

MACROS MINITAB POUR LE CALCUL DES COURBES D'EFFICACITÉ DES CARTES DE CONTRÔLE DE SHEWHART

R. PALM*

1. Introduction

Les cartes de contrôle sont des représentations graphiques destinées à suivre l'évolution dans le temps d'un paramètre observé sur des échantillons d'effectif n , prélevés à intervalles réguliers dans la production. Une description détaillée de ces cartes est donnée dans les différents livres consacrés au contrôle statistique de la qualité. Une description élémentaire des cartes dont il sera question ci-dessous et des références bibliographiques complémentaires sont données dans PALM [1996].

Cinq paramètres sont envisagés par la suite :

- la moyenne,
- la médiane,
- l'écart-type,
- la proportion d'articles non conformes,
- le nombre de non-conformités.

L'utilisation pratique d'une carte de contrôle consiste à porter sur la carte la valeur observée du paramètre dont on souhaite suivre l'évolution au cours du temps. Si la valeur de ce paramètre est comprise entre deux limites préalablement définies, on considère que le procédé de production est sous contrôle et on continue la production. Si par contre, la valeur de ce paramètre se situe en dehors des limites de contrôle, on considère que le procédé n'est plus sous contrôle. Il est alors arrêté jusqu'à ce que la cause responsable de l'absence de contrôle soit identifiée et éliminée.

La courbe d'efficacité d'une carte est une représentation graphique donnant la probabilité d'affirmer que le procédé est sous contrôle pour un paramètre donné en fonction de l'importance de la modification d'un paramètre du procédé. Ainsi, par exemple, les limites de contrôle de la médiane sont déterminées en fonction, notamment, de la moyenne m_0 du procédé et la courbe d'efficacité donne la probabilité que la médiane d'un échantillon se situe entre les limites de contrôle, en fonction de la moyenne réelle m du procédé.

Les différentes cartes de contrôle qui seront considérées peuvent être établies sans difficulté grâce au logiciel Minitab, sauf pour ce qui est de la carte de contrôle des médianes. Mais le logiciel n'offre pas la possibilité d'établir les courbes d'efficacité associées à ces

* Professeur associé à la Faculté universitaire des Sciences agronomiques de Gembloux.

cartes. Pour cette raison, l'Unité de Statistique et Informatique de la FUSAGx¹ propose diverses macros permettant le calcul de ces courbes. Ces macros, ainsi que les notices d'utilisation, sont disponibles depuis le site Web de l'Unité :

www.fsagx.ac.be/si/

en cliquant sur le lien Macros, puis sur le thème en question.

Le calcul des limites de contrôle peut se faire en tenant compte de la nature exacte de la distribution d'échantillonnage du paramètre, qui repose sur des hypothèses concernant le procédé (par exemple la normalité de la variable décrivant le résultats du procédé) ou, au contraire, d'une manière simplifiée en se basant sur le principe de la méthode de l'erreur-standard. Pour autant que les hypothèses de départ soient vérifiés, la première solution permet de connaître de manière exacte le risque de première espèce α , alors que la deuxième méthode ne contrôle ce risque que de manière approchée. Le risque α est la probabilité d'affirmer, à la suite du prélèvement d'un échantillon, que le procédé n'est pas sous contrôle, alors qu'en réalité il l'est. Sauf pour la carte de contrôle de l'écart-type où la méthode exacte est proposée en option, la méthode de l'erreur-standard est utilisée, les limites de contrôle inférieure *LINF* et supérieure *LSUP* étant de la forme :

$$LINF = g - u_{1-\alpha/2} \sigma_G \quad \text{et} \quad LSUP = g + u_{1-\alpha/2} \sigma_G,$$

g étant le paramètre observé, σ_G étant l'erreur-standard de la distribution d'échantillonnage du paramètre auquel on s'intéresse et $u_{1-\alpha/2}$ étant le pourcentile $1 - \alpha/2$ de la distribution normale réduite. Pour la moyenne, cette solution est exacte lorsque la variable décrivant le procédé est normale. Pour certains paramètres, l'application de la formule peut conduire à une limite inférieure négative alors que le paramètre ne peut jamais être négatif. C'est le cas, par exemple, pour une proportion. Dans une telle situation, la limite inférieure est remplacée par zéro.

La méthode de l'erreur-standard est la méthode utilisée par le logiciel Minitab. Par défaut, la valeur α est fixée à 0,0027; dans ce cas, $u_{1-\alpha/2}$ est égal à 3. Pour le calcul de l'efficacité, on tiendra cependant compte, dans la mesure du possible, de la distribution exacte du paramètre, en supposant que les conditions d'application sont remplies.

Les cinq macros proposées sont rapidement présentées dans les paragraphes qui suivent. L'utilisation des macros est chaque fois illustrée par un exemple (paragraphes 2 à 6), et une brève conclusion (paragraphe 7) clôture le texte. Toutes les limites de contrôle ont été établies en utilisant l'option par défaut pour la valeur nominale du risque de première espèce ($\alpha = 0,0027$ et $u_{1-\alpha/2} = 3$). Les exemples ont été choisis de manière à illustrer diverses applications possibles des macros. La liste des commandes permettant d'établir les figures présentées est reprise en annexe. Pour plus de détails concernant la syntaxe, nous renvoyons le lecteur aux notices d'utilisation disponibles sur le site internet à l'adresse donnée ci-dessus.

Le calcul des limites de contrôle et des courbes d'efficacité fait appel à différentes valeurs particulières telles que des pourcentiles de différentes distributions ou des

¹ Faculté universitaire des Sciences agronomiques de Gembloux (Belgique). Les macros présentées dans cette note ont été mises au point par M. Jean-Philippe VANDAMME.

caractéristiques de distributions d'échantillonnage particulières. Ces valeurs seront chaque fois définies dans le texte. Concrètement les pourcentiles peuvent être obtenus à partir de fonctions du logiciel Minitab. Quant aux caractéristiques spéciales des distributions d'échantillonnage, elles dépendent de l'effectif de l'échantillon et peuvent être trouvées dans des tables disponibles dans les livres consacrés aux cartes de contrôle. Des valeurs ont été incorporées dans les macros pour différents effectifs et des interpolations linéaires sont faites pour des effectifs intermédiaires.

2. Macro MOYCCEF : contrôle des moyennes

Les limites de contrôle sont définies de la manière suivante :

$$LINF = m_0 - u_{1-\alpha/2} \sigma_0 / \sqrt{n} \quad \text{et} \quad LSUP = m_0 + u_{1-\alpha/2} \sigma_0 / \sqrt{n}.$$

Dans ces relations, m_0 est la moyenne et σ_0 l'écart-type du procédé lorsqu'il est sous contrôle, n est l'effectif de l'échantillon et $u_{1-\alpha/2}$ est le pourcentile $1-\alpha/2$ de la distribution normale réduite.

L'efficacité, pour une valeur m de la moyenne, est calculée par la relation :

$$\beta(m) = P(LINF \leq \bar{X} \leq LSUP | m, \sigma_0, n),$$

\bar{X} étant la variable décrivant la moyenne d'un échantillon. Dans la notation ci-dessus, la barre verticale suivie de la liste des paramètres signifie que la probabilité que la variable \bar{X} soit comprise entre les deux limites de contrôle se calcule pour une valeur fixée de la moyenne m , de l'écart-type σ_0 et de l'effectif n . De façon plus précise, le calcul se fait en considérant que la variable \bar{X} est normale, de moyenne m et d'écart-type σ_0 / \sqrt{n} .

La figure 1 donne, à titre d'illustration, la courbe d'efficacité dans le cas du procédé considéré par PALM [1996]. Ce procédé est supposé normal et de paramètres :

$$m_0 = 612,17 \quad \text{et} \quad \sigma_0 = 40,185,$$

et on considère que les échantillons successifs sont de cinq unités.

Pour le même procédé, la figure 2 donne l'efficacité, pour différentes valeurs de m et pour trois tailles d'échantillons croissantes ($n = 1$, $n = 5$ et $n = 20$). Cette figure montre, par exemple, qu'un décentrage du procédé égal à l'écart-type :

$$m = m_0 + \sigma_0 = 652,36,$$

ne sera pas mis en évidence dans près de 98 % des cas si $n = 1$, dans près de 78 % des cas si $n = 5$ mais seulement dans 7 % des cas si $n = 20$.

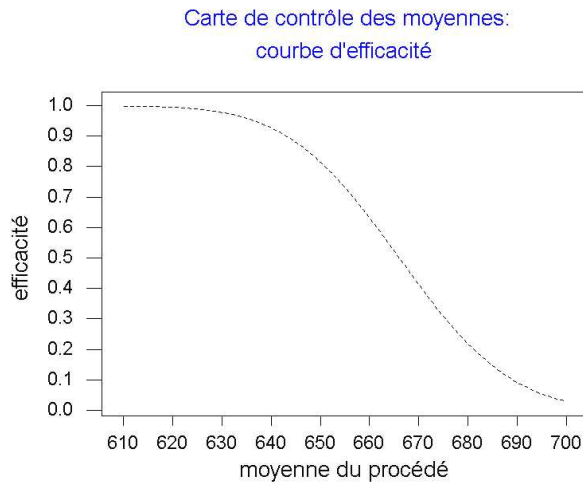


Figure 1. Courbe d'efficacité du contrôle des moyennes ($m_0 = 612,17$, $\sigma_0 = 40,185$ et $n = 5$).

Row	moyenne	eff/n=1	eff/n=5	eff/n=20
1	612.170	0.997300	0.997300	0.997300
2	652.355	0.977218	0.777546	0.070492
3	692.540	0.841344	0.070492	0.000000
4	732.725	0.500000	0.000104	0.000000
5	772.910	0.158655	0.000000	0.000000

Figure 2. Comparaison de l'efficacité de la carte de contrôle des moyennes pour trois valeurs différentes de l'effectif ($n = 1$, $n = 5$ et $n = 20$)

3. Macro MEDCCEF : contrôle des médianes

Les limites de contrôle sont définies de la manière suivante :

$$LINF = m_0 - u_{1-\alpha/2} \sigma_{\tilde{u}} \sigma_0 \quad \text{et} \quad LSUP = m_0 + u_{1-\alpha/2} \sigma_{\tilde{u}} \sigma_0,$$

m_0 et σ_0 étant la moyenne et l'écart-type du procédé lorsqu'il est sous contrôle, $\sigma_{\tilde{u}}$ étant l'erreur-standard de la médiane d'un échantillon aléatoire et simple de n observations prélevé dans une population normale réduite et $u_{1-\alpha/2}$ étant le pourcentile $1-\alpha/2$ de la distribution normale réduite.

L'efficacité, pour une valeur m de la moyenne, est calculée par la relation :

$$\beta(m) = P(LINF \leq \tilde{X} \leq LSUP | m, \sigma_0, n),$$

\tilde{X} étant la variable décrivant la médiane d'un échantillon. On considère que cette variable est normale, de moyenne m et d'écart-type $\sigma_{\tilde{u}} \sigma_0$. Les valeurs $\sigma_{\tilde{u}}$ sont obtenues par interpolation à partir des couples $\sigma_{\tilde{u}}$ et n exacts.

Pour le procédé examiné au point précédent, la figure 3 permet de comparer l'efficacité de la carte de contrôle des moyennes et des médianes. Pour un dérèglement de la moyenne d'un écart-type ($m = 652,4$), la différence d'efficacité est de l'ordre de 0,10 et pour un dérèglement de deux écarts-types ($m = 692,5$), elle est de l'ordre de 0,15.

Row	moyenne	eff/moy	eff/med
1	612.170	0.997300	0.997300
2	652.355	0.777546	0.871357
3	692.540	0.070492	0.231371
4	732.725	0.000104	0.004641
5	772.910	0.000000	0.000004

Figure 3. Comparaison de l'efficacité de la carte de contrôle des moyennes et de la carte de contrôle des médianes ($m_0 = 612,17$, $\sigma_0 = 40,185$ et $n = 5$).

4. Macro ETCCEF : contrôle des écarts-types

Les limites de contrôle peuvent être déterminées soit par la méthode de l'erreur-standard :

$$LINF = c_4 \sigma_0 - u_{1-\alpha/2} c_5 \sigma_0 \text{ ou } 0 \quad \text{et} \quad LSUP = c_4 \sigma_0 + u_{1-\alpha/2} c_5 \sigma_0$$

ou à l'aide des distributions χ^2 :

$$LINF = \sigma_0 \sqrt{\chi_{\alpha/2}^2 / (n-1)} \quad \text{et} \quad LSUP = \sigma_0 \sqrt{\chi_{1-\alpha/2}^2 / (n-1)}.$$

c_4 et c_5 sont respectivement l'espérance mathématique et l'erreur-standard de la distribution d'échantillonnage de l'écart-type estimé d'un échantillon aléatoire et simple de n observations prélevé dans une population normale réduite; $\chi_{\alpha/2}^2$ et $\chi_{1-\alpha/2}^2$ sont les pourcentiles $\alpha/2$ et $1-\alpha/2$ de la distribution χ^2 à $n-1$ degrés de liberté et n est l'effectif de l'échantillon. Les valeurs de c_4 sont obtenues par interpolation à partir de couples c_4 et n exacts. Les valeurs de c_5 sont fonction des valeurs de c_4 .

L'efficacité, pour une valeur de l'écart-type et un effectif n de l'échantillon, est calculée par la relation :

$$\beta(\sigma) = P\left(\frac{(LINF)^2 (n-1)}{\sigma^2} \leq \chi^2_{(n-1)} \leq \frac{(LSUP)^2 (n-1)}{\sigma^2} \middle| \sigma, n\right),$$

$\chi^2_{(n-1)}$ étant la variable χ^2 à $n - 1$ degrés de liberté.

La figure 4 donne les efficacités du contrôle des écarts-types d'un procédé normal pour $\sigma_0 = 40,185$ et $n = 5$, d'une part, lorsque les limites de contrôle sont calculées de manière exacte, à partir de la distribution χ^2 et, d'autre part, lorsque ces limites sont calculées par la méthode de l'erreur-standard. Dans le premier cas, ces limites sont égales à 6,5 et 84,8 et, dans le second cas, elles sont égales à 0 et 78,9. Les divergences dans les limites de contrôle induisent des divergences dans les efficacités qui, pour les valeurs de σ considérées, ne dépassent cependant pas 0,08. On notera également que le calcul des limites de contrôle par la méthode exacte n'est pas prévu dans le logiciel Minitab.

lcl	6.53445	
ucl	84.7713	
Row	S	EFFIC
1	40	0.997372
2	80	0.656339
3	120	0.263517
4	160	0.109363

lcl	0	
ucl	78.9071	
Row	S	EFFIC
1	40	0.996339
2	80	0.579105
3	120	0.214654
4	160	0.086118

Figure 4. Calcul de l'efficacité du contrôle des écarts-types pour des limites de contrôle calculées de manière exacte et de manière approchée.

5. Macro PCCEF : contrôle des proportions

Les limites de contrôle sont déterminées par les relations suivantes :

$$LINF = p_0 - u_{1-\alpha/2} \sqrt{p_0(1-p_0)/n} \text{ ou } 0 \quad \text{et} \quad LSUP = p_0 + u_{1-\alpha/2} \sqrt{p_0(1-p_0)/n},$$

p_0 étant la proportion d'articles non conformes dans la population, n l'effectif de l'échantillon, $u_{1-\alpha/2}$ le pourcentile de $1 - \alpha/2$ de la distribution normale réduite.

L'efficacité, pour une valeur p et un effectif n donnés, est calculée par la relation :

$$\beta(p) = P(LINF \leq X \leq LSUP | p, n),$$

X étant la variable décrivant la distribution du nombre d'articles non conformes dans l'échantillon. On considère que X suit une distribution binomiale de paramètres n et p .

A titre d'illustration, supposons que, à partir d'observations préliminaires, la proportion d'articles non conformes dans une production donnée soit estimée à 4,9 %. La figure 5 donne la courbe d'efficacité d'un contrôle basé sur des échantillons de 50 observations.

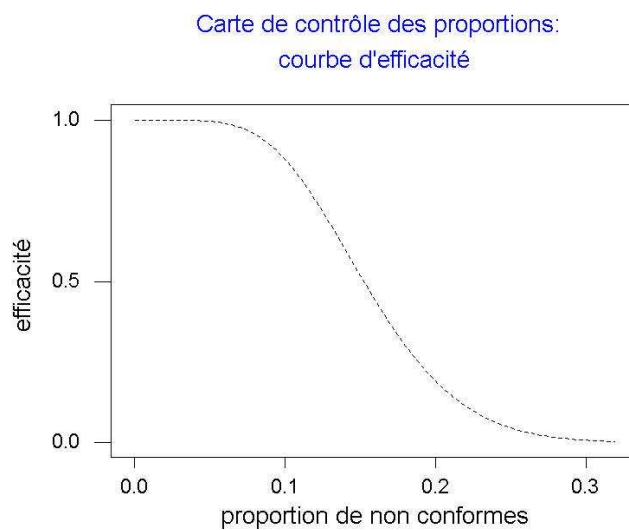


Figure 5. Courbe d'efficacité du contrôle des proportions de non conformes ($p_0 = 0,049$ et $n = 50$).

6. Macro CCCEF : contrôle des non-conformités

Les limites de contrôle des nombres de non-conformités sont déterminées par les relations suivantes :

$$LINF = m_0 - u_{1-\alpha/2} \sqrt{m_0} \text{ ou } 0 \quad \text{et} \quad LSUP = m_0 + u_{1-\alpha/2} \sqrt{m_0} ,$$

m_0 étant le nombre moyen de non-conformités présentes sur un nombre fixé d'unités et $u_{1-\alpha/2}$ étant le pourcentile $1 - \alpha/2$ de la distribution normale réduite.

L'efficacité, pour une valeur m de la moyenne, est calculée par la relation :

$$\beta(m) = P(LINF \leq X \leq LSUP | m),$$

X étant la variable décrivant le nombre de non-conformités observé sur l'échantillon. On considère que X suit une distribution de POISSON de paramètre m .

A titre d'illustration, la figure 6 donne les limites de contrôle et les efficacités pour des procédés caractérisés par des nombres moyens de non-conformités par échantillon de 0,05, 0,5 et 5.

Les efficacités sont calculées pour les valeurs de m égales à $a m_0$ ($a = 0, \dots, 4$). Ces efficacités pourraient par exemple correspondre à des échantillons de différentes tailles prélevés dans un procédé caractérisé par une même valeur du nombre moyen de non-conformités par article. Ainsi, si le nombre moyen de non-conformités par article est de 0,05, les trois cas envisagés correspondraient à des échantillons d'effectifs 1, 10 et 100.

Pour $m > m_0$, la figure 6 montre que les probabilités diminuent lorsque m augmente, ce qui s'explique facilement si on considère que les trois cas correspondent à des échantillons d'effectifs croissants prélevés dans une même production. D'autre part, on remarque également que pour des valeurs faibles de m_0 , la probabilité de considérer que le procédé est sous contrôle lorsque $m = m_0$ n'est pas égal à 0,9973, c'est-à-dire au complément à l'unité de α . Ainsi, pour $m = m_0 = 0,05$ l'efficacité n'est que de 0,95. Cette situation est à mettre en relation avec le caractère approché de la méthode de construction des limites de contrôle, dont nous avons parlé dans l'introduction : pour les cartes de contrôle des non-conformités, la méthode approximative de calcul des limites de contrôle conduit à un risque de première espèce α , lorsque $m < 1$, qui peut s'écarter de manière importante du risque nominal, qui dans tous les exemples présentés, est de 0,0027.


```

m0      0.0500000
alph    0.00270000
u       3.00000
lcl     0
ucl     0.720821

```

Row	C1	C2
1	0.000000	1.00000
2	0.050000	0.95123
3	0.100000	0.90484
4	0.150000	0.86071
5	0.200000	0.81873

```

m0      0.500000
alph    0.00270000
u       3.00000
lcl     0
ucl     2.62132

```

Row	C3	C4
1	0.00000	1.00000
2	0.50000	0.98561
3	1.00000	0.91970
4	1.50000	0.80885
5	2.00000	0.67668

```

m0      5.00000
alph    0.00270000
u       3.00000
lcl     0
ucl     11.7082

```

Row	C5	C6
1	0.0000	1.00000
2	5.0000	0.99455
3	10.0000	0.69678
4	15.0000	0.18475
5	20.0000	0.02139

Figure 6. Efficacités du contrôle des nombres de non-conformités pour différentes valeurs de m_0 et pour des valeurs de m égales à 0, 1, 2, 3 ou 4 fois m_0 .

7. Conclusions

Les courbes d'efficacité associées aux cartes de contrôle présentent un intérêt pratique puisqu'elles donnent la probabilité de ne pas détecter un dérèglement du procédé en fonction de l'importance de ce dérèglement. Les courbes d'efficacité sont aussi un outil utile pour la détermination de la taille des échantillons à prélever, celle-ci étant directement liée à l'efficacité, comme nous l'avons montré par les exemples.

Les différentes macros ont été conçues de manière à assurer une certaine souplesse d'utilisation. Les options par défaut rendent leur utilisation particulièrement simple, la syntaxe pouvant être limitée à la commande principale. D'autre part, les options permettent des utilisations plus spécifiques, notamment dans un objectif de comparaison d'efficacité dans différentes situations.

Grâce à cette souplesse, les macros représentent aussi un outil pédagogique intéressant dans le cadre de l'étude des méthodes de contrôle statistique en cours de production.

8. Bibliographie

PALM R. [1996]. Cartes de contrôle : les cartes de SHEWHART. *Notes Stat. Inform.* (Gembloux) 96/2, 41 p.

ANNEXE

Commandes utilisées pour l'établissement des figures 1 à 6

```
# figure 1
%a:\Moyccef 612.17 40.185 5;
  moy 610 700 1;
noprnt.

# figure 2
%a:\Moyccef 612.17 40.185 1;
  MOY 612.17 772.91 40.185;
noprnt;
NOPLOT;
out c1 c2.

%a:\Moyccef 612.17 40.185 5;
  MOY 612.17 772.91 40.185;
noprnt;
noplot;
out c1 c3.

%a:\Moyccef 612.17 40.185 20;
  MOY 612.17 772.91 40.185;
noprnt;
noplot;
out c1 c4.

name c1 'moyenne' c2 'eff/n=1' c3 'eff/n=5' c4 'eff/n=20'
print c1-c4

# figure 3
%a:\Medccef 612.17 40.185 5;
  MOY 612.17 772.91 40.185;
noprnt;
noplot;
out c1 c5.
name c3 'eff/moy' c5 'eff/med'
print c1 c3 c5

# figure 4
%a:\etccef 40.185 5;
  ET 40 160 40;
  noplot;
  CHI2 .
%a:\etccef 40.185 5;
  ET 40 160 40;
  noplot.
```

```
# figure 5
%a:\pccef 0.049 50;
noprnt .
```

```
# figure 6
%a:\cccef .05;
out c1 c2;
MOY 0 .2 .05;
noplnt.
```

```
%a:\cccef .50;
out c3 c4;
MOY 0 2 .5;
noplnt.
```

```
%a:\cccef 5;
out c5 c6;
MOY 0 20 5;
noplnt.
```