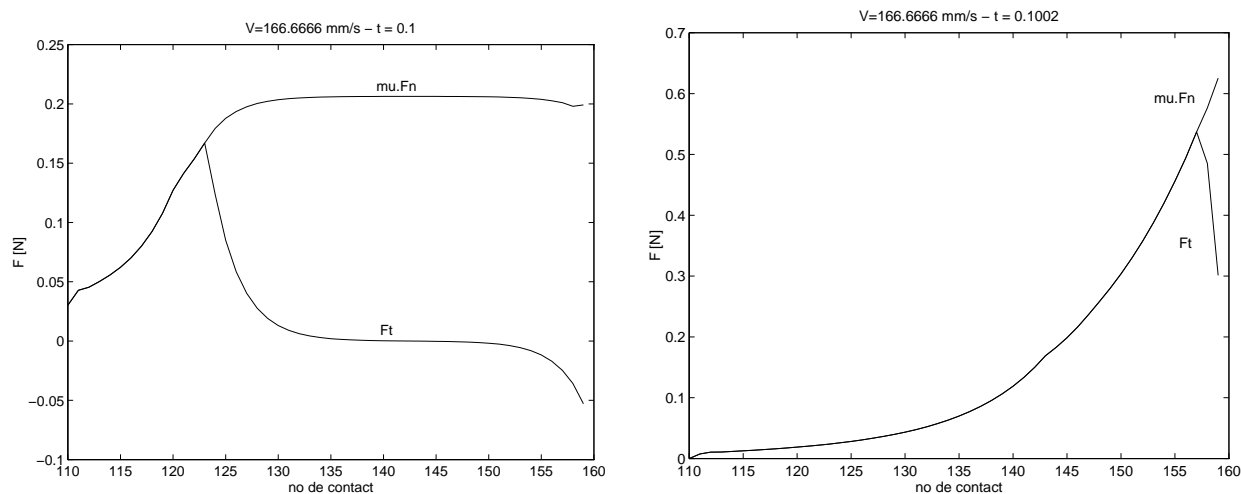


FIG. 3.9: Comparaison entre la force tangentielle ( $F_T$ ) et la force maximale de frottement ( $\mu F_N$ ).

noeuds tombe instantanément à la valeur minimale. Tous les noeuds sont en train de glisser. Le pas de temps suivant, tous les noeuds seront de nouveaux collants avec un coefficient de frottement maximal.

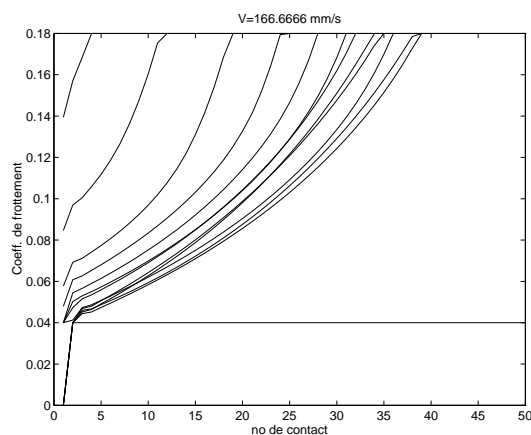


FIG. 3.10: Coefficient de frottement local au cours du temps

A la seule vue des résultats précédents, on pourrait se sentir satisfait de l'algorithme établi. Il n'en est rien : en effet, nous allons montrer que l'algorithme, tel qu'il est implémenté actuellement dans METAFOR souffre d'instabilités très importantes que nous n'avons pas encore montrées jusque ici.

Apparemment, l'algorithme développé au LMA montre les mêmes problèmes, ce qui nous conforte dans l'idée que les instabilités numériques sont liées au problème du test plan/plan et à la courbe de Stribeck et non pas à notre implémentation de la méthode.

Les graphiques suivants expliquent en détails les problèmes rencontrés.

Lors des calculs précédents, nous utilisons, comme d'habitude, une stratégie automatique de calcul de la taille du pas de temps. Cette taille est augmentée ou diminuée en fonction de la rapidité de convergence (nombre d'itérations) du pas de temps précédent. L'utilisateur peut modifier, dans ce cas, les limites supérieures et inférieures autorisées.

Si nous décidons de modifier la limite supérieure, appelée MULM, nous observons des changements surprenants dans la solution obtenue. Le graphique de gauche de la figure 3.11 et celui de la figure 3.12 montrent, par exemple, la solution obtenue pour une vitesse d'avalement de 8.66 mm/s si on choisit respectivement  $MULM = 10^{-1}$  s. ou  $MULM = 10^{-4}$  secondes.

On constate que le phénomène de stick-slip apparaît lorsque le pas de temps est plus petit. Nous avons volontairement laissé des petits cercles sur les deux courbes pour montrer les points effectivement calculés. Cela permet de voir que le pas de temps est effectivement plus petit dans le cas  $MULM = 10^{-4}$  s. parce que ces cercles sont plus rapprochés.

Le graphique de droite de la figure 3.11 peut être mis en correspondance avec les deux graphiques de la figure 3.13. Ceux-ci montrent le champ de vitesse sur la zone de contact au cours du temps. Pour le calcul avec  $MULM = 10^{-1}$ , on constate que la zone où la vitesse de glissement est non nulle grandit avec le temps. Lorsque le dernier noeud glisse, la vitesse de tous les noeuds devient très grande pour se stabiliser à 8.66 mm/s, qui est la vitesse d'avalement. Les noeuds n'ont donc plus aucune raison de coller par la suite.

Par contre, dans le cas d'un plus petit pas de temps, le même phénomène s'observe, avec, comme différence fondamentale que la vitesse obtenue est largement supérieure à 8.66 mm/s. Ceci est logique puisque les noeuds glissent sur 1 seul pas de temps. La vitesse de glissement sera d'autant plus grande que l'incrément temporel est petit. L'état d'équilibre obtenu par la suite est un état collant parce que la vitesse ne peut pas se stabiliser à 8.66 m/s par la suite. Le phénomène de stick-slip est donc plus facilement observé quand les incréments temporels sont petits.

Ceci remet en question les résultats présentés aux figures 3.6 et 3.7. En fait, il est possible d'obtenir une grande gamme de résultats différents en jouant sur l'incrément temporel. Le phénomène de décollement est cependant bien reproduit. Nous avons donc de bons résultats qualitativement mais pas quantitativement.

Les deux graphiques de la figure 3.14 viennent renforcer la constatation qui vient d'être faite. Au début des développements, nous n'avions pas implémenté la forme exacte de la matrice de raideur tangente. La variation de  $\mu$  était négligée, comme si on utilisait une loi de Coulomb traditionnelle avec un coefficient de frottement constant.

La solution de gauche est calculée sans la matrice de raideur correcte et celle de droite en tenant compte de la correction. On remarque très bien que le fait de corriger la matrice entraîne des pas de temps bien plus grands que dans l'autre cas (les petits cercles sont

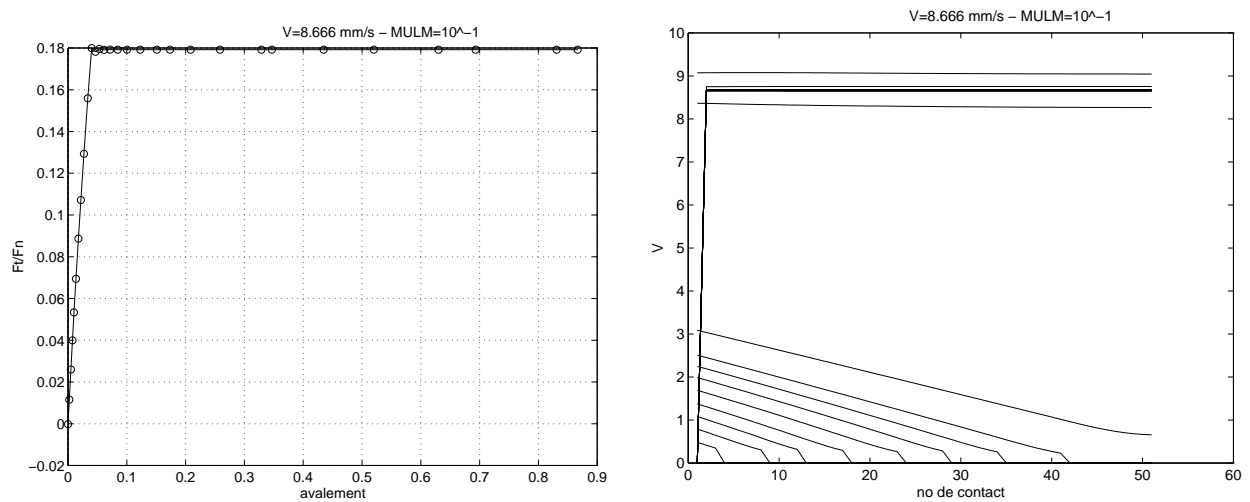


FIG. 3.11: Solution obtenue pour  $MULM=0.1$  ( $F_T/F_N$  à gauche, vitesses à droite).

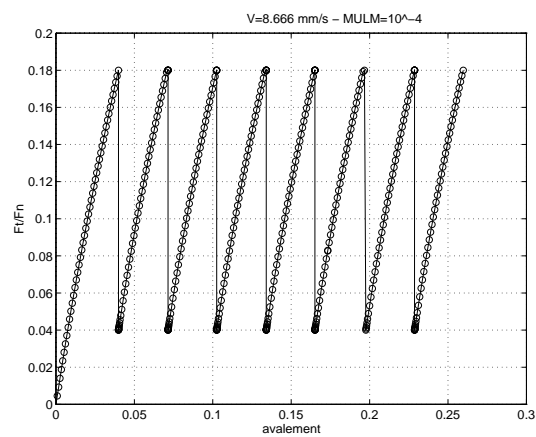
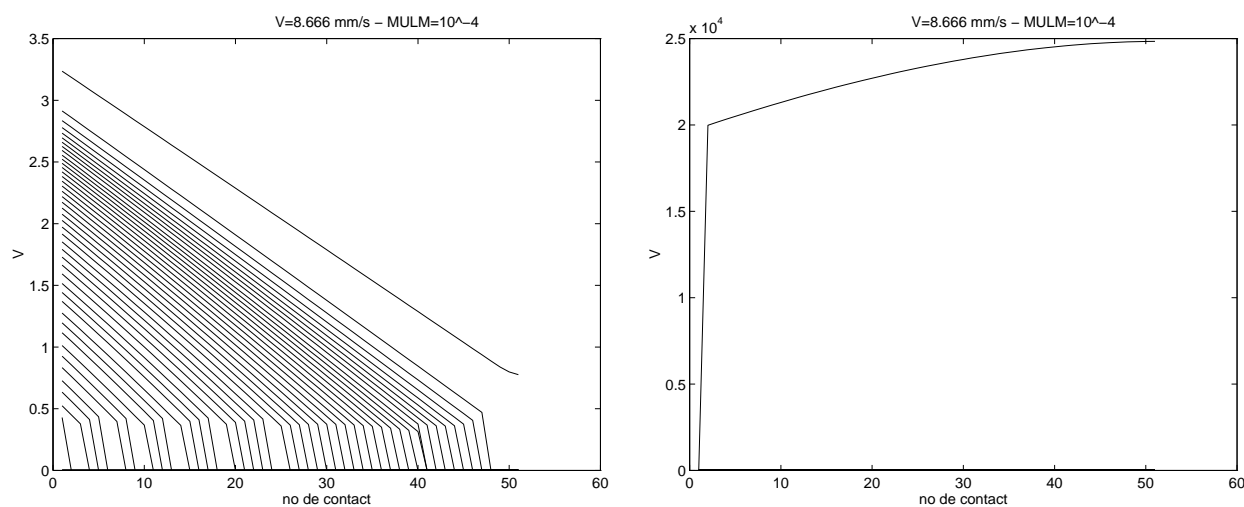


FIG. 3.12: Solution obtenue pour  $MULM=10^{-4}$ .

FIG. 3.13: Champ de vitesses pour  $MULM=10^{-4}$ .

moins rapprochés). Ceci est normal puisqu'une matrice de raideur mal formulée ralentit la convergence et entraîne des incréments temporels plus petits. On constate aussi que les noeuds glissent d'autant plus vite que l'incrément temporel est petit. En conséquence, on obtient un coefficient de frottement moyen beaucoup plus petit dans le cas de la matrice de raideur non corrigée parce que la convergence à chaque pas de temps est moins bonne que dans l'autre cas.

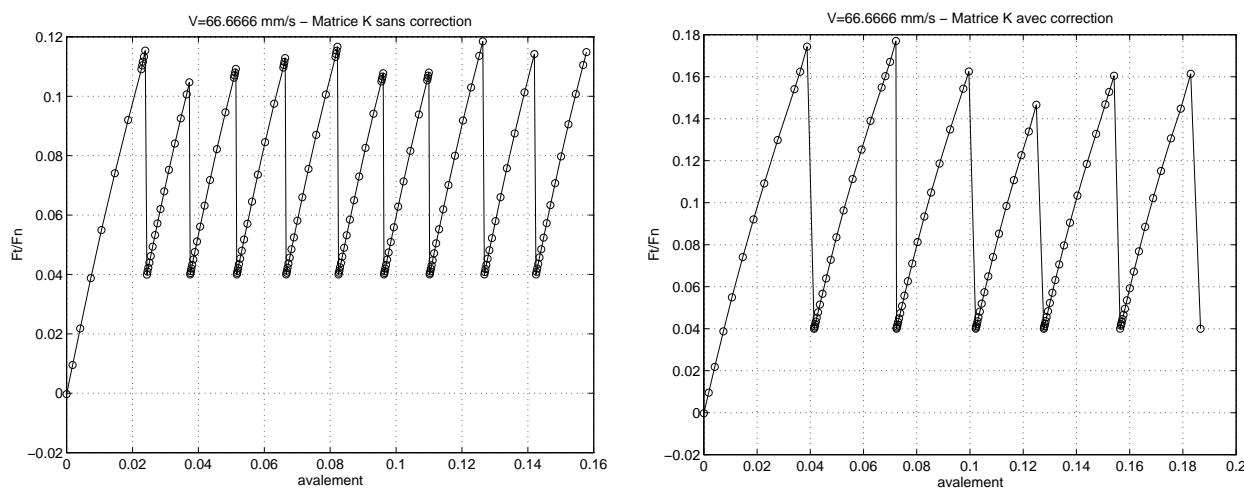


FIG. 3.14: Solutions obtenues avec et sans correction de la matrice de raideur tangente

Ces différents exemples montrent donc qu'il reste encore beaucoup de travail pour comprendre clairement les mécanismes numériques qui entraîne le glissement des noeuds. Une analyse approfondie devra être menée pour trouver une solution pour que le glissement des noeuds soient contrôlés par la physique du phénomène et non les effets numériques.



## 3.5 Conclusions et perspectives

Cette première analyse du test plan/plan montre que les phénomènes liés au frottement ne sont pas faciles à gérer dans un code de calcul par éléments finis. En effet, on pourrait naïvement penser que le glissement de noeuds sur un plan, lorsque la structure reste élastique est un jeu d'enfant à modéliser. Il n'en est rien.

Nous pensons qu'il est nécessaire de comprendre clairement les instabilités numériques mises en évidence dans ce rapport avant de simuler des problèmes mécaniques plus complexes. En effet, appliquer cette loi aveuglément fournirait des résultats dénués de sens physique.

Les causes des problèmes rencontrés sont multiples :

- Tout d'abord, il serait intéressant d'effectuer le même test en tenant compte des effets de l'inertie. Ceci limiterait les vitesses de glissement. Nous nous sommes entêté à rester en quasistatique pour la simple raison que des résultats de ce type sont présentés dans la référence [11]. Nous savons maintenant que ces résultats sont adroitement choisis, comme nous l'avons fait pour les figures 3.6 et 3.7.
- La méthode de la pénalité est assez mauvaise pour modéliser un contact glissant qui devient collant. Il serait intéressant d'utiliser d'autres méthodes de gestion du contact (Lemke, multiplicateurs de Lagrange) qui fournissent des vitesses de glissement nulles pour un noeud collant.
- Après chaque incrément temporel, une extrapolation des positions des noeuds est effectuée pour accélérer la convergence. Cette extrapolation est néfaste lorsqu'on étudie un comportement non linéaire (un noeud glissant devient collant). Nous avons donc essayé de désactiver cette option de code. Cependant, nous nous sommes retrouvés face à un autre problème : la convergence est moins bonne, donc les pas de temps sont plus petits et le glissement est à nouveau favorisé.
- Il serait intéressant d'utiliser les approximations en tangente hyperbolique et en arc-tangente. En effet, malgré un effort de calcul supplémentaire, ces courbes ont l'avantage non négligeable d'être lisses. Leur dérivée, et donc la matrice de raideur tangente serait donc, dans ces deux cas, continue. Nous mettrons aussi au point une loi polynômiale qui aura l'avantage d'être lisse et rapide à calculer (ainsi que ses dérivées).

La suite de ce travail consistera à :

- Discrétiser l'équation de Reynolds grâce à la méthode E.F. Nous essayerons de retrouver les résultats de Liu [36, 37].
- L'extension de l'algorithme au modèle de Patir et Cheng[43, 44] permettra de traiter des cas où le contact est plus sévère (film mince). Il sera alors possible de montrer que ce modèle n'est pas suffisant pour simuler un processus d'emboutissage où le régime mixte et limite est régulièrement observé
- Nous introduirons alors le modèle de Sheu et Wilson [54, 63] pour traiter les deux derniers régimes.
- Enfin, cette étude ne saurait être complète sans la prise en compte des effets ther-

miques, même dans le cas des processus dits “à froid”. En effet, le lubrifiant est le siège d’une dissipation importante due à la viscosité du fluide. Cette dissipation implique une augmentation de la température qui entraîne une modification significative de la viscosité du lubrifiant (une augmentation de  $15^{\circ}\text{C}$  divisera la viscosité par un facteur 2, Wilson [61]). Cette modification rhéologique influera à son tour sur l’épaisseur du film, donc sur le régime de lubrification effectif. Wilson [61] a montré que lorsque la vitesse de glissement est de l’ordre de  $10\text{ m/s}$ , l’épaisseur du film obtenue par la théorie isotherme pouvait être 500 fois supérieure à celle obtenue à l’aide d’une théorie prenant en compte les effets thermiques. Il faudra donc étendre le modèle au cas anisotherme couplé en tenant compte aussi bien des sources de chaleur au sein du lubrifiant que des transferts thermiques entre les deux corps solides.

# Chapitre 4

## Formulation Arbitraire Lagrangienne Eulérienne

### 4.1 Introduction

Le but final de notre travail est de modéliser des opérations complexes de mise à forme des matériaux en tenant compte de la présence et de l'influence du lubrifiant. Pour l'instant, METAFOR [45, 48, 53, 55] – n'est pas encore capable de gérer les interactions fluides-structures.

Une des difficultés que nous allons rencontrer provient du comportement fort différent des fluides et des solides. En effet, même si les équations de conservation de ces deux types de milieux 'écrivent exactement de la même manière, leur comportement est en général très différent.

Les fluides sont habituellement considérés comme newtoniens, c'est-à-dire qu'on suppose une relation de proportionnalité entre le cisaillement et le gradient spatial de la vitesse. De plus, ce sont des corps sans mémoire. Autrement dit, les grandeurs inconnues, comme les contraintes de pression et de cisaillement, ne dépendent pas de l'histoire du chargement appliqué sur le fluide.

La situation est différente pour les solides puisque nous travaillerons la plupart du temps en grandes déformations. Le comportement du matériau n'est plus linéaire, non seulement à cause des grandes rotations mais aussi à cause des déformations irréversibles apparaissant lorsque la limite d'élasticité du matériau est atteinte. Lorsqu'un matériau solide entre dans le domaine plastique, son comportement est décrit à l'aide de variables internes, appelées aussi variables d'hérédité, qui traduisent numériquement l'histoire de la déformation. Généralement, si une loi d'écrouissage isotrope est utilisée, on a besoin d'une seule variable interne : la limite apparente d'élasticité ou la déformation plastique

équivalente, ces deux grandeurs étant reliées entre elles par la loi d'écroutissage. Toutes les informations sur l'hérédité du matériau sont stockées aux points de Gauss de chaque élément fini et sont utilisées lors du calcul des contraintes.

Une autre différence fondamentale et évidente entre les solides et les fluides provient de leurs définitions respectives. Un fluide peut subir de très grandes déformations même s'il est soumis à l'action de forces de faible amplitude. Il prend la forme du récipient qui le contient. Les frontières du domaine à étudier sont donc généralement fixées dans l'espace. Par contre, pour étudier des solides, il faut considérer des frontières variables spatialement.

Par conséquent, on comprend vite que les formalismes mathématiques utilisés pour représenter un solide et un fluide sont différents.

Pour un fluide, on utilise généralement un maillage fixe dans l'espace et on étudie, en chaque point de l'espace, l'évolution des grandeurs cinématiques (vitesse et accélération) et des grandeurs dynamiques (pression et cisaillement). C'est la formulation eulérienne. On peut aussi choisir de suivre les particules de matière au cours de la déformation et donc utiliser un maillage fixé à celle-ci. C'est la formulation lagrangienne utilisée habituellement en mécanique du solide.

Cependant, on se retrouve très vite confronté aux limitations de chacune de ces méthodes et il est nécessaire de généraliser ces deux formalismes en les combinant pour aboutir à une formulation tout à fait générale qui contient, comme cas particuliers, les deux formulations précitées. Il s'agit de la formulation Arbitraire Lagrangienne-Eulérienne (ALE) qui va être décrite dans ce chapitre.

Si on décide de mailler le lubrifiant indépendamment de la structure solide pour le faire interagir avec celle-ci, on rencontre des problèmes de gestion du contact entre les deux maillages. Ces problèmes sont principalement dus aux différences d'échelles entre les deux maillages, aux pertes de contact et aux entrées en contact des noeuds des deux maillages lors de l'avancement du calcul. Cependant, grâce à la formulation ALE, il sera possible, dans certains problèmes qui possèdent une solution stationnaire (le laminage en est l'exemple le plus représentatif), de garder durant tout le calcul le même nombre de noeuds en contact et, par conséquent, d'aboutir à la convergence du calcul.

Il est également important de pouvoir déterminer des surfaces libres du problème, comme, par exemple, la forme correcte du film d'huile à l'entrée et à la sortie de la zone de contact ou l'épaisseur réelle de la tôle suite à son passage sous le rouleau de laminage, après déchargement élastique. Le maillage devra donc être eulérien dans certaines directions (la direction de laminage) et lagrangien dans la direction perpendiculaire.

Finalement, Il serait intéressant de pouvoir traiter le matériau mis à forme et le lubrifiant par le même formalisme. Les seules différences apparaissent alors dans la gestion de la loi de comportement, c'est-à-dire, la détermination des contraintes à partir des déformations.

Avant ce travail, il était déjà possible de travailler dans ce formalisme mixte pour autant

que la matière ne se déplace pas trop vite par rapport au maillage. Si cette condition n'est pas respectée, on voit apparaître des oscillations numériques bien connues en mécanique des fluides lorsqu'aucune précaution n'est prise pour traiter les termes de convection apparaissant dans les équations ALE et qui n'existent pas lorsqu'on travaille avec un maillage lagrangien.

Notre but est donc de modifier le code actuel de METAFOR et particulièrement les routines de convection des grandeurs aux points de Gauss. La méthode employée est basée sur une approche mixte éléments finis – volumes finis. Ces derniers ont prouvé récemment leur efficacité en mécanique des fluides [15, 52].

## 4.2 Formulation lagrangienne et eulérienne

Dans cette section, nous présentons d'une manière un peu plus détaillée les deux types de formulations utilisées pour résoudre des problèmes de transformations de milieux continus. Ces deux méthodes sont totalement équivalentes d'un point de vue physique.

### 4.2.1 Formalisme de Lagrange

Lorsqu'on emploie le formalisme lagrangien, on est amené à définir un système de référence lié à la matière. Celui-ci est appelé système de référence matériel (SRM). Lors de la transformation, un point  $P$  est repéré par ses coordonnées "matière", c'est-à-dire ses coordonnées spatiales dans la configuration de référence. Si on emploie une formulation lagrangienne totale, cette configuration de référence est la configuration initiale ; tandis que si on emploie, comme c'est le cas dans la plupart des codes de calcul en grandes déformations, une formulation lagrangienne actualisée, la configuration de référence est la dernière configuration à l'équilibre qu'on a calculé lors du processus de chargement de la structure.

En formalisme lagrangien, toutes les inconnues sont exprimées comme des fonctions des coordonnées matérielles du point considéré. Les inconnues sont les positions nodales (ou les vitesses nodales) dont on déduit successivement les déformations, les contraintes et enfin les forces internes.

Les avantages de ce formalisme sont les suivants :

- Les conditions aux limites matérielles sont très facilement imposables puisqu'un noeud du maillage sur la frontière du corps à étudier y restera pendant toute la durée du calcul. En particulier, la matière délimitée par le maillage n'est jamais perdue puisque la frontière est bien définie à tout instant.
- Les matériaux à mémoire peuvent être facilement pris en compte puisque toutes les informations sur l'hérédité du matériau sont stockées aux points de Gauss de chaque

éléments et que ceux-ci sont toujours relatifs aux mêmes particules matérielles.

- Il est facile de raffiner le maillage en début de calcul aux endroits où on s'attend physiquement à de grandes variations spatiales de contraintes.

C'est pour ces raisons qu'on utilise généralement cette méthode pour traiter des grandes déformations de corps solides. Cependant, certaines simulations numériques utilisant le formalisme lagrangien posent des difficultés. Nous citons ci-dessous certains inconvénients rencontrés.

- La déformation excessive de la structure peut provoquer des distorsions gênantes dans le maillage (mailles aplaties, coins d'éléments proches de 180 degrés). Ces éléments pathogènes, en plus d'une dégradation de la précision, peuvent ralentir la convergence du processus itératif de Newton-Raphson et même l'arrêter (le jacobien de l'élément devient négatif). Remarquons aussi que le pas de temps maximum admissible pour garantir la stabilité numérique lors d'une résolution explicite des équations d'équilibre est une fonction croissante de la plus petite longueur entre deux noeuds du maillage. Il est donc intéressant de garder des mailles les moins écrasées possibles.
- Si on considère des problèmes stationnaires, il est parfois nécessaire de mailler toute la structure de manière raffinée pour obtenir une solution acceptable. On obtient alors un nombre excessif de degrés de liberté et le temps de calcul devient très vite important. C'est le cas, par exemple, lors de la simulation du laminage pour laquelle on est obligé de mailler une tôle très longue ainsi que la totalité du cylindre de laminage si on veut une bonne précision sur la solution stationnaire.

## 4.2.2 Formalisme d'Euler

L'utilisation du formalisme Eulérien entraîne la définition d'un système de référence fixé à l'espace et non plus à la matière. Celui-ci est appelé système de référence spatial (SRS). En conséquence, le maillage reste fixe et la matière se déplace par rapport à celui-ci, entraînant l'apparition de termes de convection dans les équations. Les avantages d'un tel formalisme sont résumés ci-dessous.

- Les grandes distorsions du corps à étudier peuvent être prises en compte sans problèmes numériques puisque les mailles restent toujours indéformables et sont choisies pour être bien conditionnées.
- Le formalisme Eulérien est idéal pour étudier des problèmes stationnaires puisqu'il permet de mailler une petite région de l'espace et de se concentrer sur celle-ci. Il est donc inutile de mailler toute la tôle lors de la simulation d'un laminage. On gagne donc énormément de mémoire (moins de degrés de liberté) et du temps de calcul.

Par contre, les inconvénients suivants montrent pourquoi il n'est pratiquement jamais utilisé en mécanique du solide :

- Il est très difficile, voire impossible, de traiter correctement les surfaces libres. On est donc, en général, limité à des problèmes où les frontières ne subissent aucune variation.

- Les conditions limites matérielles posent aussi un problème puisque, au cours du calcul, il n'y a pas nécessairement de noeuds sur la frontière matérielle.
- Les matériaux à mémoire sont difficiles à gérer parce que les points de Gauss du maillage ne correspondent pas à la même particule matérielle tout au long du calcul.

### 4.3 Formulation Arbitraire Lagrangienne Eulérienne

Les deux sections précédentes ont pour but de prouver la nécessité d'utiliser un formalisme plus général. Ce dernier devrait conserver les avantages des deux formalismes et pouvoir s'y particulariser si la situation le demande. Il s'agit de la formulation arbitraire lagrangienne-eulérienne (ALE) ou formulation mixte eulérienne-lagrangienne. On y définit un système de référence, appelé système de référence de calcul, qui peut se mouvoir indépendamment de la matière et du système de référence spatial. Il y a donc un découplage entre la matière et le maillage. Grâce à cela, nous pourrions garder un maillage de bonne qualité tout au long du calcul à l'intérieur du domaine étudié, tandis que les noeuds de frontière pourront être considérés comme Lagrangiens (pour obtenir les déformations des surfaces libres) ou Eulériens (pour limiter artificiellement le domaine étudié à une certaine portion de l'espace).

Cette formulation n'est pas nouvelle : elle a tout d'abord été introduite pour traiter des problèmes gouvernés par les équations de Navier-Stokes. Elle fut ensuite étendue aux problèmes d'interaction fluide-structure dans le cadre de la méthode des éléments finis [17].

mettre une ref  
pour N-Stokes

### 4.4 Cinématique et dérivée particulière

Chaque particule d'un milieu continu peut être repérée dans un des trois systèmes de référence définis précédemment : soit  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  les coordonnées dans le système de référence matériel,  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  les coordonnées dans le système de référence spatial et  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  et  $\chi_3$  les coordonnées relatives à la grille de calcul et appelées coordonnées SRG.

Nous travaillons dans le domaine temporel  $[t_0, t]$  où  $t_0$  est le temps de référence. Ces systèmes de référence sont reliés par les relations suivantes : premièrement, la configuration de la matière à l'instant  $t$  peut être déduite de la configuration de référence en  $t = t_0$  par le placement

$$\vec{x} = \vec{\phi}(\vec{X}, t) \quad (4.1)$$

Cette équation, utilisée en formulation lagrangienne, projette les points du domaine  $V_0$  (volume de la configuration de référence du milieu continu étudié) sur le volume à l'instant  $t$  qu'on dénote  $V(t)$ .

Considérons maintenant que le maillage est doté de sa propre cinématique, indépendante de celle de la matière et définissons le volume  $V^*(t_0)$  occupé par le maillage en  $t = t_0$  qui vient se superposer au volume  $V(t)$  au temps  $t$ . Autrement dit, les domaines  $V^*(t)$  et  $V(t)$  sont définis de telle manière qu'ils coïncident spatialement au temps  $t$  mais qu'ils contiennent en toute généralité un ensemble différent de particules en  $t = t_0$ . Le volume  $V$  est appelé volume matériel puisqu'il contient toujours les mêmes particules de matière. Le volume  $V^*$  est appelé volume particulière parce qu'il contient toujours les mêmes particules



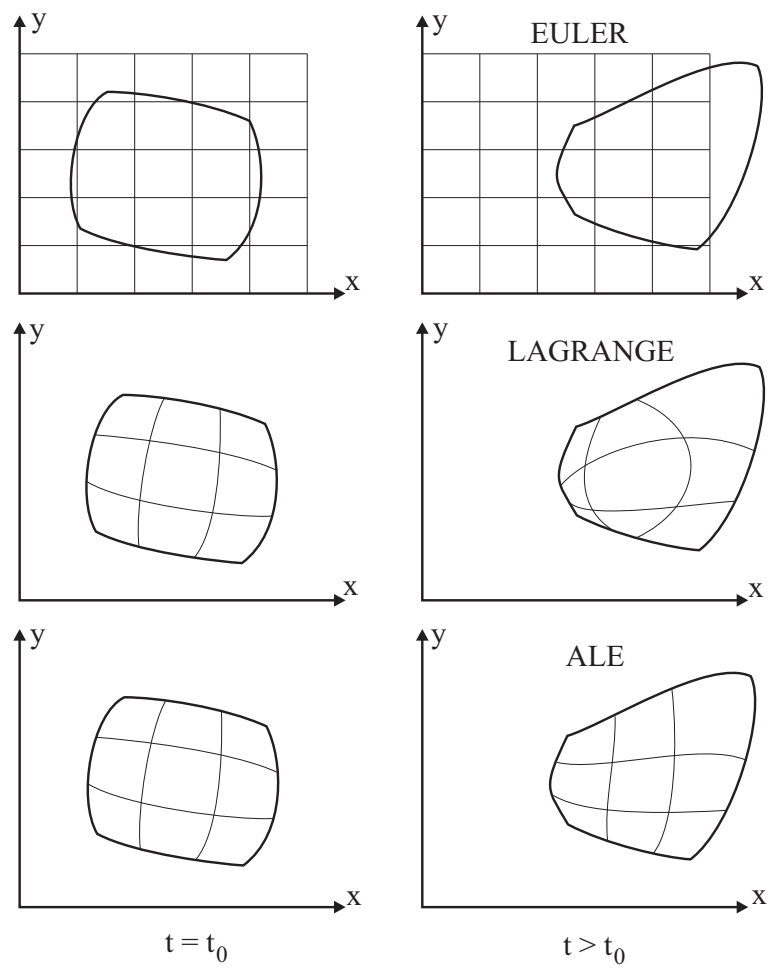


FIG. 4.1: Les trois formalismes utilisés en mécanique du solide.

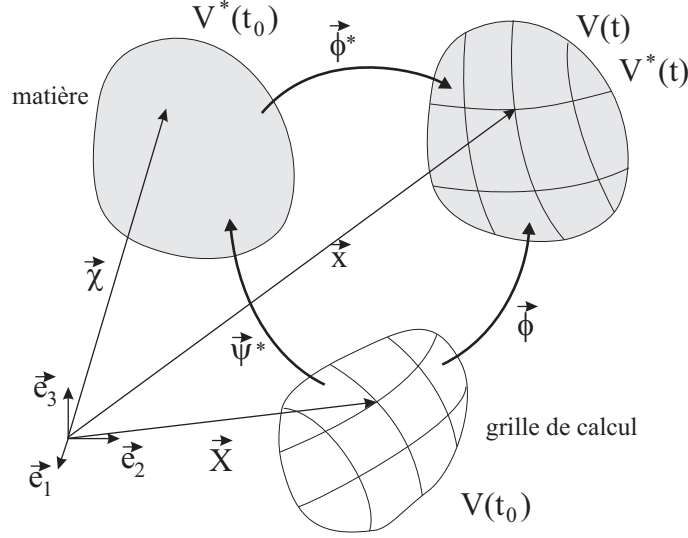


FIG. 4.2: Cinématique de la matière et de la grille de calcul.

SRG.

Les points de l'ensemble  $V(t)$  peuvent être obtenus à partir de ceux de l'ensemble  $V^*(t_0)$  par la relation

$$\vec{x} = \vec{\phi}^*(\vec{\chi}, t) \quad (4.2)$$

Cette équation traduit la cinématique propre au maillage du milieu continu. De cette dernière relation, on peut déduire une matrice jacobienne, tout comme on définit le tenseur des gradients de déformation pour la transformation (4.1).

$$F_{i\alpha}^* = \frac{\partial x_i}{\partial \chi_\alpha} = \frac{\partial \phi_i^*}{\partial \chi_\alpha} \quad \text{avec } J^* = \det F^* \quad (4.3)$$

avec  $J^*$  supposé fini et non nul, ce qui suppose que la relation inverse  $\phi^{*-1}$  existe et donc que la relation (4.1) est biunivoque.

Les ensembles  $V$  et  $V^*$  peuvent être reliés entre eux en combinant les deux transformations précédentes (4.1) et (4.2) :

$$\vec{\chi} = \vec{\phi}^{*-1}(\vec{x}, t) = \vec{\phi}^{*-1}(\vec{\phi}(\vec{X}, t), t) = \vec{\psi}^*(\vec{X}, t) \quad (4.4)$$

où on a introduit l'application  $\vec{\psi}$ . On peut également définir la matrice jacobienne et son déterminant qui doit être fini et non nul.

Il est facile de retrouver la formulation lagrangienne en identifiant, partout et en tout instant, les vecteurs  $\vec{\chi}$  aux vecteurs  $\vec{X}$ . Dans ce cas, l'application  $\vec{\psi}$  se réduit à la fonction identité et le SRG est confondu avec le SRM.

La formulation eulérienne, quant à elle, est obtenue en identifiant les vecteurs  $\vec{\chi}$  aux vecteurs  $\vec{x}$ . Le SRG est cette fois confondu avec le SRS.

Suivant le système de référence auquel l'observateur est lié, une grandeur physique arbitraire  $A$  peut être exprimée de plusieurs manières. Par exemple, en coordonnées Lagrangiennes, on a  $A = A_l(\vec{X}, t)$ . De même, en coordonnées eulériennes,  $A = A_e(\vec{x}, t)$  et enfin, si on choisit le SRG, on écrit  $A = A_g(\vec{\chi}, t)$ . Toutes ces grandeurs sont égales et liées entre elles par les relations (4.1), (4.2) et (4.4). Dans la suite, nous omettrons les indices  $l$ ,  $e$  et  $g$  afin d'alléger l'écriture.

Plaçons-nous sur la grille de calcul pour observer les variations temporelles de  $A$ . A chaque instant et pour chaque point SRG, la grandeur physique quelconque  $A$  est donnée par  $A = A(\vec{\chi}, t)$ . La variation SRG de  $A$  au point SRG  $\vec{\chi}$  durant la transition  $\Delta t$  est appelée la variation SRG de  $A$  et est donnée par  $\Delta_g A = A(\vec{\chi}, t + \Delta t) - A(\vec{\chi}, t)$ . On définit alors la dérivée SRG, notée parfois  $A'$ , par

$$\left. \frac{\partial A}{\partial t} \right|_x = A' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta_g A}{\Delta t} \quad (4.5)$$

En particulier, si  $A$  représente la position courante, on obtient la vitesse de grille ou la vitesse SRG,  $v^*$  :

$$v_i^*(\chi_\alpha, t) = \left. \frac{\partial x_i(\chi_\alpha, t)}{\partial t} \right|_x = \left. \frac{\partial (\phi^*)_i(\chi_\alpha, t)}{\partial t} \right|_x = \frac{\partial}{\partial t} \phi_i^*(\chi_\alpha, t) \quad (4.6)$$

Quant à la vitesse de la matière, elle est définie par

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{x}(\vec{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \vec{\phi}(\vec{X}, t)}{\partial t} \quad (4.7)$$

Pour pouvoir déduire les lois de conservation du milieu continu pour la formulation eulérienne-lagrangienne, nous avons besoin de calculer les dérivées particulières relatives aux systèmes de références qui viennent d'être introduits. Pour la grandeur physique arbitraire  $A$ , la relation entre la dérivée temporelle (notée parfois  $\dot{A}$ ), pour un observateur lié au SRM et  $A'$ , pour un observateur lié au SRG peut être évaluée à l'aide d'une dérivée convective ou eulérienne qui donne le taux de variation d'une grandeur quelconque pour un observateur fixe dans un repère mobile à partir de grandeurs évaluées dans un repère de référence considéré comme fixe ou Eulérien (SRS).

Pour le SRM, on peut alors écrire ( $\vec{v}$  est la vitesse matérielle ou SRM)

$$\left. \frac{\partial A}{\partial t} \right|_x = \dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} A \quad (4.8)$$

et pour le SRG, on a ( $\vec{v}^*$  est la vitesse de grille ou SRG)

$$A' = \frac{\partial A}{\partial t} + \vec{v}^* \cdot \vec{\nabla} A \quad (4.9)$$

En prenant alors la différence entre ces deux expressions, on obtient

$$A' = \dot{A} + (\vec{v}^* - \vec{v}) \cdot \vec{\nabla} A \quad (4.10)$$

En posant alors  $\vec{w} = \vec{v} - \vec{v}^*$  qui n'est rien d'autre que la vitesse relative entre le SRM et le SRG ou la vitesse de la particule vue depuis le SRG, on obtient la relation fondamentale reliant le SRG au SRM :

$$\frac{\partial A}{\partial t}|_x = \frac{\partial A}{\partial t}|_X + \vec{w} \cdot \vec{\nabla} A \quad (4.11)$$

Cette relation nous permet de retrouver les deux cas particuliers importants contenus dans la formulation ALE :

- la formulation lagrangienne pour laquelle on a  $\vec{v}^* = \vec{v}$  ou  $\vec{w} = 0$ . Le maillage est lié à la matière et on retrouve la dérivée matérielle  $A' = \dot{A}$ , ce qui est logique puisque  $\vec{X} = \vec{\chi}$  pour tout  $t$ .
- la formulation eulérienne pour laquelle on a  $\vec{v}^* = 0$  ou  $\vec{w} = \vec{v}$ . Le maillage est fixe dans l'espace et on retrouve la formule de la dérivée particulière :

$$\frac{\partial A}{\partial t}|_x = \frac{\partial A}{\partial t}|_x = \frac{\partial A}{\partial t}|_X - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} A \quad (4.12)$$

## 4.5 Lois de conservation en formulation ALE

En utilisant la relation fondamentale (4.11), nous pouvons déduire les lois de conservation d'un milieu continu exprimées sous forme ALE. Vu que la seule différence avec la formulation eulérienne est la présence de la vitesse relative  $\vec{w}$  au lieu de la vitesse absolue  $\vec{v}$ , on obtient les équations ci-dessous.

Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}|_x + w_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.13)$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t}|_x + w_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \quad (4.14)$$

Conservation du moment de la quantité de mouvement :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (4.15)$$

Conservation de l'énergie :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t}|_x + w_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \sigma_{ij} D_{ij} + \rho r - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (4.16)$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  
 $\sigma_{ij}$  est le tenseur des contraintes de Cauchy,  
 $b$  sont les charges volumiques mécaniques,  
 $u$  représente l'énergie interne du milieu continu,  
 $r$  sont les sources volumiques de chaleur et  
 $D_{ij}$  est le tenseur vitesse de déformation.

En formulation lagrangienne, on ne s'occupe pas de l'équation de conservation de la masse. De plus, si on néglige les effets thermiques, il ne reste que les équations du mouvement (4.14), l'équation (4.15) étant trivialement satisfaites si on utilise un tenseur des contraintes symétrique. Lorsque le formalisme lagrangien est utilisé, la conservation de la masse totale du système étudié est automatiquement satisfaite puisque le maillage est fixé à la matière et, plus particulièrement, délimite les frontières du solide, si bien que la matière ne peut pas les traverser. La variation de la masse volumique est calculée localement aux points de Gauss à partir du jacobien de la transformation. Plus précisément, si  $F$  est la matrice "gradient de déformation" et  $\rho_0$ , la masse volumique initiale, on a :

$$J = \det F = \frac{\rho}{\rho_0} \quad (4.17)$$

Pour compléter le système, il faut ajouter à l'équation de la quantité de mouvement (4.14) les équations constitutives décrivant le comportement du matériau étudié. Celles-ci

relient une dérivée objective du tenseur contrainte au taux de déformation. On écrit

$$\dot{\sigma}^J = \dot{\sigma} - W\sigma + \sigma W = H : D \quad (4.18)$$

où  $\dot{\sigma}^J$  est la dérivée objective de Jaumann,  
 $D$  et  $W$  sont les parties symétrique et anti-symétrique du tenseur des vitesses de déformation,  
 $H$  est le tenseur contenant les paramètres constitutifs du matériau,  
 $H : D$  est le produit tensoriel de  $H$  par  $D$ .

En isolant la dérivée totale, non objective dans le premier membre, on obtient

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial t}|_x + w_j \frac{\partial \sigma}{\partial x_j} = q \quad (4.19)$$

où  $q$  regroupe le terme de déformations et les termes de correction d'objectivité de la dérivée.

En résumé, pour une analyse instationnaire, il faut résoudre le système d'équations suivant

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho w_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t}|_x + w_j \frac{\partial \sigma}{\partial x_j} = q \quad (4.21)$$

Lorsque les forces d'inerties peuvent être négligées ( $\rho a \ll \nabla \sigma + \rho b$ ), le problème est quasi-statique et les équations deviennent

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = 0 \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t}|_x + w_j \frac{\partial \sigma}{\partial x_j} = q \quad (4.23)$$

Nous insistons sur le fait qu'un problème quasi-statique n'entraîne pas nécessairement des accélérations nulles, c'est-à-dire des vitesses de particules constantes. De plus, nous voyons que les termes convectifs, qui ont disparu de l'équation de la quantité de mouvement, sont toujours présents dans l'équation constitutive (4.23).

Nous serons aussi amenés à étudier des processus stationnaires, pour lesquels nous ferons dégénérer les équations écrites en formalisme ALE en fixant le maillage spatialement pour retrouver le formalisme Eulérien. Ces processus peuvent être définis mathématiquement en posant  $\partial./\partial t|_x = 0$  (et non  $\partial./\partial t|_X = 0$  comme le suggère [50]).

Il est possible d'écrire une équation du type (4.23) pour toutes les grandeurs stockées aux points de Gauss de chaque élément de la structure (déformation plastique, masse volumique, endommagement, porosité, ...). Par la suite, nous utiliserons la notation  $\sigma$  en sachant bien que les formules établies restent applicables pour toutes ces grandeurs.

## 4.6 Résolution des équations

### 4.6.1 Introduction

Cette section a pour but, non seulement de rappeler la procédure habituelle utilisée en grandes déformations pour résoudre les lois de comportement du milieu continu, mais aussi de présenter les difficultés qui surgissent lorsque la formulation ALE est choisie pour résoudre le problème. Nous détaillerons chacun de ces problèmes pour justifier l'abandon d'une résolution totalement couplée au profit d'une résolution par séparation des opérateurs. Celle-ci permet de traiter l'étape lagrangienne du problème en utilisant les techniques couramment utilisées en mécanique du solide et l'étape de convection en s'aidant des progrès récents en mécanique des fluides.

### 4.6.2 Résolution des équations couplées

Pour résoudre le système des équations de conservation par la méthode des éléments finis, on est amené à écrire une forme faible de celles-ci en les multipliant par une fonction cinématiquement admissible  $\delta u$  et en les intégrant sur le volume  $V(t)$ . Une intégration par parties fournit le principe des travaux virtuels en formalisme ALE.

$$\begin{aligned} \int_{V(t)} \rho v'_i \delta u_i dV + \int_{V(t)} \rho w_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta u_i dV + \int_{V(t)} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV \\ = \int_{V(t)} \rho b_i \delta u_i dV + \int_{S(t)} t_i \delta u_i dS, \end{aligned} \quad (4.24)$$

avec  $S$ , la surface frontière du volume  $V$  et

$$t_i = \sigma_{ij} n_j .$$

L'équation (4.24) peut se mettre sous la forme simplifiée  $\delta M + \delta C + \delta W_{int} = \delta W_{ext}$  et on remarque l'apparition d'un terme convectif,  $\delta C$ , qui s'annule avec la vitesse relative entre le maillage et la matière. On peut cependant noter que, lorsque le problème est traité en quasi-statique, c'est-à-dire lorsque les phénomènes d'inertie sont négligeables, le terme de convection disparaît ainsi que le terme instationnaire  $\delta M$ . Dans ce cas, les équations à résoudre sont identiques à celles écrites en formulation lagrangienne.

L'introduction de fonctions de forme permet de discrétiser le principe des travaux virtuels. En exprimant le résultat sous la forme habituelle d'un résidu d'équilibre, on obtient la forme matricielle suivante

$$\vec{R} = M\vec{v}' + C\vec{v} + \vec{F}^{int} - \vec{F}^{ext} \quad (4.25)$$

Les expressions des matrices et vecteurs apparaissant dans cette expression peuvent être trouvées dans [45].

L'équation (4.25) peut être résolue grâce à un algorithme itératif de Newton-Raphson, à condition d'introduire deux jeux d'inconnues par élément fini : les déplacements matière et les déplacements maillage. En effet, on peut montrer [45] que, sous l'hypothèse quasi-statique, cette équation se linéarise sous la forme suivante :

$$K_g d_g \vec{x} + K_m d_m \vec{x} = -\vec{R} \quad (4.26)$$

où  $K_m$  et la matrice de raideur tangente relative aux déplacements de la matière et  $K_g$ , celle relative aux déplacements du maillage ;  $d_m \vec{x}$  et  $d_g \vec{x}$  représentent respectivement l'incrément de déplacement de la matière et du maillage.

Le système d'équations linéaires (4.26) possède exactement deux fois plus d'inconnues que d'équations. Il faut donc ajouter des équations supplémentaires qui vont fermer le système. On appelle cette opération "processus de détermination SRG". On obtient un système du type

$$\begin{bmatrix} K_m & K_g \\ 0 & K_{SRG} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_m \vec{x} \\ d_g \vec{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{R}_1 \\ -\vec{R}_2 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

avec des équations de contraintes sur les frontières qui permettent de garantir l'existence d'une relation biunivoque entre le SRG et le SRM. Par exemple,

$$(d_g \vec{x} - d_m \vec{x}) \cdot \vec{n} = 0 \quad (4.28)$$

Si nous décidons de suivre la méthode décrite dans la section précédente, nous nous retrouvons face au problème formé par les deux systèmes (4.27) et (4.28).

### 4.6.3 Difficultés liées à la résolution couplée

Ce paragraphe résume les difficultés qu'on rencontre si on décide de résoudre les équations telles qu'elles viennent d'être introduites.

- Résolution étagée impossible : en effet, déduire les déplacements du maillage à partir du deuxième groupe d'équations de (4.27) et les injecter dans le premier groupe n'est pas une bonne idée puisque la solution obtenue ne vérifie pas les contraintes de compatibilité des frontières (4.28).
- Les termes convectifs posent une difficulté supplémentaire parce qu'ils requièrent l'évaluation du gradient des contraintes. Or, celles-ci sont des inconnues faibles du problème (elles ne sont définies qu'aux points de Gauss de chaque élément). Il faut donc trouver un moyen pour transformer ce champ connu ponctuellement en un champ continu aux noeuds du maillage. Nous verrons par la suite plusieurs techniques applicables dans ce but. Nous constaterons aussi leur inconvénient majeur : une très grande diffusion non physique de la grandeur rendue continue aux noeuds.
- L'équation de la masse, trivialement satisfaite en formulation lagrangienne, doit être prise en considération.



- La difficulté la plus contraignante vient de la présence du double jeu d'inconnues. En effet, imaginons que la solution du système peut être obtenue d'une manière ou d'une autre. On peut donc tracer le nouveau maillage et les nouvelles lignes matérielles définies par l'incrément  $d_m \vec{x}$  qui est appliqué au maillage du pas de temps précédent. Il est ensuite facile de constater que les nouveaux points de Gauss du nouveau maillage ne correspondent plus aux mêmes particules que celles qui se trouvaient aux points de Gauss de l'ancien maillage. Or, nous savons que les lois constitutives ne peuvent être intégrées qu'en suivant la même particule matérielle au cours du pas de temps. Tandis que les équations d'équilibre nécessitent la connaissance du champ de contrainte aux points de Gauss du maillage. Ce problème peut être résolu [45] mais uniquement d'une manière très coûteuse en temps de calcul.

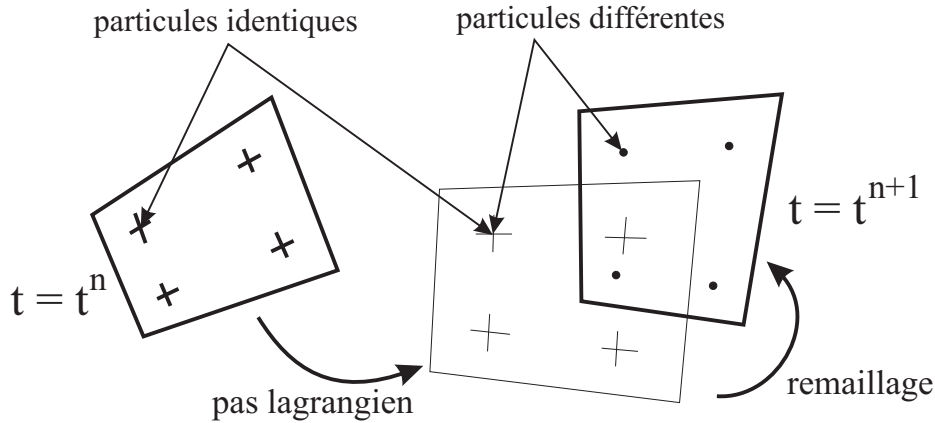


FIG. 4.3: Problème de l'intégration des lois constitutives.

- Les contraintes sur les frontières sont parfois difficiles à respecter vu que la discrétisation par éléments finis linéaires transforment les courbes en lignes brisées.
- Le processus de détermination SRG doit être linéarisable pour être inclus dans la matrice d'itération de Newton-Raphson.
- Le système à résoudre possède deux fois plus d'inconnues. Le temps de calcul est donc multiplié par un facteur 8 si on utilise un solveur direct comme l'algorithme de Gauss.

#### 4.6.4 Séparation des opérateurs

Pour résoudre d'une manière beaucoup plus simple le système d'équations (4.25), il est possible de partitionner l'opérateur Eulérien-Lagrangien. L'idée est très simple : pour chaque pas de temps, on effectue dans une première étape un calcul purement lagrangien (actualisé). La deuxième étape consiste à définir un nouveau maillage et à transporter la solution lagrangienne obtenue sur ce dernier. On transportera ainsi les contraintes et toutes les variables d'hérédité, des points de Gauss de l'ancien maillage vers les points de Gauss

du nouveau.

Remarquons que la deuxième étape n'est activée qu'à la fin d'un pas de temps et non pas à chaque itération de Newton-Raphson. On obtient ainsi un algorithme qui est beaucoup plus rapide et même plus robuste que son homologue totalement couplé.

### 4.6.5 Phase lagrangienne pure

La puissance de la méthode réside dans le fait que la phase lagrangienne de l'algorithme ALE est exactement identique à celle d'un calcul purement lagrangien. Chaque pas de temps débute par un calcul lagrangien qui nécessite un certain nombre d'itérations pour parvenir à l'équilibre. L'équation constitutive s'écrit pour cette phase :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t}|_x = q \quad (4.29)$$

c'est-à-dire, l'équation (4.21) sans le terme convectif. Elle doit être intégrée pour obtenir les contraintes "Lagrangiennes"  $\sigma_L$  (contraintes après la phase lagrangienne) à partir des contraintes au temps  $t_n$ ,  $\sigma^n$ . On considère donc que les points de la grille  $\chi$  bougent comme les particules matérielles  $X$ .

### 4.6.6 Phase eulérienne-lagrangienne

Lorsque l'équilibre est atteint dans la première phase, on peut passer à la deuxième phase de calcul. Celle-ci s'effectue en deux étapes distinctes. Tout d'abord un remaillage de la structure étudiée et, ensuite, une convection des grandeurs aux points de Gauss.

#### 4.6.6.1 Gestion du maillage

En général, le but de l'opération de remaillage est de minimiser les distorsions des éléments finis parce que ces dernières provoquent une perte de précision ou même parfois l'arrêt du processus itératif de Newton-Raphson.

Ces techniques peuvent aussi être employées pour raffiner le maillage au niveau des zones les plus sollicitées (maillage adaptatif [45]).

Enfin, on peut utiliser le remaillage dans le cas de problèmes Eulériens traités par la décomposition de l'opérateur eulérien-lagrangien. Dans ce dernier cas, le remaillage est une opération très simple puisqu'il consiste à égaler le nouveau maillage et celui du début du pas de temps. Ci dessous, nous citons certaines méthodes utilisées dans METAFOR.

**La méthode du barycentre** : cette méthode permet de lisser le maillage en repositionnant itérativement chaque noeud au barycentre des noeuds qui l'entourent.

**La méthode de Giuliani** : cette méthode permet de minimiser itérativement l'effilement et la distorsion des triangles formant le maillage. Les mailles quadrangulaires, utilisées par METAFOR sont divisées en deux pour pouvoir appliquer l'algorithme.

**La méthode d'interpolation transfinie** (MIT) [45] : cette méthode permet de définir les noeuds du maillage à l'intérieur d'un domaine en connaissant sa courbe frontière et sa discrétisation. Si la surface  $F$  est limitée par quatre arcs,  $P_1(\xi)$ ,  $P_2(\xi)$ ,  $Q_1(\xi)$  et  $Q_2(\xi)$ , on définit un projecteur  $\pi$  qui transforme un carré de côté unitaire en une surface approchée qui rencontre exactement les quatre arcs frontières. Par définition, on appelle interpolant bilinéaire de Lagrange de la surface  $F$  le projecteur suivant :

$$\begin{aligned}\pi(F) &= (1 - \eta)P_1(\xi) + \eta P_2(\xi) + (1 - \xi)Q_1(\eta) + \xi Q_2(\eta) \\ &- \xi\eta F(1, 1) - (1 - \xi)(1 - \eta)F(0, 0) \\ &+ (1 - \xi)\eta F(0, 1) - \xi(1 - \eta)F(1, 0)\end{aligned}\quad (4.30)$$

avec  $0 \leq \xi \leq 1$  et  $0 \leq \eta \leq 1$ . Cette méthode donne généralement de très bons

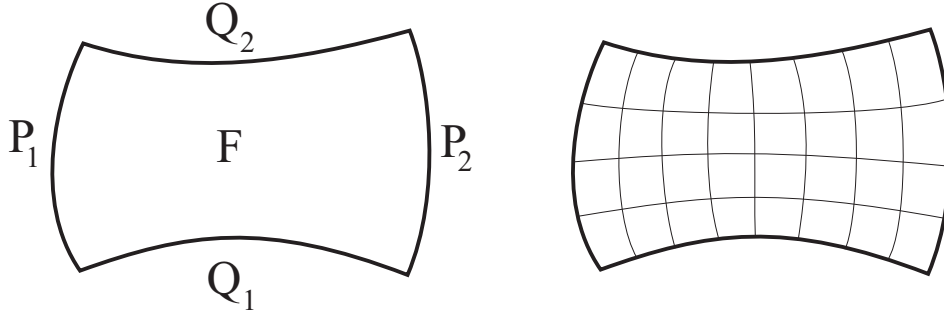


FIG. 4.4: Maillage transfini d'un sous-domaine.

résultats parce qu'elle est très simple (pas d'itération pour obtenir le nouveau maillage contrairement à la méthode du barycentre, par exemple) et donc très rapide. De plus, elle permet de remailler des domaines très complexes pour autant qu'on partitionne ceux-ci en sous-domaines à l'aide de lignes maîtresses et de pôles. Elle peut aussi être facilement étendue aux cas tridimensionnels ou aux domaines triangulaires.

Quelle que soit la méthode utilisée, on utilise le concept de lignes maîtresses (voir figure 4.4) pour délimiter le domaine traité par le formalisme ALE. Celles-ci peuvent être traitées comme étant Eulériennes, Lagrangiennes ou Eulériennes-Lagrangiennes.

La plupart du temps, nous utiliserons la MIT pour remailler la structure étudiée. Cependant, il sera peut-être intéressant, dans l'avenir, d'utiliser des méthodes mixtes pour traiter certains cas particuliers. Certaines régions seraient traitées par la MIT et d'autres, par la méthode du barycentre. Cette dernière pourrait être appliquée dans une zone fixée dans l'espace et définie a priori par l'utilisateur (on introduirait par exemple les 4 sommets d'un quadrangle dans le jeu de données). Les problèmes de laminage pourrait être traité de la sorte, comme le suggère Liu [26].

### 4.6.6.2 Problèmes de la gestion des frontières eulériennes

Lors de la rediscrétisation des lignes maîtresses, il faut repositionner les noeuds afin de respecter au mieux la coïncidence entre l'ancienne et la nouvelle frontière. Vu que celles-ci ne sont généralement pas rectilignes (vu la déformation), un algorithme est mis en oeuvre pour respecter l'abscisse curviligne désirée et éviter les pertes ou les gains de matière.

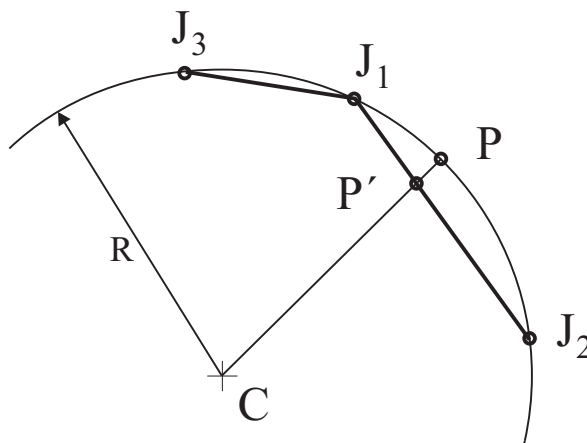
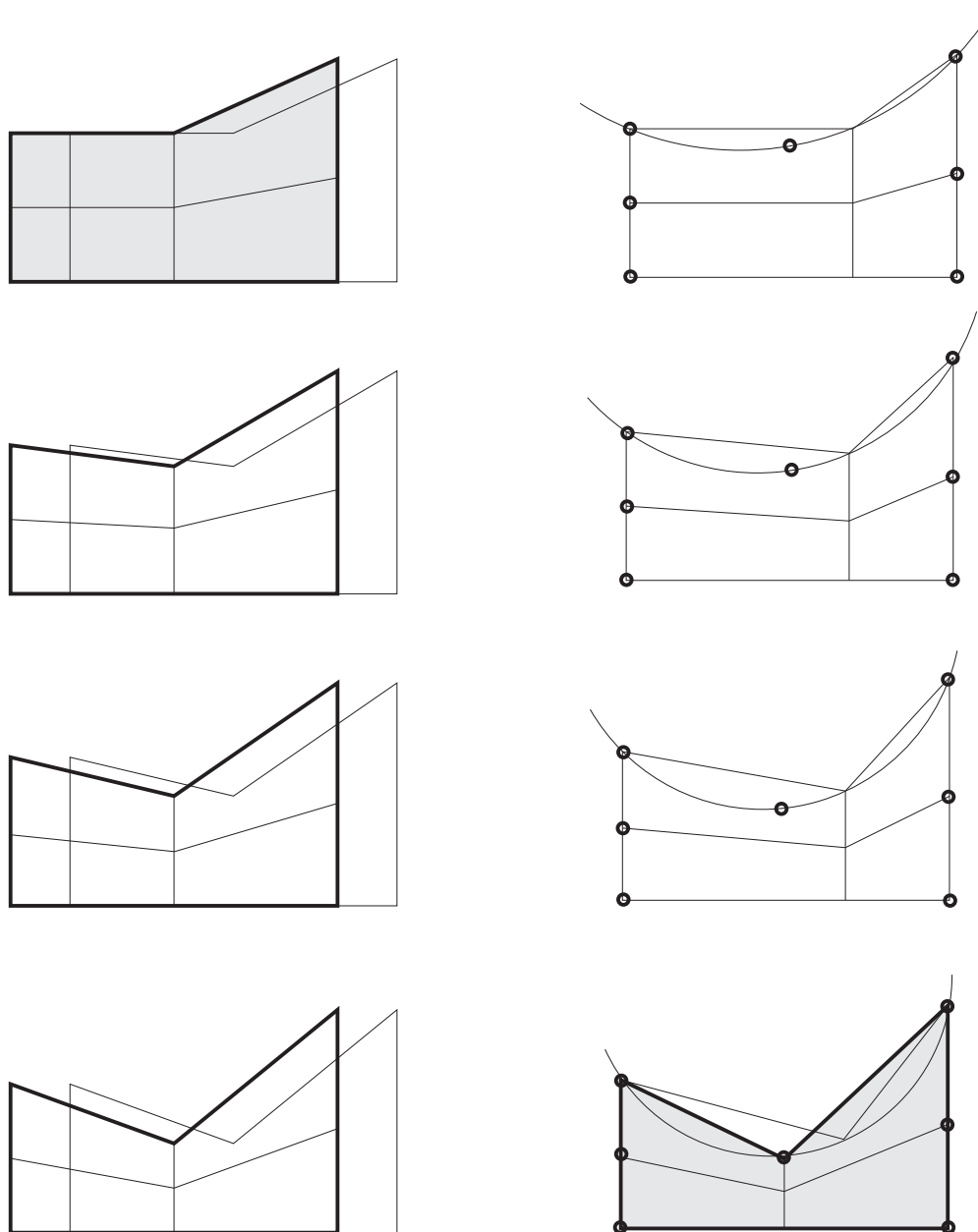


FIG. 4.5: Rediscrétisation d'une ligne maîtresse.

Considérons le schéma de la méthode (figure 4.5). Ayant déterminé le point  $P'$  d'après l'abscisse curviligne désirée et la position des deux noeuds  $J_1$  et  $J_2$  définissant le segment qui contient  $P'$ , on détermine alors le troisième noeud  $J_3$  le plus proche de  $P'$ . La position du point  $P$  est donnée par l'intersection du cercle passant par les noeuds  $J_1, J_2, J_3$  et le rayon passant par  $P'$ .

Cependant, dans le cas où on considère un domaine Eulérien dans la direction de la convection de matière et lagrangien dans la direction perpendiculaire, cet algorithme doit être modifié, et c'est ce que nous avons fait, car sinon il conduit à un écrasement des mailles. Pour être plus précis, on peut montrer que cet algorithme est stable uniquement dans le cas où les pôles du sous-domaine concerné sont traités par le formalisme lagrangien. La figure 4.6 montre un corps qui subit une translation horizontale. La colonne de gauche montre la configuration équilibrée au début des pas de temps successifs ainsi que la configuration obtenue après l'étape lagrangienne. La colonne de droite montre en détails la détermination de la courbe supérieure délimitant le corps. On voit que l'angle entre les deux segments supérieurs tend à diminuer ce qui provoque rapidement un écrasement non physique des mailles.

La solution proposée est simple : Si un pôle du maillage est fixé selon une direction, on ne le projette pas perpendiculairement à celle-ci mais on cherche l'intersection entre la configuration de référence et la configuration après le pas lagrangien. comme le montre la figure 4.7.

FIG. 4.6: Déformation non physique d'une structure en translation selon  $x$ .

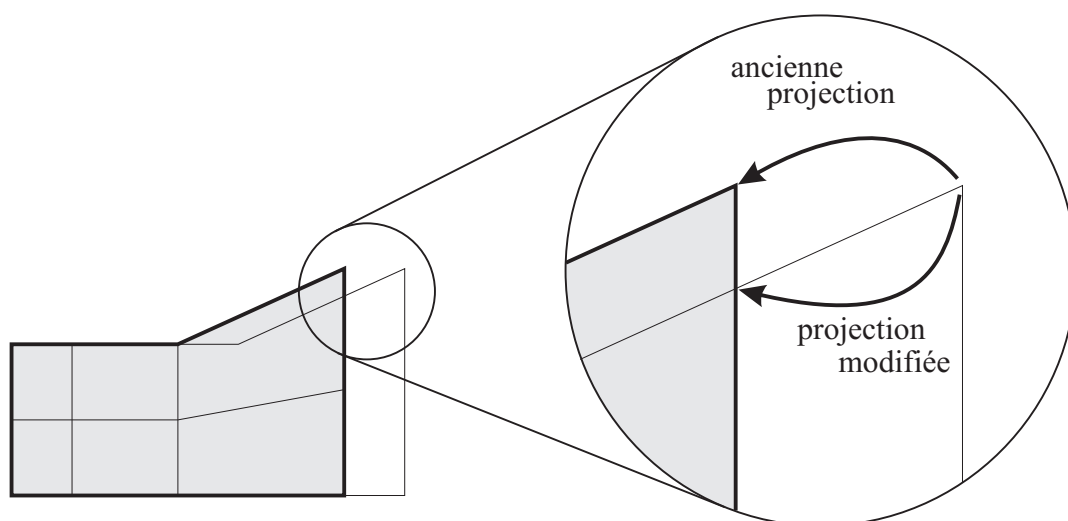


FIG. 4.7: Solution proposée.

Il serait aussi intéressant de pouvoir imposer plus de contraintes sur le maillage. Pour l'instant, les déplacements du maillage peuvent être contrôlés selon  $x$  et selon  $y$  suivant des lois temporelles linéaires par morceaux. Il n'est donc pas possible de définir un mouvement de rotation parfait (c'est-à-dire sans l'approximer par une ligne brisée) ou de contraindre les noeuds définissant le maillage d'une structure circulaire à se déplacer uniquement radialement.

#### 4.6.6.3 Problèmes des structures circulaires

Lors de notre étude du laminage (voir section 5.5), nous avons modélisé le rouleau de laminage par un anneau, celui-ci étant défini par des rayons interne et externe. Ceci permet d'étudier les déformations élastiques du rouleau en le considérant comme un corps déformable. Cependant, METAFOR n'est pas prévu pour traiter des structures composées de sous-domaines où le premier se connecte au dernier. Pour comprendre, il faut savoir que les routines de traitement du maillage parcourent séquentiellement les noeuds de chaque ligne maîtresse à l'aide de 3 nombres entiers ( $I, J, K$ ) qui définissent une boucle FORTRAN. Autrement dit, la boucle s'applique du noeud  $I$  au noeud  $J$  par pas de  $K$  ( $K$  vaut 1 pour les lignes  $P$  et, pour les lignes  $Q$ ,  $K$  vaut le nombre de noeuds sur les lignes  $P$ ). Il faut donc impérativement que les noeuds de chaque sous-domaine puissent être numérotés d'une manière continue dans chacun de ceux-ci. Si le sous-domaine traité est connecté à plus d'un sous-domaine précédemment traité, il apparaîtra un dédoublement de noeuds et donc une structure discontinue !

Pour remédier à ce problème, il faudrait revoir complètement la gestion des numéros de noeuds dans les routines de traitement ALE. Ces numéros sont étroitement liés à ceux qui sont créés par le préprocesseur (BACON jusqu'à présent) et le problème apparaît aussi dans celui-ci tant qu'on utilise les anciennes commandes de discrétisation (`.EOD`, `.E1D`, etc). Nous devrions donc utiliser les "nouvelles" commandes de maillage (`.GEN`) mais alors nous aurons quelques difficultés pour gérer les noeuds dans METAFOR (ceux-ci ne sont plus ordonnés et les pôles et les lignes définissant les sous-domaines ne sont pas directement accessibles).

Une autre possibilité, beaucoup plus simple mais inapplicable pour l'instant, est d'attendre la fin de la mise au point du nouveau préprocesseur de METAFOR [14] à partir duquel nous pourrions facilement extraire les routines de maillage et les utiliser pour les routines ALE. Si les deux maillages sont identiques, les noeuds seront numérotés de la même façon.

#### 4.6.6.4 Transfert des données

Le transfert des données consiste à résoudre l'équation (4.21) sans second membre. On a donc

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t}|_x + w_j \frac{\partial \sigma}{\partial x_j} = 0. \quad (4.31)$$

Cette équation va permettre le calcul de  $\sigma^{n+1}$  (contraintes au temps  $t^{n+1}$ ) à partir de  $\sigma_L$ . Avant d'introduire l'algorithme de transfert de données que nous avons mis au point, nous rappelons brièvement les algorithmes existant dans METAFOR. Ces derniers sont plutôt des méthodes d'interpolations qui ne tiennent pas compte du sens de l'écoulement (vitesse relative de convection  $\vec{w}$ ). Ceci implique l'apparition d'oscillations numériques parasites

lorsque la convection est trop importante. Il est donc généralement impossible d'étudier des domaines purement Eulériens ou des phénomènes stationnaires avec ces méthodes.

Toutes les méthodes utilisées dans METAFOR se déroulent en deux étapes distinctes :

- Lissage des variables à transférer pour obtenir un champ continu sur la structure. De ce champ continu, on peut déduire un vecteur gradient qui permettra d'approximer le terme convectif des équations. Une méthode possible (les moindres carrés locaux) consiste, pour chaque élément, à extrapoler les grandeurs des points de Gauss vers les noeuds ; la valeur finale du champ continu est obtenue en calculant la moyenne des valeurs des éléments adjacents.
- Transfert des points de Gauss de l'ancien maillage vers les points de Gauss du nouveau maillage par les méthodes suivantes :
  - *Développement de Taylor* : cette méthode consiste à écrire un développement de Taylor au premier ordre du champ spatial de la grandeur à transférer.

$$\sigma^N = \sigma^A + \vec{d} \cdot \vec{\nabla} \sigma, \quad (4.32)$$

où les exposants  $N$  et  $A$  sont relatifs aux nouvelles et anciennes valeurs. Le vecteur  $\vec{d}$  a pour origine l'ancien point de Gauss et comme extrémité, le nouveau. Le gradient est évalué en dérivant le champ continu préalablement obtenu.

- *Interpolation nodale simple* : pour chaque point de Gauss du nouveau maillage, on identifie l'élément de l'ancien maillage dans lequel il se trouve pour déduire la valeur du champ à transférer par interpolation nodale.
- *Interpolation nodale double* : la valeur du champ à transférer est déterminée au noeud du nouveau maillage par interpolation simple à partir de celle au noeud de l'ancien maillage. Les valeurs aux points de Gauss sont déterminées par une deuxième interpolation à partir des valeurs précédemment calculées.
- *Interpolation de Sheppard* : on effectue une moyenne des anciennes valeurs aux points de Gauss pondérée par l'inverse de la distance au carré qui les séparent du nouveau point de Gauss concerné.

Ce transfert effectué, le pas de temps est terminé.



#### 4.6.6.5 Algorithme ALE

Nous présentons ci-dessous un organigramme qui résume les différentes étapes du calcul non linéaire d'une structure par le formalisme ALE.

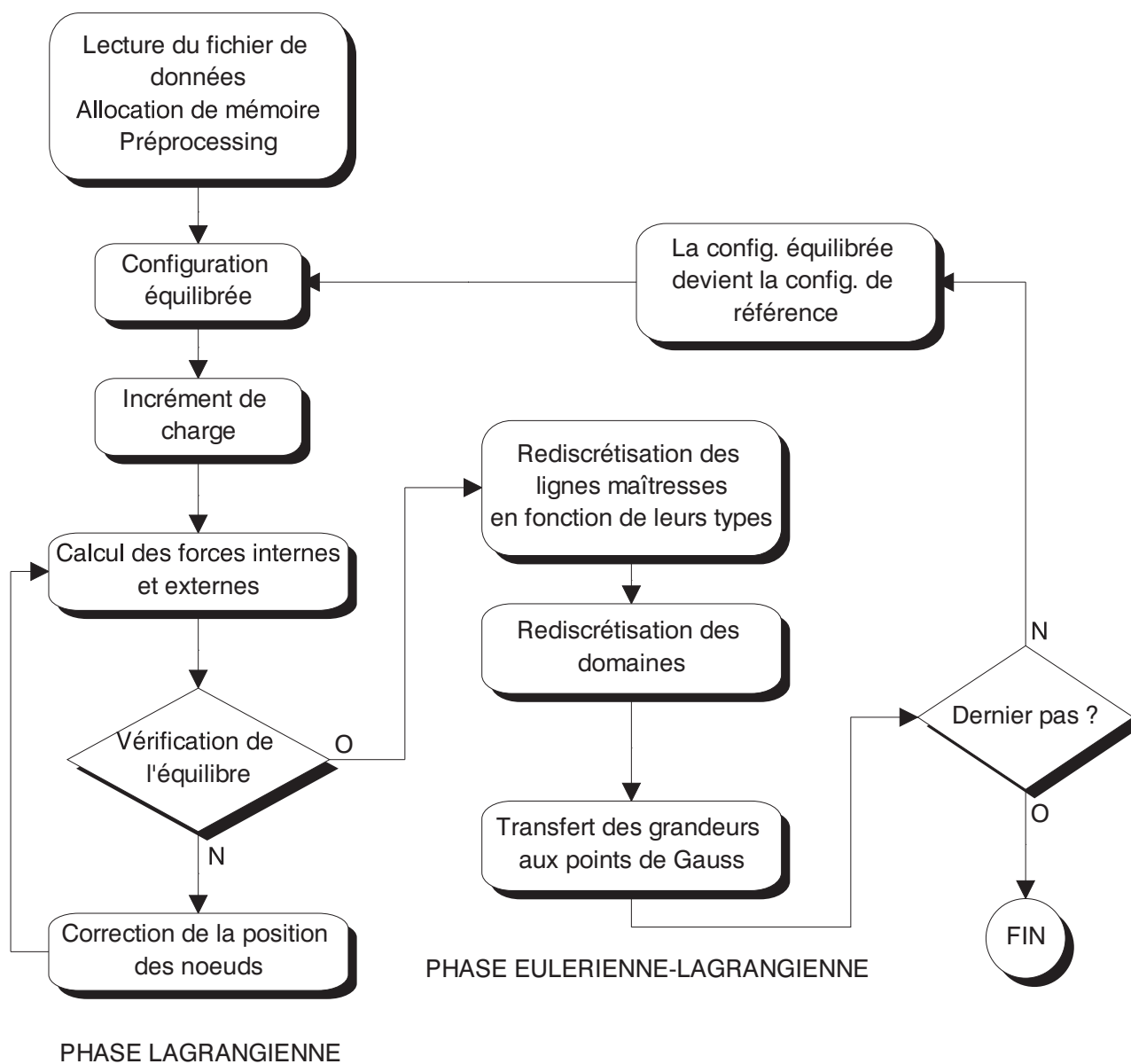


FIG. 4.8: Les deux phases d'un calcul en formalisme ALE.

## 4.7 Un algorithme mixte EF/VF pour le transfert des données

Le problème majeur que nous rencontrons ici est l'absence d'un champ continu pour les grandeurs à transférer. Ceci nous pousse à vouloir en créer un artificiellement à l'aide des données ponctuelles qu'on trouve aux points de Gauss. Ce n'est pas une bonne idée parce que les extrapolations des valeurs aux points de Gauss vers les noeuds provoquent inévitablement une diffusion numérique très importante à laquelle il faut ajouter la diffusivité numérique de la méthode d'intégration temporelle utilisée. La solution obtenue risque alors d'être très peu précise.

De plus, nous sommes ici en présence d'un opérateur spatial non symétrique (non auto-adjoint). L'application d'un schéma spatialement centré conduit à des instabilités numériques de la solution car l'opérateur discret centré ne respecte pas le caractère unidirectionnel de l'écoulement. Il faut donc obligatoirement utiliser une méthode décentrée.

C'est pourquoi il est intéressant de développer une méthode qui peut se passer de l'évaluation du gradient du champ discontinu. La méthode de Godunov utilisée pour formuler les équations de la méthode des volumes finis (MVF) est particulièrement bien adaptée à ce genre de problème. Non seulement, elle permet de contourner la difficulté du gradient en formulant le problème sous forme intégrale mais aussi, elle introduit un décentrage de l'opérateur spatial discrétisé.

La méthode des volumes finis est, en beaucoup de points, similaire à la méthode des éléments finis. Elle traite cependant les termes convectifs d'une manière différente, faisant apparaître les grandeurs aux interfaces des éléments sous la forme de leur flux à travers la surface.

Nous reprenons ici les travaux effectués sur le sujet par Casadei, Donéa et Huerta [7, 17–19, 29] et, plus récemment, Potapov [47] et Rodriguez-Ferran [50, 51].

*Parler de la méthode de Liu*

Soit un domaine de calcul  $\Omega$  subdivisé en cellules de contrôle  $C_s$ . Pour chacune de ces cellules, un seul point de collocation des variables du problème est défini, ce qui conduit une approximation constante des champs inconnus par cellule. L'équation (4.31) est réécrite sous forme conservative en définissant le produit  $Y_j = \sigma w_j$  :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t}|_x + \frac{\partial Y_j}{\partial x_j} = \sigma \frac{\partial w_j}{\partial x_j}. \quad (4.33)$$

En introduisant les fonctions tests  $\omega$ , on peut en déduire une forme intégrale (faible) :

$$\int_{\Omega} \omega \left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial Y_j}{\partial x_j} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \omega \left( \sigma \frac{\partial w_j}{\partial x_j} \right) d\Omega. \quad (4.34)$$

Les fonctions  $\omega$ , tout comme  $\sigma$ , sont choisies constantes sur chaque cellule de contrôle.

Ce qui permet d'écrire une équation valable par élément en remplaçant simplement  $\Omega$  par  $C_s$  dans l'équation globale (4.34).

Contrairement à l'approche des éléments finis, on utilise la formule de Green pour transformer les termes convectifs en une intégrale de surface. Si  $S_s$  est la frontière de la cellule  $C_s$ , on obtient :

$$\int_{C_s} \omega \frac{\partial \sigma}{\partial t} dC_s = \int_{C_s} \omega \sigma \frac{\partial w_j}{\partial x_j} dC_s - \int_{S_s} \omega (Y_j n_j) dS_s \quad (4.35)$$

Finalement, on obtient la forme suivante discrétisée spatialement :

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial t} = -\frac{1}{2V_s} \sum_{i=1}^{N_s} f_i (\sigma_i^c - \sigma_s) (1 - \alpha \text{sign}(f_i)) \quad (4.36)$$

qui est valable pour la cellule de contrôle  $s$  dont le volume est  $V_s$  et qui possède  $N_s$  faces. On note  $\sigma_i^c$  la valeur de la grandeur inconnue dans l'élément adjacent partageant la face  $i$  avec la cellule  $s$ . On définit le flux  $f_i$  de la vitesse de convection  $w$  par la relation suivante

$$f_i = \int_{S_{si}} w_j n_j dS \quad (4.37)$$

où  $n_j$  sont les composantes de la normale unitaire à la surface  $S_{si}$  adjacente aux cellules  $s$  et  $i$  et extérieures à la cellule  $i$ .

Faire un dessin

Quant au paramètre  $\alpha$ , il est utilisé dans l'équation (4.36) pour introduire un décentrage (upwind). Il peut varier entre la valeur 0, qui équivaut à une dérivée spatiale centrée et 1, pour une dérivée amont, totalement décentrée (full donor approximation). Bien sûr, pour traiter des problèmes 2D, il suffit de remplacer le volume de la cellule par son aire et les intégrales de surface par des intégrales de contour.

Grâce à cette méthode, on arrive donc à décomposer un problème initialement tridimensionnel ou bidimensionnel en une série de problèmes unidimensionnels définis aux interfaces des cellules de contrôle dans les directions normales à celles-ci.

Il reste à discrétiser temporellement l'équation obtenue. Nous utilisons pour ce faire un schéma d'Euler explicite.

$$\sigma_s^{n+1} = \sigma_s^n - \frac{\Delta t}{2V_s} \sum_{i=1}^{N_s} f_i (\sigma_i^c - \sigma_s) (1 - \alpha \text{sign}(f_i)) \quad (4.38)$$

La mise à jour explicite permet de simplifier les calculs mais ne peut pas être appliquée si le pas de temps est trop grand parce que ce schéma est conditionnellement stable.

Si le problème est à deux dimensions, l'équation (4.38) devient

$$\sigma_s^{n+1} = \sigma_s^n - \frac{\Delta t}{2A_s} \sum_{i=1}^{N_s} f_i (\sigma_i^c - \sigma_s) (1 - \alpha \text{sign}(f_i)) \quad (4.39)$$

où  $A_s$  est l'aire de la cellule lorsqu'on travaille en état plan de déformation.

Pour les problèmes axisymétriques, les intégrales deviennent :

$$f_i = \int_{\Gamma_i} w_j n_j r d\Gamma_i \quad (4.40)$$

$$A_s = \int_S r dS \quad (4.41)$$

### 4.7.1 Application à la mécanique du solide

Un problème important est le choix des cellules qu'on va utiliser. En effet, celles-ci ne peuvent pas être choisies arbitrairement parce qu'une partie du problème est discrétisé avec des éléments finis. Il faut donc pouvoir transférer le plus simplement possible les informations des éléments finis vers les volumes finis et inversement. Il serait aussi préférable de ne pas utiliser trop de mémoire pour la mémorisation des liens entre les deux types de discrétisation.

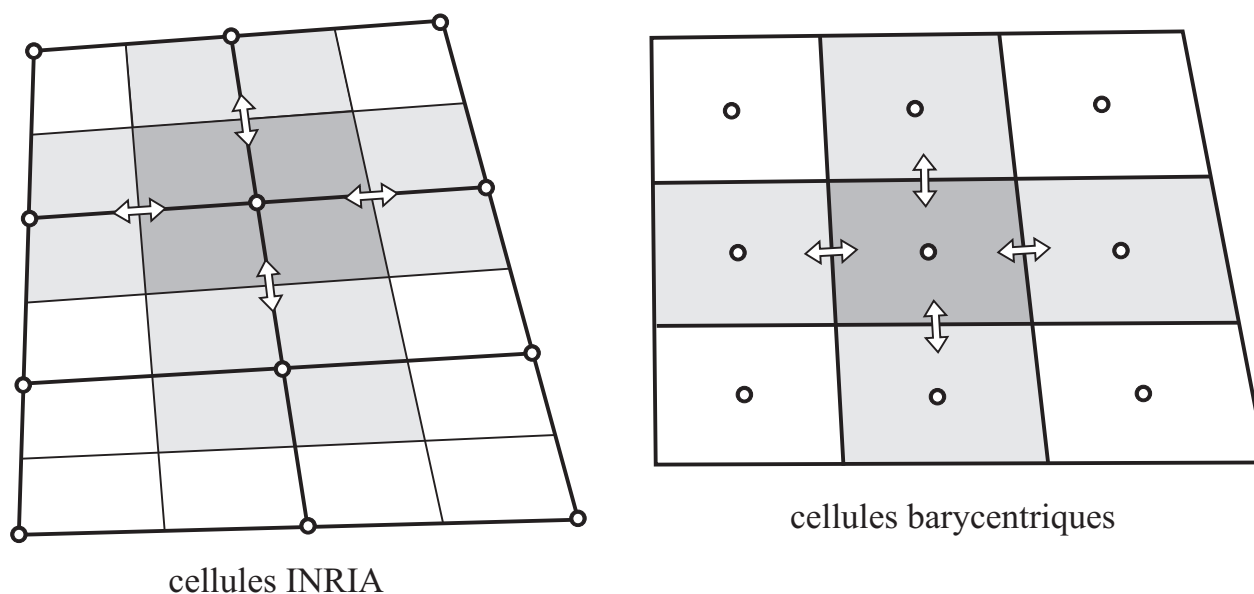


FIG. 4.9: Cellules INRIA et cellule barycentriques.

Nous avons à notre disposition une grande quantité de types de cellules de contrôles. Deux types de cellules couramment utilisées sont d'une part les cellules barycentriques, ou cell-centered et d'autre part les cellules INRIA, ou median dual cell-vertex. Les premières coïncident géométriquement avec le maillage (ici, le maillage des éléments finis) et possèdent un point de collocation en leurs barycentres. Ces cellules sont particulièrement bien

adaptées pour les grandeurs définies en un seul point de Gauss pour chaque élément. Nous utiliserons donc ce type de cellule pour transférer la pression.

Les cellules INRIA peuvent être obtenue à partir du maillage des éléments finis en considérant chaque noeud et en joignant les barycentres des polyèdres (c'est-à-dire les éléments finis dans notre cas particulier) admettant comme sommet le noeud en question, au milieu des arêtes de ces polyèdres. Celles-ci sont intéressantes pour transférer les grandeurs définies aux noeuds du maillage des éléments finis (quantité de mouvement et température). Cependant, nous n'avons pas encore implémenté ce type de cellule dans METAFOR.

Pour transférer les grandeurs définies en plus d'un point de Gauss par élément, deux méthodes sont possibles :

- La première approche, proposée par Potapov [47], consiste à généraliser la formulation intégrale (4.35) en utilisant des fonctions non constantes pour la grandeur à transférer  $\sigma$  et la fonction test  $\omega$ . Nous envisageons d'implémenter cette méthode dans un futur proche.
- La deuxième méthode, proposée par Huerta, Casadei et Donéa [7, 17–19, 29] est moins mathématique mais donne de meilleurs résultats d'après ces auteurs. C'est pourquoi nous nous sommes plus particulièrement intéressés à celle-ci. L'idée de la méthode est de diviser chaque élément fini en un nombre de cellules égal au nombre de points de Gauss. Habituellement, on utilise 4 points de Gauss pour intégrer la partie déviatorique des contraintes. On utilisera donc 4 cellules par élément fini qui recouvriront le domaine d'influence du point de Gauss considéré. Dans notre cas, il s'agit de diviser un quadrilatère à l'aide de ses médianes. Dans chacune de ces cellules, le champ inconnu est considéré constant pour pouvoir appliquer la théorie développée pour les cellules barycentriques à un point de collocation. En faisant cela, on commet une erreur supplémentaire puisque les points de Gauss ne sont pas situés au centre de celles-ci mais en  $[\pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3}]$  dans le plan de référence. Cette méthode est appelée 'mise à jour Godunov-like' par son auteur. La figure 4.10 montre la division d'un élément fini en 4 volumes finis.

## 4.7.2 Algorithme proposé

### 4.7.2.1 Le stockage de la topologie

Le principe de la méthode n'est pas compliqué. La difficulté de l'implémentation provient principalement du repérage des cellules voisines. En effet, lorsqu'on utilise la méthode des éléments finis, la topologie du maillage peut être stockée très simplement par des vecteurs de localisation (LOCELS) qui fournissent le numéro structural d'un noeud lorsqu'on connaît son numéro élémentaire. On peut aussi facilement connaître les numéros des éléments qui ont pour sommet un certain noeud. Par contre, il est plus difficile de connaître la position d'un élément fini par rapport à un autre. Quand on introduit les cellules internes, le problème se complique parce que, pour une frontière donnée, il faut non seulement

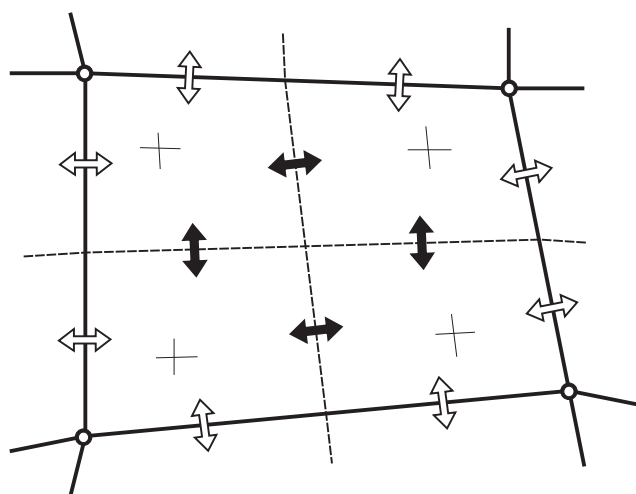


FIG. 4.10: Cellules pour le transfert Godunov-like.

connaître les numéros des éléments en vis-à-vis mais aussi les numéros des points de Gauss en vis-à-vis.

La solution la plus simple, comme l'a fait Rodriguez-Ferran, consiste à discrétiser toute la structure en volumes finis avant de commencer le calcul. On stocke toutes les informations nécessaires dans des tableaux qu'on utilise à chaque transfert.

Une solution, beaucoup plus économique d'un point de vue de la mémoire utilisée, consiste à recalculer la topologie à chaque transfert. Grâce à la méthode que nous avons mise au point, le surplus de calcul n'est pas considérable et nous pourrions, si c'était nécessaire plus tard (question de clarté du code), utiliser la méthode coûteuse très facilement. En effet, la construction des tableaux en prétraitement sera dans ce cas très simple parce qu'elle ne doit pas être optimisée. De plus, les routines actuelles pourront être réutilisées en grande partie.

#### 4.7.2.2 Calcul des grandeurs géométriques

La mise à jour d'une grandeur consiste à parcourir toutes les frontières de tous les volumes finis présents dans la structure et d'appliquer la formule (4.39) aux points de Gauss de part et d'autre de celle-ci.

Pour ce faire, l'algorithme parcourt tout d'abord tous les éléments finis et calcule le transport relatif aux frontières internes de chaque élément (voir figure 4.11).

Cette première étape accomplie, une deuxième boucle parcourt tous les noeuds du maillage des éléments finis et pour chaque noeud, calcule tous les flux relatifs aux frontières arrivant à celui-ci. La tâche est bien plus compliquée puisqu'il n'y a pas toujours le même

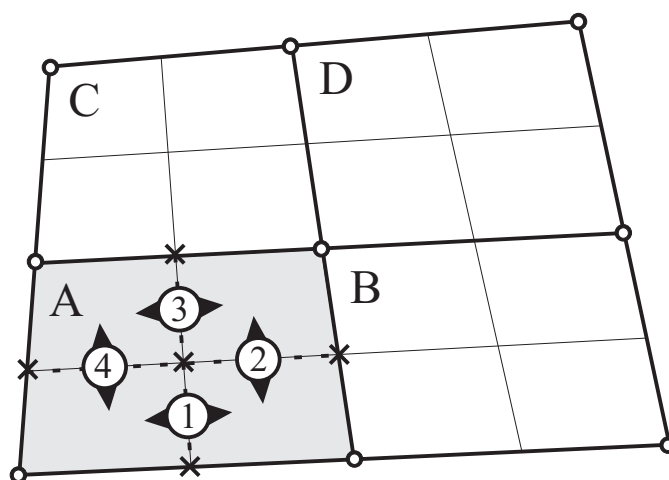


FIG. 4.11: La boucle sur les éléments finis (transport interne à l'élément).

nombre de frontières arrivant à un noeud donné même si on considère un maillage régulier provenant d'un mailleur transfini. En effet, un noeud peut être un noeud de coin pour lequel on doit considérer 2 frontières avec l'extérieur et une seule cellule (voir noeud A, figure 4.12) ; il peut s'agir d'un noeud de frontière pour lequel 2 cellules interagissent entre elles et avec l'extérieur (noeud B, par exemple) ; il peut être un noeud intérieur pour lequel on a 4 cellules intérieures au maillage EF qui interagissent. Enfin, on peut avoir une situation où on a 3 cellules intérieures qui interagissent entre elles et avec l'extérieur.

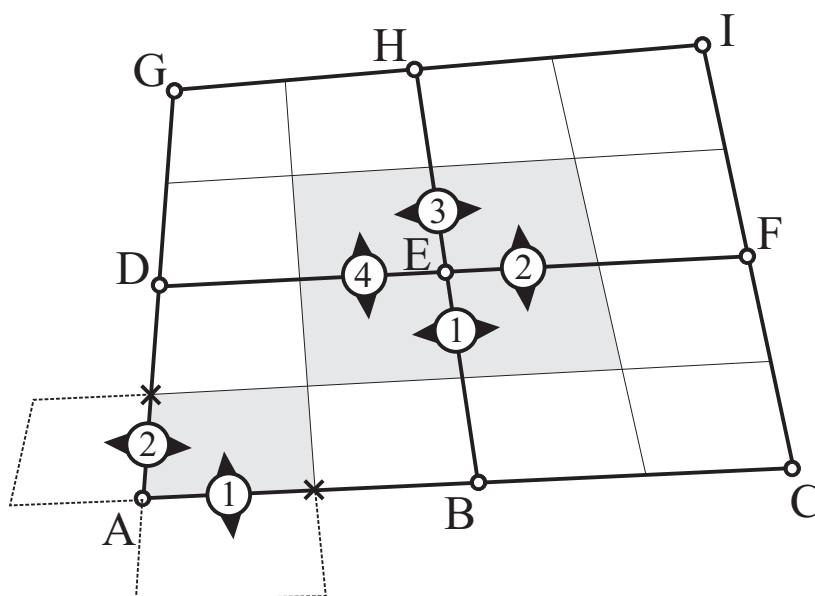


FIG. 4.12: La boucle sur les noeuds (transport inter-éléments).

Le calcul des grandeurs géométriques concerne les positions des milieux des frontières,



des centres des éléments finis et des aires des cellules. Notons que ceci devrait être fait même si la topologie était stockée en mémoire. Cette phase dans la première boucle ne pose pas de problèmes particuliers. Dans la deuxième phase, il faut par contre mettre en oeuvre une routine plus complexe pour détecter le nombre de frontières à traiter, les numéros de noeuds les délimitant, les éléments concernés ainsi que leur position les uns par rapport aux autres.

En axisymétrie, le calcul des intégrales  $A$  s'effectue avec 4 points de Gauss. Ce calcul est évidemment exact dans le cas de l'état plan de déformation puisqu'il correspond à l'aire de la cellule.

#### 4.7.2.3 Calcul des vitesses

Pour pouvoir évaluer l'intégrale donnant le flux à travers une frontière donnée, il faut tout d'abord calculer la vitesse et la normale à la frontière. Dans chaque élément fini de la structure, la vitesse relative du maillage par rapport à la matière peut être écrite sous la forme suivante :

$$w(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) w_i \quad (4.42)$$

avec  $w_i$  , la vitesse relative au noeud  $i$  de l'élément  $(x_i^{\text{matière}} - x_i^{\text{maillage}})/\Delta t$   
 $N_i$  , les fonctions de forme (linéaires dans notre cas)

Les fonctions de forme s'écrivent en détail :

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (4.43)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (4.44)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (4.45)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (4.46)$$

Pour la première boucle, on considère uniquement les frontières intérieures à un élément fini. Selon les médianes de l'élément, le champ de vitesses est linéaire, si bien qu'on a besoin d'un seul point d'intégration pour évaluer le flux correctement. Les vitesses au milieu des frontières intérieures s'écrivent donc :

$$w(0, -1/2) = \frac{1}{4} \left[ \frac{3}{2}(w_1 + w_2) + \frac{1}{2}(w_3 + w_4) \right] \quad (4.47)$$

$$w(0, 1/2) = \frac{1}{4} \left[ \frac{3}{2}(w_3 + w_4) + \frac{1}{2}(w_1 + w_2) \right] \quad (4.48)$$

$$w(1/2, 0) = \frac{1}{4} \left[ \frac{3}{2}(w_2 + w_3) + \frac{1}{2}(w_1 + w_4) \right] \quad (4.49)$$

$$w(-1/2, 0) = \frac{1}{4} \left[ \frac{3}{2}(w_1 + w_4) + \frac{1}{2}(w_2 + w_3) \right] \quad (4.50)$$

Pour la seconde boucle, on a besoin des vitesses en  $(\pm 1/2, \pm 1)$  et  $(\pm 1, \pm 1/2)$ . Si le problème est axisymétrique, l'intégrale à calculer est légèrement plus compliquée puisque qu'elle fait intervenir le rayon. On a besoin, dans ce cas, des vitesses aux extrémités des facettes pour lesquelles on veut calculer le flux (voir section suivante).

#### 4.7.2.4 Calcul des flux

La figure suivante (figure 4.13) montre la géométrie considérée.

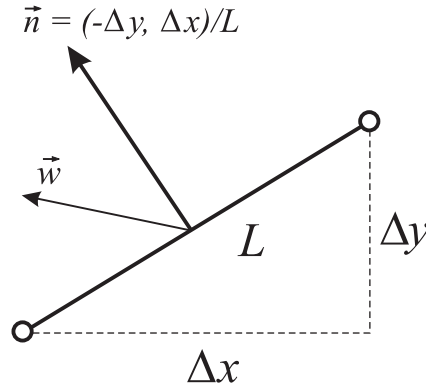


FIG. 4.13: Calcul des flux sur une facette.

En état plan de déformation, on a :

$$f_i = \int_0^L w_i n_i ds = (w_x n_x + w_y n_y) L = w_y \Delta x - w_x \Delta y \quad (4.51)$$

Par contre, si le problème est axisymétrique, on définit les grandeurs  $a_1 = (\vec{w} \cdot \vec{n})_1$  (projection de la vitesse sur la normale évaluée à l'extrémité 1) et  $a_2 = (\vec{w} \cdot \vec{n})_2$ . De même, appelons  $r_1$  et  $r_2$  les rayons aux deux extrémités de la frontière considérée. Soit  $t$ , l'abscisse curviligne définie sur la frontière telle que  $t$  varie entre 0 et 1. On peut écrire

$$a(t) = a_1 t + a_2 (1 - t) \quad (4.52)$$

$$r(t) = r_1 t + r_2 (1 - t) \quad (4.53)$$

L'intégrale se calcule alors analytiquement :

$$f_i = \int_0^L w_i n_i r ds \quad (4.54)$$

$$= L \int_0^1 a(t)r(t) dt \quad (4.55)$$

$$= L \left[ \frac{1}{3}(a_1r_1 + a_2r_2) + \frac{1}{6}(a_1r_2 + a_2r_1) \right] \quad (4.56)$$

Une fois les flux calculés, il reste à utiliser la formule (4.39) pour mettre à jour les valeurs aux points de Gauss.

### 4.7.3 Prise en compte des conditions aux limites

Pour les cellules situées sur la frontière du maillage élément fini, un traitement spécial doit être appliqué si de la matière traverse cette frontière, c'est-à-dire dans tous les cas où le maillage se déplace à une vitesse différente du corps étudié (par exemple, une frontière eulérienne).

Il faut donc connaître la valeur du champ inconnu à l'extérieur du maillage. En général, lorsqu'on utilise des frontières eulériennes en mécanique du solide, c'est dans le but de représenter un endroit par lequel la matière peut entrer dans la zone étudiée ou sortir de celle-ci. La matière en dehors de la zone ne nous intéresse pas.

D'un point de vue mathématique, le problème est hyperbolique : Il faut donc traiter différemment les frontières où le flux est positif (flux sortant) et celles où le flux est négatif (flux entrant). La théorie des équations aux dérivées partielles [23] nous enseigne que les conditions aux limites doivent être appliquées uniquement sur les frontières où le flux est entrant.

Considérons tout d'abord les frontières à flux négatif. La matière qui entre peut être contrainte ou non suivant les cas envisagés. Nous avons donc procédé comme ceci : les conditions aux limites sont supposées nulles partout sauf pour tous les points frontières qui sont inclus dans une série de boîtes rectangulaires définies par l'utilisateur. Ce moyen très simple de prendre en compte les conditions aux limites pourra être changé lorsque nous aurons accès aux fichiers sources du programme de prétraitement. Il sera alors facile d'imposer ces conditions sur des lignes quelconques.

Les frontières à flux positif sont traitées comme suit : pour être certain que les valeurs à l'extérieur d'une frontière à flux sortant ne vont pas influencer les valeurs à l'intérieur du maillage, on impose artificiellement un coefficient de décentrage unitaire ( $\alpha = 1$ ) pour celles-ci (ce qui revient à ajouter une contribution nulle).

## 4.7.4 Etude numérique du schéma à 1D

### 4.7.4.1 Introduction

Pour pouvoir fixer plus facilement le paramètre libre de la méthode (le coefficient d'upwind  $\alpha$ ), une étude numérique rapide de la méthode utilisée est nécessaire. Elle permettra aussi de se rendre compte des qualités et des faiblesses de ce type de discrétisation, notamment au niveau de la précision et de la stabilité.

Nous montrons tout d'abord la nécessité d'introduire un coefficient d'upwind lors de la discrétisation pour créer une diffusion artificielle indispensable pour lutter contre les oscillations provoquée par l'utilisation de dérivées centrées.

Pour étudier un schéma de discrétisation donné, on a recours à une analyse de Von Neumann. Celle-ci permet d'analyser non seulement les effets dissipatifs (amortissement du signal) du schéma mais aussi les effets dispersifs (déformation du signal). Dans la suite, nous nous limiterons à une analyse unidimensionnelle sur un maillage régulier. Nous simplifierons encore le problème en considérant une vitesse de convection constante sur le maillage.

### 4.7.4.2 Analyse de Von Neumann

Nous noterons  $h$  le pas spatial du maillage qui, dans notre cas, est la distance entre les centres de deux cellules voisines. En conséquence, chaque élément fini a une longueur  $2h$  (puisque chaque quadrangle est divisé en 2 dans chaque direction).

L'analyse de Von Neumann consiste à étudier la réponse du schéma sur un mode de Fourier du type :

$$\sigma = A e^{\beta t} e^{i\omega x}. \quad (4.57)$$

Posons alors  $t = l\Delta t$  et  $x = mh$ . Ces relations traduisent respectivement la discrétisation temporelle et spatiale. On obtient

$$\sigma_m^l = A e^{\beta l\Delta t} e^{i\omega h m}. \quad (4.58)$$

En définissant la grandeur  $\rho = \exp(\beta \Delta t)$  et le nombre d'onde adimensionnel  $k = \omega m$ , on obtient une forme simple pour la grandeur inconnue discrétisée :

$$\sigma_m^l = A \rho^l e^{ikm}. \quad (4.59)$$

Le nombre d'onde  $k$  varie entre 0 et  $\pi$ . Une valeur nulle donne un signal constant. Par contre, une valeur égale à  $\pi$  donne un signal qui varie de  $-A$  à  $A$  sur une distance  $h$ . En général, le signal qui se déplace sur le maillage peut être mis sous la forme d'une somme de signaux de nombre d'onde  $k_i$  par une décomposition en série de Fourier discrète.

Le maillage est habituellement choisi de manière telle que le signal ne varie pas beaucoup d'une maille à l'autre. Les modes physiques ont donc une valeur de  $k$  assez faible et doivent être transportés par le schéma avec un minimum d'erreur (diffusion et dispersion).

Par contre, les modes numériques (non physiques) varient beaucoup d'une maille à l'autre et il faut donc essayer de les amortir au maximum.

Le critère de Von Neumann donne une condition nécessaire et suffisante de stabilité en exprimant la relation suivante :

$$|\rho(k)| \leq 1 \quad \forall k \quad (0 \leq k \leq \pi) \quad (4.60)$$

#### 4.7.4.3 Schéma centré spatialement

Nous considérons ici uniquement une discrétisation temporelle explicite par le schéma d'Euler. Celui-ci est du premier ordre. Par contre, le schéma centré spatialement est du second ordre.

Le schéma s'écrit :

$$\sigma_m^{l+1} = \sigma_m^l - \frac{1}{2} \frac{w \Delta t}{h} (\sigma_{m+1}^l - \sigma_{m-1}^l) \quad (4.61)$$

On définit le nombre de Courant (ou nombre CFL) par le rapport

$$C = \frac{w \Delta t}{h} \quad (4.62)$$

Dans le cas de la résolution d'un problème en formalisme ALE, la vitesse  $w$  est la vitesse relative entre le maillage et la matière. Dans le cas d'un calcul quasistatique, elle est calculée par la différence de déplacement de la matière et du maillage divisé par l'incrément temporel utilisé pour le pas lagrangien.

$$w = \frac{\Delta u - \Delta u^*}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad C = \frac{\Delta x}{h} \quad (4.63)$$

où on a défini  $\Delta x = \Delta u - \Delta u^*$ , c'est-à-dire la différence de déplacement de la matière et du maillage.

En introduisant l'équation (4.59) dans la dernière, on obtient

$$|\rho|^2 = 1 + C^2 \sin^2 k > 1 \quad (4.64)$$

Cette dernière équation montre pourquoi le schéma centré spatialement utilisé avec un schéma d'Euler explicite est inconditionnellement instable. Il a cependant été utilisé par un grand nombre de mécaniciens au début de l'introduction du formalisme ALE. Il peut

donner des résultats tant que les distances de convection sont très faibles. Il est donc en général impossible d'effectuer un calcul totalement eulérien avec une telle méthode.

Jusqu'à présent, ce schéma instable était utilisé dans METAFOR, non pas directement mais au travers des extrapolations et interpolations des grandeurs des points de Gauss vers les noeuds et vice-versa.

#### 4.7.4.4 Schéma totalement décentré

Le schéma totalement décentré utilisé avec une discrétisation temporelle explicite d'Euler possède une précision globale du premier ordre. Il s'écrit

$$\sigma_m^{l+1} = \sigma_m^l - C (\sigma_m^l - \sigma_m^{l-1}) \quad (4.65)$$

Une analyse similaire conduit à

$$|\rho|^2 = 1 - 4C(1 - C) \sin^2 k/2 \quad (4.66)$$

On en déduit que ce schéma est toujours stable si le nombre de Courant est compris entre 0 et 1 ( $0 \leq C \leq 1$ ) quel que soit  $k$ . On remarque aussi que, pour un nombre de Courant donné, les modes numériques ( $k$  proche de  $\pi$ ) sont plus amortis que les modes physiques ( $k$  petit).

#### 4.7.4.5 Schéma partiellement décentré

A une dimension, la méthode de Godunov que nous avons introduite revient à injecter artificiellement de la diffusion dans un schéma initialement centré spatialement. En effet, l'équation (4.39) peut s'écrire dans le cas d'un maillage 1D régulier et une vitesse  $w$  constante :

$$\sigma_m^{l+1} = \sigma_m^l - \frac{w\Delta t}{2h} (-(\sigma_{m-1}^l - \sigma_m^l)(1 + \alpha) + (\sigma_{m+1}^l - \sigma_m^l)(1 - \alpha)) \quad (4.67)$$

En réarrangeant les termes, on transforme cette combinaison de deux dérivées décentrées avant et arrière en une dérivée centrée et un opérateur de diffusion.

$$\sigma_m^{l+1} = \sigma_m^l - \frac{C}{2}(\sigma_{m+1}^l - \sigma_{m-1}^l) + \frac{C\alpha}{2}(\sigma_{m+1}^l - 2\sigma_m^l + \sigma_{m-1}^l) \quad (4.68)$$

Cette diffusion contrôlée par le paramètre  $\alpha$  permet de stabiliser le schéma centré. On essaye ainsi de se rapprocher d'un schéma du deuxième ordre bien que le schéma tel qu'il est décrit par l'équation (4.68) soit toujours du premier ordre.

L'application de la méthode de Von Neumann donne ici :

$$\rho = 1 + \frac{C}{2} [(e^{ik} - e^{-ik}) + \alpha(e^{ik} + e^{-ik} - 2)] \quad (4.69)$$

$$= [1 - 2\alpha C \sin^2 k/2] - i [2C \sin k/2 \cos k/2] \quad (4.70)$$

$$|\rho|^2 = 1 - 4C \sin^2 k/2 [\alpha - \alpha^2 C \sin^2 k/2 - C \cos^2 k/2] \quad (4.71)$$

En exprimant que cette dernière grandeur ne peut pas dépasser l'unité, on obtient une expression pour le nombre de Courant limite :

$$C_{max} = \frac{\alpha}{(\alpha^2 - 1) \sin^2 k/2 + 1} \quad (4.72)$$

La valeur minimum de ce maximum est obtenue quand le sinus s'annule. La condition de stabilité du schéma de Godunov est donc

$$0 \leq C \leq \alpha \quad (4.73)$$

La figure 4.14 représente la fonction (4.72) pour des valeurs du nombre d'onde adimensionnel  $k$  comprises entre 0 et  $\pi$ .

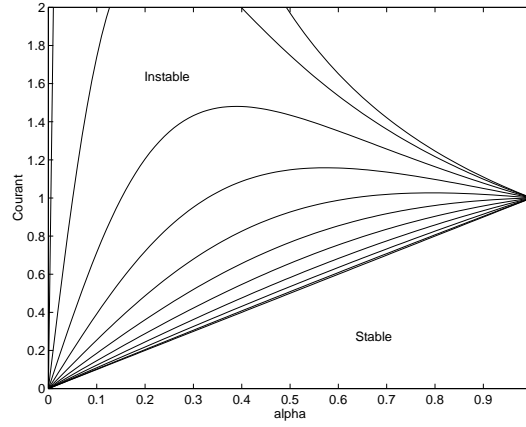


FIG. 4.14: La fonction  $C(\alpha)$  pour  $0 \leq k \leq \pi$ .

En prenant l'équation (4.63), on déduit que le schéma de convection sera instable si  $\Delta x > \alpha h$ . En particulier, dans le cas d'un calcul eulérien, la phase de convection sera instable si, lors du calcul lagrangien, le maillage (et donc la matière) s'est déplacée de plus de la longueur de la plus petite maille multipliée par  $\alpha/2$ . Si on choisit  $\alpha = 1$  (full donor approximation – schéma totalement décentré spatialement), le déplacement d'un élément fini doit rester inférieur à la taille d'une cellule définissant un volume fini.

On remarque donc que, pour une même valeur du coefficient  $\alpha$ , la convection de la pression posera moins de problèmes de stabilité que celle des grandeurs déviatoriques parce

que les cellules de pression sont 2 fois plus grandes dans chaque direction. Le déplacement maximum admissible est donc deux fois plus élevé.

Cette brève étude théorique nous montre qu'il serait intéressant d'utiliser deux coefficients  $\alpha$  pour un problème mécanique complet. Le second servirait à transférer la pression du nouveau maillage vers l'ancien et pourrait être théoriquement choisi comme étant la moitié du premier.

#### 4.7.4.6 Conclusion

Pour la phase lagrangienne, on observe très rarement des déplacements importants au cours d'un pas de temps. Ceci est dû, en grande partie, au caractère extrêmement non linéaire des problèmes étudiés (plasticité, contact, effets thermomécaniques, ...). De plus, les pas de temps doivent rester suffisamment petits pour garder une certaine précision. Il est donc très improbable de rencontrer des cas où le caractère conditionnellement stable de la méthode mixte EF/VF décrite dans ce travail pose de sérieux problèmes.

Dans le cas extrême d'un problème faiblement non linéaire traité avec un maillage eulérien (le nombre de Courant est élevé), il suffira de s'assurer que la condition de stabilité est vérifiée et de diminuer le pas de temps en conséquence.

Au cours de cette thèse, nous serons amené à utiliser des maillages très raffinés à certains endroits pour modéliser d'une manière précise les zones de contact entre une tôle et un outil ou une matrice lors des processus de formage en industrie (laminage, emboutissage). Le lubrifiant, dont l'épaisseur varie entre quelques microns à quelques dizaines de microns, devra aussi être maillé. Ces mailles seront certainement très petites. Dans ce cas, une mise à jour explicite des valeurs aux points de Gauss sera peut-être trop contraignante et nous devrons envisager une mise à jour implicite.



### 4.7.5 Organigramme de l’algorithme mixte

La figure 4.15 montre en détails les différentes étapes de l’algorithme mixte ALE (partie Eulérienne) implémenté dans METAFOR.

### 4.7.6 Conclusions

L’algorithme présenté a l’avantage d’être très simple. La seule difficulté provient de l’évaluation des grandeurs géométriques et la détermination des cellules adjacentes sans les stocker en mémoire.

Il sera possible de mettre en oeuvre une mise à jour implicite si cela s’avérait nécessaire bien que l’étude théorique nous a montré que la limite de stabilité du schéma étudié est tout à fait acceptable.

Une perspective intéressante, mais difficile, serait de généraliser l’algorithme dans le cas d’un maillage non structuré.

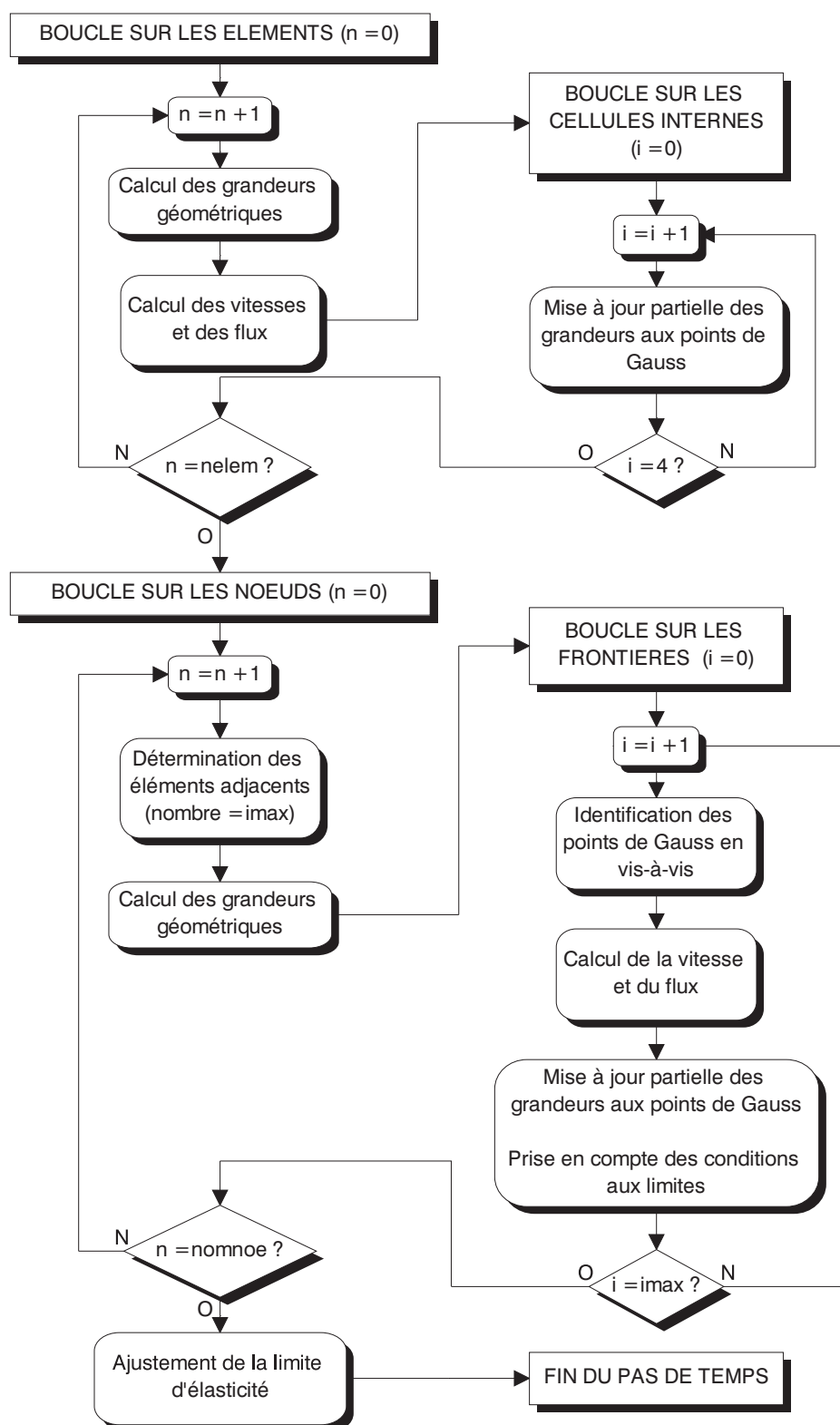


FIG. 4.15: Organigramme de l'algorithme mixte (partie Eulérienne).

## 4.8 Un algorithme SUPG pour la phase convection

### 4.8.1 Introduction

Dans cette section, nous présentons un deuxième algorithme pour le transfert des grandeurs aux points de Gauss lors de la deuxième phase d'un calcul mécanique par le formalisme ALE.

Lorsqu'on parcourt la littérature sur le sujet, on constate que, généralement, les auteurs essaient de résoudre le problème ALE complet en utilisant le même maillage pour les deux phases du calcul. Dans ce cas, il est donc indispensable de trouver un moyen pour extrapoler les grandeurs aux points de Gauss vers les noeuds du maillage éléments finis. On procède ensuite à une résolution d'un problème de convection classique avant d'interpoler les résultats aux points de Gauss.

Cette méthode provoque une diffusion énorme de la solution, dont l'importance est fonction du nombre de pas de temps utilisés. En effet, si on se place dans un cas très simple où seul un élément à l'intérieur du corps étudié possède des contraintes non nulles, l'extrapolation des contraintes aux points de Gauss de l'élément vers les noeuds de celui-ci, suivie de l'interpolation effectuée dans les éléments adjacents entraîne l'apparition de contraintes non physiques dans le voisinage de l'élément. Ce processus se répète à chaque pas de temps.

En conséquence, pour mettre au point un algorithme robuste et efficace, il est totalement exclu d'effectuer à un moment ou à un autre une extrapolation. La solution envisagée consiste à créer un deuxième maillage dont les noeuds seraient les points de Gauss du premier. En procédant de cette manière, nous observerons uniquement une diffusion numérique liée à la discrétisation spatiale du problème et au schéma d'intégration utilisé.

L'inconvénient majeur sera l'augmentation du temps de calcul et la quantité de mémoire supplémentaire nécessaire pour résoudre le problème de convection sur le deuxième maillage. Remarquons cependant qu'il est illusoire de vouloir résoudre un problème si complexe (le nombre d'articles sur le sujet est impressionnant) sans sacrifier du temps et de l'espace mémoire.

Reste à trouver une méthode efficace pour résoudre le problème de convection sur ce deuxième maillage. Comme nous l'avons fait dans le cas du premier algorithme présenté, il est indispensable d'introduire une discrétisation spatiale de type amont ('upwind') [6, 13, 30, 35, 41, 42, 58] pour éviter les oscillations numériques. Dans le cas de maillages 2D, la méthode Streamline Upwind Petrov Galerkin (SUPG) [6, 22, 30] semble donner de très bons résultats. Cette méthode consiste à abandonner la formulation standard de Galerkin en ajoutant aux fonctions de pondération un terme de perturbation de type amont agissant uniquement dans la direction de l'écoulement et non transversalement. Il sera donc possible, par cette méthode, de supprimer la diffusion transverse qu'on peut observer pour

la méthode basée sur les volumes finis. La méthode SUPG peut donner de bons résultats pour autant qu'on sache comment fixer a priori la valeur du coefficient d'upwind pour un problème donné.

Pour intégrer les équations discrétisées spatialement, nous utilisons un schéma du trapèze généralisé qui permettra de résoudre le problème de convection d'une manière implicite ou explicite.

## 4.8.2 Discrétisation spatiale de l'équation

Rappelons tout d'abord l'équation à résoudre :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} \Big|_x + w_k \frac{\partial \sigma}{\partial x_k} = 0 \quad (4.74)$$

Nous choisissons de discrétiser l'équation de convection (4.74) tout d'abord spatialement et ensuite temporellement. La démarche inverse est généralement suivie en mécanique des fluides.

La méthode standard de Galerkin et la méthode SUPG sont des cas particuliers de la méthode des résidus pondérés. Celle-ci consiste à multiplier l'équation (4.74) par des fonctions de pondération  $\omega_i(x, y)$  et ensuite à intégrer le résultat sur le volume total du milieu continu (ou de l'élément). On obtient la forme intégrale suivante :

$$\int_{V(t)} \omega_i(x, y) \frac{\partial \sigma}{\partial t} dV + \int_{V(t)} \omega_i(x, y) w_k \frac{\partial \sigma}{\partial x_k} dV = 0 \quad (4.75)$$

La grandeur inconnue  $\sigma$  est discrétisée spatialement sur le maillage en introduisant les valeurs nodales  $\sigma_i(t)$  et les fonctions d'interpolation  $N_i(x, y)$  (fonctions de forme) telles que

$$\sigma(x, y, t) = \sum_i N_i(x, y) \sigma_i(t) \quad (4.76)$$

La méthode de Galerkin consiste à utiliser les mêmes fonctions pour les fonctions de pondération et les fonctions de forme ( $N_i = \omega_i$ ). Par contre, la méthode SUPG est déduite de la méthode des résidus pondérés en utilisant les fonctions de pondération modifiées suivantes :

$$\omega_i(x, y) = N_i(x, y) + \frac{\bar{k}}{\|w\|^2} w_j \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \quad (4.77)$$

Ceci revient à ajouter à chaque fonction de forme une contribution proportionnelle au signe de la dérivée de la fonction de forme selon la direction de l'écoulement.

Utiliser les fonctions de pondération définies par l'équation (4.77) revient à introduire de la diffusion artificielle uniquement dans le sens de l'écoulement. En effet, considérons

l'équation (4.75) où  $N_i = \omega_i$  et ajoutons un terme de diffusion anisotrope grâce au tenseur  $\bar{k}_{jk}$  :

$$\int_V N_i(x, y) \frac{\partial \sigma}{\partial t} dV + \int_V N_i(x, y) w_k \frac{\partial \sigma}{\partial x_k} dV = \int_V N_i(x, y) \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{k}_{jk} \frac{\partial \sigma}{\partial x_k} dV \quad (4.78)$$

Soit  $\hat{w}_j = w_j / \|w\|$ . En choisissant une diffusion artificielle anisotrope définie par

$$\bar{k}_{jk} = \bar{k} \hat{w}_j \hat{w}_k \quad (4.79)$$

on introduit de la diffusion uniquement selon les lignes de courant (d'où le nom Streamline Upwind). Pour s'en convaincre, prenons par exemple  $w_1 = [1 \ 0]$  et  $w_2 = [0 \ 1]$  et calculons le tenseur de diffusion artificielle. On obtient

$$\bar{k}_1 = \bar{k} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{k}_2 = \bar{k} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

Ces deux exemples traduisent bien l'absence de diffusion transverse.

En intégrant par parties le second membre de l'équation (4.78) et en regroupant le terme de convection et celui de diffusion artificielle, on a

$$\int_V N_i(x, y) \frac{\partial \sigma}{\partial t} dV + \int_V \left( N_i(x, y) + \frac{\bar{k}}{\|w\|^2} w_j \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \right) w_k \frac{\partial \sigma}{\partial x_k} dV = 0 \quad (4.81)$$

Si on ignore le terme instationnaire, on constate que l'on retrouve la fonction de pondération annoncée (4.77). Cependant, pour obtenir une formulation consistante où cette dissipation artificielle apparaît naturellement, on appliquera également cette fonction de pondération pour le terme instationnaire de l'équation.

Reprenons la forme intégrale (4.75) et remplaçons les fonctions de pondération par celles qui viennent d'être introduites (4.77).

$$\int_V \left( N_i(x, y) + \frac{\bar{k}}{\|w\|^2} w_j \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial t} dV + \int_V \left( N_i(x, y) + \frac{\bar{k}}{\|w\|^2} w_j \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \right) w_k \frac{\partial \sigma}{\partial x_k} dV = 0 \quad (4.82)$$

En utilisant l'équation (4.76) pour discrétiser l'inconnue et après un changement d'indices, on obtient

$$\left[ C_{ij}^{(1)} + C_{ij}^{(2)} \right] \dot{\sigma}_j + \left[ K_{ij}^{(1)} + K_{ij}^{(2)} \right] \sigma_j = 0 \quad (4.83)$$

avec les matrices données par les expressions suivantes :

$$C_{ij}^{(1)} = \int_V N_i N_j dV \quad (4.84)$$

$$C_{ij}^{(2)} = \int_V \frac{\bar{k}}{\|w\|^2} w_k \frac{\partial N_i}{\partial x_k} N_j dV \quad (4.85)$$

$$K_{ij}^{(1)} = \int_V w_k N_i \frac{\partial N_j}{\partial x_k} dV, \quad (4.86)$$

$$K_{ij}^{(2)} = \int_V \frac{\bar{k}}{\|w\|^2} w_k w_l \frac{\partial N_j}{\partial x_k} \frac{\partial N_l}{\partial x_l} dV \quad (4.87)$$

Chacune de ces intégrales est calculée au niveau d'un élément et toutes les contributions sont assemblées dans une matrice globale dont la taille est égale au nombre d'inconnues du problème.

L'évaluation de ces matrices n'est pas possible analytiquement puisque nous utilisons des éléments quadrangulaires isoparamétriques 2D. Pour ceux-ci, on définit un élément de référence dans un plan repéré par les coordonnées réduites  $(\xi, \eta)$ . Les coordonnées spatiales sont reliées aux coordonnées réduites par les relations

$$x = x(\xi, \eta) = \sum_i N_i(\xi, \eta) x_i, \quad (4.88)$$

$$y = y(\xi, \eta) = \sum_i N_i(\xi, \eta) y_i, \quad (4.89)$$

On définit le jacobien de la transformation par

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (4.90)$$

Et les dérivées se transforment selon la loi :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} -\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & -\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ -\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & -\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (4.91)$$

Dans le plan de référence, on interpole l'inconnue d'une manière similaire aux coordonnées spatiales (4.88) et (4.89) :

$$\sigma(\xi, \eta, t) = \sum_i N_i(\xi, \eta) \sigma_i(t). \quad (4.92)$$

L'intégrale (4.84) devient

$$C_{ij}^{(1)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i(\xi, \eta) N_j(\xi, \eta) \det J d\xi d\eta. \quad (4.93)$$

On peut calculer les autres intégrales en utilisant la formule de transformation des dérivées (4.91). L'intégrale définissant la matrice  $C^{(2)}$  s'évalue comme suit dans le plan de référence :

$$C_{ij}^{(2)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\bar{k}}{\|w\|^2} \left[ w_1 \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} J_{22} - \frac{\partial N_i}{\partial \eta} J_{12} \right) + w_2 \left( \frac{\partial N_i}{\partial \eta} J_{11} - \frac{\partial N_i}{\partial \xi} J_{21} \right) \right] N_j d\xi d\eta. \quad (4.94)$$

L'intégrale  $K^{(1)}$  est similaire. Quant à la dernière intégrale, on décompose simplement toutes les termes avant d'appliquer la formule (4.91).

Numériquement, on utilise une intégration de Gauss à quatre points. L'intégration numérique à un point de Gauss ne se justifie pas sauf pour réduire le temps de calcul. De plus elle possède un mauvais comportement numérique d'après Hugues et Brooks [6].

Dans le cas de problèmes axisymétriques, il suffit d'ajouter le rayon dans chacune de ces intégrales.

### 4.8.3 Choix du paramètre $\bar{k}$

En analysant l'équation (4.77), on constate que le paramètre  $\bar{k}$  n'est pas adimensionnel : il a la dimension d'une longueur multipliée par une vitesse. Pour obtenir un paramètre adimensionnel, indépendant de la taille du maillage et du pas de temps, Hugues et Brooks [6] propose la forme suivante :

$$\bar{k} = \frac{|w_\xi \cdot h_\xi + w_\eta \cdot h_\eta|}{\sqrt{15}} \quad (4.95)$$

Toutes les grandeurs sont reprises sur la figure 4.16. Le facteur  $\sqrt{15}$  permet de minimiser l'erreur de phase pour leur schéma d'intégration temporelle. Les grandeurs  $w_\xi$  et  $w_\eta$  sont les composantes du vecteur vitesse selon les coordonnées de référence  $(\xi, \eta)$ . Cette dernière est évaluée au centre de l'élément. Ils définissent  $h_\xi$  et  $h_\eta$  comme la longueur des médianes.

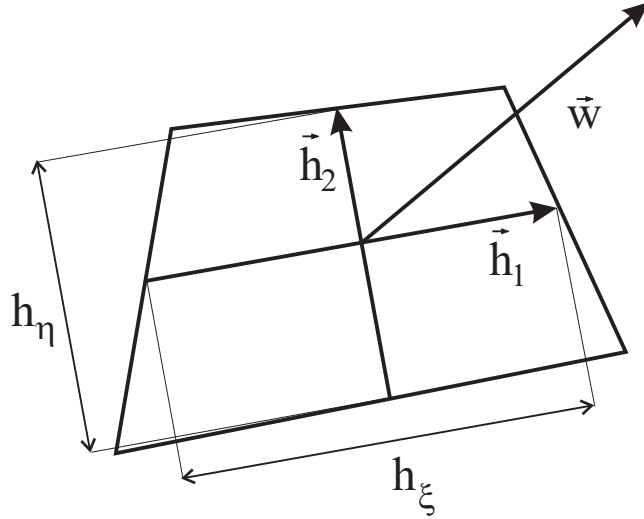


FIG. 4.16: Grandeurs intervenant dans l'évaluation du coefficient  $\bar{k}$ .

Dans notre cas, nous utiliserons une forme un peu plus générale :

$$\bar{k} = \alpha \left( |\vec{w} \cdot \vec{h}_1| + |\vec{w} \cdot \vec{h}_2| \right) \quad (4.96)$$

où  $\alpha$  est un paramètre adimensionnel permettant de donner plus de poids aux noeuds situés en amont de l'écoulement. Les vecteurs  $\vec{h}_1$  et  $\vec{h}_2$  sont les vecteurs qui ont pour origine le milieu d'un côté et comme extrémité, le milieu du côté opposé (vecteurs médianes).

A part le coefficient  $\alpha$ , les deux formules (4.95) et (4.96) sont identiques mais elles sont exprimées dans des espaces différents.



#### 4.8.4 Discrétisation temporelle des équations

L'équation matricielle obtenue dans la section précédente (4.83) est discrétisée par rapport à l'espace mais reste continue par rapport à la variable temporelle. Si on suppose qu'au temps  $t = t_n$  l'équation est vérifiée, on peut écrire

$$C_n \dot{u}_n + K_n u_n = 0 \quad (4.97)$$

où  $C_n = C_n^{(1)} + C_n^{(2)}$  et  $K_n = K_n^{(1)} + K_n^{(2)}$

Une relation analogue peut être écrite pour  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$

Pour intégrer cette équation, nous avons décidé d'utiliser le schéma du trapèze généralisé parce que plusieurs méthodes intéressantes peuvent en découler en choisissant des valeurs adéquates de son paramètre  $\theta$ .

On effectue tout d'abord une interpolation de la dérivée temporelle au temps  $t_\theta = t_n + \theta \Delta t$  compris entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$ ,  $\theta \in [0, 1]$  :

$$\dot{u}_\theta = (1 - \theta) \dot{u}_n + \theta \dot{u}_{n+1} \quad (4.98)$$

On discrétise ensuite la dérivée en  $t_\theta$  par une différence finie classique

$$\dot{u}_\theta = \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} \quad (4.99)$$

En combinant ces deux dernières relations et en introduisant  $\dot{u}_n$  à partir de l'équation matricielle (4.97), on obtient finalement la formule

$$\left( \frac{C}{\Delta t} + \theta K \right) u_{n+1} = \left( \frac{C}{\Delta t} - (1 - \theta) K \right) u_n. \quad (4.100)$$

Dans notre cas, on suppose que les matrices  $C$  et  $K$  sont constante sur un pas de temps, c'est pourquoi on oublie les indices  $n$  et  $n + 1$ .

En appelant  $S$  la matrice du premier membre de (4.100) et  $G$ , celle du second membre, on obtient l'équation très simple

$$S u_{n+1} = G u_n \quad \rightarrow \quad u_{n+1} = S^{-1} G u_n \quad (4.101)$$

Les schémas les plus connus qui en découlent sont obtenus en posant  $\theta = 0$  (explicite),  $\theta = 1/2$  (Crank Nicolson),  $\theta = 2/3$  (Galerkin) et  $\theta = 1$  (totalement implicite).

Tous les schémas pour lesquels  $\theta \geq 1/2$  sont inconditionnellement stables. Pour ce qui est de la précision, seul le schéma de Crank Nicolson est du deuxième ordre, les autres étant du premier ordre.

### 4.8.5 Schéma explicite

Pour pouvoir utiliser efficacement le schéma explicite, il est nécessaire de diagonaliser la matrice multipliant  $u_{n+1}$  pour que son inversion se réduise à une simple division. Pour ce faire, plusieurs méthodes existent. La plus simple consiste à corriger les éléments diagonaux de la façon suivante :

$$S_{ii}^{\text{diag}} = S_{ii} \frac{\sum_{m,n} S_{mn}}{\sum_m S_{mm}} \quad (4.102)$$

Cette formule, généralement utilisée pour la matrice des masses d'un système dynamique à l'avantage de conserver la somme totale des éléments de la matrice.

Une autre formule très simple consiste à concentrer les éléments de la matrice sur la diagonale en ajoutant, pour chaque colonne, les éléments hors de la diagonale à l'élément diagonal :

$$S_{ii}^{\text{diag}} = \sum_{j=1}^N S_{ij} \quad (4.103)$$

Nous utiliserons dans la suite ces deux formules de diagonalisation.

### 4.8.6 Transfert des grandeurs volumiques

Généralement, en mécanique du solide en grandes déformations, on utilise des éléments Q4P0, ce qui signifie que toutes les grandeurs sont intégrées avec quatre points de Gauss par élément à l'exception des grandeurs volumiques (la pression par exemple) qui sont sous-intégrées en utilisant un seul point de Gauss dans le but d'éviter le phénomène de blocage (locking).

Ceci nous pose un problème dans la résolution. En effet, il est nécessaire de créer un maillage séparé pour le transfert de la pression. Il n'est pas possible de traiter la pression sur le même maillage que celui utilisé pour les autres grandeurs à transférer parce que cela nous amènerait à effectuer des interpolations et extrapolations. Or, nous avons vu que ces opérations diffusives doivent être évitées.

Une autre méthode, suggérée par J-P. Ponthot et implémentée dans le cas de lois de comportements de poudres et de l'endommagement, consisterait à définir une pression aux quatre points de Gauss pour pouvoir éviter un traitement séparé de la pression lors de la convection des grandeurs aux points de Gauss. Cependant, pour éviter tout de même le locking, on considérerait un incrément de volume  $\Delta V$  constant par élément. L'incrément de pression serait le même pour chaque élément et serait calculé par la formule simple

$$\Delta p = K \ln \frac{J}{J_0}, \quad (4.104)$$

où  $K$  est le module de compressibilité cubique et  
 $J_0$  et  $J$ , le déterminant du jacobien au début et à la fin du pas de temps.

Cette méthode devra être envisagée dans la suite de ce travail vu l'économie de mémoire et de temps de calcul prévu. Pour l'instant, nous choisissons de construire un maillage supplémentaire pour transférer les grandeurs volumiques.

### 4.8.7 Création et gestion du maillage

La figure (4.17) représente les deux maillages auxiliaires utilisés pour transférer les contraintes déviatoriques (à gauche) et la pression (à droite). Remarquons qu'il n'est pas possible d'appliquer la méthode si la structure est maillée avec un seul élément selon une direction. En effet, il est dans ce cas impossible de construire le nouveau maillage pour transférer la pression (les quadrangles deviennent des lignes). Nous utiliserons donc toujours, dans la suite, des maillages qui possèdent au moins deux éléments selon chaque lignes maîtresses.

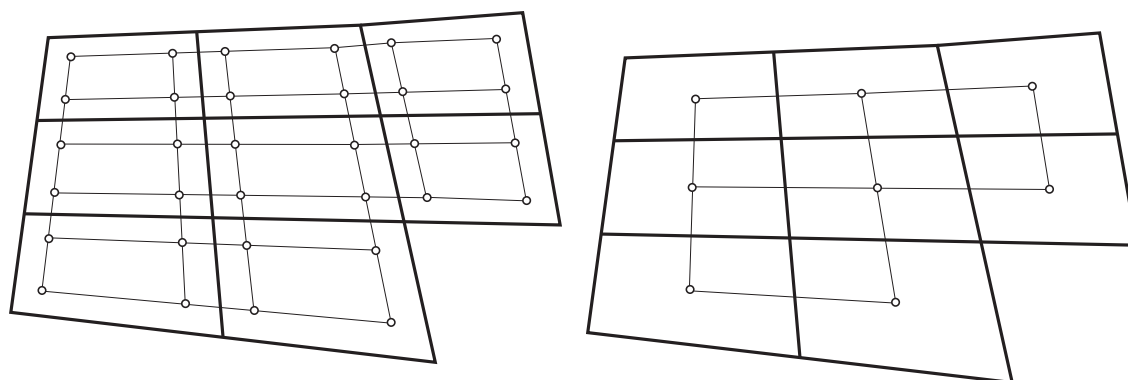


FIG. 4.17: Calcul du flux entrant par création d'un élément externe au maillage.

La première chose à faire, avant tout calcul, est de créer le nouveau maillage dont les noeuds sont les points de Gauss du maillage utilisé pour la phase lagrangienne. Cela consiste à remplir des tableaux d'entiers qui localisent les noeuds du nouveau maillage par rapport à l'ancien. Pour chaque noeud de chaque nouvel élément, il faut savoir le numéro du point de Gauss et de l'élément correspondant. Inversement, il faut pouvoir connaître le numéro d'inconnue d'un noeud du nouveau maillage lorsqu'on considère un point de Gauss particulier d'un élément donné.

C'est aussi lors de la création du nouveau maillage qu'on remplit un tableau avec les éléments qui se trouvent à la frontière du domaine étudié. Ces informations seront indispensables pour appliquer rapidement les conditions aux limites lorsque le flux de matière entre dans le maillage.

### 4.8.8 Prise en compte des conditions aux limites

La prise en compte des conditions aux limites est beaucoup moins naturelle que dans le cas de l'algorithme mixte EF/VF. Le problème vient du fait que les frontières des nouveaux maillages ne coïncident pas avec celles du maillage de la phase lagrangienne.

Dans le cas d'un problème ALE dont les frontières ne sont pas traversées par de la matière (frontières lagrangiennes ou frontières du maillage continuellement remaillées mais coïncidant toujours avec la frontière matérielle), aucune condition aux limites ne doit être appliquée. C'est évident si on raisonne physiquement. Cependant, vu que les frontières du maillage délimité par les lignes maîtresses et celles du maillage auxiliaire sont légèrement décalées, il est parfois possible qu'il existe un certain flux de matière entrant dans le maillage auxiliaire. Nous avons décidé de l'ignorer complètement. Aucune condition limite n'est donc appliquée dans ce cas.

Dans les autres cas où la matière entre et sort du maillage (frontières eulériennes ou frontières dont le mouvement est prescrit par l'utilisateur du code), il faut appliquer des conditions aux limites chaque fois qu'on détecte un flux entrant dans le maillage.

Deux possibilités s'offrent à nous :

- Soit appliquer directement une condition limite au noeud du maillage en fixant sa valeur à une valeur donnée (généralement nulle). Le système d'équations voit son nombre d'inconnues diminuer et la résolution numérique devient plus ardue (le nombre d'inconnues n'est pas connu a priori).
- Soit appliquer la condition aux limites sous la forme d'un flux imposé. C'est une manière faible d'imposer la condition et nous l'avons déjà utilisée pour le développement de l'algorithme mixte. Dans ce cas, le nombre d'inconnues est toujours le même d'un pas de temps à un autre.

C'est la deuxième méthode que nous utiliserons parce qu'elle est plus simple à mettre en oeuvre et permet de comparer directement les deux algorithmes présentés dans ce travail.

En résumé, les conditions aux limites sont appliquées de la manière suivante : pour chaque élément du nouveau maillage adjacent à la frontière, on calcule le flux de matière traversant celle-ci. Si le flux entre dans le maillage, on ajoute artificiellement un élément de même aire à l'extérieur du maillage (voir figure 4.18). La contribution de ce nouvel élément est ajoutée dans la matrice structurale  $S$  et les conditions aux limites sont appliquées sur les noeuds extérieurs. Ces valeurs fixées permettent de déduire le flux équivalent à appliquer sur les deux noeuds du maillage délimitant le segment frontière.

Comme dans le cas de l'autre algorithme (mixte EF/VF), les valeurs des conditions aux limites sont définies par l'utilisateur dans un fichier annexe.

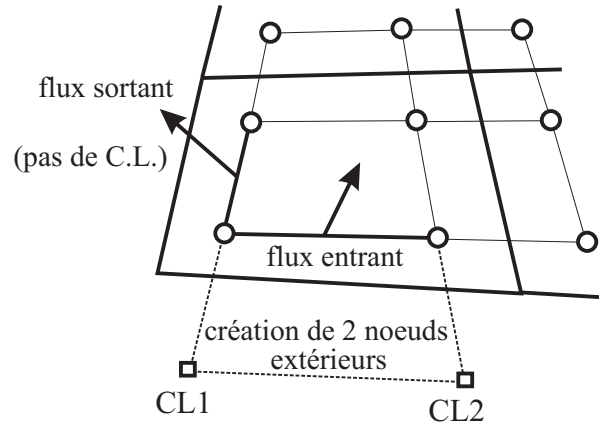


FIG. 4.18: Les deux maillages auxiliaires pour 4 points de Gauss et 1 point de Gauss par élément.

### 4.8.9 Analyse théorique du schéma

Comme dans le cas de l'algorithme mixte EF/VF, il est très intéressant d'étudier le schéma de discrétisation utilisé dans un cas très simplifié (vitesse de convection constante et maillage régulier unidimensionnel). Nous allons montrer qu'il ne suffit pas d'introduire un décentrage dans un schéma traditionnel pour qu'il devienne intéressant pour traiter un problème de convection. En effet, une étude numérique doit toujours être menée pour avoir une idée des limites numériques (stabilité, présence d'oscillations, précision,...) afin d'utiliser ce schéma de manière optimale.

#### 4.8.9.1 Réduction du problème

Pour alléger les calculs qui vont suivre, nous nous limitons à une étude unidimensionnelle sur un maillage constant. La vitesse de convection est aussi constante. Dans ce cas, les matrices définies par les relations (4.84), (4.85), (4.86) et (4.87) peuvent être facilement calculées symboliquement :

$$C^{(1)} = \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C^{(2)} = \frac{L\alpha}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.105)$$

$$K^{(1)} = \frac{w}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad K^{(2)} = w\alpha \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

Ces matrices vont nous permettre d'écrire une relation entre les inconnues au pas de temps  $l$  et celles au pas de temps  $l + 1$ . Pour cela, nous devons écrire l'équation matricielle pour deux éléments. L'équation du noeud central nous fournira la relation recherchée : écrivons

tout d'abord les matrices structurales pour le système de 2 éléments.

$$C^{(1+2)} = \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2-3\alpha & 1-3\alpha & 0 \\ 1+3\alpha & 4 & 1-3\alpha \\ 0 & 1+3\alpha & 2-3\alpha \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

$$K^{(1+2)} = \frac{w}{2} \begin{bmatrix} -1+2\alpha & 1-2\alpha & 0 \\ -1-2\alpha & 4\alpha & 1-2\alpha \\ 0 & -1-2\alpha & 1+2\alpha \end{bmatrix} \quad (4.108)$$

La relation définissant le schéma s'écrit alors (où  $C$  désigne maintenant le nombre CFL défini par (4.62)) :

$$\begin{aligned} & \left[ (1+3\alpha)\sigma_{m-1}^{l+1} + 4\sigma_m^{l+1} + (1-3\alpha)\sigma_{m+1}^{l+1} \right] + \\ & 3\theta C \left[ (-1-2\alpha)\sigma_{m-1}^{l+1} + 4\alpha\sigma_m^{l+1} + (1-2\alpha)\sigma_{m+1}^{l+1} \right] \\ & = \\ & \left[ (1+3\alpha)\sigma_{m-1}^l + 4\sigma_m^l + (1-3\alpha)\sigma_{m+1}^l \right] - \\ & 3C(1-\theta) \left[ (-1-2\alpha)\sigma_{m-1}^l + 4\alpha\sigma_m^l + (1-2\alpha)\sigma_{m+1}^l \right]. \end{aligned} \quad (4.109)$$

On peut réécrire le dernier terme de (4.109) pour montrer, comme dans le cas de l'algorithme mixte EF/VF, que le décentrage provoque l'apparition d'un terme de diffusion artificielle et d'une différence centrée. Ce terme s'écrit :

$$-3C(1-\theta) \left[ (\sigma_{m+1}^l - \sigma_{m-1}^l) - 2\alpha(\sigma_{m+1}^l - 2\sigma_m^l + \sigma_{m-1}^l) \right] \quad (4.110)$$

On remarque notamment que la diffusion est bien positive si  $C > 0$ . C'est le cas ici car les matrices ont été déduites pour  $w = |w|$ . dans le cas contraire, seule la matrice  $K^{(1)}$  doit être changée de signe.

#### 4.8.9.2 Analyse de Von Neumann

L'analyse de Von Neumann du schéma (4.109) se fait exactement de manière similaire à ce qui a été fait pour le premier algorithme de convection. Cependant, le schéma étant implicite, les calculs sont plus lourds à effectuer. On effectue donc le remplacement suivant dans l'équation (4.109) :

$$\sigma_m^l = A\rho^l e^{ikm}. \quad (4.111)$$

Après quelques calculs, on obtient :

$$\rho(k) = \frac{-2 + 6\alpha C - 6\alpha C\theta + (-1 + 6\alpha C(\theta - 1)) \cos k + 3i(\alpha - C - C\theta) \sin k}{-2 - 6\alpha C\theta + (6\alpha C\theta - 1) \cos k + 3i(\alpha - C\theta) \sin k} \quad (4.112)$$

L'équation à résoudre ( $\rho\bar{\rho} \leq 1$ ) traduit la condition nécessaire et suffisante de stabilité.

Notre but est de trouver la valeur maximale du nombre de Courant pour les différentes valeurs possibles du paramètre de décentrage  $\alpha$  et du paramètre du schéma  $\theta$ . La résolution de l'égalité  $|\rho(C)| = 1$  nous donne :

$$\begin{cases} C = 0 \\ C = \frac{2\alpha(\cos k - 1)}{3(1 + 4\alpha^2 - 2\theta - 8\alpha^2\theta + \cos k - 4\alpha^2 \cos k - 2\theta \cos k + 8\alpha^2\theta \cos k)} \end{cases} \quad (4.113)$$

La figure 4.19 montre la fonction  $C(\alpha)$  pour des valeurs de  $k$  comprises entre 0 et  $\pi$  pour un paramètre de schéma égal à 0. On voit qu'il existe toujours une valeur de  $k$  pour laquelle la valeur de  $C$  maximum est nulle, quelle que soit la valeur choisie pour le paramètre de décentrage  $\alpha$  (il suffit de remplacer de  $k$  par 0). Autrement dit, l'algorithme est inconditionnellement instable pour  $\theta = 0$ . On peut montrer qu'il en est de même tant que  $\theta < 1/2$ .

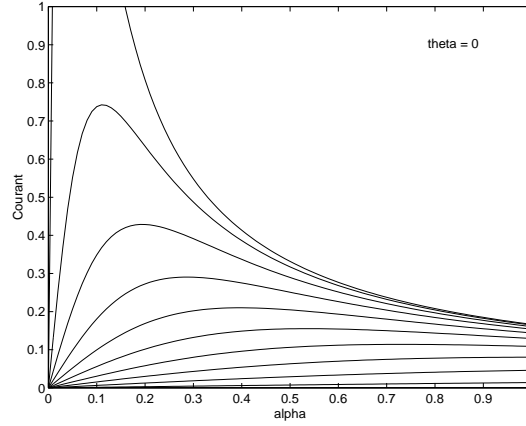


FIG. 4.19: La fonction  $C(\alpha)$  pour  $0 < k < \pi$ .

Pour s'en rendre compte d'une manière plus claire, nous avons tracé la fonction  $|\rho|^2$  pour deux valeurs de  $C$ . La figure 4.20 est relative à la valeur  $C = 0.1$  et la figure 4.21 à la valeur  $C = 0.5$ . Des graphes représentant d'autres valeurs ne feraient que confirmer nos conclusions. Nous avons choisi arbitrairement  $\alpha = 0.4$ . Le comportement est toujours le même, quel que soit la valeur choisie pour le paramètre de décentrage.

Rappelons tout d'abord que, sur ces graphes, le schéma est stable pour les valeurs choisies des paramètres uniquement si la courbe  $|\rho(k)|^2$  est totalement sous la droite  $|\rho|^2 = 1$ . Les deux figures montrent le même phénomène : pour des valeurs de  $\theta$  inférieure à 0.5, la courbe possède toujours une partie dans la zone instable. Ce n'est que pour  $\theta = 0.5$  que la courbe devient tangente à la courbe limite. Dans ce cas, le schéma est stable. Si on traçait des courbes analogues pour d'autres valeurs de  $C$ , on verrait que la courbe  $\theta = 0.5$  est toujours tangente. Le schéma est donc inconditionnellement stable pour cette valeur de  $\theta$ . Les courbes relatives à un paramètre de schéma supérieur à 0.5 sont toujours entièrement dans la partie stable.

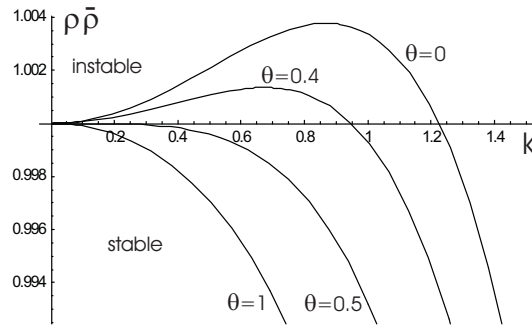


FIG. 4.20: La fonction  $|\rho|^2$  en fonction de  $k$  pour  $C = 0.1$  et  $\alpha = 0.4$ .

La figure 4.20 montre que pour des petites valeurs de  $C$ , donc pour des petits incréments de déplacement relatif du maillage par rapport à la matière si on se place dans le cadre de l'ALE, la valeur de  $\rho$  ne dépasse jamais beaucoup l'unité. On a donc une amplification très modérée pour ces valeurs de  $C$ . Il est donc possible de traiter certains problèmes mécaniques où la convection n'est pas importante par ce schéma bien qu'il soit instable.

Cependant, nous voulons nous placer en sécurité et pour ce faire nous allons présenter deux modifications simples du schéma qui vont le rendre conditionnellement stable pour les valeurs de  $\theta$  inférieures à  $1/2$ .

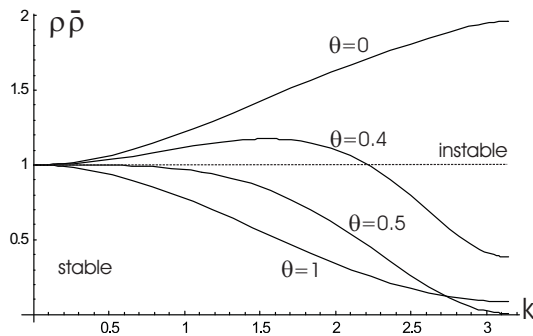


FIG. 4.21: La fonction  $|\rho|^2$  en fonction de  $k$  pour  $C = 0.5$  et  $\alpha = 0.4$ .

La première méthode revient à ne pas considérer la matrice  $C^{(2)}$  lors de la discrétisation par éléments finis. On obtient, dans ce cas, une formulation non-consistante vis-à-vis de la méthode des résidus pondérés mais qui permet d'utiliser le schéma pour des valeurs de  $\theta$  inférieure à  $1/2$  sans diagonaliser la matrice du système.

La seconde méthode consiste à diagonaliser la matrice à inverser en employant la formule (4.102) ou (4.103), ce qui présente l'avantage de réduire le temps de calcul.



#### 4.8.10 Stabilisation du schéma par diffusion artificielle

Pour stabiliser le schéma, il suffit de laisser tomber la matrice  $C^{(2)}$  lors de la discrétisation spatiale. Cela revient à appliquer les fonctions de pondération modifiées (4.77) uniquement au terme de convection. On utilise alors les fonctions de forme traditionnelles comme fonctions de pondération pour le terme transitoire.

Numériquement, cela revient à introduire artificiellement de la diffusion dans l'équation de convection. Celle-ci est contrôlée par l'utilisateur du code à l'aide du paramètre  $\alpha$ . L'équation discrétisée devient :

$$\begin{aligned} & \left[ \sigma_{m-1}^{l+1} + 4\sigma_m^{l+1} + \sigma_{m+1}^{l+1} \right] + \\ & 3\theta C \left[ (-1 - 2\alpha)\sigma_{m-1}^{l+1} + 4\alpha\sigma_m^{l+1} + (1 - 2\alpha)\sigma_{m+1}^{l+1} \right] \\ & = \\ & \left[ \sigma_{m-1}^l + 4\sigma_m^l + \sigma_{m+1}^l \right] - \\ & 3C(1 - \theta) \left[ (-1 - 2\alpha)\sigma_{m-1}^l + 4\alpha\sigma_m^l + (1 - 2\alpha)\sigma_{m+1}^l \right], \end{aligned} \quad (4.114)$$

c'est-à-dire une discrétisation de Galerkin de l'équation

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + w \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \alpha w \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}. \quad (4.115)$$

Nous pouvons donc effectuer une analyse de Von Neumann de ce nouveau schéma.

##### 4.8.10.1 Analyse de Von Neumann

En introduisant le mode de Fourier (4.63) dans l'équation (4.114), on obtient :

$$\rho = \frac{-2 - 6\alpha C - 6\alpha C\theta + (6\alpha C(\theta - 1) - 1) \cos k - 3Ci(\theta - 1) \sin k}{-2 - 6\alpha C\theta + (6\alpha C\theta - 1) \cos k - 3Ci\theta \sin k} \quad (4.116)$$

En résolvant l'équation fournissant la condition nécessaire et suffisante de stabilité, on trouve les valeurs de  $C$  suivantes :

$$\begin{cases} C = 0 \\ C = \frac{4\alpha(2 + \cos k)}{3(1 + 4\alpha^2 - 2\theta - 8\alpha^2\theta + \cos k - 4\alpha^2 \cos k - 2\theta \cos k + 8\alpha^2\theta \cos k)} \end{cases} \quad (4.117)$$

Par rapport à la solution (4.64), on remarque que seul le numérateur de la solution est différent. Cette fois-ci, il ne s'annule plus pour une certaine valeur de  $k$ . En traçant cette fonction (la figure 4.22 représente  $C(\theta = 0)$ ), on peut facilement déterminer, pour une valeur de  $\alpha$  donnée, le nombre de Courant maximum qui garantit la stabilité. Ce nombre est nul uniquement si  $\alpha = 0$  (ce qui est normal puisqu'on retrouve un schéma de type centré sans diffusion artificielle).

Contrairement à ce qu'on pourrait penser, ajouter beaucoup de diffusion ne stabilise pas nécessairement le schéma. La courbe limite possède un maximum en  $\alpha = \alpha^* = 0.288675$  (solution de  $|\rho(k=0)|^2 = |\rho(k=\pi)|^2$ ) et son équation est

$$\begin{cases} C = \frac{2\alpha}{1-2\theta} & \text{si } \alpha < \alpha^* \\ C = \frac{1}{6\alpha(1-2\theta)} & \text{si } \alpha > \alpha^*. \end{cases} \quad (4.118)$$

Cette équation pourrait être utilisée pour déterminer  $\alpha$  lorsque  $C$  est connu. Il serait possible alors de se placer juste en dessous de la limite de stabilité pour obtenir une solution très peu amortie. Ce choix automatique de  $\alpha$  n'a pas encore été introduit dans METAFOR.

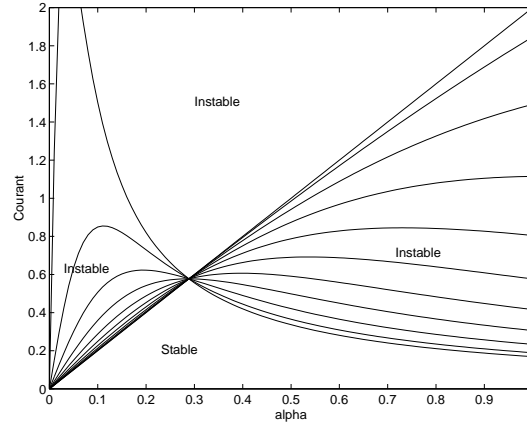


FIG. 4.22: La fonction  $C(\alpha, k)$  pour le schéma avec diffusion artificielle.

La figure 4.23 montre le domaine de stabilité du schéma avec diffusion artificielle pour différentes valeurs de  $\theta$ . On constate que le schéma est d'autant plus stable que  $\theta$  est élevé. En particulier, on garde une stabilité inconditionnelle lorsque  $\theta \geq 1/2$ .

Pour terminer, nous avons représenté la fonction  $|\rho|^2$  en fonction de  $k$  pour  $\alpha = 0.4$ ,  $C = 0.2$  (figure 4.24) et  $C = 0.5$  (figure 4.25) et pour différentes valeurs de  $\theta$ .

Pour une petite valeur de  $C$ , la figure 4.24 montre que toutes les courbes sont en dessous de la limite de stabilité. Tous les modes sont donc atténués lors de la résolution du système.

Pour une valeur de  $C$  plus élevée, la figure 4.25 montre que le schéma  $\theta = 0$  devient instable alors que les autres sont toujours stables. L'important ici est la transition 'douce' entre la stabilité et l'instabilité contrairement au cas précédent où le schéma passait brusquement de inconditionnellement instable à inconditionnellement stable lorsqu'on augmentait la valeur de  $\theta$ .

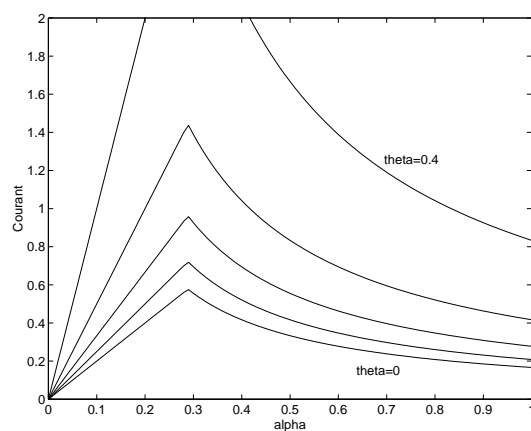


FIG. 4.23: La limite de stabilité en fonction de  $\alpha$  pour  $\theta = 0, 0.1, 0.2, 0.3$  et  $0.4$ .

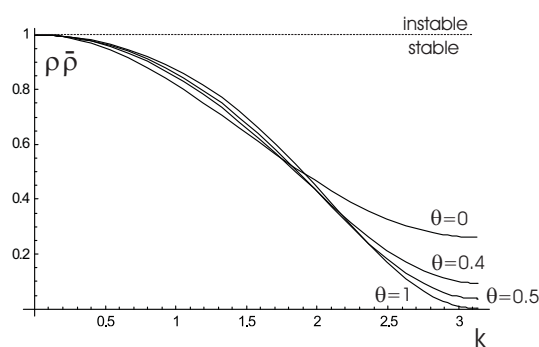


FIG. 4.24: La fonction  $|\rho|^2$  en fonction de  $k$  et  $\theta$  pour  $\alpha = 0.4$  et  $C = 0.2$ .

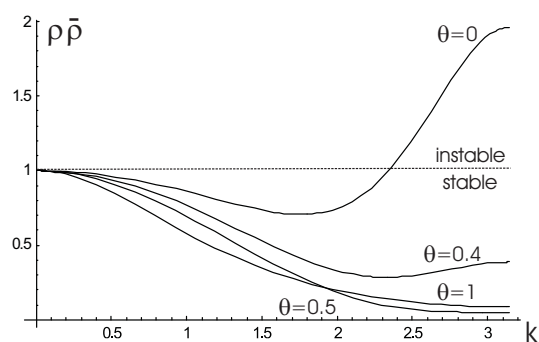


FIG. 4.25: La fonction  $|\rho|^2$  en fonction de  $k$  et  $\theta$  pour  $\alpha = 0.4$  et  $C = 0.5$ .

### 4.8.11 Stabilisation du schéma par diagonalisation

Un autre moyen de stabiliser le schéma (4.109) est de diagonaliser la matrice  $C + \theta K$ . Vu que cette diagonalisation est nécessaire lorsqu'on utilise le schéma explicite avec  $\theta = 0$ , nous fixerons  $\theta$  à cette valeur dans cette section.

En utilisant la formule de diagonalisation (4.102), l'élément diagonal de  $C$  (somme des deux contributions élémentaires) devient

$$C_{ii}^{diag} = \frac{L}{6} \left[ \frac{3(2-3\alpha)}{2} + \frac{3(2+3\alpha)}{2} \right] = 6\frac{L}{6} = L \quad (4.119)$$

De même, en utilisant l'équation (4.103)

$$C_{ii}^{diag} = (3+3)\frac{L}{6} = 6\frac{L}{6} = L. \quad (4.120)$$

Les deux méthodes fournissent donc le même résultat. Celui-ci peut également être obtenu en appliquant indifféremment l'une ou l'autre formule sur le schéma modifié (4.114).

Sans nous attarder sur les détails, nous donnons, sur la figure 4.26, le domaine de stabilité de la méthode explicite. Celui-ci est identique qu'on utilise une formulation consistante ou non, quelle que soit la formule de diagonalisation choisie.

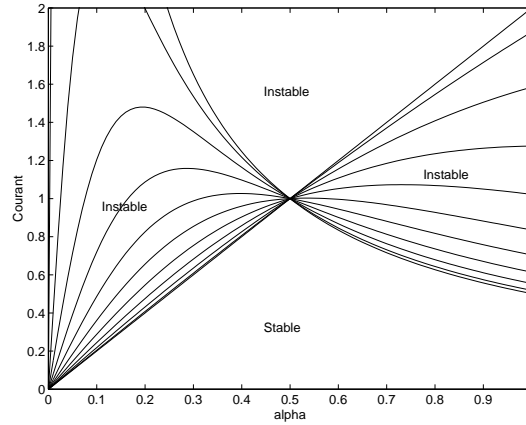


FIG. 4.26: La fonction  $C(\alpha, k)$  pour le schéma explicite.

On constate que le domaine de stabilité est étendu vis-à-vis de la méthode non diagonalisée. Son maximum est en  $\alpha = \alpha^* = 0.5$ . La courbe limite peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} C = 2\alpha & \text{si } \alpha < \alpha^* \\ C = \frac{1}{2\alpha} & \text{si } \alpha > \alpha^*. \end{cases} \quad (4.121)$$

Vu ces résultats, il est donc inutile de garder la matrice  $C^{(2)}$  lors de l'assemblage.

### 4.8.12 Organigramme de la méthode

La figure 4.27 représente un organigramme de l'algorithme de convection proposé. On y montre aussi la boucle temporelle et la phase lagrangienne.

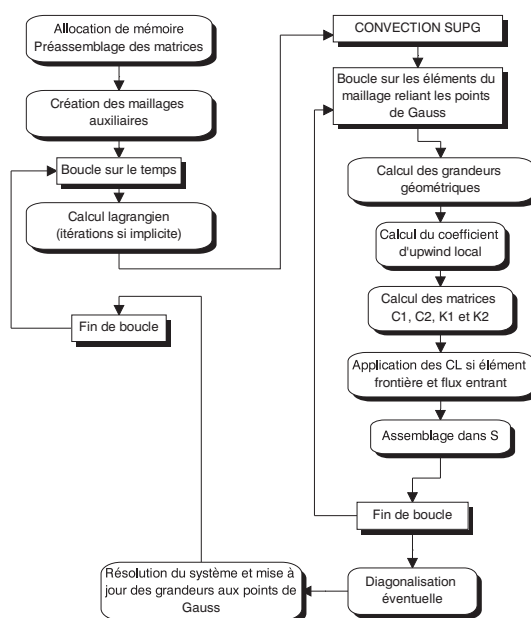


FIG. 4.27: Organigramme de l'algorithme SUPG

Nous détaillons brièvement quelques étapes du processus :

Le préassemblage des nouvelles matrices est nécessaire pour dimensionner correctement tous les tableaux utilisés par l'algorithme de convection. Le format de stockage utilisé est le SKYLINE, format déjà utilisé pour la matrice de raideur tangente des calculs lagrangiens implicites. Nous avons pu adapter très facilement toutes les routines existantes pour notre usage.

Le calcul des grandeurs géométriques consiste à déterminer la position et la vitesse des points des noeuds du nouveau maillage ainsi que la vitesse, le rayon (calcul axisymétrique) et le déterminant du jacobien en chaque point de Gauss de l'élément du nouveau maillage considéré.

Dans le cas d'une intégration temporelle implicite, la résolution du système se fait en deux étapes : tout d'abord une factorisation LU de la matrice structurale suivie d'une série de substitutions arrières pour mettre à jour chaque grandeurs à transférer. Pour une intégration explicite, la matrice est tout d'abord diagonalisée suivant les formules (4.102) ou (4.102) avant d'être inversée de façon triviale.

### 4.8.13 Conclusions

Pour résumer les sections précédentes, nous énumérons ci-dessous les avantages et inconvénients du nouvel algorithme basé sur la méthode SUPG.

#### 4.8.13.1 Avantages

- La propriété fondamentale de la méthode est l'absence totale de diffusion transverse. Peu de schémas numériques possèdent cette propriété. Nous verrons si celle-ci est importante lors de la résolution de problèmes mécaniques.
- La méthode d'intégration temporelle utilisée peut être aussi bien explicite qu'implicite. Nous aurons l'occasion de tester ces deux possibilités. En effet, il semble important d'utiliser un schéma explicite de convection si un schéma de ce type est utilisé pour la phase lagrangienne du calcul, pour ne pas pénaliser cette dernière. Par contre, lorsqu'un schéma implicite est utilisé pour la phase lagrangienne, il est peut être intéressant dans certains cas d'utiliser une mise à jour implicite des valeurs aux points de Gauss pour profiter du caractère inconditionnellement stable de la méthode.
- Aucune extrapolation n'est faite lors de la procédure de mise à jour. On évite ainsi une diffusion numérique excessive dépendant du nombre de pas de temps.
- La méthode SUPG est une méthode relativement ancienne qui a fait ses preuves, notamment en mécanique des fluides.

#### 4.8.13.2 Inconvénients

- La gestion des deux maillages auxiliaires nécessite de la place en mémoire. De plus, si on adopte un schéma d'intégration temporel implicite, il faut y ajouter une matrice dont la dimension est généralement quatre fois supérieure à celle utilisée pour une résolution lagrangienne.
- La résolution des systèmes d'équations prend du temps surtout si la matrice n'est pas diagonalisée. Lorsqu'il y a plusieurs grandeurs à transférer sur un même maillage, bien que la matrice soit factorisée une seule fois et qu'on effectue uniquement des substitutions inverses, le nombre d'opérations est largement plus important qu'une résolution explicite. Ce nombre est même plus important qu'une itération lagrangienne ! Lorsqu'une résolution explicite est envisagée, il semble difficile de comparer a priori les coûts CPU respectifs de l'algorithme mixte VF/EF et SUPG.
- Une généralisation de la méthode à des maillages non structurés semble très complexe voire impossible. En effet, si un noeud du maillage possède plus de quatre éléments voisins, il faudrait introduire des éléments non quadrangulaires dans le maillage reliant les points de Gauss.
- La structure ne peut pas être maillée par un seul élément selon une direction parce qu'il est impossible, dans ce cas, de créer le maillage nécessaire pour le transfert de la pression.

En conclusion, l'algorithme proposé risque d'être lent et gourmand en mémoire mais il est susceptible de donner de bons résultats.

## 4.9 Etude 1D des algorithmes proposés

### 4.9.1 Introduction

L'étude théorique étant terminée, nous nous proposons de vérifier ces résultats dans un cas très simple à une dimension. Celui-ci est en fait un cas à deux dimensions dégénéré : il s'agit de simuler le déplacement d'une onde carrée d'amplitude unitaire et qui s'étend sur 10 éléments, c'est-à-dire 20 points de Gauss d'abscisses différentes. On considère un domaine de longueur 100 discrétisé par 50 éléments finis. On a donc 100 inconnues. La convection s'effectue sur une distance de 70 et les résultats sont présentés ci-dessous.

Un tel problème est classique lors de l'étude d'algorithmes de convection. Certains auteurs abordent le problème d'une manière beaucoup plus axée sur la mécanique. Ils voient le problème comme la propagation d'une onde de pression dans un milieu unidimensionnel infini et résolvent le problème en ALE (phase lagrangienne suivie d'une phase eulérienne). Il est cependant difficile de se concentrer uniquement sur l'algorithme de convection car des oscillations peuvent aussi apparaître à cause du schéma d'intégration utilisé pour résoudre la phase lagrangienne.

Ici, nous isolons totalement l'algorithme de son contexte. On fournit simplement à la routine de convection les déplacements du maillage (ici, le maillage est fixe) et ceux de la matière (ici, le déplacement de chaque noeud est constant et vaut  $\Delta x$ ).

La figure 4.28 montre la forme de l'onde étudiée.

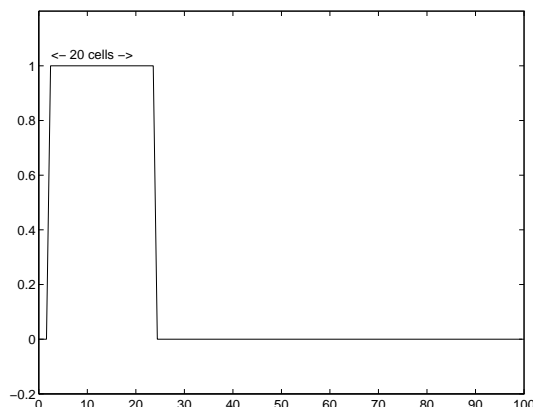


FIG. 4.28: Test 1D des deux algorithmes de convection.



## 4.9.2 L'algorithme mixte EF/VF

### 4.9.2.1 Influence du paramètre $\alpha$

Les figures 4.29 et 4.30 montrent l'influence du paramètre  $\alpha$  sur la solution obtenue. Nous travaillons ici avec un nombre de Courant de 0.1. Le critère de stabilité est donc satisfait tant que le paramètre  $\alpha$  est choisi supérieur à 0.1.

Les solutions obtenues pour  $\alpha = 1.0$ , 0.7 et 0.5 possèdent un maximum inférieur à la valeur réelle du maximum. Ceci est dû à la diffusion introduite numériquement par le coefficient  $\alpha$ . Lorsque cette diffusion diminue, les grands gradients restent importants mais le maximum physique peut être dépassé ( $\alpha = 0.3$ ). Pour des valeurs encore plus petites de  $\alpha$ , des oscillations spatiales apparaissent ( $\alpha = C = 0.1$ ). Celles-ci ne sont pas amplifiées tant que la limite de stabilité n'est pas franchie.

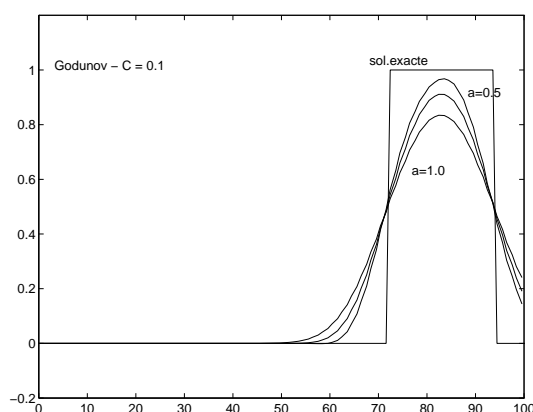


FIG. 4.29: Godunov - Influence de  $\alpha$  sur la solution ( $\alpha = 1.0$ , 0.7 et 0.5).

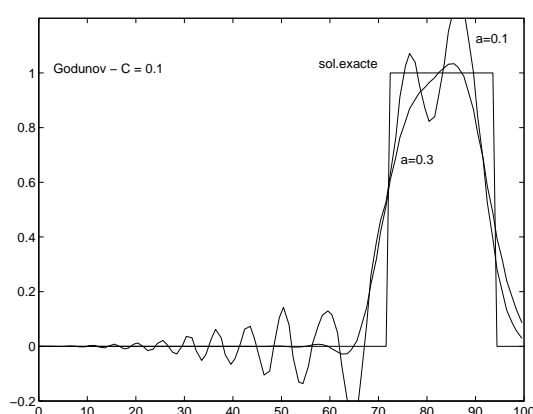


FIG. 4.30: Godunov - Influence de  $\alpha$  sur la solution ( $\alpha = 0.3$  et 0.1).

Ces oscillations numériques sont assez gênantes en mécanique : en effet, de nouveaux

extrema apparaissent. Un nouveau maximum peut conduire à des plastifications non physiques ou, plus simplement, à une surestimation des contraintes dans la structure étudiée.

Les minima peuvent être tout aussi gênants : en effet, si la grandeur transportée est une contrainte, on peut obtenir une plastification par compression. S'il s'agit, par contre, de la déformation plastique équivalente du matériau, celle-ci ne peut pas être négative. Il faut donc la corriger pour que cela n'arrive pas. Les contraintes et la contrainte équivalente de Von-Mises doivent être corrigées en conséquence par l'utilisation de la méthode du retour radial après le transfert de toutes les valeurs.

Ces troncatures de la forme de l'onde transportée posent aussi un autre problème. Si le schéma est conservatif, ces opérations le transforment en un schéma non conservatif. Autrement dit, l'intégrale de l'onde transportée n'est plus conservée. Une solution intéressante est de modifier le schéma utilisé pour garantir l'absence d'oscillations. On évite ainsi les problèmes découlant d'une déformation plastique équivalente négative.

#### 4.9.2.2 Influence du nombre de Courant pour $\alpha$ fixé

Lors d'un calcul élément fini traité par le formalisme ALE, nous serons amené à fixer le paramètre  $\alpha$  et la valeur du nombre de Courant variera tout au long du calcul. La valeur de  $\alpha$  ne peut pas être choisie trop petite parce que cela provoquerait une limitation sur la taille du pas de temps lagrangien (de la taille de ce pas de temps va découler un déplacement relatif du maillage et de la matière, donc un nombre de Courant qui sera généralement d'autant plus grand que l'incrément temporel est grand).

La figure 4.31 représente les variations de la solution lorsque le nombre de Courant passe de 1 à 0.1. Nous avons choisi  $\alpha = 1$  pour garantir la stabilité.

mauvaise figure !

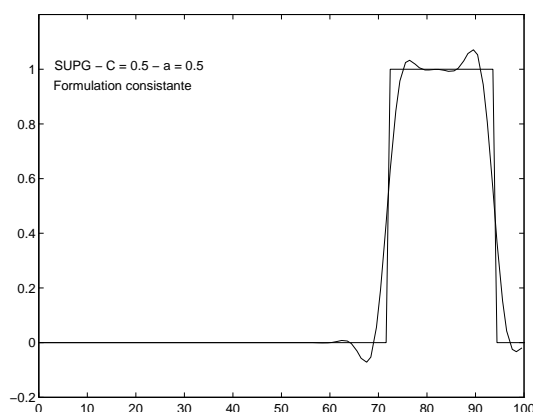


FIG. 4.31: Godunov - Influence du nombre de Courant si  $\alpha = 1$ .

On remarque que la solution exacte est obtenue avec la valeur  $C = 1$ . En effet, dans ce

cas simple unidimensionnel, l'équation du schéma s'écrit

$$\sigma_m^{l+1} = \sigma_m^l - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( -\frac{\Delta x}{\Delta t} (\sigma_{m-1}^l - \sigma_m^l) 2 \right) = \sigma_{m-1}^l. \quad (4.122)$$

Cette dernière équation est bien la solution du problème.

Pour des valeurs décroissantes de  $C$ , on constate une augmentation de la diffusion. Si on replace cette observation dans le contexte de la formulation ALE, on voit que la solution subira d'autant plus la diffusion numérique que le nombre d'incrément temporels augmente (et donc que la taille de ceux-ci diminue).

La figure 4.32 montre que le cas  $C = \alpha = 1$  est bien un cas particulier. Sur ce graphe, on a représenté la solution obtenue pour  $C = \alpha = 0.5$  pour laquelle on remarque de grandes oscillations. Remarquons que, vu qu'on se place sur la limite de stabilité, le schéma obtenu est marginalement stable, c'est-à-dire que les oscillations ne s'amortissent pas au cours du temps mais elles ne s'amplifient pas non plus.

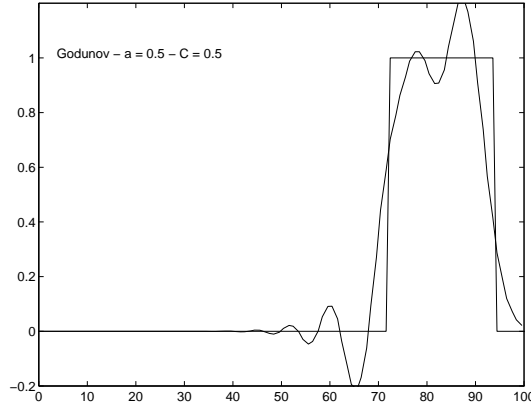


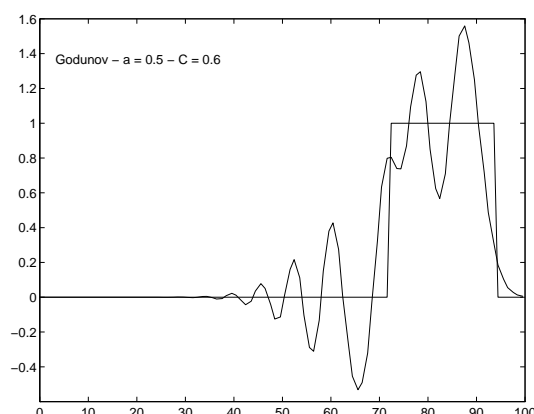
FIG. 4.32: Godunov ( $C = 0.5$ ,  $\alpha = 0.5$ ) – marginalement stable.

En effet, si on augmente encore le nombre de Courant ( $C = 0.6$ ,  $\alpha = 0.5$  sur la figure 4.33), on observe une amplification des oscillations au fur et à mesure que le temps s'écoule. Le schéma est donc bien instable si  $C > \alpha$ .

#### 4.9.2.3 Précision de la solution obtenue

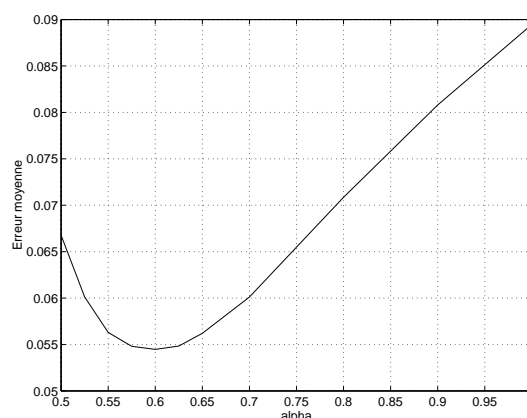
Si la solution se dégrade lorsqu'on introduit trop de diffusion au moyen du paramètre de décentrage ( $\alpha$  trop grand) et que la solution oscille lorsque  $\alpha$  est trop petit, il existe donc une valeur optimale pour une valeur de  $C$  donnée. Nous utilisons ici  $C = 0.5$  et nous nous intéressons à l'erreur moyenne sur la solution, l'erreur maximale et la valeur du maximum de l'onde. On calcule ces grandeurs comme suit :

$$E_{moy} = \sum_{i=1}^N \frac{|\sigma_i^{\text{exact}} - \sigma_i^{\text{num}}|}{N} \quad (4.123)$$

FIG. 4.33: Godunov ( $C = 0.6$ ,  $\alpha = 0.5$ ) – instable.

“L’erreur maximale” est le terme de plus grand module et “l’erreur au maximum”, le module de la différence des valeurs des deux maxima.

En abscisse, nous avons fait varier  $\alpha$  de 0.5 à 1.

FIG. 4.34: Godunov - Erreur moyenne en fonction de  $\alpha$  pour  $C = 0.5$ .

Comme prévu, on observe bien un minimum dans la courbe d’erreur moyenne (figure 4.34). Ce minimum se situe approximativement à  $\alpha = 0.6$ . Par contre, l’erreur maximale ne cesse de diminuer lorsqu’on augmente  $\alpha$  (figure 4.35). Quant à la valeur du maximum, il est largement surestimé pour  $\alpha = 0.5$  à cause des oscillations numériques. On obtient la valeur exacte du maximum pour une valeur de  $\alpha$  proche de 0.7 (pour ce cas particulier).

#### 4.9.2.4 Conclusions

En conclusion, on constate qu’il n’est pas très simple de fixer a priori le paramètre  $\alpha$  lorsqu’on n’a pas d’idée précise sur la convection entre le maillage et la matière qui va

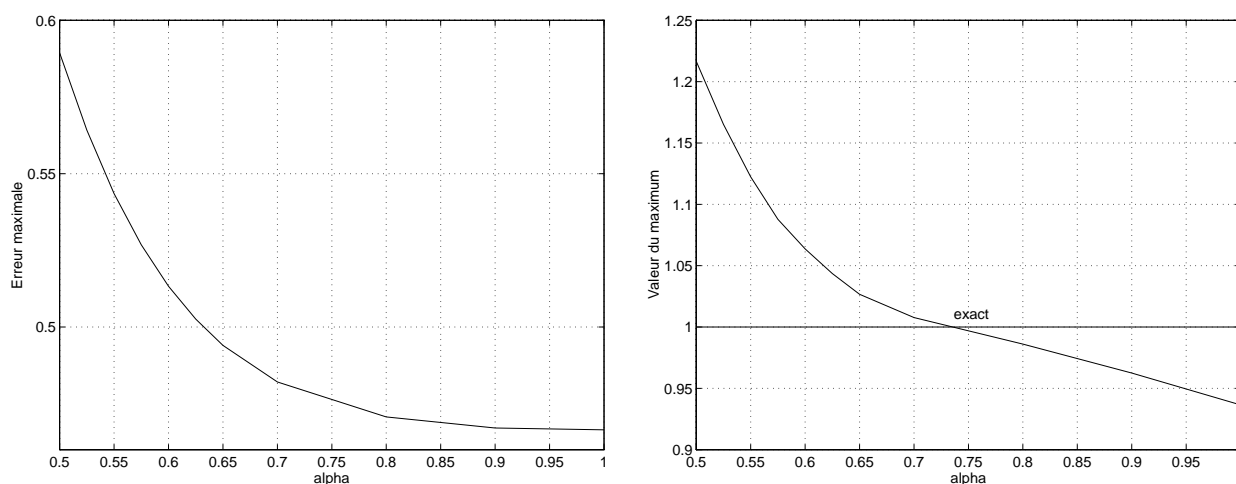


FIG. 4.35: Godunov - Erreur maximale et valeur du maximum en fonction de  $\alpha$  pour  $C = 0.5$ .

survenir lors de la résolution par le formalisme ALE.

Nous pouvons cependant nous aider des courbes de stabilité établies précédemment. Il sera intéressant, dans la suite de ce travail, d'introduire ces courbes de stabilité dans METAFOR et de calculer rapidement un paramètre  $\alpha$  optimal pour chaque point de Gauss.

Dans la littérature, il est très courant de voir utiliser un décentrage complet ( $\alpha = 1$ , full donor approximation) pour être certain d'obtenir un schéma stable. Ceci est correct pour le schéma mixte EF/VF : une grande valeur de  $\alpha$  permet d'utiliser une plus grande gamme de nombres de Courant. Mais les courbes de stabilité de l'algorithme SUPG montrent que ce n'est pas toujours le cas.

### 4.9.3 L'algorithme SUPG

Dans cette section, nous étudions l'algorithme de convection SUPG pour valider l'étude théorique basée sur l'analyse de stabilité de Von Neumann. Nous reprenons le même problème que celui traité précédemment par l'algorithme mixte EF/VF.

#### 4.9.3.1 Schéma consistant

Lorsqu'on utilise le schéma consistant, c'est-à-dire avec une fonction de pondération identique pour tous les termes de l'équation de convection, on peut vérifier le critère de stabilité : le schéma est instable pour  $C < 1/2$  et stable pour les valeurs supérieures.

Nous choisissons une faible valeur de  $C$  ( $C = 0.1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\theta = 0$  sur la figure 4.36)

pour montrer que le schéma est instable mais les oscillations ne s'amplifient pas beaucoup sur les 700 pas de temps calculés. Nous avons vu, en effet, que le module du facteur d'amplification de  $\rho$  était très proche de l'unité.

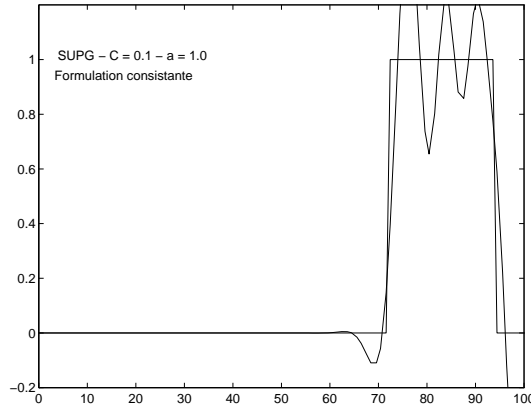


FIG. 4.36: SUPG ( $C = 0.1, \alpha = 1, \theta = 0$ ).

Pour les résultats précédents, nous n'avons pas diagonalisé la matrice du système. Le graphique de gauche sur la figure 4.37 représente le résultat du même calcul lorsqu'on diagonalise la matrice. On remarque une très grande diffusion numérique (la valeur du maximum est largement sous-estimée). La diagonalisation a donc un effet stabilisateur. Cependant, si nous observons le diagramme de stabilité présenté à la figure 4.26, nous voyons que le point  $(\alpha, C) = (1, 0.1)$  est très loin de la limite de stabilité du schéma.

Le graphique de droite sur la figure 4.37 montre le même calcul pour lequel on s'est rapproché de la limite de stabilité en choisissant  $\alpha = 0.15$  (la limite est  $\alpha = 0.1$ ). Les grands gradients sont mieux approchés et l'erreur moyenne est plus faible que dans le cas précédent. On remarque cependant de légères oscillations dans la solution. Ces dernières sont d'autant plus importantes qu'on se rapproche de la limite de stabilité.

Les deux graphiques de la figure 4.38 montrent deux tests de calcul implicites. Le graphique de gauche est effectué avec un schéma d'intégration de Crank-Nicolson ( $\theta = 0.5$ ). On remarque que la solution est très précise malgré de faibles oscillations sur les bords de l'onde (erreur moyenne=0.0314 à comparer à 0.054 pour le minimum de la figure 4.34).

Le graphique de droite est effectué avec un schéma d'Euler implicite ( $\theta = 1$ ). Celui-ci étant très diffusif, nous avons dû annuler le paramètre  $\alpha$ . Néanmoins, on constate que le maximum est toujours sous-estimé.

#### 4.9.3.2 Schéma non consistant

Nous considérons ici le schéma non diagonalisé avec  $\theta = 0$ . Ce choix arbitraire n'a aucune implication dans la suite. Des résultats similaires pourraient être obtenus avec

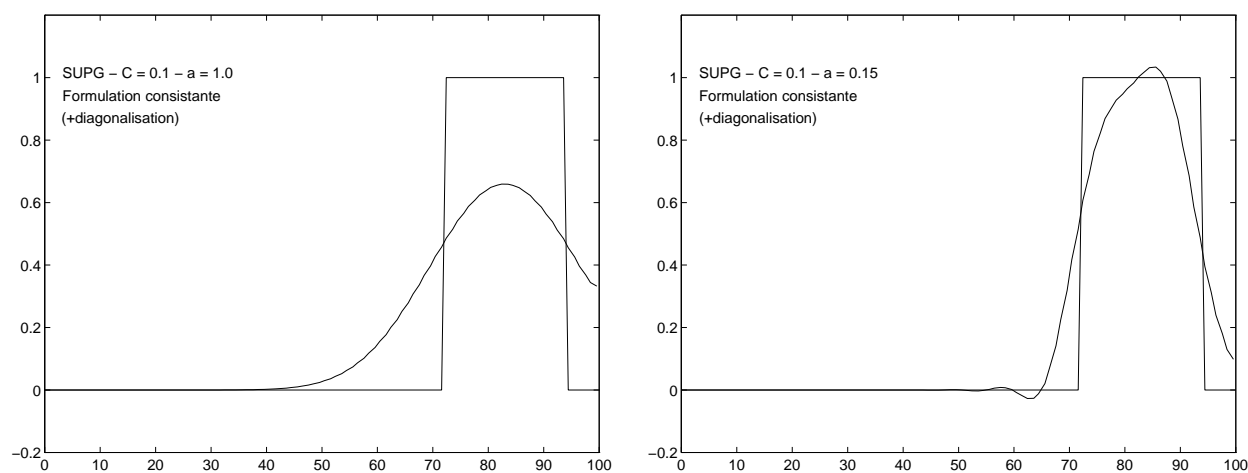


FIG. 4.37: SUPG - Effet de la diagonalisation pour  $C = 0.1$  ( $\alpha = 1.0$  à gauche et  $\alpha = 0.15$  à droite).

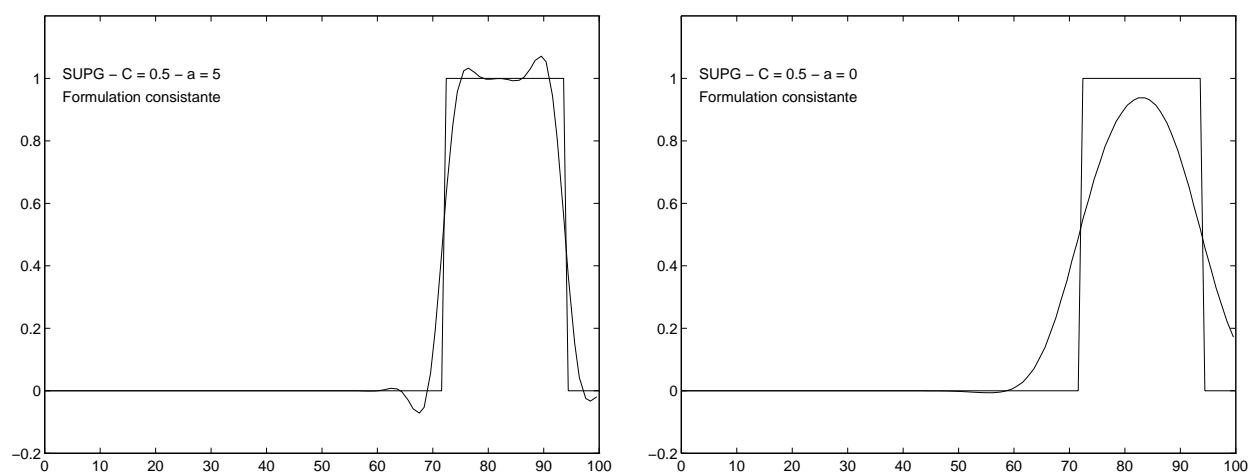


FIG. 4.38: SUPG - Calcul implicite ( $\theta = 0.5$  à gauche et  $\theta = 1.0$  à droite).

d'autres valeurs de  $\theta$  ou en diagonalisant la matrice du système.

Pour valider numériquement les calculs théoriques de stabilité, nous fixons la valeur du nombre de Courant à 0.4 pour parcourir différentes valeurs de  $\alpha$ . Sur le diagramme de stabilité (figure 4.23), on remarque que le domaine de stabilité pour  $C = 0.4$  est  $[0.2, 0.4167]$ . Les deux graphiques de la figure 4.39 représentent des calculs pour des valeurs de  $\alpha$  légèrement en dehors (à gauche) et légèrement à l'intérieur (à droite) du domaine de stabilité.

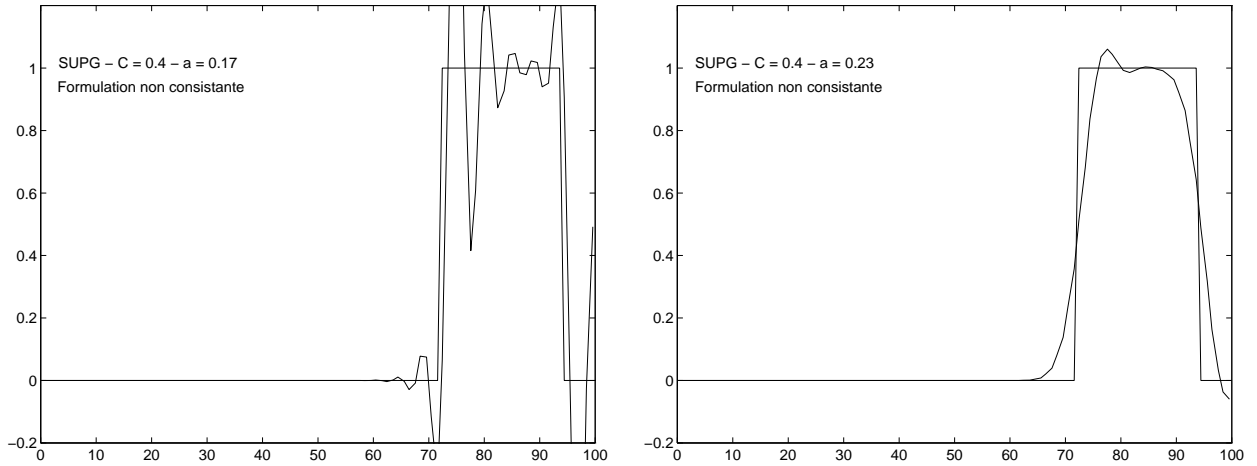


FIG. 4.39: SUPG -  $C = 0.4$ ,  $\theta = 0$ , ( $\alpha = 0.17$  à gauche et  $\alpha = 0.23$  à droite).

Nous effectuons les mêmes calculs pour l'autre extrémité du domaine de stabilité : les deux graphiques de la figure 4.40 représentent des calculs pour des valeurs de  $\alpha$  légèrement en dehors (à droite) et légèrement à l'intérieur (à gauche) du domaine de stabilité.

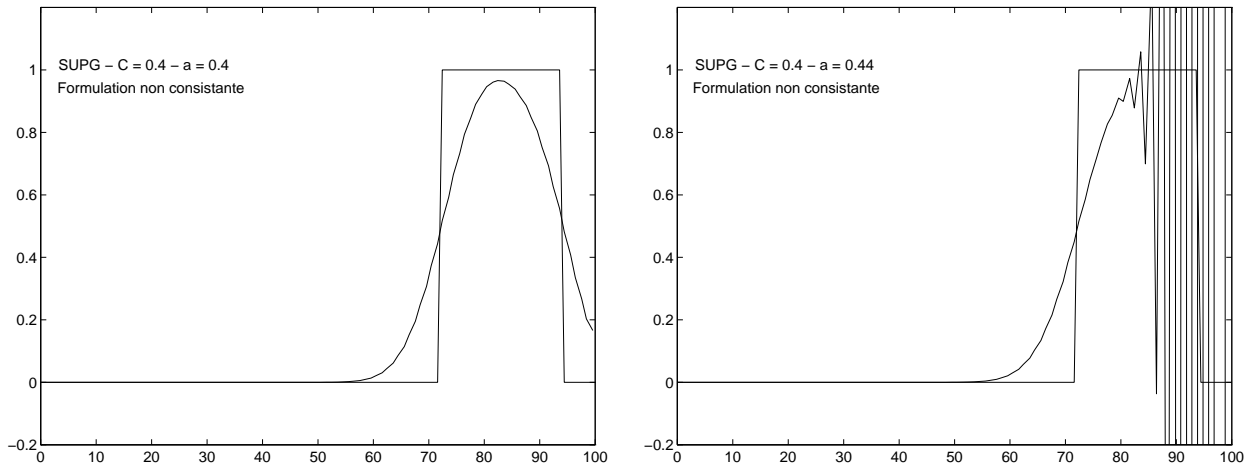


FIG. 4.40: SUPG -  $C = 0.4$ ,  $\theta = 0$ , ( $\alpha = 0.40$  à gauche et  $\alpha = 0.44$  à droite).

En conclusion, on constate que le paramètre  $\alpha$  doit être choisi avec beaucoup de précaution. Contrairement au cas de l'algorithme mixte EF/VF, il ne faut pas choisir  $\alpha = 1$



pour être en sécurité. En fait, la valeur maximale admissible du nombre de Courant qui garantit la stabilité est ici  $\alpha = \alpha^* = 1/\sqrt{12}$ .

#### 4.9.4 Comparaison des deux algorithmes

Lorsqu'on utilise les deux algorithmes d'une manière explicite, on peut conclure que les résultats sont similaires.

Si on veut augmenter la précision des résultats, il est toujours possible d'effectuer le calcul de manière implicite en utilisant  $\theta = 1/2$  (ce qui fournit un schéma du second ordre) et une faible valeur de  $\alpha$  pour amortir les oscillations numériques.

*Faire un tableau  
récapitulatif –  
'Maître achat'*

## 4.10 Etude 2D des deux algorithmes proposés

### 4.10.1 Introduction

Après l'étude unidimensionnelle, il est intéressant de comprendre comment réagissent les deux algorithmes lorsqu'un problème bidimensionnel est étudié. Nous nous servirons des résultats obtenus précédemment pour fixer le paramètre  $\alpha$  quand la valeur des déplacements relatifs du maillage et de la matière sont connus. Pour ce faire, on considérera successivement les nombres de Courant selon  $x$  et selon  $y$  pour appliquer le critère de stabilité. On choisira alors la condition la plus restrictive.

Le problème étudié dans cette section est la convection d'un front d'onde sur un domaine carré dont les côtés, de longueur  $2L$ , sont discrétisés à l'aide de  $L$  éléments. Ceci permet d'obtenir des volumes finis carrés de longueur 1 si on utilise 4 points de Gauss par élément. Pour la comparaison des deux algorithmes, nous choisissons  $L = 10$ , c'est-à-dire un total de 400 points de Gauss et une dimension de domaine de  $20 \times 20$ .

Le maillage est eulérien et la matière le traverse avec une vitesse inclinée à 45 degrés par rapport à l'axe  $x$  et  $y$ .

On choisit d'imposer  $\sigma = 1$  sur la frontière d'équation  $x = 0$  et  $\sigma = 0$  sur l'autre frontière à travers laquelle le flux de matière entre dans le domaine étudié. Initialement,  $\sigma = 0$  dans tout le domaine étudié.

La solution exacte du problème est :

$$\begin{cases} \sigma = 1 & \text{si } x < y \\ \sigma = 0 & \text{si } x > y. \end{cases} \quad (4.124)$$

Nous étudierons plus particulièrement la solution stationnaire (solution obtenue après un déplacement de matière égal à deux fois la taille du domaine maillé) et les effets de diffusion transverse.

### 4.10.2 Comparaison des deux algorithmes

Pour les résultats suivants, nous avons choisi  $\Delta x = \Delta y = 0.1$  (distance de convection sur un pas de temps) et nous ferons varier le paramètre de décentrage  $\alpha$ . D'autres tests peuvent être effectués pour vérifier, comme nous l'avons fait à une dimension, la stabilité de deux algorithmes. Les conclusions seraient les mêmes dans les deux cas. Nous nous limiterons ici aux résultats qui ne peuvent pas être obtenus à une dimension, c'est-à-dire la présence ou l'absence de diffusion transverse.

Dans la suite, les résultats relatifs à l'algorithme mixte EF/VF seront présentés à la

ajouter un  
graphique de la  
sol exacte

droite des mêmes résultats pour l'algorithme SUPG.

Les deux graphiques de la figure 4.41 ont été obtenus pour  $\alpha = 0.2$ . Ils représentent la solution instationnaire obtenue après 150 pas de temps (c'est-à-dire une distance de convection totale de 15 – cette solution est donc encore loin de la solution stationnaire). On constate que l'algorithme mixte montre des oscillations de grande amplitude comparé à la solution obtenue par l'algorithme SUPG.

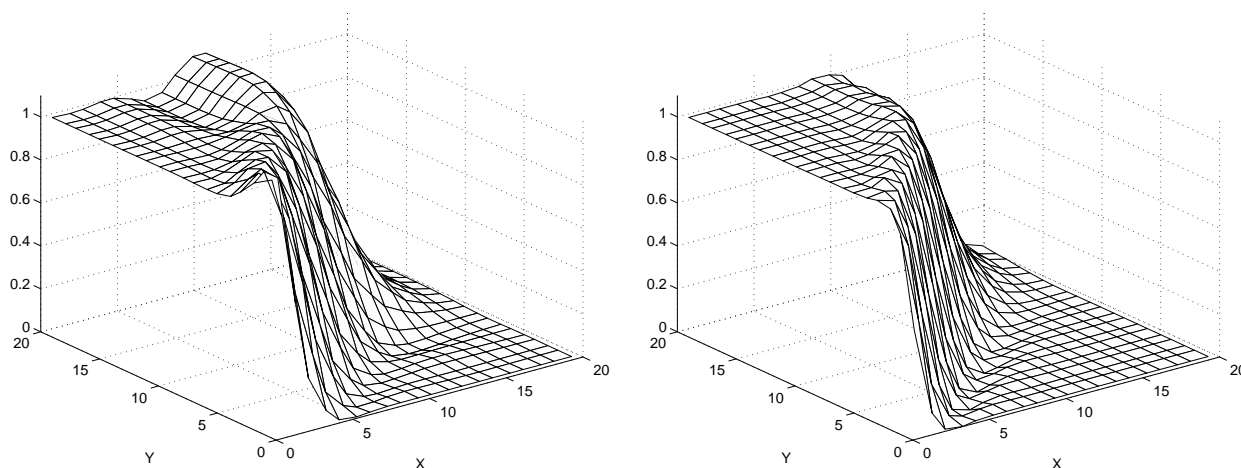


FIG. 4.41: Solution transitoire (150 pas) –  $\alpha = 0.2$  (Godunov à gauche, SUPG à droite).

Ces oscillations sont cependant vite amorties lorsqu'on progresse dans le temps (les solutions stationnaires sont représentées sur la figure 4.42). Sur cette dernière figure, on remarque que les deux solutions sont fort semblables, bien que le grand gradient est légèrement mieux approximé dans le cas de la méthode SUPG. On observe aussi un léger pic au point  $(x = 0, y = 0)$  pour la solution de l'algorithme mixte. Ce pic n'apparaît pas pour l'autre solution.

La figure 4.43 montre le même calcul pour un coefficient de décentrage  $\alpha$  beaucoup plus grand ( $\alpha = 1$ ). Nous n'avons pas montré les solutions transitoires pour ce cas. On aurait pu remarquer une très grande diffusion en amont de l'écoulement. Ces solutions transitoires ne sont donc pas très précises. Par contre, nous voyons que la solution stationnaire donnée par la méthode SUPG est toujours très précise alors que celle donnée par l'algorithme mixte donne une très mauvaise approximation de la discontinuité. Dans les deux cas, on peut remarquer également l'absence d'oscillations vu la valeur élevée de la diffusion artificielle introduite au moyen du paramètre  $\alpha$ .

La figure 4.44 montre les courbes d'isovaleurs relatives aux derniers résultats discutés. La solution exacte serait représentée par la première diagonale. L'absence de diffusion transverse pour l'algorithme SUPG est frappante. En effet, contrairement à l'autre méthode pour laquelle les isovaleurs divergent (pente différente de  $45^\circ$ ), celles obtenues par l'algorithme SUPG sont parfaitement parallèles.

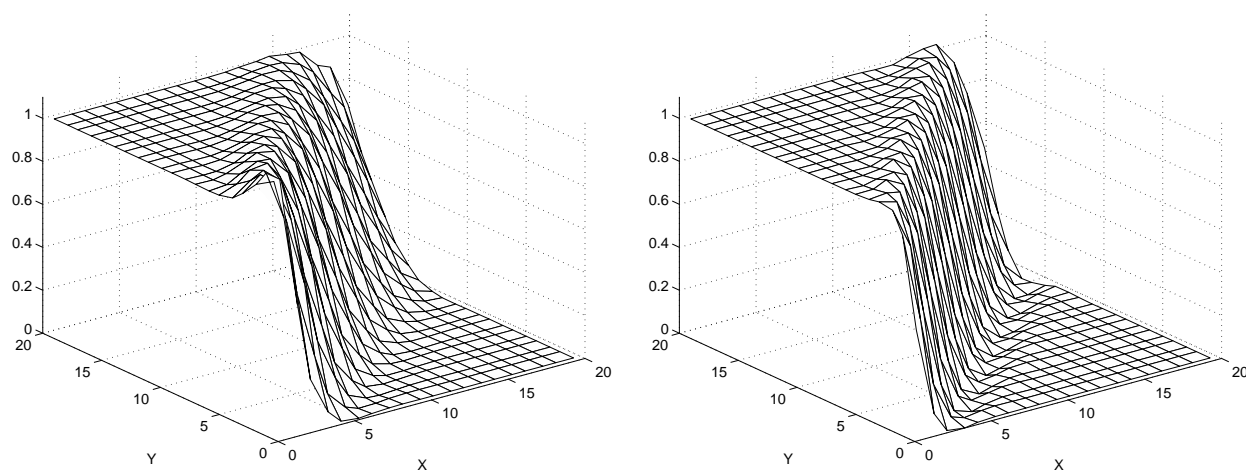


FIG. 4.42: Solution stationnaire –  $\alpha = 0.2$  (Godunov à gauche, SUPG à droite).

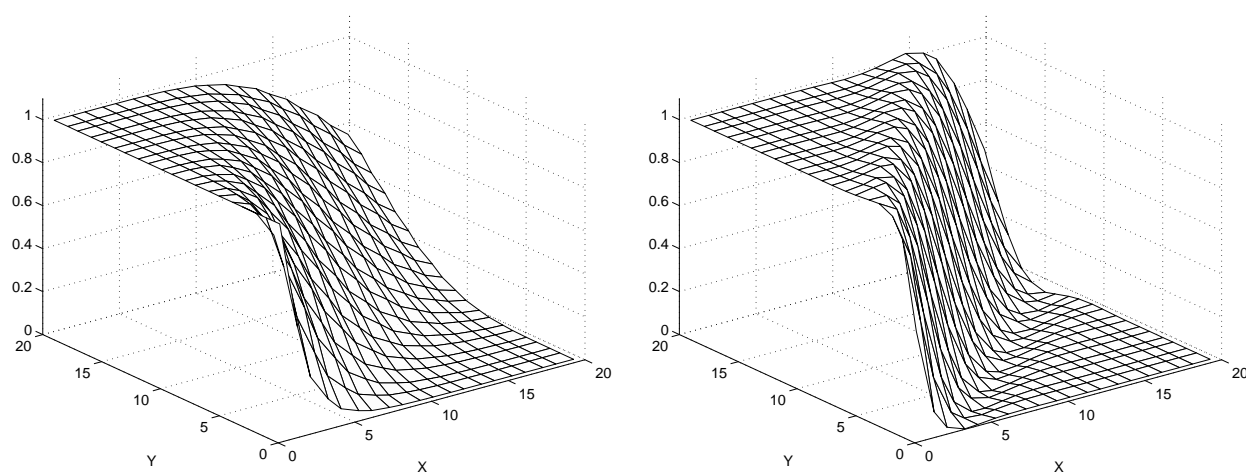
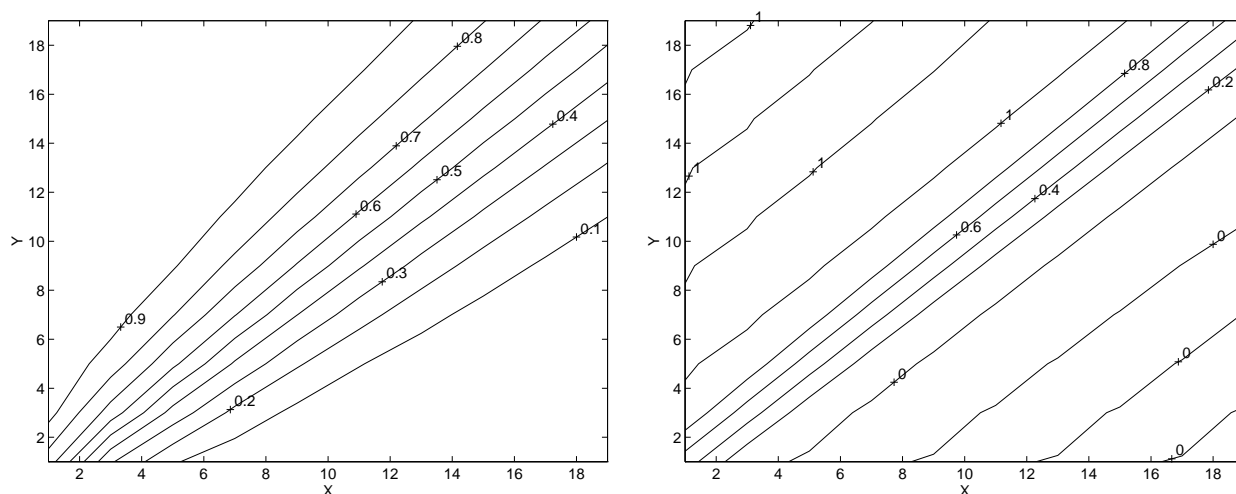
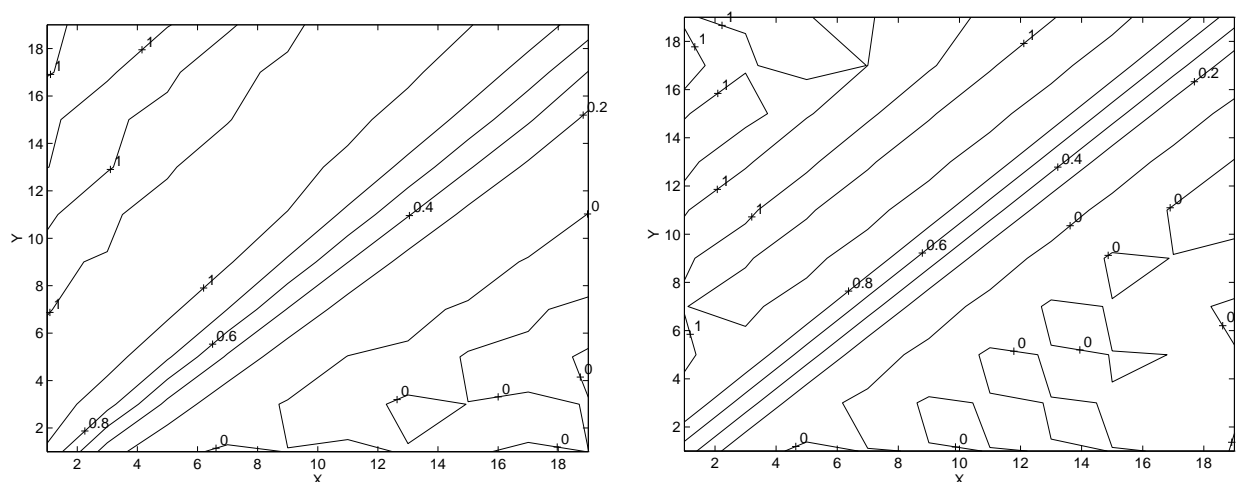


FIG. 4.43: Solution stationnaire –  $\alpha = 1.0$  (Godunov à gauche, SUPG à droite).

FIG. 4.44: Isovaleurs –  $\alpha = 1.0$  (Godunov à gauche, SUPG à droite).

Même dans le cas où on avait utilisé une petite valeur pour le paramètre  $\alpha$  (les isovaleurs pour ce cas sont représentées sur la figure 4.45), on remarque une diffusion transverse dans le cas de l'algorithme mixte.

Si on compare maintenant les isovaleurs obtenues par la méthode SUPG pour  $\alpha = 0.2$  et  $\alpha = 1.0$ , on constate que la distance entre les lignes d'isovaleurs 1 et 0 sont identiques. Cet écart ne dépend que de la taille des mailles utilisées et résulte de l'approximation d'un champ discontinu par un champ continu sur un maillage régulier. On pourrait diminuer cette distance, et donc tendre vers un gradient infini, en raffinant le maillage.

FIG. 4.45: Isovaleurs –  $\alpha = 0.2$  (Godunov à gauche, SUPG à droite).

*Il aurait fallu mettre les mêmes isos sur les 2 graphes. Idéalement les graphes devraient être carrés !*

### 4.10.3 Comparaison du temps de calcul

Après avoir vanté les mérites de l'algorithme SUPG, nous allons montrer sa principale faiblesse : le temps de calcul nécessaire par pas de temps est bien plus élevé que son homologue mixte EF/VF.

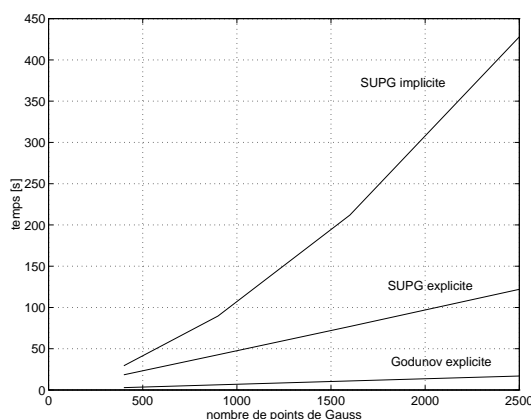


FIG. 4.46: Comparaison des temps de calcul des deux méthodes (200 pas de temps).

En effet, la figure 4.46 est éloquent à ce sujet : même lorsqu'on compare les deux algorithmes explicites, il y a une nette différence entre les temps de calcul obtenus. Pour obtenir ce graphique, nous avons fait varier le nombre  $L$  de 10 à 25. On obtient alors le cas le plus défavorable pour l'algorithme implicite. En effet, dans le cas d'un maillage régulier d'un carré, on obtient la largeur de bande maximale du système à résoudre. Notons aussi que nous effectuons un transfert complet de toutes les grandeurs stockées aux points de Gauss dans les deux cas. En particulier, pour la méthode SUPG, le maillage auxiliaire pour transférer la pression est aussi construit et utilisé.

On remarque que les algorithmes explicites ont un temps de calcul linéaire par rapport au nombre de points de Gauss de la structure. Ce qui paraît logique puisque le nombre d'opérations à effectuer est toujours le même par point de Gauss.

Dans le cas de l'algorithme implicite (c'est-à-dire le SUPG pour lequel on ne diagonalise pas la matrice des deux systèmes à résoudre), le temps de calcul est théoriquement proportionnel à  $N^2m$  où  $N$  est le nombre de points de Gauss et  $m$  la largeur de bande. On notera qu'il y a deux matrices à factoriser suivies d'un nombre de substitutions inverses dépendant de la loi constitutive du matériau et du type de problème (dynamique ou quasistatique). De plus, nous n'avons pas encore utilisé de méthode de réduction de largeur de bande parce que l'algorithme disponible actuellement dans METAFOR (méthode de Sloan) doit subir quelques modifications pour pouvoir être utilisée dans notre cas.

#### 4.10.4 Comparaison de la mémoire utilisée

Un autre point faible de l'algorithme SUPG est l'espace mémoire requis pour son fonctionnement. La figure 4.47 montre la mémoire utilisée par les deux algorithmes de convection. On remarque que celle-ci dépend linéairement du nombre de points de Gauss. En effet, il n'y a aucune matrice à garder en mémoire. Par contre, la mémoire utilisée en explicite est proportionnel à  $Nm$  où  $N$  et  $m$  sont définis comme précédemment. Dans le cas du maillage régulier d'un carré, la largeur de bande  $m$  est proportionnelle à  $N$ . On obtient donc une parabole sur le graphique.

La différence entre les deux algorithmes explicites provient des tableaux d'entiers qui reflètent la topologie des deux maillages supplémentaires dans le cas de la méthode SUPG.

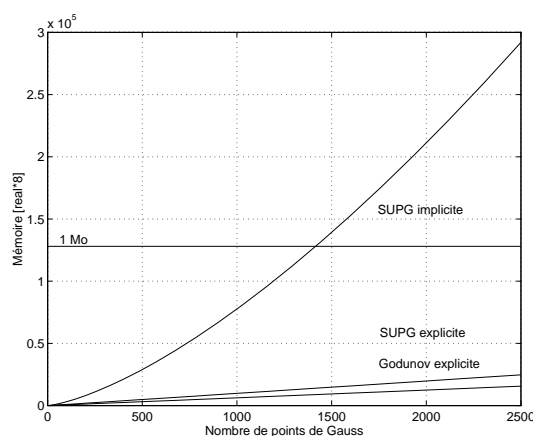


FIG. 4.47: Comparaison de la mémoire utilisée pour les deux méthodes (200 pas de temps).

Nous avons aussi tracé la limite de 1 Mo sur ce graphe. Ceci nous montre qu'il est possible de résoudre un carré de  $18 \times 18$  éléments finis avec 1 Mo de mémoire supplémentaire réservée pour la convection. Si on passe en explicite, 1 Mo suffit pour gérer un carré de  $56 \times 56$  par la méthode SUPG et  $71 \times 71$  par l'algorithme mixte.





# Chapitre 5

## Exemples numériques

### 5.1 Introduction

Après cette longue étude qui sortait un peu du cadre de la mécanique du solide, nous effectuons, dans cette section, une série de cas tests pour valider le comportement des deux algorithmes lorsqu'ils sont inclus dans le code METAFOR.

Nous étudierons successivement la simulation du passage de matière dans une filière, l'écrasement d'un lopin de matière, l'impact d'une barre de métal sur un mur rigide (barre de Taylor) et une simulation d'un laminage d'une tôle d'acier.

Le premier problème est un problème purement eulérien qui permettra de tester les algorithmes lorsque la convection est le phénomène dominant. Nous montrerons aussi la convergence de la solution vers un état stationnaire.

Les deux problèmes suivants sont des classiques dans l'étude du formalisme ALE. Leur solution a déjà été obtenue par la méthode mixte EF/VF par d'autres auteurs [7]. Nous pourrions ainsi comparer celle-ci à la notre ainsi qu'à celle obtenue avec l'algorithme SUPG.

Le dernier problème nous rapproche de l'objectif de notre travail puisqu'il s'agit de simuler un procédé de mise à forme (le laminage) où le frottement est un phénomène d'une grande importance : en effet, dans ce rapport, nous n'appliquerons pas d'effort selon la direction de laminage et le frottement seul fera avancer la tôle sous le rouleau.

Nous montrerons dans ce dernier cas que notre objectif est atteint : le processus de laminage peut être simulé efficacement par le formalisme ALE. Outre l'avantage certain du temps de calcul réduit (un nombre de mailles moins important est nécessaire par rapport au cas lagrangien), nous obtenons un nombre de noeuds en contact indépendant du temps, contrairement au même problème traité par le formalisme lagrangien.

Grâce à ces deux algorithmes, nous aurons donc posé des bases numériques solides pour

pouvoir développer, prochainement, des lois de frottement plus complexes et plus réalistes que la traditionnelle loi de Coulomb.

## 5.2 Filière

### 5.2.1 Description du problème

Ce problème est présenté par Huetink [31, 32]. Celui-ci résout le problème de convection en combinant adroitement deux algorithmes instables pour leur permettre de converger vers une solution stationnaire tant que la distance de convection n'est pas trop grande. Akkermann [2] reprend le problème en utilisant des limiteurs de flux pour contrer les oscillations.

Le problème consiste à étudier le passage d'un matériau au travers une filière cylindrique. Au début du calcul, on considère que la matière est non contrainte dans la filière. On commence alors à tirer sur le matériau situé à l'extrémité réduite de la filière. La traction est traduite par un déplacement imposé et la vitesse de traction reste constante dans le temps.

Après une brève période transitoire, les grandeurs physiques doivent se stabiliser et le processus atteint un état stationnaire.

Le problème est traité à 2D, de manière axisymétrique. Le maillage utilisé est purement eulérien et choisi pour englober le rétrécissement de la filière. Il est assez long en amont pour qu'on puisse considérer que la matière qui entre dans la filière est non contrainte. Il en va de même pour la partie en aval (celle-ci ne présente plus d'évolution de contraintes), de sorte que les résultats près du rétrécissement ne soient pas influencés par les déplacements imposés.

La figure 5.1 montre la géométrie et le maillage utilisé. Il est identique à celui de Huetink. L'angle de la matrice rigide est de 6 degrés.

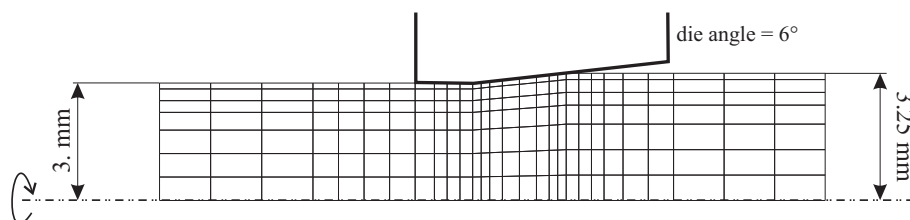


FIG. 5.1: Géométrie et maillage de la filière (angle = 6 degrés).

D'un point de vue pratique, on utilise trois domaines purement eulériens pour modéliser la matière avant, pendant et après le rétrécissement. Le maillage a été raffiné radialement

pour obtenir de meilleurs résultats sur la frontière extérieure en contact avec la matrice. Dans le même but, un maillage plus fin est utilisé aux deux extrémités du rétrécissement. Par contre, des grandes mailles sont choisies pour modéliser le matériau à proximité de l'entrée et de la sortie de la filière puisqu'on s'attend à une solution quasi constante dans ces deux régions.

La matrice rigide est modélisée par des fixations selon la normale à la surface externe de la matière. Enfin, l'effort de traction sera imposé par un déplacement imposé sur les noeuds extrêmes à la sortie de la filière.

Bien que le calcul soit quasistatique, nous avons besoin d'un temps virtuel qui traduit l'incrément de chargement. La vitesse de celui-ci sera fixée à 1 mm par seconde (cette information est utile pour déduire l'avancement de la matière dans la filière à partir du temps total calculé, donné sur les graphes).

Akkermann utilise une matrice inclinée à 8 degrés et un matériau légèrement différent. Il sera certainement intéressant d'effectuer ces modifications pour pouvoir comparer nos résultats.

Les propriétés du matériau sont données dans le tableau 5.1. On utilise un matériau à écrouissage non linéaire. De plus, il n'y a pas de frottement entre la matrice rigide et le matériau.

Module de Young	$E$	=	120 GPa
Coefficient de poisson	$\nu$	=	0.35
Ecrouissage	$\sigma_V^0$	=	$50 + 160 [1 - \exp(-10.2 \varepsilon^p)] + 270 \varepsilon^p MPa$

TAB. 5.1: Propriétés matérielles pour le problème de la filière.

## 5.2.2 Résultats

### 5.2.2.1 Calcul lagrangien

Avant de donner nos résultats relatifs au calcul eulérien décrit ci-dessus, nous essayons ici d'effectuer un calcul identique par le formalisme lagrangien. Celui-ci permettra d'avoir une idée de la solution à obtenir. Cependant, comme nous l'expliquerons dans la suite, il sera difficile de comparer très précisément les résultats eulérien et lagrangien. Le problème lagrangien nous donnera cependant un ordre de grandeur de la solution à obtenir dans le cas eulérien.

Pour le calcul lagrangien (axisymétrique également), nous utilisons un cylindre de 40 mm de longueur et de 3.25 mm de rayon. Un maillage de  $200 \times 7$  élément est utilisé. Celui-ci est régulier dans la direction axiale est raffiné près de la frontière externe dans la direction

radiale (on fixe un rapport de 4 entre le plus grand et le plus petit élément). De plus, une matrice de contact rigide modélise la filière. Nous utilisons une loi de contact sans frottement et la méthode de la pénalité est utilisée avec un coefficient de  $10^7$  N/mm.

Le calcul est mené jusqu'à ce que les grandeurs physiques ne varient plus (nous avons arrêté le calcul lorsque plus de la moitié de la matière était passée dans la filière).

La figure 5.2 représente la solution du calcul lagrangien. Nous avons choisi de présenter la déformation plastique équivalente parce que nous verrons que les calculs eulériens donnent des résultats légèrement différents pour cette grandeur. Les différences sont moins marquées pour les autres grandeurs (contraintes).

Vu que l'entrée de la matière au début du calcul provoque de très grandes déformations plastiques à l'extrémité du cylindre, nous avons dû diminuer la valeur maximale de l'échelle des valeurs de la figure 5.2 pour refléter exactement les valeurs de la déformation de la zone spatiale montrée sur cette figure.

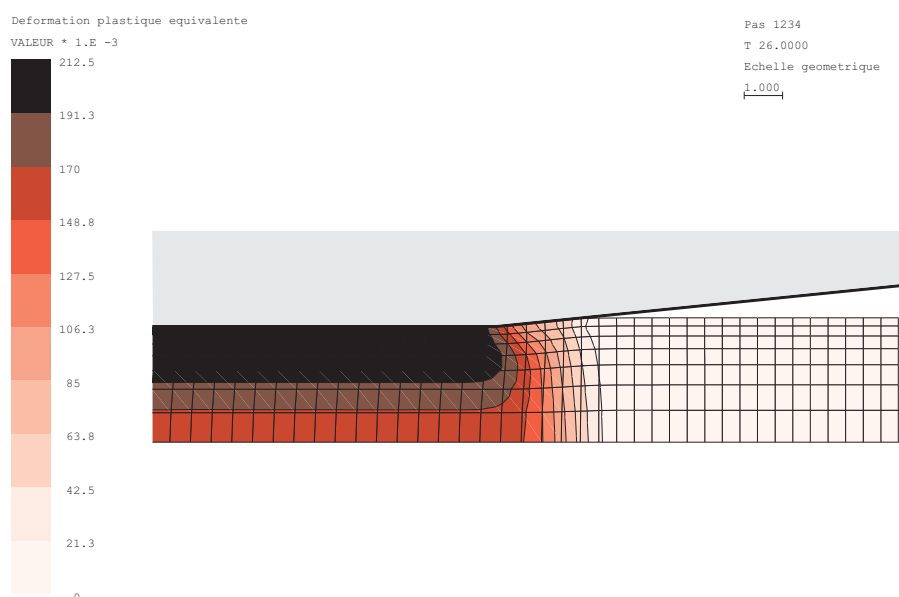


FIG. 5.2: Solution lagrangienne

On obtient une valeur maximale de 0.21 pour la déformation plastique équivalente. D'autres grandeurs sont reprises dans le tableau 5.2.

On constate que le domaine matériel dans les cas eulérien et lagrangien ne sont pas exactement les mêmes. En effet, en regardant précisément la déformée lagrangienne, on ne retrouve pas les angles vifs de la filière. Le modèle eulérien est donc moins réaliste que le modèle lagrangien parce que la frontière du premier ne coïncide pas exactement avec la

frontière physique de la matière. Ceci expliquera partiellement les différences entre les deux formulations.

### 5.2.2.2 Calcul eulérien

Passons maintenant au calcul eulérien proposé par Huetink. Nous utiliserons ce problème pour comparer les solutions obtenues par l'algorithme mixte EF/VF (désigné par Godunov ou VF) sur les figures et l'algorithme basé sur la méthode SUPG.

Le paramètre libre de ces deux algorithmes, le coefficient de décentrage  $\alpha$ , est choisi en fonction des résultats obtenus dans l'étude théorique des schémas : On utilise la valeur du paramètre qui maximise le nombre de Courant. On choisira donc  $\alpha = 1$  pour l'algorithme mixte et  $\alpha = 0.5$  pour l'algorithme SUPG (explicite).

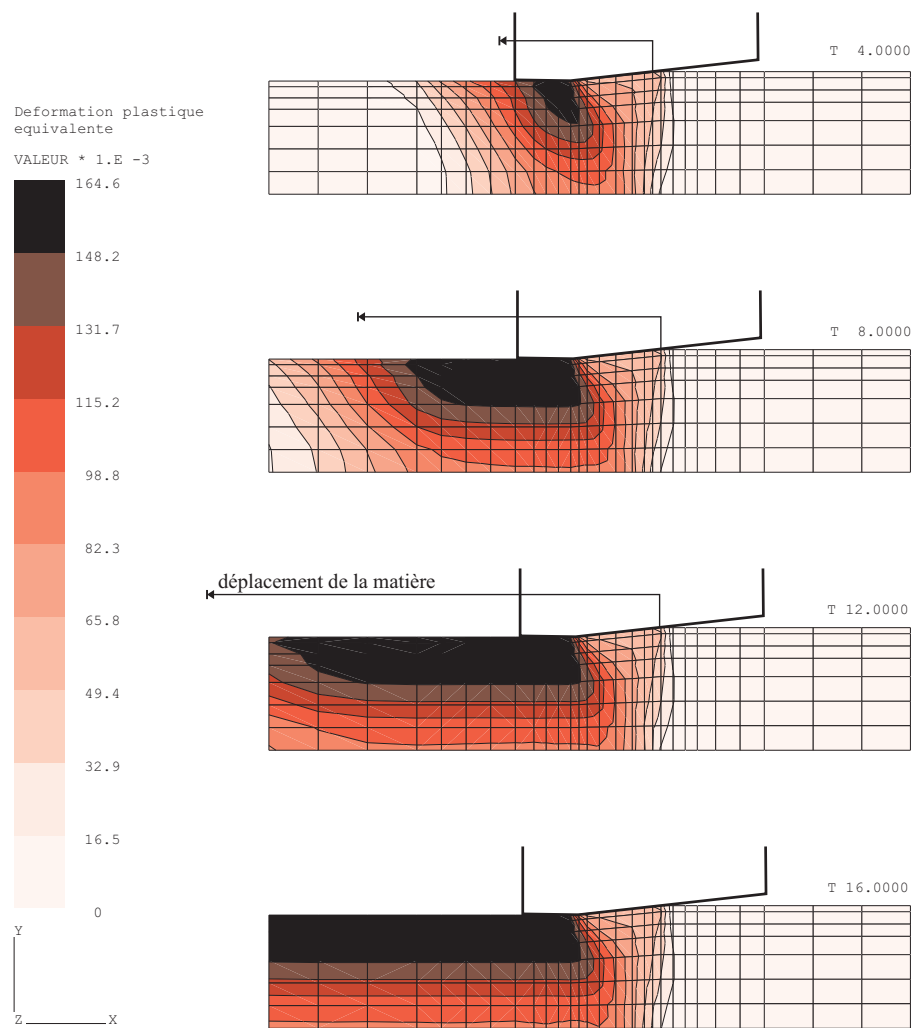
Dans le cas du maillage présenté pour ce problème, il existe de très petites mailles près de l'entrée et de la sortie du rétrécissement de la filière. Un calcul rapide montre que le plus petit élément fini mesure environ 0.2 mm. En conséquence, le plus petit volume fini mesure environ 0.1 mm. Il n'est donc pas souhaitable de dépasser cette valeur de déplacement sur un pas de temps. Cependant, la présence d'éléments plus grands dans le maillage a tendance à stabiliser le calcul et des pas de temps qui conduisent à un déplacement légèrement plus grand que 0.1 n'entraînent pas toujours des instabilités numériques.

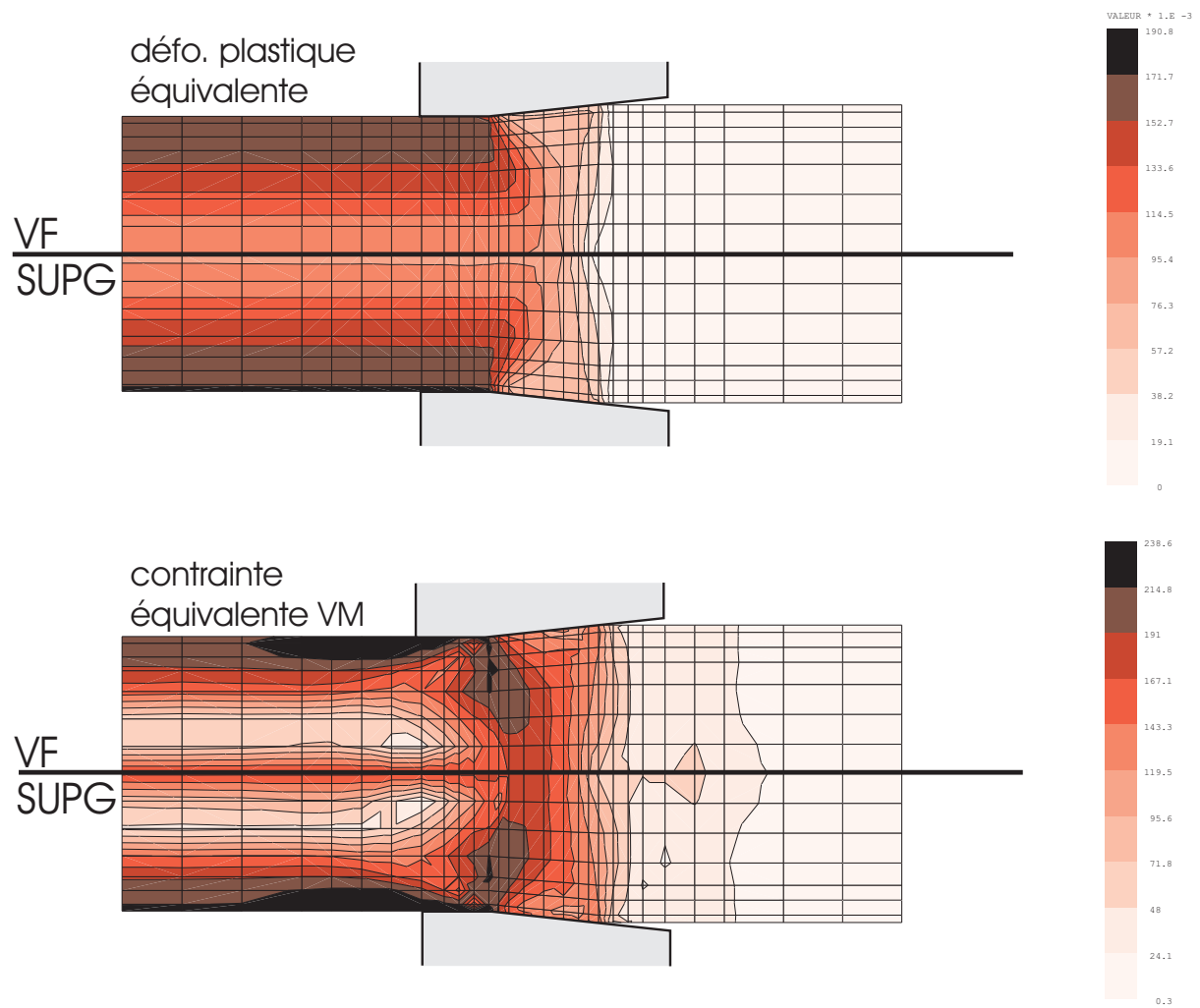
Nous utiliserons un pas de temps de 0.1 s, c'est-à-dire, un pas de temps très proche de la limite de stabilité des deux algorithmes pour les valeurs de  $\alpha$  mentionnées.

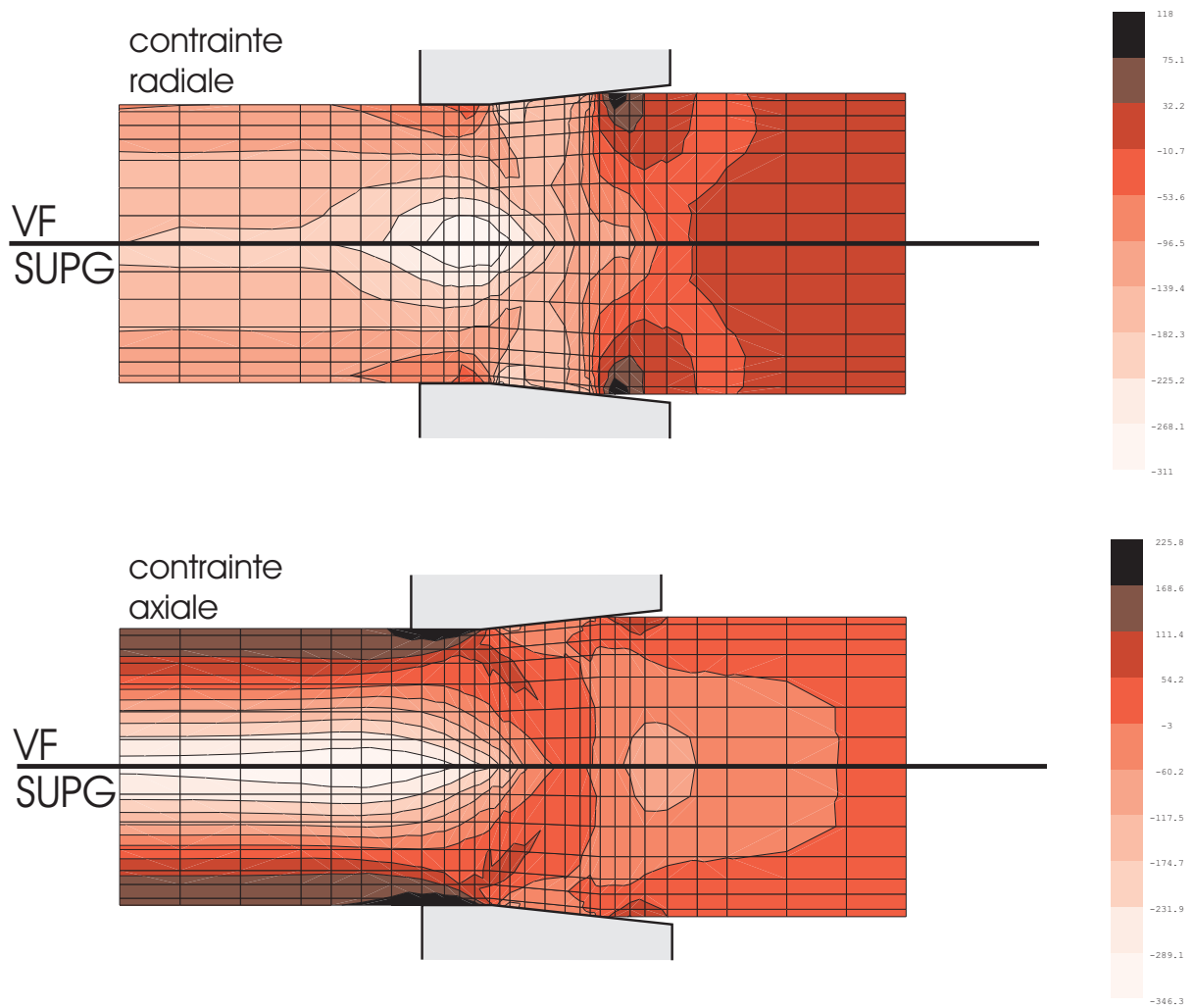
La figure 5.3 montre l'évolution de la période transitoire au début du calcul et l'établissement de la solution stationnaire. On représente la déformation plastique équivalente obtenue à l'aide de l'algorithme mixte EF/VF. Sur chaque dessin, une flèche représente le parcours de la matière à partir de l'entrée du rétrécissement.

Une figure similaire est représentée dans le travail de Huetink. Ce dernier utilise des incréments temporels de 0.03 et arrête le calcul après un déplacement de 10 mm (la matière initiale n'est pas encore complètement sortie du maillage). Cependant, il obtient des résultats très proche de notre calcul lagrangien si on néglige le fait que ses isovaleurs ne sont pas parfaitement parallèles à la sortie de la filière. Dans notre cas, les déformations plastiques équivalentes sont bien plus faibles (0.164 au lieu de 0.21).

Comparons maintenant les deux algorithmes étudiés dans ce travail. La figure 5.4 montre la déformation plastique équivalente et la contrainte équivalente de Von Mises (dénommée  $J_2$ ) lorsque l'état stationnaire est atteint. De la même manière, la figure 5.5 montre la contrainte radiale et la contrainte axiale. Sur chaque dessin, la partie supérieure est relative à l'algorithme mixte EF/VF et la partie inférieure à la méthode SUPG. Les résultats de la pression et de la contrainte circonférentielle  $\sigma_\theta$  pourrait n'ont pas été montrés ici parce qu'ils ne figurent pas dans le travail de Huetink.

FIG. 5.3: Déformation plastique équivalente - Godunov ( $\alpha = 1$ )

FIG. 5.4: Comparaison Godunov ( $\alpha = 1$ ) et SUPG ( $\alpha = 0.5$ )

FIG. 5.5: Comparaison Godunov ( $\alpha = 1$ ) et SUPG ( $\alpha = 0.5$ )



On constate, en général, une très grande similitude entre les résultats obtenus avec la méthode mixte et la méthode SUPG. Les isovaleurs sont en coïncidence (mis à part, peut-être, dans le cas de la contrainte axiale où on observe un léger décalage).

Pour chaque dessin, nous avons évidemment utilisé la même échelle pour la partie inférieure et supérieure ; ce qui explique la différence entre la valeur maximale de la déformation plastique équivalente de la figure 5.4 (0.19) et celle de la figure 5.3 (0.16). En effet, pour les résultats de la méthode SUPG, on observe une fine couche de matière avec une déformation de 0.19 près de la frontière en contact avec la filière.

Remarquons qu'il n'y a pas de diffusion transverse dans les solutions obtenues : les isovaleurs sont parallèles dans le domaine de sortie de la filière. Cette observation est valable non seulement pour l'algorithme SUPG mais aussi pour l'algorithme mixte. Ceci est tout à fait logique puisque l'algorithme mixte n'induit pas de diffusion transverse lorsque l'écoulement se fait parallèlement à une direction principale du maillage.

	Godunov	SUPG	Huetink	Lagrangien
$\varepsilon^p$	$164 \cdot 10^{-3}$	$190.8 \cdot 10^{-3}$	$0.20 < \varepsilon^p < 0.21$	$215 \cdot 10^{-3}$
$J_2$ [MPa]	223.6	238.6	$220 < J_2 < 240$	250
$\sigma_r^M$ [MPa]	113.3	118.0	$0 < \sigma_r^M < 30$	3.6
$\sigma_r^m$ [MPa]	-301.5	-311.0	$-270 < \sigma_r^m < -240$	-290.0
$\sigma_z^M$ [MPa]	213.0	228.8	$160 < \sigma_z^M < 200$	215.0
$\sigma_z^m$ [MPa]	-346.3	-328.2	$-240 < \sigma_z^m < -200$	-322.0
CPU [min]	2'14	4'32	?	?

TAB. 5.2: Comparaison des grandeurs max. (M) et min. (m) et du temps CPU

Nous avons rassemblé les valeurs maximales obtenues pour chaque cas dans le tableau 5.2. Dans ce tableau, nous avons aussi donné les temps de calcul pour les deux méthodes de convection.

On constate que les valeurs obtenues pour les deux méthodes développées dans ce travail sont très proches les unes des autres. Cependant, le temps de calcul de la méthode SUPG est le double de celui de la méthode mixte. Il paraît donc beaucoup plus avantageux de choisir la méthode mixte pour résoudre le problème.

Si on veut comparer ces résultats avec la solution lagrangienne, on constate que les résultats sont fort semblables sauf pour la déformation plastique équivalente et la contrainte radiale maximale. Nous attribuons ces différences à la mauvaise représentation des frontières dans le cas eulérien (nous en avons déjà parlé). En effet, la grande valeur positive obtenue pour la contrainte radiale (113 et 118 au lieu de 3!) peut être expliquée comme suit : nous avons vu que la frontière de la solution lagrangienne ne possède pas d'angle vif. Si on impose à la frontière la présence de cet angle, il faudra tirer radialement sur celle-ci. La contrainte radiale découle de cet effort de traction.

En ce qui concerne la comparaison avec les résultats de Huetink, nous voyons que, mis à part les deux grandeurs précitées, nous sommes en accord avec ceux-ci.

### 5.2.2.3 Convergence des grandeurs aux points de Gauss

Après s'être intéressé à la solution stationnaire, nous allons étudier plus précisément la convergence de la solution vers le régime établi, c'est-à-dire la variation des grandeurs aux points de Gauss lors du régime transitoire.

Pour les figures suivantes, nous nous plaçons dans un des éléments finis situé à l'extrémité du domaine étudié (plus précisément le troisième en partant de l'axe de symétrie et en progressant radialement). Nous nous intéressons aux grandeurs du premier point de Gauss de l'élément (la localisation spatiale de ce point de Gauss n'a aucune conséquence sur les résultats et est tout à fait arbitraire).

Le pas de temps est toujours fixé à 0.1 s, c'est-à-dire des incréments de déplacement très légèrement inférieurs à la taille d'une cellule de volume fini.

Nous décidons de voir l'influence de la méthode de convection utilisée (mixte ou SUPG) et l'influence du paramètre de décentrage  $\alpha$ . Pour ce dernier, nous choisirons les valeurs  $\alpha = 1, 0.5, 0.4$  pour l'algorithme mixte et  $\alpha = 0.5, 0.2$  pour l'algorithme SUPG. Bien que toutes ces valeurs ne garantissent pas la stabilité des deux méthodes pour le plus petit élément du maillage, nous constatons que la solution stationnaire est tout de même atteinte. Des valeurs inférieures aux valeurs choisies ( $\alpha < 0.4$  pour Godunov et  $\alpha < 0.2$  pour SUPG) provoquent des instabilités et la solution ne peut plus être trouvée avec le pas de temps fixé.

Les figures 5.6, 5.7 et 5.8 montrent respectivement la déformation plastique équivalente, la contrainte radiale et la pression au point Gauss considéré et au cours du temps.

Chaque figure est divisée en deux graphes : celui de gauche montre la totalité des courbes tandis que celui de droite montre un zoom pour distinguer les différences entre celles-ci. Chaque courbe est représentée un calcul où l'avancement total de matière vaut 100 mm, c'est-à-dire environ dix fois plus que la longueur de convection étudiée par Huetink. Ceci montre que les algorithmes sont stables et que, généralement, la solution stationnaire est obtenue après 20 à 30 mm de convection.

On constate aussi que la solution obtenue dépend du paramètre  $\alpha$  choisi a priori. En effet, plus la valeur du paramètre est importante, moins la valeur absolue de la grandeur transportée est grande. Cette observation est valable pour les deux algorithmes.

Cependant, les différences ne sont jamais très grandes. La plus remarquable peut être observée pour la déformation plastique équivalente (figure 5.6) où on peut observer jusqu'à 5 pourcents d'écart pour les solutions données par les deux méthodes.

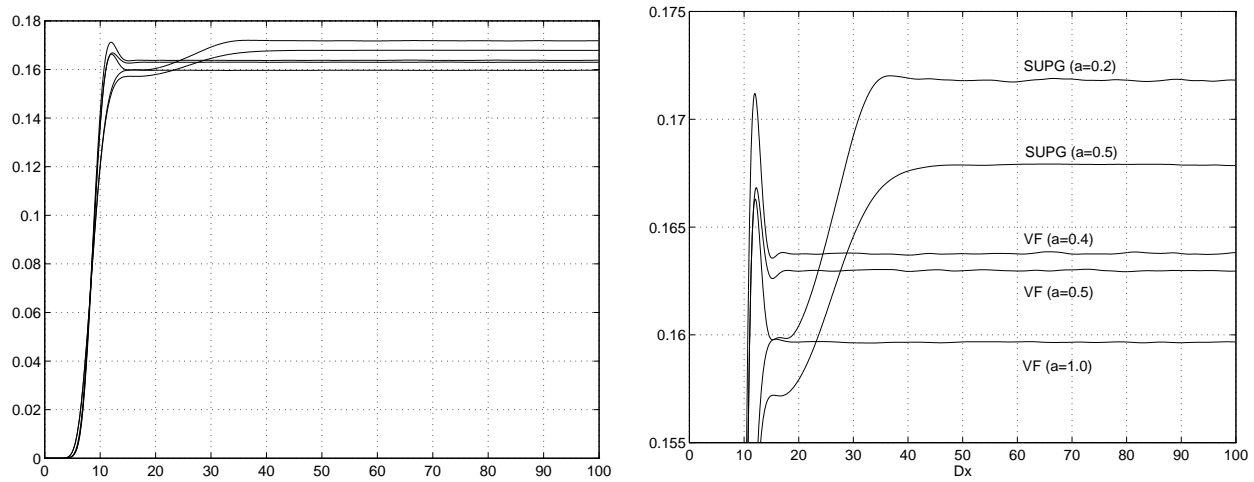


FIG. 5.6: Déformation plastique équivalente - convergence vers la solution stationnaire et détail.

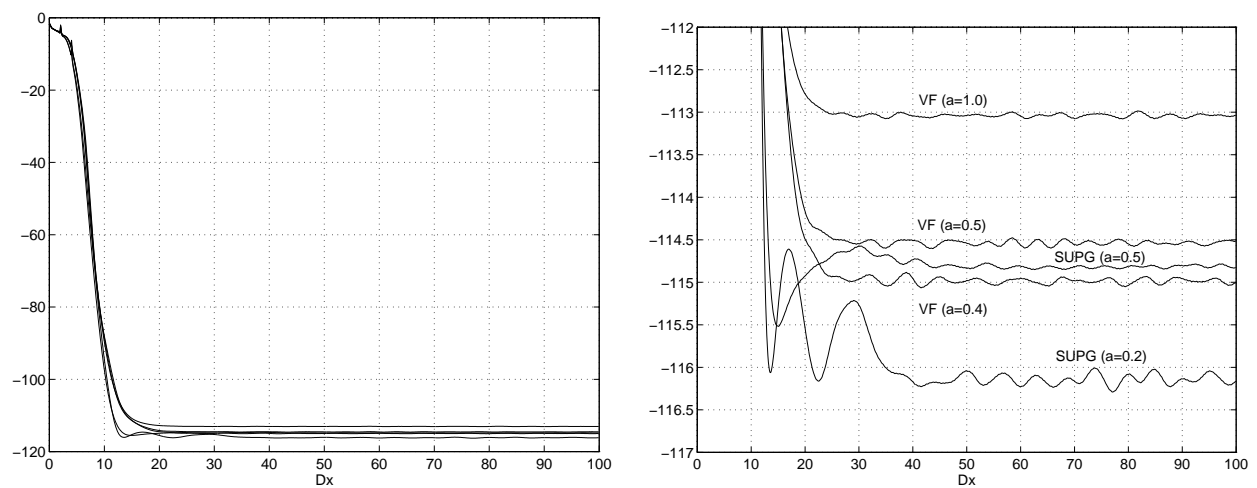


FIG. 5.7: Contrainte radiale - convergence vers la solution stationnaire et détail.

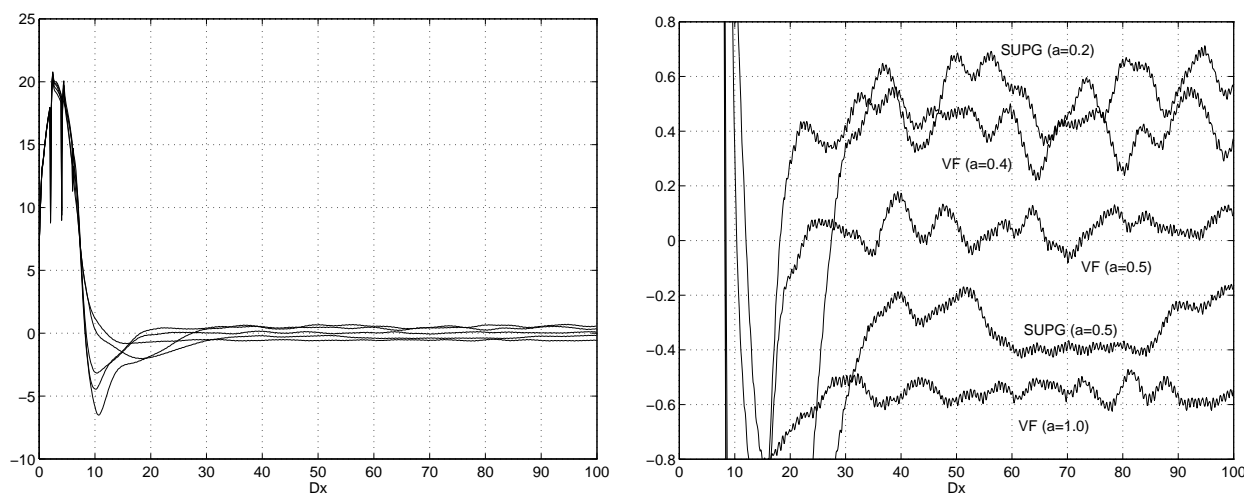
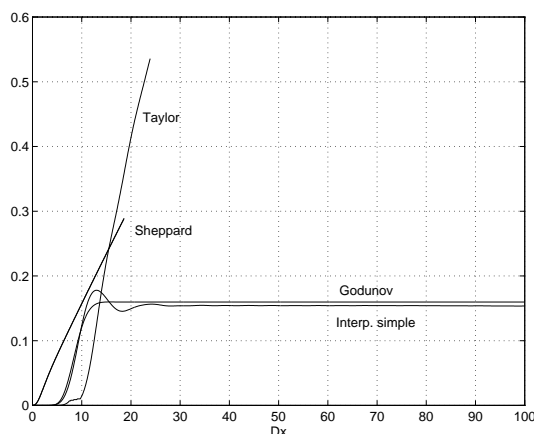


FIG. 5.8: Pression - convergence vers la solution stationnaire et détail.

Nous terminons cette étude du problème de la filière en montrant le comportement des algorithmes qui existaient dans METAFOR avant ce travail. Nous avons testé sur ce problème les 3 méthodes suivantes : l'interpolation nodale simple, l'interpolation de Shepard et le développement de Taylor.

FIG. 5.9: Comparaison Godunov ( $\alpha = 1$ ) et les anciens schémas de convection de METAFOR

Les résultats sont mis en parallèle avec ceux obtenus par l'algorithme mixte EF/VF sur la figure 5.9. La méthode d'interpolation nodale converge vers une valeur légèrement inférieure à celle de la méthode mixte. Cependant, si le problème semble résolu avec cette méthode, un rapide coup d'oeil sur la solution après un nombre plus important de pas de temps montre qu'il n'en est rien (voir figure 5.10) : la déformation plastique équivalente se stabilise mais, tout d'un coup, grandit jusqu'à ce que le calcul ne puisse plus être continué.

La contrainte radiale, présentée à droite du graphique précédent se stabilise à une valeur différente de celle obtenue par les deux nouvelles méthodes de convection. Après un certain temps, le contrainte subit une oscillation avant de plonger vers des valeurs très négatives.

En fait, les déformations plastiques localisées sur l'axe de symétrie commencent à grandir et à se propager dans toute la structure, ce qui n'a rien de physique. Nous montrerons, pour le problème de l'écrasement du lopin, que cette convergence locale de la déformation plastique vers une valeur correcte pendant un assez grand laps de temps (environ 2500 pas de temps) est assez surprenante puisque la méthode de l'interpolation nodale donne généralement de mauvais résultats si le nombre de pas de temps est élevé.

Quant aux deux autres méthodes, la figure 5.9 prouvent bien qu'elles ne sont pas capables de traiter ce genre de problème.

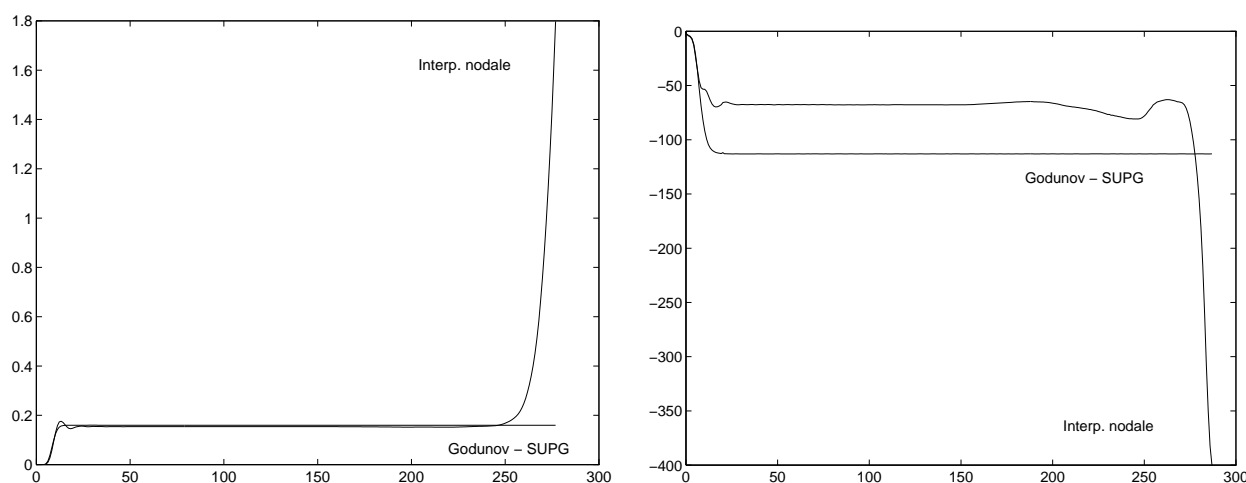


FIG. 5.10: Explosion de la solution par interpolation nodale ( $\varepsilon^p$  à gauche et  $\sigma_r$  à droite).

## 5.3 Ecrasement d'un lopin

### 5.3.1 Description du problème

Nous nous attardons ici sur un problème classique du formalisme ALE [3, 28, 29, 32, 45, 50, 65]. Il s'agit de l'écrasement d'un lopin de matière par un poinçon.

Deux problèmes découlent de ce processus de formage. Pour le premier, on utilise un lopin et un poinçon cylindrique (le problème est donc axisymétrique). La matière repose initialement sur un sol rigide. Il n'y a donc pas de symétrie selon l'axe perpendiculaire à la direction d'écrasement.

Le deuxième problème est traité en état plan de déformation [45, 51]. Il s'agit donc d'une pièce métallique rectangulaire écrasée symétriquement par deux poinçons rectangulaires.

Les effets dynamiques peuvent être pris en compte et, dans ce cas, il est très intéressant de voir les déformées pour différentes vitesses de déformation.

Module de Young	$E$	=	200	GPa
Coefficient de poisson	$\nu$	=	0.3	
Limite d'élasticité	$\sigma_Y^0$	=	250	MPa
Module tangent	$E_t$	=	1	GPa
Masse volumique	$\rho$	=	8930	kg/m <sup>3</sup>

TAB. 5.3: Propriétés matérielles pour l'écrasement du lopin.

Le maillage utilisé est représenté sur la figure 5.11 et les caractéristiques du matériau sont reprises dans le tableau 5.3. On utilise une loi d'écrouissage linéaire isotrope. Le maillage et les caractéristiques du problème correspondent à ceux présenté par Huerta [28].

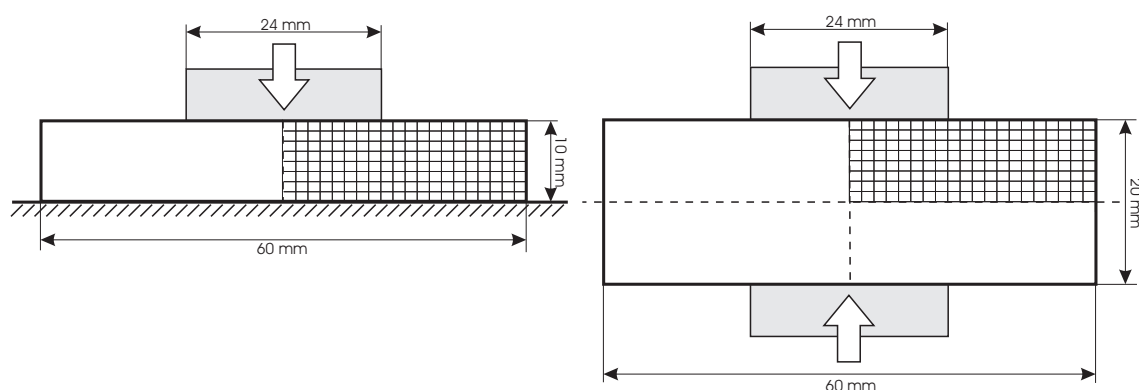


FIG. 5.11: Géométrie et maillage des deux problèmes d'écrasement d'un lopin.

Le contact avec le poinçon est collant dans les deux cas (contrairement aux calculs

effectués par Ponthot). Le contact avec le sol rigide est partiellement collant (seuls les noeuds en contact avec le sol, sous le poinçon, sont collants).

La stratégie de remaillage est bien plus complexe que celle utilisée pour le problème de la filière (dans ce cas le nouveau maillage était simplement le maillage initial).

Les frontières extérieures du maillage sont toutes eulériennes-lagrangiennes (elles suivent les frontières de la matière mais elles sont continuellement rediscrétisées). On définit un domaine eulérien juste en dessous du poinçon pour garder un nombre constant d'élément en dessus de lui. Le reste de la matière définit un deuxième domaine traité par le formalisme eulérien lagrangien.

Pour éviter les mailles écrasées lorsque le gonflement du lopin est très important (lorsque les effets d'inertie sont importants), certains noeuds – dont ceux de la ligne maîtresse commune aux deux domaines – sont déplacés manuellement (selon une loi définie a priori). Le domaine sous le poinçon perd alors son caractère eulérien pour devenir eulérien-lagrangien. Le reste du maillage est reconstruit via la méthode d'interpolation transfinie.

Dans la suite, le test en état plan de déformation sera appelé 'test symétrique' et l'autre sera appelé 'test non symétrique'. Un écrasement de 60 pourcents est effectué pour chaque problème. Pour le test symétrique, nous ne discrétisons que le quart du domaine. De même, nous ne discrétisons que la moitié du test non symétrique.

Nous voulons mettre en évidence les effets de l'inertie sur la déformée finale. Pour ce faire, nous calculerons le problème pour des vitesses d'écrasement de 3, 6 et 100 m/s. Ce qui correspond respectivement à un temps d'écrasement de 2, 0.1 et 0.06 s. Ces solutions seront comparées à la solution quasistatique. Contrairement à Huerta, nous n'avons pas réussi à obtenir la solution pour 300 m/s. La cause la plus probable est une instabilité du mailleur linéique pour la rediscrétisation de la surface libre du lopin.

*mettre un dessin*

Nous comparerons les résultats des deux méthodes présentées dans ce travail. Enfin, nous verrons l'influence du choix du schéma d'intégration pour la phase lagrangienne (implicite ou explicite).

## 5.3.2 Résultats

### 5.3.2.1 Test symétrique

Les figures 5.12 et 5.13 montrent les résultats obtenus pour le test symétrique. La première figure est relative à l'algorithme mixte et la seconde à la méthode SUPG. Comme dans le cas de la filière, nous utilisons les paramètres  $\alpha = 1$  pour l'algorithme mixte et  $\alpha = 0.5$  pour SUPG. Cela nous garantit une plus grande stabilité. Il serait cependant intéressant d'effectuer les mêmes calculs en faisant varier la taille du pas de temps et la valeur du paramètre de décentrage. Nous avons essayé de faire varier  $\alpha$  mais nous n'avons

pas vu de différences entre les solutions obtenues (sauf lorsque la solution explosait suite à un choix de  $\alpha$  en dehors de la limite de stabilité du schéma).

Du point de vue des déformées, on constate qu'il n'y a pas de différence apparente entre les deux séries de solutions. Les formes obtenues sont très semblables à celles publiées dans la littérature.

On remarque que la solution quasistatique est identique à celle obtenue par un calcul dynamique avec une vitesse d'écrasement de 3 m/s.

D'un point de vue physique, on observe que, plus la vitesse d'écrasement est petite, plus la matière a tendance à s'écarter de l'axe de symétrie. Le lopin déformé est donc d'autant plus long que la vitesse est faible.

Pour ce qui est des valeurs numériques, nous avons choisi de représenter la limite élastique du matériau. Cependant, l'existence d'une forte concentration de contraintes en dessous du coin du poinçon entraîne une mauvaise perception de l'état de contrainte dans le reste de la pièce (la valeur extrême est trop importante et toutes les isovaleurs sont concentrées en ce point). Nous avons donc limité la valeur maximale à 1550 MPa (même valeur que Huerta) pour confirmer que nous obtenons les mêmes résultats que dans la littérature. La zone dans laquelle on peut trouver des contraintes supérieures à cette valeur est remplie par une couleur n'apparaissant pas dans l'échelle des valeurs.

### 5.3.2.2 Test non symétrique

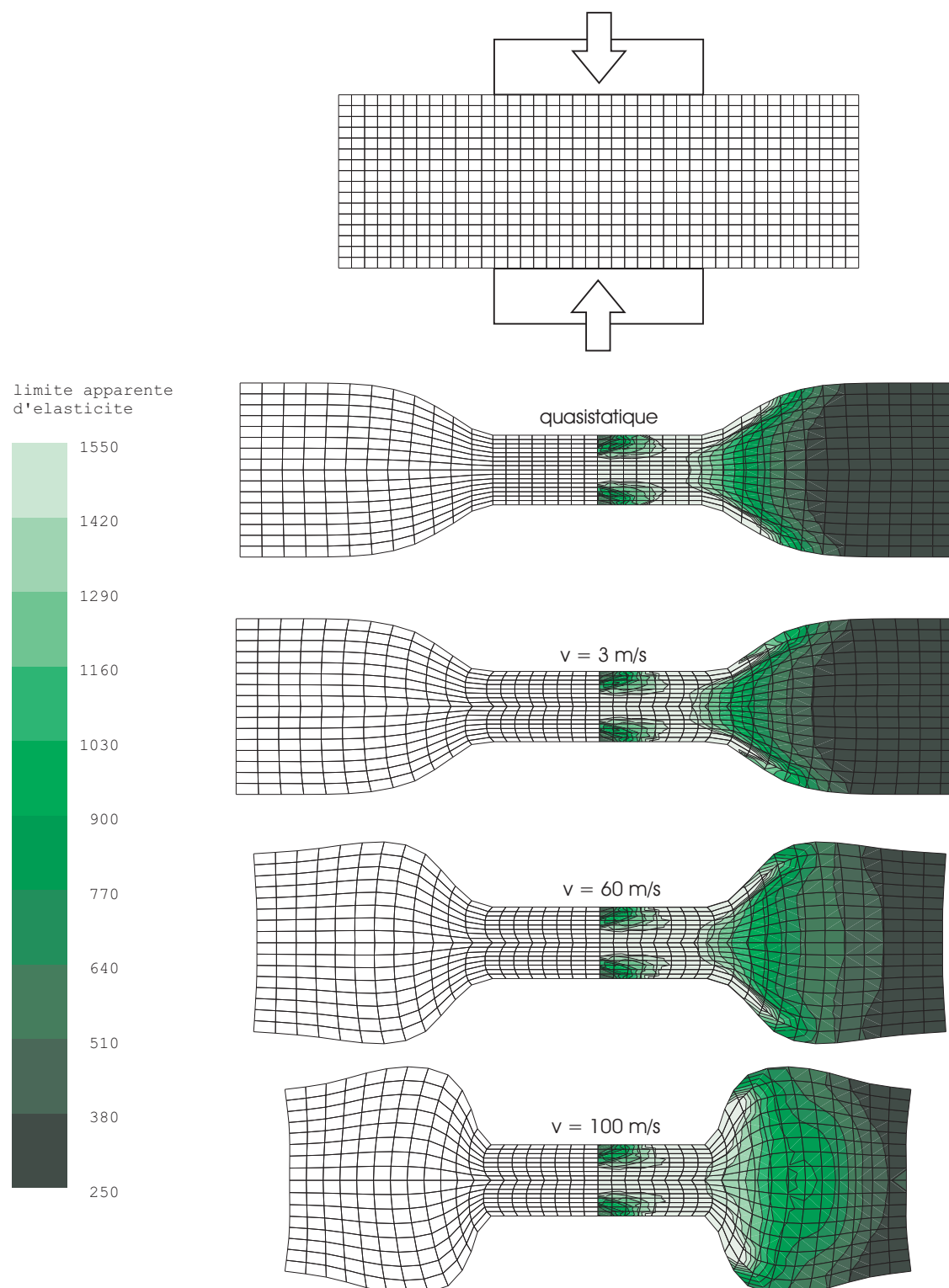
Nous avons effectué les mêmes calcul pour le test non symétrique et les résultats sont toujours en accord avec ceux de Huerta tant au niveau de la déformée que des isovaleurs de contraintes équivalente de Von-Mises. Les résultats sont représentés sur les figures 5.14 et 5.15. Remarquons cependant que nous avons dû également limiter la valeur de la contrainte maximale. Dans le cas non-symétrique, il existe deux concentrations de contraintes : la première est située au même endroit que dans le cas symétrique et l'autre provient de la condition de frottement non uniforme sur le sol rigide. Cette dernière est située sur le sol, à l'opposé de la première.

Les conditions de frottement sur le sol et sur le poinçon sont les mêmes. Il en résulte des isovaleurs de contraintes sous le poinçon plus ou moins symétriques par rapport à la mi-hauteur du lopin écrasé.

Les effets d'inertie sont bien modélisés ici aussi : à faible vitesse, les extrémités du lopin se soulèvent, repoussées par le contact sur le sol ; par contre, à grande vitesse, ce mouvement est empêché par les forces d'inertie et le lopin a tendance à gonfler (l'amplitude du mouvement est plus faible).

Pour montrer un autre aspect des résultats, la figure 5.16 représente les vecteurs vitesses dans le cas quasistatique et dynamique à grande vitesse (100 m/s) pour le test non



FIG. 5.12: Ecrasement d'un lopin (test symétrique) – Godunov ( $\alpha = 1.0$ ).

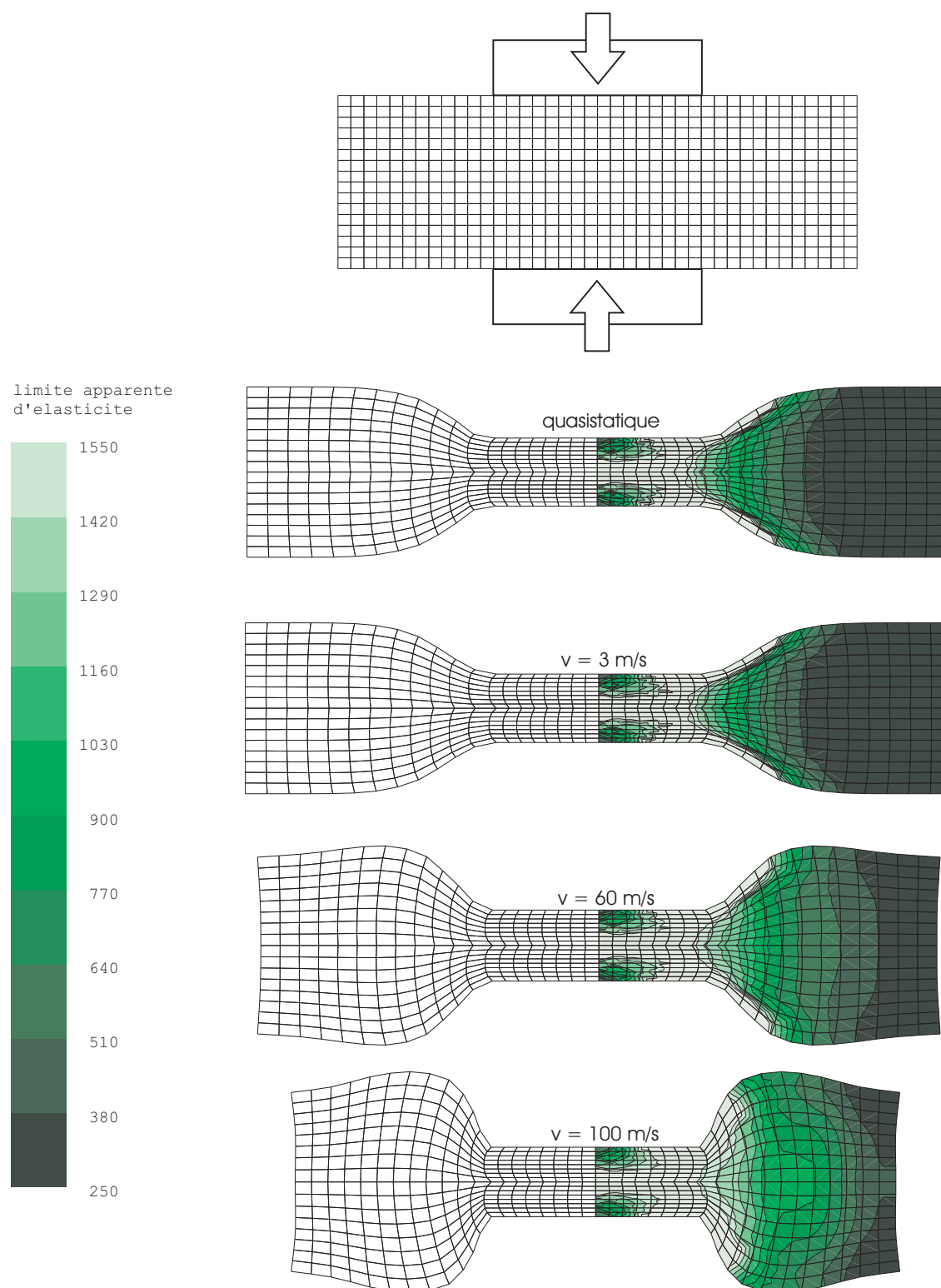
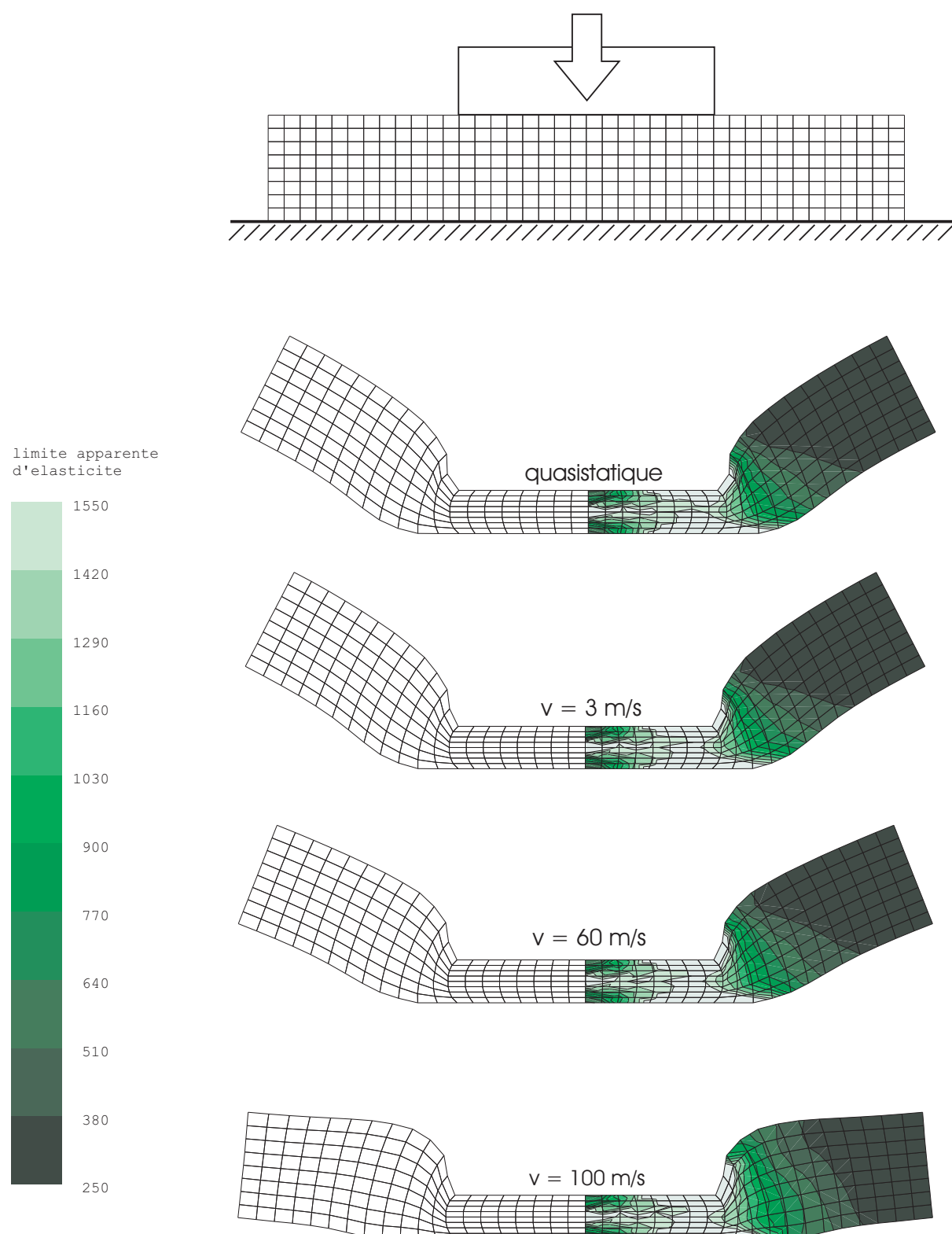


FIG. 5.13: Ecrasement d'un lopin (test symétrique) – SUPG ( $\alpha = 0.5$ ).

FIG. 5.14: Ecrasement d'un lopin (test non symétrique) – Godunov ( $\alpha = 1.0$ )

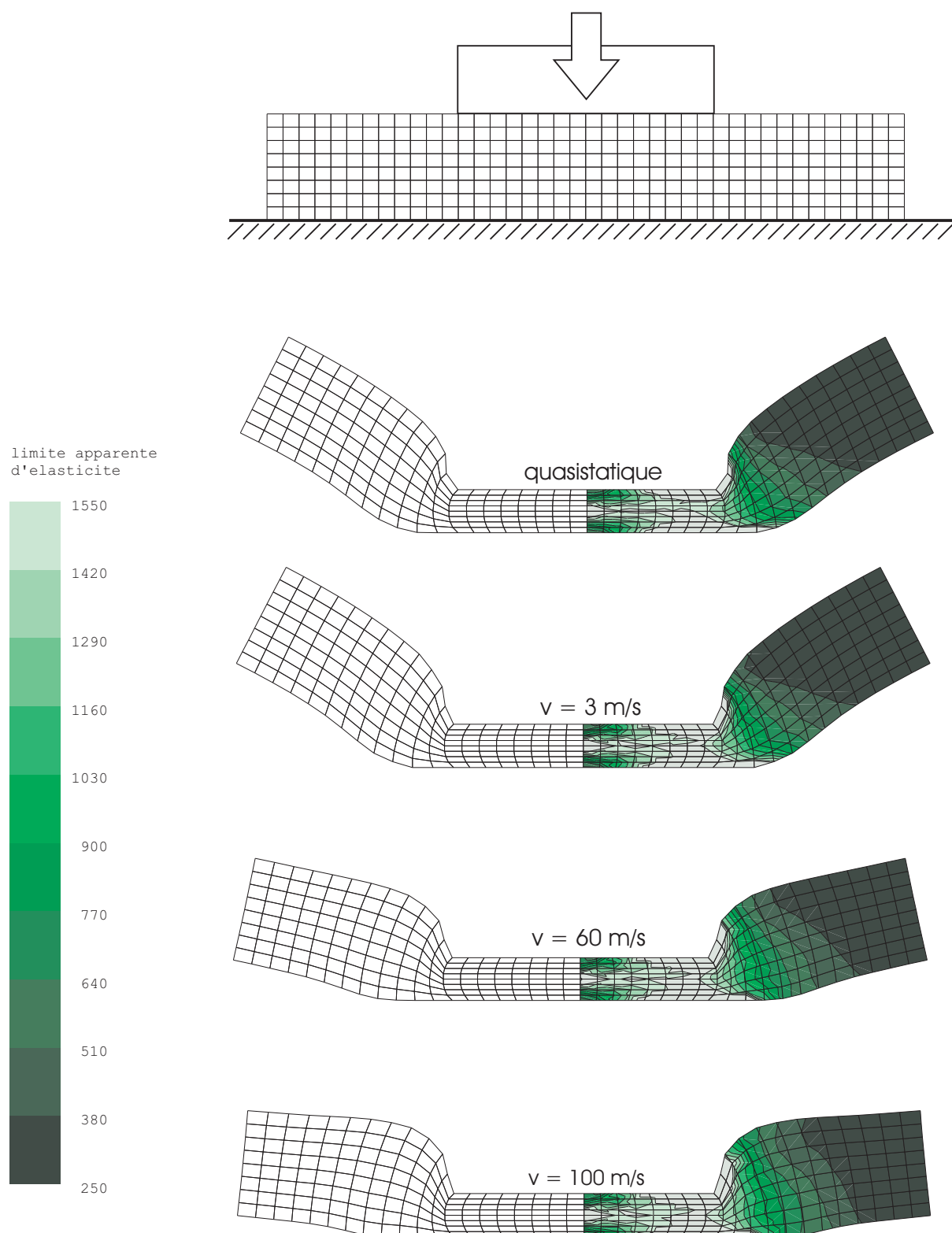


FIG. 5.15: Ecrasement d'un lopin (test non symétrique) – SUPG ( $\alpha = 0.5$ )

symétrique. On observe bien la différence de comportement due aux effets d'inertie.

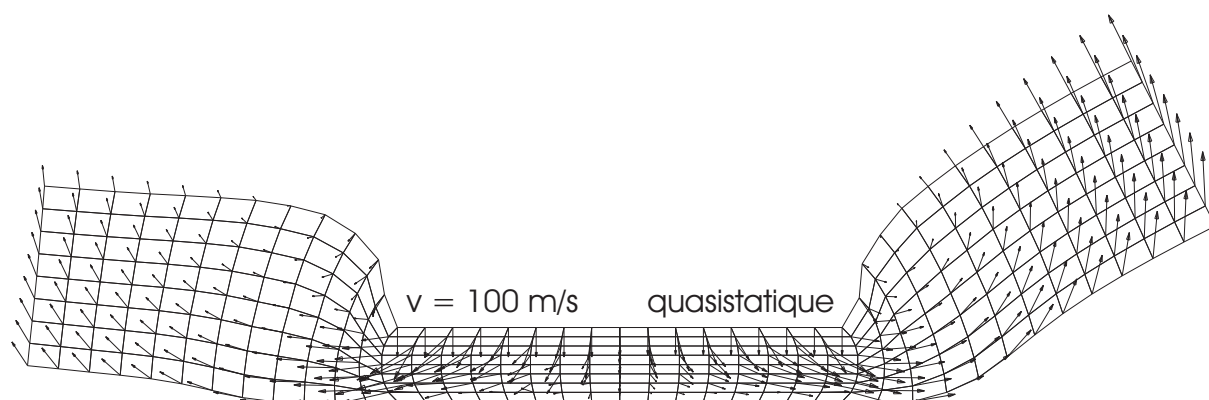


FIG. 5.16: Comparaison des vitesses – Godunov ( $\alpha = 1.0$ )

### 5.3.2.3 Comparaison implicite–explicite

Si le problème de l'écrasement du lopin est classique, il est rarement résolu d'une manière implicite. Nous parlons ici de l'intégration des équations du mouvement dans la phase lagrangienne du problème ALE. En effet, les problèmes dynamiques sont généralement résolus de manière explicite. Nous allons montrer dans cette section qu'il est préférable de travailler avec un algorithme implicite pour gagner du temps de calcul.

L'algorithme implicite que nous utilisons ici est celui de Newmark. Comme la plupart des algorithmes implicites, il est inconditionnellement stable mais requiert l'inversion d'un système d'équations. Cette résolution peut devenir pénalisant dans le cas de gros problèmes 3D.

*Essayer HHT ou CH*

Le gros problème des algorithmes explicites est leur stabilité conditionnelle. Dans le cas qui nous occupe, on peut calculer un pas de temps maximum (nous ne l'avons pas fait parce que METAFOR le fait automatiquement). Ce pas de temps limite est indépendant de la vitesse de déformation. En effet, il est égal au temps nécessaire pour qu'une onde de pression parcoure le plus petit élément du maillage. Il faudra donc d'autant plus de pas de temps que la vitesse d'écrasement est faible (le pas de temps est constant mais le temps de simulation est plus élevé). C'est ce qu'on observe dans METAFOR.

Le tableau 5.4 donne le nombre de pas de temps réalisés par METAFOR pour les différentes simulations présentées dans ce travail. Pour chacune d'entre elles, on peut facilement comparer la méthode d'intégration temporelle. On constate que l'algorithme implicite nécessite toujours beaucoup moins de pas de temps.

Notons que la conclusion serait certainement différente s'il s'agissait d'un problème 3D pour lequel la matrice du système à inverser possède une grande largeur de bande.

Le tableau 5.5 donne les temps de calcul nécessaire pour les mêmes simulations. On voit que, dans le cas qui nous intéresse, utiliser un algorithme implicite pour la phase lagrangienne est plus intéressant que son homologue explicite. Cette conclusion est valable même pour une vitesse d'écrasement de 100 m/s.

Il est intéressant de comparer de nouveau les temps de calcul pour les deux méthodes de convection : on remarque que la méthode mixte est bien la plus rapide. Par contre, on voit que les nombres de pas de temps et d'itérations sont semblables. Il est donc recommandé d'utiliser la méthode mixte EF/VF pour ce problème.

Remarquons enfin l'intérêt du calcul quasi-statique. Rappelons qu'on obtient les mêmes solutions pour le calcul quasi-statique et le calcul dynamique avec  $v = 3m/s$ . Cependant, les temps de calculs sont complètement différents (quelques secondes contre quelques minutes dans le meilleur des cas).

Pas lagrangien	VF explicite	VF implicite	SUPG explicite	SUPG implicite
$v = 100m/s$	800	106/338	911	106/335
$v = 60m/s$	985	157/480	995	159/492
$v = 3m/s$	17259	2337/7017	17259	3176/8098
Quasistatique	/	50/120	/	47/116

TAB. 5.4: Nombre de pas / Itérations pour l'écrasement symétrique.

	VF explicite	VF implicite	SUPG explicite	SUPG implicite
$v = 100m/s$	21 s	11 s	2 min 47 s	28 s
$v = 60m/s$	27 s	16 s	3 min 09 s	42 s
$v = 3m/s$	7 min 44 s	3 min 45 s	53 min 55 s	13 min 01 s
Quasistatique	/	4 s	/	11 s

TAB. 5.5: Temps CPU pour l'écrasement symétrique.

Les tableaux 5.6 et 5.7 donnent les mêmes résultats pour le test non symétrique. Les remarques faites précédemment pour le cas symétrique restent valables. On remarque cependant que les pas de temps doivent être généralement plus petits dans le cas non symétrique pour arriver au bout du calcul. Ceci est dû en partie au traitement du contact du lopin sur le sol par la méthode de la pénalité. Réduire la pénalité diminue le nombre de pas de temps mais augmente la pénétration de la matière dans la matrice de contact.

#### 5.3.2.4 Comparaison avec l'ancienne méthode de transfert

Nous envisageons le problème traité par Ponthot [45] avec METAFOR. Il s'agit du test symétrique ; cependant les dimensions et le matériau utilisé sont légèrement différents.

Pas lagrangien	VF explicite	VF implicite	SUPG explicite	SUPG implicite
$v = 100m/s$	1022	135/446	1055	137/448
$v = 60m/s$	1398	215/738	1408	243/798
$v = 3m/s$	27256	9379/31755	27330	7879/27366
Quasistatique	/	28/74	/	26/73

TAB. 5.6: Nombre de pas / Itérations pour l'écrasement non symétrique.

	VF explicite	VF implicite	SUPG explicite	SUPG implicite
$v = 100m/s$	1 min 16 s	19 s	3 min 14 s	35 s
$v = 60m/s$	1 min 44 s	31 s	4 min 19 s	1 min 01 s
$v = 3m/s$	33 min 49 s	21 min 59 s	1 h 23 min 16 s	33 min 04 s
Quasistatique	/	4 s	/	7 s

TAB. 5.7: Temps CPU pour l'écrasement non symétrique.

Nous nous intéressons plus particulièrement à l'algorithme mis en oeuvre pour assurer la convection des données : il s'agit de la méthode d'interpolation nodale simple.

La figure 5.17 montre bien, sur ce problème, la défaillance de cette méthode, anciennement utilisée dans METAFOR : tant que le nombre de pas de temps reste petit, on obtient une solution proche de celle obtenue par l'algorithme mixte EF/VF (ou SUPG). Par contre, lorsque le nombre de pas de temps augmente, l'ancienne méthode donne de mauvais résultats alors que le nouvel algorithme fournit toujours la même solution.

En ce qui concerne la force exercée par le poinçon au cours du temps, nous obtenons la même courbe que Ponthot quel que soit le nombre de remaillages effectués lors du calcul.

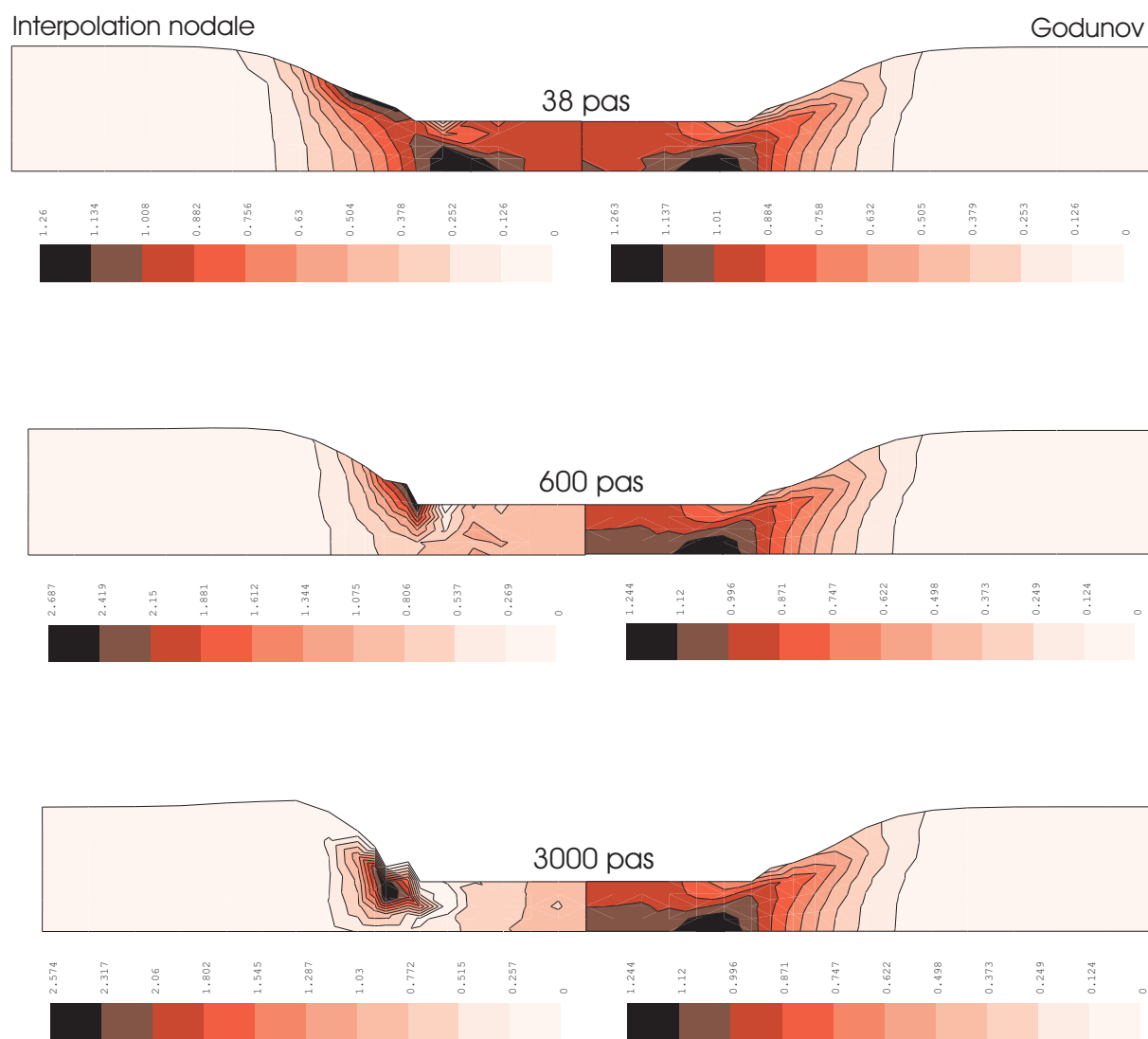


FIG. 5.17: Comparaison de l'ancienne méthode et de Godunov.



## 5.4 Impact de la barre de Taylor

### 5.4.1 Description du problème

Le problème de la barre de Taylor (ou l'impact d'un cylindre sur une paroi rigide) a été publié par de nombreux auteurs [29, 33, 45, 50] parce qu'il permet de montrer l'avantage de la formulation eulérienne-lagrangienne pour des calculs en dynamique rapide.

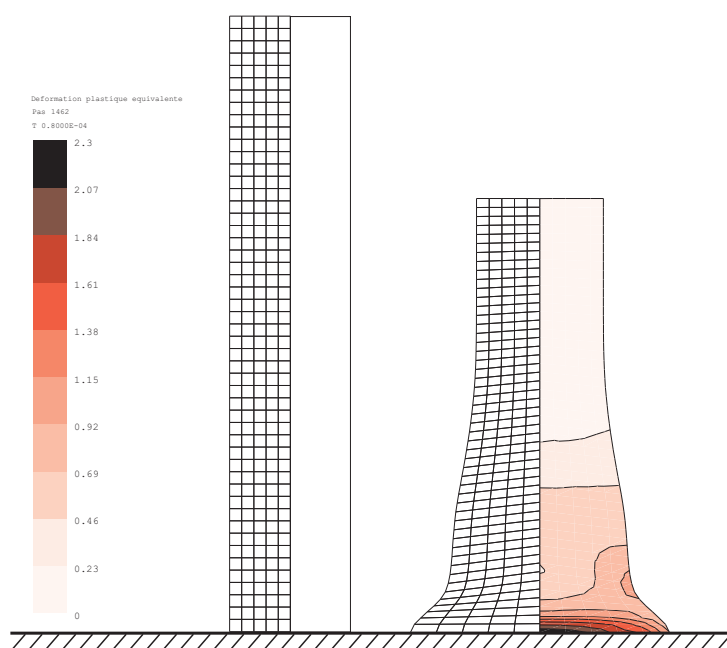


FIG. 5.18: Géométrie, maillage et solution obtenue par Ponthot [45]

En effet, on a l'habitude d'utiliser des schémas d'intégration temporelle explicites pour traiter ce genre de problème. Cependant, ceux-ci sont conditionnellement stables et le pas de temps maximum pour garantir la stabilité est égal au temps nécessaire pour qu'une onde de pression parcoure le plus petit élément. Si les éléments sont écrasés, ce qui arrive régulièrement pour les problèmes d'impact, le pas de temps critique devient très petit. Le formalisme ALE permet de remédier à ce problème en maintenant le maillage régulier. Le pas de temps critique ne devient pas trop petit lors du calcul et, en conséquence, le nombre de pas de temps nécessaires et le temps CPU total diminue considérablement.

Les propriétés matérielles sont reprises dans le tableau 5.8. Il s'agit d'une barre de cuivre. La loi élastoplastique est une loi à écrouissage linéaire isotrope. On considère qu'il n'y a pas de frottement entre la barre et la paroi rigide.

La barre possède un rayon initial de 3.2 mm et une longueur de 32.4 mm. Le maillage utilisé comporte  $5 \times 50$  éléments axisymétriques Q4P0 (pression constante). La période

Module de Young	$E$	=	117	GPa
Coefficient de poisson	$\nu$	=	0.35	
Limite d'élasticité	$\sigma_Y^0$	=	400	MPa
Coefficient d'écrouissage	$h$	=	100	MPa
Masse volumique	$\rho$	=	8930	kg/m <sup>3</sup>

TAB. 5.8: Propriétés matérielles pour l'impact de la barre de Taylor

d'observation est de  $80 \mu s$ . A ce moment, la quasi-totalité de l'énergie cinématique initiale a été dissipée sous forme de travail plastique.

Nous utilisons un schéma d'intégration temporelle explicite.

### 5.4.2 Résultats

Nous ne reprenons pas dans ce travail la comparaison entre les résultats lagrangien et ALE. Une comparaison complète peut être trouvée dans [45].

Dans la suite, nous effectuons le remaillage à chaque pas de temps. Les deux nouveaux algorithmes sont utilisés avec deux valeurs du paramètre  $\alpha$  pour chacun ( $\alpha = 1$  et  $\alpha = 0.2$  pour l'algorithme mixte,  $\alpha = 0.5$  et  $\alpha = 0.1$  pour la méthode SUPG). Les solutions sont comparées aux résultats obtenus par la méthode du développement de Taylor.

Le tableau 5.9 montre différentes grandeurs habituellement comparées pour ce type de problème.

Le nombre de pas de temps effectué est presque le même dans tous les cas (légèrement inférieur à 1500). En effet, celui-ci dépend principalement de la taille des mailles. Ces dernières sont identiques dans tous les cas vu que l'algorithme de remaillage utilisé est le même.

La hauteur finale obtenue par les deux nouveaux algorithmes est légèrement supérieure à celle obtenue par la méthode du développement de Taylor. On constate aussi que la hauteur finale diminue lorsque le paramètre  $\alpha$  augmente. On peut faire la constatation inverse en ce qui concerne les rayons à la base. En conclusion : la barre est d'autant plus déformée (faible hauteur et grand rayon) que le paramètre  $\alpha$  est élevé.

La comparaison des valeurs de la déformation plastique équivalente maximale est donnée pour information parce qu'il n'est pas très rigoureux de tirer des conclusions sur ces résultats. En effet, ces valeurs maximales sont des valeurs extrapolées aux noeuds et ne représentent donc pas la valeur maximale aux points de Gauss. On constate que cette valeur est d'autant plus faible que  $\alpha$  est élevé. Ce qui paraît logique puisque ce paramètre traduit la diffusion artificielle injectée dans le schéma de résolution. La valeur obtenue par la méthode SUPG et  $\alpha = 0.5$  est largement inférieure aux autres. Nous verrons cependant

que les courbes d'isovaleurs sont très similaires dans tous les cas.

Pour les temps de calculs, nous obtenons des valeurs confirmant celles obtenues précédemment : la méthode du développement de Taylor est, de très loin, la plus rapide (8 fois plus rapide que la méthode mixte EF/VF!). Il faut cependant la manipuler avec précaution puisqu'elle est théoriquement inconditionnellement instable. Seuls des problèmes où la convection est très faible peuvent être envisagés.

Remarquons aussi qu'il est possible de résoudre le problème avec les deux nouveaux algorithmes et un  $\alpha$  nul. Dans ce cas, les deux méthodes deviennent instables mais la convection est si faible que le système n'a pas le temps d'exploser.

En ce qui concerne la méthode SUPG, elle est vraiment très lente (20 fois plus lente que la méthode du développement de Taylor). Il faudra donc sérieusement penser à optimiser celle-ci si on veut qu'elle reste compétitive vis-à-vis de la méthode mixte.

	Pas	Hauteur finale [mm]	Rayon final [mm]	$\varepsilon_{max}^p$	CPU [s]
Ponthot ALE	1462	21.86	$R_0 + 3.33$	2.299	21
Godunov ( $\alpha = 1.0$ )	1467	21.93	$R_0 + 3.34$	2.292	170
Godunov ( $\alpha = 0.2$ )	1466	21.95	$R_0 + 3.33$	2.295	170
SUPG ( $\alpha = 0.5$ )	1473	21.92	$R_0 + 3.35$	2.059	427
SUPG( $\alpha = 0.1$ )	1464	21.94	$R_0 + 3.34$	2.240	424

TAB. 5.9: Comparaison des différents algorithmes

Les figures 5.19 et 5.20 donnent des résultats plus détaillés. On y observe respectivement les isovaleurs de la déformation plastique équivalente obtenues par la méthode mixte et la méthode SUPG. Sur chaque dessin, la partie de droite représente la solution obtenue par la méthode du développement de Taylor.

On remarque que les courbes sont fort semblables. De plus, si on compare les deux nouveaux algorithmes entre-eux, on remarque les mêmes décalages par rapport à l'ancienne solution.

En conclusion, il est donc recommandé d'utiliser l'algorithme mixte EF/VF pour ce problème. En effet, si cette méthode a l'avantage d'être stable (contrairement à la méthode du développement de Taylor) et d'être deux fois plus rapide que la méthode SUPG.

Il sera cependant intéressant, dans l'avenir, de comparer plus précisément les solutions des deux algorithmes de convection avec des résultats expérimentaux pour voir si les faibles différences entre les deux méthodes ne résultent pas d'une meilleure précision en faveur de la méthode SUPG.

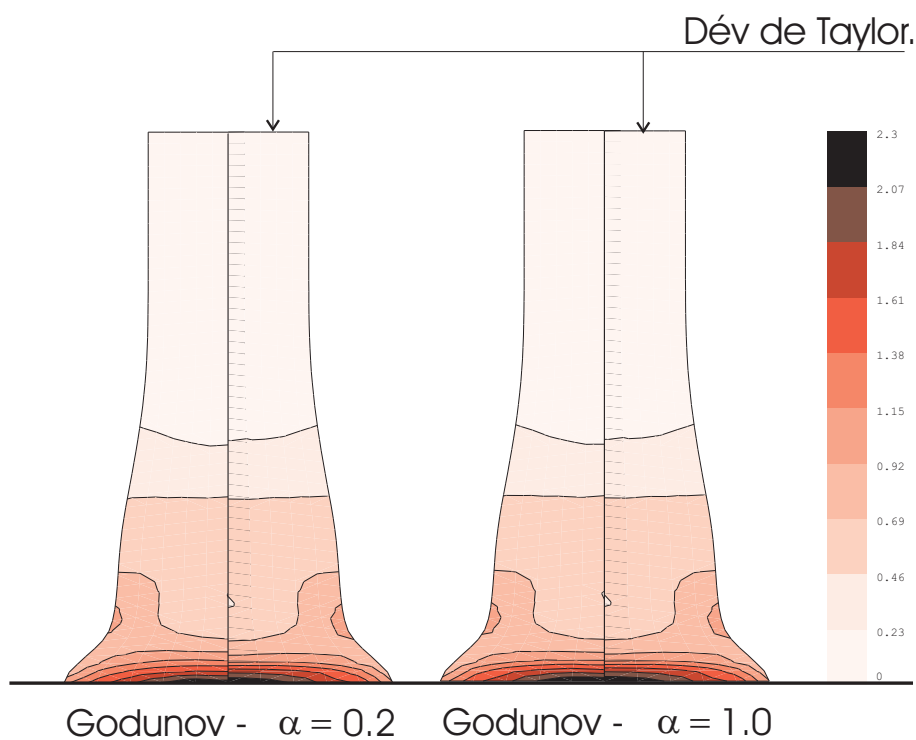


FIG. 5.19: Solutions obtenues avec l'algorithme mixte

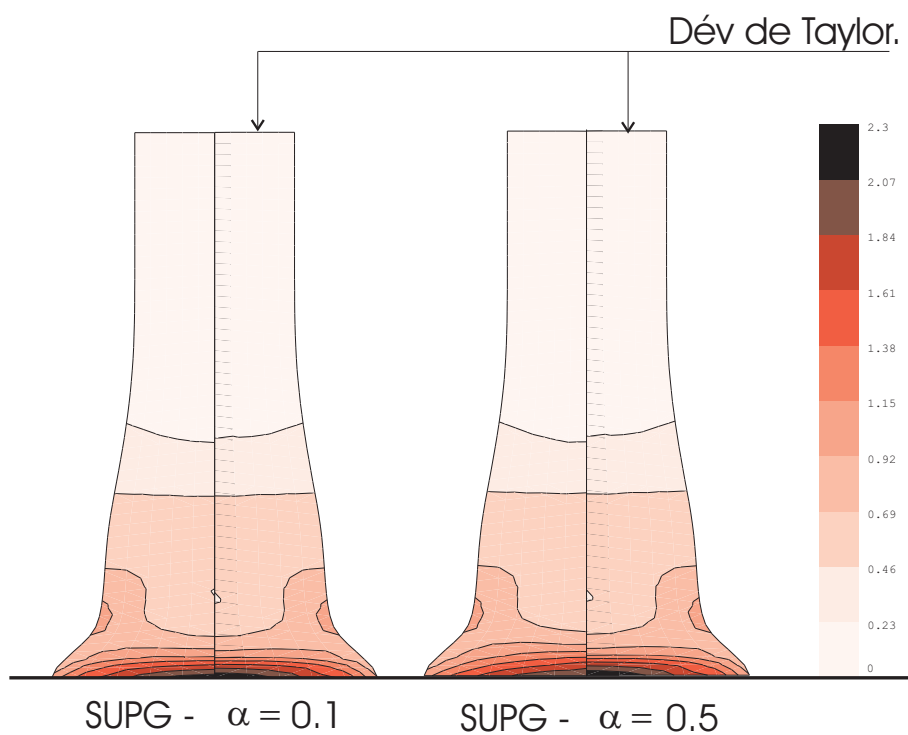


FIG. 5.20: Solutions obtenues avec la méthode SUPG

## 5.5 Laminage

### 5.5.1 Description du problème

Le problème envisagé ici est une simulation de laminage qui a été inspirée d'un article de Liu [25]. D'autres auteurs [24, 27, 34] ont déjà obtenu des résultats pour ce type de problème.

*Ajouter un dessin*

Le problème de laminage est un problème stationnaire. Il nécessite donc la discrétisation d'une longue tôle si on veut trouver la solution en régime établi par le formalisme lagrangien. Le formalisme ALE va permettre de réduire la taille du maillage en se limitant à une certaine portion de l'espace dans laquelle est comprise la zone de travail.

Comme pour le problème de la filière, ce domaine ne doit pas être trop réduit pour être certain que la matière qui entre dans le maillage peut être physiquement considérée comme dépourvue de contraintes. Nous utilisons donc un domaine de 60 mm symétrique par rapport à la position des rouleaux.

On définit un seul domaine transfini par quatre lignes maîtresses eulériennes-lagrangiennes. On veut que la tôle traverse le maillage et que celui-ci reste fixe dans la direction de laminage. Pour appliquer cette condition numériquement, il suffit de fixer les déplacements de tous les noeuds des deux lignes maîtresses perpendiculaires à la tôle selon cette direction.

Par contre, les deux autres lignes maîtresses suivent à tout moment la frontière de la tôle. On détermine ainsi facilement la surface libre de la tôle. On peut résumer cette gestion du maillage en qualifiant ce dernier d'eulérien selon la direction du laminage et lagrangien dans la direction perpendiculaire.

Les propriétés matérielles et les dimensions du problème sont reprises dans le tableau 5.10. Le problème étant symétrique, nous n'étudions qu'une moitié de la tôle (on ne considère donc qu'un seul rouleau de laminage).

Module de Young	$E$	=	$6.895 \cdot 10^4$	MPa
Coefficient de poisson	$\nu$	=	0.33	
Limite d'élasticité	$\sigma_Y^0$	=	$50.3 (1 + \varepsilon^p / 0.05)^{0.26}$	MPa
Rayon du rouleau	$R_r$	=	158.75	mm
Epaisseur initiale	$H_i$	=	6.274	mm
Epaisseur finale	$H_o$	=	5.385	mm
Coefficient de frottement	$\mu$	=	0.1	

TAB. 5.10: Propriétés matérielles et géométriques pour le laminage.

Pour démarrer le calcul, on fait descendre verticalement le rouleau de laminage sur la tôle jusqu'à ce que la réduction désirée soit obtenue. Une fois cet écrasement obtenu, on impose une vitesse de rotation constante au rouleau. La force de frottement va entraîner

la tôle et une période transitoire commence. Pendant celle-ci, la surface libre de la tôle se déforme jusqu'à être parfaitement horizontale et les grandeurs physiques (contraintes et déformation) convergent vers leurs valeurs stationnaires.

## 5.5.2 Résultats

### 5.5.2.1 Problème de la projection

Nous avons déjà parlé du problème survenant lors de la projection d'un noeud sur une direction définissant une frontière eulérienne. La figure 5.21 montre exactement ce qu'il se passe quand on déplace le noeud horizontalement sans modifier l'algorithme de projection. En fait, la partie de la tôle sortant de l'emprise des rouleaux de laminage subit un mouvement de translation uniforme sans déformation (après relaxation des contraintes). Le pôle définissant le coin du domaine se déplace donc selon une trajectoire horizontale. Cependant, lors du remaillage, nous imposons que ce pôle garde son ancienne abscisse. Il est donc nécessaire, comme nous l'avons longuement expliqué antérieurement, de modifier son ordonnée. Cette dernière valeur étant définie par l'intersection du domaine après l'étape lagrangienne et le segment vertical délimitant le domaine étudié.

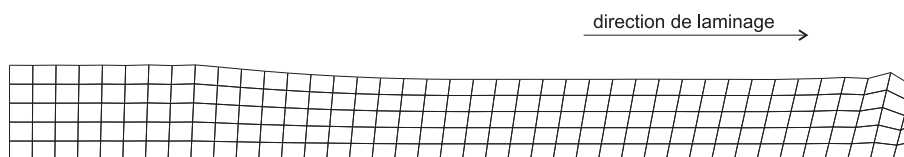


FIG. 5.21: Solutions obtenues avec la méthode SUPG

### 5.5.2.2 Rouleau rigide

Dans un premier temps, nous utilisons un rouleau rigide pour modéliser le problème de laminage. Numériquement, on définit une matrice de contact circulaire. On lui impose une descente verticale correspondant à la réduction de hauteur souhaitée (de  $t = 0$  jusqu'à  $t = 0.1$ ). Ensuite démarre le processus de laminage proprement dit avec une vitesse de rotation constante de la matrice circulaire rigide (360 degrés de  $t = 0.1$  à  $t = 1$ ).

Les figures 5.22 et 5.23 montrent respectivement la déformation plastique équivalente et la contrainte équivalente de Von Mises obtenue en fin de calcul (cette dernière valeur peut être comparée aux résultats de Liu).

On remarque que les isovaleurs obtenues par les deux méthodes sont très semblables. Il existe cependant une légère différence : on constate la présence d'une zone plus fortement déformée pour la méthode SUPG ainsi qu'une déformation non constante dans la direction

perpendiculaire à celle du laminage, dans la zone de sortie. Néanmoins, ces isovaleurs sont parfaitement rectilignes, ce qui confirme l'absence de diffusion transverse.

Au niveau des valeurs maximales obtenues, les résultats donnés par la méthode SUPG sont toujours plus grands en valeur absolue. Cependant, ces valeurs sont localisées sur la frontière du domaine, ce qui veut dire qu'elles découlent d'une extrapolation d'oscillations par le programme de post-traitement.

Les résultats sont en bon accord avec ceux obtenus par Liu. Il est cependant difficile d'en dire plus puisque nous ne disposons que d'un dessin d'isovaleurs des contraintes équivalentes de Von-Mises.

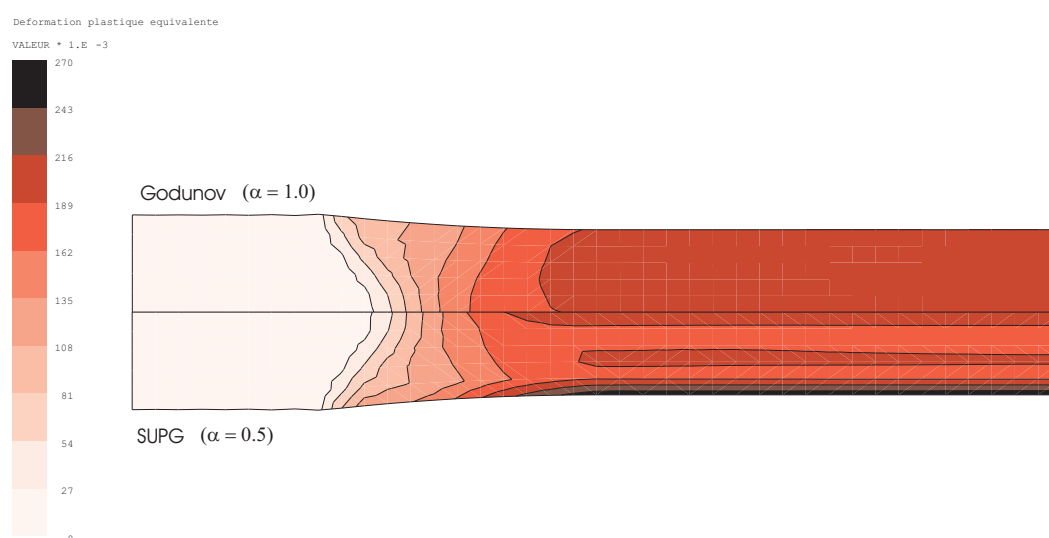


FIG. 5.22: Solutions obtenues avec la méthode SUPG.

### 5.5.2.3 Rouleau déformable

Pour montrer la puissance du formalisme ALE, nous proposons d'effectuer le même calcul avec un rouleau déformable. Il n'est cependant pas encore possible de mailler et gérer des corps circulaires avec METAFOR (voir section 4.6.6.3). Nous devons donc nous limiter dans la modélisation à une partie du rouleau de laminage défini par un secteur. L'ouverture du secteur considéré est de 90 degrés (45 degrés de part et d'autre de l'axe reliant les centres des rouleaux de laminage).

Nous simplifions aussi le problème en considérant que seule une partie du rouleau, en forme d'anneau, est déformable. Il faut donc définir le rayon interne de cet anneau que nous noterons  $R_i$ .

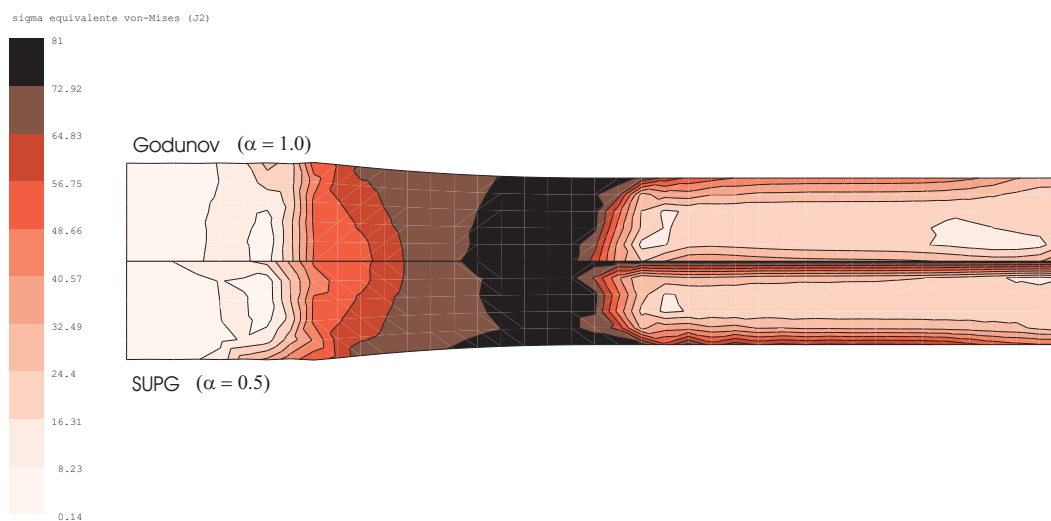


FIG. 5.23: Solutions obtenues avec la méthode SUPG.

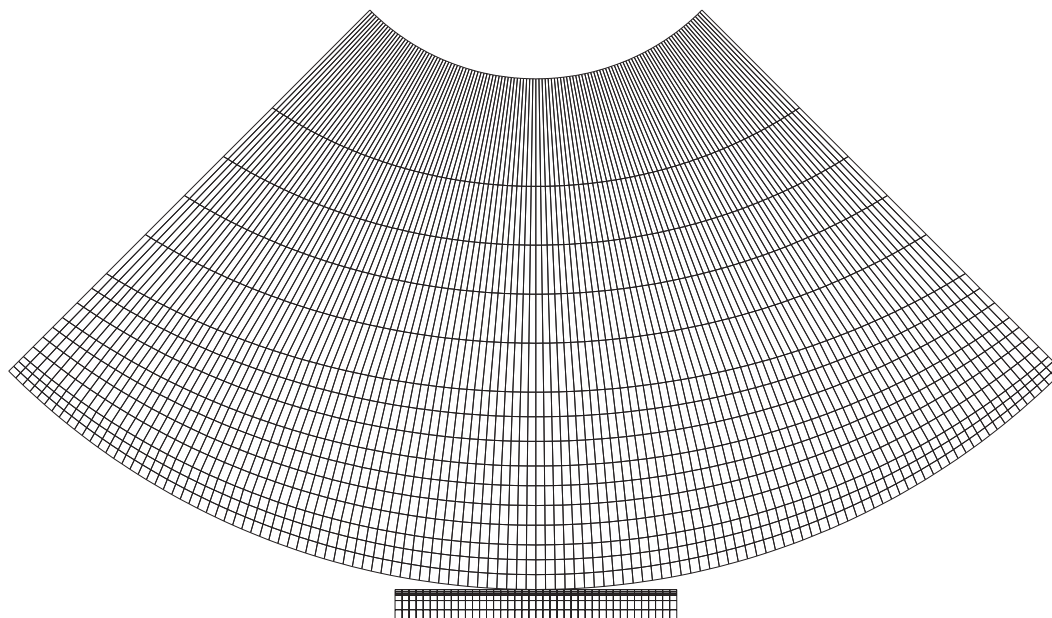


FIG. 5.24: Géométrie avec le rouleau déformable.



Nous considérons cette fois un maillage non régulier de la tôle. On utilise évidemment des éléments plus petits près de la zone de contact.

D'un point de vue numérique, le contact entre les deux corps déformables (le rouleau et la tôle) est traité par la méthode de la pénalité avec un coefficient de  $10^5$  N/mm).

Le maillage du rouleau est également raffiné dans la direction radiale, près de la tôle. Nous avons essayé de le raffiner également dans la direction circonférentielle mais l'algorithme de remaillage ne fonctionnait plus convenablement dans ce cas (les causes seront déterminées plus tard). Le maillage résultant est lagrangien selon la direction radiale et eulérien selon la direction circonférentielle.

Pour pouvoir réaliser ce calcul, nous avons dû mettre au point une procédure pour appliquer des déplacements imposés de rotation (ceci n'existait pas dans METAFOR). Celle-ci est appliquée à tous les noeuds situés sur la paroi interne de l'anneau modélisant le rouleau de laminage. Remarquons que la méthode de rotation doit être combinée à un déplacement imposé vertical lors de la première étape du calcul (descente du rouleau sur la tôle).

La figure 5.25 montre les résultats obtenus en utilisant les deux méthodes proposées dans ce travail. On constate que les solutions sont encore une fois fort semblables.

## 5.6 Conclusions et perspectives

Bien que nous obtenions des résultats encourageants, le travail peut être amélioré en certains points précis que nous détaillons ci-après. Certaines perspectives énoncées ici sont reprises avec d'autres dans la conclusion générale de ce rapport au chapitre 6.

- Il serait tout d'abord intéressant de voir ce que donnerait l'algorithme SUPG lorsqu'on intègre les matrices élémentaires avec un seul point de Gauss par élément. Cette méthode a été envisagée par Hugues et Brooks [6]. Elle permettrait d'accélérer la création de la matrice du système, et donc, de diminuer le temps CPU.
- Dans le cas des deux méthodes, il serait intéressant de pouvoir appliquer les conditions aux limites d'une manière plus simple. Nous attendons impatiemment le nouveau préprocesseur qui nous permettra d'avoir accès à la géométrie de la structure pour déterminer rapidement les noeuds sur une ligne donnée.
- A l'aide des résultats numériques et théoriques de ce chapitre, nous pourrions essayer de déterminer automatiquement une valeur optimale du coefficient de décentrage  $\alpha$ .
- Pour contrer les oscillations parasites qui apparaissent près des grands gradients, des limiteurs de flux [4, 5, 49, 58] peuvent être utilisés pour garantir la monotonie de la solution.
- Nous avons vu que la méthode SUPG ne peut pas être appliquée si on utilise un seul élément pour mailler un côté de la structure. Dans ce cas, le maillage nécessaire

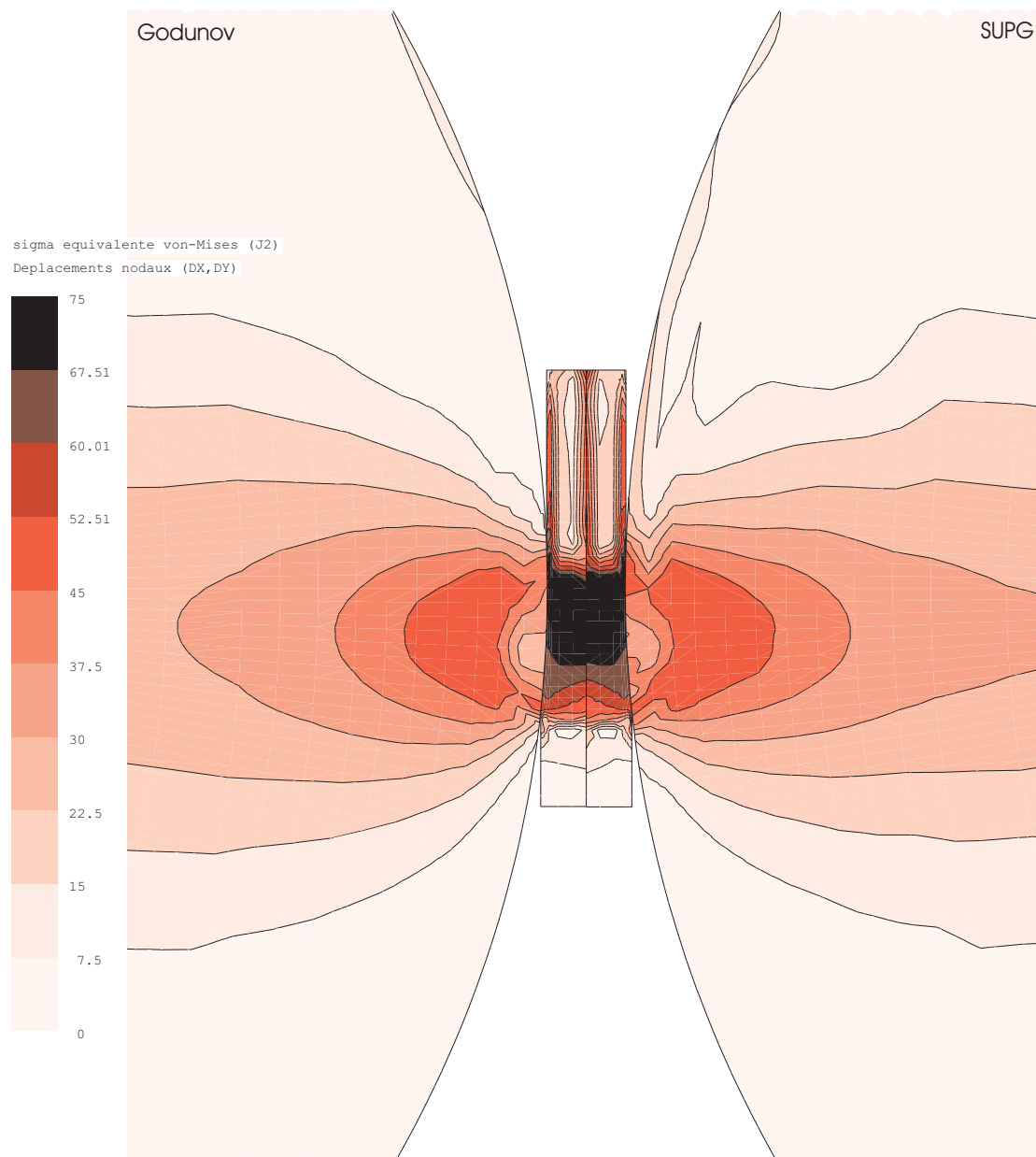


FIG. 5.25: Contrainte équivalente de Von-Mises pour le problème traité totalement en ALE.

pour convecter la pression ne peut pas être construit et, par conséquent, l'algorithme ne peut pas être utilisé. Une solution serait de définir la pression au quatre points de Gauss, comme nous l'avons discuté à la section 4.8.6. Il serait aussi possible de définir des éléments linéiques dans ce cas pathologique mais la solution obtenue sera certainement assez médiocre.

- Une tâche urgente est l'optimisation de toutes les nouvelles routines récemment créées afin d'inclure les développements de manière définitive dans METAFOR.



# Chapitre 6

## Conclusions

### 6.1 Résultats de première année

Commencer un travail si vaste, même si il est assez bien défini dans notre cas, est une tâche ardue. La quantité de publications sur le sujet, qu'il s'agisse de formulation ALE ou de tribologie et prise en compte du frottement, est très importante et faire le tri n'est pas simple.

Nous pensons cependant que nous commençons à avoir une vision globale du sujet et des travaux qui ont déjà été effectués dans le monde. Les quelques premiers mois, consacrés à une première recherche bibliographique nous ont permis de comprendre plus précisément les faiblesses actuelles des codes éléments finis lorsqu'il s'agit de modéliser le frottement et un lubrifiant éventuel.

Le travail de cette première année est, en totalité numérique : nous n'avons pas encore tous les "outils" nécessaires pour simuler correctement le laminage et l'emboutissage cependant, nous espérons obtenir des résultats pouvant être comparés à l'expérience dans un futur proche.

Nous avons établi, avec l'aide de J.-P. Ponthot, des contacts avec le Professeur J. Donéa et A. Rodriguez-Ferran, de l'Université de Barcelone, et dont les travaux et les conseils nous ont beaucoup aidés pour la résolution de l'équation de convection dans le cadre de l'ALE.

Il en va de même pour le traitement numérique du frottement (loi de Stribeck) où les travaux effectués au LMA de Marseille par O. Chertier et F. Martinet nous ont donnés un point de comparaison.

Dans la première partie du travail, un algorithme de pilotage en force des matrices de contact rigide a été mis au point. Les résultats sont bons et nous n'observons que de très légères oscillations au niveau de la force appliquée (généralement imperceptibles sur un

graphique). L'amplitude de celles-ci peut être rendue très petite en diminuant la tolérance de l'algorithme de Newton-Raphson.

Nous avons cependant eu quelques difficultés pour faire converger l'algorithme de pilotage dans le cas de l'utilisation d'une pénalité très grande et des matrices circulaires (modélisant le serre-flan). Des essais pourront être menés avec la méthode du lagrangien augmenté qui remplacera la méthode la pénalité, en assurant des pénétrations plus petites.

La seconde partie du travail est consacrée à la théorie de la lubrification et à la mise au point d'une loi de frottement locale d'après une courbe de Stribeck.

Grâce à l'algorithme de pilotage des matrices de contact, nous sommes arrivés à simuler numériquement le phénomène de stick-slip. Cependant, des problèmes de convergence et d'instabilités ne nous permettent pas de conclure à un succès total : bien que les oscillations caractéristiques du phénomène sont présentes, l'amplitude et la fréquence de celles-ci dépendent de la taille du pas de temps utilisé. Il faudra donc consacrer un peu plus de temps pour comprendre ces problèmes reportés aussi par le LMA de Marseille.

Dans la troisième partie, deux algorithmes de convection ont été implémentés dans METAFOR. L'algorithme mixte EF/VF nous a permis d'obtenir les premiers résultats encourageants. Sur cette lancée, nous avons mis au point un algorithme original en résolvant le problème de convection par la méthode Streamline Upwind Petrov Galerkin (SUPG) sur un maillage auxiliaire reliant les points de Gauss.

Les résultats obtenus par les deux algorithmes sont fort similaires. Cependant, la méthode basée sur SUPG est gourmande en mémoire vu le stockage de la topologie des maillages auxiliaires, et assez lente (deux fois plus lente que son homologue mixte).

Nous n'avons pas pu mettre en évidence l'avantage d'utiliser la méthode SUPG par rapport à l'autre sauf dans le cas où on peut s'attendre à une grande diffusion transverse dans la solution donnée par l'algorithme mixte. Le cas le plus défavorable est obtenu lorsqu'on considère une vitesse relative de maillage inclinée à 45 degrés par rapport aux mailles.

En ce qui concerne la résolution implicite du problème de convection, nous avons constaté que, dans bien des cas, elle était inutile. En effet, les fortes non linéarités des problèmes envisagés (loi de comportement, contact, grandes déformation avec rotations) limite naturellement la taille du pas de temps lors de la résolution de la phase lagrangienne. En conséquence, la limite de stabilité de la deuxième phase est rarement dépassée et une résolution explicite est bien plus avantageuse.

## 6.2 Suite du travail et perspectives

Ce travail est loin d'être fini. Nous énumérons, ci-dessous, quelques idées pour la suite (d'autres idées sont expliquées en détails à la fin de chaque chapitre) :

### 6.2.1 Pilotage en force des matrices rigides

- Une extension de l'algorithme pour traiter les moments imposés devra être effectuée pour être complet. En effet, les rotations des matrices sont en général imposées à l'aide de moteurs qui fournissent un couple et non une vitesse angulaire donnée. Nous appliquerons cet algorithme à la simulation du laminage.
- Il sera intéressant d'étendre notre algorithme aux calculs tridimensionnels. Ceci ne doit pas poser de difficultés mis à part, peut-être, pour les rotations imposées où la formulation mathématique est légèrement plus compliquée.

### 6.2.2 Simulation du contact lubrifié

- La mise au point d'une loi de frottement basée sur la résolution de l'équation de Reynolds est certainement notre prochain but à court terme. Grâce aux développements effectués cette année sur l'ALE, la résolution numérique sera facilitée et nous pourrons envisager des validations de nos méthodes avec l'expérience.
- Au niveau de la loi de Stribeck, nous devons déterminer l'origine des instabilités et, si possible, trouver une solution. Des simulations dynamiques doivent être aussi effectuées pour comprendre l'importance des effets d'inertie.

### 6.2.3 Formalisme arbitraire lagrangien-eulérien

- Il serait envisageable d'utiliser des limiteurs de flux [4, 5, 49, 58] pour contrer les oscillations présentes dans les solutions fournies par les deux méthodes de convection lorsqu'on se situe à proximité de la limite de stabilité ou lorsqu'on considère des grands gradients. Ces limiteurs garantissent qu'un signal monotone reste monotone après convection (principe TVD).
- Nous essayerons de programmer un calcul automatique du coefficient de décentrage  $\alpha$ , en fonction des résultats numériques (problèmes mécaniques) et analytiques (analyse de Von-Neumann) obtenus dans ce rapport.
- Une optimisation complète des routines écrites cette année doit être effectuée avant d'introduire de manière définitive ces développements dans METAFOR.
- La gestion du maillage et du remaillage des surfaces libres doit être revu. En effet, il serait intéressant de pouvoir utiliser plusieurs algorithmes de remaillage à la fois.
- Le problème des structures circulaires décrit dans la section 4.6.6.3 doit être résolu dès que la mise au point du nouveau préprocesseur le permettra. Il faudra certainement,

à ce moment là, réécrire la totalité des routines ALE. Ceci facilitera également la prise en compte des conditions aux limites.

- Il serait intéressant d'élargir ce travail à 3 dimensions. Ceci ne devrait pas poser de problèmes conceptuels. Seule la recherche des éléments adjacents à un volume fini sera plus délicate. Le problème de la définition des lignes maîtresses, des domaines et la gestion des conditions aux limites devra être bien pensée et, surtout, en accord avec le préprocesseur.
- Nous envisagerons peut-être, dans la suite de ce travail, un nouveau type d'algorithme de convection, basé sur la méthode Element Free Galerkin [46]. Celle-ci a l'avantage de ne pas nécessiter de maillage auxiliaire et pourra donc peut-être réduire le temps de calcul et la mémoire utilisée.



# Bibliographie

- [1] Abo-Elkhier. Elasto-plastic finite element modelling of strip cold rolling. *Finite Elements in Analysis and Design* 27, 27 :323–334, 1997.
- [2] A. Akkermann, J. Huétink, and P. N. van der Helm. Finite elements and volumes in a euler-lagrange formulation – artificial dissipation versus limited flux schemes. In E. Hinton D.R.J. Owen, E. Onate, editor, *Computational Plasticity*, pages 2297–2308. 1995.
- [3] H. N. Bayoumi, M. S. Gadala, and J. Wang. Numerical simulation of metal forming processes. In Huétink & Baaijens, editor, *Simulation of Materials Processing : Theory, Methods and Applications*, pages 103–108, Rotterdam, The Netherlands, 1998.
- [4] D. J. Benson. An efficient, accurate, simple ale method for nonlinear finite element programs. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 72 :305–350, 1989.
- [5] D. J. Benson. Momentum advection on a staggered mesh. *Journal of Computational Physics*, 100 :143–162, 1992.
- [6] A. N. Brooks and T. J. R. Hugues. Streamline upwind/petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32 :199–259, 1982.
- [7] F. Casadei, J. Donea, and A. Huerta. Arbitrary lagrangian eulerian finite elements in non-linear fast transient continuum mechanics. Technical Report EUR 16327 EN, University of Catalunya, Barcelona, Spain, 1995.
- [8] P. Chabrand. Formulation ale pour le contact lubrifié entre solides. Technical Report TF-45, Université de Liège, Belgium, 1996.
- [9] P. Chabrand, F. Dubois, D. Graillet, and J.-P. Ponthot. Numerical modelling of tribological devices using various contact algorithms. In Huétink & Baaijens, editor, *Simulation of Materials Processing : Theory, Methods and Applications*, pages 839–844, Rotterdam, The Netherlands, 1998.

- [10] K. K. Chen and D. C. Sun. Hydrodynamic lubrication in hemispherical punch stretch forming. *Journal of Applied Mechanics*, 53 :440–449, 1986.
- [11] O. Chertier. *Contact et frottement entre solides déformables en grandes déformations*. PhD thesis, Laboratoire de Mécanique et d’Acoustique de Marseille, France, 1997.
- [12] J. Cloesen, C. et Bozet. Influences environnementales en tribologie. *European Journal of Mechanical Engineering*, 40(3) :149–155, ?
- [13] R. Codina. Comparison of some finite element methods for solving the diffusion-convection-reaction equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 156 :185–210, 1998.
- [14] X. Collard, S. Gohy, and L. Papeleux. Rapport metastamp. Technical report, Université de Liège, Belgium, 1998.
- [15] M. Delanaye. *Polynomial Reconstruction Finite Volume Schemes for the Compressible Euler and Navier-Stokes Equations on Unstructured Adaptive Grids*. PhD thesis, University of Liège, Liège, Belgium, 1996.
- [16] H. Deresiewicz. Amontons and Coulomb, friction’s founding fathers. In Ling & Pan, editor, *The Workshop on the Use of Surface Deformation Models to Predict Tribology Behavior*, pages 56–60, Columbia University, New-York, 1986.
- [17] J. Donéa, A. Huerta, and F. Casadei. Finite element models for transient dynamic fluid-structure interaction. *New Advances in Computational Structural Mechanics*, pages 335–346, 1992.
- [18] J. Donea and S. Giuliani. An explicit ale finite element formulation for 3d transient dynamic fluid-structure interaction problems. Technical Report EUR11936EN, Commission of the European Communities, 1989.
- [19] J. Donea, S. Giuliani, and J. P. Halleux. An Arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transiant dynamic fluid-structure interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 33(1–3) :689–723, 1982.
- [20] F. Dubois. *Contact, frottement, grandes déformations élastoplastiques. Application à l’emboutissage*. PhD thesis, Laboratoire de Mécanique et d’Acoustique de Marseille, France, 1994.
- [21] T. Duchêne. *Optimisation des conditions d’emboutissage en étirage plan*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, France, 1997.
- [22] K. Dukowicz and J. D. Ramshaw. Tensor viscosity method for convection in numerical fluid dynamics. *??, ??* :71–79, 1978.

- [23] J.-A. Essers. *Compléments d'analyse numérique : équations aux dérivées partielles (Notes de cours)*. Université de Liège, 1996.
- [24] M. Fukumura, M. Fujikake, F. Fujita, and Y. Fujita. Elasto-plastic finite element simulation of the flat rolling process by dynamic explicit method. In Huétink & Baaijens, editor, *Simulation of Materials Processing : Theory, Methods and Applications*, pages 683–688, Rotterdam, The Netherlands, 1998.
- [25] W-K. Hu and W. K. Liu. An ale hydrodynamic lubrication finite element method with application to strip rolling. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 36 :855–880, 1993.
- [26] Y-K. Hu and W. K. Liu. Simulation of ring rolling process by arbitrary lagrangian eulerian finite element method. *AMD*, 20 :225–240, 1990.
- [27] Y-K. Hu and W. K. Liu. The application of ale contact algorithms in bulk deformation processes. In Ronald F. Kulak, editor, *Computational Aspect of Contact, Impact and Penetration*, pages 10–33. Aptek Inc., 1991.
- [28] A. Huerta. Ale stress update in transient plasticity problems. In E. Hinton D.R.J. Owen, E. Onate, editor, *Computational Plasticity*, pages 1865–1871. 1995.
- [29] A. Huerta, F. Casadei, and J. Donéa. An Arbitrary lagrangian-eulerian stress update procedure for coining simulations. In Wood & Zienkiewicz Chenot, editor, *Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, pages 261–266, Valbonne, France, 1992.
- [30] T. J. R. Hugues. A simple scheme for developping ‘upwind’ finite elements. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 12 :1359–1365, 1978.
- [31] H. Huétink. *On the Simulation of Thermo-Mechanical Forming Processes. a Mixed Eulerian-Lagrangian Finite Element Method*. PhD thesis, University of Twente, The Netherlands, 1986.
- [32] J. Huétink and P. T. Vreede. Progress in mixed eulerian-lagrangian finite element simulation of forming processes. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 30 :1441–1457, 1990.
- [33] S. Hyun and L.-E. Lindgren. Mesh smoothing techniques for graded elements. In Huétink & Baaijens, editor, *Simulation of Materials Processing : Theory, Methods and Applications*, pages 109–114, Rotterdam, The Netherlands, 1998.
- [34] V. Kalhori, Lindgren L.-E., and J. Edberg. Coupled thermomechanical simulation of hot rolling using an adaptative mesh. In Huétink & Baaijens, editor, *Simulation of Materials Processing : Theory, Methods and Applications*, pages 689–693, Rotterdam, The Netherlands, 1998.

- [35] B. Larrouturrou. On upwind approximations of multi-dimensionnal multi-species flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, ? :117–125, 1992.
- [36] W. K. Liu and Y-K. Hu. Finite element hydrodynamic friction model for metal forming. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 37 :4015–4037, 1994.
- [37] W. K. Liu, Y-K. Hu, and T. Belytschko. Ale finite elements with hydrodynamic lubrication for metal forming. *Nuclear Engineering and Design*, 138 :1–10, 1992.
- [38] R. P. Maisch, B. Meier, K. Kubli, and J. Reissner. Considering friction effects in the fe-simulation of forming processes. In Wood & Zienkiewicz Chenot, editor, *Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, pages 163–168, Valbonne, France, 1992.
- [39] G. Monfort. Surface roughness & friction in press forming. Technical Report CRM/CCE 7210/KC-210 F3, C.R.M., Service Application des Métaux, Liège, Belgique, 1990.
- [40] P. Montmitonnet, Y. Germain, and J-L. Chenot. Application of the finite element method to contact, friction and lubrication in metal forming. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 7 (supl. 1) :193–208, 1988.
- [41] K. W. Morton. Generalised galerkin methods for hyperbolic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 52 :847–871, 1985.
- [42] G. Papadakis and G. Bergeles. A locally modified second order upwind scheme for convection terms discretization. *Int. J. Num. Meth. Heat Fluid Flow*, 5 :49–62, 1995.
- [43] N. Patir and H. S. Cheng. An average flow model for determining effects of three-dimensional roughness on partial hydrodynamic lubrication. *Journal of Lubrication Technology*, 100 :12–17, 1978.
- [44] N. Patir and H. S. Cheng. Application of average flow model to lubrication between rough sliding surfaces. *Journal of Lubrication Technology*, 101 :220–230, 1979.
- [45] J-P. Ponthot. *Traitement unifié de la Mécanique des Milieux Continus solides en grandes transformations par la méthode des éléments finis*. PhD thesis, Université de Liège, Liège, Belgium, 1995.
- [46] J.-P. Ponthot and T. Belytschko. Arbitrary lagrangian-eulerian formulation element-free galerkin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 152 :19–46, 1998.
- [47] S. Potapov. *Un algorithme ALE en dynamique rapide basé sur une approche mixte éléments finis – volumes finis*. PhD thesis, Ecole Centrale de Paris, France, 1997.

- [48] D. Quoirin. *Modélisation des grandes déformations de corps minces. Application à la mise à forme*. PhD thesis, Université de Liège, Belgium, 1996.
- [49] G. Rekers. *Numerical Simulation of Unsteady Viscoelastic Flow of Polymers*. PhD thesis, University of Twente, The Netherlands, 1995.
- [50] A. Rodriguez-Ferran, F. Casadei, and A. Huerta. Ale stress update for transient and quasistatic processes. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 42 : ?–?, 1998.
- [51] A. Rodriguez-Ferran and A. Huerta. Comparison of two Arbitrary lagrangian-eulerian formulations. In Shen & Dawson, editor, *Simulation of Materials Processing : Theory, Methods and Applications*, pages 481–487, Rotterdam, The Netherlands, 1995.
- [52] P. Rogiest. *An Implicit Finite Volume Scheme for the Computation of Unsteady Compressible Flows on Multi-Block Structured Grids. Application to Aeroelastic Problems*. PhD thesis, University of Liège, Liège, Belgium, 1997.
- [53] D. Rozenwald. *Modélisation thermomécanique des grandes déformations. Application aux problèmes de mise à forme à haute température, aux élastomères et aux structures mixtes acier-élastomères*. PhD thesis, Université de Liège, Belgium, 1996.
- [54] S. Sheu. *Mixed Lubricaton in Bulk Metal Forming Processes*. PhD thesis, Northwestern University, Evanston, Illinois, 1985.
- [55] L. Stainier. *Modélisation numérique du comportement irréversible des métaux ductiles soumis à grandes déformations avec endomagement*. PhD thesis, Université de Liège, Belgium, 1996.
- [56] R. ter Haar. *Friction in Sheet Metal Forming – The Influence of (local) Contact Conditions and Deformation*. PhD thesis, University of Twente, The Netherlands, 1996.
- [57] J. H. Tripp. Surface roughness effects in hydrodynamic lubrication : The flow factor method. *JLT*, 105 :458–465, 1983.
- [58] B. Van Leer. On the relation between the upwind-differencing schemes of Godunov, Engquist-Osher and Roe. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 5(1) :1–20, 1984.
- [59] W. R. D. Wilson. An isoviscous model for the hydrodynamic lubrication of plane strain forging processes with flat dies. *Journal of Lubrication Technology*, pages 539–546, 1974.
- [60] W. R. D. Wilson. Friction and lubrication in sheet metal forming. In Koistinen and Wang, editors, *Mechanics of Sheet Metal Forming*, pages 157–177. Plenum Press, 1978.

- [61] W. R. D. Wilson. Friction and lubrication in bulk metal forming processes. *J. Applied Metal Working*, 1 :7–19, 1979.
- [62] W. R. D. Wilson and L. E. Murch. A refined model for the hydrodynamic lubrication of strip rolling. *Journal of Lubrication Technology*, pages 426–431, 1976.
- [63] W. R. D. Wilson and S. Sheu. Real area of contact and boundary friction in metal forming. *Int J. Mech. Sci.*, 30 :475–489, 1988.
- [64] W. R. D. Wilson and J. J. Wang. Hydrodynamic lubrication in simple stretch forming processes. *Journal of Lubrication Technology*, 106 :70–77, 1984.
- [65] T. Yamada and F. Kikuchi. An Arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for incompressible hyperelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 102 :149–177, 1993.