

# Chapitre 10

## Élasticité plane

### 10.1 État plan de contrainte

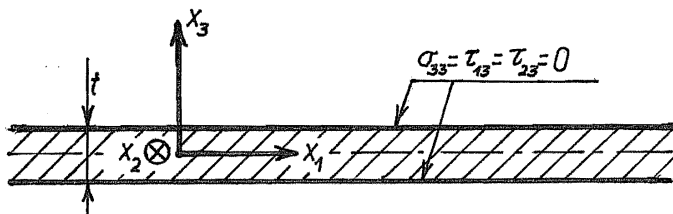


FIGURE 10.1 – Etat plan de contrainte

Considérons (*fig. 10.1*) une plaque d'épaisseur  $t$ , sollicitée dans son plan et ayant ses surfaces  $x_3 = \pm t/2$  libres. On aura donc

$$\sigma_{33} = \tau_{\alpha 3} = 0 \text{ en } x_3 = \pm t/2 \quad (10.1)$$

en convenant que les indices grecs peuvent valoir 1 ou 2. La sollicitation étant symétrique par rapport au plan moyen, on aura encore

$$\begin{cases} u_\alpha(x_\beta, x_3) &= u_\alpha(x_\beta, -x_3) \\ u_3(x_\beta, x_3) &= -u_3(x_\beta, -x_3) \end{cases} \quad (10.2)$$

Dans ces conditions, comme

$$2\varepsilon_{\alpha 3} = D_{\alpha}u_3 + D_3u_{\alpha}$$

on a encore

$$\int_{-t/2}^{t/2} 2\varepsilon_{\alpha 3} dx_3 = D_{\alpha} \int_{-t/2}^{t/2} u_3 dx_3 + [u_{\alpha}]_{-t/2}^{t/2} = 0 \quad (10.3)$$

ce qui entraîne

$$\int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\alpha 3} dx_3 = 2G \int_{-t/2}^{t/2} \varepsilon_{\alpha 3} dx_3 = 0 \quad (10.4)$$

Les équations locales d'équilibre selon  $x_1$  et  $x_2$  s'écrivent

$$D_{\beta}\sigma_{\alpha\beta} + D_3\tau_{\alpha 3} + f_{\alpha} = 0$$

Intégrons les sur l'épaisseur, et introduisons les *moyennes*

$$\sigma_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \quad \text{et} \quad f_{\alpha}^* = \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{t/2} f_{\alpha} dx_3$$

On obtient

$$D_{\beta}\sigma_{\alpha\beta}^* + \frac{1}{t} [\tau_{\alpha 3}]_{-t/2}^{t/2} + f_{\alpha}^* = 0$$

ce qui, vu les conditions (10.1), se ramène à

$$D_{\beta}\sigma_{\alpha\beta}^* + f_{\alpha}^* = 0 \quad (10.5)$$

De même, intégrons sur l'épaisseur l'équation d'équilibre selon  $x_3$ , qui s'écrit

$$D_{\alpha}\tau_{\alpha 3} + D_3\sigma_{33} + f_3 = 0$$

Il vient

$$D_{\alpha} \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\alpha 3} dx_3 + [\sigma_{33}]_{-t/2}^{t/2} + \int_{-t/2}^{t/2} f_3 dx_3 = 0$$

Tenant compte des relations (10.1) et (10.4), on obtient la condition supplémentaire

$$\int_{-t/2}^{t/2} f_3 dx_3 = 0 \quad (10.6)$$

qui ne fait qu'exprimer la symétrie de la sollicitation par rapport au plan moyen de la plaque.

Les équations constitutives locales s'écrivent

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{\alpha\beta} - \nu(\sigma_{\gamma\gamma} + \sigma_{33})\delta_{\alpha\beta}] \\ \varepsilon_{\alpha 3} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{\alpha 3} \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{33} - \nu(\sigma_{\gamma\gamma} + \sigma_{33})]\end{aligned}$$

En les intégrant sur l'épaisseur, on obtient respectivement

$$\begin{aligned}\int_{-t/2}^{t/2} \varepsilon_{\alpha\beta} dx_3 &= \frac{1}{E} \left[ (1+\nu) \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \right. \\ &\quad \left. - \nu \left( \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\gamma\gamma} dx_3 + \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{33} dx_3 \right) \delta_{\alpha\beta} \right] \\ 0 &= 0 \\ \int_{-t/2}^{t/2} \varepsilon_{33} dx_3 &= \frac{1}{E} \left[ (1+\nu) \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{33} dx_3 \right. \\ &\quad \left. - \nu \left( \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\gamma\gamma} dx_3 + \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{33} dx_3 \right) \right]\end{aligned}$$

Faisant l'hypothèse supplémentaire

$$\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{33} dx_3 = 0 \quad (10.7)$$

et définissant en outre les *déformations moyennes*

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{t/2} \varepsilon_{\alpha\beta} dx_3 = \frac{1}{2} (D_\alpha u_\beta^* + D_\beta u_\alpha^*) \quad (10.8)$$

où apparaissent naturellement les *déplacements moyens*

$$u_\alpha^* = \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{t/2} u_\alpha dx_3 \quad (10.9)$$

ainsi que le *gonflement*

$$q = \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{t/2} \varepsilon_{33} dx_3 = \frac{1}{t} [u_3]_{-t/2}^{t/2} \quad (10.10)$$

on obtient

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_{\alpha\beta}^* - \nu\sigma_{\gamma\gamma}^*\delta_{\alpha\beta}] \quad (10.11)$$

et

$$q = -\frac{\nu}{E}\sigma_{\gamma\gamma}^* \quad (10.12)$$

Les relations (10.11) s'inversent sous la forme

$$\begin{cases} \sigma_1^* &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1^* + \nu\varepsilon_2^*) \\ \sigma_2^* &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2^* + \nu\varepsilon_1^*) \\ \tau^* &= G\gamma^* \end{cases} \quad (10.13)$$

en écrivant

$$\varepsilon_1^* = \varepsilon_{11}^*, \quad \varepsilon_2^* = \varepsilon_{22}^*, \quad \gamma^* = 2\varepsilon_{12}^*$$

et

$$\sigma_1^* = \sigma_{11}^*, \quad \sigma_2^* = \sigma_{22}^*, \quad \tau^* = \tau_{12}^*$$

et on a donc

$$\varepsilon_1^* = D_1 u_1^*, \quad \varepsilon_2^* = D_2 u_2^*, \quad \gamma^* = D_1 u_2^* + D_2 u_1^* \quad (10.14)$$

Les équations moyennes (10.5), (10.13) et (10.14), fondées sur les hypothèses (10.1), (10.2), (10.6) et (10.7), forment le système de l'état plan de contrainte. Il s'agit évidemment d'une *théorie approchée* et, en particulier, les équations générales de Navier et de Beltrami-Michell ne s'appliquent pas directement à cet état. Dans la pratique courante, on omet les étoiles dans les notations. Il ne faut pas perdre de vue, cependant, que les solutions obtenues représentent des *moyennes*.

## 10.2 État plan de déformation

L'état plan de déformation, qui s'applique aux corps très longs dans la direction  $x_3$  et sollicités uniquement selon  $x_1$  et  $x_2$ , se caractérise par les conditions

$$\begin{cases} u_\alpha &= u_\alpha(x_\beta) \\ u_3 &= 0 \\ f_3 &= 0 \end{cases} \quad (10.15)$$

On a alors *exactement*

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2}(D_\alpha u_3 + D_3 u_\alpha) = 0, \quad \varepsilon_{33} = 0 \quad (10.16)$$

Par conséquent, comme

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \nu\sigma_{\alpha\alpha})$$

on obtient

$$\sigma_{33} = \nu\sigma_{\alpha\alpha} \quad (10.17)$$

et, dès lors,

$$\sigma_{kk} = \sigma_{\alpha\alpha} + \sigma_{33} = (1 + \nu)\sigma_{\alpha\alpha} \quad (10.18)$$

Introduisant ces résultats dans les autres relations de Hooke, on obtient

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{E}[(1 + \nu)\sigma_{\alpha\beta} - \nu\sigma_{kk}\delta_{\alpha\beta}] \\ &= \frac{1}{E}[(1 + \nu)\sigma_{\alpha\beta} - \nu(1 + \nu)\sigma_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}] \end{aligned} \quad (10.19)$$

et

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2G}\tau_{\alpha 3} \quad (10.20)$$

Ces dernières équations entraînent

$$\tau_{\alpha 3} = 0 \quad (10.21)$$

On peut unifier la théorie des deux états plans en écrivant la relation (10.19) sous la forme

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{\hat{E}}[(1 + \hat{\nu})\sigma_{\alpha\beta} - \hat{\nu}\sigma_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}] \quad (10.22)$$

Pour réaliser l'équivalence, il faut que le *module de Young effectif*  $\hat{E}$  et le *coefficient de Poisson effectif*  $\hat{\nu}$  vérifient les relations

$$\frac{1 + \hat{\nu}}{\hat{E}} = \frac{1 + \nu}{E} \quad (10.23)$$

et

$$\frac{\hat{\nu}}{\hat{E}} = \frac{\nu(1 + \nu)}{E} = \frac{\nu(1 + \hat{\nu})}{\hat{E}} \quad (10.24)$$

Cette dernière condition implique

$$\nu = \frac{\hat{\nu}}{1 + \hat{\nu}} \quad (10.25)$$

ce qui s'inverse en

$$\hat{\nu} = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (10.26)$$

et

$$\hat{E} = E \frac{1 + \hat{\nu}}{1 + \nu} = E \frac{1 + \frac{\nu}{1 - \nu}}{1 + \nu} = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (10.27)$$

La relation inverse est

$$E = \hat{E} \frac{1 + 2\hat{\nu}}{(1 + \hat{\nu})^2} \quad (10.28)$$

On notera enfin que la relation (10.23) équivaut à

$$\hat{G} = G \quad (10.29)$$

### 10.3 Équations générales des états plans

Contrairement à la théorie de l'état plan de contrainte, celle de l'état plan de déformation est rigoureuse et on peut lui appliquer les équations de Navier et de Beltrami-Michell. L'équivalence exposée ci-dessus permet d'obtenir les équations correspondantes pour l'état plan de contrainte par l'artifice suivant :

- dans un premier temps, on particularise les équations générales de l'élasticité au cas de la déformation plane ;
- ensuite, on y fait apparaître les valeurs effectives  $\hat{E}$  et  $\hat{\nu}$  ;
- il suffit alors de remplacer  $\hat{E}$  par  $E$  et  $\hat{\nu}$  par  $\nu$  pour obtenir les équations relatives à l'état plan de contrainte.

#### 10.3.1 Équation plane de Navier

Dans l'équation générale

$$G \left[ \frac{2(1 - \nu)}{1 - 2\nu} \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} \right] + \mathbf{f} = 0$$

on calcule

$$\begin{aligned} 1 - \nu &= 1 - \frac{\hat{\nu}}{1 + \hat{\nu}} = \frac{1}{1 + \hat{\nu}} \\ 1 - 2\nu &= 1 - \frac{2\hat{\nu}}{1 + \hat{\nu}} = \frac{1 - \hat{\nu}}{1 + \hat{\nu}} \end{aligned}$$

ce qui mène à l'équation

$$G \left[ \frac{2}{1-\hat{\nu}} \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mathbf{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} \right] + \mathbf{f} = 0 \quad (10.30)$$

Posant

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{div} \mathbf{u}}{1-\hat{\nu}} = \frac{D_1 u_1 + D_2 u_2}{1-\hat{\nu}} \quad (10.31)$$

$$2\omega = D_1 u_2 - D_2 u_1 \quad (10.32)$$

on a

$$\mathbf{rot} \mathbf{u} = 2\omega \mathbf{e}_3$$

et

$$\mathbf{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ 0 & 0 & 2\omega \end{vmatrix} = 2(\mathbf{e}_1 D_2 \omega - \mathbf{e}_2 D_1 \omega)$$

ce qui permet d'écrire l'équation (10.30) sous la forme

$$\begin{cases} D_1 \varepsilon - D_2 \omega + \frac{f_1}{2G} = 0 \\ D_2 \varepsilon + D_1 \omega + \frac{f_2}{2G} = 0 \end{cases} \quad (10.33)$$

### 10.3.2 Équation plane de Beltrami-Michell

L'équation générale s'écrit

$$D_{kk} \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} D_{ij} \sigma_{kk} + \left( D_i f_j + D_j f_i + \frac{\nu}{1-\nu} D_k f_k \delta_{ij} \right) = 0$$

On a d'abord

$$\sigma_{kk} = (1+\nu) \sigma_{\gamma\gamma}$$

De plus, comme  $f_3 = 0$ ,

$$\frac{\nu}{1-\nu} D_k f_k = \hat{\nu} D_\gamma f_\gamma$$

Il vient donc, comme toutes les dérivées par rapport à  $x_3$  sont nulles,

$$D_{\gamma\gamma} \sigma_{ij} + D_{ij} \sigma_{\gamma\gamma} + (D_i f_j + D_j f_i + \hat{\nu} D_\gamma f_\gamma \delta_{ij}) = 0$$

Pour  $(i, j) = (\alpha, \beta)$ , on obtient

$$D_{\gamma\gamma}\sigma_{\alpha\beta} + D_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\gamma} + (D_{\alpha}f_{\beta} + D_{\beta}f_{\alpha} + \hat{\nu}D_{\gamma}f_{\gamma}\delta_{\alpha\beta}) = 0 \quad (10.34)$$

Pour  $(i, j) = (\alpha, 3)$ , il vient, du fait que  $\sigma_{\alpha 3} = 0$ ,

$$D_{\alpha 3}\sigma_{\gamma\gamma} + D_3f_{\alpha} = 0$$

équation identiquement vérifiée. Enfin, pour  $(i, j) = (3, 3)$ , on obtient

$$D_{\gamma\gamma}\sigma_{33} + D_{33}\sigma_{\gamma\gamma} + \hat{\nu}D_{\gamma}f_{\gamma} = 0$$

et, en exprimant  $\sigma_{33}$  en termes de  $\sigma_{\gamma\gamma}$ ,

$$\sigma_{33} = \nu\sigma_{\gamma\gamma} = \frac{\hat{\nu}}{1 + \hat{\nu}}\sigma_{\gamma\gamma}$$

il vient

$$D_{\gamma\gamma}\sigma_{\alpha\alpha} + (1 + \hat{\nu})D_{\gamma}f_{\gamma} = 0 \quad (10.35)$$

Or, en contractant (10.34) sur  $\alpha$  et  $\beta$ , on obtient précisément

$$2D_{\gamma\gamma}\sigma_{\alpha\alpha} + D_{\alpha}f_{\alpha} + D_{\alpha}f_{\alpha} + 2\hat{\nu}D_{\alpha}f_{\alpha} = 0$$

c'est-à-dire (10.35), qui est donc un corollaire de (10.34). Les seules équations de Beltrami-Michell à prendre en compte sont donc les équations (10.34).

## 10.4 Fonction d'Airy

Lorsque les forces de volume sont nulles, les équations d'équilibre s'écrivent

$$\begin{cases} D_1\sigma_{11} + D_2\sigma_{12} &= 0 \\ D_1\sigma_{12} + D_2\sigma_{22} &= 0 \end{cases}$$

Pour un corps *simplement connexe*, il existe donc deux fonctions  $\psi_1$  et  $\psi_2$  telles que

$$\begin{cases} \sigma_{11} &= D_2\psi_1, & \sigma_{12} &= -D_1\psi_1 \\ \sigma_{12} &= D_2\psi_2, & \sigma_{22} &= -D_1\psi_2 \end{cases} \quad (10.36)$$

Pour garantir la symétrie des contraintes, on doit avoir

$$D_1\psi_1 + D_2\psi_2 = 0 \quad (10.37)$$



ce qui entraîne, toujours pour un corps simplement connexe, l'existence d'une fonction  $\varphi$  telle que

$$\psi_1 = D_2\varphi, \quad \psi_2 = -D_1\varphi \quad (10.38)$$

C'est la *fonction d'Airy*. Les contraintes en dérivent par les relations

$$\sigma_{11} = D_{22}\varphi, \quad \sigma_{22} = D_{11}\varphi, \quad \sigma_{12} = -D_{12}\varphi \quad (10.39)$$

Sur la frontière du corps (*fig. 10.2*), les tractions de surface  $T_1$  et  $T_2$  vérifient

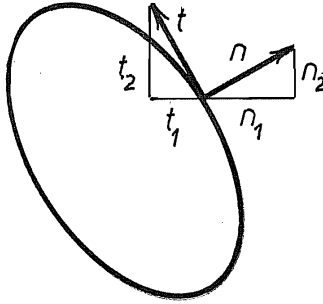


FIGURE 10.2 – Normale et tangente au contour

$$\begin{aligned} T_1 &= n_1 D_2 \psi_1 - n_2 D_1 \psi_1 \\ T_2 &= n_1 D_2 \psi_2 - n_2 D_1 \psi_2 \end{aligned}$$

et, comme le vecteur unitaire tangent  $\mathbf{t}$  est lié au vecteur unitaire normal  $\mathbf{n}$  par les relations

$$n_1 = t_2, \quad n_2 = -t_1$$

on obtient

$$T_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial t}, \quad T_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \quad (10.40)$$

ou encore

$$T_1 = \frac{\partial}{\partial t} D_2 \varphi, \quad T_2 = -\frac{\partial}{\partial t} D_1 \varphi \quad (10.41)$$

Lorsque le plan considéré est percé de trous, (*fig. 10.3*), l'univocité de la fonction d'Airy est soumise à certaines conditions supplémentaires. Tout d'abord,

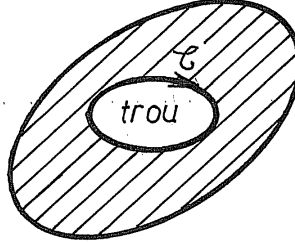


FIGURE 10.3 – Plan percé d'un trou

$\psi_1$  et  $\psi_2$  ne sont univoques que si, sur le contour  $C$  de chaque trou,

$$0 = \int_C \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t} ds = \int_C T_\alpha ds$$

c'est-à-dire que *la résultante des tractions de surface au bord du trou doit être nulle*. Supposons cette condition satisfaite. Alors, l'univocité de la fonction d'Airy nécessite que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_C \frac{\partial \varphi}{\partial t} ds \\ &= \int_C (t_1 D_1 \varphi + t_2 D_2 \varphi) ds \\ &= \int_C (-t_1 \psi_2 + t_2 \psi_1) ds \\ &= \int_C \left( -\psi_2 \frac{dx_1}{dt} + \psi_1 \frac{dx_2}{dt} \right) ds \end{aligned}$$

Intégrant par parties et tenant compte de l'univocité de  $\psi_1$  et  $\psi_2$ , on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \text{saut}(-\psi_2 x_1 + \psi_1 x_2) + \int_C \left( x_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - x_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \right) ds \\ &= \int_C (x_1 T_2 - x_2 T_1) ds \end{aligned}$$

ce qui exprime la nullité du *moment* des tractions de surface.

En conclusion, *la condition d'univocité de la fonction d'Airy sur un corps multiplément connexe est que les forces appliquées sur le bord de chaque trou forment un torseur nul*.

## 10.5 Compatibilité en termes de la fonction d'Airy

Appliquant les équations de Beltrami-Michell (10.34) aux contraintes écrites sous la forme (10.39), on obtient, en posant

$$\nabla^2 = D_{11} + D_{22} \quad (10.42)$$

les conditions

$$\begin{cases} \nabla^2 D_{22}\varphi + D_{11}\nabla^2\varphi = 0 \\ -\nabla^2 D_{12}\varphi + D_{12}\nabla^2\varphi = 0 \\ \nabla^2 D_{11}\varphi + D_{22}\nabla^2\varphi = 0 \end{cases}$$

qui se ramènent visiblement à une seule équation de compatibilité, à savoir,

$$\nabla^4\varphi = 0 \quad (10.43)$$

## 10.6 Problèmes axisymétriques plans<sup>1</sup>

Un problème plan est *axisymétrique* si sa géométrie est circulaire et la sollicitation, purement radiale. Dans les coordonnées polaires, on a alors

$$\mathbf{u} = u\mathbf{e}_r \quad (10.44)$$

et

$$\mathbf{rotu} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_3 \\ D_r & 0 & 0 \\ u & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

si bien que l'équation plane de Navier se ramène à

$$\frac{2G}{1-\nu} \mathbf{graddivu} = \frac{E}{1-\nu^2} \mathbf{graddivu} = -\mathbf{f}$$

soit, pour  $\mathbf{f} = f\mathbf{e}_r$ ,

$$\frac{E}{1-\nu^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru) \right) = -f$$

Pour  $f = 0$ , tout d'abord, on a

$$\frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru) = 2A = \text{cte}$$

---

1. Les sections qui suivent sont systématiquement écrites dans le cadre de l'état plan de contrainte. Pour convertir ces résultats au cas de l'état plan de déformation, il suffit d'y remplacer  $E$  et  $\nu$  par  $\hat{E}$  et  $\hat{\nu}$  tels que définis en section 10.2.

d'où

$$\frac{E}{1-\nu^2} \frac{d}{dr}(ru) = 2Ar$$

et

$$\frac{E}{1-\nu^2} ru = Ar^2 + B$$

soit

$$u = \frac{1-\nu^2}{E} \left( Ar + \frac{B}{r} \right) \quad (10.45)$$

Pour le cas  $f \neq 0$ , cherchons une solution particulière de la forme

$$u = rC(r) + \frac{D(r)}{r}$$

On a alors

$$\frac{d}{dr}(ru) = \frac{d}{dr}(r^2C + D) = 2Cr + C'r^2 + D'$$

et

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(ru) = 2C + C'r + \frac{D'}{r}$$

Posant

$$D' = -C'r^2 \quad (10.46)$$

on obtient alors

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(ru) \right) = 2C' = -\frac{1-\nu^2}{E} f$$

et

$$D' = -C'r^2 = \frac{1-\nu^2}{2E} fr^2$$

d'où

$$\begin{aligned} C &= -\frac{1-\nu^2}{2E} \int f dr \\ D &= \frac{1-\nu^2}{2E} \int fr^2 dr \end{aligned}$$

La solution générale de l'équation est donc

$$u = \frac{1-\nu^2}{E} \left[ Ar + \frac{B}{r} - \frac{r}{2} \int f dr + \frac{1}{2r} \int fr^2 dr \right] \quad (10.47)$$

On en déduit aisément les déformations

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{du}{dr} = \frac{1-\nu^2}{E} \left[ A - \frac{B}{r^2} - \frac{1}{2} \int f dr - \frac{1}{2r^2} \int f r^2 dr \right] \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} = \frac{1-\nu^2}{E} \left[ A + \frac{B}{r^2} - \frac{1}{2} \int f dr + \frac{1}{2r^2} \int f r^2 dr \right]\end{aligned}$$

auxquelles correspondent les contraintes

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) \\ &= (1+\nu)A - (1-\nu) \frac{B}{r^2} - \frac{1+\nu}{2} \int f dr - \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{r^2} \int f r^2 dr \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r) \\ &= (1+\nu)A + (1-\nu) \frac{B}{r^2} - \frac{1+\nu}{2} \int f dr + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{r^2} \int f r^2 dr\end{aligned}\quad (10.48)$$

## 10.7 Cylindre épais sous pressions interne et externe

Ce problème a été résolu par Lamé et Clapeyron en 1833 [55].

### 10.7.1 Cas général

Pour traiter le cas d'un cylindre sous pressions interne et externe, il suffit, dans les équations (10.48), de poser  $\mathbf{f} = 0$  et

$$\begin{cases} \sigma_r(R_i) &= (1+\nu)A - (1-\nu) \frac{B}{R_i^2} &= -p_i \\ \sigma_r(R_e) &= (1+\nu)A - (1-\nu) \frac{B}{R_e^2} &= -p_e \end{cases}$$

En éliminant alternativement  $A$  et  $B$ , on obtient

$$\begin{aligned}(1+\nu)A &= \frac{\frac{p_i}{R_e^2} - \frac{p_e}{R_i^2}}{\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_e^2}} = \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \\ (1+\nu)B &= \frac{p_i - p_e}{\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_e^2}} = \frac{(p_i - p_e) R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2}\end{aligned}$$

d'où

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} - \frac{p_i - p_e}{R_e^2 - R_i^2} \frac{R_i^2 R_e^2}{r^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} + \frac{p_i - p_e}{R_e^2 - R_i^2} \frac{R_i^2 R_e^2}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad (10.49)$$

Les contraintes circonférentielles aux rayons extrêmes sont

$$\begin{aligned} \sigma_\theta(R_i) &= \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2 + (p_i - p_e) R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \\ &= p_i \frac{R_i^2 + R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} - p_e \frac{2R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \end{aligned} \quad (10.50)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta(R_e) &= \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2 + (p_i - p_e) R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \\ &= p_i \frac{2R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} - p_e \frac{2R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \end{aligned} \quad (10.51)$$

Enfin, le déplacement radial est donné par

$$u = \frac{1 - \nu^2}{E} \left\{ \frac{r}{1 + \nu} \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} + \frac{1}{1 - \nu} \frac{p_i - p_e}{R_e^2 - R_i^2} \frac{R_i^2 R_e^2}{r} \right\} \quad (10.52)$$

aux rayons extrêmes, il vaut

$$\left. \begin{aligned} u(R_i) &= \frac{R_i}{E(R_e^2 - R_i^2)} \{ p_i [(1 - \nu) R_i^2 + (1 + \nu) R_e^2] - 2p_e R_e^2 \} \\ u(R_e) &= \frac{R_e}{E(R_e^2 - R_i^2)} \{ 2p_i R_i^2 - p_e [(1 - \nu) R_e^2 + (1 + \nu) R_i^2] \} \end{aligned} \right\} \quad (10.53)$$

### 10.7.2 Cas du cylindre très mince

Examinons le cas particulier d'un cylindre *très mince*. Posant, dans ce cas,

$$t = R_e - R_i, \quad R = \frac{R_e + R_i}{2} \quad (10.54)$$

la condition de minceur s'écrit

$$\frac{t}{R} = \eta \ll 1 \quad (10.55)$$

Alors,

$$\begin{aligned} r &= R(1 + \rho\eta), & \rho &\in [-1/2, 1/2] \\ R_i &= R(1 - \eta/2), & R_e &= R(1 + \eta/2) \end{aligned}$$

et, en notant  $p^*$  l'ordre de grandeur des pressions,

$$\left\{ \begin{array}{ll} R_e^2 - R_i^2 &= R^2(1 + \eta + \frac{\eta^2}{4}) - R^2(1 - \eta + \frac{\eta^2}{4}) = 2R^2\eta \\ R_i^2 &= R^2[1 - \eta + \mathcal{O}(\eta^2)] \\ R_e^2 &= R^2[1 + \eta + \mathcal{O}(\eta^2)] \\ r^2 &= R^2[1 + 2\rho\eta + \mathcal{O}(\eta^2)] \\ R_i^2 R_e^2 &= R^4[1 + \mathcal{O}(\eta^2)] \\ p_i R_i^2 - p_e R_e^2 &= p_i R^2(1 - \eta) - p_e R^2(1 + \eta) + \mathcal{O}(p^* \eta^2) \\ &= R^2[(p_i - p_e) - \eta(p_i + p_e) + \mathcal{O}(p^* \eta^2)] \end{array} \right.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{2R^2\eta} [R^2(p_i - p_e) - \eta R^2(p_i + p_e) - (p_i - p_e)R^2(1 - 2\rho\eta) + \mathcal{O}(\eta^2 p^*)] \\ &= -\frac{1}{2}[(p_i + p_e) - 2\rho(p_i - p_e)] + \mathcal{O}(\eta p^*) \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{2R^2\eta} [R^2(p_i - p_e) - \eta R^2(p_i + p_e) + (p_i - p_e)R^2(1 - 2\rho\eta) + \mathcal{O}(\eta^2 p^*)] \\ &= \frac{p_i - p_e}{\eta} - \frac{1}{2}[(p_i + p_e) - 2\rho(p_i - p_e)] + \mathcal{O}(\eta p^*) \end{aligned}$$

La plus grande contrainte est visiblement

$$\sigma_\theta = (p_i - p_e) \frac{R}{t} + \mathcal{O}(p^*) \quad (10.56)$$

Comme

$$\sigma_r = \mathcal{O}(p^*) \quad (10.57)$$

cette contrainte est négligeable devant la première. On a d'autre part

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{E} \left[ (1 - \nu) \frac{R^2(p_i - p_e)}{2R\eta} + (1 + \nu) \frac{R^2(p_i - p_e)}{2R\eta} + \mathcal{O}(p^* R) \right] \\ &= \frac{(p_i - p_e)R}{E\eta} + \mathcal{O}\left(\frac{p^* R}{E}\right) \\ &= \frac{(p_i - p_e)R^2}{Et} + \mathcal{O}\left(\frac{p^* R}{E}\right) \end{aligned} \quad (10.58)$$

Les formules (10.56) à (10.58) sont connues sous le nom de *formules des chaudières*.

### 10.7.3 Cas du rayon intérieur tendant vers zéro

Dans le cas d'un cylindre creux sous pression externe, on a

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sigma_\theta(R_i) & = & -\frac{2p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \\ \sigma_r(R_i) & = & 0 \\ u(R_i) & = & -\frac{2p_e R_e^2 R_i}{E(R_e^2 - R_i^2)} \\ u(R_e) & = & -\frac{p_e R_e}{E(R_e^2 - R_i^2)} [(1 - \nu)R_e^2 + (1 + \nu)R_i^2] \end{array} \right.$$

Dans ces formules, faisons tendre le rayon intérieur vers zéro. Il vient

$$\left. \begin{array}{lcl} \lim_{R_i \rightarrow 0} \sigma_\theta(R_i) & = & -2p_e, \quad \lim_{R_i \rightarrow 0} \sigma_r(R_i) = 0 \\ \lim_{R_i \rightarrow 0} u(R_i) & = & 0, \quad \lim_{R_i \rightarrow 0} u(R_e) = -\frac{p_e R_e (1 - \nu)}{E} \end{array} \right\} \quad (10.59)$$

Comparons cette solution à celle d'un *cylindre plein*. Dans ce dernier cas, le déplacement devant être fini en  $r = 0$ , on doit avoir  $B = 0$  et

$$u = \frac{1 - \nu^2}{E} A r$$

ce qui donne

$$\sigma_r = (1 + \nu)A, \quad \sigma_\theta = (1 + \nu)A \quad (10.60)$$

d'où

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_\theta &= -p_e \\ A &= -\frac{p_e}{1 + \nu} \\ u &= -\frac{1 - \nu}{E} p_e r \end{aligned} \quad (10.61)$$

Le comparaison de ces résultats avec les formules (10.59) montre que les déplacements sont identiques, mais que la contrainte maximale dans le cylindre ayant un trou infiniment petit est double de celle qui règne dans le cylindre plein. Le trou infiniment petit provoque donc une concentration de contrainte mesurée par

$$\alpha_k = \frac{\lim_{R_i \rightarrow 0} \sigma_\theta(R_i)}{\sigma_\theta(\text{sans trou})} = 2$$



### 10.7.4 Cas du rayon extérieur tendant vers l'infini

Le cas  $R_e \rightarrow \infty$  correspond à un tunnel profondément enfoncé dans le sol. On a alors, pour  $p_e = 0$  et en posant  $n = R_i/R_e$ ,

$$\sigma_r = p_i \frac{n^2}{1-n^2} - \frac{p_i}{1-n^2} \frac{R_i^2}{r^2} \longrightarrow -p_i \frac{R_i^2}{r^2} \quad (10.62)$$

et

$$\sigma_\theta = p_i \frac{n^2}{1-n^2} + \frac{p_i}{1-n^2} \frac{R_i^2}{r^2} \longrightarrow p_i \frac{R_i^2}{r^2} \quad (10.63)$$

La contrainte maximale vaut donc  $p_i$ . Le déplacement se calcule par

$$u = \frac{1}{E} \left[ (1-\nu) r p_i \frac{n^2}{1-n^2} + (1+\nu) \frac{p_i}{1-n^2} \frac{R_i^2}{r} \right] \longrightarrow \frac{1+\nu}{E} p_i \frac{R_i^2}{r} \quad (10.64)$$

Sa valeur maximale est

$$u(R_i) = \frac{1+\nu}{E} p_i R_i$$

## 10.8 Fretage

Le *fretage* consiste à assembler un arbre à un moyeu dont le diamètre est très légèrement supérieur à celui de l'arbre. Pour réaliser cet assemblage, on peut

- Utiliser une presse si l'interférence est modérée.
- Chauffer le moyeu de manière à le dilater, enfiler l'arbre et laisser refroidir.
- Refroidir l'arbre de manière à le contracter, l'enfiler dans le moyeu et le laisser reprendre la température ambiante.

La pression régnant à l'interface arbre/moyeu permet alors de transmettre un couple ou une force axiale par frottement.

Avant l'assemblage, l'arbre a un rayon extérieur  $R_{ea}$  et le moyeu, un rayon intérieur  $R_{im}$ . Après assemblage, leur rayon commun sera  $R$ , les deux pièces ayant subi des variations de rayon

$$u_{im} = R - R_{im} > 0 \text{ et } u_{ea} = R - R_{ea} < 0$$

La condition d'équilibre est l'égalité des pressions :

$$p = -\sigma_{rim} = -\sigma_{rea}$$

Par les formules des cylindres épais, on a, en posant  $Q_m = R_{im}/R_{em}$  et  $Q_a = R_{ia}/R_{ea}$ ,

$$\begin{aligned} u_{im} &= \frac{R_{im}}{E_m(R_{em}^2 - R_{im}^2)} p[(1 - \nu_m)R_{im}^2 + (1 + \nu_m)R_{em}^2] \\ &= \frac{pR_{im}}{E_m(1 - Q_m^2)} [(1 + \nu_m) + (1 - \nu_m)Q_m^2] \\ u_{ea} &= -\frac{R_{ea}}{E_a(R_{ea}^2 - R_{ia}^2)} p[(1 - \nu_a)R_{ea}^2 + (1 + \nu_a)R_{ia}^2] \\ &= -\frac{pR_{ea}}{E_a(1 - Q_a^2)} [(1 - \nu_a) + (1 + \nu_a)Q_a^2] \end{aligned}$$

ce que nous noterons simplement

$$u_{im} = C_m p R_{im}, \quad u_{ea} = -C_a p R_{ea} \quad (10.65)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} C_m &= \frac{1}{E_m} \left[ \frac{1 + Q_m^2}{1 - Q_m^2} + \nu_m \right] \\ C_a &= \frac{1}{E_a} \left[ \frac{1 + Q_a^2}{1 - Q_a^2} - \nu_a \right] \end{aligned} \right\} \quad (10.66)$$

Comme on doit avoir

$$|u_{im}| + |u_{ea}| = u_{im} - u_{ea} = R - R_{im} - R + R_{ea} = R_{ea} - R_{im}$$

on obtient la condition

$$p(C_m R_{im} + C_a R_{ea}) = R_{ea} - R_{im} \quad (10.67)$$

En général, on se donne la pression à obtenir, à partir du couple et de la force axiale à transmettre. Supposant alors que l'on se fixe d'avance le rayon  $R_{im}$ , on déduit de la relation précédente

$$R_{ea}(1 - C_a p) = R_{im}(1 + C_m p)$$

soit

$$R_{ea} = R_{im} \frac{1 + C_m p}{1 - C_a p}$$

En pratique, la différence de rayons est très petite, de l'ordre de quelques centièmes de millimètres pour un diamètre de 50 *mm*. En d'autres termes,

$$\frac{R_{ea} - R_{im}}{R} = \frac{\delta}{R} \ll 1$$

ce qui permet d'écrire sans grande erreur la formule (10.67) sous la forme

$$\frac{\delta}{R} = (C_a + C_m)p$$

qui est celle qu'utilisent les ingénieurs.

## 10.9 Disque en rotation

Considérons à présent un disque tournant à la vitesse angulaire  $\omega$ . Un élément de volume  $dV$  de ce disque subit la force centrifuge

$$f dV = \rho dV \omega^2 r$$

ce qui donne

$$f = \rho \omega^2 r$$

On a alors

$$\begin{aligned} \int f dr &= \rho \omega^2 \frac{r^2}{2} \\ \int f r^2 dr &= \rho \omega^2 \frac{r^4}{4} \end{aligned}$$

En introduisant ces valeurs dans les formules (10.47) et (10.48), on obtient

$$\begin{aligned} u &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left[ Ar + \frac{B}{r} - \frac{\rho \omega^2 r^3}{4} + \frac{\rho \omega r^3}{8} \right] \\ &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left[ Ar + \frac{B}{r} - \frac{1}{8} \rho \omega^2 r^3 \right] \end{aligned} \quad (10.68)$$

et

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (1 + \nu)A - (1 - \nu)\frac{B}{r^2} - (1 + \nu)\frac{\rho \omega^2 r^2}{4} - (1 - \nu)\frac{\rho \omega^2 r^2}{8} \\ &= (1 + \nu)A - (1 - \nu)\frac{B}{r^2} - \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 r^2 \end{aligned} \quad (10.69)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta &= (1+\nu)A + (1-\nu)\frac{B}{r^2} - (1+\nu)\frac{\rho\omega^2 r^2}{4} + (1-\nu)\frac{\rho\omega^2 r^2}{8} \\
&= (1+\nu)A + (1-\nu)\frac{B}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 r^2
\end{aligned} \tag{10.70}$$

### 10.9.1 Disque plein de rayon extérieur $R_e$

Dans ce cas, on doit avoir  $B = 0$  pour que la solution soit finie à l'origine. En  $r = R_e$ , la condition  $\sigma_r = 0$  entraîne

$$(1+\nu)A = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 R_e^2$$

La solution est donc

$$u = \frac{1-\nu^2}{E}\frac{\rho\omega^2 r^2}{8} \left( \frac{3+\nu}{1+\nu} R_e^2 r - r^3 \right) \tag{10.71}$$

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 (R_e^2 - r^2) \tag{10.72}$$

$$\sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 \left( R_e^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 \right) \tag{10.73}$$

Les deux contraintes atteignent leur maximum au centre du disque, où

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 R_e^2$$

### 10.9.2 Disque creux de rayons extrêmes $R_i$ et $R_e$

Les conditions  $\sigma_r(R_i) = 0$  et  $\sigma_r(R_e) = 0$  s'écrivent ici

$$\begin{cases} (1+\nu)A - (1-\nu)\frac{B}{R_i^2} = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 R_i^2 \\ (1+\nu)A - (1-\nu)\frac{B}{R_e^2} = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 R_e^2 \end{cases}$$

On en déduit

$$(1-\nu)B \left( \frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_e^2} \right) = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 (R_e^2 - R_i^2)$$

soit

$$(1-\nu)B = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 R_e^2 R_i^2$$

et

$$(1 + \nu)A = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 (R_e^2 + R_i^2)$$

ce qui mène à la solution suivante :

$$u = \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{\rho \omega^2}{8} \left[ \frac{3 + \nu}{1 + \nu} (R_e^2 + R_i^2) r + \frac{3 + \nu}{1 - \nu} \frac{R_e^2 R_i^2}{r} - r^3 \right] \quad (10.74)$$

$$\sigma_r = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 \left[ (R_e^2 + R_i^2) - \frac{R_e^2 R_i^2}{r^2} - r^2 \right] \quad (10.75)$$

$$\sigma_\theta = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 \left[ (R_e^2 + R_i^2) + \frac{R_e^2 R_i^2}{r^2} - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} r^2 \right] \quad (10.76)$$

La contrainte radiale maximale se produit pour  $r = \sqrt{R_i R_e}$  et vaut

$$\sigma_r \max = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 (R_e^2 - R_i^2)$$

La contrainte azimutale maximale a lieu pour  $r = R_i$ . Elle vaut

$$\sigma_\theta \max = \frac{3 + \nu}{4} \rho \omega^2 \left( R_e^2 + \frac{1 - \nu}{3 + \nu} R_i^2 \right)$$

En particulier, pour  $R \rightarrow 0$ ,  $\sigma_\theta \max$  tend vers une valeur *double* de celle du disque plein. Ici encore,

$$\alpha_k = \frac{\sigma_\theta \max(R_i \rightarrow 0)}{\sigma_\theta \max(\text{plein})} = 2$$

## 10.10 Utilisation de la variable complexe [22, 62, 54, 75, 36]

### 10.10.1 Généralités

Les variables complexes rendent de grands services dans la résolution de nombreux problèmes plans. Commençons par rappeler qu'un nombre complexe  $a + ib$  peut être représenté comme un vecteur (a,b) dans l'espace  $R^2$  (fig. 10.4). Les changements d'axes orthogonaux sont très simples en variables complexes : si  $\eta$  est l'angle avec l'axe des  $x$  de la direction de la normale à une courbe (fig. 10.5), un vecteur

$$a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y = \alpha\mathbf{n} + \beta\mathbf{t}$$

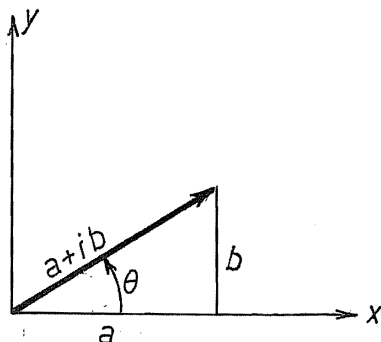


FIGURE 10.4 – Représentation d'un nombre complexe dans le plan

s'exprime par

$$\begin{aligned} a &= \alpha \cos \eta + \beta \sin \eta \\ b &= \alpha \sin \eta - \beta \cos \eta \end{aligned}$$

ce qui équivaut à

$$a + ib = e^{i\eta}(\alpha + i\beta) \quad (10.77)$$

Par ailleurs, on a la relation géométrique utile

$$\begin{aligned} \bar{a}b &= (a_1 - ia_2)(b_1 + ib_2) \\ &= (a_1b_1 + a_2b_2) + i(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\mathbf{a} \times \mathbf{b} \end{aligned} \quad (10.78)$$

en notant  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  pour la troisième composante du produit vectoriel. Deux vecteurs sont donc *orthogonaux* si  $\Re(\bar{a}b) = 0$  et on aura alors

$$\bar{a}b = i|a||b|$$

### 10.10.2 Fonctions analytiques et antianalytiques

La différentielle d'une fonction  $f(x, y)$  s'écrit en général

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

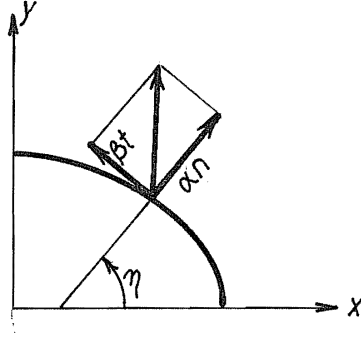


FIGURE 10.5 – Changement d'axes

Notant  $z = x + iy$ , on a

$$dx = \frac{dz + d\bar{z}}{2} \text{ et } dy = \frac{dz - d\bar{z}}{2i} = -\frac{i}{2}(dz - d\bar{z})$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} df &= \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} (dz + d\bar{z}) - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y} (dz - d\bar{z}) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z} \\ &= \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \end{aligned}$$

avec

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (10.79)$$

Cela étant, une fonction est *analytique* si elle ne dépend pas de  $\bar{z}$ , soit si

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0 \quad (10.80)$$

ce qui, sous forme réelle, s'écrit

$$\frac{\partial \Re f}{\partial x} = \frac{\partial \Im f}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Re f}{\partial y} = -\frac{\partial \Im f}{\partial x} \quad (10.81)$$

Une fonction est *antianalytique* si elle ne dépend pas de  $z$ , ce qui s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0 \quad (10.82)$$

ou sous forme réelle :

$$\frac{\partial \Re f}{\partial x} = -\frac{\partial \Im f}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Re f}{\partial y} = \frac{\partial \Im f}{\partial x} \quad (10.83)$$

Notons que si une fonction est  $\begin{cases} \text{analytique} \\ \text{antianalytique} \end{cases}$ ,  $\bar{f}$  est  $\begin{cases} \text{antianalytique} \\ \text{analytique} \end{cases}$ , car le passage de  $f$  à  $\bar{f}$  se fait en changeant le signe de  $\Im f$ . De plus, si  $f$  est analytique, on a

$$\begin{aligned} \overline{\left( \frac{df}{dz} \right)} &= \frac{1}{2} \overline{\left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)} \\ &= \frac{1}{2} \overline{\left( \frac{\partial \Re f}{\partial x} + i \frac{\partial \Im f}{\partial x} - i \frac{\partial \Re f}{\partial y} + \frac{\partial \Im f}{\partial y} \right)} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Re f}{\partial x} - i \frac{\partial \Im f}{\partial x} + i \frac{\partial \Re f}{\partial y} + \frac{\partial \Im f}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\Re f - i \Im f) + i \frac{\partial}{\partial y} (\Re f - i \Im f) \right] \\ &= \frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} \end{aligned}$$

Il est donc légitime d'écrire cette dérivée  $\bar{f}'$ .

### 10.10.3 Coordonnées curvilignes orthogonales

Considérons deux nouvelles coordonnées  $\alpha$  et  $\beta$  et le changement de variables

$$x = x(\alpha, \beta), \quad y = y(\alpha, \beta) \quad (10.84)$$

Elles définissent un système orthogonal si les nombres  $\partial z / \partial \alpha$  et  $\partial z / \partial \beta$  sont représentés dans  $R^2$  par des vecteurs orthogonaux, soit si (*fig. 10.6*)

$$\Re \left( \frac{\partial \bar{z}}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial \beta} \right) = 0 \quad (10.85)$$



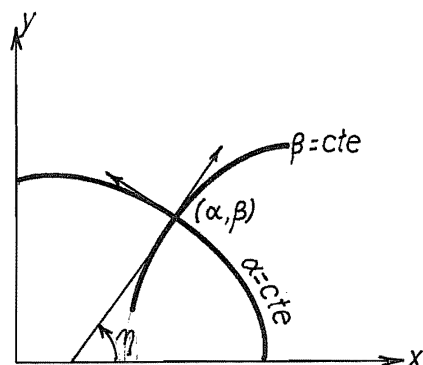


FIGURE 10.6 – Coordonnées curvilignes orthogonales

quels que soient  $\alpha$  et  $\beta$ . Dans ce cas, les courbes  $\alpha = \text{cte}$  et  $\beta = \text{cte}$  forment un réseau orthogonal. En un point  $(\alpha, \beta)$  quelconque, la normale unitaire à la courbe  $\alpha = \text{cte}$  est donnée par

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial \alpha}}{\left| \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right|}$$

Si  $\eta$  est l'angle que fait cette normale avec l'axe de  $x$ , on a

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial \alpha}}{\left| \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right|} = e^{i\eta} \quad (10.86)$$

Le vecteur

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial \beta}}{\left| \frac{\partial z}{\partial \beta} \right|}$$

est normal au précédent. Nous le supposons obtenu en tournant le précédent de  $\pi/2$  dans le sens trigonométrique<sup>2</sup>. Alors,

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial \beta}}{\left| \frac{\partial z}{\partial \beta} \right|} = ie^{i\eta}$$

Notant

$$A = \left| \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right|, \quad B = \left| \frac{\partial z}{\partial \beta} \right| \quad (10.87)$$

on a donc

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = Ae^{i\eta}, \quad \frac{\partial z}{\partial \beta} = Bie^{i\eta} \quad (10.88)$$

Il en résulte évidemment

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial z}{\partial \beta} d\beta = e^{i\eta}(Ad\alpha + Bd\beta) \quad (10.89)$$

et

$$d\bar{z} = e^{-i\eta}(Ad\alpha - iBd\beta) \quad (10.90)$$

Ces relations s'inversent en

$$\begin{aligned} Ad\alpha &= \frac{1}{2} (e^{-i\eta} dz + e^{i\eta} d\bar{z}) \\ Bd\beta &= -\frac{i}{2} (e^{-i\eta} dz - e^{i\eta} d\bar{z}) \end{aligned} \quad (10.91)$$

Soit alors une fonction  $f(x, y)$ . On a

$$\begin{aligned} df &= \frac{1}{A} \frac{\partial f}{\partial \alpha} Ad\alpha + \frac{1}{B} \frac{\partial f}{\partial \beta} Bd\beta \\ &= \frac{1}{A} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{1}{2} (e^{-i\eta} dz + e^{i\eta} d\bar{z}) - \frac{1}{B} \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{i}{2} (e^{-i\eta} dz - e^{i\eta} d\bar{z}) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial f}{\partial \alpha} - \frac{i}{B} \frac{\partial f}{\partial \beta} \right) e^{-i\eta} dz + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{i}{B} \frac{\partial f}{\partial \beta} \right) e^{i\eta} d\bar{z} \end{aligned}$$

---

2. Si ce n'est pas le cas, il suffit de permuter le rôle des variables  $\alpha$  et  $\beta$

ce qui implique

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}e^{-i\eta} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial f}{\partial \alpha} - \frac{i}{B} \frac{\partial f}{\partial \beta} \right) = e^{-i\eta} \mathcal{D}f \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}e^{i\eta} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{i}{B} \frac{\partial f}{\partial \beta} \right) = e^{i\eta} \bar{\mathcal{D}}f \end{cases} \quad (10.92)$$

en introduisant les opérateurs

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{i}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right), \quad \bar{\mathcal{D}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{i}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \quad (10.93)$$

En particulier, la condition d'analyticité de  $f$  s'écrit

$$\bar{\mathcal{D}}f = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{i}{B} \frac{\partial f}{\partial \beta} \right) = 0 \quad (10.94)$$

Un système de coordonnées  $(\alpha, \beta)$  définit une *transformation conforme* si  $A=B$ . Dans ce cas,

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2A} \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} - i \frac{\partial}{\partial \beta} \right), \quad \bar{\mathcal{D}} = \frac{1}{2A} \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} + i \frac{\partial}{\partial \beta} \right)$$

c'est-à-dire que les fonctions analytiques sont, dans ce système, également fonctions de  $\gamma = \alpha + i\beta$  seulement. On vérifie aisément qu'alors,

$$A = B = \left| \frac{dz}{d\gamma} \right|$$

et

$$e^{i\eta} = \frac{\left( \frac{dz}{d\gamma} \right)}{\left| \frac{dz}{d\gamma} \right|}$$

#### 10.10.4 Transformation des vecteurs

Comme le montre la figure 10.7, un vecteur  $(T_x, T_y)$  dont l'image complexe est  $T_x + iT_y$ , se transforme selon la normale et la tangente à la courbe  $\alpha = \text{cte}$  par

$$\begin{aligned} T_x &= T_\alpha \cos \eta - T_\beta \sin \eta \\ T_y &= T_\alpha \sin \eta + T_\beta \cos \eta \end{aligned}$$

ce qui donne

$$T_x + iT_y = T_\alpha e^{i\eta} + iT_\beta e^{i\eta} = e^{i\eta} (T_\alpha + iT_\beta) \quad (10.95)$$

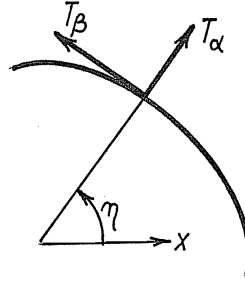


FIGURE 10.7 – Transformation d'un vecteur

### 10.10.5 Transformation des tenseurs symétriques

Dans le système d'axes  $(x, y)$ , le tenseur  $\sigma$  s'applique à un vecteur  $\mathbf{n}$  pour donner un nouveau vecteur  $\mathbf{T}$ , selon la loi

$$\begin{aligned} T_x &= \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y \\ T_y &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y \end{aligned}$$

On recherche les composantes de ce même tenseur dans le système  $(\alpha, \beta)$ , c'est-à-dire que ces composantes doivent vérifier

$$\begin{aligned} T_\alpha &= \sigma_\alpha n_\alpha + \tau_{\alpha\beta} n_\beta \\ T_\beta &= \tau_{\alpha\beta} n_\alpha + \sigma_\beta n_\beta \end{aligned}$$

A cette fin, on remarquera d'abord que

$$\begin{aligned} T_x + iT_y &= (\sigma_x + i\tau_{xy})n_x + (\tau_{xy} + i\sigma_y)n_y \\ &= (\sigma_x + i\tau_{xy})n_x + (\sigma_y - i\tau_{xy})in_y \\ &= \left[ \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) + i\tau_{xy} \right] n_x \\ &\quad + \left[ \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) - i\tau_{xy} \right] in_y \end{aligned}$$

ce qui donne l'expression complexe de l'application d'un tenseur sur un vecteur :

$$T_x + iT_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}(n_x + in_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy})(n_x - in_y) \quad (10.96)$$

Cette expression équivaut à

$$e^{i\eta}(T_\alpha + iT_\beta) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} e^{i\eta}(n_\alpha + in_\beta) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy}) e^{-i\eta}(n_\alpha - in_\beta)$$

soit

$$T_\alpha + iT_\beta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}(n_\alpha + in_\beta) + e^{-2i\eta} \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy})(n_\alpha - in_\beta)$$

c'est-à-dire que

$$\begin{cases} \sigma_\alpha + \sigma_\beta &= \sigma_x + \sigma_y \\ \sigma_\alpha - \sigma_\beta + 2i\tau_{\alpha\beta} &= e^{-2i\eta}(\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy}) \end{cases} \quad (10.97)$$

### 10.10.6 Structure générale d'une fonction harmonique réelle

On peut écrire l'opérateur de Laplace sous la forme

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) f \\ &= 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} f \end{aligned}$$

Pour  $\nabla^2 f = 0$ , on a donc

$$\frac{\partial f}{\partial z} = F'(z)$$

et

$$f = F(z) + G(\bar{z}) \quad (10.98)$$

Si la fonction  $f$  est réelle, on a

$$\Im f = \Im F + \Im G = 0$$

Comme les fonctions  $F$  et  $G$  vérifient les relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Re F}{\partial x} &= \frac{\partial \Im F}{\partial y}, & \frac{\partial \Im F}{\partial x} &= -\frac{\partial \Re F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Re G}{\partial x} &= -\frac{\partial \Im G}{\partial y}, & \frac{\partial \Im G}{\partial x} &= \frac{\partial \Re G}{\partial y} \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Re F}{\partial x} &= \frac{\partial \Im F}{\partial y} = -\frac{\partial \Im G}{\partial y} = \frac{\partial \Re G}{\partial x} \\ \frac{\partial \Re F}{\partial y} &= -\frac{\partial \Im F}{\partial x} = \frac{\partial \Im G}{\partial x} = \frac{\partial \Re G}{\partial y}\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\Re F = \Re G + \text{cte}$$

Faisant rentrer la constante dans  $F$ , on obtient  $G = \bar{F}$ , d'où

$$f = F + \bar{F}, \text{ avec } F \text{ analytique} \quad (10.99)$$

C'est la forme générale des solutions réelles de l'équation de Laplace.

### 10.10.7 Structure générale d'une fonction biharmonique réelle

L'équation biharmonique  $\nabla^4 \varphi = 0$  équivaut évidemment à

$$\nabla^2 \varphi = \text{harmonique}$$

ce qui permet d'écrire

$$\nabla^2 \varphi = 4F' + 4\bar{F}'$$

$F$  étant une fonction analytique. Le facteur 4 est introduit pour la commodité. Cela revient encore à dire

$$4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} \varphi = 4F' + 4\bar{F}'$$

Intégrant, on obtient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \bar{z}F' + \bar{F} + G'(z)$$

Une nouvelle intégration donne

$$\varphi = \bar{z}F + z\bar{F} + G(z) + H(\bar{z})$$

Les deux premières fonctions de cette expression ont une somme réelle. Par le même raisonnement que ci-dessus, on trouve que la somme ne sera réelle que si  $H = \bar{G}$ . La solution générale est donc

$$\varphi = \bar{z}F + z\bar{F} + G + \bar{G} \text{ avec } F \text{ et } G \text{ analytiques} \quad (10.100)$$

Cette formule est due à Goursat [41].

Une autre expression peut être obtenue en posant

$$F(z) = zH(z)$$

Il vient alors

$$\varphi = |z|^2(H + \bar{H}) + (G + \bar{G})$$

ou encore,

$$\varphi = (x^2 + y^2)h(x, y) + g(x, y) \quad (10.101)$$

où  $h$  et  $g$  sont deux fonctions harmoniques.

## 10.11 Forme complexe de la solution des équations de l'élasticité plane en l'absence de forces de volume [54, 62]

### 10.11.1 Déplacements

Les équations de Navier, sous la forme (10.33), avec  $f_1 = f_2 = 0$ , sont des équations de Cauchy-Riemann. On peut donc écrire

$$\varepsilon + i\omega = \frac{4}{E}F'(z) \quad (10.102)$$

On a alors

$$\varepsilon = \frac{2}{E}(F' + \bar{F}'), \quad \omega = \frac{2}{Ei}(F' - \bar{F}')$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}(u + iv) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1 - \nu}{2} \varepsilon + i\omega \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}(u + iv) &= \frac{1 - \nu}{E}(F' + \bar{F}') + \frac{2}{E}(F' - \bar{F}') \\ &= \frac{3 - \nu}{E}F' - \frac{1 + \nu}{E}\bar{F}' \end{aligned}$$

Intégrant cette équation, on trouve la forme générale des déplacements :

$$u + iv = \frac{1}{E}[(3 - \nu)F - (1 + \nu)z\bar{F}' - (1 + \nu)\bar{K}'] \quad (10.103)$$

### 10.11.2 Contraintes

Les contraintes se déduisent de ce résultat par dérivation. Notant d'abord que

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{1 - \nu} = \frac{1}{E(1 - \nu)}(\sigma_x - \nu\sigma_y + \sigma_y - \nu\sigma_x) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{E}$$

on obtient, en tenant compte de (10.102),

$$(\sigma_x + \sigma_y) + iE\omega = 4F' \quad (10.104)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u + iv) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \gamma_{xy} \end{aligned}$$

La loi de Hooke donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \frac{1}{2E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \sigma_y + \nu\sigma_x) \\ &= \frac{1 + \nu}{2E}(\sigma_x - \sigma_y) \\ &= \frac{1}{4G}(\sigma_x - \sigma_y) \end{aligned}$$

et

$$\frac{i}{2} \gamma_{xy} = \frac{i}{4G} 2\tau_{xy}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} &= 4G \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u + iv) \\ &= \frac{2E}{1 + \nu} \frac{1}{E} [-(1 + \nu)z\bar{F}'' - (1 + \nu)\bar{K}''] \end{aligned}$$

soit

$$\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} = -2z\bar{F}'' - 2\bar{K}'' \quad (10.105)$$



### 10.11.3 Fonctions de contrainte

Calculons à présent les fonctions de contrainte du premier ordre  $\psi_1$  et  $\psi_2$  et la fonction d'Airy  $\varphi$ . On remarquera d'abord que les relations

$$\psi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \psi_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

entraînent

$$\psi = \psi_1 + i\psi_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - i\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -i \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = -2i\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \quad (10.106)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + i \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \\ &= -i \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + i\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + i\frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) \\ &= -2i \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} + i\frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} \right) \end{aligned}$$

soit

$$\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} = -2i\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} \quad (10.107)$$

Enfin, comme

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x}, \quad \tau_{xy} - \tau_{xy} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} = 0$$

on a

$$2\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - i\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + i\frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} = -i(\sigma_x + \sigma_y) \quad (10.108)$$

Ces relations permettent de calculer la fonction  $\psi$ . Par (10.107) et (10.105), on a

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} = i(-z\bar{F}'' - \bar{K}'')$$

d'où

$$\psi = i(-z\bar{F}' - \bar{K}' - L) \quad (10.109)$$

$L$  étant une nouvelle fonction analytique. Par ailleurs, on déduit de (10.108) et (10.104)

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{i}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{i}{2}4\Re F' = -i(F' + \bar{F}')$$

ce qui entraîne

$$\psi = -i(F + z\bar{F}' + \bar{M}) \quad (10.110)$$

avec  $M$  analytique. La comparaison des résultats (10.109) et (10.110) donne

$$F = L, \quad \bar{M} = \bar{K}'$$

si bien que

$$\psi = -i(F + z\bar{F}' + \bar{K}') \quad (10.111)$$

On en déduit directement l'expression de la fonction d'Airy : comme

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = \frac{i}{2} \psi = \frac{1}{2} (F + z\bar{F}' + \bar{K}')$$

on obtient par intégration

$$\varphi = \frac{1}{2} (\bar{z}F + z\bar{F} + \bar{K} + N)$$

$N$  étant analytique. Pour que cette expression soit réelle, il faudra que  $N=K$ , ce qui mène à la forme définitive

$$\varphi = \frac{1}{2} (\bar{z}F + z\bar{F} + K + \bar{K}) \quad (10.112)$$

en bon accord avec l'expression de Goursat des fonctions biharmoniques.

#### 10.11.4 Calcul des contraintes en coordonnées curvilignes orthogonales

Dans le cas de coordonnées curvilignes orthogonales, le calcul des contraintes se fait simplement à partir des relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha + \sigma_\beta &= \sigma_x + \sigma_y \\ &= \nabla^2 \varphi \\ &= 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \\ &= 4e^{-i\eta} \mathcal{D} (e^{-i\eta} \bar{\mathcal{D}} \varphi) \end{aligned} \quad (10.113)$$

et

$$\begin{aligned}
 \sigma_\alpha - \sigma_\beta + 2i\tau_{\alpha\beta} &= e^{-2i\eta}(\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy}) \\
 &= -4e^{-2i\eta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z}^2} \\
 &= -4e^{-2i\eta} e^{i\eta} \overline{\mathcal{D}} (e^{i\eta} \overline{\mathcal{D}} \varphi) \\
 &= -4e^{-i\eta} \overline{\mathcal{D}} (e^{i\eta} \overline{\mathcal{D}} \varphi)
 \end{aligned} \tag{10.114}$$

### 10.11.5 Expression des tractions de surface

Les tractions de surface sur un bord sont données par

$$T_x = \frac{\partial \psi_1}{\partial t}, \quad T_y = \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \tag{10.115}$$

soit

$$T_x + iT_y = \frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{10.116}$$

En coordonnées curvilignes orthogonales,

$$T_\alpha + iT_\beta = e^{-i\eta}(T_x + iT_y) = e^{-i\eta} \frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{10.117}$$

## 10.12 Problème de Kolossoff (1910) [54]

On considère un plaque plane très large dans laquelle est percé un trou elliptique de demi-axes  $a$  et  $b$ , le grand axe étant incliné d'un angle  $\gamma$  par rapport à la direction des tractions à l'infini (*fig. 10.8*). On peut fonder l'étude de ce problème sur la transformation

$$z = f(\zeta) = c\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right), \quad 0 \leq m \leq 1, \quad c > 0 \tag{10.118}$$

qui, pour un bon choix de  $c$  et  $m$ , applique l'ellipse du plan des  $z$  en un cercle du plan des  $\zeta$ . En effet, pour  $|\zeta| = 1$ , on a

$$f(\zeta) = c(e^{i\theta} + me^{-i\theta})$$

soit

$$x = c(1 + m) \cos \theta, \quad y = c(1 - m) \sin \theta$$

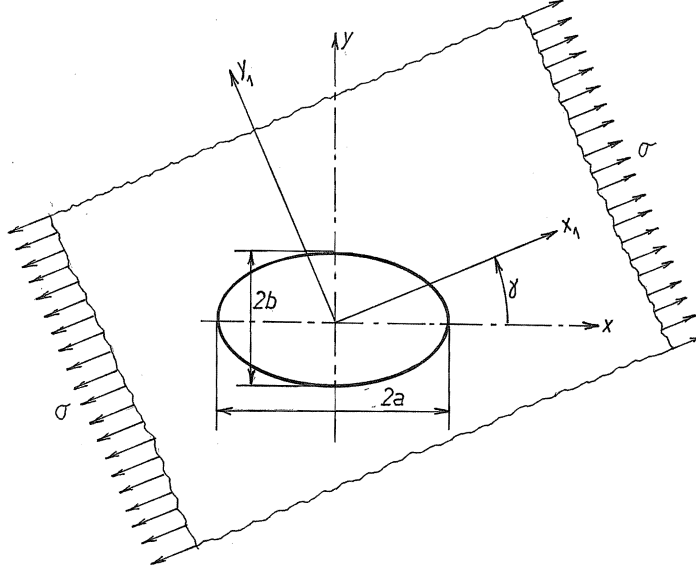


FIGURE 10.8 – Problème de Kolosov

si bien que

$$\frac{x^2}{c^2(1+m)^2} + \frac{y^2}{c^2(1-m)^2} = 1 \quad (10.119)$$

On reconnaît là l'équation d'une ellipse de demi-axes

$$a = c(1+m), \quad b = c(1-m) \quad (10.120)$$

Ces demi-axes étant donnés, on calcule  $c$  et  $m$  par

$$c = \frac{a+b}{2}, \quad m = \frac{a-b}{a+b} \quad (10.121)$$

L'inclinaison d'un angle  $\gamma$  du champ de contraintes par rapport à l'ellipse entraîne

$$\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} = \sigma_x + \sigma_y; \quad \sigma_{x_1} - \sigma_{y_1} + 2i\tau_{x_1y_1} = e^{-2i\gamma}(\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy})$$

Dès lors, à l'infini, les conditions

$$\sigma_{x_1} = \sigma, \quad \sigma_{y_1} = 0, \quad \tau_{x_1y_1} = 0$$

se transforment en

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma, \quad \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} = e^{2i\gamma}\sigma$$

ou, en termes des fonctions  $F$  et  $K$ ,

$$4\Re F' = \sigma, \quad -2(z\bar{F}''' + \bar{K}''') = \sigma e^{2i\gamma} \quad (10.122)$$

Les conditions sur le bord du trou sont

$$i\psi = F + z\bar{F} + \bar{K}' = 0 \quad (10.123)$$

En fait, nous exprimerons  $F$  et  $K$  en termes de  $\zeta$  :

$$F(z) = F(f(\zeta)) = F_1(\zeta), \quad K(z) = K(f(\zeta)) = K_1(\zeta)$$

On calculera donc

$$F'(z) = \frac{F'_1(\zeta)}{f'(\zeta)}, \quad K'(z) = \frac{K'_1(\zeta)}{f'(\zeta)}$$

et

$$\begin{aligned} F''(z) &= \frac{1}{f'(\zeta)} \frac{F_1''(\zeta)f'(\zeta) - F'_1(\zeta)f''(\zeta)}{[f'(\zeta)]^2} \\ &= \frac{F_1''f' - F'_1f''}{f'^3} \\ K''(z) &= \frac{K_1''f' - K'_1f''}{f'^3} \end{aligned}$$

Tenant compte de ces transformations, on aura

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_x + iu_y & = & \frac{1}{E} \left[ (3 - \nu)F_1 - (1 + \nu)\frac{f}{\bar{f}'}\bar{F}'_1 - (1 + \nu)\frac{\bar{K}'_1}{\bar{f}'} \right] \\ \sigma_x + \sigma_y & = & 4\Re\left(\frac{F'_1}{f'}\right) \\ \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} & = & -2 \left( f \frac{\bar{F}_1''\bar{f}' - \bar{F}'_1\bar{f}''}{\bar{f}'^3} + \frac{\bar{K}_1''\bar{f}' - \bar{K}'_1\bar{f}''}{\bar{f}'^3} \right) \\ i\psi & = & F_1 + \frac{f}{\bar{f}'}\bar{F}'_1 + \frac{\bar{K}'_1}{\bar{f}'} \end{array} \right. \quad (10.124)$$

A l'infini, on aura

$$f(\zeta) \approx c\zeta, \quad f'(\zeta) = c \left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right) \approx c, \quad f''(\zeta) = 2m\zeta^{-3} \approx 0 \quad (10.125)$$

ce qui permet d'écrire

$$\sigma \approx 4\Re \frac{F_1'}{c}, \quad \sigma e^{2i\gamma} \approx -2 \left( \frac{\zeta}{c} \bar{F}_1'' + \frac{\bar{K}_1''}{c^2} \right) \quad (10.126)$$

De telles conditions peuvent être vérifiées par des développements de la forme

$$F_1' = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta^{-n}, \quad K_1'' = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \zeta^{-n} \quad (10.127)$$

Les conditions à l'infini donnent immédiatement

$$\Re A_0 = \frac{\sigma c}{4}, \quad B_0 = -\frac{\sigma c^2}{2} e^{-2i\gamma} \quad (10.128)$$

Il nous faut à présent intégrer les déplacements pour vérifier leur univocité. On a

$$\begin{cases} F_1 &= A_0 \zeta + A_1 \ln \zeta + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \frac{\zeta^{1-n}}{1-n} \\ K_1' &= B_0 \zeta + B_1 \ln \zeta + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{\zeta^{1-n}}{1-n} \end{cases}$$

Les seuls termes qui n'assurent pas l'univocité sont ceux en  $\ln \zeta$ , qui changent de définition à chaque tour du trou. Ces termes sont

$$\frac{1}{E} \left[ (3 - \nu) A_1 \ln \zeta - (1 + \nu) B_1 \frac{\ln \zeta}{f'} \right]$$

d'où la condition  $A_1 = B_1 = 0$ .

Venons-en aux conditions au bord du trou, représenté dans le plan des  $\zeta$  par le cercle  $|\zeta| = 1$ . On a

$$\begin{cases} f = c \left( \zeta + \frac{m}{\zeta} \right) = c(e^{i\theta} + me^{-i\theta}) = ce^{i\theta}(1 + me^{-2i\theta}) \\ f' = c \left( 1 - \frac{m}{\zeta^2} \right) = c(1 - me^{-2i\theta}) \end{cases}$$

La condition  $i\psi = 0$  équivaut à la suivante :

$$0 = \bar{f}'F_1 + f\bar{F}'_1 + \bar{K}'_1 = (1 - me^{2i\theta})F_1 + (e^{i\theta} + me^{-i\theta})\bar{F}'_1 + \bar{K}'_1$$

avec

$$\begin{cases} F_1 &= A_0 e^{i\theta} - \sum_{n=2}^{\infty} A_n \frac{e^{i(1-n)\theta}}{n-1} \\ \bar{F}'_1 &= \bar{A}_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n e^{in\theta} \\ \bar{K}'_1 &= \bar{B}_0 e^{-i\theta} - \sum_{n=2}^{\infty} \bar{B}_n \frac{e^{i(1-n)\theta}}{n-1} \end{cases}$$

En identifiant les coefficients des différentes puissances de  $e^{i\theta}$ , on obtient les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &\mapsto A_0 + A_2 m + \bar{A}_0 + \bar{A}_2 m - \frac{\bar{B}_2}{c} = 0 \\ e^{2i\theta} &\mapsto \bar{A}_3 m - \frac{1}{2} \frac{\bar{B}_3}{c} = 0 \\ e^{3i\theta} &\mapsto -A_0 m + \bar{A}_2 + m\bar{A}_4 - \frac{\bar{B}_4}{c} = 0 \\ e^{ik\theta}, k > 3 &\mapsto \bar{A}_{k-1} + m\bar{A}_{k+1} + \frac{\bar{B}_{k+1}}{kc} = 0 \\ e^{-i\theta} &\mapsto -A_2 + \bar{A}_0 m + \frac{A_4 m}{3} + \frac{\bar{B}_0}{c} = 0 \\ e^{-ik\theta}, k > 1 &\mapsto -\frac{A_{k+1}}{k} + m\frac{A_{k-1}}{k-2} = 0 \end{aligned}$$

Cherchons une solution telle que  $A_k = 0, k \geq 3$  et  $B_k = 0, k \geq 5$ . Tenant compte des conditions (10.128) et supposant  $\Im A_0 = 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} e^{2i\theta} &\mapsto B_3 = 0 \\ e^{-i\theta} &\mapsto A_2 = m\bar{A}_0 + \frac{\bar{B}_0}{c} = \frac{\sigma c}{4}(m - 2e^{2i\gamma}) \\ e^{3i\theta} &\mapsto B_4 = 3c(A_2 - A_0 m) = -\frac{3\sigma c^2}{2}e^{2i\gamma} \\ e^{i\theta} &\mapsto B_2 = c(\bar{A}_0 + A_0 + m\bar{A}_2 + mA_2) = \frac{\sigma c^2}{2}(1 + m^2 - 2m \cos 2\gamma) \end{aligned}$$

Les fonctions cherchées sont donc

$$\begin{cases} F_1' &= \frac{\sigma c}{4} + \frac{\sigma c}{4}(m - 2e^{2i\gamma})\zeta^{-2} \\ K_1'' &= -\frac{\sigma c^2}{2}e^{-2i\gamma} + \frac{\sigma c^2}{2}(1 + m^2 - 2m \cos \gamma)\zeta^{-2} - \frac{3\sigma c^2}{2}e^{2i\gamma}\zeta^{-4} \end{cases} \quad (10.129)$$

Au bord du trou, la contrainte normale est évidemment nulle, si bien que

$$\sigma_t = \sigma_x + \sigma_y = 4\Re F' = 4\Re \left( \frac{F_1'}{f'} \right) = \sigma \Re \frac{1 + (m - 2e^{2i\gamma})\zeta^{-2}}{1 - m\zeta^{-2}}$$

comme  $|\zeta| = 1$ , on a  $\zeta = e^{i\theta}$ , ce qui donne

$$\sigma_t = \sigma \frac{1 - m^2 + 2m \cos 2\gamma - 2 \cos(2\gamma - 2\theta)}{1 + m^2 - 2m \cos 2\theta} \quad (10.130)$$

Examinons deux cas particuliers.

1. Pour  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , le grand axe du trou est perpendiculaire au champ de contrainte principal et

$$\sigma_t = \sigma \frac{1 - m^2 - 2m + 2 \cos 2\theta}{1 + m^2 - 2m \cos 2\theta}$$

Son maximum se produit pour  $\theta = 0$  et vaut

$$\sigma_t \max = \sigma \frac{3 - 2m - m^2}{(1 - m)^2} = \sigma \frac{3 + m}{1 - m} = \sigma \left( 1 + 2 \frac{1 + m}{1 - m} \right) = \sigma \left( 1 + 2 \frac{a}{b} \right)$$

le coefficient de concentration de contrainte vaut donc

$$\alpha_k = \frac{\sigma_t \max}{\sigma} = 1 + 2 \frac{a}{b} \quad (10.131)$$

C'est la conclusion fondamentale du problème de Kolossoff.

2. Pour  $\gamma = 0$ , le petit axe du trou est perpendiculaire au champ de contrainte principal. On a

$$\sigma_t = \sigma \frac{1 - m^2 + 2m - 2 \cos 2\theta}{1 + m^2 - 2m \cos 2\theta}$$

Le maximum se produit alors en  $\theta = \frac{\pi}{2}$  et vaut

$$\sigma_t \max = \sigma \left( 1 + 2 \frac{b}{a} \right)$$



On peut exprimer les résultats précédents sous une autre forme : au voisinage du sommet de l'ellipse, on peut écrire

$$x = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \approx a - \frac{ay^2}{2b^2} = a - \frac{y^2}{2R}$$

où  $R$  est le rayon de courbure. On a donc

$$R = \frac{b^2}{a}, \quad \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{R}{a}}, \quad \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{a}{R}}$$

et, en notant  $T$  le demi-axe  $a$ , on a donc

$$\alpha_k = 1 + 2\sqrt{\frac{T}{R}} \quad (10.132)$$

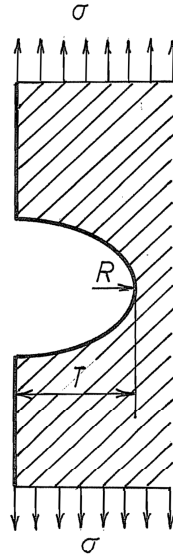


FIGURE 10.9 – Entaille elliptique

Cette formule, due à Inglis (1913), est fréquemment employée, même lorsque le trou n'est pas elliptique. On l'utilise également pour les *entailles elliptiques*

(fig. 10.9). C'est là une approximation, car cela suppose que l'on peut couper la tôle du problème de Kolossoff le long de son axe sans rien changer, ce qui serait vrai si l'on avait  $\sigma_t = 0$  en  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Or, en fait, en ce point,

$$\sigma_t = \sigma \frac{1 - m^2 - 2m - 2}{1 + m^2 + 2m} = -\sigma$$

et cette valeur n'est négligeable devant le maximum que pour les très grandes valeurs de  $T/R$ .

### 10.13 Problème de Kirsch (1898)

Le problème de Kirsch est le cas particulier du précédent où l'ellipse est un cercle, ce qui revient à dire que  $m = 0$ . On a alors

$$a = b = c = R, \quad z = R\zeta, \quad f' = c = R, \quad \gamma = 0$$

et

$$\begin{aligned} F' &= \frac{F'_1}{c} = \frac{\sigma}{4} \left( 1 - 2 \frac{R^2}{z^2} \right) \\ &= \frac{\sigma}{4} \left( 1 - 2 \frac{R^2}{r^2} e^{-2i\theta} \right) \\ K'' &= \frac{K_1''}{c^2} = -\frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} \frac{R^2}{r^2} - \frac{3}{2} \sigma \frac{R^2}{z^4} \\ &= -\frac{\sigma}{2} \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} e^{-2i\theta} + 3 \frac{R^4}{r^4} e^{-4i\theta} \right) \\ F''' &= \sigma \frac{R^2}{z^3} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4\Re F' = \sigma \left( 1 - 2 \frac{R^2}{r^2} \cos 2\theta \right) \\ \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau xy &= -2(z\bar{F}''' + \bar{K}''') \\ &= -2\sigma R^2 \frac{z}{\bar{z}^3} + \sigma \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} e^{2i\theta} + 3 \frac{R^4}{r^4} e^{4i\theta} \right) \\ &= \sigma \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} e^{2i\theta} - 2 \frac{R^2}{r^2} e^{4i\theta} + 3 \frac{R^4}{r^4} e^{4i\theta} \right) \end{aligned}$$

et, en composantes polaires,

$$\begin{aligned}\sigma_r + \sigma_\theta &= \sigma \left( 1 - 2 \frac{R^2}{r^2} \cos 2\theta \right) \\ \sigma_r - \sigma_\theta + 2i\tau_{r\theta} &= e^{-2i\theta} (\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy}) \\ &= \sigma \left( e^{-2i\theta} - \frac{R^2}{r^2} - 2 \frac{R^2}{r^2} e^{2i\theta} + 3 \frac{R^4}{r^4} e^{2i\theta} \right)\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{cases} \sigma_r &= \frac{\sigma}{2} \left[ \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \left( 1 - 4 \frac{R^2}{r^2} + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma}{2} \left[ \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - \left( 1 + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right] \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\sigma}{2} \left( 1 + 2 \frac{R^2}{r^2} - 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \sin 2\theta \end{cases} \quad (10.133)$$

Au bord du trou, la contrainte  $\sigma_\theta$  vaut

$$\sigma_\theta = \sigma(1 - 2 \cos 2\theta)$$

Elle atteint son maximum en  $\theta = \pi/2$ , où elle vaut  $3\sigma$ . La perturbation de l'état de contrainte décroît comme  $1/r^2$ . Son gradient relatif est donné par

$$\chi = \left| \frac{1}{\sigma_\theta} \frac{d\sigma_\theta}{dr} \right|_{\text{au maximum}} = \frac{7}{3R} \quad (10.134)$$

Les coefficients de concentration de contrainte relatifs à d'autres sollicitations s'obtiennent par superposition : en superposant un état de contrainte  $\sigma_x^\infty$  à un état de contrainte  $\sigma_y^\infty$ , on aura, au bord du trou,

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \sigma_x^\infty (1 - 2 \cos 2\theta) + \sigma_y^\infty \left( 1 - 2 \cos 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right) \\ &= \sigma_x^\infty (1 - 2 \cos 2\theta) + \sigma_y^\infty (1 + 2 \cos 2\theta) \\ &= (\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) + 2(\sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty) \cos 2\theta\end{aligned}$$

dont le maximum vaudra

$$\sigma_\theta \text{ max} = (\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) + 2|\sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty| \quad (10.135)$$

Pour un état de traction uniforme  $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \sigma$ , on obtient ainsi

$$\sigma_\theta \text{ max} = 2\sigma, \quad \alpha_k = 2$$

Dans le cas d'un cisaillement uniforme,  $\sigma_x^\infty = -\sigma_y^\infty = \tau$ , il vient

$$\sigma_{\theta \text{ max}} = 4\tau$$

Le coefficient de concentration de contrainte sera ici le rapport des diamètres des cercles de Mohr, soit

$$\alpha_k = \frac{4\tau - 0}{\sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty} = 2$$

## 10.14 Fissure sous contrainte uniaxiale

Si, dans le problème de Kolosoff, on pose  $m = 1$ , on obtient une fissure rectiligne, de longueur  $2a = 4c$ , perpendiculaire au champ principal de contrainte pour  $\gamma = \pi/2$ . Il vient alors

$$\begin{aligned} F_1' &= \frac{\sigma c}{4}(1 + 3\zeta^{-2}) \\ K_1'' &= \frac{\sigma c^2}{2}(1 + 4\zeta^{-2} + 3\zeta^{-4}) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\sigma c}{4}(\zeta - 3\zeta^{-1}) \\ K_1 &= \frac{\sigma c^2}{2} \left( \frac{\zeta^2}{2} - 2 \ln \zeta - \frac{1}{2} \zeta^{-2} \right) \end{aligned} \quad (10.136)$$

On simplifie ces expressions en posant

$$\zeta = e^\xi$$

soit

$$z = c \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) = 2c \operatorname{ch} \xi = a \operatorname{ch} \xi$$

ce qui revient à utiliser les coordonnées elliptiques. On a alors, comme  $dz/d\xi = a \operatorname{sh} \xi$ ,

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{\sigma a}{4} (2 \operatorname{sh} \xi - \operatorname{ch} \xi) \\
 F' &= \frac{\sigma}{4} \left( 2 \frac{\operatorname{ch} \xi}{\operatorname{sh} \xi} - 1 \right) \\
 F'' &= -\frac{\sigma}{2a \operatorname{sh}^3 \xi} \\
 K' &= \frac{\sigma a}{2} \left( \operatorname{ch} \xi - \frac{1}{\operatorname{sh} \xi} \right) \\
 K'' &= \frac{\sigma}{2} \left( 1 + \frac{\operatorname{ch} \xi}{\operatorname{sh}^3 \xi} \right)
 \end{aligned} \tag{10.137}$$

On en déduit aisément les contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \sigma_x + \sigma_y & = & 4\Re F' = \sigma \left( \frac{\operatorname{ch} \xi}{\operatorname{sh} \xi} + \frac{\operatorname{ch} \bar{\xi}}{\operatorname{sh} \bar{\xi}} - 1 \right) \\ \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} & = & -2(z\bar{F}'' + \bar{K}'') = -\sigma \left( -\frac{\operatorname{ch} \xi}{\operatorname{sh}^3 \xi} + 1 + \frac{\operatorname{ch} \bar{\xi}}{\operatorname{sh}^3 \bar{\xi}} \right) \end{array} \right. \tag{10.138}$$

La zone intéressante est évidemment le voisinage de la fissure. Dans cette région, on peut poser

$$z = a \operatorname{ch} \xi = a + re^{i\theta} = a(1 + \epsilon e^{i\theta}), \quad \epsilon \ll 1$$

Il vient alors

$$\operatorname{sh} \xi = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - 1} = \sqrt{1 + 2\epsilon e^{i\theta} + \mathcal{O}(\epsilon^2)} - 1 = \sqrt{2\epsilon} e^{i\theta/2} (1 + \mathcal{O}(\epsilon))$$

Introduisant ces valeurs dans les expressions (10.138) des contraintes, on obtient

$$\begin{aligned}
 \sigma_x + \sigma_y &= \sigma \left( \frac{1 + \epsilon e^{i\theta}}{\sqrt{2\epsilon}} e^{-i\theta/2} + \frac{1 + \epsilon e^{-i\theta}}{\sqrt{2\epsilon}} e^{i\theta/2} - 1 \right) \\
 &= \frac{2\sigma}{\sqrt{2\epsilon}} \cos \frac{\theta}{2} + \mathcal{O}(\sigma) \\
 \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} &= -\sigma \left[ -\frac{(1 + \epsilon e^{i\theta})e^{3i\theta/2}}{(2\epsilon)^{3/2}} + 1 + \frac{(1 + \epsilon e^{-i\theta})e^{3i\theta/2}}{(2\epsilon)^{3/2}} \right] \\
 &= \sigma \left[ 2^{-3/2} \epsilon^{-1/2} e^{3i\theta/2} 2i \sin \theta + \mathcal{O}(1) \right] \\
 &= \frac{\sigma}{2\sqrt{2\epsilon}} \left( \cos \frac{3\theta}{2} + i \sin \frac{3\theta}{2} \right) 4i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \mathcal{O}(\sigma) \\
 &= \frac{2\sigma}{\sqrt{2\epsilon}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left( -\sin \frac{3\theta}{2} + i \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \mathcal{O}(\sigma)
 \end{aligned}$$

On en déduit les expressions asymptotiques suivantes des contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_x &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\epsilon}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \mathcal{O}(\sigma) \\ \sigma_y &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\epsilon}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \mathcal{O}(\sigma) \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\epsilon}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \mathcal{O}(\sigma) \end{cases} \quad (10.139)$$

En *mécanique de la rupture*, on introduit le *facteur d'intensité de contrainte*  $K_I$  défini par

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (10.140)$$

en fonction duquel les expressions asymptotiques (10.139) s'écrivent encore

$$\begin{cases} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \mathcal{O}(\sigma) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \mathcal{O}(\sigma) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \mathcal{O}(\sigma) \end{cases} \quad (10.141)$$

Il est à noter que, bien que ces contraintes tendent vers l'infini pour  $r \rightarrow 0$ ,

leur énergie élastique dans une zone de rayon  $R$  reste finie. En effet,

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y}{2E} + \frac{\tau_{xy}}{2G} \\
 &= \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y + 2(1+\nu)\tau_{xy}^2}{2E} \\
 &= \frac{K_I^2}{4\pi r E} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left\{ \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)^2 + \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)^2 \right. \\
 &\quad \left. - 2\nu \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \right. \\
 &\quad \left. + 2(1+\nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{3\theta}{2} \right\} \\
 &= \frac{K_I^2}{4\pi r E} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left\{ 2 - 2\nu + (2+2\nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{3\theta}{2} \right. \\
 &\quad \left. + 2(1+\nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{3\theta}{2} \right\} \\
 &= \frac{K_I^2}{2\pi r E} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[ (1-\nu) + (1+\nu) \sin^2 \frac{3\theta}{2} \right] \\
 &= \frac{K_I^2}{4\pi r E} (1 + \cos \theta) \left[ (1-\nu) + \frac{1+\nu}{2} (1 - \cos 3\theta) \right] \\
 &= \frac{K_I^2}{4\pi r E} \left[ (1-\nu)(1 + \cos \theta) + \frac{1+\nu}{2} (1 + \cos \theta - \cos 3\theta - \cos \theta \cos 3\theta) \right]
 \end{aligned}$$

Intégrant sur un cercle de rayon  $R$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}_R &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^R W r dr = \int_0^R \frac{K_I^2}{4\pi r E} r dr [(1-\nu)2\pi + (1+\nu)\pi] \\
 &= \frac{3-\nu}{4E} K_I^2 R
 \end{aligned} \tag{10.142}$$

De la même façon, la contrainte équivalente de Tresca est donnée par

$$\sigma_T = |\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy}| = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} |\sin \theta| \tag{10.143}$$

Elle tend vers l'infini pour  $r \rightarrow 0$ , mais sa moyenne quadratique sur une zone

de rayon  $R$  est donnée par

$$\tilde{\sigma}_T^2 = \frac{1}{2\pi R} \int_0^R dr \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_T r d\theta = \frac{1}{2\pi R} \frac{K_I^2}{2\pi} \int_0^R \frac{r dr}{r} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{K_I^2}{4\pi}$$

soit

$$\tilde{\sigma}_T = \frac{K_I}{2\sqrt{\pi}} \quad (10.144)$$

On admet, en mécanique de la rupture, que dans un matériau fragile, la fissure progresse de manière instable, sans augmentation de charge, dès que le facteur d'intensité des contraintes admet une valeur critique  $K_{Ic}$ . Le facteur  $K_I$  est également considéré comme la grandeur à prendre en compte pour expliquer la propagation des fissures en fatigue.

La plasticité du matériau a pour effet de perturber la distributions des contraintes ci-dessus. Si l'on adopte le critère de Tresca, on a  $\sigma_T \geq \sigma_e$  (limite élastique) si

$$\sqrt{r} \leq \frac{K_I |\sin \theta|}{\sqrt{2\pi} \sigma_e}$$

ce qui signifie que la zone plastique est contenue dans la boule de rayon

$$r_p = \frac{K_I^2}{2\pi \sigma_e^2} \quad (10.145)$$

soit encore

$$\frac{r_p}{a} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma}{\sigma_e} \right)^2 \quad (10.146)$$

On admet généralement que les résultats de la mécanique de la rupture représentent bien la réalité tant que la zone plastique reste relativement petite.

### 10.15 Coin soumis à une force et à un moment (Problème de Michell, 1900)

Dans ce problème, illustré par la figure 10.10, il est clair que les contraintes doivent s'évanouir à l'infini, puisque la section ne fait qu'augmenter quand  $x$  croît. On a donc à l'infini,

$$\begin{cases} 4\Re F' \rightarrow 0 \\ -2(z\bar{F}'' + \bar{K}'') \rightarrow 0 \end{cases}$$



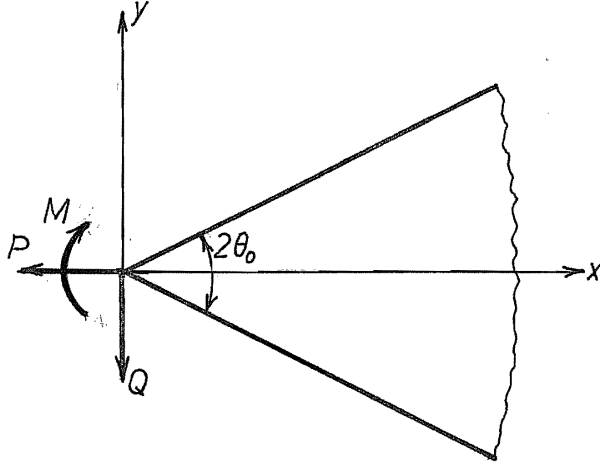


FIGURE 10.10 – Problème de Michell

En conséquence, on cherchera une solution de la forme

$$F' = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^{-n}, \quad K'' = \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^{-n} \quad (10.147)$$

Sur les bords  $\theta = \pm\theta_0$ , on doit avoir

$$\psi = -i(F + z\bar{F}' + \bar{K}') = cte \quad (\text{bords libres}) \quad (10.148)$$

On calcule aisément

$$\left\{ \begin{array}{lcl} F(z) & = & A_1 \ln z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \frac{z^{1-n}}{1-n} \\ \bar{K}'(z) & = & \bar{B}_1 \ln \bar{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \bar{B}_n \frac{\bar{z}^{1-n}}{1-n} \\ z\bar{F}' & = & \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n z \bar{z}^{-n} \end{array} \right.$$

soit, en termes de  $r$  et  $\theta$ ,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} F & = & A_1(\ln r + i\theta) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n}{1-n} r^{1-n} e^{i(1-n)\theta} \\ \bar{K}' & = & B_1(\ln r - i\theta) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\bar{B}_n}{1-n} r^{1-n} e^{i(n-1)\theta} \\ z\bar{F}' & = & A_1 e^{2i\theta} + \sum_{n=2}^{\infty} \bar{A}_n r^{1-n} e^{i(n+1)\theta} \end{array} \right.$$

ce qui permet d'écrire

$$i\psi = (A_1 + \bar{B}_1) \ln r + (A_1 - \bar{B}_1) i\theta + \bar{A}_1 e^{2i\theta} + \sum_{n=2}^{\infty} r^{1-n} \left[ \frac{A_n}{1-n} e^{i(1-n)\theta} + \bar{A}_n e^{i(n+1)\theta} + \frac{\bar{B}_n}{1-n} e^{i(n-1)\theta} \right] \quad (10.149)$$

La condition (10.148) revient à dire qu'en  $\theta = \pm\theta_0$ , la fonction  $\psi$  ne dépend pas de  $r$ . En annulant les coefficients des différentes puissances de  $r$ , on obtient les relations

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \bar{B}_1 & = & -A_1 \\ \bar{B}_n & = & -A_n e^{-2i(n-1)\theta_0} + (n-1) \bar{A}_n e^{2i\theta_0} \quad (\text{calculé en } \theta_0) \\ \bar{B}_n & = & -A_n e^{2i(n-1)\theta_0} + (n-1) \bar{A}_n e^{-2i\theta_0} \quad (\text{calculé en } (-\theta_0)) \end{array} \right. \quad (10.150)$$

En soustrayant les deux dernières conditions, on obtient

$$\bar{A}_n + A_n \frac{\sin 2(n-1)\theta_0}{(n-1) \sin 2\theta_0} = 0$$

ce qui équivaut à

$$\Re A_n \left[ 1 + \frac{\sin 2(n-1)\theta_0}{(n-1) \sin 2\theta_0} \right] + i \Im A_n \left[ -1 + \frac{\sin 2(n-1)\theta_0}{(n-1) \sin 2\theta_0} \right] = 0$$

Il est clair qu'en dehors des cas particuliers où l'un des coefficients est nul, on aura  $\Re A_n = \Im A_n = 0$ . La nullité en question suppose vérifiée l'une des relations

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sin 2(n-1)\theta_0 & = & -(n-1) \sin 2\theta_0 \\ \sin 2(n-1)\theta_0 & = & (n-1) \sin 2\theta_0 \end{array} \right.$$

ce qui n'a lieu que pour  $n = 2$ , valeur pour laquelle on trouve

$$\Re A_2 = 0, \quad \Im A_2 \text{ arbitraire}$$

On obtient alors, en additionnant les deux dernières équations du système (10.150),

$$\bar{B}_2 = -2A_2 \cos 2\theta_0 = -2i\Im A_2 \cos 2\theta_0$$

Les seules constantes qui subsistent sont donc

$$C_1 = \Re A_1, \quad C_2 = \Im A_1, \quad C_3 = \Im A_2$$

en fonction desquelles on peut écrire

$$\bar{B}_1 = -(C_1 + iC_2), \quad \bar{B}_2 = -2iC_3 \cos 2\theta_0$$

Il vient donc

$$\begin{cases} F &= (C_1 + iC_2) \ln z - \frac{iC_3}{z} \\ K' &= -(C_1 - iC_2) \ln z - \frac{2iC_3 \cos 2\theta_0}{z} \end{cases} \quad (10.151)$$

et

$$\begin{aligned} F' &= \frac{C_1 + iC_2}{z} + \frac{iC_3}{z^2} \\ &= \frac{C_1 + iC_2}{r} (\cos \theta - i \sin \theta) + \frac{iC_3}{r^2} (\cos 2\theta - i \sin 2\theta) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y = 4\Re F' &= 4r^{-1}(C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta) \\ &\quad + 4C_3 r^{-2} \sin 2\theta = \sigma_r + \sigma_\theta \end{aligned} \quad (10.152)$$

Les dérivées secondes sont données par

$$\bar{F}'' = -(C_1 - iC_2)\bar{z}^{-2} + 2iC_3\bar{z}^{-3}, \quad \bar{K}'' = -(C_1 + iC_2)\bar{z}^{-1} - 2iC_3 \cos 2\theta_0 \bar{z}^{-2}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} &= 2(C_1 - iC_2)z\bar{z}^{-2} - 4iC_3z\bar{z}^{-3} + 2(C_1 + iC_2)\bar{z}^{-1} + 4iC_3 \cos 2\theta_0 \bar{z}^{-2} \\ &= 2(C_1 - iC_2)r^{-1}e^{3i\theta} - 4iC_3r^{-2}e^{4i\theta} + 2(C_1 + iC_2)r^{-1}e^{i\theta} \\ &\quad + 4iC_3 \cos 2\theta_0 r^{-2}e^{2i\theta} \end{aligned}$$

On passe aux coordonnées polaires par la transformation

$$\begin{aligned}\sigma_r - \sigma_\theta + 2i\tau_{r\theta} &= e^{-2i\theta}(\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy}) \\ &= 2(C_1 - iC_2)r^{-1}e^{i\theta} - 4iC_3r^{-2}e^{2i\theta} + 2(C_1 + iC_2)r^{-1}e^{-i\theta} \\ &\quad + 4iC_3 \cos 2\theta_0 r^{-2}\end{aligned}$$

On en déduit directement

$$\begin{aligned}\sigma_r - \sigma_\theta &= \frac{4}{r}(C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta) + \frac{4C_3}{r^2} \sin 2\theta \\ 2\tau_{r\theta} &= \frac{4C_3}{r^2}(\cos 2\theta_0 - \cos 2\theta)\end{aligned}$$

d'où, par comparaison avec (10.152)

$$\begin{cases} \sigma_r &= \frac{4}{r}(C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta) + \frac{4C_3}{r^2} \sin 2\theta \\ \sigma_\theta &= 0 \\ \tau_{r\theta} &= \frac{2C_3}{r^2}(\cos 2\theta_0 - \cos 2\theta) \end{cases} \quad (10.153)$$

Il reste à déterminer les constantes. Comme, par (10.149),

$$\psi = 2(C_1 + iC_2)\theta + (C_1 - iC_2)\frac{e^{2i\theta}}{i}$$

on a

$$P + iQ = \psi(\theta_0) - \psi(-\theta_0) = 4(C_1 + iC_2)\theta_0 + 2(C_1 - iC_2)\sin 2\theta_0$$

si bien que

$$4C_1 = \frac{P}{\theta_0 + \frac{1}{2}\sin 2\theta_0}, \quad 4C_2 = \frac{Q}{\theta_0 - \frac{1}{2}\sin 2\theta_0} \quad (10.154)$$

Pour la détermination de  $C_3$ , le plus simple est de calculer directement le moment  $M$  sur un cercle de rayon  $R$  : on a en effet (fig .10.11)

$$\begin{aligned}M &= \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \tau_{r\theta} R \cdot R d\theta \\ &= 2C_3 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (\cos 2\theta_0 - \cos 2\theta) d\theta \\ &= 2C_3(2\theta_0 \cos 2\theta_0 - \sin 2\theta_0)\end{aligned}$$

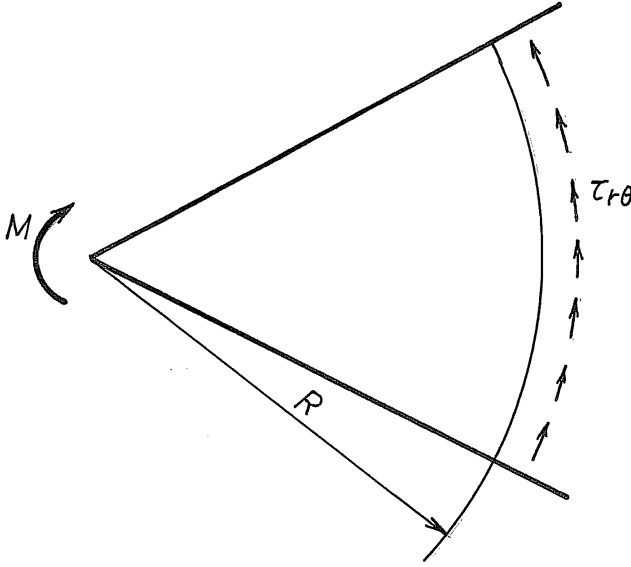


FIGURE 10.11 – Calcul du moment

soit

$$2C_3 = \frac{M}{2\theta_0 \cos 2\theta_0 - \sin 2\theta_0} \quad (10.155)$$

Rassemblant les résultats (10.153), (10.154) et (10.155), on obtient comme expression finale des contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{P}{\theta_0 + \frac{1}{2} \sin 2\theta_0} \frac{\cos \theta}{r} + \frac{Q}{\theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_0} \frac{\sin \theta}{r} \\ \quad + \frac{M}{2\theta_0 \cos 2\theta_0 - \sin 2\theta_0} \frac{\sin 2\theta}{r^2} \\ \sigma_\theta = 0 \\ \tau_{r\theta} = \frac{M}{2\theta_0 \cos 2\theta_0 - \sin 2\theta_0} \frac{\cos 2\theta_0 - \cos 2\theta}{r^2} \end{array} \right.$$

### 10.16 Problème de Flamant (1892)

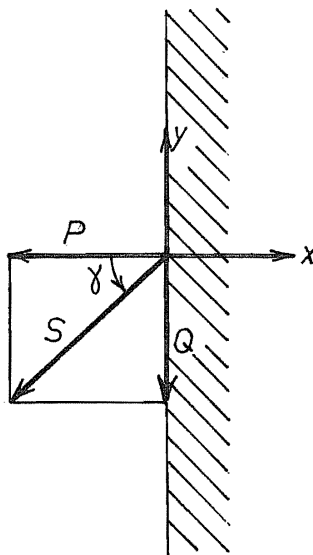


FIGURE 10.12 – Problème de Flamant

Pour  $\theta_0 = \pi/2$ , le problème précédent correspond à un demi-plan indéfini : c'est le problème de Flamant. On a alors

$$\sin 2\theta_0 = \sin \pi = 0, \quad \cos 2\theta_0 = \cos \pi = -1$$

et, en se limitant à la seule charge  $(P, Q)$ , il vient

$$\begin{cases} \sigma_r &= 2 \frac{P \cos \theta + Q \sin \theta}{\pi r} \\ \sigma_\theta &= 0 \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{cases}$$

En notant que selon la figure 10.12,

$$P = S \cos \gamma, \quad Q = S \sin \gamma$$

on peut encore écrire

$$\sigma_r = 2S \frac{\cos(\theta - \gamma)}{\pi r}, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (10.156)$$

les composantes cartésiennes des contraintes sont liées aux précédentes par

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= \sigma_r + \sigma_\theta = 2S \frac{\cos(\theta - \gamma)}{\pi r} \\ \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} &= e^{2i\theta}(\sigma_r - \sigma_\theta + 2i\tau_{r\theta}) = e^{2i\theta} 2S \frac{\cos(\theta - \gamma)}{\pi r} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sigma_x &= \frac{S \cos(\theta - \gamma)}{\pi r} (1 + \cos 2\theta) &= \frac{2S \cos(\theta - \gamma)}{\pi r} \cos^2 \theta \\ \sigma_y &= \frac{S \cos(\theta - \gamma)}{\pi r} (1 - \cos 2\theta) &= \frac{2S \cos(\theta - \gamma)}{\pi r} \sin^2 \theta \\ \tau_{xy} &= \frac{S \cos(\theta - \gamma)}{\pi r} \sin 2\theta &= \frac{2S \cos(\theta - \gamma)}{\pi r} \sin \theta \cos \theta \end{array} \right. \quad (10.157)$$

On utilise aussi parfois le système  $Ox_1y_1$  de la charge, représenté en figure 10.13. Alors, comme l'angle  $\lambda$  compté à partir de l'axe des  $x_1$  est donné par

$$\lambda = \theta - \gamma$$

on a

$$\begin{aligned} \sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} &= \sigma_r + \sigma_\theta = 2S \frac{\cos(\theta - \gamma)}{\pi r} = 2S \frac{\cos \lambda}{\pi r} \\ \sigma_{x_1} - \sigma_{y_1} &= e^{2i\lambda}(\sigma_r - \sigma_\theta + 2i\tau_{r\theta}) = e^{2i\lambda} 2S \frac{\cos \lambda}{\pi r} \end{aligned}$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sigma_{x_1} &= \frac{S \cos \lambda}{\pi r} (1 + \cos 2\lambda) &= \frac{2S \cos^3 \lambda}{\pi r} = \frac{2S \cos^4 \lambda}{\pi x_1^2 \cos^2 \lambda} \\ \sigma_{y_1} &= \frac{S \cos \lambda}{\pi r} (1 - \cos 2\lambda) &= \frac{2S \cos \lambda}{\pi r} \sin^2 \lambda = \frac{2S \sin^2 \cos^2 \lambda}{\pi x_1} \\ \tau_{x_1 y_1} &= \frac{2S \cos \lambda}{\pi r} \sin \lambda \cos \lambda &= \frac{2S \sin \lambda \cos^3 \lambda}{\pi x_1} \end{array} \right. \quad (10.158)$$

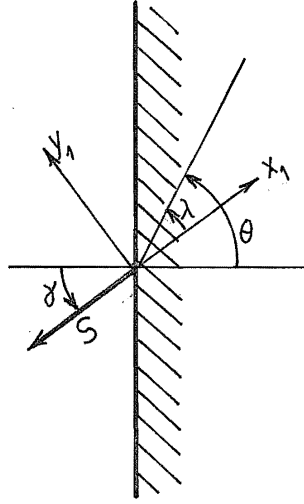


FIGURE 10.13 – Système d'axes de la charge

Fait remarquable, *ces dernières expressions ne font pas intervenir l'angle  $\gamma$  de la charge.*

Intégrons les déplacements. Avec

$$C_1 = \frac{P}{2\pi}, \quad C_2 = \frac{Q}{2\pi}$$

les formules (10.151) donnent

$$F = \frac{P+iQ}{2\pi} \ln z, \quad \bar{F}' = \frac{P-iQ}{2\pi} \frac{1}{\bar{z}}, \quad \bar{K}' = -\frac{P-iQ}{2\pi} \ln \bar{z}$$

d'où

$$\begin{aligned} u + iv &= \frac{1}{E} \left[ (3-\nu) \frac{P+iQ}{2\pi} \ln z - (1+\nu) \frac{P-iQ}{2\pi} \frac{z}{\bar{z}} + (1+\nu) \frac{P-iQ}{2\pi} \ln \bar{z} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi E} \left[ (3-\nu)(P+iQ)(\ln r + i\theta) - (1+\nu)(P-iQ)e^{2i\theta} \right. \\ &\quad \left. + (1+\nu)(P-iQ)(\ln r - i\theta) \right] \end{aligned}$$



Il vient donc

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{2\pi E} [(3 - \nu)(P \ln r - Q\theta) - (1 + \nu)(P \cos 2\theta + Q \sin 2\theta) \\
 &\quad + (1 + \nu)(P \ln r - Q\theta)] \\
 &= \frac{1}{2\pi E} \{P[4 \ln r - (1 + \nu) \cos 2\theta] - Q[4 + (1 + \nu) \sin 2\theta]\} \quad (10.159)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 v &= \frac{1}{2\pi E} [(3 - \nu)(P\theta + Q \ln r) - (1 + \nu)(P \sin 2\theta - Q \cos 2\theta) \\
 &\quad - (1 + \nu)(P\theta + Q \ln r)] \\
 &= \frac{1}{2\pi E} \{P[2(1 - \nu)\theta - (1 + \nu) \sin 2\theta] + Q[2(1 - \nu) \ln r + (1 + \nu) \cos 2\theta]\} \\
 &\quad (10.160)
 \end{aligned}$$

Ces déplacements sont évidemment définis à un mouvement de corps rigide près. On ne peut lever l'indétermination en exigeant la nullité à l'infini, du fait de leur structure. Mais on peut imposer qu'en un point de coordonnées  $(R, 0)$ ,  $R$  étant fixé,  $u = v = \omega = 0$ . Comme

$$\begin{aligned}
 u(R, 0) &= \frac{1}{2\pi E} \{P[4 \ln R - (1 + \nu)] - 4Q\} = u_0 \\
 v(R, 0) &= \frac{1}{2\pi E} \{Q[2(1 - \nu) \ln R + (1 + \nu)]\} = v_0 \\
 \omega(R, 0) &= \frac{4}{E} \Im F'(R, 0) = \frac{4}{E} \Im \left[ \frac{P + iQ}{2\pi} \frac{1}{R} \right] = \frac{1}{2\pi E} \frac{4Q}{R} = \omega_0
 \end{aligned}$$

le déplacement à soustraire a pour composantes

$$\begin{cases} \tilde{u} &= u_0 - \omega_0 y = u_0 - \omega_0 r \sin \theta \\ \tilde{v} &= v_0 + \omega_0 (x - R) = v_0 - \omega_0 R + \omega_0 r \cos \theta \end{cases}$$

Il vient alors

$$\begin{cases} \hat{u} = u - \tilde{u} &= \frac{1}{2\pi E} \{P[4 \ln \frac{r}{R} + (1 + \nu)(1 - \cos 2\theta)] \\ &\quad - Q[-\frac{r}{R} \sin \theta + (1 + \nu) \sin 2\theta]\} \\ \hat{v} = v - \tilde{v} &= \frac{1}{2\pi E} \{P[2(1 - \nu)\theta - (1 + \nu) \sin 2\theta] \\ &\quad + Q[2(1 - \nu) \ln \frac{r}{R} - (1 + \nu)(1 - \cos 2\theta) + 4(1 - \frac{r}{R} \sin \theta)]\} \end{cases} \quad (10.161)$$



10.17. DISQUE CIRCULAIRE SOUMIS À DEUX FORCES  $P$  OPPOSÉES 317

De même, la charge située en  $B$  provoquerait, dans le demi-plan situé au-dessus de la tangente en  $B$ , des contraintes données par

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{r_B} + \sigma_{\theta_B} = \frac{2P \cos \beta}{\pi r_B} \\ \sigma_{r_B} - \sigma_{\theta_B} + 2i\tau_{r_B\theta_B} = \frac{2P \cos \beta}{\pi r_B} \end{array} \right.$$

En superposant ces deux états, on obtient, en un point  $C$  situé sur la circonférence, et dans les coordonnées polaires du cercle,

– Contraintes dues à  $P_A$  :  $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r + \sigma_\theta = \frac{2P \cos \alpha}{\pi r_A} \\ \sigma_r - \sigma_\theta + 2i\tau_{r\theta} = \frac{2P \cos \alpha}{\pi r_A} e^{-2i\beta_1} \end{array} \right\}$ , d'où,

en notant  $d$  le diamètre du cercle,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{P \cos \alpha}{\pi r_A} (1 + \cos 2\beta_1) = \frac{2P \cos \alpha}{\pi r_A} \cos^2 \beta_1 = \frac{2P}{\pi d} \cos \alpha \cos \beta_1 \\ \sigma_\theta = \frac{P \cos \alpha}{\pi r_A} (1 - \cos 2\beta_1) = \frac{2P \cos \alpha}{\pi r_A} \sin^2 \beta_1 = \frac{2P}{\pi d} \cos \alpha \operatorname{tg} \beta_1 \sin \beta_1 \\ \tau_{r\theta} = -\frac{P \cos \alpha}{\pi r_A} \sin 2\beta_1 = -\frac{2P \cos \alpha}{\pi r_A} \sin \beta_1 \cos \beta_1 = -\frac{2P}{\pi d} \cos \alpha \sin \beta_1 \end{array} \right.$$

– Contraintes dues à  $P_B$  :  $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r + \sigma_\theta = \frac{2P \cos \beta}{\pi r_B} \\ \sigma_r - \sigma_\theta + 2i\tau_{r\theta} = \frac{2P \cos \beta}{\pi r_B} e^{2i\alpha_1} \end{array} \right\}$ , d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{2P}{\pi d} \cos \beta \cos \alpha_1 \\ \sigma_\theta = \frac{2P}{\pi d} \cos \beta \operatorname{tg} \alpha_1 \sin \alpha_1 \\ \tau_{r\theta} = \frac{2P}{\pi d} \cos \beta \sin \alpha_1 \end{array} \right.$$

Additionnant, et tenant compte des relations  $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$  et  $\beta_1 = \frac{\pi}{2} - \beta$  (voir

figure 10.14), on obtient, toujours sur la circonférence,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sigma_r & = & \frac{2P}{\pi d} (\sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta) = \frac{2P}{\pi d} \sin(\alpha + \beta) \\ \sigma_\theta & = & \frac{2P}{\pi d} (\cos \alpha \cotg \beta \cos \beta + \cos \beta \cotg \alpha \cos \alpha) \\ & = & \frac{2P}{\pi d} \cotg \alpha \cotg \beta \sin(\alpha + \beta) \\ \tau_{r\theta} & = & \frac{2P}{\pi d} (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) = 0 \end{array} \right.$$

Cette distribution de contraintes permet d'équilibrer les deux charges, mais elle ne vérifie pas l'équilibre à la frontière du cercle, où

$$\sigma_r = \frac{2P}{\pi d} \sin(\alpha + \beta) = p = \text{cte}$$

puisque (voir figure 10.14)

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2} \frac{\text{arc}(ACB)}{d/2} = \gamma$$

En additionnant un état de contrainte hydrostatique

$$\sigma_x = \sigma_y = -p$$

évidemment en équilibre à l'intérieur, puisqu'il s'agit d'un champ de contraintes constantes, on rétablit l'équilibre à la frontière, sans déséquilibrer les charges qui produisent un état de contrainte *infini* dans leur voisinage. C'est le résultat obtenu par Michell en 1900 : *l'état de contrainte dans un cylindre soumis à deux charges opposées s'obtient en superposant les contraintes de Flamant relatives à ces deux charges et un état hydrostatique*

$$-p = -\frac{2P}{\pi d} \sin \gamma$$

Les composantes cartésiennes du champ de contrainte résultant sont données par (fig. 10.15)

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= \frac{2P \cos \alpha}{\pi r_A} + \frac{2P \cos \beta}{\pi r_B} - \frac{2P}{\pi d} \sin \gamma \\ \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} &= \frac{2P \cos \alpha}{\pi r_A} e^{-2i\alpha'} + \frac{2P \cos \beta}{\pi r_B} e^{-2i\beta'} \end{aligned}$$

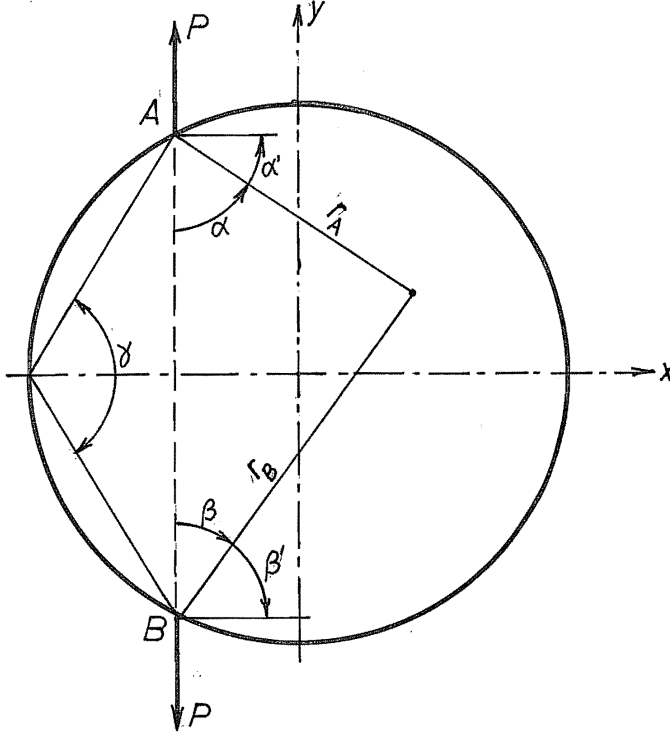


FIGURE 10.15 – Calcul des contraintes en un point du disque

ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{P}{\pi} \left[ \frac{\cos \alpha}{r_A} (1 + \cos 2\alpha') + \frac{\cos \beta}{r_B} (1 + \cos 2\beta') - \frac{2 \sin \gamma}{d} \right] \\ \quad = \frac{2P}{\pi} \left[ \frac{\cos \alpha \sin^2 \alpha}{r_A} + \frac{\cos \beta \sin^2 \beta}{r_B} - \frac{\sin \gamma}{d} \right] \\ \sigma_y = \frac{P}{\pi} \left[ \frac{\cos \alpha}{r_A} (1 - \cos 2\alpha') + \frac{\cos \beta}{r_B} (1 - \cos 2\beta') - \frac{2 \sin \gamma}{d} \right] \\ \quad = \frac{2P}{\pi} \left[ \frac{\cos^3 \alpha}{r_A} + \frac{\cos^3 \beta}{r_B} - \frac{\sin \gamma}{d} \right] \\ \tau_{xy} = \frac{P}{\pi} \left[ -\frac{\cos \alpha \sin 2\alpha'}{r_A} + \frac{\cos \beta \sin 2\beta'}{r_B} \right] \\ \quad = \frac{P}{\pi} \left[ -\frac{\sin \alpha \cos^2 \alpha}{r_A} + \frac{\sin \beta \cos^2 \beta}{r_B} \right] \end{array} \right. \quad (10.162)$$

### 10.18 Poutre circulaire soumise à un moment constant (Golovin, 1881) [40]

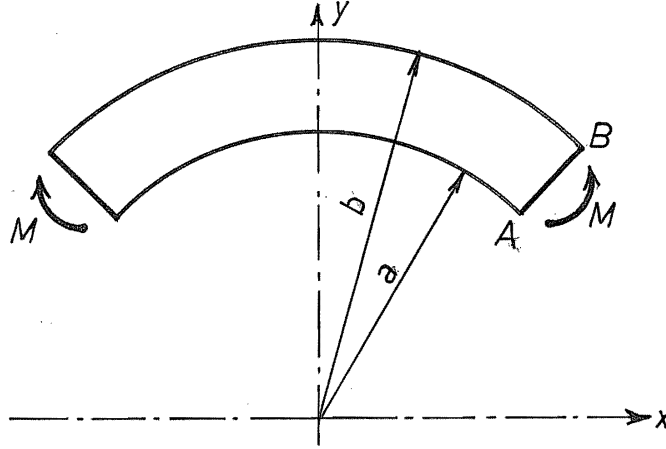


FIGURE 10.16 – Poutre circulaire en flexion pure

Dans ce problème illustré par la figure 10.16, il est clair que les contraintes doivent être indépendantes de  $\theta$ . Il doit donc en être de même de la fonction d’Airy. Dans l’expression générale

$$\varphi = \frac{1}{2}(\bar{z}F + z\bar{F} + K + \bar{K})$$

posons  $F = zH$ . Il vient alors

$$\varphi = \frac{1}{2}(|z|^2(H + \bar{H}) + K + \bar{K})$$

Il suffira donc de trouver des fonctions analytiques  $H$  et  $K$  dont les parties réelles ne dépendent pas de  $\theta$ . Les seules fonctions de ce type sont

$$H = A \ln z + B, \quad K = C \ln z + D$$

La constante  $D$  est improductive et peut donc, sans perte de généralité, être posée nulle. On a alors

$$F = Az \ln z + Bz, \quad K = C \ln z$$

et

$$\varphi = Ar^2 \ln r + Br^2 + C \ln r \quad (10.163)$$

Sur le contour, les cercles de rayon  $a$  et  $b$  sont libres de toute charge ; en outre, sur le segment  $AB$ , la résultante des charges est nulle. On peut donc poser

$$i\psi = 0 \text{ en } r = a \text{ et } r = b$$

soit explicitement

$$\begin{aligned} 0 = F + z\bar{F}' + \bar{K}' &= A(z \ln z + z \ln \bar{z} + z) + 2Bz + \frac{C}{\bar{z}} \\ &= e^{i\theta} \left[ A(2r \ln r + r) + 2Br + \frac{C}{r} \right] \text{ en } r = a \text{ et } r = b \end{aligned}$$

Il en résulte les conditions

$$\begin{cases} A(2b \ln b + b) + 2Bb + \frac{C}{b} = 0 \\ A(2a \ln a + a) + 2Ba + \frac{C}{a} = 0 \end{cases} \quad (10.164)$$

Par ailleurs, sur le segment  $AB$ , on a

$$\begin{aligned} M &= \int_A^B (xT_y - yT_x) ds \\ &= \int_A^B \left( x \frac{\partial \psi_y}{\partial t} - y \frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right) ds \\ &= [x\psi_y - y\psi_x]_A^B - \int_A^B (\psi_y dx - \psi_x dy) \\ &= \int_A^B \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \right) \\ &= [\varphi]_A^B \end{aligned}$$

soit

$$M = \varphi(b) - \varphi(a) = A(b^2 \ln b - a^2 \ln a) + B(b^2 - a^2) + C \ln \frac{b}{a} \quad (10.165)$$

Cette condition, jointe aux deux équations (10.164), permet de calculer

$$\begin{cases} A &= -\frac{2M}{N}(b^2 - a^2) \\ B &= \frac{M}{N}[(b^2 - a^2 + 2(b^2 \ln b - a^2 \ln a))] \\ C &= -\frac{4M}{N}a^2b^2 \ln \frac{b}{a} \end{cases} \quad (10.166)$$

avec

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2 \ln^2 \frac{b}{a} \quad (10.167)$$

Nous sommes à présent en mesure de calculer les contraintes :

$$\begin{aligned} \sigma_r + \sigma_\theta &= \sigma_x + \sigma_y = 4\Re F' = 4A(\ln r + 1) + 4B \\ \sigma_r - \sigma_\theta + 2i\tau_{r\theta} &= e^{-2i\theta}(-2z\bar{F}''' - 2\bar{K}'') = e^{-2i\theta} \left( -2A\frac{z}{\bar{z}} + 2\frac{C}{\bar{z}^2} \right) \\ &= -2A + \frac{2C}{r^2} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} \sigma_r &= A(2 \ln r + 1) + 2B + \frac{C}{r^2} \\ \sigma_r &= A(2 \ln r + 3) + 2B - \frac{C}{r^2} \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{cases}$$

soit, explicitement,

$$\begin{cases} \sigma_r &= -\frac{4M}{N} \left[ \frac{a^2b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} - b^2 \ln \frac{b}{r} - a^2 \ln \frac{r}{a} \right] \\ \sigma_\theta &= -\frac{4M}{N} \left[ b^2 - a^2 - \frac{a^2b^2 \ln \frac{b}{a}}{r^2} - b^2 \ln \frac{b}{r} - a^2 \ln \frac{r}{a} \right] \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{cases} \quad (10.168)$$



Calculons à présent les déplacements. On a

$$\begin{aligned}
 u + iv &= \frac{1}{E} [(3 - \nu)F - (1 + \nu)z\bar{F}' - (1 + \nu)\bar{K}'] \\
 &= \frac{1}{E} \left\{ (3 - \nu)(Az \ln z + Bz) - (1 + \nu)z[A(\ln \bar{z} + 1) + B] - (1 + \nu)\frac{C}{\bar{z}} \right\} \\
 &= \frac{1}{E} \left\{ (3 - \nu)[Ar e^{i\theta}(\ln r + i\theta) + Bre^{i\theta}] \right. \\
 &\quad \left. - (1 + \nu)re^{i\theta}[A(\ln r - i\theta + 1) + B] - (1 + \nu)\frac{C}{r}e^{i\theta} \right\}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 u_r + iu_\theta &= e^{-i\theta}(u + iv) \\
 &= \frac{1}{E} \left\{ (3 - \nu)[Ar(\ln r + i\theta) + Br] - (1 + \nu)r[A(\ln r - i\theta + 1) + B] \right. \\
 &\quad \left. - (1 + \nu)\frac{C}{r} \right\}
 \end{aligned}$$

ce qui donne (à un déplacement de corps rigide près)

$$\begin{cases} u_r &= \frac{1}{E} \{ 2(1 - \nu)(Ar \ln r + Br) - (1 + \nu)(Ar + \frac{C}{r}) \} \\ u_\theta &= \frac{4}{E} Ar\theta \end{cases} \quad (10.169)$$

On remarquera que  $u_\theta$  varie linéairement en fonction du rayon, c'est-à-dire que l'hypothèse de Bernoulli (conservation de la planéité des sections droites) est vérifiée. Par ailleurs, la théorie de Winkler [97, 98], dans laquelle  $\sigma_\theta$  varie selon un loi hyperbolique, donne pour cette contrainte des valeurs très voisines de la présente solution.

Lorsque la poutre est très mince, c'est-à-dire pour  $\frac{b-a}{2R} \ll 1$ , on a, en posant

$$\begin{aligned}
 t &= (b - a) = 2R\epsilon, \quad \epsilon \ll 1 \\
 r &= R + y = R(1 + \epsilon\rho)
 \end{aligned}$$

les relations asymptotiques suivantes :

$$\begin{aligned}
 b^2 - a^2 &= 4\epsilon R^2 \\
 \frac{a^2 b^2 \ln \frac{b}{a}}{r^2} &= 2R^2 \epsilon (1 - 2\epsilon \rho) (1 + \mathcal{O}(\epsilon)) \\
 b^2 \ln \frac{b}{r} &= R^2 [\epsilon (1 - \rho) + \mathcal{O}(\epsilon^2)] \\
 a^2 \ln \frac{r}{a} &= R^2 [\epsilon (1 + \rho) + \mathcal{O}(\epsilon^2)] \\
 N &= \frac{64}{3} R^4 \epsilon^4 (1 + \mathcal{O}(\epsilon^2))
 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
 \sigma_\theta &= -\frac{3M}{16R^4\epsilon^4} [4R^2\epsilon - 2R^2\epsilon(1 - 2\epsilon\rho) - R^2\epsilon(1 - \rho) - R^2\epsilon(1 + \rho)] (1 + \mathcal{O}(\epsilon)) \\
 &= -\frac{3M\epsilon\rho}{4R^2\epsilon^3} (1 + \mathcal{O}(\epsilon)) \\
 &= -\frac{6My}{t^3} (1 + \mathcal{O}(\epsilon))
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la formule de la flexion des poutres droites s'applique avec une erreur de l'ordre de  $t/R$ .

## 10.19 Problème de Neuber [64, 65]

On considère une portion de plan limitée par des hyperboles et soumise à une extension sous une charge  $P$ . On désire connaître la contrainte à fond d'entaille (point  $A$  sur la figure 10.17).

La solution de ce problème repose sur la transformation conforme

$$z = a \operatorname{sh} \xi \quad (10.170)$$

soit, en termes réels, pour  $\xi = \alpha + i\beta$ ,

$$x = a \operatorname{sh} \alpha \cos \beta, \quad y = a \operatorname{ch} \alpha \sin \beta$$

Dans cette transformation, les courbes  $\alpha = \text{cte}$  ont pour équation

$$\frac{x^2}{a^2 \operatorname{sh}^2 \alpha} + \frac{y^2}{a^2 \operatorname{ch}^2 \alpha} = 1 \quad (10.171)$$

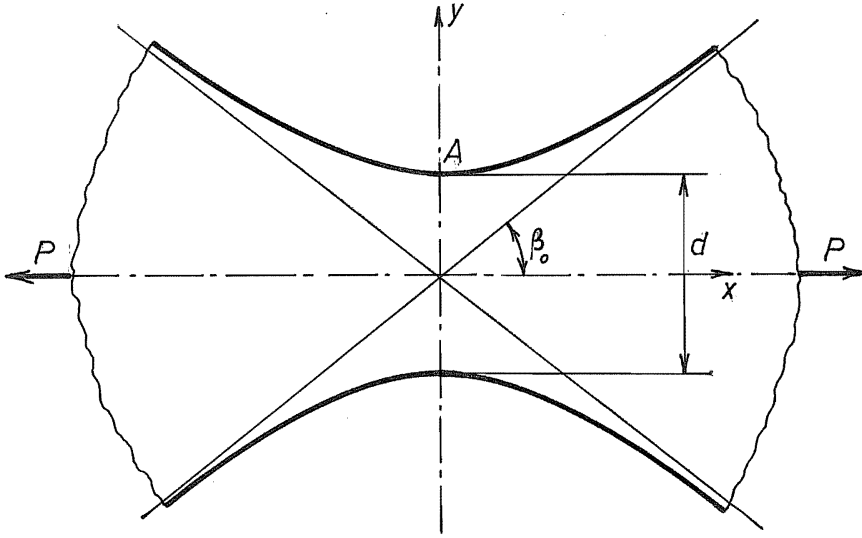


FIGURE 10.17 – Problème de Neuber

Ce sont donc des ellipse de demi-axes  $a \operatorname{sh} \alpha$  et  $a \operatorname{ch} \alpha$ . Les courbes  $\beta = \text{cte}$  ont pour équation

$$\frac{y^2}{a^2 \sin^2 \beta} - \frac{x^2}{a^2 \cos^2 \beta} = 1 \quad (10.172)$$

Il s'agit d'hyperboles, d'axe réel selon  $y$  et égal à  $2a \sin \beta$  et d'axe imaginaire  $2a \cos \beta$  sur l'axe des  $x$ . Ces hyperboles admettent les asymptotes

$$y = \pm x \operatorname{tg} \beta$$

faisant un angle  $\pm \beta$  avec l'axe des  $x$ . Pour  $\alpha$  suffisamment grand, les ellipses (10.171) tendent à devenir circulaires, avec un rayon

$$r \approx a \operatorname{sh} \alpha \approx a \operatorname{ch} \alpha \approx a \frac{e^\alpha}{2}$$

A ces grandes distances de l'origine, on a donc

$$x \approx r \cos \beta, \quad y \approx r \sin \beta$$

c'est-à-dire que  $\beta$  représente asymptotiquement l'angle  $\theta$  de la trigonométrie.

Nous écrirons les fonctions  $F$  et  $K$  en termes de  $\xi$  :

$$F(z) = F(a \operatorname{sh} \xi) = F_1(\xi), \quad K(z) = K(a \operatorname{sh} \xi) = K_1(\xi)$$

Les dérivées se calculent alors par la relation

$$F'(z) = \frac{F'_1(\xi)}{a \operatorname{ch} \xi}$$

et de même pour  $K'$ .

A l'infini, la distribution des contraintes doit approcher celle du coin de Michell,

$$F(z) = C \ln z$$

Comme, pour  $\alpha$  suffisamment grand,

$$\ln z = \ln(a \operatorname{sh} \xi) \approx \ln\left(\frac{a}{2} e^\xi\right) = \ln \frac{a}{2} + \xi$$

nous chercherons une solution pour laquelle

$$F_1(\xi) = C\xi \tag{10.173}$$

Pour déterminer la fonction  $K_1$ , nous partirons du fait que sur les frontières  $\beta = \pm\beta_0$  du domaine, la fonction  $\psi$  doit être constante, puisque ces bords sont libres de toute charge. Considérons le bord  $\beta = \beta_0$ . On a

$$\begin{aligned} i\psi &= F + z\bar{F}' + \bar{K}' \\ &= C\xi + \frac{Ca \operatorname{sh} \xi + \bar{K}'_1}{a \operatorname{ch} \xi} \\ &= C(\alpha + i\beta_0) + \frac{Ca \operatorname{sh}(\alpha + i\beta_0) + \bar{K}'_1(\alpha, \beta_0)}{a \operatorname{ch}(\alpha - i\beta_0)} \end{aligned}$$

Sa constance s'exprime par la condition

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial}{\partial \alpha}(i\psi) &= \frac{1}{a^2 \operatorname{ch}^2(\alpha - i\beta_0)} [Ca^2 \operatorname{ch}^2(\alpha - i\beta_0) + Ca^2 \cos 2\beta_0 \\ &\quad + a \operatorname{ch}(\alpha - i\beta_0) \bar{K}_1''(\alpha, \beta_0) - a \operatorname{sh}(\alpha - i\beta_0) \bar{K}'_1(\alpha, \beta_0)] \end{aligned}$$

Ceci sera réalisé si

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(\alpha - i\beta_0) \bar{K}_1''(\alpha, \beta_0) - \operatorname{sh}(\alpha - i\beta_0) \bar{K}'_1(\alpha, \beta_0) \\ = -Ca \cos 2\beta_0 - Ca \operatorname{ch}^2(\alpha - i\beta_0) \end{aligned} \tag{10.174}$$

En l'absence de second membre, cette équation peut s'écrire

$$\frac{\bar{K}_1''(\alpha, \beta_0)}{\bar{K}_1'(\alpha, \beta_0)} = \frac{\text{sh}(\alpha - i\beta_0)}{\text{ch}(\alpha - i\beta_0)}$$

et admet visiblement la solution

$$\bar{K}_1'(\alpha, \beta_0) = A \text{ch}(\alpha - i\beta_0)$$

On trouve aisément une solution particulière pour le premier terme du second membre, sous la forme

$$\bar{K}_{1I}'(\alpha, \beta_0) = B \text{sh}(\alpha - i\beta_0)]$$

qui mène à la condition

$$B[\text{ch}^2(\alpha - i\beta_0) - \text{sh}^2(\alpha - i\beta_0)] = -Ca \cos 2\beta_0$$

On a donc

$$\bar{K}_{1I}'(\alpha, \beta_0) = -Ca \cos 2\beta_0 \text{sh}(\alpha - i\beta_0) \quad (10.175)$$

Pour le second terme du second membre, on utilisera la méthode de variation des constantes : en posant

$$\bar{K}_{1II}' = \bar{A}(\alpha, \beta_0) \text{ch}(\alpha - i\beta_0)$$

on obtient

$$\bar{A}'(\alpha, \beta_0) \text{ch}^2(\alpha - i\beta_0) = -Ca \text{ch}^2(\alpha - i\beta_0)$$

d'où  $\bar{A}(\alpha, \beta_0) = -Ca(\alpha - i\beta_0)$  et

$$\bar{K}_{1II}'(\alpha, \beta_0) = -Ca(\alpha - i\beta_0) \text{ch}(\alpha - i\beta_0) \quad (10.176)$$

Au total, la constance de  $\psi$  est assurée sur le bord  $\beta = \beta_0$  si  $\bar{K}_1$  y est de la forme

$$\bar{K}_1'(\alpha, \beta_0) = -Ca \cos 2\beta_0 \text{sh}(\alpha - i\beta_0) - Ca(\alpha - i\beta_0) \text{ch}(\alpha - i\beta_0) \quad (10.177)$$

La condition sur le bord  $\beta = -\beta_0$  s'obtient en remplaçant dans la condition (10.174)  $\beta_0$  par  $(-\beta_0)$ . On vérifie sans peine qu'elle sera réalisée si

$$\bar{K}_1'(\alpha, -\beta_0) = -Ca \cos 2\beta_0 \text{sh}(\alpha + i\beta_0) - Ca(\alpha + i\beta_0) \text{ch}(\alpha + i\beta_0) \quad (10.178)$$

On constate donc que la fonction

$$K_1'(\xi) = -Ca \cos 2\beta_0 \operatorname{sh} \xi - Ca \xi \operatorname{ch} \xi \quad (10.179)$$

permet de vérifier l'équilibre sur le contour. Avec cette fonction, on obtient, en  $\beta = \pm\beta_0$ ,

$$\begin{aligned} i\psi &= C \left( \xi + \frac{\operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi} - \frac{\cos 2\beta_0 \operatorname{sh} \bar{\xi}}{\operatorname{ch} \bar{\xi}} - \frac{\bar{\xi} \operatorname{ch} \bar{\xi}}{\operatorname{ch} \bar{\xi}} \right) \\ &= C(\pm 2i\beta_0 \pm i \sin 2\beta_0) \end{aligned}$$

La charge  $P$  vaut donc

$$P = \psi(\beta_0) - \psi(-\beta_0) = C(4\beta_0 + 2 \sin \beta_0)$$

ce qui détermine la constante  $C$  :

$$C = \frac{P}{4\beta_0 + 2 \sin \beta_0} \quad (10.180)$$

Au fond de l'entaille, la contrainte normale est nulle, donc la contrainte tangentielle vaut

$$\sigma_t = \sigma_x + \sigma_y = 4\Re F' = 4\Re \left( \frac{F_1'}{a \operatorname{ch} \xi} \right) = \Re \frac{4C}{a \operatorname{ch} \xi}$$

Au point  $A$  a pour coordonnées  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \beta_0$ , cela donne

$$\sigma_t = \Re \frac{4C}{a \cos \beta_0} = \frac{4C}{a \cos \beta_0} = \sigma_{\max}$$

La contrainte nominale dans la section est naturellement

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{P}{d} = \frac{P}{2a \sin \beta_0} = \frac{C(2\beta_0 + \sin \beta_0)}{a \sin \beta_0}$$

ce qui donne la valeur suivante du coefficient de concentration de contrainte :

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}} = \frac{4 \operatorname{tg} \beta_0}{2\beta_0 + \sin 2\beta_0} \quad (10.181)$$

Il est de coutume d'employer le rayon de courbure à fond d'entaille pour décrire celle-ci. Pour déterminer ce rayon, notons que le bord est une hyperbole dont l'équation (10.172) peut être écrite, pour les petites valeurs de  $x$ ,

$$y = a \sin \beta_0 \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 \cos^2 \beta_0}} \approx a \sin \beta_0 \left( 1 + \frac{x^2}{2a^2 \cos^2 \beta_0} \right) = y_0 + \frac{x^2}{2R}$$

ce qui donne

$$\frac{1}{R} = \frac{\sin \beta_0}{a \cos^2 \beta_0}$$

et, puisque  $d/2 = a \sin \beta_0$ ,

$$\frac{d}{2R} = \operatorname{tg}^2 \beta_0$$

Tenant compte de la formule classique

$$\sin 2\beta_0 = \frac{2 \operatorname{tg} \beta_0}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta_0}$$

on obtient

$$\alpha_k = \frac{2\sqrt{\frac{d}{2R}}}{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{d}{2R}}\right) + \frac{\sqrt{\frac{d}{2R}}}{1 + \frac{d}{2R}}} \quad (10.182)$$

Pour  $d/R \rightarrow 0$ , on a  $\alpha_k \rightarrow 1$ ; pour  $d/R \rightarrow \infty$ ,

$$\alpha_k \approx \frac{2\sqrt{\frac{d}{2R}}}{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{0,8106 \frac{d}{R}}$$

La formule (10.182) étant compliquée, Neuber a proposé de l'approcher par une expression de la forme

$$\alpha_k = 1 + \left( \sqrt{A + B \frac{d}{R}} - \sqrt{A} \right) \quad (10.183)$$

Pour être correct à l'infini, il faudra évidemment que  $B = 0,8106$ . Par ailleurs, les valeurs de  $d/R$  les plus courantes en pratique sont de l'ordre de  $d/R = 30$ . Pour cette valeur, le calcul donne  $\alpha_k = 4,963$ . On détermine alors  $A$  en résolvant la relation (10.183) comme suit :

$$(\alpha_k - 1)^2 + 2\sqrt{A}(\alpha_k - 1) + A = A + B \frac{d}{R}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sqrt{A} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{B \frac{d}{R}}{(\alpha_k - 1)} - (\alpha_k - 1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{0,8106 \cdot 30}{3,963} - 3,963 \right] = 1,087 \end{aligned}$$

soit  $A = 1,181$ . La formule approchée est donc <sup>3</sup>

$$\alpha_k = \sqrt{1,181 + 0,8106 \frac{d}{R}} - 0,087 \quad (10.184)$$

Le tableau suivant compare les valeurs obtenues par ces deux formules :

$d/R$	$\alpha_k$ exact	$\alpha_k$ approché	erreur %
0	1	0,9997	-0.03
1	1,301	1,324	+1,8
2	1,556	1,587	+2
5	2,168	2,201	+1,5
10	2,937	2,960	+0,8
20	4,075	4,083	+0,2
50	6,387	6,371	-0,3
100	9,014	8,982	-0,4
200	12,74	12,69	-0,4
500	20,13	20,07	-0,3
1000	28,47	28,40	-0,2

Comme on peut le constater, la correspondance est excellente (moins de 2 % d'erreur).

## 10.20 Problème de Neuber en flexion

Pour la même géométrie, considérons à présent une flexion pure. Dans le cas du coin, on a, pour cette sollicitation,

$$F = \frac{iA}{z}, \quad K = iB \ln z$$

Cet état devra se retrouver au voisinage de l'infini. Or, pour  $\xi \rightarrow \infty$ , on a

$$a \operatorname{sh} \xi \approx \frac{a}{2} e^\xi, \quad \ln(a \operatorname{sh} \xi) \approx \ln \frac{a}{2} + \xi$$

Ceci suggère de chercher une solution de la forme

$$F = iAe^{-\xi}, \quad K = iB\xi \quad (10.185)$$

---

3. La formule proposée par Neuber est  $\alpha_k = \sqrt{0,8d/R + 1,2} - 0,1$ .



ce qui entraîne

$$F' = \frac{-iAe^{-\xi}}{a \operatorname{ch} \xi} \qquad K' = \frac{iB}{a \operatorname{ch} \xi}$$

et

$$\begin{aligned} i\psi &= F + a \operatorname{sh} \xi \bar{F}' + \bar{K}' \\ &= i \left[ Ae^{-\xi} + A \frac{\operatorname{sh} \xi e^{-\bar{\xi}}}{\operatorname{ch} \bar{\xi}} - \frac{B}{a \operatorname{ch} \bar{\xi}} \right] \\ &= i \frac{Ae^{-\xi} \operatorname{ch} \bar{\xi} + A \operatorname{sh} \xi e^{-\bar{\xi}} - B/a}{\operatorname{ch} \bar{\xi}} \\ &= i \frac{\frac{A}{2} \left( e^{-\xi+\bar{\xi}} + e^{-\xi-\bar{\xi}} + e^{\xi-\bar{\xi}} - e^{-\xi-\bar{\xi}} \right) - B/a}{\operatorname{ch} \bar{\xi}} \\ &= i \frac{A \cos 2\beta - B/a}{\operatorname{ch} \bar{\xi}} \end{aligned}$$

Cette fonction sera nulle en  $\beta = \pm\beta_0$  si l'on pose

$$B = Aa \cos 2\beta_0 \tag{10.186}$$

On détermine alors  $A$  par la relation entre le moment et la fonction d'Airy (voir section 10.18) :

$$M = [\varphi]_{-\beta_0}^{\beta_0}$$

Dans notre cas,

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2} (\bar{z}F + z\bar{F} + K + \bar{K}) \\ &= \frac{1}{2} \left( iAa \operatorname{sh} \bar{\xi} e^{-\xi} - iAa \operatorname{sh} \xi e^{-\bar{\xi}} = iB\xi - iB\bar{\xi} \right) \\ &= \frac{iAa}{4} \left( e^{\bar{\xi}-\xi} - e^{-\bar{\xi}-\xi} - e^{\xi-\bar{\xi}} + e^{-\xi-\bar{\xi}} \right) + \frac{iB}{2} (\xi - \bar{\xi}) \\ &= \frac{iAa}{4} 2 \operatorname{sh}(-2i\beta) + iB \cdot 2i\beta \\ &= \frac{Aa}{2} \sin 2\beta - Aa \cos 2\beta_0 \cdot \beta \\ &= \frac{Aa}{2} (\sin 2\beta - 2\beta \cos 2\beta_0) \end{aligned}$$

d'où

$$M = Aa(\sin 2\beta_0 - 2\beta_0 \cos 2\beta_0)$$

ce qui donne

$$A = \frac{M}{a(\sin 2\beta_0 - 2\beta_0 \cos 2\beta_0)}$$

On a alors

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\Re F' = \Re \left( \frac{-4iAe^{-\xi}}{a \operatorname{ch} \xi} \right)$$

A fond d'entaille, pour  $\alpha = 0$ ,  $\beta = -\beta_0$ , cela donne

$$\sigma_x + \sigma_y = \Re \left( \frac{-4iAe^{i\beta_0}}{a \cos \beta_0} \right) = \frac{4A}{a} \operatorname{tg} \beta_0 = \sigma_{\max}$$

La contrainte nominale dans la section est définie par la loi d'équarrissage classique,

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{6M}{d^2} = \frac{6Aa(\sin 2\beta_0 - 2\beta_0 \cos 2\beta_0)}{4a^2 \sin^2 \beta_0}$$

ce qui conduit à la valeur suivante du coefficient de concentration de contrainte :

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}} = \frac{8}{3} \operatorname{tg} \beta_0 \frac{\sin^2 \beta_0}{\sin 2\beta_0 - 2\beta_0 \cos 2\beta_0} \quad (10.187)$$

On vérifie que pour  $\beta_0 \rightarrow 0$ , on a

$$\sin 2\beta_0 - 2\beta_0 \cos 2\beta_0 \approx 2\beta_0 - \frac{8\beta_0^3}{6} - 2\beta_0 + \frac{8\beta_0^3}{2} \approx \frac{8\beta_0^3}{3}$$

si bien que  $\alpha_k \rightarrow 1$ , comme on pouvait s'y attendre. Exprimons à présent  $\alpha_k$  en termes de  $d/(2R)$ . Tenant compte des relations

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_0 &= \sqrt{\frac{d}{2R}} \\ \sin \beta_0 &= \frac{\operatorname{tg} \beta_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta_0}} = \frac{\sqrt{\frac{d}{2R}}}{\sqrt{1 + \frac{d}{2R}}} \\ \sin 2\beta_0 &= \frac{2 \operatorname{tg} \beta_0}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta_0} = \frac{2\sqrt{\frac{d}{2R}}}{1 + \frac{d}{2R}} \\ \cos 2\beta_0 &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \beta_0}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta_0} = \frac{1 - \frac{d}{2R}}{1 + \frac{d}{2R}} \end{aligned}$$

on obtient

$$\alpha_k = \frac{4}{3} \frac{\left(\frac{d}{2R}\right)^{3/2}}{\sqrt{\frac{d}{2R}} - \left(1 - \frac{d}{2R}\right) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{d}{2R}}} \quad (10.188)$$

De la même façon qu'en extension, on peut approcher cette formule par une expression de la forme

$$\alpha_k = 1 + \left( \sqrt{A + B \frac{d}{R}} - \sqrt{A} \right)$$

A l'infini, on a

$$\alpha_k \approx \frac{\frac{4}{3} \frac{d}{2R} \sqrt{\frac{d}{2R}}}{\frac{d}{2R} \frac{\pi}{2}} = \sqrt{0,3603 \frac{d}{R}}$$

d'où  $B = 0,3603$ . Pour  $d/R = 30$ , le calcul donne  $\alpha_k = 3,469$ , ce qui donne

$$\sqrt{A} = \frac{1}{2} \left( \frac{0,3603 \cdot 30}{2,469} - 2,469 \right) = 0,9544$$

soit  $A = 9110$ . On obtient ainsi la formule <sup>4</sup>

$$\alpha_k \approx \sqrt{0,9110 + 0,3663 \frac{d}{R}} + 0,0456 \quad (10.189)$$

Les résultats donnés par la formule exacte et par la formule approchée sont comparés dans le tableau suivant :

$d/R$	$\alpha_k$ exact	$\alpha_k$ approché	erreur %
0	1	1	0
1	1,180	1,173	-0,6
2	1,333	1,323	-0,8
5	1,705	1,693	-0,7
10	2,180	2,170	-0,5
20	2,899	2,895	-0,1
50	4,390	4,396	+0,1
100	6,110	6,124	+0,2
200	8,567	8,588	+0,2
500	13,47	13,50	+0,2
1000	19,02	19,05	+0,2

---

4. La formule originale de Neuber est  $\alpha_k \approx \sqrt{0,355d/R + 0,85} + 0,08$

Ici encore, la correspondance est excellente (moins de 0,8 % d'erreur).

## 10.21 Annexe : disques d'épaisseur variable en rotation

### 10.21.1 Équations générales

Les disques de turbines sont d'épaisseur  $t$  variable en fonction du rayon. Une étude approchée de ces disques peut être faite en admettant les hypothèses suivantes :

$$u_r = u(r) \qquad \sigma_z = \tau_{rz} = 0$$

Il vient alors, par les travaux virtuels, en considérant une variation  $\delta u$  nulle aux rayons d'extrémité  $R_1$  et  $R_2$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \left( rt\sigma_r \frac{\partial \delta u}{\partial r} + t\sigma_\theta \delta u - \rho\omega^2 r^2 t \delta u \right) dr \\ &= 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \left[ -\frac{d}{dr}(rt\sigma_r) + t\sigma_\theta - \rho\omega^2 r^2 t \right] \delta u dr \end{aligned}$$

ce qui conduit à l'équation d'équilibre

$$\frac{d}{dr}(rt\sigma_r) - t\sigma_\theta = \rho\omega^2 r^2 t \quad (10.190)$$

Les relations entre les déformations et les contraintes sont

$$\begin{cases} \frac{du}{dr} &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \\ \frac{u}{r} &= \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) \end{cases}$$

Pour que ces deux relations soient compatibles, il faut que

$$\frac{d}{dr}[r(\sigma_\theta - \nu\sigma_r)] = \sigma_r - \nu\sigma_\theta$$

ce qui s'écrit encore

$$r \frac{d}{dr}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) = (1 + \nu)(\sigma_r - \sigma_\theta) \quad (10.191)$$

### 10.21.2 Disque d'égale résistance

Il est possible d'obtenir

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{d\sigma_\theta}{dr} = 0$$

dans certaines conditions. A partir de la relation (10.191), on déduit immédiatement

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma = \text{cte}$$

La relation (10.190) fournit alors une expression de l'épaisseur : elle devient en effet

$$\sigma \frac{d}{dr}(rt) - t\sigma + \rho\omega^2 r^2 t = 0$$

soit

$$\sigma \left( r \frac{dt}{dr} + t - t \right) = -\rho\omega^2 r^2 t$$

ce qui entraîne

$$\frac{dt}{t} = -\frac{\rho\omega^2 r dr}{\sigma}, \quad \ln \frac{t}{t_0} = -\frac{\rho\omega^2 r^2}{2\sigma}$$

et

$$t = t_0 \exp \left( -\frac{\rho\omega^2 r^2}{2\sigma} \right)$$

Cette expression suppose que le disque va de  $r = 0$  à  $r = \infty$ . Les déplacements dans le disque sont alors donnés par

$$u = \frac{r}{E}(\sigma - \nu\sigma) = \frac{(1 - \nu)\sigma r}{E}$$

### 10.21.3 Jante

En pratique, le disque se termine par une jante à laquelle sont accrochés les aubages. On peut admettre que la jante se comporte comme une barre courbe en extension, avec

$$\varepsilon = \frac{u}{r} = \text{cte}$$

L'effort circonférentiel dans la jante est donc donné par

$$N_j = E\Omega \left( \frac{u}{r} \right)_j$$

Les forces agissant sur la jante sont (*fig.* 10.18)

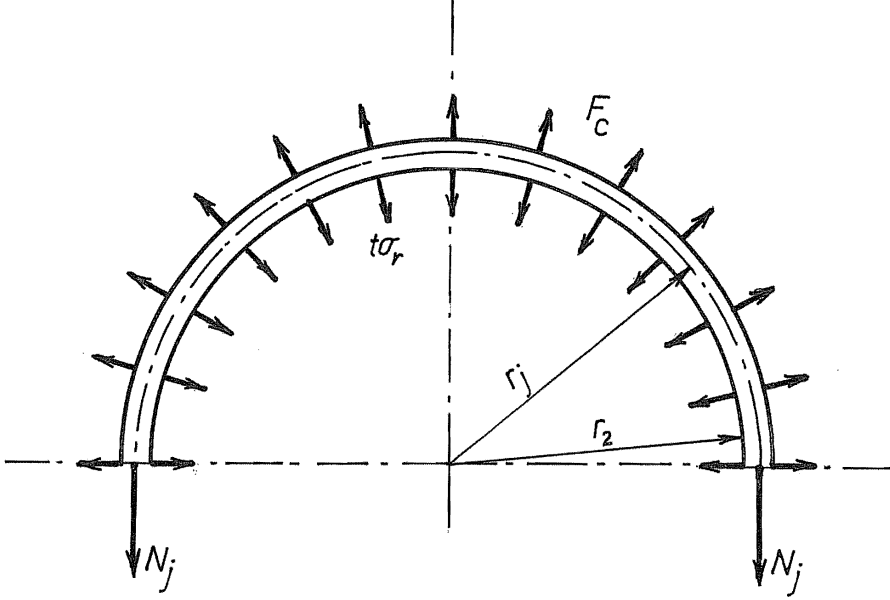


FIGURE 10.18 – Equilibre de la jante

- La force centrifuge de la jante, dont la résultante sur une demi-circonférence est

$$\rho\Omega\omega^2 r_j \cdot 2r_j = 2\rho\Omega\omega^2 r_j^2$$

- La force centrifuge des aubes. Si la masse des aubes par unité de longueur est de  $\mu$  au rayon  $r_a$ , cette force vaut, pour une demi-circonférence,

$$\mu\omega^2 r_a \cdot 2r_a = 2\mu\omega^2 r_a^2$$

- Les forces de rappel du disque, résultantes des  $\sigma_r$  en  $r = r_2$ , rayon de la jonction du disque et de la jante. Leur résultante sur une demi-circonférence est

$$\sigma_r(r_2)t_2 \cdot 2r_2$$

Au total, on a donc

$$2N_j = 2 \underbrace{\left( \rho\Omega + \mu \frac{r_a^2}{r_j^2} \right)}_{\mu^*} \omega^2 r_j^2 - 2\sigma_r(r_2) t_2 r_r$$

soit

$$E\Omega \left( \frac{u}{r} \right)_j = E\Omega \frac{u_2}{r_2} = \mu^* \omega^2 r_j^2 - \sigma_r(r_2) t_2 r_2$$

ce qui donne

$$u_2 = \frac{r_2}{E\Omega} [\mu^* \omega^2 r_j^2 - \sigma_r(r_2) t_2 r_2] \quad (10.192)$$

#### 10.21.4 Moyeu

On munit également les disques d'un moyeu, allant de l'arbre (rayon  $r_0$ ) à un rayon  $r_1 = 1,8$  à  $2r_0$ . Ce moyeu, d'épaisseur  $t_m$  constante, vérifie les équations classiques des disques d'épaisseur constante en rotation :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u & = & \frac{1-\nu^2}{E} \left[ Ar + \frac{B}{r} - \frac{1}{8} \rho \omega^2 r^3 \right] \\ \sigma_r & = & (1+\nu)A - (1-\nu) \frac{B}{r^2} - \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 r^2 \\ \sigma_\theta & = & (1+\nu)A + (1-\nu) \frac{B}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8} \rho \omega^2 r^2 \end{array} \right. \quad (10.193)$$

#### 10.21.5 Renforcement neutre

Nous dirons qu'une jante et un moyeu constituent un *renforcement neutre d'un disque d'égale résistance* si leur comportement est identique à celui de la portion de disque qu'ils remplacent, c'est-à-dire s'ils donnent le même  $u$  et le même  $(t\sigma_r)$ . Cette notion permet le dimensionnement complet du disque.

1. *Condition de jante* - La jante et les aubages étant donnés, la relation entre le déplacement et l'effort est fournie par l'équation (10.192). Si  $\sigma$  est la contrainte dans le disque, on doit avoir

$$\sigma(r_2) = \sigma, \quad u(r_2) = \frac{\sigma r_2 (1-\nu)}{E}$$

d'où la condition

$$\frac{\sigma r_2(1-\nu)}{E} = \frac{r_2}{E\Omega}(\mu^* \omega^2 r_j^2 - \sigma t_2 r_2)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} t_2 &= -\frac{E\Omega \sigma r_2(1-\nu)}{\sigma r_2^2 E} + \frac{\mu^* \omega^2 r_j^2}{\sigma r_2} \\ &= \frac{\mu^* \omega^2 r_j^2}{\sigma r_2} - \frac{(1-\nu)\Omega}{r_2} \end{aligned} \quad (10.194)$$

On en déduit les épaisseurs du disque en  $r \neq r_2$  à partir des relations

$$\begin{aligned} t_2 &= t_0 \exp\left(-\frac{\rho \omega^2 r_2^2}{2\sigma}\right) \\ t &= t_0 \exp\left(-\frac{\rho \omega^2 r^2}{2\sigma}\right) \end{aligned}$$

qui se combinent en

$$\frac{t}{t_2} = \exp\left(\frac{\rho \omega^2 (r_2^2 - r^2)}{2\sigma}\right) \quad (10.195)$$

En particulier, pour  $r = r_1$ , on a

$$t_1 = t_2 \exp\left(\frac{\rho \omega^2 (r_2^2 - r_1^2)}{2\sigma}\right) \quad (10.196)$$

2. *Condition de moyeu* - Le moyeu doit d'abord vérifier

$$\sigma_r(r_0) = (1+\nu)A - (1-\nu)\frac{B}{r_0^2} - \frac{3+\nu}{8}\rho \omega^2 r_0^2 = -p \quad (10.197)$$

où  $p$  est l'éventuelle pression de frettage sur l'arbre. Une second relation est donnée par l'égalité des déplacements du dsque et du moyeu en  $r = r_1$  :

$$u(r_1) = \frac{1-\nu^2}{E} \left[ Ar_1 + \frac{B}{r_1} - \frac{1}{8}\rho \omega^2 r_1^2 \right] = \frac{(1-\nu)\sigma r_1}{E}$$

soit

$$A + \frac{B}{r_1^2} = \frac{\sigma}{1+\nu} + \frac{1}{8}\rho \omega^2 r_1^2 \quad (10.198)$$



Les deux équations (10.197) et (10.198) définissent  $A$  et  $B$ . On en déduit

$$\sigma_r(r_1) = (1 + \nu)A - (1 - \nu)\frac{B}{r_1^2} - \frac{3 + \nu}{8}\rho\omega^2 r_1^2$$

ce qui permet de fixer l'épaisseur du moyeu par la condition d'équilibre

$$\sigma_r(r_1)t_m = \sigma t_1$$

soit

$$t_m = t_1 \frac{\sigma}{\sigma_r(r_1)} \quad (10.199)$$

3. *Raccordement du moyeu* - Il est évidemment nécessaire de réaliser un congé pour le raccordement du moyeu au disque, de manière à limiter les concentrations de contrainte. Une idée raisonnable de cette concentration est donnée par la formule suivante, relative aux changements de section des barres [19] :

$$\alpha_k = \max(1, \alpha_k^*) \quad \text{avec} \quad \alpha_k^* = 0,9616 + B\sqrt{\frac{t_1}{R}}$$

où  $B$  dépend du rapport  $t_1/t_m$ , selon le tableau suivant :

$t_1/t_m$	$B$
1	0,075
1,1	0,2
1,2	0,285
1,3	0,34
1,4	0,37
1,5	0,395
1,6	0,415
1,7	0,43
1,8	0,44
1,9	0,455
2	0,46
$>2$	$0,27 + 0,095t_1/t_m$

### 10.21.6 Exemple

$$\left\{ \begin{array}{ll} \omega = 314 \text{ rad/s} & \Omega = 2480 \text{ mm}^2 \\ r_0 = 90 \text{ mm} & \mu = 8 \text{ kg/m} \\ r_j = 579 \text{ mm} & \rho = 7800 \text{ kg/m}^3 \\ r_2 = 545 \text{ mm} & E = 210 \text{ GPa} \\ r_a = 615 \text{ mm} & \nu = 0,3 \\ r_1 = 180 \text{ mm} & \sigma = 100 \text{ MPa} \\ & p = 0 \end{array} \right.$$

On calcule successivement

#### Jante et voile

$$\begin{aligned} \mu^* &= \rho\Omega + \mu \frac{r_a^2}{r_j^2} = 7800 \cdot 2,480 \cdot 10^{-3} + 8 \left( \frac{615}{579} \right)^2 = 28,37 \text{ kg/m} \\ t_2 &= \frac{28,37 \cdot \overline{314}^2 \cdot \overline{0,579}^2}{10^8 \cdot 0,545} - \frac{0,7 \cdot 2,480 \cdot 10^{-3}}{0,545} \\ &= 17,21 \cdot 10^{-3} - 3,185 \cdot 10^{-3} = \mathbf{14,02 \cdot 10^{-3} m} \\ \frac{t}{t_2} &= \exp \left( \frac{7800 \cdot \overline{314}^2 (\overline{0,545}^2 - r^2)}{2 \cdot 10^8} \right) \\ &= \exp \left( 3,845 (\overline{0,545}^2 - r^2) \right) \\ t_1 &= 14,02 \cdot 10^{-3} \cdot \exp \left( 3,845 (\overline{0,545}^2 - \overline{0,180}^2) \right) = \mathbf{38,78 \cdot 10^{-3} m} \end{aligned}$$

#### Moyeu

– Condition d'équilibre à l'arbre

$$1,3A - 0,7 \frac{B}{\overline{0,09}^2} = \frac{3,3}{8} 7800 \cdot \overline{314}^2 \cdot \overline{0,09}^2$$

soit

$$1,3A - 86,42B = 2,570 \cdot 10^{-6} \Leftrightarrow A - 66,48B = 1,997 \cdot 10^{-6}$$

– Compatibilité à la jonction moyeu-voile

$$A + \frac{B}{\overline{0,180}^2} = \frac{10^8}{1,3} + \frac{1}{8} 7800 \cdot \overline{314}^2 \cdot \overline{0,180}^2 = 76,92 \cdot 10^6 + 3,115 \cdot 10^6 = 80,04 \cdot 10^6$$

soit

$$A + 30,86B = 80,04 \cdot 10^6$$

– On déduit de ces deux conditions

$$A = \mathbf{55,29 \cdot 10^6 Pa}, \quad B = \mathbf{802,0 \cdot 10^3 N}$$

On a donc

$$\sigma_r = 1,3A - 0,7\frac{B}{r^2} - \frac{3,3}{8}7800 \cdot 314^2 r^2 = 71,88 \cdot 10^6 - \frac{561,4 \cdot 10^3}{r^2} - 317,2 \cdot 10^6 r^2$$

En  $r = 0,180m$ , il vient

$$\sigma_r = 44,27 \cdot 10^6 Pa$$

si bien que

$$t_m = t_1 \frac{100}{44,27} = \mathbf{87,59 mm}$$

**Contrainte circonférentielle en  $r = r_0$**

$$\begin{aligned} \sigma_\theta(r_0) &= 1,3A + 0,7\frac{B}{r_0^2} - \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 r_0^2 \\ &= 71,88 \cdot 10^6 + 69,31 \cdot 10^6 - 1,479 \cdot 10^6 = \mathbf{139,7 \cdot 10^6 Pa} \end{aligned}$$

**Congé** - Le plus grand rayon possible, en se raccordant à  $90^\circ$  sur le moyeu, est approximativement égal à

$$R = \frac{t_m - t_1}{2} = \frac{87,59 - 38,78}{2} = \mathbf{24,41 mm}$$

En adoptant cette valeur, on obtient  $t_1/R = 1,589$ . Il en découle, dans la formule relative à  $\alpha_k$ ,  $B = 0,485$ , ce qui donne

$$\alpha_k = 0,9616 + 0,485\sqrt{1,589} = 1,573$$

La contrainte maximale est donc

$$\sigma_{\max} = 1,573 \cdot 100 = \mathbf{157,3 MPa}$$

Le profil obtenu est représenté en figure 10.19.

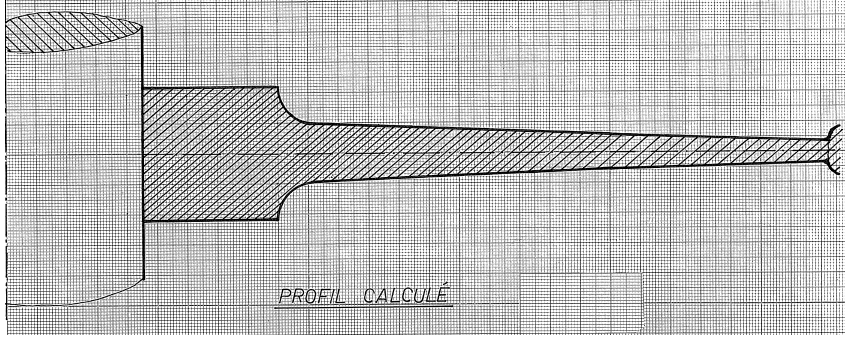


FIGURE 10.19 – Profil calculé

## 10.22 Exercices

**Exercice 37** *Trouver directement l'état de contrainte le long du trou dans le problème de Kirsch sans passer par la formulation complexe.*

*Solution* - A l'infini, on doit avoir

$$\varphi_{\infty} \approx \sigma \frac{y^2}{2}$$

Au bord du trou, on a

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0$$

ce qui permet de poser  $\varphi = \partial \varphi / \partial r = 0$ . L'expression asymptotique de  $\varphi$  à l'infini peut encore s'écrire

$$\varphi_{\infty} = \sigma \frac{r^2}{2} \sin^2 \theta = \frac{\sigma r^2}{4} (1 - \cos 2\theta)$$

Ceci suggère de chercher une fonction d'Airy qui soit la somme d'une fonction de périodicité 0 et d'une fonction de périodicité 2. On écrira donc

$$\varphi = r^2 f_1 + f_2$$

en donnant aux fonctions harmoniques  $f_1$  et  $f_2$  les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} f_1 &= \Re(A \ln z + B + Cz^2 + Dz^{-2}) = A \ln r + B + Cr^2 \cos 2\theta + Dr^{-2} \cos 2\theta \\ f_2 &= \Re(E \ln z + F + Gz^2 + Hz^{-2}) = E \ln r + F + Gr^2 \cos 2\theta + Hr^{-2} \cos 2\theta \end{aligned}$$

Il vient ainsi

$$\varphi = Ar^2 \ln r + Br^2 + Cr^4 \cos 2\theta + D \cos 2\theta + E \ln r + F + Gr^2 \cos 2\theta + Hr^{-2} \cos 2\theta$$

Au voisinage de l'infini, cette expression devient

$$\varphi = Ar^2 \ln r + Cr^4 \cos 2\theta + (B + G \cos 2\theta)r^2 + o(r^2)$$

On doit donc avoir

$$A = C = 0, \quad B = \frac{\sigma}{4}, \quad G = -\frac{\sigma}{4}$$

Il reste

$$\varphi = \frac{\sigma r^2}{4}(1 - \cos 2\theta) + D \cos 2\theta + E \ln r + F + Hr^{-2} \cos 2\theta$$

Au rayon  $a$  du trou, on doit avoir

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\sigma a^2}{4} + E \ln a + F + \left(-\frac{\sigma a^2}{4} + D + Ha^{-2}\right) \cos 2\theta = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{\sigma a}{2} + \frac{E}{a} + \left(-\frac{\sigma a}{2} - 2Ha^{-3}\right) \cos 2\theta = 0 \end{aligned}$$

ce qui mène aux conditions

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\sigma a^2}{2} \\ H &= -\frac{\sigma a^2}{4} \\ F &= -\frac{\sigma a^2}{4} - E \ln a = \frac{\sigma a^2}{4} - \frac{\sigma a^2}{2} \ln a \\ D &= \frac{\sigma a^2}{4} - Ha^{-2} = \frac{\sigma a^2}{4} + \frac{\sigma a^2}{4} = \frac{\sigma a^2}{2} \end{aligned}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\sigma}{4} + \frac{\sigma a^2}{2r^2} \cos 2\theta \\ f_2 &= -\frac{\sigma a^2}{2} \ln r + \frac{\sigma a^2}{4} - \frac{\sigma a^2}{2} \ln a - \frac{\sigma}{4} r^2 \cos 2\theta - \frac{\sigma a^4}{4r^2} \cos 2\theta \end{aligned}$$

Les contraintes au bord du trou vérifient  $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$ ,  $\sigma_\theta = \sigma_x + \sigma_y = \nabla^2 \varphi$ . Or,  $f_2$  est harmonique, donc

$$\nabla^2 \varphi = \nabla^2 [(x^2 + y^2) f_1]$$

On calcule aisément

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [(x^2 + y^2) f_1] &= 2x f_1 + (x^2 + y^2) \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(x^2 + y^2) f_1] &= 2f_1 + 4x \frac{\partial f_1}{\partial x} + (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} \end{aligned}$$

et, de même,

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} [(x^2 + y^2) f_1] = 2f_1 + 4y \frac{\partial f_1}{\partial y} + (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}$$

ce qui donne

$$\nabla^2 \varphi = 4 \left( f_1 + x \frac{\partial f_1}{\partial x} + y \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) = 4(f_1 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{grad} f_1) = 4 \left( f_1 + r \frac{\partial f_1}{\partial r} \right)$$

soit, au bord du trou,

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= 4 \left[ \frac{\sigma}{4} + \frac{\sigma}{2} \frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta - r \frac{\sigma}{2} \frac{a^2}{r^3} \cos 2\theta \right]_{r=a} \\ &= 4 \left( \frac{\sigma}{4} - \frac{\sigma}{2} \cos 2\theta \right) \\ &= \sigma(1 - 2 \cos 2\theta) \end{aligned}$$

Le maximum a lieu pour  $\theta = \pm\pi/2$  et vaut  $3\sigma$ .

**Exercice 38** Soit un arbre de rayon  $R_i$  sur lequel est fretté un moyeu de rayon extérieur  $R_e$ . Les deux pièces sont en acier ( $E = 210\text{GPa}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\rho = 7800\text{kg/m}^3$ ). Avant pose, le rayon de l'arbre surpasse le rayon intérieur du moyeu. On donne

$$R_i = 40\text{mm}, \quad R_e = 150\text{mm}, \quad \delta = 100\mu\text{m}$$

On demande

1. La pression de contact de l'arbre sur le moyeu lors de la pose.
2. Comment évolue cette pression lorsque l'ensemble tourne ?

3. A quelle vitesse la pression de l'arbre sur le moyeu s'annule-t-elle ?

*Solution*

1.

$$Q_m = \frac{40}{150} = 0,2267$$

$$C_m = \frac{1}{210000 \cdot 0,9289} (1,3 + 0,7 \cdot 0,711) = 6,919 \cdot 10^{-6} (MPa)^{-1}$$

$$C_a = \frac{1}{210000} (0,7 + 1,3 \cdot 0) = 3,333 \cdot 10^{-6} (MPa)^{-1}$$

$$\frac{\delta}{R} = \frac{0,1}{40} = 2,5 \cdot 10^{-3}$$

$$p = \frac{\frac{\delta}{R}}{C_a + C_m} = \frac{2,500 \cdot 10^{-3}}{(6,919 + 3,333) \cdot 10^{-6}} = \mathbf{243,9 MPa}$$

2. Le fretage conduit à une distribution de contraintes de la forme représentée en figure 10.20. Il s'y superpose le champ de contraintes d'un disque

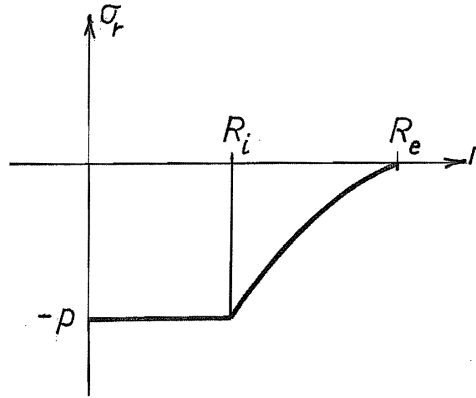


FIGURE 10.20 – Distribution des contraintes de fretage

en rotation de rayon  $R_e$ , du moins tant que le décollement n'a pas lieu. La contrainte radiale de ce champ est donnée, en  $r = R_i$ , par

$$\sigma_r = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 R_e^2 (1 - Q^2)$$

Superposant, on obtient

$$-\sigma_r = \left( 243,9 \cdot 10^6 - \frac{3,3}{8} 7800 \cdot \overline{0,15^5} \cdot 0,9289 \omega^2 \right)$$

soit

$$-\sigma_r = (243,9 \cdot 10^6 - 67,25 \omega^2)$$

3.  $\sigma_r = 0$  pour

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{243,9 \cdot 10^6}{67,25} = 3,627 \cdot 10^6 (rad/s)^2 \\ \omega &= 1904 rad/s = 18190 tr/min \end{aligned}$$



# Chapitre 11

## Théorie technique des poutres

### 11.1 Introduction

La théorie des poutres de Barré de Saint-Venant, bien qu'exacte, n'est pas entièrement satisfaisante pour les besoins de la pratique. Tout d'abord, elle est compliquée. Ensuite, elle ne permet pas de prendre en compte la torsion non uniforme de manière correcte. Par ailleurs, pour toutes les poutres longues, on peut négliger les déformations dues à l'effort tranchant. Nous présentons ici une théorie approchée d'application plus générale, fondée sur une approche variationnelle et une étude approfondie des ordres de grandeur.

### 11.2 Ordres de grandeur des contraintes

Soit  $\rho$  une dimension caractéristique des sections. Une valeur raisonnable est par exemple

$$\rho = \sqrt{\frac{I_p}{\Omega}}, \quad \text{avec} \quad \Omega = \text{section}, \quad I_p = \int_{\Omega} (x^2 + y^2) d\Omega \quad (11.1)$$

Soit encore  $\ell$  une dimension caractérisant la longueur de la poutre. Nous nous intéressons ici aux phénomènes à grande longueur d'onde, c'est-à-dire que nous admettrons que les contraintes varient significativement, le long de l'axe longitudinal  $z$  de la poutre, sur une longueur de l'ordre de  $\ell$ . Les équations d'équilibre

intérieur, qui s'écrivent

$$\begin{aligned} D_\beta \sigma_{\alpha\beta} + D_3 \sigma_{\alpha 3} &= 0 \\ D_\alpha \sigma_{\alpha 3} + D_3 \sigma_{33} &= 0 \end{aligned} \quad (11.2)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  peuvent prendre les valeurs 1 et 2, impliquent alors les relations suivantes, si  $\sigma$  est l'ordre de grandeur de  $\sigma_{33}$  :

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3} &= \mathcal{O}\left(\sigma \frac{\rho}{\ell}\right) \\ \sigma_{\alpha\beta} &= \mathcal{O}\left(\sigma \frac{\rho^2}{\ell^2}\right) \end{aligned} \quad (11.3)$$

Supposant  $\rho^2/\ell^2$  très petit devant l'unité, on peut donc écrire le principe de Hellinger-Reissner sous la forme

$$\int_V \left( \sigma_{33} D_3 u_3 + \sigma_{\alpha 3} (D_\alpha u_3 + D_3 u_\alpha) - \frac{\sigma_{33}^2}{2E} - \frac{\sigma_{\alpha 3} \sigma_{\alpha 3}}{2G} \right) dV + \mathcal{P}(u_\alpha, u_3) \text{ stat}$$

ce qui donne, par variation des contraintes,

$$\sigma_{33} = E D_3 u_3, \quad \sigma_{\alpha 3} = G (D_\alpha u_3 + D_3 u_\alpha) \quad (11.4)$$

On peut, en réintroduisant ces valeurs dans le principe, se ramener à un principe de variation des déplacements :

$$\begin{aligned} \int_V \left[ \frac{E}{2} (D_3 u_3)^2 + \frac{G}{2} (D_1 u_3 + D_3 u_1)^2 + \frac{G}{2} (D_2 u_3 + D_3 u_2)^2 \right] dV \\ + \mathcal{P}(u_1, u_2, u_3) \text{ stat} \end{aligned} \quad (11.5)$$

### 11.3 Ordres de grandeur des déplacements

Commençons par examiner les restrictions nécessaires à la validité de la linéarisation géométrique. On peut s'attendre à observer des déplacements  $u_3$  d'un ordre de grandeur différent de celui des deux autres. C'est pourquoi nous écrirons

$$u_3 = \mathcal{O}(W), \quad u_\alpha = \mathcal{O}(U)$$

La déformation de Green  $\gamma_{33}$  s'écrit

$$\gamma_{33} = D_3 u_3 + \frac{1}{2} (D_3 u_1)^2 + \frac{1}{2} (D_3 u_2)^2 + \frac{1}{2} (D_3 u_3)^2$$

et ses termes successifs ont les ordres de grandeur suivants :

$$\frac{W}{\ell}, \quad \frac{U^2}{\ell^2}, \quad \frac{U^2}{\ell^2}, \quad \frac{W^2}{\ell^2}$$

Pour que la linéarisation géométrique soit valable, il faut donc que

$$\frac{W^2}{\ell^2} \ll \frac{W}{\ell}, \quad \frac{U^2}{\ell^2} \ll \frac{W}{\ell}$$

soit encore

$$\frac{W}{\ell} \ll 1 \quad (11.6)$$

et

$$\frac{U^2}{\rho^2} \ll \frac{W}{\ell} \frac{\ell^2}{\rho^2} \quad (11.7)$$

Par ailleurs, les déformations  $\gamma_{\alpha\beta}$  ont pour expression

$$2\gamma_{\alpha\beta} = D_\alpha u_\beta + D_\beta u_\alpha + D_\alpha u_\gamma D_\beta u_\gamma + D_\alpha u_3 D_\beta u_3$$

et leurs différents termes ont pour ordre de grandeur

$$\frac{U}{\rho}, \quad \frac{U}{\rho}, \quad \frac{U^2}{\rho^2}, \quad \frac{W^2}{\rho^2}$$

ce qui mène aux conditions

$$\frac{U}{\rho} \ll 1 \quad (11.8)$$

et

$$\frac{W^2}{\ell^2} \frac{\ell^2}{\rho^2} \ll \frac{U}{\rho} \quad (11.9)$$

Les conditions (11.6) et (11.8) signifient que *le déplacement axial est très petit devant la longueur de la poutre et que les déplacements transversaux sont très petits devant les dimensions de la section*. Les relations (11.7) et (11.9) se combinent pour donner

$$\frac{U^2/\rho^2}{W/\ell} \ll \frac{\ell^2}{\rho^2} \ll \frac{U/\rho}{W^2/\ell^2} \quad (11.10)$$

En écrivant

$$X = \frac{U/\rho}{W/\ell}$$

cela donne

$$X \frac{U}{\rho} \ll \frac{\ell^2}{\rho^2} \ll \frac{X}{W/\rho}$$

Une valeur raisonnable de  $X$  est donc

$$X = \frac{U/\rho}{W/\ell} \approx \frac{\ell^2}{\rho^2} \quad (11.11)$$

ce qui implique

$$U \approx W \frac{\ell}{\rho} \quad (11.12)$$

c'est-à-dire que les déplacements transversaux sont aux déplacements axiaux comme la longueur est à la dimension  $\rho$ . Dans ces conditions, les déformations  $\gamma_{\alpha 3}$ , données par

$$2\gamma_{\alpha 3} = D_\alpha u_3 + D_3 u_\alpha + D_\alpha u_\gamma D_3 u_\gamma + D_\alpha u_3 D_3 u_3$$

ont leurs termes d'ordres de grandeur respectifs

$$\frac{W}{\rho}, \quad \frac{U}{\ell}, \quad \frac{U^2}{\rho \ell}, \quad \frac{W^2}{\rho \ell}$$

On constate que le troisième terme est au second comme  $U/\rho$  et que le quatrième est au premier comme  $W/\ell$ , ce qui justifie l'emploi de la théorie linéaire.

## 11.4 Structure des déplacements $u_1$ et $u_2$

En régime élastique, les déformations restent petites, du moins pour les corps suffisamment raides. Soit donc  $\epsilon \ll 1$  l'ordre de grandeur attendu des déformations. Commençons par examiner  $\varepsilon_{33}$ . On a

$$\varepsilon_{33} = D_3 u_3 = \mathcal{O}(W/\ell)$$

ce qui mène à poser

$$W = \epsilon \ell, \quad U = \epsilon \frac{\ell^2}{\rho} \quad (11.13)$$

Examinons à partir de là les trois déformations dans le plan d'une section. La physique du problème suppose

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(D_\alpha u_\beta + D_\beta u_\alpha) = \mathcal{O}(\epsilon)$$

alors qu'à priori,

$$D_\alpha u_\beta = \mathcal{O}\left(\epsilon \frac{\ell^2}{\rho^2}\right), \quad D_\beta u_\alpha = \mathcal{O}\left(\epsilon \frac{\ell^2}{\rho^2}\right)$$

Par conséquent, on peut écrire que les déplacements  $u_\alpha$  vérifient

$$D_\alpha u_\beta = -D_\beta u_\alpha \quad \text{à } \mathcal{O}\left(\frac{\rho^2}{\ell^2}\right) \text{ près} \quad (11.14)$$

soit

$$\begin{cases} D_1 u_1 \approx 0 & \text{d'où } u_1 \approx u(z) + \theta_1(z)y \\ D_2 u_2 \approx 0 & \text{d'où } u_2 \approx v(z) + \theta_2(z)x \\ D_1 u_2 \approx -D_2 u_1 & \text{d'où } \theta_1 \approx -\theta_2 = -\theta(z) \end{cases}$$

On obtient ainsi la structure suivante du champ de déplacement :

$$\begin{cases} u_3 &= u_3(x, y, z) \\ u_1 &= u(z) - y\theta(z) \\ u_2 &= v(z) + x\theta(z) \end{cases} \quad (11.15)$$

Il en découle directement, dans les notations classiques de l'ingénieur,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33} &= D_3 u_3 \\ \gamma_{13} &= D_1 u_3 + u' - \theta' y \\ \gamma_{23} &= D_2 u_3 + v' + \theta' x \end{aligned} \quad (11.16)$$

en marquant d'un prime les dérivées des fonctions de  $z$ .

## 11.5 Gauchissement de torsion et structure de l'énergie de déformation

L'énergie de déformation par unité de longueur de la poutre s'écrit

$$2\mathcal{U}' = E \int_{\Omega} (D_3 u_3)^2 d\Omega + G \int_{\Omega} [(D_1 u_3 + u' - \theta' y)^2 + (D_2 u_3 + v' + \theta' x)^2] d\Omega$$

On vérifie aisément que la première intégrale est d'ordre  $E\Omega\epsilon^2$ , tandis que la seconde est d'ordre  $E\Omega\epsilon^2 \frac{\ell^2}{\rho^2}$ . Dans le processus de minimisation, on pourra donc, avec une bonne approximation, varier  $u_3$  séparément dans la seconde, car les termes apportés par la première seront  $\rho^2/\ell^2$  fois plus petits. Cette minimisation

ne faisant intervenir que les dérivées selon  $x$  et  $y$ , elle pourra être effectuée section par section, ce qui mène au principe variationnel

$$\int_{\Omega} [(D_1 u_3 + u' - \theta' y)^2 1 + (D_2 u_3 + v' + \theta' x)^2] d\Omega = \min_{u_3}$$

La solution de ce problème est visiblement de la forme suivante<sup>1</sup> :

$$u_3 = w(z) - u'x - v'y + \theta'\psi(x, y) \quad (11.17)$$

où la fonction  $\psi$  minimise l'intégrale

$$\int_{\Omega} [(D_1 \psi - y)^2 + (D_2 \psi + x)^2] d\Omega \quad (11.18)$$

Ceci ne définit  $\psi$  qu'à une constante près. On fixe cette dernière en imposant la condition

$$\int_{\Omega} \psi d\Omega = 0 \quad (11.19)$$

Cette fonction est appelée *gauchissement de torsion*. En notant  $J$  la valeur minimale obtenue,

$$J = \min_{\psi} \int_{\Omega} [(D_1 \psi - y)^2 + (D_2 \psi + x)^2] d\Omega \quad (11.20)$$

on constate que l'énergie de cisaillement par unité de longueur de la poutre se ramène à

$$2\mathcal{U}'_c = GJ\theta'^2 \quad (11.21)$$

A propos de la constante  $J$ , notons que, pour toute variation  $\delta\psi$  de  $\psi$ , on a

$$\int_{\Omega} [(D_1 \psi - y)D_1 \delta\psi + (D_2 \psi + x)D_2 \delta\psi] d\Omega = 0 \quad (11.22)$$

Pour le choix particulier  $\delta\psi = \psi$ , on obtient

$$\int_{\Omega} [(D_1 \psi)^2 + (D_2 \psi)^2] d\Omega = \int_{\Omega} (yD_1 \psi - xD_2 \psi) d\Omega$$

---

1. Cette formule a été introduite pour la première fois par Timoshenko [84], sous une forme restreinte à la torsion. Elle a été généralisée par Wagner [92] et, surtout, par Vlassov [90]. C'est pourquoi on parle souvent de *théorie de Vlassov*.

Il en découle que

$$J = \int_{\Omega} [(D_1\psi)^2 + (D_2\psi)^2] d\Omega - 2 \int (yD_1\psi - xD_2\psi) d\Omega + I_p$$

avec

$$I_p = \int_{\Omega} (x^2 + y^2) d\Omega$$

soit

$$J = I_p - \int_{\Omega} [(D_1\psi)^2 + (D_2\psi)^2] d\Omega \leq I_p$$

l'égalité n'ayant lieu que si la gauchissement est nul.

A partir de l'expression (11.17), on déduit aisément

$$D_3u_3 = w' - u''x - v''y + \theta''\psi$$

ce qui permet de donner à l'énergie de déformation par unité de longueur de la poutre la forme suivante :

$$2\mathcal{U}' = E\Omega w'^2 + EI_x u''^2 + EI_y v''^2 + EK\theta''^2 + 2EL_x\theta''u'' + 2EL_y\theta''v'' + GJ\theta'^2 \quad (11.23)$$

en posant

$$\begin{aligned} \Omega &= \int_{\Omega} d\Omega, & I_x &= \int_{\Omega} x^2 d\Omega, & I_y &= \int_{\Omega} y^2 d\Omega \\ K &= \int_{\Omega} \psi^2 d\Omega, & L_x &= - \int_{\Omega} \psi x d\Omega, & L_y &= - \int_{\Omega} \psi y d\Omega \end{aligned} \quad (11.24)$$

Nous supposons ici implicitement vérifiées les conditions

$$I_{xy} = \int_{\Omega} xy d\Omega = 0, \quad \int_{\Omega} x d\Omega = 0, \quad \int_{\Omega} y d\Omega = 0 \quad (11.25)$$

qui signifient que l'on travaille dans les axes principaux d'inertie de la section.

## 11.6 Définition du centre de torsion

Considérons le changement de variables à deux paramètres  $x_T$  et  $y_T$  défini par

$$u = u_T + \theta y_T, \quad v = v_T - \theta x_T \quad (11.26)$$

revenant à écrire

$$u_1 = u_T - \theta(y - y_T), \quad u_2 = v_T + \theta(x - x_T)$$

Le point  $(x_T, y_T)$  se présente alors comme le point où l'on mesure les déplacements  $u_T$  et  $v_T$ . En choisissant bien ce point, il est possible de découpler la flexion et la torsion. On a en effet

$$\begin{aligned} 2\mathcal{U}' &= E\Omega w'^2 + EI_x(u_T'' + \theta'' y_T)^2 + EI_y(v_T'' - \theta'' x_T)^2 + EK\theta'^2 \\ &\quad + EL_x\theta''(u_T'' + \theta'' y_T) + 2EL_y\theta''(v_T'' - \theta'' x_T) + GJ\theta'^2 \\ &= E\Omega w'^2 + EI_x u_T''^2 + EI_y v_T''^2 + 2E(L_x + y_T I_x)\theta'' u_T'' \\ &\quad + 2E(L_y - x_T I_y)\theta'' v_T'' + E(K + y_T^2 I_x + x_T^2 I_y + 2L_x y_T - 2L_y x_T)\theta''^2 \\ &\quad + GJ\theta'^2 \end{aligned}$$

Il suffit donc de poser

$$\begin{cases} y_T &= -\frac{L_x}{I_x} = \frac{1}{I_x} \int_{\Omega} x\psi d\Omega \\ x_T &= -\frac{L_y}{I_y} = -\frac{1}{I_y} \int_{\Omega} y\psi d\Omega \end{cases} \quad (11.27)$$

pour obtenir l'expression découplée suivante de l'énergie :

$$2\mathcal{U}' = E\Omega w'^2 + EI_x u_T''^2 + EI_y v_T''^2 + EK_T \theta'^2 + GJ\theta'^2 \quad (11.28)$$

avec

$$K_T = K - y_T^2 I_x - x_T^2 I_y \quad (11.29)$$

Le point défini par les coordonnées  $x_T, y_T$  est le *centre de torsion de Kappus-Weinstein* [36, 45].

Remarquons que l'on a encore

$$u_3 = w(z) - u_T' x - v_T' y + \theta' \psi_T \quad (11.30)$$

avec

$$\psi_T = \psi - y_T x + x_T y \quad (11.31)$$

et que

$$J = \int_{\Omega} [(D_1 \psi_T - y + y_T)^2 + (D_2 \psi_T + x - x_T)^2] d\Omega \quad (11.32)$$



## 11.7 Fonction de Prandtl

Les équations régissant le gauchissement de torsion s'obtiennent aisément à partir de (11.18) :

$$\begin{cases} D_1(D_1\psi - y) + D_2(D_2\psi + x) &= 0 & \text{dans } \Omega \\ n_1(D_1\psi - y) + n_2(D_2\psi + x) &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On satisfait à ces conditions en posant

$$D_1\psi - y = D_2\varphi, \quad D_2\psi + x = -D_1\varphi \quad (11.33)$$

avec la condition de contour

$$n_1 D_2\varphi - n_2 D_1\varphi = 0$$

soit, comme (*fig.* 11.1)  $n_1 = t_2$  et  $n_2 = -t_1$ ,

$$t_1 D_1\varphi + t_2 D_2\varphi = D_t\varphi = 0 \quad (11.34)$$

La fonction  $\varphi$  ainsi définie porte le nom de *fonction de Prandtl* [70].

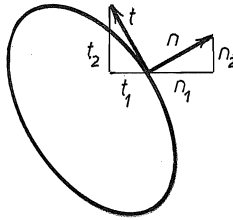


FIGURE 11.1 – Normale et tangente au contour

L'exploitation de la condition de contour (11.34) appelle quelques commentaires. En effet, il ne faut pas perdre de vue que les sections creuses ne sont pas rares. Pour celles-ci,

$$\partial\Omega = \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \dots \mathcal{C}_k$$

où  $\mathcal{C}_0$  est le contour extérieur et  $\mathcal{C}_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , les contours intérieurs (*fig.* 11.2). Comme la fonction de Prandtl n'est définie qu'à une constante additive près, on pose généralement

$$\varphi|_{\mathcal{C}_0} = 0 \quad (11.35)$$

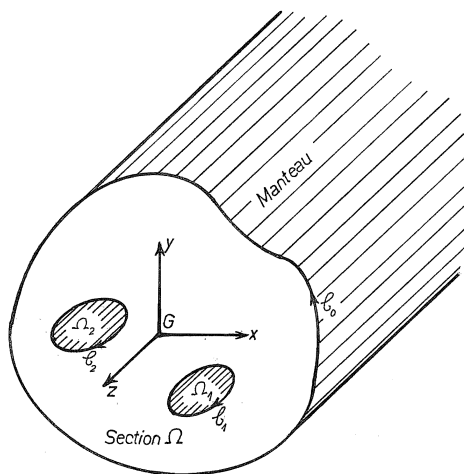


FIGURE 11.2 – Poutre à section creuse

Pour les autres contours, on a alors

$$\varphi|_{C_i} = \varphi_i \quad (\text{cte sur } C_i) \quad (11.36)$$

Cependant, il est clair que toutes les fonctions  $\varphi$  vérifiant ces conditions ne peuvent pas convenir, car il faut encore assurer l'existence du gauchissement de torsion, solution de (11.33). L'intégrabilité locale de  $\psi$  sera assurée si

$$D_2(D_1\psi) = D_{22}\varphi + 1 = D_1(D_2\psi) = -D_{11}\varphi - 1$$

soit si

$$\nabla^2\varphi + 2 = 0 \quad (11.37)$$

Sur chaque  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , on devra en outre assurer l'unicité de la fonction  $\psi$ ,

c'est-à-dire la condition

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{C_i} D_t \psi ds \\
 &= \int_{C_i} (t_1 D_1 \psi + t_2 D_2 \psi) ds \\
 &= \int_{C_i} (-n_2 D_1 \psi + n_1 D_2 \psi) ds \\
 &= \int_{C_i} [-n_2 (D_2 \varphi + y) - n_1 (D_1 \varphi + x)] ds
 \end{aligned}$$

soit

$$\int_{C_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = - \int_{C_i} (n_1 x + n_2 y) ds$$

Cette dernière intégrale de contour peut être transformée comme suit : appelant

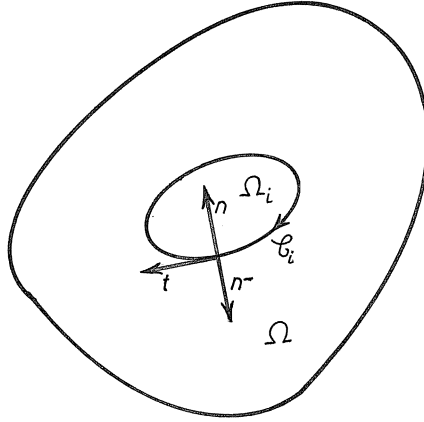


FIGURE 11.3 – Définition de la normale  $\mathbf{n}^-$

$\Omega_i$  l'aire du trou  $n^\circ i$ , la normale extérieure à  $\Omega_i$  est  $\mathbf{n}^- = -\mathbf{n}$  (fig. 11.3) et on a

$$- \int_{C_i} (n_1 x + n_2 y) ds = \int_{C_i} (n_1^- x + n_2^- y) ds = \int_{\Omega_i} (D_1 x + D_2 y) d\Omega = 2\Omega_i$$

ce qui ramène les conditions de contour à

$$\int_{\mathcal{C}_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 2\Omega_i \quad (11.38)$$

On remarquera que le problème (11.37), assorti des conditions aux limites (11.35), (11.36) et (11.38) n'est pas d'un type classique, puisque l'on impose en fait deux conditions sur les  $\mathcal{C}_i$ . On pourrait donc se poser des questions quant à l'existence de la solution. Pour dissiper ces doutes, définissons la fonction prolongée  $\hat{\varphi}$  sur  $\Omega_0 = \Omega \cup \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_k$  par

$$\begin{cases} \hat{\varphi} = \varphi & \text{dans } \Omega \\ \hat{\varphi} = \varphi_i & \text{dans les } \Omega_i \end{cases} \quad (11.39)$$

et considérons le problème de minimisation de la fonctionnelle

$$\mathcal{I} = \int_{\Omega_0} [(D_1 \hat{\varphi})^2 + (D_2 \hat{\varphi})^2 - 2\hat{\varphi}] d\Omega \quad (11.40)$$

Ce problème admet visiblement une solution, et celle-ci vérifie les relations suivantes pour tout  $\delta \hat{\varphi}$  nul sur  $\mathcal{C}_0$  :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_0} (D_1 \hat{\varphi} D_1 \delta \hat{\varphi} + D_2 \hat{\varphi} D_2 \delta \hat{\varphi} - 2\delta \hat{\varphi}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (D_1 \hat{\varphi} D_1 \delta \hat{\varphi} + D_2 \hat{\varphi} D_2 \delta \hat{\varphi} - 2\delta \hat{\varphi}) d\Omega - \sum_i \delta \varphi_i \Omega_i \\ &= \sum_i \delta \phi_i \int_{\mathcal{C}_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \delta \varphi (\nabla^2 \varphi + 2) d\Omega - 2 \sum_i \Omega_i \delta \varphi_i \end{aligned}$$

soit précisément

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi + 2 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \int_{\mathcal{C}_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 2\Omega_i & \text{sur les } \mathcal{C}_i \end{cases}$$

Le principe variationnel (11.40) sert de base à de nombreuses solutions approchées. La variation particulière  $\delta \hat{\varphi} = \hat{\varphi}$  fournit la relation importante

$$\int_{\Omega_0} [(D_1 \hat{\varphi})^2 + (D_2 \hat{\varphi})^2] d\Omega_0 = 2 \int_{\Omega_0} \hat{\varphi} d\Omega$$

qui entraîne

$$\begin{aligned}
 J &= \int_{\omega} [(D_1\psi - y)^2 + (D_2\psi + x)^2] d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} [(D_1\varphi)^2 + (D_2\varphi)^2] d\Omega \\
 &= \int_{\Omega_0} [(D_1\hat{\varphi})^2 + (D_2\hat{\varphi})^2] d\Omega \\
 &= 2 \int_{\Omega_0} \hat{\varphi} d\Omega
 \end{aligned} \tag{11.41}$$

## 11.8 Résultantes et équations d'équilibre

Considérons un système de forces de volume  $f_1, f_2, f_3$  et calculons leur énergie potentielle sur une section donnée :

$$\mathcal{P}' = - \int_{\Omega} (f_1 u_1 + f_2 u_2 + f_3 u_3) d\Omega$$

On a tout d'abord

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega} (f_1 u_1 + f_2 u_2) d\Omega &= - \int_{\Omega} \{f_1 [u_T - \theta(y - y_T)] + f_2 [v_T + \theta(x - x_T)]\} d\Omega \\
 &= -q_x u_T - q_y v_T - m_T \theta
 \end{aligned}$$

en définissant les résultantes

$$\left. \begin{aligned}
 q_x &= \int_{\Omega} f_1 d\Omega && \text{(résultante des forces selon } Ox) \\
 q_y &= \int_{\Omega} f_2 d\Omega && \text{(résultante des forces selon } Oy) \\
 m_t &= \int_{\Omega} [(x - x_T)f_2 - (y - y_T)f_1] d\Omega && \text{(moment autour de } Oz)
 \end{aligned} \right\} \tag{11.42}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega} f_3 u_3 d\Omega &= - \int_{\Omega} f_3 (w - x u'_T - y v'_T + \psi_T \theta') d\Omega \\
 &= -nw + m_x u'_T + m_y v'_T - b\theta'
 \end{aligned}$$

en posant

$$\left. \begin{aligned} n &= \int_{\Omega} f_3 d\Omega && (\text{résultante des forces selon } Oz) \\ m_x &= \int_{\Omega} f_3 x d\Omega && (\text{moment des forces } f_3 \text{ dans le plan } xOz) \\ m_y &= \int_{\Omega} f_3 y d\Omega && (\text{moment des forces } f_3 \text{ dans le plan } yOz) \\ b &= \int_{\Omega} f_3 \psi_T d\Omega && (\text{bimoment des forces } f_3) \end{aligned} \right\} \quad (11.43)$$

La variation de l'énergie de déformation par unité de longueur vaut, à partir de (11.28)

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{U}' &= E\Omega w' \delta w' + EI_x u_T'' \delta u_T'' + EI_y v_T'' \delta v_T'' + EK_T \theta'' \delta \theta'' + GJ \theta' \delta \theta' \\ &= N \delta w' - M_x \delta u_T'' - M_y \delta v_T'' + B \delta \theta'' + M_t \delta \theta' \end{aligned}$$

à condition de définir les résultantes suivantes :

$$\left. \begin{aligned} N &= E\Omega w' = \int_{\Omega} \sigma_{33} d\Omega && (\text{effort normal}) \\ M_x &= -EI_x u_T'' = \int_{\Omega} \sigma_{33} x d\Omega && (\text{moment de flexion dans le plan } xOz) \\ M_y &= -EI_y v_T'' = \int_{\Omega} \sigma_{33} y d\Omega && (\text{moment de flexion dans le plan } yOz) \\ B &= EK \theta'' = \int_{\Omega} \sigma_{33} \psi_T d\Omega && (\text{bimoment de Vlassov}) \\ M_t &= GJ \theta' = \int_{\Omega} [\sigma_{13}^t (D_1 \psi - y) + \sigma_{23}^t (D_2 \psi + x)] d\Omega && (\text{moment de torsion}) \end{aligned} \right\} \quad (11.44)$$

où  $\sigma_{13}^t$  et  $\sigma_{23}^t$  représentent les contraintes de torsion. Comme celles-ci sont de la forme

$$\sigma_{13}^t = G\theta' D_2 \varphi, \quad \sigma_{23}^t = -G\theta' D_1 \varphi$$

où  $\varphi$  est la fonction de Prandtl, on a l'égalité

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\sigma_{13}^t D_1 \psi + \sigma_{23}^t D_2 \psi) d\Omega &= G\theta' \int_{\Omega} (D_2 \varphi D_1 \psi - D_1 \varphi D_2 \psi) d\Omega \\ &= G\theta' \left\{ \sum_{i \neq 0} \int_{C_i} \psi (n_1 D_2 \varphi - n_2 D_1 \varphi) ds - \int_{\Omega} \psi (D_{12} \varphi - D_{12} \varphi) d\Omega \right\} = 0 \end{aligned}$$

qui ramène  $M_t$  à sa définition classique

$$M_t = \int_{\Omega} (x\sigma_{23}^t - y\sigma_{13}^t) d\Omega \quad (11.45)$$

Le problème de l'équilibre intérieur se traite en minimisant l'énergie totale par rapport à toute variation de déplacements nulle avec toutes ses dérivées aux extrémités. On a

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E} = \int_0^\ell (N\delta w' - M_x\delta u_T'' - M_y\delta v_T'' + B\delta\theta'' + M_t\delta\theta' \\ - n\delta w + m_x\delta u_T' + m_y\delta v_T' - b\delta\theta' - q_x\delta u_T - q_y\delta v_t - m_t\delta\theta) dz = 0 \end{aligned}$$

ce qui mène aux équations suivantes :

$$N' + n = 0 \quad (11.46)$$

et

$$\left. \begin{aligned} M_x'' - m'_x + q_x &= 0 \\ M_y'' - m'_y + q_y &= 0 \\ -B'' + b' + m_t &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.47)$$

Introduisant les grandeurs

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= M'_x - m_x \\ Q_y &= M'_y - m_y \\ R &= B' - b \end{aligned} \right\} \quad (11.48)$$

on peut mettre les équations (11.47) sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} Q'_x + q_x &= 0 \\ Q'_y + q_y &= 0 \\ R' &= m_t \end{aligned} \right\} \quad (11.49)$$

Il se trouve que les trois nouvelles grandeurs définies en (11.48) peuvent être interprétées comme des résultantes simples. En effet, si l'on admet l'équilibre local,

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ R \end{bmatrix} = \int_{\Omega} (D_3\sigma_{33} + f_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ \psi_T \end{bmatrix} d\Omega = - \int_{\Omega} D_{\alpha}\sigma_{\alpha 3} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \psi_T \end{bmatrix} d\Omega$$

d'où, en intégrant par parties,

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \int_{\Omega} \sigma_{13} d\Omega && (\text{effort tranchant selon } xOz) \\ Q_y &= \int_{\Omega} \sigma_{23} d\Omega && (\text{effort tranchant selon } yOz) \\ R &= \int_{\Omega} (\sigma_{13} D_1 \psi_T + \sigma_{23} D_2 \psi_T) d\Omega && (bi\text{-}effort\text{ tranchant}) \end{aligned} \right\} \quad (11.50)$$

## 11.9 Conditions aux limites

Considérant à présent des variations quelconques des déplacements, on obtient les termes aux limites suivants :

$$\begin{aligned} [N\delta w]_0^\ell - [M_x \delta u'_T]_0^\ell - [M_y \delta v'_T]_0^\ell + [B\delta\theta']_0^\ell + [M_t \delta\theta]_0^\ell \\ + [M'_x \delta u_T]_0^\ell + [M'_y \delta v_T]_0^\ell - [B'\delta\theta]_0^\ell \end{aligned} \quad (11.51)$$

Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agit d'une poutre console. A l'extrémité libre, les tractions de surface  $\bar{t}_1, \bar{t}_2$  et  $\bar{t}_3$  induiront une énergie potentielle

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= - \int_{\Omega} [\bar{t}_1 u_1(\ell) + \bar{t}_2 u_2(\ell) + \bar{t}_3 u_3(\ell)] d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} \{ \bar{t}_1 [u_T(\ell) - (y - y_T)\theta(\ell)] + \bar{t}_2 [v_T(\ell) + (x - x_T)\theta(\ell)] \\ &\quad + \bar{t}_3 [w(\ell) - x u'_T(\ell) - y v'_T(\ell) + \psi_T \theta'(\ell)] \} d\Omega \\ &= \bar{N} w(\ell) + \bar{x} u_T(\ell) + \bar{Q}_y v_T(\ell) - \bar{M}_x u'_T(\ell) - \bar{M}_y v'_T(\ell) \\ &\quad + \bar{M}_t \theta(\ell) + \bar{B} \theta'(\ell) \end{aligned} \quad (11.52)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \bar{N} &= \int_{\Omega} \bar{t}_3 d\Omega, & \bar{Q}_x &= \int_{\Omega} \bar{t}_1 d\Omega, & \bar{Q}_y &= \int_{\Omega} \bar{t}_2 d\Omega \\ \bar{M}_x &= \int_{\Omega} \bar{t}_3 x d\Omega, & \bar{M}_y &= \int_{\Omega} \bar{t}_3 y d\Omega, & \bar{M}_t &= \int_{\Omega} [\bar{t}_2 (x - x_T) - \bar{t}_1 (y - y_T)] d\Omega \\ \bar{B} &= \int_{\Omega} \bar{t}_3 \psi_T d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (11.53)$$



Les conditions d'extrémité sont alors

$$\left\{ \begin{array}{l} N(\ell) = \bar{N}, \quad Q_x(\ell) = \bar{Q}_x, \quad Q_y(\ell) = \bar{Q}_y \\ M_x(\ell) = \bar{M}_x, \quad M_y(\ell) = \bar{M}_y, \quad M_t(\ell) - B'(\ell) = \bar{M}_t \\ B(\ell) = \bar{B} \end{array} \right\} \quad (11.54)$$

Les conditions d'encastrement varient avec la *perfection* de celui-ci. Au minimum, on aura, en  $z = 0$ ,  $u_T = v_T = w_T = u'_T = v'_T = \theta = 0$ . Si, de plus, l'encastrement assure la nullité du gauchissement, on aura en outre  $\theta' = 0$ . Nous appellerons le premier cas *encastrement imparfait* et le second, *encastrement parfait*.

## 11.10 Calcul des contraintes

A partir des résultantes, il est aisé de calculer les contraintes normales

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= E(w' - xu_T''' - yv_T'' + \psi_T\theta'') \\ &= \frac{N}{\Omega} + x\frac{M_x}{I_x} + \frac{M_y}{I_y} + \psi_T\frac{B}{K_T} \end{aligned} \quad (11.55)$$

De même, les contraintes de torsion s'obtiennent par

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^t &= G\theta'(D_1\psi - y) = G\theta'D_2\varphi \\ \sigma_{23}^t &= G\theta'(D_2\psi + x) = -G\theta'D_1\varphi \end{aligned}$$

ou encore, par

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^t &= \frac{M_t}{J}(D_1\psi - y) = \frac{M_t}{J}D_2\varphi \\ \sigma_{23}^t &= \frac{M_t}{J}(D_2\psi + x) = -\frac{M_t}{J}D_1\varphi \end{aligned} \quad (11.56)$$

Par contre, le calcul des contraintes de cisaillement de flexion est plus délicat, car du fait de nos hypothèses, ces contraintes ne travaillent pas. Au sens variationnel, on n'a accès qu'aux résultantes (11.50), ce qui signifie que le calcul local de ces contraintes revêt une part inévitable de convention dans le cas d'une distribution arbitraire des forces  $f_1, f_2, f_3$ . On mène généralement le calcul en admettant que  $f_3$  a la même forme que  $\sigma_{33}$ , soit

$$f_3 = \frac{n}{\Omega} + x\frac{m_x}{I_x} + y\frac{m_y}{I_y} + \psi_T\frac{b}{K_T}$$

Il vient alors

$$\begin{cases} D_\alpha \sigma_{\alpha 3}^f &= -x \frac{Q_x}{I_x} - y \frac{Q_y}{I_y} - \psi_T \frac{B}{K_T} & \text{dans } \Omega \\ n_\alpha \sigma_{\alpha 3}^f &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (11.57)$$

Mais la solution de ce problème n'est pas unique : à toute solution particulière de (11.57), on peut ajouter une solution de l'équation homogène, qui est de la forme

$$\sigma_{13} = D_2 \Phi, \quad \sigma_{23} = -D_1 \Phi, \quad \Phi|_{C_0} = 0, \quad \Phi|_{C_i} = \Phi_i$$

qui s'interprète comme un champ de torsion. Comme le moment de torsion des contraintes de flexion doit être nul, le plus simple est d'imposer la condition d'orthogonalité à tout champ de torsion :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (\sigma_{13}^f D_2 \Phi - \sigma_{23}^f D_1 \Phi) d\Omega \\ &= \sum_{i \neq 0} \Phi_i \int_{C_i} (n_2 \sigma_{13}^f - n_1 \sigma_{23}^f) ds - \int_{\Omega} \Phi (D_2 \sigma_{13}^f - D_1 \sigma_{23}^f) d\Omega \end{aligned}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} D_2 \sigma_{13}^f = D_1 \sigma_{23}^f & \text{dans } \Omega \\ \int_{C_i} (t_1 \sigma_{13}^f + t_2 \sigma_{23}^f) ds = 0 & \text{sur les } C_i \end{cases} \quad (11.58)$$

Ces relations assurent l'existence d'un potentiel  $g$  tel que

$$\sigma_{13}^f = D_1 g, \quad \sigma_{23}^f = D_2 g \quad (11.59)$$

et ramènent le problème (11.57) à

$$\begin{cases} \nabla^2 g + x \frac{Q_x}{I_x} + y \frac{Q_y}{I_y} + \psi_T \frac{B}{K_T} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial g}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (11.60)$$

La solution de ce problème a la forme

$$g = \frac{Q_x}{I_x} g_x + \frac{Q_y}{I_y} g_y + \frac{B}{K_T} g_\psi \quad (11.61)$$

les fonctions  $g_x$ ,  $g_y$  et  $g_\psi$  étant définies comme les solutions des problèmes partiels

$$\begin{cases} \nabla^2 \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_\psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ \psi_T \end{bmatrix} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial n} \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_\psi \end{bmatrix} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (11.62)$$

ou, ce qui revient au même, comme les fonctions qui minimisent les fonctionnelles

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_x &= \int_{\Omega} (|\mathbf{grad} g_x|^2 - x g_x) d\Omega \\ \mathcal{I}_y &= \int_{\Omega} (|\mathbf{grad} g_y|^2 - y g_y) d\Omega \\ \mathcal{I}_\psi &= \int_{\Omega} (|\mathbf{grad} g_\psi|^2 - \psi_T g_\psi) d\Omega \end{aligned} \quad (11.63)$$

Le champ de cisaillement de flexion défini par les relations (11.59) à (11.63) est appelé *champ principal de flexion* [36].

## 11.11 Torsion non uniforme

Attardons-nous un peu sur le cas particulier de la torsion, c'est-à-dire d'une sollicitation n'excitant que la rotation  $\theta$ . Nous considérerons le cas d'une poutre console, parfaitement encastree en  $z = 0$ . On a donc

$$\delta\mathcal{E} = \int_0^\ell (EK_T \theta'' \delta\theta'' + GJ \theta' \delta\theta') dz - \bar{M}_t \delta\theta(\ell) - \bar{B} \delta\theta'(\ell) = 0 \quad (11.64)$$

On observera tout d'abord la possibilité d'exciter la torsion par un bimoment d'extrémité, qui consiste en un système de charges *axiales* (de résultante et de moments nuls). Il est aisé de déduire de (11.64) l'équation différentielle

$$EK_T \theta^{IV} - GJ \theta'' = 0 \quad \text{dans } ]0, \ell[ \quad (11.65)$$

et les conditions d'extrémité

$$\theta(0) = \theta'(0) = 0 \quad (11.66)$$

$$EK_T \theta''(\ell) = \bar{B} \quad (11.67)$$

$$GJ \theta'(\ell) - EK_T \theta'''(\ell) = \bar{M}_t \quad (11.68)$$

Des conditions (11.65) et (11.68), on déduit aisément l'équation

$$\theta''' - \frac{GJ}{EK_T} \theta' = -\frac{\bar{M}_t}{EK_T} \quad \text{dans } ]0, \ell[$$

dont la solution générale a la forme

$$\theta = \frac{\bar{M}_t}{GJ} z + C_1 + C_2 \operatorname{ch} \frac{z}{z_0} + C_3 \operatorname{sh} \frac{z}{z_0}$$

avec

$$z_0^2 = \frac{EK_T}{GJ} \quad (11.69)$$

Des conditions d'appui, on déduit

$$C_1 + C_2 = 0, \quad \frac{\bar{M}_t}{GJ} + \frac{C_3}{z_0} = 0$$

d'où

$$\theta = \frac{\bar{M}_t}{GJ} \left( z - z_0 \operatorname{sh} \frac{z}{z_0} \right) + C_1 \left( 1 - \operatorname{ch} \frac{z}{z_0} \right)$$

A l'extrémité  $z = \ell$ , on a par (11.67)

$$-\frac{\bar{M}_t}{GJ} \frac{\operatorname{sh}(\ell/z_0)}{z_0} - \frac{1}{z_0^2} C_1 \operatorname{ch}(\ell/z_0) = \frac{\bar{B}}{EK_T}$$

d'où

$$C_1 = -\frac{\bar{M}_t}{GJ} z_0 \operatorname{th}(\ell/z_0) - z_0^2 \frac{\bar{B}}{EK_T \operatorname{ch}(\ell/z_0)}$$

La solution est donc

$$\theta = \frac{\bar{M}_t}{GJ} \left[ z - z_0 \operatorname{sh} \frac{z}{z_0} - z_0 \operatorname{th} \frac{\ell}{z_0} + z_0 \operatorname{ch} \frac{z}{z_0} \operatorname{th} \frac{\ell}{z_0} \right] + \frac{\bar{B}}{EK_T} z_0^2 \frac{\operatorname{ch} \frac{z}{z_0} - 1}{\operatorname{sh} \frac{\ell}{z_0}}$$

soit

$$\theta = \frac{\bar{M}_t}{GJ} \left[ z - z_0 \operatorname{th} \frac{\ell}{z_0} + z_0 \frac{\operatorname{sh} \frac{\ell-z}{z_0}}{\operatorname{ch} \frac{\ell}{z_0}} \right] + \frac{\bar{B}}{EK_T} z_0^2 \frac{\operatorname{ch} \frac{z}{z_0} - 1}{\operatorname{sh} \frac{\ell}{z_0}} \quad (11.70)$$

Dans le cas où la poutre est suffisamment longue ( $\ell/z_0 > 3$ ), on peut écrire à 5°/100 près  $\operatorname{th}(\ell/z_0) \approx 1$ , ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sh} \frac{\ell-z}{z_0}}{\operatorname{ch} \frac{\ell}{z_0}} &= \frac{\operatorname{sh} \frac{\ell}{z_0} \operatorname{ch} \frac{z}{z_0} - \operatorname{sh} \frac{z}{z_0} \operatorname{ch} \frac{\ell}{z_0}}{\operatorname{ch} \frac{\ell}{z_0}} \\ &\approx \operatorname{ch} \frac{z}{z_0} - \operatorname{sh} \frac{z}{z_0} = \exp \left( -\frac{z}{z_0} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \frac{\operatorname{ch} \frac{z}{z_0} - 1}{\operatorname{sh} \frac{\ell}{z_0}} &= \frac{\operatorname{ch} \left[ \frac{\ell}{z_0} - \left( \frac{\ell-z}{z_0} \right) \right] - 1}{\operatorname{sh} \frac{\ell}{z_0}} \\
 &= \frac{\operatorname{ch} \frac{\ell}{z_0} \operatorname{ch} \frac{\ell-z}{z_0} - \operatorname{sh} \frac{\ell}{z_0} \operatorname{sh} \frac{\ell-z}{z_0} - 1}{\operatorname{sh} \frac{\ell}{z_0}} \\
 &\approx \operatorname{ch} \frac{\ell-z}{z_0} - \operatorname{sh} \frac{\ell-z}{z_0} - 1 = \exp \left( -\frac{\ell-z}{z_0} \right) - 1
 \end{aligned}$$

d'où

$$\theta \approx \frac{\bar{M}_t}{GJ} \left[ z - z_0 + z_0 \exp \left( -\frac{z}{z_0} \right) \right] - \frac{\bar{B}}{EK_T} z_0^2 \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\ell-z}{z_0} \right) \right] \quad (11.71)$$

La solution se présente donc comme la superposition d'une torsion uniforme

$$\theta_u = \frac{\bar{M}_t}{GJ} (z - z_0) \quad (11.72)$$

et de termes d'extrémité, dont la profondeur de pénétration est  $z_0$  (c'est-à-dire qu'ils décroissent d'un facteur  $e$  tous les  $z_0$ ). Le terme de torsion uniforme correspond à un encastrement imparfait fictif à une distance  $z_0$ , comme le montre la figure 11.4. Le comportement de la solution dépend évidemment de la longueur

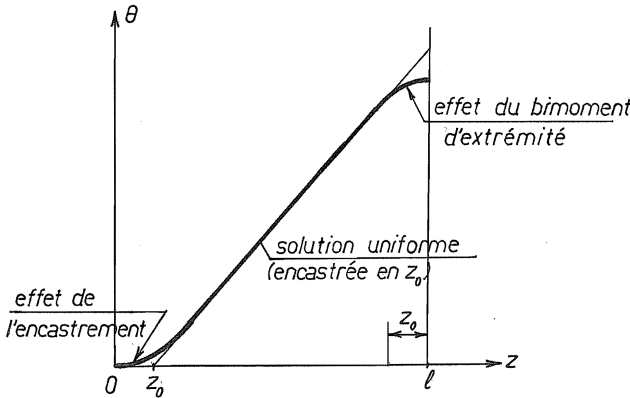


FIGURE 11.4 – Torsion non uniforme

$$z_0 = \sqrt{\frac{EK_T}{GJ}}$$

Cette affirmation est générale. En effet, la torsion sera non uniforme si les termes  $EK_T\theta'^2$  et  $GJ\theta'^2$  de l'énergie de déformation sont du même ordre de grandeur. Or, si  $\lambda$  est la longueur d'onde de l'angle de torsion  $\theta$ , lui-même d'ordre de grandeur  $\Theta$ , on a

$$EK_T\theta'^2 = \mathcal{O}\left(EK_T \frac{\Theta^2}{\lambda^4}\right), \quad GJ\theta'^2 = \mathcal{O}\left(GJ \frac{\Theta^2}{\lambda^2}\right)$$

et l'interaction n'aura lieu que si

$$\lambda^2 = \mathcal{O}\left(\frac{EK_T}{GJ}\right) \quad (11.73)$$

ce qui détermine la profondeur de pénétration. Il est donc utile de chiffrer ce rapport dans les cas courants.

## 11.12 Étude approchée des sections massives

Pour les sections massives, on peut, en première approximation, utiliser la méthode de Rayleigh, avec un gauchissement de la forme [90]

$$\psi(x, y) = Axy \quad (11.74)$$

qui vérifie visiblement la condition

$$\int_{\Omega} \psi(x, y) dx dy = 0$$

On a alors

$$\int_{\Omega} [(D_1\psi - y)^2 + (D_2\psi + x)^2] d\Omega = (A - 1)^2 I_x + (A + 1)^2 I_y$$

et cette expression est minimale pour

$$2(A - 1)I_x + 2(A + 1)I_y = 0$$

soit

$$A = \frac{I_x - I_y}{I_x + I_y} \quad (11.75)$$

On en déduit les coordonnées approchées du centre de torsion par

$$\left. \begin{aligned} x_T &= -\frac{1}{I_y} \int_{\Omega} y\psi d\Omega = \frac{1}{I_y} \frac{I_y - I_x}{I_x + I_y} \int_{\Omega} xy^2 d\Omega \\ y_T &= \frac{1}{I_x} \int_{\Omega} x\psi d\Omega = \frac{1}{I_x} \frac{I_x - I_y}{I_x + I_y} \int_{\Omega} x^2 y d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (11.76)$$

et la constante  $K$  est donnée par

$$K = \int_{\Omega} \psi^2 d\Omega = \frac{(I_x - I_y)^2}{(I_x + I_y)^2} \int_{\Omega} x^2 y^2 d\Omega \quad (11.77)$$

On a alors

$$K_T = K - y_T^2 I_x - x_T^2 I_y \quad (11.78)$$

Quant à la constante de torsion, elle est donnée par

$$J = \left( \frac{I_x - I_y}{I_x + I_y} - 1 \right)^2 I_x + \left( \frac{I_x - I_y}{I_x + I_y} + 1 \right)^2 I_y = \frac{4I_x I_y}{I_x + I_y} \quad (11.79)$$

Pour une section symétrique ayant les deux moments d'inertie égaux, comme le cercle ou le carré, on obtient donc

$$K_T = 0, \quad J = 2I$$

conformément à la théorie élémentaire de Coulomb. Dans le cas d'une section dont un des moments d'inertie est très inférieur à l'autre ( $I_y \ll I_x$ ), comme une ellipse très allongée ou un rectangle très mince, on obtient, si la section est symétrique,

$$J = \frac{4I_y}{1 + \frac{I_y}{I_x}}, \quad K = \frac{\left(1 - \frac{I_y}{I_x}\right)^2}{\left(1 + \frac{I_y}{I_x}\right)^2} \int_{\Omega} x^2 y^2 d\Omega$$

Ainsi, pour un rectangle très mince, de largeur  $a$  et d'épaisseur  $t \ll a$ ,

$$J = \frac{1}{3} \frac{at^3}{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2}, \quad K = \frac{\left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right)^2}{\left(1 + \frac{t^2}{a^2}\right)^2} \frac{1}{144} a^3 t^3$$

ce qui donne

$$z_0^2 = \frac{1}{48} a^2 \frac{\left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right)^2}{1 + \frac{t^2}{a^2}}$$

soit, dans le cas extrême où  $t/a \rightarrow 0$ ,

$$z_0 \approx \frac{a}{\sqrt{48}} \approx \frac{a}{7} \quad (11.80)$$

C'est donc *la plus grande* dimension de la section qui importe. Ce phénomène est encore renforcé dans le cas des poutres à parois minces comme nous allons le voir.

### 11.13 Théorie des poutres à parois minces ouvertes

#### 11.13.1 Considérations géométriques

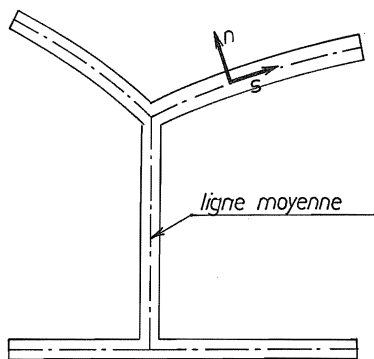


FIGURE 11.5 – Poutre à parois minces ouverte

Une poutre à parois minces a sa section constituée de corps très minces reliés en des nœuds. On dit qu'elle est *ouverte* si son profil est simplement connexe. En admettant une certaine approximation géométrique aux nœuds, on décrit la section à l'aide de sa ligne moyenne, repérée par une coordonnée  $s$ , et une coordonnée  $n$  selon l'épaisseur (*fig. 11.5*). La longueur totale  $a$  de la ligne moyenne est supposée très grande devant l'épaisseur du profil. Par ailleurs, la ligne moyenne peut être courbe, pourvu que son rayon de courbure  $R$  vérifie la condition  $t/R \ll 1$ . Enfin, on suppose toujours que la poutre est longue, ce qui s'écrit ici  $a/\ell \ll 1$ . En un point quelconque de la ligne moyenne, de coordonnées



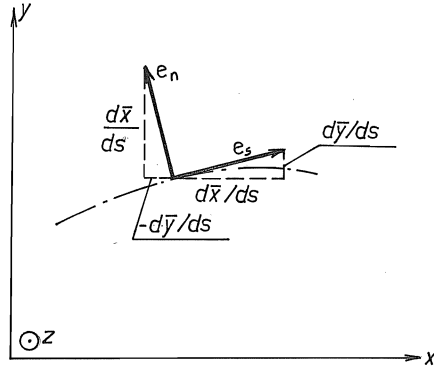


FIGURE 11.6 – Normale et tangente unitaires

$(\bar{x}(s), \bar{y}(s))$ , on définit le vecteur unitaire tangent

$$\mathbf{e}_s = \left( \frac{d\bar{x}}{ds}, \frac{d\bar{y}}{ds} \right) \quad (11.81)$$

et le vecteur normal (à gauche, dans le sens de parcours)

$$\mathbf{e}_n = \left( -\frac{d\bar{y}}{ds}, \frac{d\bar{x}}{ds} \right) \quad (11.82)$$

comme le montre la construction vectorielle de la figure 11.6. La courbure de la

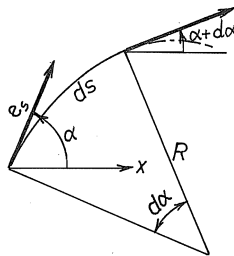


FIGURE 11.7 – Courbure de la ligne moyenne

ligne moyenne,  $1/R(s)$ , peut être définie comme le taux de variation de l'orientation de la tangente lors d'une progression le long du feuillet moyen (*fig. 11.7*) :

$$\frac{1}{R} = -\frac{d\alpha}{ds} \quad (11.83)$$

Le signe négatif provient de la convention définissant  $\alpha$  comme l'angle entre l'axe des  $x$  et la tangente orientée positivement. Notant que

$$\cos \alpha = \frac{d\bar{x}}{ds}, \quad \sin \alpha = \frac{d\bar{y}}{ds}$$

on obtient aisément

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{d^2\bar{x}}{ds^2} & = & -\sin \alpha \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R} \frac{d\bar{y}}{ds} \\ \frac{d^2\bar{y}}{ds^2} & = & \cos \alpha \frac{d\alpha}{ds} = -\frac{1}{R} \frac{d\bar{x}}{ds} \end{array} \right. \quad (11.84)$$

Un point quelconque de la section a ses coordonnées égales à

$$(x, y) = (\bar{x}, \bar{y}) + n\mathbf{e}_n$$

soit explicitement

$$\left. \begin{array}{lcl} x(s, n) & = & \bar{x}(s) - n \frac{d\bar{y}}{ds} \\ y(s, n) & = & \bar{y}(s) + n \frac{d\bar{x}}{ds} \end{array} \right\} \quad (11.85)$$

En conséquence, le jacobien de la transformation  $(s, n) \mapsto (x, y)$  s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, n)} &= \begin{vmatrix} \frac{d\bar{x}}{ds} - n \frac{d^2\bar{y}}{ds^2} & -\frac{d\bar{y}}{ds} \\ \frac{d\bar{y}}{ds} + n \frac{d^2\bar{x}}{ds^2} & \frac{d\bar{x}}{ds} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \left(1 + \frac{n}{R}\right) \frac{d\bar{x}}{ds} & -\frac{d\bar{y}}{ds} \\ \left(1 + \frac{n}{R}\right) \frac{d\bar{y}}{ds} & \frac{d\bar{x}}{ds} \end{vmatrix} = 1 + \frac{n}{R} \end{aligned} \quad (11.86)$$

car on a toujours

$$\left(\frac{d\bar{x}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{ds}\right)^2 = 1$$

L'élément de surface vaut donc

$$dxdy = \left(1 + \frac{n}{R}\right) dsdn \approx dsdn \quad (11.87)$$

puisque  $t/R \ll 1$ .

### 11.13.2 Une formule d'intégration par parties [31]

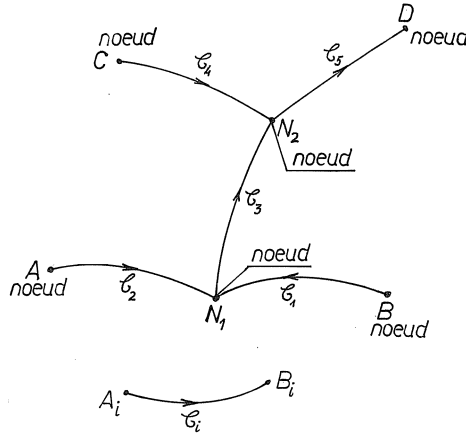


FIGURE 11.8 – Description d'un profil ramifié

Dans le cas d'un profil ramifié, on définit *arbitrairement* un sens de parcours sur chaque branche  $\mathcal{C}_i$  de la ligne moyenne, comme le montre la figure 11.8. On a alors, pour une fonction quelconque de  $s$ ,

$$\int_{\mathcal{C}} f ds = \sum_i \int_{\mathcal{C}_i} f ds$$

L'intégration par parties demande alors une certaine attention. En effet, si  $f$  est

une fonction continue aux nœuds,  $g$  ne l'étant pas nécessairement, on aura

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{C}} g D_s f ds &= \sum_i \int_{\mathcal{C}_i} g D_s f ds \\
 &= \sum_i [gf]_{A_i}^{B_i} - \sum_i \int_{\mathcal{C}_i} f D_s g ds \\
 &= \sum_{\text{nœuds } N} f_N T_N(g) - \sum_i \int_{\mathcal{C}_i} f D_s g ds \quad (11.88)
 \end{aligned}$$

en posant en chaque nœud

$$T_N(g) = \sum g_{\text{convergent}} - \sum g_{\text{divergent}}$$

un  $g$  étant convergent s'il appartient à une branche convergeant vers  $N$ , divergent sinon.

### 11.13.3 Torsion

Le problème fondamental en torsion est de minimiser l'intégrale

$$\int_{\Omega} [(D_1 \psi - y)^2 + (D_2 \psi + x)^2] d\Omega = \int_{\Omega} |\mathbf{f}|^2 d\Omega$$

avec

$$\mathbf{f} = \left( D_1 \psi - \bar{y} - n \frac{d\bar{x}}{ds} \right) \mathbf{e}_1 + \left( D_2 \psi + \bar{x} - n \frac{d\bar{y}}{ds} \right) \mathbf{e}_2 \quad (11.89)$$

Notant que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_s &= \frac{d\bar{x}}{ds}, & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_n &= \frac{d\bar{y}}{ds} \\
 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_s &= -\frac{d\bar{y}}{ds}, & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_n &= \frac{d\bar{x}}{ds}
 \end{aligned}$$

on a encore

$$f_s = \left( D_1 \psi - \bar{y} - n \frac{d\bar{x}}{ds} \right) \frac{d\bar{x}}{ds} + \left( D_2 \psi + \bar{x} - n \frac{d\bar{y}}{ds} \right) \frac{d\bar{y}}{ds} = D_s \psi - r - n \quad (11.90)$$

avec

$$r = \bar{y} \frac{d\bar{x}}{ds} - \bar{x} \frac{d\bar{y}}{ds} \quad (11.91)$$

et

$$\begin{aligned}
 f_n &= - \left( D_1 \psi - \bar{y} - n \frac{d\bar{x}}{ds} \right) \frac{d\bar{y}}{ds} + \left( D_2 \psi + \bar{x} - n \frac{d\bar{y}}{ds} \right) \frac{d\bar{x}}{ds} \\
 &= D_n \psi + \bar{x} \frac{d\bar{x}}{ds} + \bar{y} \frac{d\bar{y}}{ds}
 \end{aligned} \tag{11.92}$$

La grandeur  $r$  définie ci-dessus a une interprétation géométrique utile : c'est,

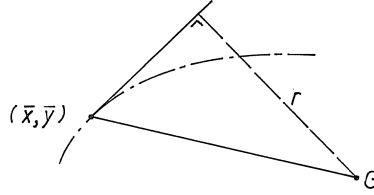


FIGURE 11.9 – Interprétation géométrique de  $r$

comme l'illustre la figure 11.9, la projection sur la normale au profil de la distance au centre de gravité de la section.

On est donc amené à minimiser l'expression

$$\int_{\Omega} \left[ (D_s \psi - r - n)^2 + \left( D_n \psi + \bar{x} \frac{d\bar{x}}{ds} + \bar{y} \frac{d\bar{y}}{ds} \right)^2 \right] d\Omega \tag{11.93}$$

On remarquera que le premier terme entre parenthèses de l'intégrale est d'ordre  $\mathcal{O}(\frac{\psi}{a} + \rho)$  et le second, d'ordre  $\mathcal{O}(\frac{\psi}{t} + \rho)$ . Le second est donc beaucoup plus grand et, moyennant une erreur d'ordre  $t^2/a^2$ , on peut le minimiser séparément, ce qui mène à la condition

$$D_n \psi = -\bar{x} \frac{d\bar{x}}{ds} - \bar{y} \frac{d\bar{y}}{ds}$$

ce qui mène à

$$\psi(s, n) = \bar{\psi}(s) - n \left( \bar{x} \frac{d\bar{x}}{ds} + \bar{y} \frac{d\bar{y}}{ds} \right) \tag{11.94}$$

Introduisant cette valeur dans la premier terme, on trouve

$$\begin{aligned}
 D_s\psi - r - n &= D_s\bar{\psi} - n - n \left( \bar{x} \frac{d^2\bar{x}}{ds^2} + \bar{y} \frac{d^2\bar{y}}{ds^2} \right) - r - n \\
 &= D_s\bar{\psi} - n - \frac{n}{R} \left( \bar{x} \frac{d\bar{y}}{ds} - \bar{y} \frac{d\bar{x}}{ds} \right) - r - n \\
 &= D_s\bar{\psi} - 2n - r \left( 1 + \frac{n}{R} \right)
 \end{aligned}$$

soit, en négligeant  $n/R$  devant l'unité,

$$D_s\psi - r - n \approx D_s\bar{\psi} - r - 2n$$

Il reste donc à minimiser l'expression

$$\int_{\Omega} (D_s\bar{\psi} - r - 2n)^2 d\Omega = \int_{\mathcal{C}} t(D_s\bar{\psi} - r)^2 ds + \int_{\mathcal{C}} \frac{t^3}{3} ds \quad (11.95)$$

Variant  $\bar{\psi}$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\mathcal{C}} t(D_s\bar{\psi} - r) D_s \delta\bar{\psi} ds \\
 &= \sum_N T_N [t(D_s\bar{\psi} - r)] \delta\bar{\psi}_N - \int_{\mathcal{C}} \delta\bar{\psi} D_s [t(D_s\bar{\psi} - r)] ds
 \end{aligned}$$

ce qui mène aux conditions

$$\begin{cases} D_s[t(D_s\bar{\psi} - r)] = 0 & \text{dans les } \mathcal{C}_i \\ T_N[t(D_s\bar{\psi} - r)] = 0 & \text{aux nœuds} \end{cases}$$

La solution de ce problème est aisée à construire (*fig. 11.10*) : aux nœuds d'extrémité, la condition est simplement  $D_s\bar{\psi} = r$ , et en maintenant cette propriété sur tout l'arc adjacent, on satisfait à l'équation différentielle sur cet arc. Par conséquent, de proche en proche, on obtient en tout nœud  $D_s\bar{\psi} = r$  sur tous les arcs adjacents. Il suffit donc de construire la fonction

$$\omega = \omega_0 + \int r ds \quad (11.96)$$

obtenue en partant d'un nœud quelconque, et continue aux nœuds. On détermine finalement  $\omega_0$  par la condition

$$\int_{\Omega} \psi d\Omega = \int_{\mathcal{C}} \bar{\psi} t ds = \int_{\mathcal{C}} \omega t ds = 0 \quad (11.97)$$

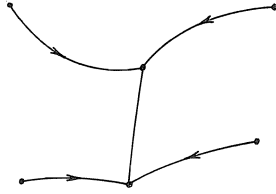


FIGURE 11.10 – Construction de la solution

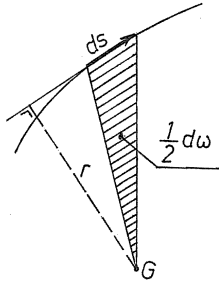


FIGURE 11.11 – Aire sectorielle

La fonction  $\omega$  ainsi définie porte le nom d'*aire sectorielle*, car la grandeur

$$d\omega = r ds$$

vaut deux fois l'aire balayée par le vecteur joignant le point courant sur la courbe moyenne au centre de gravité, comme l'illustre la figure 11.10. On a évidemment

$$D_s \bar{\psi} - r = D_s \omega - r = 0$$

ce qui entraîne que

$$J = \int_c \frac{t^3}{3} ds \quad (11.98)$$

C'est la formule classique de la raideur de torsion des sections minces<sup>2</sup>.

2. Vlassov [90] néglige dans ses développements la variation sur l'épaisseur des glissements, ce qui revient à négliger dans (11.95) le terme  $(2n)$  devant  $r$ , alors que ce dernier peut être petit. Cette hyperidéalisée conduit à  $J = 0$  et oblige à réintroduire la valeur correcte (11.98) ... comme un fait d'expérience.

Les coordonnées du centre de torsion sont données par

$$y_T = \frac{1}{I_x} \int_{\Omega} x \psi d\Omega \quad (11.99)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{I_x} \int_{\Omega} \left( \bar{x} - n \frac{d\bar{y}}{ds} \right) \left[ \bar{\psi} - n \left( \bar{x} \frac{d\bar{x}}{ds} + \bar{y} \frac{d\bar{y}}{ds} \right) \right] d\Omega \\ &= \frac{1}{I_x} \left\{ \int_{\mathcal{C}} t \bar{x} \omega ds + \int_{\mathcal{C}} \frac{t^3}{12} \left[ \bar{x} \frac{d\bar{x}}{ds} \frac{d\bar{y}}{ds} + \bar{y} \left( \frac{d\bar{y}}{ds} \right)^2 \right] ds \right\} \\ &\approx \frac{1}{I_x} \int_{\mathcal{C}} t \bar{x} \omega ds \end{aligned} \quad (11.100)$$

avec une erreur relative  $\mathcal{O}(t^2/a^2)$  et, de même,

$$x_T \approx -\frac{1}{I_y} \int_{\mathcal{C}} t \bar{y} \omega ds \quad (11.101)$$

Calculons à présent la constante  $K$ . On a

$$\begin{aligned} K &= \int_{\Omega} \psi^2 d\Omega \\ &= \int_{\mathcal{C}} t \omega^2 ds + \int_{\mathcal{C}} \frac{t^3}{12} \left( \bar{x} \frac{d\bar{x}}{ds} + \bar{y} \frac{d\bar{y}}{ds} \right)^2 ds \\ &\approx \int_{\mathcal{C}} t \omega^2 ds \end{aligned} \quad (11.102)$$

avec une erreur relative  $\mathcal{O}(t^2/a^2)$ . On en déduit directement

$$K_T = K - x_t^2 I_y - y_T^2 I_x$$

Il est intéressant d'évaluer la grandeur du rapport  $K/J$ . On a

$$\omega = \mathcal{O}(ra) = \mathcal{O}(a^2)$$

d'où

$$K = \mathcal{O}(ta^5)$$

et, par ailleurs

$$J = \mathcal{O}(t^3 a)$$

ce qui donne

$$\frac{K}{J} = \mathcal{O}\left(\frac{a^4}{t^2}\right)$$



si bien que la longueur fictive d'encastrement vérifie

$$z_0 = \mathcal{O}\left(a \cdot \frac{a}{t}\right) \quad (11.103)$$

Ainsi, dans une poutre à section mince, les effets de torsion non uniforme ont une profondeur de pénétration nettement plus grande que la plus grande dimension du profil, ce qui a d'ailleurs fait dire à certains auteurs que le principe de Saint-Venant ne s'applique pas à ce genre de poutres. La section rectangulaire mince fait exception à cette règle parce que, dans ce cas,  $r$  est toujours nul, de même que  $\omega$ , si bien que c'est le terme négligé dans (11.102) qui subsiste seul. Il est d'ailleurs habituel de dire que  $K \approx 0$  pour ce profil.

#### 11.13.4 Cisaillement de flexion

Tout revient à minimiser les trois intégrales définies en (11.63), qui s'écrivent ici

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_x &= \int_{\Omega} \left[ (D_s g_x)^2 + (D_n g_x)^2 - \left( \bar{x} - n \frac{d\bar{y}}{ds} \right) g_x \right] d\Omega \\ \mathcal{I}_y &= \int_{\Omega} \left[ (D_s g_y)^2 + (D_n g_y)^2 - \left( \bar{y} + n \frac{d\bar{x}}{ds} \right) g_y \right] d\Omega \\ \mathcal{I}_{\psi} &= \int_{\Omega} \left[ (D_s g_{\psi})^2 + (D_n g_{\psi})^2 - \psi_T g_{\psi} \right] d\Omega \end{aligned}$$

Dans les trois cas, le terme  $(D_n g)^2$ ,  $a^2/t^2$  fois plus grand que le terme  $(D_s g)^2$ , peut être minimisé séparément, ce qui conduit à

$$g_x \approx \bar{g}_x(s), \quad g_y \approx \bar{g}_y(s), \quad g_{\psi} \approx \bar{g}_{\psi}(s)$$

et ramène les intégrales à minimiser à

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_x &= \int_C t \left[ (D_s \bar{g}_x)^2 - \bar{x} \bar{g}_x \right] ds \\ \mathcal{I}_y &= \int_C t \left[ (D_s \bar{g}_y)^2 - \bar{y} \bar{g}_y \right] ds \\ \mathcal{I}_{\psi} &= \int_C t \left[ (D_s \bar{g}_{\psi})^2 - \bar{\psi}_T \bar{g}_{\psi} \right] ds \\ &= \int_C t \left[ (D_s \bar{g}_{\psi})^2 - (\omega - y_T \bar{x} + x_T \bar{y}) \bar{g}_{\psi} \right] ds \end{aligned} \quad (11.104)$$

Les solutions de ces trois problèmes vérifient les équations

$$\left. \begin{aligned} D_s(tD_s\bar{g}_x) + \bar{x} &= 0 \\ D_s(tD_s\bar{g}_y) + \bar{y} &= 0 \\ D_s(tD_s\bar{g}_\psi) + \omega - y_T\bar{x} + x_T\bar{y} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ dans les } \mathcal{C}_i \quad (11.105)$$

et les conditions

$$\left. \begin{aligned} T_N(tD_s\bar{g}_x) &= 0 \\ T_N(tD_s\bar{g}_y) &= 0 \\ T_N(tD_s\bar{g}_\psi) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ aux nœuds} \quad (11.106)$$

L'introduction des *flux de cisaillement*

$$S_x = tD_s\bar{g}_x = t\tau_{(x)}^f \quad (11.107)$$

$$S_y = tD_s\bar{g}_y = t\tau_{(y)}^f \quad (11.108)$$

$$S_\psi = tD_s\bar{g}_\psi = t\tau_{(\psi)}^f \quad (11.109)$$

permet de réécrire ces relations comme suit :

$$\left\{ \begin{aligned} D_s S_x + \bar{x} &= 0 \\ D_s S_y + \bar{y} &= 0 \\ D_s S_\psi + \omega - y_T\bar{x} + x_T\bar{y} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ dans les } \mathcal{C}_i, \quad \left\{ \begin{aligned} T_N(S_x) &= 0 \\ T_N(S_y) &= 0 \\ T_N(S_\psi) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ aux nœuds} \quad (11.110)$$

Il s'agit donc, dans les trois cas, de résoudre un problème de la forme

$$D_s S = \Psi \text{ dans les } \mathcal{C}_i, \quad T_N(S) = 0 \text{ aux nœuds} \quad (11.111)$$

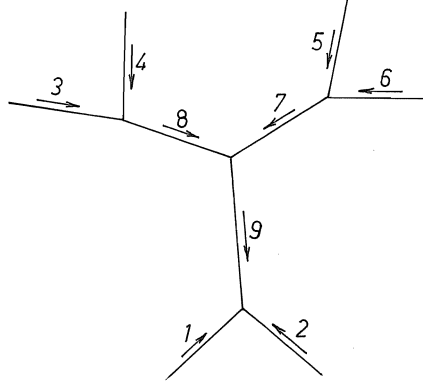
Un tel problème n'admet de solution que si

$$\int_{\mathcal{C}} \Psi ds = 0$$

car

$$\int_{\mathcal{C}} D_s S ds = \sum_N T_N(S) = 0$$

Si cette condition est vérifiée, on obtient la fonction  $S$  comme suit (*fig. 11.12*) :


FIGURE 11.12 – Construction de la fonction  $S$ 

on part d'un nœud d'extrémité et on détermine

$$S = \int_0^s \Psi(\zeta) d\zeta$$

jusqu'à atteindre un nouveau nœud. On procède de même pour toutes les branches possédant un nœud d'extrémité. Il est alors possible de progresser de nœud en nœud, grâce aux relations

$$\sum S_{\text{conv}} - \sum S_{\text{div}} = 0$$

en partant d'abord des nœuds où une seule branche reste inconnue.

Dans le cas présent, on a

$$\begin{aligned} \int_C \bar{x} ds &= \int_{\Omega} x d\Omega = 0 \\ \int_C \bar{y} ds &= \int_{\Omega} y d\Omega = 0 \\ \int_C \omega ds &= \int_{\Omega} \psi d\Omega = 0 \end{aligned}$$

ce qui garantit l'existence des trois solutions. On notera que  $S_x$  et  $S_y$  ne sont autres que les *moments statiques*, en conformité avec les cours élémentaires de résistance des matériaux (formules du type  $\tau = \frac{QS}{It}$ ).

## 11.14 Caissons

Dans le cas des caissons mono- ou multicellulaires, la méthode la plus simple de calcul de la torsion uniforme est la théorie de Bredt, déjà exposée en sections 6.13.1 et 6.13.2 et sur laquelle nous ne reviendrons pas. Nous nous intéresserons cependant à la détermination du gauchissement et des flux de contrainte de cisaillement de flexion.

### 11.14.1 Détermination du gauchissement

On peut déduire le gauchissement par une voie analogue à celle que nous avons suivie pour les poutres à parois minces ouvertes. Mais ici, on peut écrire

$$\int_{\Omega} (D_s \bar{\psi} - r - 2n^2) d\Omega \approx \int_{\Omega} (D_s \bar{\psi} - r)^2 d\Omega = \int_C t (D_s \bar{\psi} - r)^2 ds \quad (11.112)$$

car la raideur de torsion est beaucoup plus grande que

$$\int_C \frac{t^3}{3} ds$$

du fait que l'on ne peut obtenir  $D_s \bar{\psi} = r$  partout. En effet, la fonction  $r$  n'est pas intégrable sur un contour fermé, du fait que

$$\int_{C_{\text{fermé}}} r ds = 2 \cdot (\text{aire du contour})$$

Au problème de la recherche de  $\bar{\psi}$  vérifiant les conditions

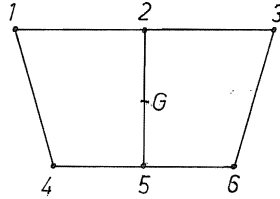


FIGURE 11.13 – Maillage du contour

$$\begin{cases} D_s(t D_s \bar{\psi}) &= 0 & \text{dans les } \mathcal{C}_i \\ T_N(t D_s \bar{\psi}) &= 0 & \text{aux nœuds} \end{cases} \quad (11.113)$$

on peut donner une solution approchée par la méthode suivante (*fig. 11.13*) : on décompose le contour en un certain nombre de segments approximativement rectilignes, appelés *éléments*, et limités par des *nœuds de maillage*. Sur chaque élément,  $r$  est une constante. On y approche  $\bar{\psi}$  par une fonction affine, entièrement définie par ses valeurs aux nœuds de maillage. Ainsi, sur l'élément 1 – 2 de la figure 11.13, on écrira

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}_1 \left(1 - \frac{s}{\ell_{12}}\right) + \bar{\psi}_2 \frac{s}{\ell_{12}}$$

en notant  $s$  la coordonnée allant de 1 vers 2, et  $\ell_{12}$  la longueur de cet élément. On a alors

$$D_s \bar{\psi} - r = \frac{\bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1}{\ell_{12}} - r_{12}$$

en notant  $r_{12}$  la valeur unique de  $r$  sur l'élément 1 – 2. On en déduit

$$\begin{aligned} \int_{1-2} t(D_s \bar{\psi} - r)^2 ds &= \left( \frac{\bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1}{\ell_{12}} - r_{12} \right)^2 \int_{1-2} t ds \\ &= t_{12} \ell_{12} \left[ \left( \frac{\bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1}{\ell_{12}} \right)^2 - 2r_{12} \frac{\bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1}{\ell_{12}} + r_{12}^2 \right] \end{aligned}$$

où  $t_{12}$  est l'épaisseur moyenne de l'élément 1 – 2. Procédant de même pour tous les éléments, on obtient une expression de la forme

$$\int_C t(D_s \bar{\psi} - r)^2 ds = \sum_{ij} K_{ij} \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j - 2 \sum_i g_i \bar{\psi}_i + \text{terme indépendant des } \bar{\psi}_i$$

dont le minimum est atteint pour

$$\sum_j K_{ij} \bar{\psi}_j = g_i$$

soit

$$Kq = g$$

en notant  $q$  le vecteur dont les éléments sont les  $\bar{\psi}_i$ . Le problème se ramène ainsi à l'inversion d'une matrice. Cependant, sa résolution se heurte à une petite difficulté technique, car la matrice  $K$  est singulière. En effet,

$$q^T K q = \int_C t(D_s \bar{\psi})^2 ds = 0$$

pour  $q =$  vecteur constant, soit pour  $\bar{\psi}_1 = \dots = \bar{\psi}_n$ . Pour s'en sortir, il suffit de poser arbitrairement  $\bar{\psi} = 0$  en un nœud de maillage quelconque, ce qui diminue d'une unité la dimension du système matriciel et fait disparaître la singularité puisque dans ce cas

$$D_s \bar{\psi} = 0 \Rightarrow \bar{\psi} = 0 \text{ partout}$$

A la solution  $\bar{\psi}^*$  ainsi obtenue, on ajoute uniformément  $\bar{\psi}_0$  choisi de telle façon que

$$\int_C t (\bar{\psi}_0 + \bar{\psi}^*) ds = 0$$

soit

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_0 &= -\frac{1}{\Omega} \int_C t \bar{\psi}^* ds \\ &= -\frac{1}{\Omega} \sum_{\text{élts } i-j} \int_{i-j} \left[ \bar{\psi}_i^* \left( 1 - \frac{s}{\ell_{ij}} \right) + \bar{\psi}_j^* \frac{s}{\ell_{ij}} \right] t ds \\ &\approx -\frac{1}{\Omega} \sum_{\text{élts } i-j} \frac{\bar{\psi}_i^* + \bar{\psi}_j^*}{2} \ell_{ij} t_{ij} \end{aligned}$$

l'égalité étant exacte si les éléments sont d'épaisseur constante. Il est alors aisé de calculer les coordonnées du centre de torsion, ainsi que toutes les grandeurs dépendant de  $\bar{\psi}$ . On notera en particulier que

$$J = \sum_{\text{élts } i-j} \left( \frac{\bar{\psi}_i - \bar{\psi}_j}{\ell_{ij}} - r_{ij} \right)^2 \ell_{ij} t_{ij}$$

Cette procédure n'est d'ailleurs rien d'autre qu'une méthode d'éléments finis.

### 11.14.2 Recherche des champs de cisaillement de flexion

La même méthode peut être appliquée pour la recherche des champs de cisaillement de flexion, en minimisant les fonctionnelle  $\mathcal{I}_x$ ,  $\mathcal{I}_y$  et  $\mathcal{I}_\psi$ , après discrétisation des fonctions  $g_x$ ,  $g_y$  et  $g_\psi$ . Celles-ci obtenues, on obtient aisément les flux de cisaillement, par des formules du type

$$S_{x_{ij}} = t_{ij} \frac{g_{x_i} - g_{x_j}}{\ell_{ij}}$$

(Les flux sont constants dans chaque élément.)

## 11.15 Exercices

**Exercice 39** Calculer la raideur de torsion d'une poutre en I à ailes en dépouille (fig. 11.14).

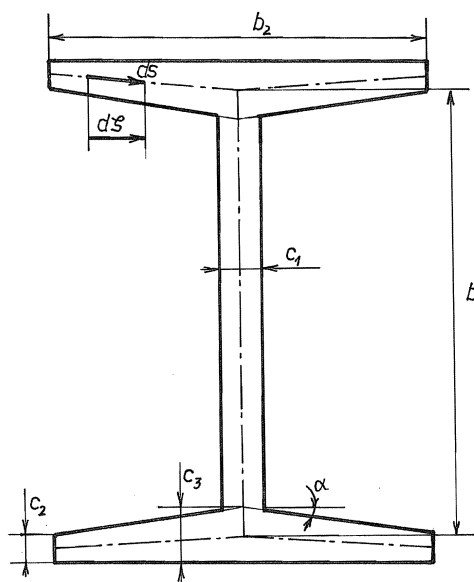


FIGURE 11.14 – Poutre en I à ailes en dépouille

*Solution* - On a

$$J = J_{\text{âme}} + 2J_{\text{semelle}}$$

avec

$$J_{\text{âme}} = \frac{1}{3} b_1 c_1^3$$

Pour la semelle supérieure, on a

$$ds = \frac{d\zeta}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

et

$$t = c_2 \left( 1 - \frac{2\zeta}{b_2} \right) + c_3 \frac{2\zeta}{b_2}$$

Posant

$$\xi = \frac{2\zeta}{b_2}, \quad d\zeta = \frac{b_2}{2} d\xi$$

on a

$$\begin{aligned} J_{\text{semelle}} &= \frac{1}{3} \frac{2}{\cos \frac{\alpha}{2}} \int_0^{b_2/2} \left[ c_2 \left( 1 - \frac{2\zeta}{b_2} \right) + c_3 \frac{2\zeta}{b_2} \right]^3 d\zeta \\ &= \frac{1}{3} \frac{b_2}{\cos \frac{\alpha}{2}} \int_0^1 [c_2(1 - \xi) + c_3\xi]^3 d\xi \\ &= \frac{1}{3} \frac{b_2}{\cos \frac{\alpha}{2}} \left\{ c_2^3 \int_0^1 (1 - \xi)^3 d\xi + 3c_2^2 c_3 \int_0^1 (1 - \xi)^2 \xi d\xi \right. \\ &\quad \left. + 3c_2 c_3^2 \int_0^1 (1 - \xi) \xi^2 d\xi + c_3^3 \int_0^1 \xi^3 d\xi \right\} \end{aligned}$$

Tenant compte du fait que

$$\int_0^1 \xi^m (1 - \xi)^n d\xi = B(m+1, n+1) = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)} = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1 - \xi)^3 d\xi &= \int_0^1 \xi^3 d\xi = \frac{3!0!}{4!} = \frac{1}{4} \\ \int_0^1 (1 - \xi)^2 \xi d\xi &= \int_0^1 \xi^2 (1 - \xi) d\xi = \frac{2!1!}{4!} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} J_{\text{semelle}} &= \frac{1}{3} \frac{b_2}{4 \cos \frac{\alpha}{2}} (c_2^3 + 3c_2^2 c_3 + 3c_2 c_3^2 + c_3^3) \\ &= \frac{1}{3} \frac{b_2}{4 \cos \frac{\alpha}{2}} (c_2 + c_3)(c_2^2 + c_3^2) \end{aligned}$$

si bien que

$$J = \frac{1}{3} b_1 c_1^3 + \frac{2}{3} \frac{b_2}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{4} (c_2 + c_3)(c_2^2 + c_3^2)$$

Dans la plupart des cas, on peut confondre  $\cos \frac{\alpha}{2}$  avec l'unité, ce qui donne

$$J \approx \frac{1}{3} b_1 c_1^3 + \frac{2}{3} b_2 \cdot \frac{1}{4} (c_2 + c_3)(c_2^2 + c_3^2)$$



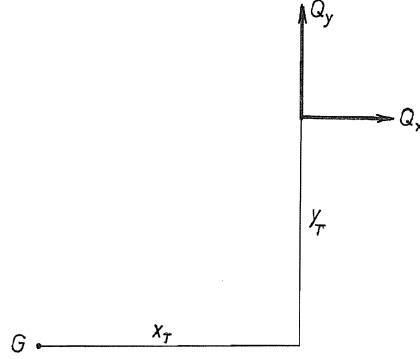


FIGURE 11.15 – Résultante des contraintes de cisaillement

**Exercice 40** Montrer que la résultante  $(Q_x, Q_y)$  des contraintes de cisaillement de flexion passe par le centre de torsion.

*Solution* - Il suffit de montrer (fig. 11.15) que

$$M_t(\tau^f) = -Q_x y_T + Q_y x_T$$

Or,

$$M_t(\tau^f) = \int_{\Omega} \left[ x D_2 \left( \frac{Q_x}{I_x} g_x + \frac{Q_y}{I_y} g_y \right) - y D_1 \left( \frac{Q_x}{I_x} g_x + \frac{Q_y}{I_y} g_y \right) \right] d\Omega$$

Notant que

$$\int_{\Omega} \left[ (D_1 \psi - y) D_1 \left( \frac{Q_x}{I_x} g_x + \frac{Q_y}{I_y} g_y \right) + (D_2 \psi + x) D_2 \left( \frac{Q_x}{I_x} g_x + \frac{Q_y}{I_y} g_y \right) \right] d\Omega = 0$$

on a encore

$$\begin{aligned} M_t(\tau^f) &= - \int_{\Omega} \left[ D_1 \psi D_1 \left( \frac{Q_x}{I_x} g_x + \frac{Q_y}{I_y} g_y \right) + D_2 \psi D_2 \left( \frac{Q_x}{I_x} g_x + \frac{Q_y}{I_y} g_y \right) \right] d\Omega \\ &= - \int_{\partial\Omega} \psi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{Q_x}{I_x} g_x + \frac{Q_y}{I_y} g_y \right) ds + \int_{\Omega} \psi \nabla^2 \left( \frac{Q_x}{I_x} g_x + \frac{Q_y}{I_y} g_y \right) d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} \psi \left( \frac{Q_x}{I_x} x + \frac{Q_y}{I_y} y \right) d\Omega \\ &= -Q_x y_T + Q_y x_T \end{aligned}$$

**Exercice 41** *A partir de l'exercice précédent, montrer que le centre de torsion d'une section composée de parois minces rectilignes convergeant en un point se trouve en ce point de concours (fig. 11.16).*

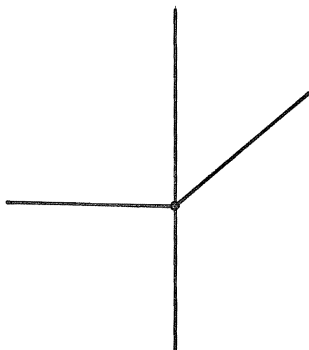


FIGURE 11.16 – Poutre à parois minces convergeant en un point

*Solution* - Les efforts tranchants partiels des parois rectilignes ont la direction de ces parois, donc leur résultante passe par leur intersection.

**Exercice 42** *Définissant, à partir d'un point quelconque de la section d'une poutre, la fonction*

$$\psi_A = \psi - y_A x + x_A y$$

*où  $\psi$  est le gauchissement de torsion, on considère la grandeur*

$$K(A) = \int_{\Omega} \psi_A^2 d\Omega$$

1. *Quelle fonctionnelle est minimisée par  $\psi_A$  ?*
2. *Montrer que  $K(A)$  admet un minimum lorsque  $A$  est le centre de torsion et que ce minimum est précisément  $K_T$ .*
3. *En déduire que le centre de torsion d'un profil composé de segments rectilignes concurrents est le point d'intersection de ces segments.*

*Solution*

1. On a

$$\psi = \psi_A + y_A x - x_A y$$

d'où

$$D_1\psi = D_1\psi_A + y_A, \quad D_2\psi = D_2\psi_A - x_A, \quad \delta\psi = \delta\psi_A$$

et, par conséquent,

$$J = \inf_{\psi} \int_{\Omega} [(\psi_A - y + y_A)^2 + (\psi_A + x - x_A)^2] d\Omega$$

2. On a évidemment

$$\begin{aligned} K(A) &= \int_{\Omega} (\psi - y_A x + x_A y)^2 d\Omega \\ &= K + y_A^2 I_x + x_A^2 I_y - 2y_A \int_{\Omega} x\psi d\Omega + 2x_A \int_{\Omega} y\psi d\Omega \\ &= K + y_A^2 I_x + x_A^2 I_y - 2y_A I_x y_T - 2x_A I_y x_T \end{aligned}$$

et cette expression est minimale pour

$$y_A = y_T, \quad x_A = x_T$$

Elle vaut alors

$$K(T) = K - y_T^2 I_x - x_T^2 I_y = K_T$$

3. Lorsque  $A$  est le point de concours (*fig.* 11.17), on a sur chaque segment

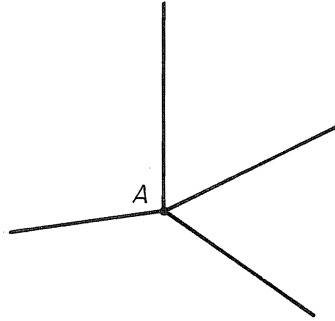


FIGURE 11.17 –  $A$  est le point de concours des parois

$$r_A = (\bar{y} - y_A) \frac{d\bar{x}}{ds} - (\bar{x} - x_A) \frac{d\bar{y}}{ds}$$

d'où

$$\omega_A = 0, \quad K_A = 0$$

Pour tout autre point  $B$ ,  $\omega_B \neq 0$ ,  $K_B > 0$ . Donc  $A$  est le centre de torsion.

**Exercice 43** Calculant, à partir d'un point quelconque  $(x_A, y_A)$ , la fonction  $\psi_A$  minimisant

$$\int_{\Omega} [(\psi_A - y + y_A)^2 + (\psi_A + x - x_A)^2] d\Omega,$$

montrer que

$$y_T - y_A = \frac{1}{I_x} \int_{\Omega} x \psi_A d\Omega, \quad x_T - x_A = -\frac{1}{I_y} \int_{\Omega} y \psi_A d\Omega$$

En déduire la position du centre de torsion d'une poutre en  $U$ .

*Solution* - On a en effet

$$\psi = \psi_A + y_A x - x_A y$$

d'où

$$\begin{aligned} y_T &= \frac{1}{I_x} \int_{\Omega} x(\psi_A + y_A x - x_A y) d\Omega = \frac{1}{I_x} \int_{\Omega} x \psi_A d\Omega + y_A \\ x_T &= -\frac{1}{I_y} \int_{\Omega} y(\psi_A + y_A x - x_A y) d\Omega = -\frac{1}{I_y} \int_{\Omega} y \psi_A d\Omega + x_A \end{aligned}$$

Pour la poutre en  $U$  (fig. 11.18), en partant du point  $O$ , centre de l'âme, on a visiblement

$$r_{A_{12}} = \frac{h}{2}, \quad r_{A_{34}} = -\frac{h}{2}, \quad r_{A_{23}} = 0$$

d'où

$$\omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \omega_1 = -\frac{bht}{2}, \quad \omega_4 = \frac{bht}{2}$$

et

$$x_T = -\frac{1}{I_y} \left( -\frac{b^2 h^2 t}{8} - \frac{b^2 h^2 t}{8} \right) = \frac{b^2 h^2 t}{4I_y}$$

Quant à  $y_T$ , il est nul par symétrie.

**Exercice 44** Est-il possible de provoquer la torsion d'un poutre en sollicitant sa section finale par des contraintes  $\sigma_{33}$  ?

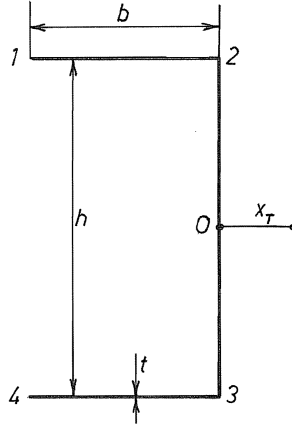


FIGURE 11.18 – Poutre en U

*Réponse* - Il suffit pour cela d'appliquer des contraintes  $\sigma_{33}$  telles que

$$\begin{aligned} N &= \int_{\Omega} \sigma_{33} d\Omega = 0 \\ M_x &= \int_{\Omega} \sigma_{33} x d\Omega = 0 \\ M_y &= \int_{\Omega} \sigma_{33} y d\Omega = 0 \\ B_T &= \int_{\Omega} \sigma_{33} \Psi_T d\Omega \neq 0 \end{aligned}$$

La figure 11.19 illustre un tel système de charges pour une poutre en I.

**Exercice 45** Comparer la raideur de torsion d'un tube de rayon  $R$  et d'épaisseur  $t$  à celle du même tube fendu longitudinalement, pour  $R = 25\text{mm}$ ,  $t = 1\text{mm}$ .

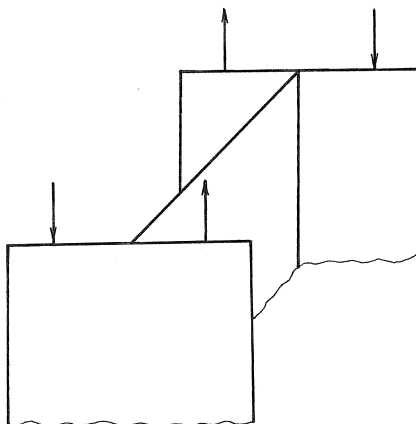


FIGURE 11.19 – Système de contraintes normales provoquant la torsion

*Solution -*

$$J_{\text{non fendu}} = 2\pi R^3 t$$

$$J_{\text{fendu}} = 2\pi R \frac{t^3}{3}$$

$$\frac{J_{\text{non fendu}}}{J_{\text{fendu}}} = 3 \left( \frac{R}{t} \right)^2 = 3 \cdot 625 = 1875$$

On notera que ce rapport est considérable!

## Chapitre 12

# Flexion des plaques

### 12.1 Introduction

La théorie des plaques traite de la flexion des corps plans dont l'épaisseur est faible devant les deux autres dimensions.

### 12.2 Description de la plaque et évaluation des ordres de grandeur

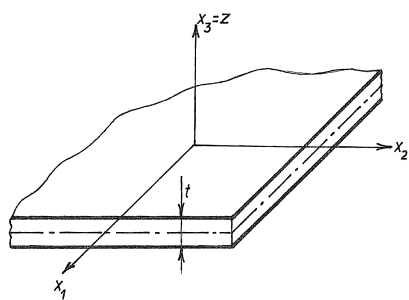


FIGURE 12.1 – Plaque

Pour décrire la géométrie de la plaque, on repère les points du feuillet moyen

par deux coordonnées  $x_1$  et  $x_2$ , parcourant une surface  $S$ . Un point quelconque de la plaque a la forme  $(x_1, x_2, z)$ ,  $z$  variant de  $-t/2$  à  $t/2$  (*fig. 12.1*). Par convention, nous écrirons  $x_\alpha$  l'une quelconque des coordonnées  $x_1$  ou  $x_2$ . La coordonnée  $x_3 = z$  est toujours soigneusement distinguée des deux autres.

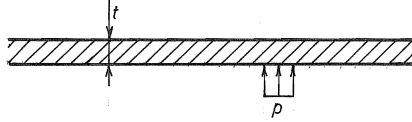


FIGURE 12.2 – Sollicitation par pression

Un cas typique de sollicitation de plaque est celui où une pression  $p$  agit sur une des deux faces de la plaque (*fig. 12.2*). Dans ce cas, la contrainte  $\sigma_{33}$  prend la valeur  $-p$  sur la face comprimée et s'annule sur l'autre face. Notant  $S_3$  l'ordre de grandeur de  $\sigma_{33}$  et  $P$  celui de la pression, on aura donc

$$S_3 = P, \quad D_3 \sigma_{33} = \mathcal{O}\left(\frac{P}{t}\right) \quad (12.1)$$

A partir de l'équation d'équilibre

$$D_\alpha \sigma_{\alpha 3} + D_3 \sigma_{33} = 0$$

on tire, en notant  $T$  l'ordre de grandeur des contraintes  $\sigma_{\alpha 3}$  et  $\lambda$  leur longueur d'onde définie par

$$D_\alpha \sigma_{\alpha 3} = \mathcal{O}\left(\frac{T}{\lambda}\right)$$

la relation

$$\frac{T}{\lambda} = \frac{S_3}{t}$$

c'est-à-dire

$$T = S_3 \frac{\lambda}{t} = P \frac{\lambda}{t} \quad (12.2)$$

On peut s'attendre à ce que les contraintes  $\sigma_{\alpha\beta}$  varient de leur ordre de grandeur sur une distance du même ordre de grandeur  $\lambda$ ; d'autre part, les contraintes tangentielles sont nulles sur les deux faces de la plaque, ce qui implique

$$D_3 \sigma_{\alpha 3} = \mathcal{O}\left(\frac{T}{t}\right)$$



De l'équation d'équilibre

$$D_\beta \sigma_{\beta\alpha} + D_3 \sigma_{\alpha 3} = 0 \quad (12.3)$$

on déduit donc, en notant  $S_\alpha$  l'ordre de grandeur des contraintes  $\sigma_{\alpha\beta}$ ,

$$\frac{S_\alpha}{\lambda} = \frac{T}{t}$$

soit

$$S_\alpha = T \frac{\lambda}{t} = S_3 \left( \frac{\lambda}{t} \right)^2 = P \left( \frac{\lambda}{t} \right)^2 \quad (12.4)$$

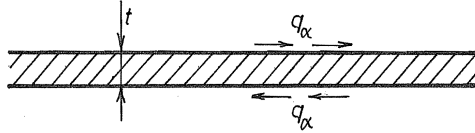


FIGURE 12.3 – Sollicitation par efforts tangentiels

Un autre type de mise en charge en flexion consiste à imposer des efforts tangentiels opposés sur les deux faces (*fig.* 12.3). Dans ce cas, on a

$$\sigma_{\alpha 3}(\pm \frac{t}{2}) = q_\alpha = \mathcal{O}(Q)$$

et on s'attend à ce que les  $\sigma_{\alpha 3}$  soient des fonctions paires de  $z$ . Alors, comme

$$D_3 \sigma_{33} = -D_\alpha \sigma_{\alpha 3}$$

$\sigma_{33}$  sera impaire de  $z$ . Or, cette contrainte doit s'annuler en  $\pm t/2$ . Il en résulte que

$$D_3 \sigma_{33} = \mathcal{O}(S_3/t)$$

On en déduit

$$D_\beta \sigma_{\beta\alpha} = \mathcal{O}\left(\frac{T}{\lambda}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{S_3}{t}\right)$$

d'où

$$S_3 = T \frac{t}{\lambda}$$

Enfin, on déduit à nouveau de l'équation (12.3) que

$$S_\alpha = T \frac{\lambda}{t}$$

On constate que dans les deux cas,

$$\begin{cases} T &= S_\alpha \frac{t}{\lambda} \\ S_3 &= S_\alpha \left(\frac{t}{\lambda}\right)^2 \end{cases} \quad (12.5)$$

Dès lors, si l'on restreint l'analyse aux effets à une distance grande devant l'épaisseur, ce qui revient à admettre que  $\lambda$  est grand devant  $t$ , on obtient que les contraintes de cisaillement  $\sigma_{\alpha 3}$  sont  $t/\lambda$  plus petites que les contraintes d'extension  $\sigma_{\alpha\beta}$  et la contrainte  $\sigma_{33}$ ,  $(t/\lambda)^2$  fois plus petite que les  $\sigma_{\alpha\beta}$ . En admettant une erreur de l'ordre de  $(t/\lambda)^2$  sur les contraintes, on peut donc poser  $\sigma_{33} \approx 0$ , ce qui ramène à un *état plan de contrainte*.

### 12.3 Structure des contraintes $\sigma_{\alpha\beta}$

La symétrie gauche en  $z$  des problèmes de flexion mène à écrire les contraintes  $\sigma_{\alpha\beta}$  comme des fonctions impaires de  $z$ , que nous développerons en série de Taylor :

$$\sigma_{\alpha\beta} = zA_{\alpha\beta}(x_1, x_2) + \frac{z^3}{3}B_{\alpha\beta}(x_1, x_2) + \dots \quad (12.6)$$

Il en découle en particulier

$$D_{33}\sigma_{\alpha\beta} = zB_{\alpha\beta} + \dots \quad (12.7)$$

Nous allons montrer que ces derniers termes doivent être négligeables. En effet, une des équations de compatibilité de Beltrami-Michell s'écrit

$$D_{\gamma\gamma}\sigma_{\alpha\beta} + D_{33}\sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{1+\nu}D_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\gamma} + \frac{1}{1+\nu}D_{\alpha\beta}\sigma_{33} = 0$$

Eu égard aux ordres de grandeur obtenus ci-dessus, on a à priori

$$\begin{aligned} D_{\gamma\gamma}\sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{1+\nu}D_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\gamma} &= \mathcal{O}\left(\frac{S_\alpha}{\lambda^2}\right) \\ D_{\alpha\beta}\sigma_{33} &= \mathcal{O}\left(\frac{S_3}{\lambda^2}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{S_\alpha}{\lambda^2} \frac{t^2}{\lambda^2}\right) \end{aligned}$$

ce qui donne, à  $t^2/\lambda^2$  près,

$$D_{33}\sigma_{\alpha\beta} = \mathcal{O}\left(\frac{S_\alpha}{\lambda^2}\right)$$

L'introduction de ce résultat dans (12.6) et (12.7) donne

$$\sigma_{\alpha\beta} - zA_{\alpha\beta} = \mathcal{O}\left(S_{\alpha}\frac{t^2}{\lambda^2}\right)$$

Ainsi, l'erreur commise en limitant l'expression des contraintes  $\sigma_{\alpha\beta}$  au seul terme linéaire en  $z$  est du même ordre que celle qui provient de l'hypothèse d'un état plan de contrainte. Nous écrivons donc à juste titre

$$\sigma_{\alpha\beta} = zA_{\alpha\beta} \quad (12.8)$$

Il est d'usage d'utiliser d'autres grandeurs que les variables  $A_{\alpha\beta}$ , à savoir les *moments*

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-t/2}^{t/2} z\sigma_{\alpha\beta} dz = A_{\alpha\beta} \int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz = A_{\alpha\beta} \frac{t^3}{12} \quad (12.9)$$

En fonctions de ceux-ci, on a donc

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{12z}{t^3} M_{\alpha\beta} \quad (12.10)$$

Traditionnellement, on appelle  $M_{11}$  et  $M_{22}$  *moments de flexion* et  $M_{12}$ , *moment de torsion*. Ils sont représentés en figure 12.4.

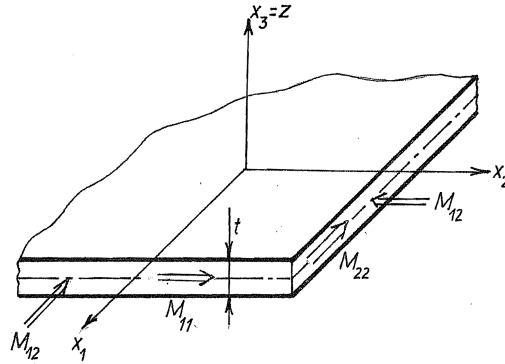


FIGURE 12.4 – Représentation des moments

## 12.4 Application du principe de Hellinger-Reissner

Tenant compte de l'hypothèse d'état plan de contrainte, le principe de Hellinger-Reissner d'écrit

$$\int_S \left\{ \int_{-t/2}^{t/2} \left[ \sigma_{\alpha\beta} \frac{1}{2} (D_\alpha u_\beta + D_\beta u_\alpha) + \sigma_{\alpha 3} (D_\alpha u_3 + D_3 u_\alpha) - \Phi(\sigma) \right] dz \right\} dS + \mathcal{P}(u) \text{ stationnaire} \quad (12.11)$$

en notant  $\mathcal{P}(u)$  l'énergie potentielle des charges. Dans le cas d'un corps isotrope, on a

$$\Phi(\sigma) = \frac{1+\nu}{2E} \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{2E} \sigma_{\alpha\alpha} \sigma_{\beta\beta} + \frac{1}{2G} \sigma_{\alpha 3} \sigma_{\alpha 3} \quad (12.12)$$

Pour les contraintes  $\sigma_{\alpha\beta}$ , nous appliquerons le résultat de structure linéaire en  $z$ ; par contre, nous ne ferons pas d'hypothèses particulières sur les contraintes  $\sigma_{\alpha 3}$ , ni sur les déplacements. On a d'abord

$$\begin{aligned} \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\alpha\beta} \frac{1}{2} (D_\alpha u_\beta + D_\beta u_\alpha) dz &= \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} \int_{-t/2}^{t/2} \frac{12}{t^3} z (D_\alpha u_\beta + D_\beta u_\alpha) dz \\ &= \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} \left\{ D_\alpha \left( \int_{-t/2}^{t/2} \frac{12z}{t^3} u_\beta dz \right) + D_\beta \left( \int_{-t/2}^{t/2} \frac{12z}{t^3} u_\alpha dz \right) \right\} \end{aligned}$$

ce qui suggère d'introduire les *rotations moyennes*

$$\varphi_\alpha = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{12z}{t^3} u_\alpha dz \quad (12.13)$$

Pour justifier cette appellation, notons d'abord que si les déplacements étaient linéaires en  $z$ , c'est-à-dire de la forme  $u_\alpha = z\psi_\alpha$ , on aurait bien

$$\varphi_\alpha = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{12}{t^3} z^2 \psi_\alpha dz = \psi_\alpha$$

De plus, comme

$$z = -D_3 \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right)$$

une simple intégration par parties fournit

$$\varphi_\alpha = \underbrace{\left[ -\frac{12}{t^3} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) u_\alpha \right]_{-t/2}^{t/2}}_0 + \frac{12}{t^3} \int_{-t/2}^{t/2} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) D_3 u_\alpha dz \quad (12.14)$$

ce qui fait effectivement apparaître  $\varphi_\alpha$  comme une moyenne pondérée de la pente  $D_3 u_\alpha$  puisque

$$\frac{12}{t^3} \int_{-t/2}^{t/2} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) dz = \frac{12}{t^3} \left( \frac{t^3}{8} - \frac{t^3}{24} \right) = 1 \quad (12.15)$$

A l'aide de ces rotations moyennes, on peut donc écrire

$$\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\alpha\beta} \frac{1}{2} (D_\alpha u_\beta + D_\beta u_\alpha) dz = M_{\alpha\beta} \frac{1}{2} (D_\alpha \varphi_\beta + D_\beta \varphi_\alpha) \quad (12.16)$$

Par ailleurs, on calcule aisément

$$\int_{-t/2}^{t/2} \left( \frac{1+\nu}{2E} \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{2E} \sigma_{\alpha\alpha} \sigma_{\beta\beta} \right) dz = \frac{12}{t^3} \left\{ \frac{1+\nu}{2E} M_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{2E} M_{\alpha\alpha} M_{\beta\beta} \right\} \quad (12.17)$$

Pour pouvoir traiter d'une manière analogue les autres termes de la fonctionnelle (12.11), il nous faut recourir aux équations d'équilibre qui résultent, comme on sait, de la variation des déplacements  $u_\alpha$ . On obtient, pour autant que  $\mathcal{P}(\delta u_\alpha) = 0$ , les équations d'équilibre intérieur

$$D_\beta \sigma_{\alpha\beta} + D_3 \sigma_{\alpha 3} = 0$$

Les conditions de contour seront traitées plus loin. On déduit de la structure de  $\sigma_{\alpha\beta}$

$$D_3 \sigma_{\alpha 3} = -\frac{12z}{t^3} D_\beta M_{\alpha\beta}$$

et, tenant compte de la nullité des contraintes de cisaillement sur les deux faces de la plaque,

$$\sigma_{\alpha 3} = \frac{12}{t^3} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) D_\beta M_{\alpha\beta}$$

L'intégration de ces relations sur l'épaisseur fournit les *efforts tranchants*

$$Q_\alpha = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\alpha 3} dz = D_\beta M_{\alpha\beta} \quad (12.18)$$

en vertu de (12.15). La relation inverse s'écrit

$$\sigma_{\alpha 3} = \frac{12}{t^3} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) Q_\alpha \quad (12.19)$$

A partir de ce résultat, on peut calculer

$$\begin{aligned} \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\alpha 3} (D_\alpha u_3 + D_3 u_\alpha) dz &= Q_\alpha \frac{12}{t^3} \int_{-t/2}^{t/2} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) (D_\alpha u_3 + D_3 u_\alpha) dz \\ &= Q_\alpha \left\{ D_\alpha \left[ \frac{12}{t^3} \int_{-t/2}^{t/2} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) u_3 dz \right] + \frac{12}{t^3} \int_{-t/2}^{t/2} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) D_3 u_\alpha dz \right\} \end{aligned}$$

On retrouve dans le second terme la rotation moyenne  $\varphi_\alpha$ ; quant au premier, il s'interprète comme la dérivée par rapport à  $x_\alpha$  d'un *déplacement transversal moyen*

$$w = \frac{12}{t^3} \int_{-t/2}^{t/2} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) u_3 dz \quad (12.20)$$

ce qui permet d'écrire finalement

$$\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\alpha 3} (D_\alpha u_3 + D_3 u_\alpha) dz = Q_\alpha (\varphi_\alpha + D_\alpha w) \quad (12.21)$$

Il reste à calculer le terme

$$\begin{aligned} \int_{-t/2}^{t/2} \frac{\sigma_{\alpha 3} \sigma_{\alpha 3}}{2G} dz &= \frac{1}{2G} \frac{144}{t^6} Q_\alpha Q_\alpha \int_{-t/2}^{t/2} \left( \frac{t^4}{64} - \frac{t^2 z^2}{8} + \frac{z^4}{4} \right) dz \\ &= \frac{1}{2G} \frac{144}{t^6} Q_\alpha Q_\alpha \frac{t^5}{120} \\ &= \frac{1}{2G} \frac{Q_\alpha Q_\alpha}{5t/6} \end{aligned} \quad (12.22)$$

Ayant pris pour point de départ une structure particulière des contraintes, nous avons par le fait même restreint les charges qu'il est possible de prendre en compte. Pour préciser celles-ci, il faut examiner les conditions d'équilibre. Ainsi, par exemple, en posant à priori  $\sigma_{\alpha 3} = 0$  en  $z = \pm t/2$ , nous avons implicitement éliminé la cas d'une mise en charge par des efforts tangentiels opposés sur les deux faces, du reste moins important en pratique. Les seules charges possibles découlent de l'équation d'équilibre selon  $z$ , qui s'écrit

$$D_\alpha \sigma_{\alpha 3} + f_3 = 0$$

$f_3$  étant une charge de volume verticale. Cette charge a d'ailleurs une structure en  $z$  déterminée :

$$f_3 = -\frac{12}{t^3} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) D_\alpha Q_\alpha$$

Sa résultante

$$p = \int_{-t/2}^{t/2} f_3 dz = -D_\alpha Q_\alpha \quad (12.23)$$

doit être considérée comme une représentation « équivalente » d'une éventuelle charge de pression. Cette approximation est nécessitée par l'hypothèse d'état plan de contrainte. On notera que l'on a exactement

$$\int_{-t/2}^{t/2} f_3 u_3 dz = pw \quad (12.24)$$

Examinons enfin les conditions qu'il est possible d'imposer sur la partie  $\partial S_2$  du contour où l'on impose les efforts. Si  $n_\alpha$  sont les composantes de la normale au contour, les tractions de surface imposées  $\bar{T}_\alpha$  doivent avoir la même structure que les contraintes pour vérifier la condition d'équilibre local :

$$\bar{T}_\alpha = n_\beta \sigma_{\beta\alpha} = \frac{12z}{t^3} n_\beta M_{\beta\alpha}$$

Après multiplication par  $z$  et intégration, cela donne

$$n_\beta M_{\alpha\beta} = \int_{-t/2}^{t/2} z \bar{T}_\alpha dz = \bar{M}_{n\alpha}$$

Pour les tractions de surface  $\bar{T}_3$ , on devra avoir

$$\bar{T}_3 = n_\beta \sigma_{\beta 3} = \frac{12}{t^3} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) n_\beta Q_\beta$$

Intégrant sur  $z$ , on obtient

$$n_\beta Q_\beta = \int_{-t/2}^{t/2} \bar{T}_3 dz = \bar{Q}_n$$

On vérifie sans peine qu'à l'aide de ces résultantes et moments, le travail virtuel des tractions de surface s'écrit

$$\int_{\partial S_2} (\bar{M}_{n\alpha} \delta \varphi_\alpha + \bar{Q}_n \delta w) ds$$

Adoptant sur  $\partial S_2$  le système d'axes curvilignes défini par la normale et la

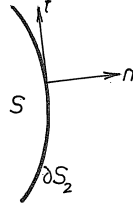


FIGURE 12.5 – Normale et tangente sur le contour

tangente au contour parcouru dans le sens laissant l'aire à gauche (*fig.* 12.5), on peut écrire

$$\delta\varphi_\alpha = (\delta\varphi_\beta n_\beta)n_\alpha + (\delta\varphi_\beta t_\beta)t_\alpha = \delta\varphi_n n_\alpha + \delta\varphi_t t_\alpha$$

où  $\delta\varphi_n$  est la rotation normale et  $\delta\varphi_t$ , la rotation tangentielle. Il en découle que

$$\bar{M}_{n\alpha}\delta\varphi_\alpha = n_\alpha\bar{M}_{n\alpha}\delta\varphi_n + t_\alpha\bar{M}_{n\alpha}\delta\varphi_t = \bar{M}_n\delta\varphi_n + \bar{M}_{nt}\delta\varphi_t$$

où s'introduisent le *moment de flexion de contour*

$$\bar{M}_n = n_\alpha\bar{M}_{n\alpha} \quad (12.25)$$

pour lequel l'équilibre s'écrit

$$M_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta = \bar{M}_n \quad (12.26)$$

et le *moment de torsion de contour*

$$\bar{M}_{nt} = t_\alpha\bar{M}_{n\alpha} \quad (12.27)$$

pour lequel la condition d'équilibre est

$$M_{\alpha\beta}n_\alpha t_\beta = \bar{M}_{nt} \quad (12.28)$$

Ils permettent d'écrire le travail virtuel des tractions de surface sous la forme

$$\int_{\partial S_2} (\bar{M}_n\delta\varphi_n + \bar{M}_{nt}\delta\varphi_t + \bar{Q}_n\delta w)ds \quad (12.29)$$

Ces effort et moments sont représentés en figure 12.6.



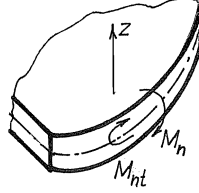


FIGURE 12.6 – Moment normal et moment de torsion sur le bord

## 12.5 Équations générales des plaques

En rassemblant les résultats acquis jusqu'ici, on peut donner au principe de Hellinger-Reissner la forme bidimensionnelle

$$\delta \left\{ \int_S \left[ M_{\alpha\beta} \frac{1}{2} (D_\alpha \varphi_\beta + D_\beta \varphi_\alpha) + Q_\alpha (\varphi_\alpha + D_\alpha w) - \frac{12}{t^3} ((1 + \nu) M_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} - \nu M_{\alpha\alpha} M_{\beta\beta}) - \frac{1}{2nGt} Q_\alpha Q_\alpha - pw \right] dS - \int_{\partial S_2} (\bar{M}_n \varphi_n + \bar{M}_{nt} \varphi_t + \bar{Q}_n w) ds \right\} = 0 \quad (12.30)$$

où nous avons écrit  $n$  à la place de  $5/6$  pour des raisons qui apparaîtront dans la suite.

La variation des  $\varphi_\alpha$  dans ce principe conduit aux équations d'équilibre des moments

$$D_\beta M_{\beta\alpha} = Q_\alpha \text{ dans } S \quad (12.31)$$

$$M_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta = \bar{M}_n \text{ et } M_{\alpha\beta} n_\alpha t_\beta = \bar{M}_{nt} \text{ sur } \partial S_2 \quad (12.32)$$

La variation de  $w$  fournit

$$D_\alpha Q_\alpha + \bar{p} = 0 \text{ dans } S \quad (12.33)$$

$$n_\alpha Q_\alpha = \bar{Q}_n \text{ sur } \partial S_2 \quad (12.34)$$

Variant les moments, on obtient les relations moments-courbures :

$$\frac{1}{2} (D_\alpha \varphi_\beta + D_\beta \varphi_\alpha) = \frac{12}{Et^3} [(1 + \nu) M_{\alpha\beta} - \nu M_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}]$$

Il est d'usage de noter  $\chi_{\alpha\beta}$  les courbures

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(D_\alpha\varphi_\beta + D_\beta\varphi_\alpha) \quad (12.35)$$

En particulier, on appelle *torsion* la grandeur  $(2\chi_{12})$ . La résolution de ces équations, de manière à expliciter les moments, fournit

$$M_{\alpha\beta} = D[(1-\nu)\chi_{\alpha\beta} + \nu\chi_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}] \quad (12.36)$$

où l'on a introduit la *raideur de plaque*

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (12.37)$$

Enfin, la variation des efforts tranchants mène à l'équation

$$Q_\alpha = nGt(\varphi_\alpha + D_\alpha w) = nGt\gamma_\alpha \quad (12.38)$$

en notant

$$\gamma_\alpha = \varphi_\alpha + D_\alpha w \quad (12.39)$$

L'énergie complémentaire de déformation s'écrit

$$\Psi = \int_S \left\{ \frac{12}{Et^3} [(1+\nu)M_{\alpha\beta}M_{\alpha\beta} - \nu M_{\alpha\alpha}M_{\beta\beta}] + \frac{1}{2nGt} Q_\alpha Q_\alpha \right\} dS \quad (12.40)$$

L'énergie de déformation s'en déduit en y remplaçant les valeurs de  $M_{\alpha\beta}$  et de  $Q_\alpha$  obtenues en (12.36) et (12.38). Il vient

$$\mathcal{U} = \int_S \left\{ \frac{D}{2} [(1-\nu)\chi_{\alpha\beta}\chi_{\alpha\beta} + \nu\chi_{\alpha\alpha}\chi_{\beta\beta}] + \frac{nGt}{2} \gamma_\alpha \gamma_\alpha \right\} dS$$

soit explicitement,

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \int_S \left\{ \frac{D}{2} [(1-\nu)(\chi_{11}^2 + \chi_{22}^2 + 2\chi_{12}^2) + \nu(\chi_{11}^2 + \chi_{22}^2 + 2\chi_{11}\chi_{22})] \right. \\ &\quad \left. + \frac{nGt}{2} (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \right\} dS \\ &= \int_S \left\{ \frac{D}{2} [\chi_{11}^2 + \chi_{22}^2 + 2\chi_{11}\chi_{22} + 2(1-\nu)(\chi_{12}^2 - \chi_{11}\chi_{22})] + \frac{nGt}{2} (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \right\} dS \end{aligned} \quad (12.41)$$

## 12.6 Autres types d'hypothèses

La théorie ci-dessus est due à Reissner [72, 73]. Une autre approche, développée par Hencky [43], consiste à poser  $\sigma_{33} = 0$  comme ci-dessus, puis à profiter du relâchement de la compatibilité en  $z$  que cette hypothèse entraîne dans un cadre variationnel, pour poser  $u_3 = w(x, y)$ ; on y ajoute une structure linéaire des déplacements  $u_\alpha$  :

$$u_\alpha = z\varphi_\alpha \quad (12.42)$$

Le développement de cette théorie mène à des expressions semblables aux précédentes, sauf à donner à  $n$  la valeur 1 au lieu de  $5/6$ , ce qui manifeste le supplément de raideur d'une théorie cinématiquement admissible (dans le cadre  $\sigma_{33} = 0$ ) par rapport à la théorie de Reissner, qui est statiquement admissible. Par ailleurs, il n'y a pas, dans cette théorie, de restrictions sur la forme de la mise en charge.

## 12.7 L'hypothèse de Kirchhoff

Une simplification supplémentaire, introduite pour la première fois par Kirchhoff [48, 52], consiste à négliger la déformation due à l'effort tranchant. On notera en effet que l'équation d'équilibre

$$Q_\alpha = D_\beta M_{\beta\alpha}$$

entraîne la relation

$$Q = \frac{M}{\lambda} \quad (12.43)$$

entre l'ordre de grandeur  $Q$  des efforts tranchants et l'ordre de grandeur  $M$  des moments. Les courbures sont de l'ordre de  $\varphi/\lambda$ , en appelant  $\varphi$  l'ordre de grandeur des rotations, si bien que, par les équations moments-courbures,

$$M = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\varphi}{\lambda} \quad (12.44)$$

Par ailleurs, l'ordre de grandeur  $Q$  des efforts tranchants est lié à l'ordre de grandeur  $\gamma$  des glissements  $\gamma_{\alpha 3}$  par la relation

$$Q = nGt\gamma \quad (12.45)$$

On obtient donc

$$\frac{Q}{M} = \frac{1}{\lambda} = \frac{nGt\lambda}{Et^3} 12(1-\nu^2) \frac{\gamma}{\varphi}$$

ce qui entraîne

$$\frac{\gamma}{\varphi} = \frac{E}{12(1-\nu^2)nG} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^2$$

c'est-à-dire

$$\varphi_\alpha = -D_\alpha w + \mathcal{O} \left[ \frac{E}{12(1-\nu^2)nG} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^2 \varphi \right] \quad (12.46)$$

Pour une plaque homogène en  $z$ , de coefficient de Poisson égal à 0,3, on a

$$\frac{E}{12(1-\nu^2)nG} = \frac{1}{6n(1-\nu)} = 0,29 \quad (12.47)$$

en supposant  $n = 5/6$ . Dès lors, en posant à priori

$$\varphi_\alpha = -D_\alpha w \quad (12.48)$$

on ne commet qu'une erreur du même ordre de grandeur que celles que nous avons déjà consenties jusqu'ici. Ce n'est que dans le cas de matériaux équivalents, destinés à représenter, par exemple, des *sandwiches* (fig. 12.7) (souvent anisotropes d'ailleurs), que l'on peut observer des valeurs relativement grandes du rapport (12.47). La simplification (12.48) est connue sous le nom d'*hypothèse de Kirchhoff*. On peut également donner à cette hypothèse une présentation

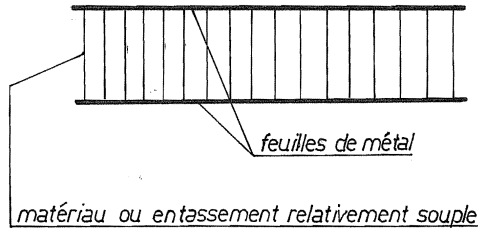


FIGURE 12.7 – Sandwich

énergétique. En effet, les relations (12.43) impliquent que l'énergie de flexion a pour ordre de grandeur

$$E.F. = \frac{1}{2} \frac{12}{Et^3} \{ (1+\nu) M_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} - \nu M_{\alpha\alpha} \} = \mathcal{O} \left( \frac{1}{2} \frac{12}{Et^3} M^2 \right)$$

tandis que l'ordre de grandeur de l'énergie de cisaillement est

$$E.C. = \frac{1}{2nGt} Q_\alpha Q_\alpha = \mathcal{O} \left( \frac{1}{2} \frac{1}{nGt} \frac{M^2}{\lambda^2} \right)$$

si bien que leur rapport est de l'ordre de

$$\frac{E.C.}{E.F.} = \frac{E}{12nG} \frac{t^2}{\lambda^2} \quad (12.49)$$

En admettant une erreur en  $\frac{E}{12nG} \frac{t^2}{\lambda^2}$  sur le calcul de l'énergie, on peut donc écrire le principe de Hellinger-Reissner simplifié

$$\begin{aligned} \delta \left\{ \int_S \left[ \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} (D_\alpha \varphi_\beta + D_\beta \varphi_\alpha) + Q_\alpha (\varphi_\alpha + D_\alpha w) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{12}{t^3} ((1 + \nu) M_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} - \nu M_{\alpha\alpha} M_{\beta\beta}) \right] \right. \\ \left. - \int_S \bar{p} w dS - \int_{\partial S_2} (\bar{M}_n \varphi_n + \bar{M}_{nt} \varphi_t + \bar{Q}_n w) ds \right\} = 0 \quad (12.50) \end{aligned}$$

où les efforts tranchants  $Q_\alpha$  jouent le rôle de *multiplicateurs de Lagrange* associés à la condition de Kirchhoff. Pour le reste, ils perdent toute signification énergétique (ils ne travaillent pas) et si l'on exprime les conditions de Kirchhoff à priori, ils disparaissent du principe. C'est du reste de cette manière que l'on procède le plus souvent : à partir des conditions (12.48), on calcule les courbures

$$\chi_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} (D_{\alpha\beta} w + D_{\beta\alpha} w) = -D_{\alpha\beta} w \quad (12.51)$$

Sur le contour, on a

$$\varphi_n = -D_n w, \quad \varphi_t = -D_t w \quad (12.52)$$

ce qui mène à la forme suivante du principe de Hellinger-Reissner :

$$\begin{aligned} \delta \left\{ \int_S \left[ -M_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta} w - \frac{12}{t^3} ((1 + \nu) M_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} - \nu M_{\alpha\alpha} M_{\beta\beta}) - p w \right] dS \right. \\ \left. - \int_{\partial S_2} (\bar{Q}_n w - \bar{M}_n D_n w - \bar{M}_{nt} D_t w) ds \right\} = 0 \quad (12.53) \end{aligned}$$

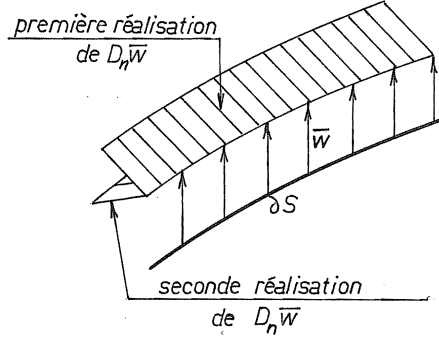


FIGURE 12.8 – Indépendance de la pente normale sur le bord

## 12.8 Le paradoxe de Kirchhoff

Il se trouve que les conditions de Kirchhoff modifient profondément la structure des conditions aux limites. Tout d'abord, sur  $\partial S_1$ , on remarquera que s'il est possible, étant donné une fonction  $\bar{w}$ , de se donner  $\overline{D_n w}$  arbitrairement (fig. 12.8), il n'en est pas de même de  $\overline{D_t w}$ , puisque

$$\bar{w}(s) = \bar{w}(s_1) + \int_{s_1}^s \overline{D_t w} ds^*$$

Au lieu des trois conditions  $w = \bar{w}$ ,  $\varphi_n = \bar{\varphi}_n$  et  $\varphi_t = \bar{\varphi}_t$ , on se trouve donc réduit à  $w = \bar{w}$  et  $D_n w = \overline{D_n w}$ . De la même manière, sur  $\partial S_2$ , on sera ramené à deux conditions seulement. Pour le montrer, nous supposons  $\partial S_2$  formé d'un nombre fini d'arcs réguliers  $C_i$  joignant un point  $P_{i-1}$  à un point  $P_i$ , comme représenté en figure 12.9. En ces points, le contour peut posséder des angles. Notant que  $D_t w$  dépend de  $w$ , on peut faire apparaître ce dernier par une intégration par parties :

$$\begin{aligned} - \int_{\partial S_2} (-\bar{M}_{nt} D_t w) ds &= - \sum_i \int_{C_i} (-\bar{M}_{nt} D_t w) ds \\ &= \sum_i [\bar{M}_{nt} w]_{(P_{i-1})_+}^{(P_i)_-} - \sum_i \int_{C_i} (D_t \bar{M}_{nt}) w ds \end{aligned}$$

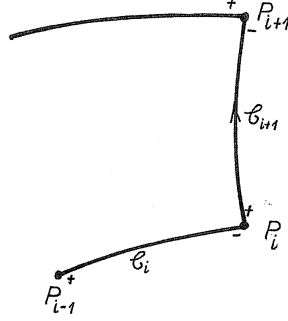


FIGURE 12.9 – Contour typique

et, en réarrangeant les termes, on obtient

$$-\sum_i [\bar{M}_{nt}(P_{i+}) - \bar{M}_{nt}(P_{i-})] w_i - \sum_i \int_{\mathcal{C}_i} (D_t \bar{M}_{nt}) w ds$$

ce qui permet de donner au travail des forces imposées sur  $\partial S_2$  la forme finale

$$-\int_{\partial S_2} (\bar{K}_n w - \bar{M}_n D_n w) ds - \sum_i \bar{Z}_i w_i \quad (12.54)$$

en définissant les *forces de coin*

$$\bar{Z}_i = \bar{M}_{nt}(P_{i+}) - \bar{M}_{nt}(P_{i-}) \quad (12.55)$$

et l'*effort tranchant de Kirchhoff*

$$\bar{K}_n = \bar{Q}_n + D_t \bar{M}_{nt} \quad (12.56)$$

Il n'est donc plus possible de spécifier séparément  $\bar{Q}_n$ ,  $\bar{M}_n$  et  $\bar{M}_{nt}$ , le premier et le troisième se combinant pour donner l'effort  $\bar{K}_n$  et les forces de coin. Ce fait paradoxal, démontré par Kirchhoff par la présente méthode, a suscité au *XIX<sup>e</sup>* siècle de nombreuses controverses, jusqu'à ce que Thomson (Lord Kelvin) et Tait [83] en donnent une interprétation physique très claire. Du fait de l'hypothèse de Kirchhoff, un moment de torsion élémentaire  $\bar{M}_{nt} ds$  est indiscernable par son travail d'un couple de forces  $\bar{M}_{nt}$  situées à une distance  $ds$ . Les différents couples équivalents de forces  $\bar{M}_{nt}$  relatifs à des éléments voisins s'équilibrent à  $D_t \bar{M}_{nt}$

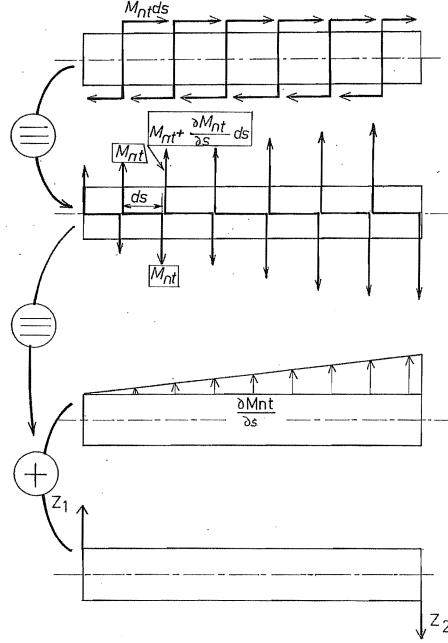


FIGURE 12.10 – Paradoxe de Kirchhoff

près, si bien que sur l'arc régulier considéré, on applique en fait une densité d'efforts tranchants  $D_t \bar{M}_{nt}$  (fig. 12.10). Ainsi, les couples  $\bar{M}_{nt} ds$  s'équilibrent à  $D_t \bar{M}_{nt} ds$  près, sauf aux extrémités de l'arc où, ne trouvant pas d'équivalent, les efforts  $\bar{M}_{nt}$  forment une charge de coin.

## 12.9 Équation de Sophie Germain

L'élimination des moments au profit des déplacements dans le principe (12.53) mène au principe variationnel

$$\int_S \frac{D}{2} \{ (\nabla^2 w)^2 + 2(1 - \nu) [(D_{12} w)^2 - D_{11} w D_{22} w] \} dS - \int_S p w dS - \int_{\partial S_2} (\bar{K}_n w - \bar{M}_n D_n w) ds - \sum_i Z_i w_i \text{ minimum} \quad (12.57)$$



Lors d'une variation de  $w$ , le terme multiplié par  $(1 - \nu)$  ne produit que des termes aux limites. Il peut donc être omis dans le cas d'une plaque encastree sur tout son contour. L'équation d'équilibre intérieur s'écrit

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \quad (12.58)$$

et a été obtenue pour la première fois par Sophie Germain en 1816. La théorie de Sophie Germain péchait cependant par ses conditions aux limites.

## 12.10 Expression des résultantes de bord en termes des déplacements

Partant de l'expression générale des moments

$$M_{\alpha\beta} = -D[(1 - \nu)D_{\alpha\beta}w + \nu D_{\gamma\gamma}w\delta_{\alpha\beta}]$$

on obtient directement

$$M_n = -D[(1 - \nu)n_\alpha n_\beta D_{\alpha\beta}w + \nu \nabla^2 w] \quad (12.59)$$

On notera que  $\nabla^2 w$  est la trace de la matrice hessienne de composantes  $D_{\alpha\beta}w$ . Comme cette matrice a, dans le système de base  $(\mathbf{n}, \mathbf{t})$ , les composantes

$$\begin{bmatrix} n_\alpha n_\beta D_{\alpha\beta}w & n_\alpha t_\beta D_{\alpha\beta}w \\ n_\alpha t_\beta D_{\alpha\beta}w & t_\alpha t_\beta D_{\alpha\beta}w \end{bmatrix}$$

on a donc également

$$\nabla^2 w = n_\alpha n_\beta D_{\alpha\beta}w + t_\alpha t_\beta D_{\alpha\beta}w$$

si bien que

$$M_n = -D\nabla^2 w + D(1 - \nu)t_\alpha t_\beta D_{\alpha\beta}w$$

Or, on peut écrire

$$\begin{aligned} t_\alpha t_\beta D_{\alpha\beta}w &= t_\beta D_t(D_\beta w) \\ &= D_t(t_\beta D_\beta w) - D_\beta w D_t t_\beta \\ &= D_{tt}w - D_\beta w D_t t_\beta \end{aligned}$$

Notant que

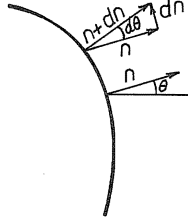


FIGURE 12.11 – Dérivée du vecteur normal

$$t_\beta D_t t_\beta = D_t \left( \frac{t_\beta t_\beta}{2} \right) = D_t \left( \frac{1}{2} \right) = 0$$

et que

$$n_\beta D_t t_\beta = D_t(n_\beta t_\beta) - t_\beta D_t n_\beta = -t_\beta D_t n_\beta = -D_t \theta$$

$\theta$  étant l'angle que fait la normale avec une direction fixe (fig. 12.11), on obtient

$$D_t t_\beta = -n_\beta (D_t \theta)$$

ce qui entraîne finalement

$$M_n = -D\nabla^2 w + D(1 - \nu)[D_{tt}w + D_n w(D_t \theta)] \quad (12.60)$$

On peut procéder de même pour le calcul de  $K_n$ . Tout d'abord,

$$Q_\alpha = D_\beta M_{\beta\alpha} = -D[(1 - \nu)D_{\alpha\beta\beta}w + \nu D_{\gamma\gamma\alpha}w] = -DD_\alpha \nabla^2 w$$

d'où

$$Q_n = n_\alpha Q_\alpha = -DD_n \nabla^2 w$$

On a par ailleurs

$$\begin{aligned} M_{nt} &= -D(1 - \nu)n_\alpha t_\beta D_{\alpha\beta}w \\ &= -D(1 - \nu)[D_t(D_n w) - D_\alpha w D_t n_\alpha] \\ &= -D(1 - \nu)[D_{tn}w - (D_t \theta)D_t w] \end{aligned}$$

Rassemblant ces deux résultats, on obtient

$$K_n = Q_n + D_t M_{nt} = -DD_n \nabla^2 w - D(1 - \nu)D_t[D_{tn}w - (D_t \theta)D_t w] \quad (12.61)$$

## 12.11 Comparaison des théories avec et sans effet des efforts tranchants

La caractéristique essentielle de la théorie de Kirchhoff est que le champ de rotations  $\varphi_\alpha$  est intégrable, ce qui revient à dire que

$$\Omega = D_1\varphi_2 - D_2\varphi_1 = 0$$

Au contraire, dans les théories de Hencky et de Reissner, on a

$$\begin{aligned}\Omega &= e_{3\alpha\beta}D_\alpha\varphi_\beta \\ &= -e_{3\alpha\beta}D_\alpha\beta w + \frac{1}{nGt}e_{3\alpha\beta}D_\alpha Q_\beta \\ &= \frac{1}{nGt}e_{3\alpha\beta}D_\alpha\gamma M_{\gamma\beta} \\ &= \frac{D}{nGt}e_{3\alpha\beta}D_\alpha\gamma[(1-\nu)\chi_{\gamma\beta} - \nu\chi_{\lambda\lambda}\delta_{\gamma\beta}] \\ &= \frac{D(1-\nu)}{nGt}e_{3\alpha\beta}D_\alpha\gamma\chi_{\gamma\beta} - D\nu e_{3\alpha\beta}D_\alpha\beta\chi_{\lambda\lambda} \\ &= \frac{D(1-\nu)}{2nGt}e_{3\alpha\beta}D_\alpha\gamma(D_\gamma\varphi_\beta + D_\beta\varphi_\gamma) \\ &= \frac{D(1-\nu)}{2nGt}e_{3\alpha\beta}D_\alpha\gamma\gamma\varphi_\beta \\ &= \frac{D(1-\nu)}{2nGt}\nabla^2\Omega\end{aligned}$$

soit

$$\nabla^2\Omega = \frac{2nGt}{D(1-\nu)}\Omega = \frac{12n}{t^2}\Omega \quad (12.62)$$

dans le cas d'une plaque homogène sur son épaisseur. Avant d'examiner les propriétés de cette équation, notons que cette grandeur  $\Omega$  admet, dans la théorie de Reissner, la représentation

$$\Omega = \frac{12}{t^3} \int_{-t/2}^{t/2} z(D_1u_2 - D_2u_1)dz = \frac{12}{t^3} \int_{-t/2}^{t/2} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) D_3(D_1u_2 - D_2u_1)dz$$

qui la donne comme une moyenne pondérée de la *torsion normale* de la plaque [29], ainsi que l'illustre la figure 12.12. L'équation (12.62), écrite sous la forme

$$\Omega = \frac{t^2}{12n}\nabla^2\Omega$$

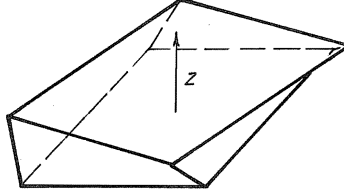


FIGURE 12.12 – Torsion normale

se présente comme une perturbation singulière de l'équation de Kirchhoff. Elle admet des solutions à *variation très rapide* : ainsi, en cherchant une solution de la forme

$$\Omega = A \exp(-\alpha x_1 - \beta x_2)$$

on obtient

$$\frac{t^2}{12n}(\alpha^2 + \beta^2) = 1$$

soit, lorsque  $n = 5/6$ ,

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \approx \frac{3}{t}$$

c'est-à-dire que la profondeur de pénétration (distance à laquelle la solution est divisée par  $e$ ) est de l'ordre de  $t/3$ . Par conséquent, les zones de violation de la condition de Kirchhoff sont très localisées, près des bords ou des points d'application de la charge.

La recherche du champ de déplacements  $w$  se fait, en théorie de Kirchhoff, à partir de l'équation de Sophie Germain. Dans le cadre des théories prenant en compte l'effet de l'effort tranchant, il faut partir de la relation

$$M_{\alpha\beta} = \frac{D}{2}(1 - \nu)(D_\alpha\varphi_\beta + D_\beta\varphi_\alpha) + \nu DD_\gamma\varphi_\gamma\delta_{\alpha\beta}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} p &= -D_{\alpha\beta}M_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{D}{2}(1 - \nu)(D_{\alpha\beta\alpha}\varphi_\beta + D_{\alpha\beta\beta}\varphi_\alpha) - \nu DD_{\alpha\alpha\gamma}\varphi_\gamma \\ &= -D\nabla^2 D_\alpha\varphi_\alpha = -D\nabla^2 \left( -D_{\alpha\alpha}w + D_\alpha \frac{Q_\alpha}{nGt} \right) \\ &= D\nabla^4 w + D \frac{\nabla^2 p}{nGt} \end{aligned}$$

soit, finalement,

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} - \frac{\nabla^2 p}{nGt} \quad (12.63)$$

La solution de cette équation peut être mise sous la forme

$$w = w_K + w_S$$

où  $w_K$  est la solution de Kirchhoff et  $w_S$ , une solution de l'équation

$$\nabla^4 w_S = -\frac{\nabla^2 p}{nGt}$$

Cette dernière, qui vérifie

$$\nabla^2 \left( \nabla^2 w_S + \frac{p}{nGt} \right)$$

a la forme générale

$$w_S = w^* + w^{**}$$

avec

$$\nabla^2 w^* = -\frac{p}{nGt}, \quad \nabla^4 w^{**} = 0$$

La solution partielle  $w^{**}$  est toujours régulière; en revanche, la régularité de  $w^*$  dépend de celle de  $p$ . Si la charge de pression  $p$  est relativement régulière, il en sera de même de  $w^*$  et, du fait du coefficient  $1/(nGt)$  qui est petit devant  $1/D$ ,  $w^*$  sera négligeable devant  $w_K$ . Par contre, pour les charges très irrégulières, la situation change radicalement. Ainsi, dans le cas d'une charge concentrée en un point  $a$ , la solution  $w^*$  est

$$w^* = -\frac{P}{nGt} \frac{1}{2\pi} \ln(|x - a|)$$

et admet donc une singularité logarithmique. Au contraire, la solution de Kirchhoff conduit à un déplacement fini (mais à une singularité logarithmique des moments).

## 12.12 Torsion d'une plaque rectangulaire encastree sur un bord

La comparaison des deux types de théories de plaques se fait aisément dans le cas de la torsion d'une plaque rectangulaire (*fig.* 12.13). En théorie de Kirchhoff,

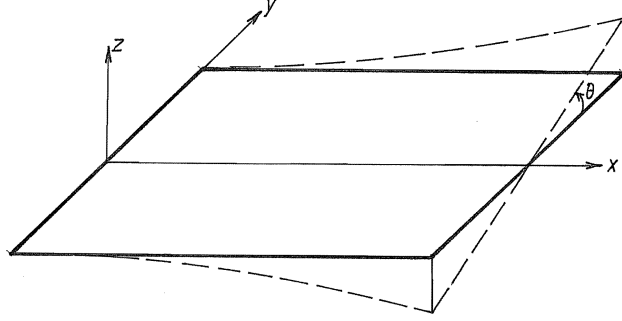


FIGURE 12.13 – Torsion d'une plaque

on cherche une solution de la forme

$$w(x, y) = yA(x) \quad (12.64)$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \chi_{xx} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -yA''(x) \\ \chi_{yy} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0 \\ \chi_{xy} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= -A'(x) \end{cases}$$

On aura donc

$$\begin{cases} M_x &= D(\chi_{xx} + \nu\chi_{yy}) &= -DyA'' \\ M_y &= D(\chi_{yy} + \nu\chi_{xx}) &= -\nu DyA'' \\ M_{xy} &= D(1-\nu)\chi_{xy} &= -D(1-\nu)A' \end{cases}$$

La *torsion pure* est caractérisée par  $M_x = M_y = 0$ , ce qui implique  $A'' = 0$ , soit  $A' = \theta = \text{cte}$ , d'où

$$w(x, y) = \theta xy$$

On a alors

$$M_{xy} = -D(1-\nu)\theta, \quad Q_x = \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0, \quad Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0$$

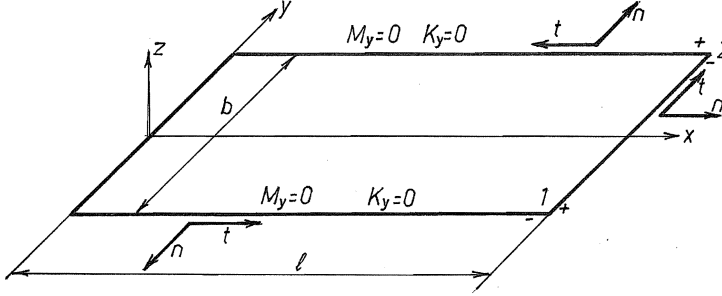


FIGURE 12.14 – Conditions aux limites

Examinons à présent les conditions aux limites, à l'aide de la figure 12.14.

1. En  $y = b/2$ , on doit avoir  $M_y = 0$ , ce qui est identiquement vérifié; on a d'autre part  $M_{nt} = -M_{xy}$ ,  $ds = -dx$ , d'où la condition

$$K_n = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0$$

également vérifiée. Mais il convient de noter que l'on n'a pas  $M_{xy} = 0$ . D'ailleurs, au coin 2, il existe une force de coin

$$Z_2 = (M_{nt})_{2+} - (M_{nt})_{2-} = -(M_{xy})_{2+} - (M_{xy})_{2-} = 2D(1 - \nu)\theta$$

2. En  $y = -b/2$ , on a également  $M_y = 0$  et  $M_{nt} = -M_{xy}$ ,  $ds = dx$ , d'où la condition

$$K_n = -Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0$$

également vérifiée sans mener à  $M_{xy} = 0$ . Au coin 1, il existe une force de coin

$$Z_2 = (M_{nt})_{1+} - (M_{nt})_{1-} = (M_{xy})_{1+} + (M_{xy})_{1-} = -2D(1 - \nu)\theta$$

3. Sur le bord  $x = l$ , le moment  $M_n = M_x$  est nul; on a par ailleurs  $M_{nt} = M_{xy}$  et  $ds = dy$ , d'où la valeur suivante de l'effort tranchant de Kirchhoff :

$$K_n = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0$$

Le moment de torsion appliqué à l'extrémité de la plaque vaut

$$M_t = \frac{b}{2}Z_2 + \left(-\frac{b}{2}\right)Z_1 = 2D(1-\nu)b\theta = 2\frac{Et^3b}{12(1+\nu)}\theta = \frac{1}{3}Gt^3b\theta \quad (12.65)$$

On retrouve donc la formule classique des poutres à section mince. Il est intéressant de noter la chose suivante : si l'on calcule en  $x = a$

$$\int_{-b/2}^{b/2} M_{xy} dy = D(1-\nu)\theta b$$

on n'obtient que la *moitié* du moment, l'autre provenant des moments de torsion résiduels aux coins (voir l'interprétation de Thomson-Tait), assimilables aux contraintes de cisaillement nécessaires pour refermer les lignes de cisaillement que l'on obtiendrait en théorie des poutres (*fig. 12.15*). Du reste, en ne comptant que les  $M_{xy}$ , on ne retient dans le calcul du moment que les contraintes  $\tau_{xy}$ , et la théorie des poutres enseigne effectivement que les contraintes  $\tau_{xy}$  et  $\tau_{xz}$  contribuent chacune pour moitié au moment.

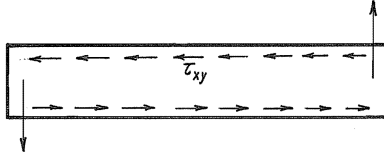


FIGURE 12.15 – Les contraintes tangentielles dans les deux directions ont une contribution identique au moment

Voyons à présent comment étudier le même problème en prenant en compte l'effet des efforts tranchants. Tout d'abord, il faudra modifier la structure du moment  $M_{xy}$  pour lui permettre de s'annuler sur les bords libres. D'autre part, pour sauvegarder la nullité des moments  $M_x$  et  $M_y$ , il faudra que les rotations  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$  vérifient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} &= \frac{12}{Et^3}(M_x - \nu M_y) = 0 \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} &= \frac{12}{Et^3}(M_y - \nu M_x) = 0 \end{aligned} \quad (12.66)$$

La nullité de  $Q_y$  nécessitera la relation

$$\varphi_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (12.67)$$



tandis que

$$\varphi_x = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{Q_x}{nGT}$$

implique, par dérivation,

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = nGt \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

Si l'on admet un déplacement  $w$  de la même forme qu'en théorie de Kirchhoff, à savoir,

$$x = \theta xy \quad (12.68)$$

on obtient donc par (12.66)  $\partial Q_x / \partial x = 0$ , soit

$$Q_x = nGt f(y)$$

ce qui implique

$$\varphi_x = -\frac{\partial w}{\partial x} + f(y) \quad (12.69)$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} M_{xy} &= D \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \\ &= D \frac{1-\nu}{2} \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + f'(y) - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\ &= D \frac{1-\nu}{2} (-2\theta + f'(y)) \end{aligned}$$

et

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = D \frac{1-\nu}{2} f''(y) = nGt f(y)$$

ce qui donne l'équation

$$f''(y) + \omega^2 f(y) = 0 \quad (12.70)$$

avec

$$\omega^2 = \frac{2nGt}{D(1-\nu)} = \frac{12n}{t^2} \quad (12.71)$$

La solution générale de cette équation s'écrit

$$f(y) = A \operatorname{ch} \omega y + B \operatorname{sh} \omega y$$

les constantes  $A$  et  $B$  étant à choisir de manière que  $M_{xy}$  s'annule en  $y = \pm b/2$ , ce qui fournit les conditions

$$-2\theta \pm \omega A \operatorname{sh} \omega \frac{b}{2} + \omega B \operatorname{ch} \omega \frac{b}{2} = 0$$

dont on déduit

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ B &= \frac{2\theta}{\omega \operatorname{ch} \omega \frac{b}{2}} \end{aligned}$$

Il vient donc

$$f(y) = \frac{2\theta \operatorname{sh} \omega y}{\omega \operatorname{ch} \omega \frac{b}{2}}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_x &= -\theta y + \frac{2\theta \operatorname{sh} \omega y}{\omega \operatorname{ch} \omega \frac{b}{2}} \\ M_{xy} &= -D(1-\nu)\theta \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \omega y}{\operatorname{ch} \omega \frac{b}{2}} \right) \\ Q_x &= 2nGt\theta \frac{\operatorname{sh} \omega y}{\omega \operatorname{ch} \omega \frac{b}{2}} \end{aligned}$$

On remarquera que l'effort tranchant  $Q_x$  est strictement confiné aux bords, décroissant à partir de ceux-ci en étant approximativement divisé par  $e$  sur une distance égale à  $t/(n\sqrt{12})$ . Quant aux contraintes, elles valent

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{12}{t^3} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) Q_x = 2\sqrt{12n}G\theta \left( \frac{1}{8} - \frac{z^2}{2t^2} \right) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{12n} \frac{y}{t}}{\operatorname{ch} \sqrt{12n} \frac{b}{2t}} \\ \tau_{yz} &= \frac{12z}{t^3} M_{xy} = 2G\theta z \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \sqrt{12n} \frac{y}{t}}{\operatorname{ch} \sqrt{12n} \frac{b}{2t}} \right) \end{aligned} \quad (12.72)$$

Le moment de torsion à l'extrémité est donné par

$$M_t = - \int_{-b/2}^{b/2} (M_{xy} - yQ_x) dy = \frac{1}{3} Gbt^3 \left( 1 - \frac{\operatorname{th} \omega \frac{b}{2}}{\omega \frac{b}{2}} \right) \theta \quad (12.73)$$

Il est plus petit que celui que fournit la théorie de Kirchhoff, ce qui est normal, puisque celle-ci surestime les raideurs. La présente solution coïncide avec la solution approchée développée en section 6.13.4, où elle est comparée à la solution exacte.

### 12.13 Flexion des plaques rectangulaires simplement appuyées (théorie de Kirchhoff) : méthode des séries doubles de Navier

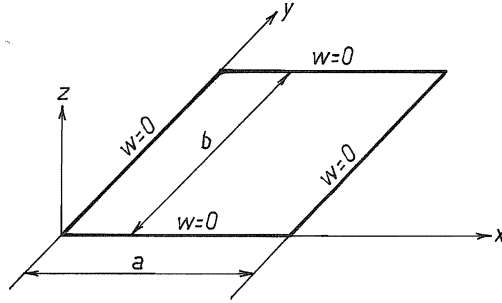


FIGURE 12.16 – Plaque simplement appuyée

Les plaques rectangulaires simplement appuyées s'étudient aisément à l'aide des séries doubles de Navier :

$$w(x, y) = \sum_{k, \ell=1}^{\infty} w_{k\ell} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{\ell\pi y}{b} \quad (12.74)$$

où les  $w_{k\ell}$  sont des inconnues, en double infinité. On déduit immédiatement de cette expression

$$\begin{aligned} \chi_{xx} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sum_{k\ell} \frac{k^2 \pi^2}{a^2} w_{k\ell} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{\ell\pi y}{b} \\ \chi_{yy} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \sum_{k\ell} \frac{\ell^2 \pi^2}{b^2} w_{k\ell} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{\ell\pi y}{b} \\ \chi_{xy} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\sum_{k\ell} \frac{k\pi}{a} \frac{\ell\pi}{b} w_{k\ell} \cos \frac{k\pi x}{a} \cos \frac{\ell\pi y}{b} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 M_{xx} &= D(\chi_{xx} + \nu\chi_{yy}) = \pi^2 \sum_{k\ell} \left( \frac{k^2}{a^2} + \nu \frac{\ell^2}{b^2} \right) w_{k\ell} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{\ell\pi y}{b} \\
 M_{yy} &= D(\chi_{yy} + \nu\chi_{xx}) = \pi^2 \sum_{k\ell} \left( \frac{\ell^2}{b^2} + \nu \frac{k^2}{a^2} \right) w_{k\ell} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{\ell\pi y}{b} \\
 M_{xy} &= D(1 - \nu)\chi_{xy} = -\pi^2(1 - \nu) \sum_{k\ell} \frac{k\ell}{ab} w_{k\ell} \cos \frac{k\pi x}{a} \cos \frac{\ell\pi y}{b}
 \end{aligned}$$

Pour calculer l'énergie de déformation

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^a dx \int_0^b [M_{xx}\chi_{xx} + M_{yy}\chi_{yy} + 2M_{xy}\chi_{xy}] dy$$

on notera les relations

$$\int_0^A \sin \frac{m\pi X}{A} \sin \frac{n\pi X}{A} dX = \int_0^A \cos \frac{m\pi X}{A} \cos \frac{n\pi X}{A} dX = \frac{A}{2} \delta_{mn}$$

dont on déduit

$$\begin{aligned}
 2\mathcal{U} &= D \frac{\pi^4 ab}{4} \sum_{k\ell} \left[ \frac{k^4}{a^4} + \frac{\ell^4}{b^4} + 2\nu \frac{k^2}{a^2} \frac{\ell^2}{b^2} + 2(1 - \nu) \frac{k^2 \ell^2}{a^2 b^2} \right] w_{k\ell}^2 \\
 &= D \frac{\pi^4 ab}{4} \sum_{k\ell} \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{\ell^2}{b^2} \right)^2 w_{k\ell}^2 \tag{12.75}
 \end{aligned}$$

Étant donné une charge  $p$  répartie, on peut calculer son énergie potentielle

$$\mathcal{P} = - \int_0^a dx \int_0^b p w dy$$

Cette énergie potentielle est une fonctionnelle linéaire du déplacement  $w$ , associant donc un nombre à chaque champ de déplacements particulier. Dans le cas de charges concentrées sur une courbe ou sur un point, l'énergie potentielle reste définie, mais son expression est différente : pour une charge  $q$  répartie sur une courbe  $\mathcal{C}$ , on aura

$$\mathcal{P} = - \int_{\mathcal{C}} q w ds$$

et pour une charge  $P$  concentrée en un point  $B$ , il faudra écrire

$$\mathcal{P} = -Pw(B)$$

Quoi qu'il en soit, la linéarité (et la continuité) de la fonctionnelle permet d'écrire

$$\mathcal{P}(w) = \mathcal{P} \left( \sum_{k\ell} w_{k\ell} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{\ell\pi y}{b} \right) = - \sum_{k\ell} P_{k\ell} w_{k\ell}$$

ce qui fait apparaître la composante  $(k, \ell)$  de la charge, définie par

$$P_{k\ell} = -\mathcal{P} \left( \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{\ell\pi y}{b} \right) \quad (12.76)$$

Ce point de vue, bien qu'un peu abstrait, permet de traiter avec la même aisance tous les problèmes menant à une *énergie finie*, ce qui constitue le cadre naturel du problème. En particulier, les charges concentrées se traitent aussi simplement que les autres. La solution résulte en effet de la minimisation de l'énergie totale

$$\mathcal{U} + \mathcal{P} = \frac{1}{2} D \frac{\pi^4 ab}{4} \sum_{k\ell} \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{\ell^2}{b^2} \right)^2 w_{k\ell}^2 - \sum_{k\ell} P_{k\ell} w_{k\ell}$$

par rapport aux inconnues  $w_{k\ell}$ , ce qui fournit, par simple dérivation, la solution

$$w_{k\ell} = \frac{4}{\pi^4 ab} \frac{P_{k\ell}}{\left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{\ell^2}{b^2} \right)^2} \quad (12.77)$$

Il suffit alors de recombinaer ces valeurs pour obtenir les déplacements et les moments.

Traisons à titre d'exemple le cas d'une charge  $P$  concentrée au centre de la plaque. On a, dans ce cas,

$$\mathcal{P}(w) = -Pw \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$$

Or,

$$w \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) = \sum_{k,\ell} k\ell \sin \frac{k\pi}{2} \sin \frac{\ell\pi}{2}$$

et on sait qu'en général,  $\sin \frac{m\pi}{2} = 0$  si  $m$  est pair, si bien que seules interviendront les valeurs impaires de  $k$  et  $\ell$ . Nous tiendrons compte de ce fait en écrivant

$$k = 2m + 1, \quad \ell = 2n + 1, \quad W_{mn} = w_{(2m+1, 2n+1)}$$

Notant encore que

$$\sin \left( (2m+1) \frac{\pi}{2} \right) = (-1)^m$$

on obtient

$$w \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) = \sum_{mn} W_{mn} (-1)^{m+n} \quad (12.78)$$

Par conséquent,

$$P_{mn} = (-1)^{m+n} P$$

et

$$W_{mn} = \frac{4P}{\pi^4 Dab} \frac{(-1)^{m+n}}{\left[ \left( \frac{2m+1}{a} \right)^2 + \left( \frac{2n+1}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (12.79)$$

Le déplacement au droit de la charge se calcule alors par (12.78).

La sommation des séries obtenues se fait d'ordinaire par voie numérique. Pour effectuer une somme double de ce genre, il convient de progresser simultanément en  $m$  et  $n$ , ce qui se fait de la manière suivante : on progresse en fait en incrémentant d'une unité le nombre  $r = (m + n)$ . A  $r = 2$  correspond  $m = 1, n = 1$ . Pour  $r = 3$ , il existe deux termes,  $(m = 2, n = 1)$  et  $(m = 1, n = 2)$ . Pour  $r = 4$ , les termes sont  $(m = 3, n = 1)$ ;  $(m = 2, n = 2)$ ;  $(m = 1, n = 3)$  et ainsi de suite, c'est-à-dire que l'on calcule en fait

$$\sum_{m,n} \Phi_{mn} = \sum_{r=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{r-1} \Phi_{r-n,n}$$

Il convient de noter que la vitesse de convergence de la série est tributaire de la régularité de la mise en charge. Pour une précision donnée, il faut sommer plus de termes dans le cas d'une charge concentrée que dans le cas d'une charge répartie.

### 12.14 Flexion d'une plaque rectangulaire appuyée sur deux bords opposés (théorie de Kirchhoff) : méthode des séries simples de Lévy

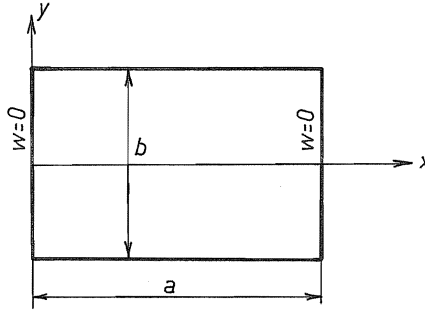


FIGURE 12.17 – Plaque appuyée à ses deux extrémités

Dans le cas d'une plaque rectangulaire appuyée sur deux bords opposés (*fig.* 12.17), il est plus simple d'utiliser les séries simples de Lévy, de la forme

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (12.80)$$

où apparaissent des fonctions inconnues  $A_n(y)$ , en simple infinité. On obtient aisément

$$\begin{aligned} \chi_{xx} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sum_n \frac{n^2 \pi^2}{a^2} A_n \sin \frac{n\pi x}{a} \\ \chi_{yy} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\sum_n A_n'' \sin \frac{n\pi x}{a} \\ \chi_{xy} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\sum_n \frac{n\pi}{a} A_n' \cos \frac{n\pi x}{a} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} M_{xx} &= D(\chi_{xx} + \nu\chi_{yy}) = D \sum_n \left( \frac{n^2\pi^2}{a^2} A_n - \nu A_n'' \right) \sin \frac{n\pi x}{a} \\ M_{yy} &= D(\chi_{yy} + \nu\chi_{xx}) = -D \sum_n \left( A_n'' - \frac{n^2\pi^2}{a^2} A_n \right) \sin \frac{n\pi x}{a} \\ M_{xy} &= D(1 - \nu)\chi_{xy} = -D(1 - \nu) \sum_n A_n' \cos \frac{n\pi x}{a} \end{aligned}$$

L'énergie de déformation se calcule alors par

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_{-b/2}^{b/2} (M_{xx}\chi_{xx} + M_{yy}\chi_{yy} + 2M_{xy}\chi_{xy}) dy$$

ce qui donne

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \frac{Da}{2} \sum_n \int_{-b/2}^{b/2} \left[ \frac{n^4\pi^4}{a^4} A_n^2 - 2\nu \frac{n^2\pi^2}{a^2} A_n A_n'' + A_n''^2 + 2(1 - \nu) \frac{n^2\pi^2}{a^2} A_n'^2 \right] dy$$

et, après réarrangement des termes,

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \frac{Da}{2} \sum_n \int_{-b/2}^{b/2} \left[ \left( A_n'' - \frac{n^2\pi^2}{a^2} A_n \right)^2 + 2(1 - \nu) \frac{n^2\pi^2}{a^2} (A_n'^2 + A_n A_n'') \right] dy \quad (12.81)$$

L'énergie potentielle des charges s'écrit, quant à elle,

$$\mathcal{P} = \mathcal{P} \left( \sum_n A_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a} \right) = \sum_n \mathcal{P}_n(A_n(y)) \quad (12.82)$$

$\mathcal{P}_n$  étant l'harmonique d'ordre  $n$  de l'énergie potentielle. La minimisation de l'énergie potentielle totale  $(\mathcal{U} + \mathcal{P})$  mène à une simple infinité de problèmes variationnels à une dimension.

Illustrons cette méthode par un exemple. Il s'agit d'une plaque supportant une charge uniformément répartie sur sa ligne médiane (fig. 12.18).

L'énergie potentielle vaut

$$\mathcal{P} = -q \int_{-b/2}^{b/2} \sum_n A_n \sin \frac{n\pi}{2} dy \quad (12.83)$$



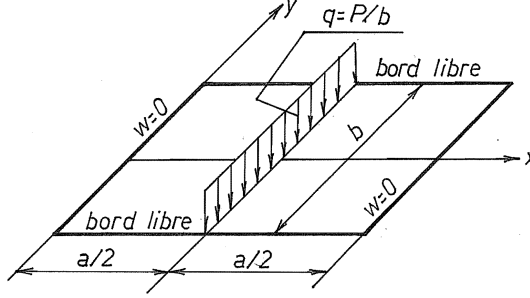


FIGURE 12.18 – Plaque sous une charge uniformément répartie sur sa ligne médiane

si bien que la variation des  $A_n$  mène aux conditions suivantes, où les harmoniques sont découplés :

$$\begin{aligned} \frac{Da}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \left[ \left( A_n'' - \frac{n^2\pi^2}{a^2} A_n \right) \left( \delta A_n'' - \frac{n^2\pi^2}{a^2} \delta A_n \right) \right. \\ \left. + 2(1-\nu) \frac{n^2\pi^2}{a^2} \left( A_n' \delta A_n' + \frac{1}{2} A_n \delta A_n'' + \frac{1}{2} A_n'' \delta A_n \right) \right] dy \\ - q \sin \frac{n\pi}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \delta A_n dy = 0 \end{aligned}$$

Intégrant deux fois par parties de manière à faire disparaître les dérivées des  $\delta A_n$  dans les intégrales, on obtient (après multiplication par  $2/(Da)$ )

$$\begin{aligned} \left[ \left( A_n'' - \frac{n^2\pi^2}{a^2} A_n \right) \delta A_n' + 2(1-\nu) \frac{n^2\pi^2}{a^2} \left( A_n' \delta A_n + \frac{1}{2} A_n \delta A_n' \right) \right]_{-b/2}^{b/2} \\ - \left[ \left( A_n''' - \frac{n^2\pi^2}{a^2} A_n' \right) \delta A_n + (1-\nu) \frac{n^2\pi^2}{a^2} A_n' \delta A_n \right]_{-b/2}^{b/2} \\ + \int_{-b/2}^{b/2} \left( A_n^{IV} - 2 \frac{n^2\pi^2}{a^2} A_n'' + \frac{n^4\pi^4}{a^4} A_n \right) \delta A_n dy - \frac{2q}{Da} \sin \frac{n\pi}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \delta A_n dy = 0 \end{aligned}$$

ce qui permet de déduire l'équation d'Euler

$$A_n^{IV} - 2 \frac{n^2\pi^2}{a^2} A_n'' + \frac{n^4\pi^4}{a^4} A_n = \frac{2q}{Da} \sin \frac{n\pi}{2} \quad \text{dans } ]-b/2, b/2[ \quad (12.84)$$

et les conditions aux limites suivantes ( $\delta A_n$  et  $\delta A'_n$  sont libres aux extrémités  $y = \pm b/2$ ) :

$$A_n''' - (2 - \nu) \frac{n^2 \pi^2}{a^2} A'_n = 0 \quad \text{en } y = \pm b/2$$

(nullité de l'effort tranchant de Kirchhoff) (12.85)

et

$$A_n'' - \nu \frac{n^2 \pi^2}{a^2} A_n = 0 \quad \text{en } y = \pm b/2 \quad (\text{nullité du moment normal}) \quad (12.86)$$

La solution générale de l'équation différentielle (12.84) est

$$A_n = (B_n + C_n y) \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + (E_n + F_n y) \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} + \frac{2qa^3 \sin \frac{n\pi}{2}}{Dn^4 \pi^4}$$

La symétrie du problème par rapport à  $y$  exige  $C_n = E_n = 0$ . On a alors successivement

$$\begin{aligned} A_n &= B_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + F_n y \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} + \frac{2qa^3 \sin \frac{n\pi}{2}}{Dn^4 \pi^4} \\ A'_n &= \left( \frac{n\pi}{a} B_n + F_n \right) \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} + \frac{n\pi}{a} F_n y \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} \\ A_n'' &= \left( \frac{n^2 \pi^2}{a^2} B_n + 2 \frac{n\pi}{a} F_n \right) \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} F_n y \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \\ A_n''' &= \left( \frac{n^3 \pi^3}{a^3} B_n + 3 \frac{n^2 \pi^2}{a^2} F_n \right) \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} + \frac{n^3 \pi^3}{a^3} F_n y \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} \end{aligned}$$

Ces résultats permettent d'écrire les conditions aux limites. La condition (12.85) donne

$$-\frac{n^3 \pi^3}{a^3} (1 - \nu) B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} F_n \left[ (1 + \nu) \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} - (1 - \nu) \frac{n\pi b}{2a} \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} \right] = 0$$

ce qui équivaut à

$$B_n = \frac{a}{n\pi} F_n \left[ \frac{1 + \nu}{1 - \nu} - \frac{n\pi b}{2a} \coth \frac{n\pi b}{2a} \right] \quad (12.87)$$

Quant à la condition relative au moment normal, elle s'écrit

$$\begin{aligned} (1 - \nu) \frac{n^2 \pi^2}{a^2} B_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} + F_n \left[ 2 \frac{n\pi}{a} \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \frac{b}{2} (1 - \nu) \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} \right] \\ = \frac{2\nu qa \sin \frac{n\pi}{2}}{Dn^2 \pi^2} \end{aligned}$$

soit, en éliminant  $B_n$  à l'aide de (12.87),

$$\left[ (3 + \nu) \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} - (1 - \nu) \frac{\frac{n\pi b}{2a}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a}} \right] \frac{n\pi}{a} F_n = \frac{2\nu q a \sin \frac{n\pi}{2}}{D n^2 \pi^2}$$

ce qui donne

$$F_n = \frac{n\pi}{a} \frac{2\nu q a^3 \sin \frac{n\pi}{2}}{D n^4 \pi^4} \frac{1}{(3 + \nu) \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} - (1 - \nu) \frac{\frac{n\pi b}{2a}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a}}}$$

et

$$A_n = \frac{2\nu q a^3 \sin \frac{n\pi}{2}}{D n^4 \pi^4} \left\{ 1 + \frac{\nu}{N_n} \left[ \left( \frac{1 + \nu}{1 - \nu} - \frac{n\pi b}{2a} \coth \frac{n\pi b}{2a} \right) \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + \frac{n\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right] \right\}$$

avec

$$N_n = (3 + \nu) \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{a} - (1 - \nu) \frac{\frac{n\pi b}{2a}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a}}$$

Il s'agit d'une série à convergence assez rapide (terme général  $\mathcal{O}(1/n^4)$ ). En première approximation, on peut ne conserver que le premier terme, car le second est nul, et pour le troisième, la valeur de  $n^4$  est 81. On obtient ainsi

$$w \approx \frac{2qa^3}{D\pi^4} \left\{ 1 + \frac{\nu}{N_1} \left[ \left( \frac{1 + \nu}{1 - \nu} - \frac{\pi b}{2a} \coth \frac{\pi b}{2a} \right) \operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} + \frac{\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{a} \right] \right\} \sin \frac{\pi x}{a} \quad (12.88)$$

Le premier terme de l'accolade représente la flexion cylindrique. Le second, dû à l'effet de Poisson, s'appelle *déformation anticlastique*. Lorsque la plaque est large ( $a$  petit devant  $b$ ), cette déformation reste confinée aux bords de la plaque, avec une profondeur de pénétration de l'ordre de  $a/\pi$ . Lorsque, au contraire, la plaque est étroite, on s'attend à retrouver des résultats comparables à ceux d'une poutre. Pour  $b \ll a$ , on a en effet

$$\begin{aligned} N_1 &\approx 3 + \nu - (1 - \nu) = 2(1 + \nu) \\ \frac{\pi b}{2a} \coth \frac{\pi b}{2a} &\approx 1 \\ \operatorname{ch} \frac{\pi b}{2a} &\approx 1 + \frac{\pi^2 y^2}{2a^2} \\ \frac{\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{a} &\approx \frac{\pi^2 y^2}{a^2} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 w &\approx \frac{2qa^3}{D\pi^4} \left\{ 1 + \frac{\nu}{2(1+\nu)} \left[ \frac{2\nu}{1-\nu} \left( 1 + \frac{\pi^2 y^2}{2a^2} \right) + \frac{\pi^2 y^2}{a^2} \right] \right\} \sin \frac{\pi x}{a} \\
 &\approx \frac{2qa^3}{D\pi^4} \left\{ \frac{1}{1-\nu^2} \left[ 1 + \nu \frac{\pi^2 y^2}{2a^2} \right] \right\} \sin \frac{\pi x}{a} \\
 &\approx \frac{2Pa^3}{\pi^4 Eb \frac{t^3}{12}} \left[ 1 + \nu \frac{\pi^2 y^2}{2a^2} \right] \sin \frac{\pi x}{a}
 \end{aligned}$$

où  $P$  est la charge totale  $qb$ . Notant que  $\chi_{xx} = \frac{\pi^2}{a^2} A_1 \sin \frac{\pi x}{a}$ , on obtient

$$w \approx \frac{2Pa^3}{\pi^4 Eb \frac{t^3}{12}} \sin \frac{\pi x}{a} + \nu \chi_{xx} \frac{y^2}{2}$$

ce qui correspond bien à la structure en  $y$  du déplacement que donne la théorie des poutres<sup>1</sup>. La solution des poutres aurait donné une flèche au centre égale à  $Pa^4/(48Eb \frac{t^3}{12})$ . Nous obtenons ici  $\pi^4/2 = 48,70$  au lieu de 48, mais ceci est dû à la troncature du développement.

## 12.15 Flexion des plaques circulaires

Les plaques circulaires s'étudient naturellement en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Les courbures s'obtiennent aisément en remarquant qu'elles sont aux rotations comme les déformations sont aux déplacements : partant des rotations  $\varphi_r$  et  $\varphi_\theta$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 \chi_{rr} &= \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} \\
 \chi_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\varphi_r}{r} \\
 \chi_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial r} - \frac{\varphi_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\varphi_\theta}{r} \right) \right] \quad (12.89)
 \end{aligned}$$

---

1. Dans le cas d'une poutre,  $\sigma_{yy} = 0$ , donc  $\varepsilon_{yy} = -\nu \varepsilon_{xx}$ , soit  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\chi_{yy} = \nu \chi_{xx}$ .

Les glissements sont les sommes des rotations et des composantes du gradient du déplacement :

$$\begin{aligned}\gamma_{rz} &= \varphi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \\ \gamma_{\theta z} &= \varphi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}\end{aligned}\quad (12.90)$$

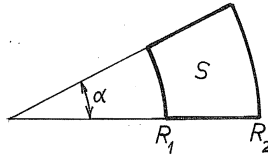


FIGURE 12.19 – Secteur de plaque

Pour obtenir les équations d'équilibre à l'intérieur et sur le contour, le plus simple est de considérer l'équilibre d'un secteur de plaque d'angle  $\alpha$  et de rayon allant de  $R_1$  à  $R_2$  (fig. 12.19), à l'aide du principe des travaux virtuels

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha \int_{R_1}^{R_2} \left\{ M_r \delta \left( \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} \right) + M_\theta \delta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\varphi_r}{r} \right) + M_{r\theta} \delta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\varphi_\theta}{r} \right) \right] \right. \\ \left. + Q_r \delta \left( \varphi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) + Q_\theta \delta \left( \varphi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - p \delta w \right\} r dr d\theta = 0\end{aligned}$$

A la variation de  $\varphi_r$  correspondent l'équation

$$-\frac{\partial}{\partial r}(rM_r) + M_\theta - \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} + rQ_r = 0 \quad \text{dans } S \quad (12.91)$$

et les conditions aux limites

$$\begin{cases} rM_r \delta \varphi_r = 0 & \text{en } r = R_1 \text{ et } r = R_2 \\ M_{r\theta} \delta \varphi_r = 0 & \text{en } \theta = 0 \text{ et } \theta = \alpha \end{cases}$$

La variation de  $\varphi_\theta$  donne l'équation

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 M_{r\theta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} M_\theta = rQ_\theta \quad \text{dans } S \quad (12.92)$$

et les conditions aux limites

$$\begin{cases} rM_{r\theta}\delta\varphi_\theta &= 0 & \text{en } R = R_1 \text{ et } r = R_2 \\ M_\theta\delta\varphi_\theta &= 0 & \text{en } \theta = 0 \text{ et } \theta = \alpha \end{cases}$$

Enfin, en variant  $w$ , on obtient

$$\frac{\partial}{\partial r}(rQ_r) + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + pr = 0 \quad \text{dans } S \quad (12.93)$$

et, aux limites,

$$\begin{cases} rQ_r\delta w &= 0 & \text{en } r = R_1 \text{ et } r = R_2 \\ Q_\theta\delta w &= 0 & \text{en } \theta = 0 \text{ et } \theta = \alpha \end{cases}$$

Dans le cadre de l'hypothèse de Kirchhoff, il convient d'introduire aux frontières les efforts tranchants de Kirchhoff et les charges de coin. Pour les obtenir, notons que sur les bords  $r = \text{cte}$ , le travail virtuel de bord

$$\int_0^\alpha (rM_r\delta\varphi_r + rM_{r\theta}\delta\varphi_\theta + rQ_r\delta w)d\theta$$

se transforme, en tenant compte des conditions de Kirchhoff

$$\varphi_r = -\frac{\partial w}{\partial r}, \quad \varphi_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad (12.94)$$

en

$$\begin{aligned} & - \int_0^\alpha \left( rM_r\delta\frac{\partial w}{\partial r} - M_{r\theta}\delta\frac{\partial w}{\partial \theta} + rQ_r\delta w \right) d\theta \\ &= [M_{r\theta}\delta w]_0^\alpha - \int_0^\alpha rM_r\delta\frac{\partial w}{\partial r}d\theta + \int_0^\alpha r \left( Q_r + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} \right) \delta w d\theta \end{aligned}$$

ce qui donne l'effort tranchant de Kirchhoff

$$K_r = Q_r + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} \quad (12.95)$$

Sur les bords  $\theta = \text{cte}$ , on obtient de même

$$K_\theta = Q_\theta + \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} \quad (12.96)$$

Quant aux charges de coin, elles gardent leur signification classique  $\Delta M_{nt}$ .

## 12.16 Déformations axisymétriques

Un problème est dit *axisymétrique* si sa géométrie, ses charges et ses fixations sont indépendantes de  $\theta$ . La symétrie impose alors que les lignes verticales avant déformation restent dans le même plan méridien, c'est-à-dire que  $\varphi_\theta$  soit nul. De plus, toute dérivée par rapport à  $\theta$  doit s'annuler. On obtient ainsi les conditions

$$M_{r\theta} = 0, \quad \chi_{r\theta} = 0, \quad \gamma_{\theta z} = 0, \quad Q_\theta = 0 \quad (12.97)$$

Les problèmes axisymétriques peuvent se traiter soit par la méthode énergétique, soit par résolution directe des équations d'équilibre. Examinons à titre d'exemple le cas d'une charge concentrée au centre de la plaque. Comme le montre la figure

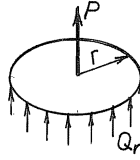


FIGURE 12.20 – Équilibre sous une charge concentrée

12.20, l'équilibre des efforts tranchants implique, en un rayon  $r$  quelconque,

$$P = -2\pi r Q_r$$

soit

$$Q_r = -\frac{P}{2\pi r} \quad (12.98)$$

L'effort tranchant admet donc au centre une singularité en  $1/r$ . L'équilibre des moments s'écrit alors

$$\frac{d}{dr}(rM_r) - M_\theta = rQ_r = -\frac{P}{2\pi} \quad (12.99)$$

Dans le cadre des hypothèses de Kirchhoff, les courbures valent

$$\chi_{rr} = \frac{d\varphi_r}{dr} = -\frac{d^2w}{dr^2}, \quad \chi_{\theta\theta} = \frac{\varphi_r}{r} = -\frac{1}{r} \frac{dw}{dr}, \quad \chi_{r\theta} = 0$$

d'où

$$M_r = -D \left( \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad M_\theta = -D \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2w}{dr^2} \right) \quad (12.100)$$

ce qui mène à l'équation

$$-\frac{d}{dr} \left( r \frac{d^2 w}{dr^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = -\frac{P}{2\pi D} \quad (12.101)$$

Il est commode de poser  $q = \frac{dw}{dr}$ , ce qui ramène l'équation ci-dessus à

$$-\frac{d}{dr} \left( r \frac{dq}{dr} \right) + \frac{q}{r} = -\frac{P}{2\pi D}$$

Cherchons d'abord des solutions de l'équation homogène sous la forme

$$q = r^\ell$$

Il vient

$$(1 - \ell^2) r^{\ell-1} = 0$$

soit  $\ell = \pm 1$ , ce qui permet d'écrire la solution générale sous la forme

$$q_h = Ar + \frac{B}{r}$$

Une solution particulière de l'équation complète peut être cherchée sous la forme

$$q_p = rf(r)$$

ce qui donne

$$f + 3rf' + r^2 f'' - f = \frac{P}{2\pi D}$$

Essayant une solution de la forme  $f' = C/r$ , on obtient la condition

$$2C = \frac{P}{2\pi D}$$

soit

$$C = \frac{P}{4\pi D}$$

Il vient ainsi

$$f(r) = \frac{P}{4\pi D} \ln r$$

et

$$q_p = \frac{P}{4\pi D} r \ln r$$



Finalement, la solution générale de l'équation complète est

$$q = q_p + q_h = \frac{P}{4\pi D} r \ln r + Ar + \frac{B}{r}$$

On en déduit par intégration

$$w = \frac{P}{4\pi D} \left( \frac{r^2}{2} \ln r - \frac{r^2}{4} \right) + A \frac{r^2}{2} + B \ln r + C^* \quad (12.102)$$

Au centre de la plaque, on doit avoir  $dw/dr = q = 0$ , ce qui implique  $B = 0$ . Supposant la plaque appuyée sur son contour, on aura  $w(R) = 0$ , ce qui donne

$$C^* = -\frac{P}{4\pi D} \left( \frac{R^2}{2} \ln R - \frac{R^2}{4} \right) - A \frac{R^2}{2}$$

et

$$\begin{aligned} w &= \frac{P}{4\pi D} \left( \frac{r^2}{2} \ln r - \frac{R^2}{2} \ln R - \frac{r^2 - R^2}{4} \right) + A \frac{r^2 - R^2}{2} \\ &= \frac{P}{4\pi D} \left( \frac{r^2}{2} \ln \frac{r}{R} + \frac{r^2 - R^2}{2} \ln R - \frac{r^2 - R^2}{4} \right) + A \frac{r^2 - R^2}{2} \\ &= \frac{P}{4\pi D} \left( \frac{r^2}{2} \ln \frac{r}{R} + \frac{R^2 - r^2}{4} \right) + F \frac{r^2 - R^2}{2} \end{aligned}$$

en modifiant la constante d'intégration. Il vient alors

$$\varphi_r = -\frac{dw}{dr} = -\frac{P}{4\pi D} r \ln \frac{r}{R} - Fr$$

et

$$M_r = D \left( \frac{d\varphi_r}{dr} + \nu \frac{\varphi_r}{r} \right) = -\frac{P}{4\pi} \left[ (1 + \nu) \ln \frac{r}{R} + 1 \right] - DF(1 + \nu)$$

La nullité de ce moment à l'appui donne donc

$$F = -\frac{P}{4\pi D(1 + \nu)}$$

d'où l'expression finale du déplacement :

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[ r^2 \ln \frac{r}{R} + \frac{3 + \nu}{2(1 + \nu)} (R^2 - r^2) \right] \quad (12.103)$$

On notera que la flèche au centre est *finie* et vaut

$$w(0) = \frac{3 + \nu}{1 + \nu} \frac{PR^2}{16\pi D} \quad (12.104)$$

On peut en déduire la rotation

$$\varphi_r = -\frac{dw}{dr} = \frac{P}{8\pi D} \left[ 2r \ln \frac{r}{R} - \frac{1 - \nu}{2(1 + \nu)} r \right]$$

ainsi que les courbures

$$\begin{aligned} \chi_{rr} &= \frac{P}{8\pi D} \left[ \frac{3 + 5\nu}{2(1 + \nu)} + 2 \ln \frac{r}{R} \right] \\ \chi_{\theta\theta} &= \frac{P}{8\pi D} \left[ -\frac{1 - \nu}{2(1 + \nu)} + 2 \ln \frac{r}{R} \right] \end{aligned}$$

et les moments

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{P}{8\pi} \left[ \frac{3 + \nu}{2} + 2(1 + \nu) \ln \frac{r}{R} \right] \\ M_\theta &= \frac{P}{8\pi} \left[ \frac{5\nu - 1}{2} + 2(1 + \nu) \ln \frac{r}{R} \right] \end{aligned} \quad (12.105)$$

On constate donc que les moments présentent une singularité logarithmique, mais que le déplacement est fini. La raison en est que

$$Pw(0) = 2(U) = \int_S \frac{12}{Et^2} (M_r^2 + M_\theta^2 - 2\nu M_r M_\theta) dS$$

et que la singularité logarithmique est de carré intégrable :

$$2\pi \int_0^R r \left( \ln \frac{r}{R} \right)^2 dr < \infty$$

donc  $w(0) < \infty$ . Ceci est propre à la théorie de Kirchhoff. Au contraire, si l'on tient compte de la déformation due à l'effort tranchant, il apparaît dans l'énergie le terme supplémentaire

$$\int_S \frac{Q_r^2}{2nGt} dS = \frac{2\pi}{2nGt} \int_0^R \left( \frac{P}{2\pi r} \right)^2 r dr = \infty$$

ce qui signifie que la flèche est infinie. Calculons la différence  $w_S$  entre ces deux solutions. Elle est, comme on a vu, de la forme

$$w_S = w^* + w^{**}$$

où  $w^*$  vérifie

$$\nabla^2 w^* = -\frac{p}{nGt}$$

tandis que  $w^{**}$ , biharmonique, est une correction éventuelle permettant de tenir compte des conditions aux limites. La solution complète  $w = w_K + w_S$  devra, sur le contour de rayon  $R$ , vérifier les conditions aux limites suivantes :

1.  $w(R) = 0$ . Comme c'est déjà le cas de  $w_K$ , il faudra que

$$w_S(R) = 0$$

2.  $M_r(R) = 0$ . Pour vérifier cette condition, il faut d'abord établir l'expression du moment. On a

$$\varphi_r = -\frac{dw}{dr} + \frac{Q_r}{nGt} = -\frac{dw}{dr} - \frac{P}{2\pi r nGt}$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned}\chi_r &= \frac{d\varphi_r}{dr} = -\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{P}{2\pi nGtr^2} \\ \chi_\theta &= \frac{\varphi_r}{r} = -\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - \frac{P}{2\pi nGtr^2}\end{aligned}$$

et

$$M_r = D(\chi_r + \nu\chi_\theta) = -D \left[ \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right] + (1-\nu) \frac{DP}{2\pi nGtr^2}$$

En  $r = R$ , la grandeur entre crochets s'annule pour  $w_K$ , si bien qu'il reste la condition

$$D \left[ \frac{d^2w_s}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw_s}{dr} \right] = \frac{(1-\nu)DP}{2\pi R^2 nGt} \quad (12.106)$$

Commençons par calculer  $w^*$ . On notera que si  $p$  était une charge répartie, on aurait, sur tout disque de rayon  $r$ ,

$$-\int_{S_r} \frac{p}{nGt} dS = \int_{S_r} \nabla^2 w^* dS = 2\pi r \frac{dw^*}{dr}$$

Il suffit, dans notre cas, de remplacer  $p$  par la mesure de Dirac  $P\delta$ , ce qui entraîne la relation

$$-\frac{P}{nGt} = 2\pi r \frac{dw^*}{dr}$$

soit

$$\frac{dw^*}{dr} = -\frac{P}{2\pi nGt} \frac{1}{r}$$

Cette équation admet la solution

$$w^* = -\frac{P}{2\pi nGt} \ln \frac{r}{R} \quad (12.107)$$

en tenant compte de la condition de nullité de  $w^*$  sur le bord. Calculons la contribution de ce  $w^*$  au premier membre de (12.106). On a

$$\frac{d^2 w^*}{dr^2} = \frac{P}{2\pi r^2 nGt}, \quad \frac{1}{r} \frac{dw^*}{dr} = -\frac{P}{2\pi r^2 nGt}$$

d'où

$$D \left[ \frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw^*}{dr} \right] = \frac{(1-\nu)DP}{2\pi r^2 nGt}$$

On constate donc que la condition (12.106) est vérifiée sans qu'il soit nécessaire de faire appel à une fonction correctrice  $w^{**}$ .

Le déplacement total est donc donné par

$$\begin{aligned} w &= w_K + w_S = w_K + w^* \\ &= \frac{P}{8\pi D} \left[ r^2 \ln \frac{r}{R} + \frac{3+\nu}{2(1+\nu)} (R^2 - r^2) \right] - \frac{P}{2\pi nGt} \ln \frac{r}{R} \\ &= \frac{PR^2}{8\pi D} \left[ \left( \frac{r^2}{R^2} - \frac{\lambda^2}{R^2} \right) \ln \frac{r}{R} + \frac{3+\nu}{2(1+\nu)} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right] \end{aligned}$$

avec

$$\lambda = \sqrt{\frac{2}{3n} \frac{t^2}{1-\nu}} \approx t$$

Au voisinage de l'origine, on peut écrire

$$\frac{8\pi D}{\pi R^2} w \approx \frac{3+\nu}{2(1+\nu)} - \frac{\lambda^2}{R^2} \ln \frac{r}{R}$$

et le second terme égale le premier pour

$$\ln \frac{r}{R} = -\frac{3+\nu}{2(1+\nu)} \frac{R^2}{\lambda^2}$$

soit

$$\frac{r}{R} = \exp\left(-\frac{3+\nu}{2(1+\nu)} \frac{R^2}{\lambda^2}\right)$$

ou encore

$$\frac{r}{\lambda} = \frac{R}{\lambda} \exp\left(-\frac{3+\nu}{2(1+\nu)} \frac{R^2}{\lambda^2}\right)$$

Posant

$$x = \sqrt{\frac{3+\nu}{2(1+\nu)}} \frac{r}{\lambda}, \quad X = \sqrt{\frac{3+\nu}{2(1+\nu)}} \frac{R}{\lambda}$$

on obtient

$$x = X e^{-X^2}$$

Le maximum du second membre a lieu pour

$$0 = \frac{d}{dX} (X e^{-X^2}) = (1 - 2X^2) e^{-X^2}$$

soit pour  $X = 1/\sqrt{2}$ . Il vaut 0,4289. Ainsi, le rayon  $r_0$  où la correction due à l'effort tranchant égale la solution de Kirchhoff vérifie

$$\frac{r_0}{\lambda} \leq 0,4289 \sqrt{\frac{2(1+\nu)}{3+\nu}} \approx 0,4$$

c'est-à-dire que les différences par rapport à la solution de Kirchhoff ne sont significatives qu'à une distance de la charge de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la plaque.

## 12.17 Exercices

**Exercice 46** *Étudier une plaque circulaire soumise à une charge uniformément répartie, et simplement appuyée sur son contour (théorie de Kirchhoff).*

**Exercice 47** *Même problème dans le cas d'un contour encastré.*

**Exercice 48** *Étudier, dans le cadre de la théorie de Kirchhoff, le cas d'une plaque circulaire encastrée à son contour et soumise à une charge concentrée.*



## Chapitre 13

# Théorèmes énergétiques extérieurs

### 13.1 Préambule

Les théorèmes énergétiques extérieurs sont ici considérés comme des applications particulières des principes variationnels. Les énoncés ainsi obtenus sont très généraux et très précis, excluant en particulier les nombreuses équivoques qui peuvent naître d'une approche par trop simplifiée.

### 13.2 Théorème de Castigliano

Nous considérerons dans ce qui suit des variations de contraintes gouvernées par un ensemble discret de paramètres  $g_r$ , que nous appellerons *charges généralisées*. Ces variations auront donc la forme

$$\delta\sigma_{ij} = \sum_r \sigma_{ij}^r \delta g_r \quad (13.1)$$

Nous ne ferons aucune hypothèse à priori sur l'admissibilité statique des *modes de contrainte*  $\sigma_{ij}^r$ . Nous utiliserons la fonctionnelle de Hellinger-Reissner

$$\int_V \left[ \sigma_{ij} \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) - \Phi(\sigma) - \bar{f}_i u_i \right] dV - \int_{S_2} \bar{t}_i u_i dS - \int_{S_1} t_i (u_i - \bar{u}_i) dS$$

Les variations de contraintes considérées conduisent à une variation du premier terme que l'on peut mettre sous la forme

$$\sum_r \delta g_r \int_V \sigma_{ij}^r \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) dV = \sum_r \delta g_r q_r \quad (13.2)$$

où apparaissent les *déplacements généralisés*  $q_r$  *conjugués aux charges*  $g_r$ , donnés par

$$q_r = \int_V \sigma_{ij}^r \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) dV \quad (13.3)$$

Cette définition, qui peut paraître quelque peu artificielle, se simplifie par une intégration par parties : on a en effet

$$q_r = \int_S n_j \sigma_{ij}^r u_i dS - \int_V u_i D_j \sigma_{ij}^r dV$$

et, en faisant apparaître les charges liées au champ de contrainte  $\sigma_{ij}^r$ ,

$$\begin{cases} t_i^r &= n_j \sigma_{ij}^r & \text{sur } S \\ f_i^r &= -D_j \sigma_{ij}^r & \text{dans } V \end{cases} \quad (13.4)$$

on obtient

$$q_r = \int_S t_i^r u_i dS + \int_V f_i^r u_i dV \quad (13.5)$$

c'est-à-dire que  $q_r$  s'identifie au *travail d'une variation*  $\delta g_r = 1$ .

Appliquant à présent une variation de contrainte de la forme (13.1) dans le principe de Hellinger-Reissner, on obtient les équations de compatibilité globales

$$q_r = \int_V \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij}^r dV \quad (13.6)$$

qui constituent le *théorème de Castigliano*. On écrit souvent [59, 12, 26, 68, 67] les relations (13.6) sous la forme condensée mais beaucoup moins précise

$$q_r = \frac{\partial \Psi}{\partial g_r} \quad (13.7)$$

où  $\Psi$  est l'énergie complémentaire. Le théorème de Castigliano est largement appliqué pour le calcul des déplacements généralisés, comme nous allons l'illustrer sur un certain nombre d'exemples simples relatifs aux poutres.



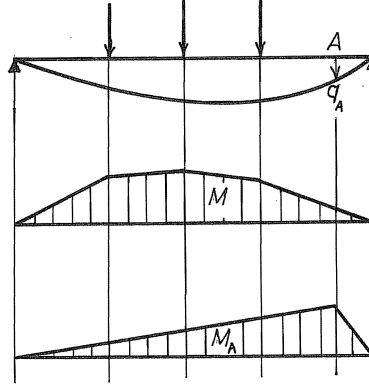


FIGURE 13.1 – Calcul du déplacement du point A.

### 13.2.1 Déplacement d'un point d'une poutre

Soit (*fig.* 13.1) une poutre arbitrairement chargée, dont on désire connaître le déplacement  $q_A$  en un point. Connaissant le diagramme des moments  $M$  que subit la poutre, il suffit de déterminer en outre le diagramme des moments  $M_A$  correspondant à une charge  $g_A = 1$  au point A. Alors, comme

$$\Psi = \int_0^\ell \frac{M^2}{2EI} dx$$

on aura

$$q_A = \int_0^\ell \frac{M}{EI} M_A dx$$

### 13.2.2 Même problème pour une poutre hyperstatique

Lorsque la poutre est hyperstatique, il existe *plusieurs* variations du moment  $M_A$  capables d'équilibrer la charge unitaire en A et dont les déplacements généralisés se limitent à  $q_A$  du fait des fixations. Dans la figure 13.2,  $M_{A_1}$  est obtenu en posant que le moment est nul sur l'appui central. Le déplacement généralisé correspondant à cet état est

$$q_A - q_C \frac{c}{b+c} - q_D \frac{b}{b+c} = q_A$$

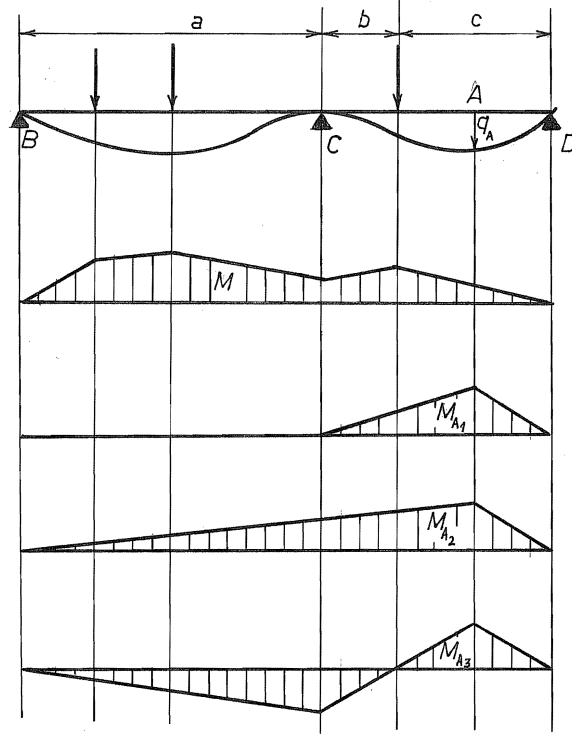


FIGURE 13.2 – Dans le cas d’une poutre hyperstatiques, plusieurs diagrammes de moments  $M_A$  sont possibles.

De même, le déplacement généralisé correspondant à  $M_{A_2}$  est

$$q_A - q_B \frac{c}{a+b+c} - q_D \frac{a+b}{a+b+c} = q_A$$

Enfin, le déplacement généralisé correspondant à  $M_{A_3}$  est de la forme

$$q_A - \alpha q_B - \beta q_c - \gamma q_D = q_A$$

On a donc

$$q_A = \int_0^\ell \ell \frac{M}{EI} M_{A_1} dx = \int_0^\ell \ell \frac{M}{EI} M_{A_2} dx \int_0^\ell \ell \frac{M}{EI} M_{A_3} dx$$

Cette observation permet, dans bien des cas, d'obtenir de notables simplifications. Dans le cas présent, les deux premiers champs de moments sont nettement plus simples que le troisième.

### 13.2.3 Déplacements pondérés

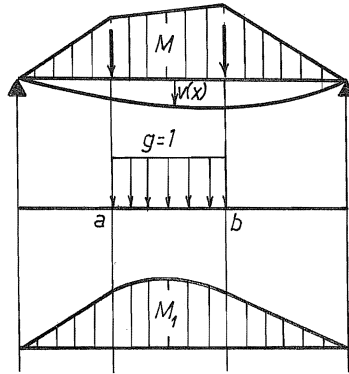


FIGURE 13.3 – Déplacement pondéré.

Soit (fig. 13.3) une poutre soumise à une sollicitation quelconque. En considérant une charge répartie entre deux points  $a$  et  $b$  de la poutre, on obtiendra le déplacement généralisé

$$q = \int_a^b v(x) dx$$

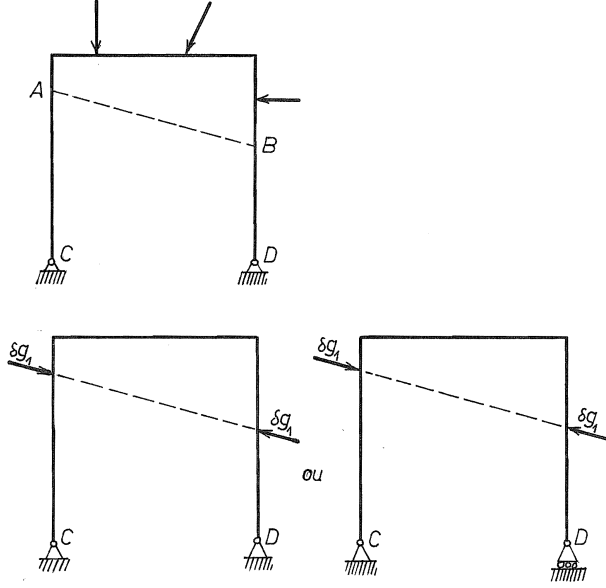
dont la valeur sera

$$q = \int_0^\ell \frac{M}{EI} M_1 dx$$

où  $M_1$  est un champ de moments équilibrant la charge répartie considérée. On peut obtenir de la sorte de nombreuses espèces de déplacements pondérés.

### 13.2.4 Rapprochement de deux points $A$ et $B$ .

Supposons que l'on veuille connaître le rapprochement de deux points  $A$  et  $B$  du portique représenté en figure 13.4. Ce déplacement  $q_{AB}$  est conjugué au

FIGURE 13.4 – Rapprochement de deux points  $A$  et  $B$  de la structure

couple de charges  $\delta g_1$  représentées dans la même figure et

$$q_{AB} = \frac{\partial \Psi}{\partial g_1}$$

Ici encore, on peut, pour le calcul des  $\sigma_{ij}^1$ , rendre au préalable le système iso-statique, par exemple en remplaçant l'articulation en  $D$  par un appui simple.

### 13.2.5 Formules de Navier-Bresse [12, 60, 67]

Considérons une poutre à faible courbure, soumise à une sollicitation plane. L'énergie complémentaire de déformation s'écrit

$$\Psi = \int_0^\ell \left( \frac{N^2}{2E\Omega} + \frac{T^2}{2G\Omega^*} + \frac{M^2}{2EI} \right) ds$$

où  $ds$  est l'élément d'abscisse curviligne le long de la fibre moyenne,  $\Omega$ , la section,  $\Omega^*$ , la section réduite de cisaillement et  $I$ , l'inertie. Dans tout ceci, nous ferons

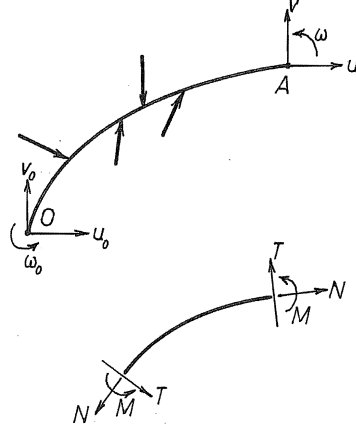


FIGURE 13.5 – Conventions relatives aux signes des efforts et moments.

les conventions de signe indiquées en figure 13.5. Les déplacements  $u_0, v_0, \omega_0$  sont imposés à l'origine et on désire connaître les déplacements en  $A$ . Pour les déterminer, on considère les états de contrainte correspondants à  $\delta F_{x_A}$ ,  $\delta F_{y_A}$  et  $\delta M_A$ .

**État dû à  $\delta g_1 = \delta F_{x_A}$**

La figure 13.6 montre que

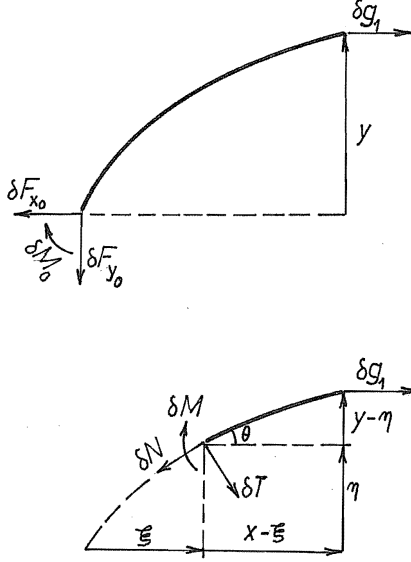
$$\begin{cases} \delta F_{x_0} &= \delta g_1 \\ \delta F_{y_0} &= 0 \\ \delta M_0 &= -y\delta g_1 \end{cases}$$

Le déplacement conjugué est donc donné par

$$\delta \mathcal{T} = -\delta F_{x_0} u_0 - \delta F_{y_0} v_0 - \delta M_0 \omega_0 + \delta F_{x_A} u_A = \delta g_1 (u_A - u_0 + y\omega_0)$$

c'est-à-dire

$$q_1 = u_A - u_0 + y\omega_0$$

FIGURE 13.6 – État dû à  $\delta g_1 = \delta F_{x_A}$ .

Par ailleurs, le champ de contrainte est facile à calculer :

$$\begin{aligned}\delta N &= \delta g_1 \cos \theta \\ \delta T &= -\delta g_1 \sin \theta \\ \delta M &= -\delta g_1 (y - \eta)\end{aligned}$$

ce qui donne la première formule de Navier-Bresse

$$u_A = u_0 - \omega_0 y + \int_0^\ell \frac{N \cos \theta}{E\Omega} ds - \int_0^\ell \frac{T \sin \theta}{G\Omega^*} ds - \int_0^\ell \frac{M(y - \eta)}{EI} ds \quad (13.8)$$

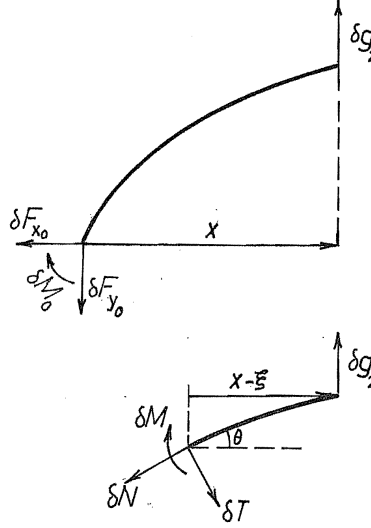
**État dû à  $\delta g_2 = \delta F_{y_A}$**

On voit sur la figure 13.7 que

$$\delta F_{x_0} = 0, \quad \delta F_{y_0} = \delta g_2, \quad \delta M_0 = x \delta g_2$$

d'où

$$\delta \mathcal{T} = -\delta F_{x_0} u_0 - \delta F_{y_0} v_0 - \delta M_0 \omega_0 + \delta F_{y_A} v_A = \delta g_2 (v_A - v_0 - x \omega_0)$$

FIGURE 13.7 – État dû à  $\delta g_2 = \delta F_{y_A}$ .

soit

$$q_2 = v_A - v_0 - x\omega_0$$

Le champ de contrainte correspondant sera

$$\begin{aligned}\delta N &= \delta g_2 \sin \theta \\ \delta T &= \delta g_2 \cos \theta \\ \delta M &= (x - \xi) \delta g_2\end{aligned}$$

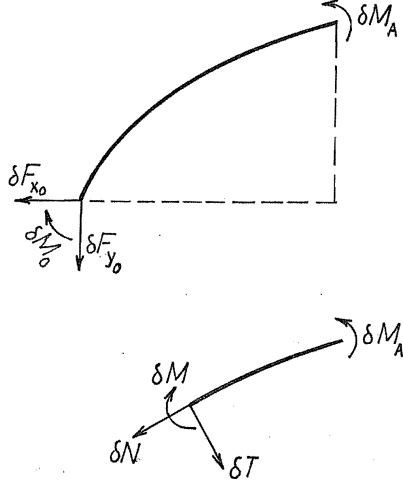
ce qui donne la deuxième formule de Navier-Bresse

$$v_A = v_0 + \omega_0 x + \int_0^\ell \frac{N \sin \theta}{E\Omega} ds + \int_0^\ell \frac{T \cos \theta}{G\Omega^*} ds - \int_0^\ell \frac{M(x - \xi)}{EI} ds \quad (13.9)$$

**État dû à  $\delta g_3 = \delta M_A$**

On voit sur la figure 13.8 que

$$\delta F_{x_0} = 0, \quad \delta F_{y_0} = 0, \quad \delta M_0 = \delta M_A$$

FIGURE 13.8 – État dû à  $\delta M_A$ 

d'où

$$q_3 = \omega_A - \omega_0$$

D'autre part, le champ de contrainte correspondant est

$$\delta M = \delta M_A, \quad \delta N = 0, \quad \delta T = 0$$

ce qui mène à la troisième formule de Navier-Bresse

$$\omega_A = \omega_0 + \int_0^\ell \frac{M}{EI} ds \quad (13.10)$$

Ces formules sont souvent utilisées pour le calcul des déformations des poutres. Lorsque celles-ci sont suffisamment élancées, si  $F$  est l'ordre de grandeur des efforts  $N$  et  $T$ ,  $M$  est de l'ordre de  $F\ell$ ; on a par ailleurs, si  $\rho$  est le rayon de giration de la section de la poutre,

$$\begin{aligned} \Omega &= \mathcal{O}(\rho^2), & \Omega^* &= \mathcal{O}(\rho^2), & I &= \mathcal{O}(\rho^4) \\ \frac{N}{\Omega} &= \mathcal{O}\left(\frac{F}{\rho^2}\right), & \frac{T}{\Omega^*} &= \mathcal{O}\left(\frac{F}{\rho^2}\right), & \frac{M \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}}{I} &= \mathcal{O}\left(\frac{F\ell^2}{\rho^4}\right) \end{aligned}$$



ce qui montre que les déformations dues au moment sont prépondérantes. On obtient alors, en faisant formellement tendre  $\Omega$  et  $\Omega^*$  vers l'infini dans les formules précédentes, les expressions simplifiées dites de Navier :

$$\begin{aligned} u &\approx u_0 - \omega_0 y + \int_0^\ell \frac{M(y - \eta)}{EI} ds \\ v &\approx v_0 + \omega_0 x + \int_0^\ell \frac{M(x - \ell)}{EI} ds \\ \omega &\approx \omega_0 + \int_0^\ell \frac{M}{EI} ds \end{aligned} \quad (13.11)$$

### 13.3 Systèmes hyperstatiques - Théorème de Menabrea

On appelle *état d'autocontrainte* un état de contrainte auquel correspond un déplacement généralisé confiné à la partie  $S_1$  de la surface où sont établies les fixations. Dans le cas fréquent où les déplacements imposés sont nuls (absence de tassement d'appuis), le déplacement généralisé est d'ailleurs nul pour la solution cherchée. Ainsi, pour une poutre sur trois appuis, le champ de moment

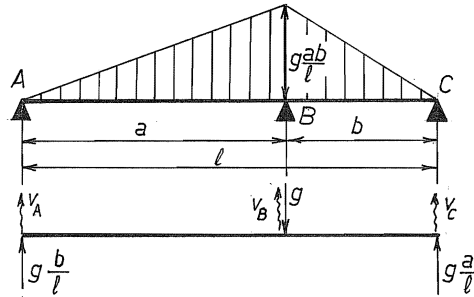


FIGURE 13.9 – État d'autocontrainte de la poutre sur trois appuis.

représenté en figure 13.9 est un état d'autocontrainte, puisqu'il correspond au système de charges composé d'une charge  $g$  vers le bas en  $B$ , d'une charge  $gb/l$  en  $A$  et d'une charge  $ga/l$  en  $C$ , ces dernières vers le haut. Le déplacement

généralisé correspondant, donné par

$$q = \frac{b}{\ell}v_A - v_B + \frac{a}{\ell}v_C$$

est en effet un pur déplacement d'appuis.

L'existence d'états d'autocontrainte est caractéristique de l'hyperstaticité du système. Il est intéressant de noter qu'il est possible de les interpréter en termes de *coupures*. Ainsi, l'état considéré ci-dessus est le diagramme des moments de la poutre dont on aurait coupé l'appui central, celui-ci étant remplacé par sa réaction. Par cette coupure, on a défini **un système isostatique de référence**  $S_0$  – ici, la poutre sur deux appuis d'extrémité. C'est ainsi que l'on aurait pu, *par exemple*, mettre une rotule en un point  $D$  de la travée  $BC$ , comme l'illustre la figure 13.10. L'état d'autocontrainte correspondant eût alors correspondu à

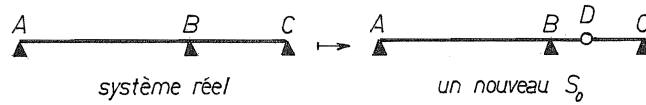


FIGURE 13.10 – Un autre système isostatique de référence.

un couple de moments appliqué à la rotule, voir figure 13.11. C'est exactement

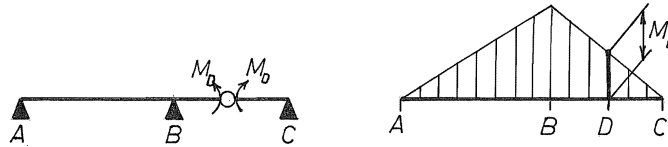


FIGURE 13.11 – Le nouveau système isostatique de référence conduit au *même* état d'autocontrainte.

le même état d'autocontrainte que ci-dessus, à un facteur éventuel près. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que l'on retrouverait un état de contrainte identique en coupant l'appui  $A$  ou l'appui  $C$  ou encore, en faisant une quelconque coupure des moments : le système considéré n'admet qu'*un seul* état d'autocontrainte indépendant.

Considérons à présent une poutre continue sur quatre appuis  $A, B, C, D$  (fig. 13.12). Une manière de le rendre isostatique consiste à supprimer les deux appuis  $C$  et  $D$ . En appliquant une charge unitaire en  $C$  et en  $D$ , on obtient *deux*

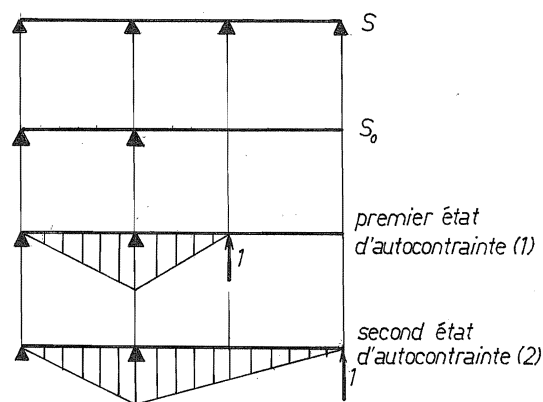


FIGURE 13.12 – Poutre sur quatre appuis. Une première façon de la rendre isostatique.

états d'autocontrainte indépendants. Un autre système isostatique s'obtient en plaçant des rotules au droit des appuis  $B$  et  $C$ , comme l'illustre la figure 13.13.

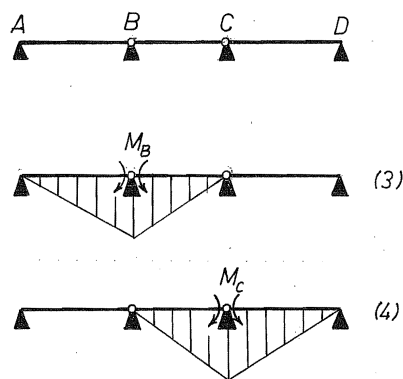


FIGURE 13.13 – Poutre sur quatre appuis. Un autre système isostatique de référence.

En appliquant de couples de moments à ces deux rotules, on obtient apparemment deux autres états d'autocontrainte. Mais ces deux nouveaux états sont

des combinaisons des précédents, comme le montre clairement la figure 13.14. Il

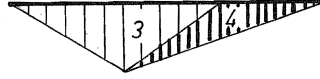


FIGURE 13.14 – L'état d'autocontrainte 2 est une combinaison des états 3 et 4.

n'y a, en fait, que *deux* états d'autocontrainte indépendants pour ce système.

Ces exemples montrent le bien-fondé de la définition suivante : on appelle *degré d'hyperstaticité*  $h$  d'un système élastique le *nombre d'états d'autocontrainte linéairement indépendants de ce système*. Cette définition, tout-à-fait générale, inclut aussi bien l'hyperstaticité intérieure que l'hyperstaticité extérieure. Ainsi, le cadre de la figure 13.15 est trois fois intérieurement hyperstatique (il s'agit d'hyperstaticité cinématique : le corps est doublement connexe).

Un système isostatique de référence s'obtient en plaçant des rotules en  $B$ ,  $C$  et  $D$  et on en déduit aisément les trois modes d'autocontrainte représentés. La caractéristique de modes d'autocontrainte purement intérieurs comme ceux-ci est que les déplacements généralisés correspondants sont toujours nuls.

La notion de mode d'autocontrainte sert de fondement à une méthode de résolution des systèmes hyperstatiques que l'on appelle *méthode des forces*. Son principe est le suivant. Les équations d'équilibre, sous les charges de volume et les tractions de surface sur  $S_2$ , admettent la solution générale

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sum_{k=1}^h \hat{\sigma}_{ij}^k \hat{g}_k \quad (13.12)$$

où  $\sigma_{ij}^0$  représente une *solution particulière* des équations d'équilibre sous les charges données, tandis que les  $\hat{\sigma}_{ij}^k$  sont les états d'autocontrainte, gouvernés par les charges généralisées  $\hat{g}_k$ <sup>1</sup> que l'on appelle, en la circonstance, *inconnues hyperstatiques*. La solution particulière s'obtient dans un système isostatique de référence *quelconque*, éventuellement même différent du système ayant présidé à la détermination des états d'autocontrainte. Il est clair que les coupures ayant mené à la solution particulière ont rompu la compatibilité, mais celle-ci pourra être rétablie en faisant usage du principe de Hellinger-Reissner, où la variation des contraintes a précisément pour objet de l'obtenir. Le champ  $\sigma_{ij}^0$  étant choisi

1. Les accents circonflexes sont destinés à marquer qu'il s'agit d'états d'autocontrainte.

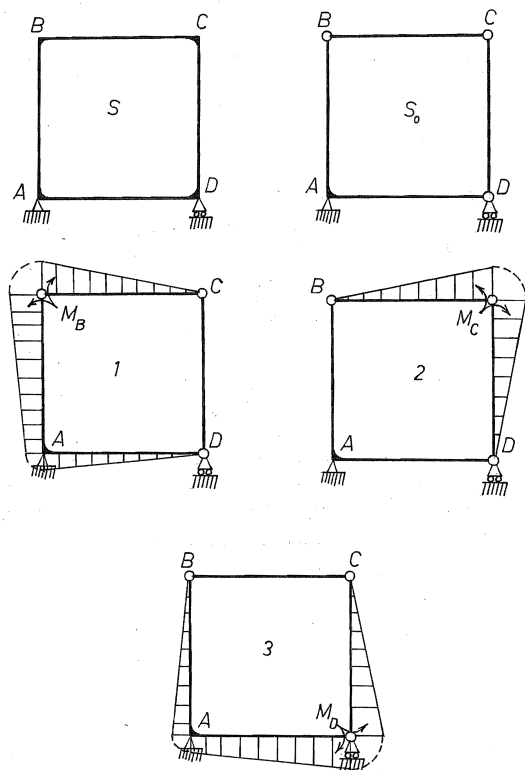


FIGURE 13.15 – Cadre.

une fois pour toutes, on aura

$$\delta\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^h \hat{\sigma}_{ij}^k \delta\hat{g}_k \quad (13.13)$$

Par définition, les déplacements généralisés conjugués aux états d'autocontrainte sont toujours imposés – le plus souvent nuls, d'ailleurs. Nous les noterons donc  $\bar{q}_k$ , conformément à nos conventions générales. L'application particulière du

principe de Hellinger-Reissner à ce problème mène à la condition

$$\sum_{k=1}^h \delta \hat{g}_k \int_V \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \hat{\sigma}_{ij}^k dV = \sum_{k=1}^h \bar{q}_k \delta \hat{g}_k$$

qui entraîne, vu l'arbitraire des  $\delta \hat{g}_k$ , les équations

$$\int_V \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \hat{\sigma}_{ij}^k dV = \bar{q}_k \quad (13.14)$$

constituant le *théorème de Menabrea* sous sa forme la plus générale. Le même résultat aurait d'ailleurs pu être déduit du principe du minimum de l'énergie complémentaire totale, car les variations de contrainte considérées sont statiquement admissibles.

## 13.4 Exemples d'application des deux théorèmes précédents

### 13.4.1 Arc à deux articulations

A titre d'illustration, proposons-nous de calculer le déplacement de la clef d'un arc à deux articulations soumis à une charge verticale appliquée sur ladite clef (*fig.* 13.16). On commence par chercher une solution particulière, qui s'obtient le plus simplement en plaçant une rotule sous la charge. Il est aisé de se rendre compte que cette solution sera

$$M_0 = \frac{P}{2 \cos \alpha} y$$

$y$  étant représenté sur la figure. Quant à l'état d'autocontrainte, on l'obtient aisément en remplaçant l'appui  $C$  par un appui à rouleaux. Nous noterons  $\hat{M}$  le champ de moment correspondant. Le déplacement conjugué est

$$\hat{q} = u_C - u_A$$

nul dans la solution. Cette dernière est de la forme

$$M = M_0 + \hat{g} \hat{M}$$

$\hat{g}$  étant déterminé par la condition

$$\int_0^\ell \frac{M \hat{M}}{EI} ds = \int_0^\ell \frac{M_0 \hat{M}}{EI} ds + \hat{g} \int_0^\ell \frac{\hat{M}^2}{EI} ds = 0$$

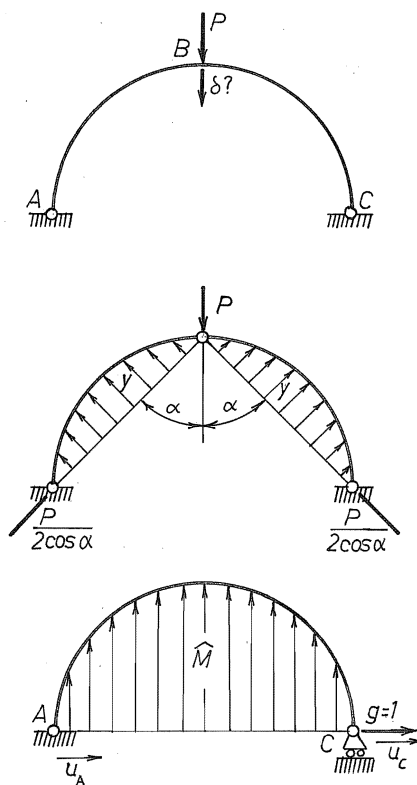


FIGURE 13.16 – Arc à deux articulations.

soit

$$\hat{g} = - \frac{\int_0^\ell \frac{M_0 \hat{M}}{EI} ds}{\int_0^\ell \frac{\hat{M}^2}{EI} ds}$$

L'état de contrainte étant déterminé, on calcule le déplacement par le théorème de Castigliano. A cet effet, il suffit de connaître une distribution de moment équilibrant une charge unitaire à la clef. Une telle distribution est donnée par

$$\mu(s) = \frac{M_0}{P}$$

Par le théorème de Castigliano, on a donc

$$u = \int_0^\ell \frac{M\mu}{EI} ds = \frac{1}{P} \int_0^\ell \frac{MM_0}{EI} ds$$

### 13.4.2 Coupures généralisées

Pour illustrer le fait que la notion de coupure peut être parfois inattendue, considérons le système à trois barres de la figure 13.17, soumis à une charge  $P$ . Les équations d'équilibre des trois barres s'écrivent

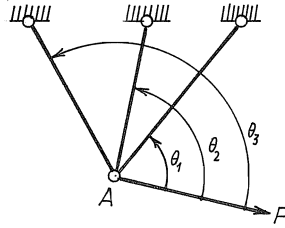


FIGURE 13.17 – Système à trois barres.

$$\begin{cases} N_1 \cos \theta_1 + N_2 \cos \theta_2 + N_3 \cos \theta_3 + P = 0 \\ N_1 \sin \theta_1 + N_2 \sin \theta_2 + N_3 \sin \theta_3 = 0 \end{cases}$$

Pour obtenir des solutions particulières à ces équations, on peut poser  $N_1 = 0$ ,  $N_2 = 0$  ou encore  $N_3 = 0$ , ce qui revient à couper la barre correspondante. Mais on peut aussi bien écrire par exemple  $N_1 = kN_2$ , avec  $k$  quelconque. C'est ce que l'on appelle une coupure généralisée, pour la simple raison que sa réalisation technique ne saute pas aux yeux. Elle est cependant possible à l'aide d'un système hydraulique composé de deux vérins dont les pistons ont des surfaces  $kS$  pour la barre 1 et  $S$  pour la barre 2 (*fig.* 13.18). Une connexion hydraulique garantit l'égalité des pressions, d'où

$$N_1 = kSp, \quad N_2 = Sp$$

ce qui implique  $N_1 = kN_2$ . Dans ces conditions, la solution particulière vérifie

$$\begin{cases} N_{2_0}(k \cos \theta_1 + \cos \theta_2) + N_{3_0} \cos \theta_3 = -P \\ N_{2_0}(k \sin \theta_1 + \sin \theta_2) + N_{3_0} \sin \theta_3 = 0 \end{cases}$$



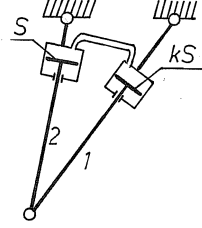


FIGURE 13.18 – Coupure généralisée obtenue à l'aide de vérins.

ce qui donne successivement

$$N_{3_0} = -\frac{N_{2_0}(k \sin \theta_1 + \sin \theta_2)}{\sin \theta_3}$$

et

$$N_{2_0}[k \cos \theta_1 + \cos \theta_2 - (k \sin \theta_1 + \sin \theta_2) \cotg \theta_3] = -P$$

ce qui permet de calculer  $N_{2_0}$ ,  $N_{3_0}$  et enfin  $N_{1_0}$ . Bien entendu, cette solution particulière n'est pas la plus simple. Aussi allons-nous en chercher une qui, elle, l'est particulièrement. Elle consiste à imposer la condition

$$N_{1_0} = -N_{2_0} \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1}$$

ce qui donne directement

$$N_{3_0} = -\frac{P}{\cos \theta_3}$$

et

$$N_{2_0}(\sin \theta_2 - \tg \theta_1 \cos \theta_2) = -N_{3_0} \sin \theta_3 = P \tg \theta_3$$

Quant à l'état d'autocontrainte, il doit vérifier la double condition

$$\begin{cases} \hat{N}_1 \cos \theta_1 + \hat{N}_2 \cos \theta_2 + \hat{N}_3 \cos \theta_3 &= 0 \\ \hat{N}_1 \sin \theta_1 + \hat{N}_2 \sin \theta_2 + \hat{N}_3 \sin \theta_3 &= 0 \end{cases}$$

On peut poser, par exemple,  $\hat{N}_3 = 1$ , ce qui donne

$$\begin{cases} \hat{N}_1 \cos \theta_1 + \hat{N}_2 \cos \theta_2 &= -\cos \theta_3 \\ \hat{N}_1 \sin \theta_1 + \hat{N}_2 \sin \theta_2 &= -\sin \theta_3 \end{cases}$$

Il est aisé de voir que la solution est unique : le système est une fois hyperstatique. La solution a donc la forme

$$N_1 = N_{1_0} + \hat{g}\hat{N}_1, \quad N_2 = N_{2_0} + \hat{g}\hat{N}_2, \quad N_3 = N_{3_0} + \hat{g}\hat{N}_3$$

avec la condition

$$\int_0^{\ell_1} \frac{(N_{1_0} + \hat{g}\hat{N}_1)\hat{N}_1}{E_1\Omega_1} dx + \int_0^{\ell_2} \frac{(N_{2_0} + \hat{g}\hat{N}_2)\hat{N}_2}{E_2\Omega_2} dx + \int_0^{\ell_3} \frac{(N_{3_0} + \hat{g}\hat{N}_3)\hat{N}_3}{E_3\Omega_3} dx = 0$$

soit

$$\hat{g} = - \frac{\int_0^{\ell_1} \frac{N_{1_0}\hat{N}_1}{E_1\Omega_1} dx + \int_0^{\ell_2} \frac{N_{2_0}\hat{N}_2}{E_2\Omega_2} dx + \int_0^{\ell_3} \frac{N_{3_0}\hat{N}_3}{E_3\Omega_3} dx}{\int_0^{\ell_1} \frac{\hat{N}_1^2}{E_1\Omega_1} dx + \int_0^{\ell_2} \frac{\hat{N}_2^2}{E_2\Omega_2} dx + \int_0^{\ell_3} \frac{\hat{N}_3^2}{E_3\Omega_3} dx}$$

### 13.5 Théorème de Clapeyron extérieur

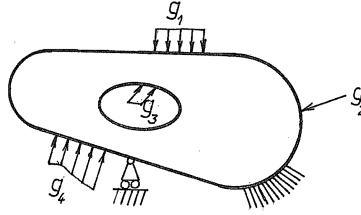


FIGURE 13.19 – Théorème de Clapeyron extérieur.

Proposons-nous de calculer l'énergie complémentaire en termes des charges et déplacements généralisés (*fig.* 13.19). Les forces appliquées, gouvernées par des charges généralisées d'intensité  $g_1, \dots, g_n$ , peuvent être équilibrées par des champs de contrainte *particuliers*  $\sigma_{ij}^1, \dots, \sigma_{ij}^n$  (non nécessairement compatibles), auxquels il convient d'ajouter une combinaison des  $h$  états d'autocontrainte  $\hat{\sigma}_{ij}^1, \dots, \hat{\sigma}_{ij}^h$ . On a donc en général

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^n \sigma_{ij}^k g_k + \sum_{\ell=1}^h \hat{\sigma}_{ij}^\ell \hat{g}_\ell \quad (13.15)$$

Lorsque le matériau a des propriétés homogènes de degré 1, on a

$$\Phi(\sigma) = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij}$$

d'où, par intégration,

$$\begin{aligned} \Psi(\sigma) &= \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij} dV \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n g_k \int_V \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij}^k dV + \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^h \hat{g}_\ell \int_V \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \hat{\sigma}_{ij}^\ell dV \end{aligned}$$

soit, en faisant appel aux théorèmes de Castigliano et de Menabrea,

$$\Psi(\sigma) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n g_k q_k + \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^h \hat{g}_\ell \bar{q}_\ell \quad (13.16)$$

C'est le théorème de Clapeyron extérieur.

## 13.6 Théorème de réciprocité de Betti

Considérons (*fig.* 13.20) un corps élastique soumis à deux systèmes de charges différents, caractérisés par les charges généralisées  $g_r^{(1)}$  pour le premier et  $g_r^{(2)}$  pour le second. Chacun peut en outre avoir des déplacements imposés,  $\bar{q}_\ell^{(1)}$  pour le premier et  $\bar{q}_\ell^{(2)}$  pour le second. Calculons la valeur du travail croisé

$$\mathcal{T}_{12} = \sum_{k=1}^n g_k^{(1)} q_k^{(2)} + \sum_{\ell=1}^h \hat{g}_\ell^{(1)} \bar{q}_\ell^{(2)}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{12} &= \sum_{k=1}^n g_k^{(1)} \int_V \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \right)^{(2)} \sigma_{ij}^{k(1)} dV + \sum_{\ell=1}^h \hat{g}_\ell^{(1)} \int_V \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \right)^{(2)} \hat{\sigma}_{ij}^{\ell(1)} dV \\ &= \int_V \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \right)^{(2)} \sigma_{ij}^{(1)} dV \\ &= \int_V C_{ijpq}^{-1} \sigma_{ij}^{(1)} \sigma_{pq}^{(2)} dV \end{aligned}$$

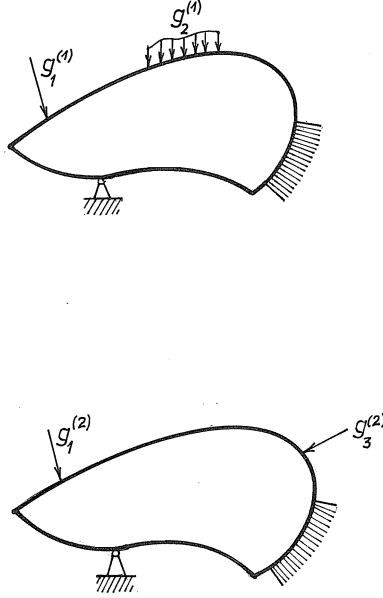


FIGURE 13.20 – Théorème de réciprocité de Betti.

en supposant le corps linéairement élastique. On obtiendrait de la même façon

$$\mathcal{T}_{21} = \sum_{k=1}^n g_k^{(2)} q_k^{(1)} + \sum_{\ell=1}^h \hat{g}_\ell^{(2)} \bar{q}_\ell^{(1)} = \int_V C_{ijpq}^{-1} \sigma_{ij}^{(2)} \sigma_{pq}^{(1)} dV$$

Vu la symétrie des relations de Hooke, on en déduit  $\mathcal{T}_{12} = \mathcal{T}_{21}$ , soit explicitement

$$\sum_{k=1}^n g_k^{(1)} q_k^{(2)} + \sum_{\ell=1}^h \hat{g}_\ell^{(1)} \bar{q}_\ell^{(2)} = \sum_{k=1}^n g_k^{(2)} q_k^{(1)} + \sum_{\ell=1}^h \hat{g}_\ell^{(2)} \bar{q}_\ell^{(1)} \quad (13.17)$$

C'est le *théorème de réciprocité de Betti*. On l'énonce souvent en supposant les déplacements imposés nuls, ce qui donne

$$\sum_{k=1}^n g_k^{(1)} q_k^{(2)} = \sum_{k=1}^n g_k^{(2)} q_k^{(1)} \quad (13.18)$$

## 13.7 Théorème de réciprocité de Maxwell

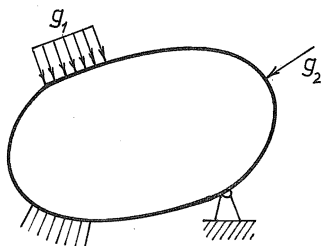


FIGURE 13.21 – Théorème de réciprocité de Maxwell.

Considérons (*fig.* 13.21) le cas de deux charges généralisées  $g_1$  et  $g_2$ , sans tassement d'appui, et supposons que

$$\begin{cases} g_1^{(1)} = 1, & g_2^{(1)} = 0 \\ g_1^{(2)} = 0, & g_2^{(2)} = 1 \end{cases}$$

On a alors, par le théorème de Betti,

$$q_2^{(1)} = q_1^{(2)}$$

C'est le *théorème de réciprocité de Maxwell* : le déplacement généralisé  $q_2$  sous la charge  $g_1 = 1$  est égal au déplacement généralisé  $q_1$  sous la charge  $g_2 = 1$ .



# Chapitre 14

## Diagrammes d'influence

### 14.1 Notion de diagramme d'influence

Dans un certain nombre d'applications pratiques, on s'intéresse à un *effet* particulier : déplacement généralisé, force généralisée, pour un grand nombre de cas de charge. L'exemple le plus typique est celui du pont où en défilant, un train prend toutes les positions possibles sur le tablier, chacune correspondant à une sollicitation particulière. Le diagramme d'influence est précisément la représentation de la grandeur de l'effet considéré pour une charge unitaire placée en un point quelconque. Dans le cas d'une charge composée, il suffit alors de sommer les effets.

### 14.2 Diagramme d'influence d'un déplacement généralisé

Soit à chercher le diagramme d'influence d'un déplacement généralisé  $q_0$  (fig. 14.1). Traçons la déformée de la structure sous une charge conjuguée  $g_0 = 1$ . On notera que, par le théorème de Betti, le travail d'une charge quelconque  $g_1$  sur cette déformée, soit  $g_1 q_1^{(0)}$ , est égal au travail de  $g_0$  pour la déformée due à la charge  $g_1$ , ce qui s'écrit

$$\mathcal{T}_{10} = g_1 q_1^{(0)} = \mathcal{T}_{01} = g_0 q_0^{(1)} = q_0^{(1)}$$

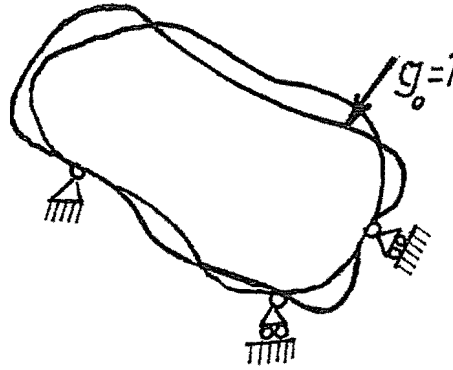


FIGURE 14.1 – Ligne d'influence d'un déplacement généralisé.

Ainsi, le déplacement considéré  $q_0^{(1)}$  dû à une charge quelconque  $g_1$  est égal au travail de cette charge pour la déformée due à la charge unitaire  $g_0 = 1$ . Cette déformée constitue donc le diagramme d'influence du déplacement  $q_0$ .

### 14.3 Diagramme d'influence d'un effet de type effort

Pour ce problème, les exposés classiques [12, 67] distinguent le cas des structures isostatiques, où il est d'usage d'invoquer le principe des travaux virtuels, du cas des structures hyperstatiques, pour lesquelles on fait appel au principe de réciprocité. Voici un exposé unifié fondé sur le principe de variation des déplacements.

Soit  $F$  l'effort généralisé (contrainte, réaction, etc.) dont on cherche le diagramme d'influence et soit  $d(u)$  le déplacement conjugué à  $F$  pour un champ de déplacement  $u$ .  $F$  sera par exemple (fig. 14.2) la réaction au point  $A$  d'une poutre, le moment en un point  $D$  de cette poutre, etc. Une règle essentielle est que le déplacement  $d(u)$  doit être nul pour toute variation de déplacement cinématiquement admissible. C'est le cas pour les deux exemples considérés ci-dessus, car à la réaction est conjuguée la violation de la condition d'appui et au moment en  $D$ , un saut de rotation en ce point.

Pour faire apparaître  $d(u)$  dans le principe de variation des déplacements, on relâche la condition  $d(u) = 0$  en faisant la coupure voulue : on coupera l'appui



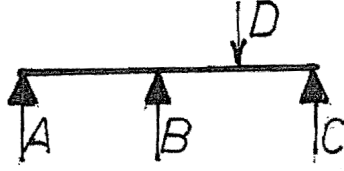


FIGURE 14.2 – Poutre sur trois appuis.

en A, ou l'on installera une rotule en D. On utilise alors la *fonctionnelle énergie totale augmentée*

$$\mathcal{U}^* + \mathcal{P} - Fd(u) \quad (14.1)$$

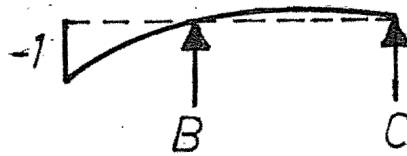
où  $F$  est le multiplicateur de Lagrange associé à la condition  $d(u) = 0$ . La notation  $\mathcal{U}^*$  rappelle que le système a subi une coupure, ce dont il faut tenir compte dans le calcul de l'énergie, en faisant une coupure dans les intégrations. Pour la commodité, nous utiliserons la notation

$$\mathcal{U}^*(u) = \frac{1}{2}a^*(u, u), \quad \delta\mathcal{U}^* = a^*(u, \delta u) = \int_V^* C_{ijkl}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{kl}(\delta u)dV \quad (14.2)$$

qui fait bien apparaître le caractère de forme bilinéaire de l'énergie. Soit alors  $v$  le champ de déplacement tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} d(v) = -1 \\ a^*(v, \delta u) = 0 \quad \forall \delta u \text{ tel que } d(\delta u) = 0 \end{array} \right\} \quad (14.3)$$

Ces conditions signifient que l'on cherche le champ de déplacement  $v$  tel que  $d(v) = -1$  et qu'en outre, l'équilibre soit satisfait en l'absence de charges extérieures. Pour la poutre de la figure 14.12, ce sera le champ de déplacement représenté en figure 14.3. Pour une poutre sur deux appuis A et B, dont on

FIGURE 14.3 – Déplacement  $v$  lié à la réaction en A.

recherche la réaction  $R_A$ , il s'agira du déplacement de corps rigide indiqué en

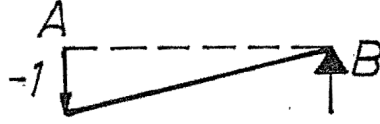


FIGURE 14.4 – Cas d'une poutre sur deux appuis.

figure 14.4. Le champ de déplacement réel de la structure sous les charges rend la fonctionnelle (14.1) stationnaire, ce qui s'écrit

$$a^*(u, \delta u) + \mathcal{P}(\delta u) - Fd(\delta u) = 0$$

pour tout  $\delta u$ . Le choix particulier  $\delta u = v$  donne

$$a^*(u, v) + \mathcal{P}(v) - Fd(v) = 0$$

Mais on a d'une part  $d(v) = -1$  et d'autre part, comme  $d(u) = 0$ , on a également  $a^*(u, v) = 0$ , ce qui implique

$$F = -\mathcal{P}(v) = \mathcal{T}(v) \quad (14.4)$$

On obtient ainsi le théorème de Land :

**Théorème 11** *Pour obtenir le diagramme d'influence d'un effort  $F$ , on fait une coupure relative à cet effort. On cherche alors le déplacement du système coupé tel que, d'une part, la valeur du déplacement conjugué à l'effort considéré soit égal à  $(-1)$  et que, d'autre part, l'équilibre soit vérifié en l'absence de charges. La valeur de  $F$  pour une mise en charge quelconque est alors égale au travail de cette mise en charge pour le déplacement en question.*

### 14.3.1 Remarque

Dans le cas d'une structure isostatique, le déplacement en question est le seul déplacement sans déformation de la structure coupée.

## 14.4 Exemples

### 14.4.1 Réaction d'une poutre sur deux appuis

Soit à déterminer la réaction en  $B$  de la poutre de la figure 14.5 posée sur deux appuis  $A$  et  $B$  et soumise à trois charges  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ . On coupe l'appui

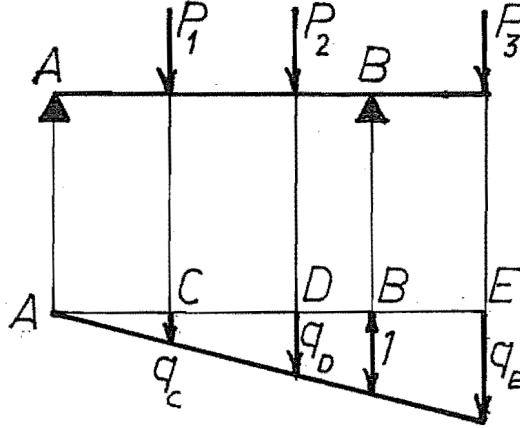


FIGURE 14.5 – Réaction d'une poutre sur deux appuis.

en  $B$  et on donne à la poutre un déplacement unitaire en ce point, dans le sens inverse à  $R_B$ . On a alors

$$q_C = \frac{AC}{AB}, \quad q_D = \frac{AD}{AB}, \quad q_E = \frac{AE}{AB}$$

d'où

$$R_B = P_1 \frac{AC}{AB} + P_2 \frac{AD}{AB} + P_3 \frac{AE}{AB}$$

#### 14.4.2 Effort tranchant d'une poutre sur deux appuis

On considère la poutre sur deux appuis avec encorbellements de la figure 14.6, soumise à un système de charges  $P_1, P_2, P_3, P_4$ . On désire connaître l'effort tranchant au point  $C$ . Pour obtenir la ligne d'influence, on effectue une coupure simple relative à l'effort tranchant (coupure de cet effort uniquement). Cette coupure peut être conçue comme réalisée à l'aide de deux plateaux permettant de passer le moment mais non l'effort tranchant. Ces plateaux, étant infiniment rigides, ne permettent que les déformations où les lèvres de la coupure restent parallèles entre elles. la ligne d'influence est représentée sur la figure. On en

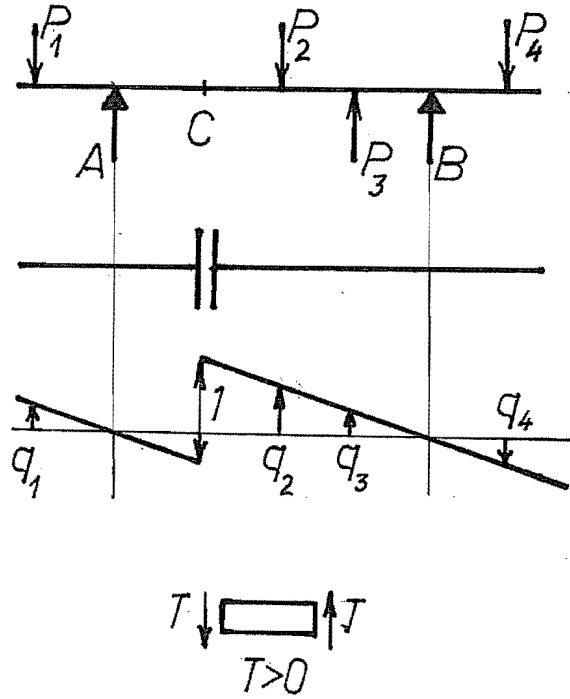


FIGURE 14.6 – Effort tranchant d'une poutre sur deux appuis.

déduit, pour la mise en charge donnée,

$$\begin{aligned}
 T_C &= P_1 \cdot q_1 + P_2 \cdot q_2 + P_3 \cdot q_3 + P_4 \cdot q_4 \\
 &= -P_1 \frac{AD}{AC} - P_2 \frac{BE}{BC} + P_3 \frac{BF}{BC} + P_4 \frac{BG}{BC}
 \end{aligned}$$

#### 14.4.3 Moment d'une poutre cantilever

Une poutre cantilever est une poutre sur appuis multiples rendue isostatique à l'aide de rotules. Soit par exemple à déterminer la ligne d'influence du moment en  $E$  de la poutre cantilever de la figure 14.7. On pratique la coupure simple relative aux moments en  $E$ , qui consiste en une rotule en ce point, comme le montre la figure 14.8. La seule difficulté réside dans la détermination de

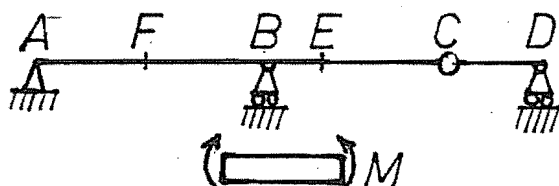
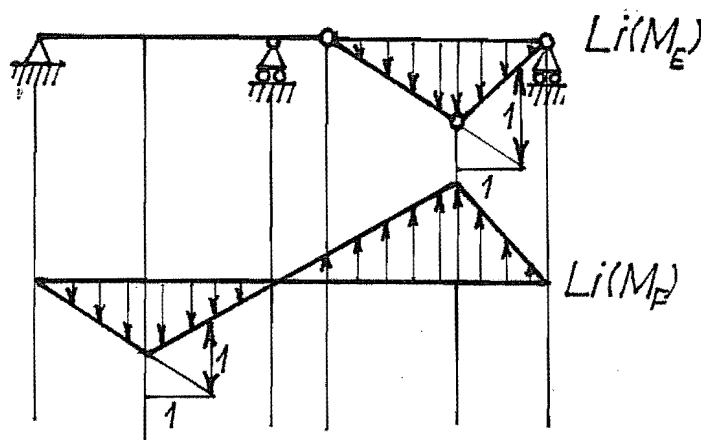


FIGURE 14.7 – Moment d'une poutre cantilever.

FIGURE 14.8 – Ligens d'influence des moments en  $E$  et  $F$ .

l'unité : l'angle est en principe unitaire, mais comme il s'agit d'un déplacement infinitésimal, c'est un segment rectiligne situé à une distance horizontale unitaire de  $C$  qui doit avoir une longueur égale à 1. On a également représenté sur la figure la ligne d'influence du moment en  $F$ .

#### 14.4.4 Moment dans un arc à trois articulations avec mise en charge indirecte

Pour tracer la déformée de l'arc de la figure 14.9 où l'on aura préalablement inséré une rotule en  $B$ , on peut chercher le centre instantané de rotation  $R$  de la section  $BC$  comme indiqué en figure 14.10. La déformation de l'arc est

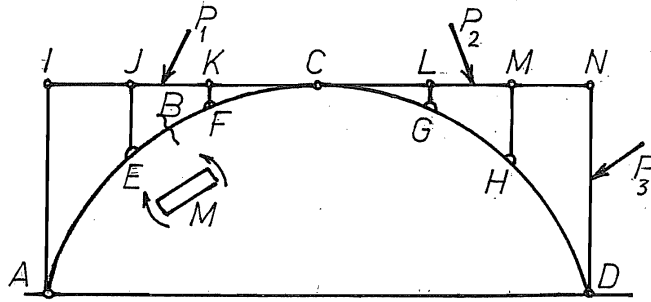
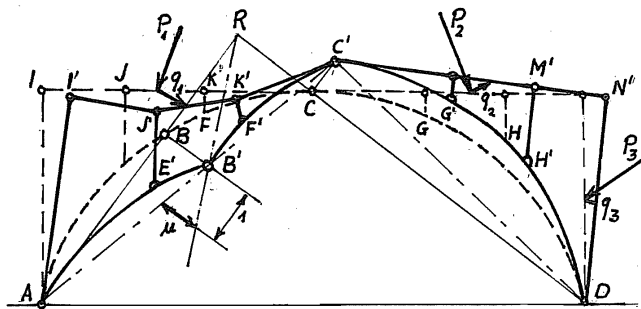


FIGURE 14.9 – Arc à trois articulations à mise en charge indirecte.

alors simple à obtenir, et les poteaux et passerelles suivent en gardant leur longueur, ce qui permet de faire la construction au compas. La seule difficulté est de définir l'unité. Avant déformation, les points  $A, B, R$  sont en ligne droite et le déplacement  $BB'$  du point  $B$  mesure la rotation des deux parties. C'est dans cette direction que doit être mesurée la rotation : à une distance égale à 1 (dans la direction  $RA$ ), l'unité  $u$  est parallèle à  $BB'$ . Pour une mise en charge  $(P_1, P_2, P_3)$ , on aura donc

$$M_B = \frac{1}{u} (P_1 \cdot q_1 + P_2 \cdot q_2 + P_3 \cdot q_3)$$

FIGURE 14.10 – Diagramme d'influence du moment en  $B$ .

### 14.4.5 Réaction de l'appui intermédiaire d'une poutre sur trois appuis

La figure 14.11 est suffisamment explicite pour se passer de commentaires.

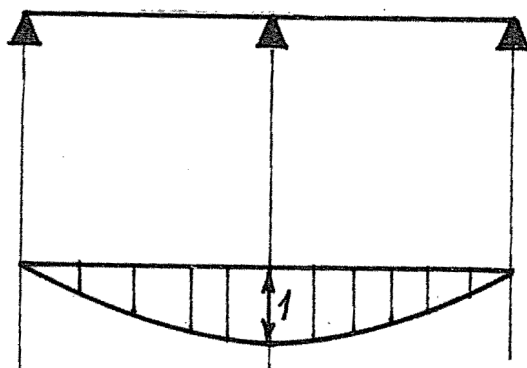


FIGURE 14.11 – Ligne d'influence de la réaction de l'appui intermédiaire d'une poutre sur trois appuis.

### 14.4.6 Effort dans une barre quelconque d'un treillis iso-statique

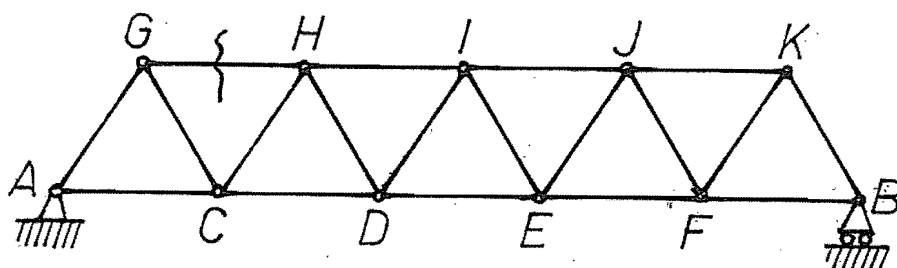


FIGURE 14.12 – Treillis.

Sur le treillis de la figure 14.12, soit à déterminer l'influence d'une charge sur l'effort de traction dans la barre  $GH$ . Le déplacement conjugué à cet effort (la

barre  $GH$  étant coupée) est le rapprochement des deux points  $G$  et  $H$  dans la direction  $GH$ . On donne à ce déplacement la valeur  $(-1)$ . On détermine alors la déformée du treillis, par les méthodes classiques de la cinématique des travaux virtuels (*fig.* 14.13). La valeur de l'effort de la barre  $GH$  pour une charge  $P_1$  est

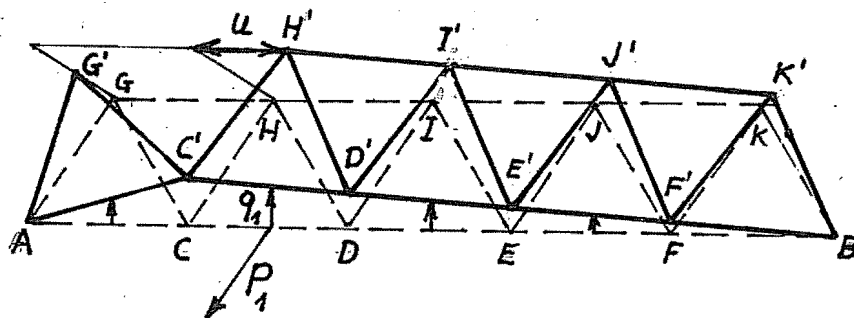


FIGURE 14.13 – Diagramme d'influence de l'effort dans la barre  $GH$ .

donc

$$N_{GH} = \frac{1}{u} P_1 \cdot q_1$$



## Chapitre 15

# Stabilité des systèmes élastiques

### 15.1 Introduction

Le problème de la stabilité d'un équilibre élastique se pose notamment dans le cas d'une colonne comprimée par une charge  $P$  (*fig. 15.1*). Si la colonne est

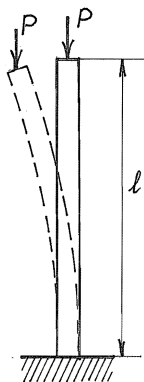


FIGURE 15.1 – Flambage.

suffisamment longue, on observe qu'à partir d'une charge donnée, elle fléchit,

prenant ainsi une nouvelle position d'équilibre assez éloignée de la précédente.<sup>1</sup> Il s'agit évidemment d'une instabilité. Dans le cas considéré, elle porte le nom de *flambage* et mène le plus souvent à la ruine de l'édifice que soutient la colonne. C'est dire l'importance pratique du phénomène.

Nous avons vu, lors de l'étude de l'élasticité géométriquement linéarisée, que tout état d'équilibre était stable dans le cadre de cette théorie. En conséquence, la théorie de la stabilité relève a priori de l'élasticité non linéaire (grands déplacements).

## 15.2 Principe du minimum de l'énergie

Soit une structure en équilibre sous un système de charges, et soit  $\mathcal{E}$  l'énergie totale correspondant à cet état d'équilibre. De nombreuses causes fortuites, au nombre desquelles il faut compter les vibrations de la fondation, l'effet du vent, etc., peuvent donner à la structure une certaine énergie cinétique  $T$ . Il s'agit en l'occurrence de vitesses tendant à déplacer la structure de son état d'équilibre. Pour que ce déplacement ne croisse pas indéfiniment, il faudra que la variation d'énergie totale  $\mathcal{E}$  tende à diminuer l'énergie cinétique. Or, la conservation de l'énergie implique

$$\Delta\mathcal{E} + \Delta T = 0 \quad (15.1)$$

si bien que pour obtenir  $\Delta T < 0$  en s'écartant de l'équilibre, il faudra que  $\Delta\mathcal{E} > 0$ . Dans ce cas, la structure se mettra à osciller, jusqu'à ce que l'amortissement inévitable, bien que souvent faible, anihile la vibration. Ainsi, *la condition de stabilité de l'équilibre est que, lors d'un déplacement à partir de la position d'équilibre, l'énergie totale augmente*. C'est la *condition de Lejeune-Dirichlet* Dirichlet 1847. Il est équivalent de dire qu'un équilibre stable correspond à un *minimum* d'énergie totale.

Il convient de noter que ce principe ne permet que de garantir la *stabilité infinitésimale*, c'est-à-dire que la stabilité n'est garantie que pour des perturbations suffisamment petites. Il est très possible qu'une perturbation assez grande entraîne le passage par un autre point où l'énergie est maximale, entraînant ainsi la structure vers un autre minimum qui constituera une nouvelle position d'équilibre stable. Une comparaison utile et classique consiste à raisonner sur le problème d'une bille dans une chaîne de montagnes. Dans le cas représenté en figure 15.2, les points  $A$  et  $B$  sont deux positions d'équilibre stable. Mais en

---

1. Pour pouvoir observer ce phénomène à l'état pur, il convient d'utiliser une colonne faite d'un matériau à haute limite élastique, car dans le cas contraire, la flexion risque de produire une déformation plastique menant à la ruine.

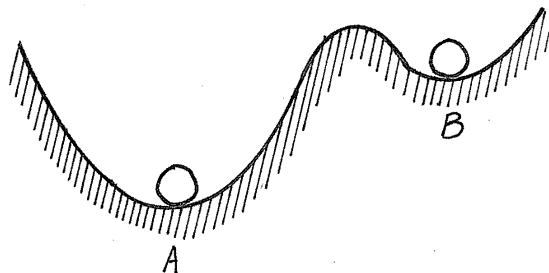


FIGURE 15.2 – Analogie de la bille.

donnant une énergie suffisant à la bille, il est possible de passer d'une position à l'autre. Observons que ce problème est moins académique qu'il ne pourrait sembler. Ainsi [26], si l'on place un crayon sur sa face extrême plane, comme l'illustre la figure 15.3, il est stable au sens infinitésimal, car tout petit mouvement autour de sa position d'équilibre relève son centre de gravité. Néanmoins,

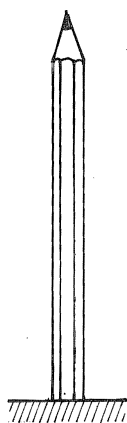


FIGURE 15.3 – Ce crayon est stable au sens infinitésimal, mais il s'agit d'une stabilité est précaire.

il s'agit d'un équilibre précaire, car il existe un seuil, fort proche de la verticale, où le centre de gravité passe par une hauteur maximale, suite à quoi il redes-

cend. Un exemple similaire est celui de la bille maintenue en un sommet par une fraisure (fig. 15.4). On peut donc dire que, dans un certain sens, l'étude



FIGURE 15.4 – Bille maintenue en équilibre par une fraisure.

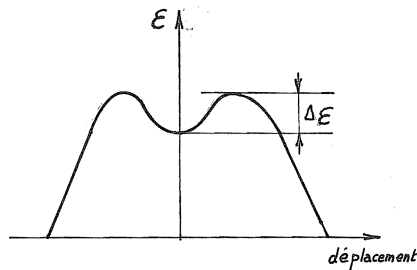


FIGURE 15.5 – La stabilité devrait être mesurée par l'énergie à apporter pour la détruire.

de la stabilité infinitésimale est incomplète et que la stabilité d'un équilibre donné devrait en fait être mesurée par la plus petite différence d'énergie entre l'état considéré et une instabilité voisine, comme l'illustre la figure 15.5. Ainsi, dans le cas du crayon, on observerait que le saut d'énergie correspondant est très faible. Malheureusement, dans nombre de cas pratiques, une telle démarche nécessiterait un nombre d'analyses que l'on ne peut raisonnablement prescrire.

### 15.3 Variations successives de l'énergie totale

Étant donné un état d'équilibre caractérisé par un champ de déplacement  $u^0$ , considérons une petite perturbation  $\theta w$  du champ de déplacement, où  $w$  représente une variation cinématiquement admissible de déplacement, de norme unitaire, et  $\theta$ , un paramètre réel. Supposant  $w$  fixé, l'énergie se présente comme une fonction de  $\theta$ . Nous admettrons qu'il est possible de la développer en série

de Taylor jusqu'au second ordre, c'est-à-dire que

$$\mathcal{E}(u^0 + \theta w) = \mathcal{E}(u^0) + \theta \delta \mathcal{E}(u^0; w) + \frac{\theta^2}{2} \delta^2 \mathcal{E}(u^0; w) + o(\theta^2) \quad (15.2)$$

où apparaissent la *variation première*  $\delta \mathcal{E}$  et la *variation seconde*  $\delta^2 \mathcal{E}$ . Le champ de déplacement  $u^0$ , comme tout état d'équilibre, vérifie la condition de *stationnarité* de l'énergie totale

$$\delta \mathcal{E}(u^0; w) = 0 \quad (15.3)$$

si bien que l'on peut écrire

$$\Delta \mathcal{E}(u^0 \rightarrow u^0 + \theta w) = \mathcal{E}(u^0 + \theta w) - \mathcal{E}(u^0) = \frac{\theta^2}{2} \delta^2 \mathcal{E}(u^0; w) + o(\theta^2) \quad (15.4)$$

Pour  $\theta$  suffisamment petit, le signe de la variation d'énergie sera celui de la variation seconde, ce qui permet de dire que si la variation seconde est négative pour une variation de déplacement donnée de norme unitaire, la structure est instable. À l'inverse, *la structure sera stable si, pour toute variation de déplacement  $w$  de norme unitaire, la variation seconde est positive.*

Il peut se faire que la variation seconde soit nulle. Dans ce cas, il faut pousser le développement en série plus loin

$$\mathcal{E}(u^0 + \theta w) = \mathcal{E}(u^0) + \theta \delta \mathcal{E} + \frac{\theta^2}{2} \delta^2 \mathcal{E} + \frac{\theta^3}{3!} \delta^3 \mathcal{E} + \frac{\theta^4}{4!} \delta^4 \mathcal{E} + \dots \quad (15.5)$$

ce qui définit la variation troisième, la variation quatrième, etc. Si la variation troisième est différente de zéro pour un certain  $w$ , positive pour fixer les idées, il suffit de changer le signe de  $\theta$  (ce qui équivaut à remplacer  $w$  par  $-w$ ) pour changer le signe de l'accroissement d'énergie : la structure est donc instable. Si la variation troisième est nulle, on reproduit sur la variation quatrième le raisonnement relatif à la variation seconde : elle doit être positive pour qu'il y ait stabilité. Plus généralement, si la première variation non nulle est d'ordre impair, l'équilibre est instable. Si cette variation est d'ordre pair, l'équilibre est stable si elle est toujours positive. Ces résultats s'interprètent aisément à l'aide de l'analogie de la bille. Le fait que la première variation non nulle soit d'ordre impair signifie que l'on se trouve sur un *palier*, comme l'illustre la figure 15.6.

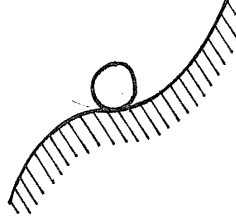


FIGURE 15.6 – Cas où la première variation non nulle est d'ordre impair.

## 15.4 Analyse générale de la stabilité des corps élastiques

Nous nous limiterons au cas habituel d'un matériau linéaire. Notant toujours  $u^0$  le déplacement à l'équilibre et  $\theta w$  la perturbation, on peut écrire les déformations de Green sous la forme

$$\begin{aligned}\gamma_{ij} &= \frac{1}{2}[D_i(u_j^0 + \theta w_j) + D_j(u_i^0 + \theta w_i) + D_i(u_m^0 + \theta w_m)D_j(u_m^0 + \theta w_m)] \\ &= \gamma_{ij}^0 + \theta \gamma_{ij}^1 + \frac{\theta^2}{2} \gamma_{ij}^2\end{aligned}\quad (15.6)$$

avec

$$\left. \begin{aligned}\gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2}(D_i u_j^0 + D_j u_i^0 + D_i u_m^0 D_j u_m^0) \\ \gamma_{ij}^1 &= \frac{1}{2}(D_i w_j + D_j w_i + D_i u_m^0 D_j w_m + D_j u_m^0 D_i w_m) \\ \gamma_{ij}^2 &= D_i w_m D_j w_m\end{aligned}\right\} \quad (15.7)$$

L'énergie de déformation s'écrit donc (en supposant l'existence de contraintes initiales  $s_{ij}^*$  à l'état de référence)

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \int_V s_{ij}^* \left( \gamma_{ij}^0 + \theta \gamma_{ij}^1 + \frac{\theta^2}{2} \gamma_{ij}^2 \right) dV \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl} \left( \gamma_{ij}^0 + \theta \gamma_{ij}^1 + \frac{\theta^2}{2} \gamma_{ij}^2 \right) \left( \gamma_{kl}^0 + \theta \gamma_{kl}^1 + \frac{\theta^2}{2} \gamma_{kl}^2 \right) dV \\ &= \mathcal{U}_0 + \theta \delta \mathcal{U} + \frac{\theta^2}{2} \delta^2 \mathcal{U} + \frac{\theta^3}{3!} \delta^3 \mathcal{U} + \frac{\theta^4}{4!} \delta^4 \mathcal{U}\end{aligned}\quad (15.8)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{U}_0 &= \int_V (s_{ij}^* \gamma_{ij}^0 + \frac{1}{2} C_{ijkl} \gamma_{ij}^0 \gamma_{kl}^0) dV \\ \delta \mathcal{U} &= \int_V (s_{ij}^* \gamma_{ij}^1 + C_{ijkl} \gamma_{ij}^0 \gamma_{kl}^1) dV \\ \delta^2 \mathcal{U} &= \int_V (s_{ij}^* \gamma_{ij}^2 + C_{ijkl} \gamma_{ij}^0 \gamma_{kl}^2 + C_{ijkl} \gamma_{ij}^1 \gamma_{kl}^1) dV \\ \delta^3 \mathcal{U} &= 3 \int_V C_{ijkl} \gamma_{ij}^1 \gamma_{kl}^2 dV \\ \delta^4 \mathcal{U} &= 3 \int_V C_{ijkl} \gamma_{ij}^2 \gamma_{kl}^2 dV \end{aligned} \right\} \quad (15.9)$$

Dans le cas usuel de charges mortes, l'énergie potentielle s'écrit

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(u^0) + \delta \mathcal{P} \quad (15.10)$$

On a d'abord  $\delta \mathcal{U} + \delta \mathcal{P} = 0$ , ce qui signifie que le champ de déplacement  $u^0$  correspond à un état d'équilibre. Examinons à présent la variation seconde. En notant  $s_{ij}^0$  les *contraintes totales à l'équilibre*,

$$s_{ij}^0 = s_{ij}^* + C_{ijkl} \gamma_{kl}^0 \quad (15.11)$$

on peut la mettre sous la forme

$$\delta^2 \mathcal{U} = \int_V (s_{ij}^0 \gamma_{ij}^2 + C_{ijkl} \gamma_{ij}^1 \gamma_{kl}^1) dV \quad (15.12)$$

Quel est son signe? Examinons d'abord le second terme. Le tenseur  $C_{ijkl}$  étant défini positif, ce terme sera toujours positif ou nul, et ne s'annulera que si  $\gamma_{ij}^1 = 0$ .

On a

$$\begin{aligned} \gamma_{ij}^1 &= \frac{1}{2} (D_i w_j + D_j w_i + D_i u_m^0 D_j w_m + D_j u_m^0 D_i w_m) \\ &= \frac{1}{2} [(\delta_{jm} + D_j u_m^0) D_i w_m + (\delta_{im} + D_i u_m^0) D_j w_m] \end{aligned}$$

et, en introduisant les coordonnées spatiales à l'équilibre  $\xi_i = (x_i + u_i^0)$ ,

$$\gamma_{ij}^1 = \frac{1}{2} (D_j \xi_m D_i w_m + D_i \xi_m D_j w_m)$$

Nous noterons  $\partial_i$  les dérivées par rapport aux  $\xi_i$ . On a, si  $\gamma_{ij}^1 = 0$ ,

$$\begin{aligned} 0 = \partial_p x_i \partial_q x_j \gamma_{ij}^1 &= \frac{1}{2} (\partial_q x_j D_j \xi_m \partial_p x_i D_i w_m + \partial_p x_i D_i \xi_m \partial_q x_j D_j w_m) \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{qm} \partial_p w_m + \delta_{pm} \partial_q w_m) \end{aligned}$$

soit

$$\frac{1}{2}(\partial_p w_q + \partial_q w_p) = 0 \quad (15.13)$$

La solution de cette équation est

$$w_p = a_p + e_{pqr} \omega_q \xi_r \quad (15.14)$$

c'est-à-dire un déplacement de corps rigide à partir de la configuration déformée. *En supposant les déplacements rigides bloqués*, on aura donc  $\gamma_{ij}^1 \neq 0$ , et le second terme de la variation seconde est toujours positif.

Venons-en au premier terme de cette variation, qui s'écrit

$$\int_V s_{ij}^0 D_i w_m D_j w_m dV$$

Il ne peut jamais être négatif si le tenseur  $s_{ij}^0$  est défini positif, c'est-à-dire si, pour tout vecteur  $q_i$ , on a

$$s_{ij}^0 q_i q_j > 0$$

Par conséquent, *il ne peut y avoir d'instabilité si le tenseur des contraintes totales à l'équilibre est défini positif en tout point du corps.*

Mis à part cette conclusion qualitative importante, le test de la variation seconde semble à priori assez délicat à mener, puisqu'il suppose en principe l'exploration de la totalité de la sphère unité, pour une norme qu'il nous reste à préciser. Le choix de celle-ci est relativement arbitraire, à ceci près qu'il convient au moins qu'il assure la bornation de la variation seconde. La plus simple des normes assurant cette condition est

$$\|w\|^2 = \int_V C_{ijkl} \gamma_{ij}^1 \gamma_{kl}^1 dV \quad (15.15)$$

Ce choix fait, on évite l'exploration de la sphère unité par la méthode suivante, proposée par Jacobi : appelons  $\mu$  la grandeur

$$\mu = \sup_{\mathcal{C}} \frac{- \int_V s_{ij}^0 \gamma_{ij}^2 dV}{\int_V C_{ijkl} \gamma_{ij}^1 \gamma_{kl}^1 dV} \quad (15.16)$$

$\mathcal{C}$  étant l'ensemble des perturbations admissibles de déplacements. Selon la valeur de  $\mu$ , trois cas peuvent se présenter :

1.  $\mu > 1$  - Dans ce cas, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un déplacement  $w \in \mathcal{C}$  tel que

$$- \int_V s_{ij}^0 \gamma_{ij}^2 dV \geq (\mu - \varepsilon) \int_V C_{ijkl} \gamma_{ij}^1 \gamma_{kl}^1 dV$$



Il en découle

$$\delta^2 \mathcal{U} = \int_V s_{ij}^0 \gamma_{ij}^2 + \int_V C_{ijkl} \gamma_{ij}^1 \gamma_{kl}^1 dV \leq (1 - \mu + \varepsilon) \int_V C_{ijkl} \gamma_{ij}^1 \gamma_{kl}^1 dV < 0$$

pour  $\varepsilon < \mu - 1$ , ce qui implique que l'équilibre est *instable*.

2.  $\mu < 1$  - Alors, tout déplacement  $w \in \mathcal{C}$  vérifie

$$- \int_V s_{ij}^0 \gamma_{ij}^2 dV \leq \mu \int_V C_{ijkl} \gamma_{ij}^1 \gamma_{kl}^1 dV < \int_V C_{ijkl} \gamma_{ij}^1 \gamma_{kl}^1 dV$$

ce qui signifie que l'on a toujours  $\delta^2 \mathcal{U} > 0$ . L'équilibre est donc *stable*.

3.  $\mu = 1$  - Dans ce cas, on ne peut pas conclure.

La plupart des auteurs admettent implicitement que la meilleure borne supérieure (15.16) est *réalisée* par un champ de déplacement donné. Or, cette propriété n'a rien d'évident, et la question reste ouverte dans le cas général<sup>2</sup>. Signalons cependant qu'elle est garantie lorsque les dérivées intervenant dans le numérateur sont au moins d'un ordre inférieur à celles qui apparaissent dans le dénominateur, auquel cas il y a complète continuité (voir par exemple Necas [63], Riesz et Nagy [76]). Cette condition est vérifiée pour les poutres sans déformation à l'effort tranchant, les plaques de Kirchhoff et quelques autres cas.

Supposant cette réalisation effective, la recherche de  $\mu$  peut être considérée comme le problème de maximisation du numérateur, moyennant la condition  $\|w\|^2 = 1$ , qui peut être reprise à l'aide d'un multiplicateur lagrangien  $\lambda$ . L'équation variationnelle de ce problème est alors

$$\delta \left\{ - \int_V s_{ij}^0 \gamma_{ij}^2 - \lambda \int_V C_{ijkl} \gamma_{ij}^1 \gamma_{kl}^1 dV \right\} = 0 \quad (15.17)$$

et se présente comme un problème aux valeurs propres  $\lambda$ . La plus grande de celles-ci est précisément  $\mu$ . Le déplacement correspondant est appelé la *forme critique*.

## 15.5 Bifurcation de l'équilibre

On dit qu'il y a instabilité par bifurcation de l'équilibre lorsque l'état d'équilibre initial vérifie

$$\delta_{im} + D_i u_m^0 \approx \delta_{im} \quad (15.18)$$

---

2. Dans le cas d'une structure discrétisée, cette propriété est évidente, car la sphère unité dans  $R^n$  est compacte, et toute fonction continue y atteint ses bornes.

c'est-à-dire qu'il est caractérisé par des rotations infinitésimales. Dans ce cas, on a

$$\gamma_{ij}^1 \approx \frac{1}{2}(D_i w_j + D_j w_i) = \varepsilon_{ij}(w)$$

et le critère de la variation second se ramène à tester que

$$\delta^2 \mathcal{E} = \int_V s_{ij}^0 D_i w_m D_j w_m dV + \int_V C_{ijkl} \varepsilon_{ij}(w) \varepsilon_{kl}(w) dV > 0$$

Seul, le premier terme subit l'influence de l'équilibre initial, et il varie linéairement avec les contraintes. C'est pourquoi on parle, dans ce cas, de *stabilité linéaire*. On profite de cette propriété pour choisir au départ la forme du champ de contrainte, et définir son amplitude à part : on choisit donc un champ unitaire

$$s_{ij}^0 = -S_{ij} \quad (15.19)$$

et le champ menant à l'instabilité sera  $-\sigma S_{ij}$ , où  $\sigma$  est le facteur multiplicatif. Tout revient à chercher la *facteur critique* (encore appelé, par abus de langage, *charge critique*), défini comme la plus petite valeur de  $\sigma$  pour laquelle

$$\delta^2 \mathcal{E} = -\sigma \int_V S_{ij} D_i w_m D_j w_m dV + \int_V C_{ijkl} \varepsilon_{ij}(w) \varepsilon_{kl}(w) dV = 0$$

et qui vérifie

$$\sigma = \inf_{w \in \mathcal{C}} \frac{\int_V C_{ijkl} \varepsilon_{ij}(w) \varepsilon_{kl}(w) dV}{\int_V S_{ij} D_i w_m D_j w_m dV} \quad (15.20)$$

Si cette valeur est réalisée, il est équivalent de chercher les solutions du problème aux valeurs propres

$$\delta \left\{ \int_V C_{ijkl} \varepsilon_{ij}(w) \varepsilon_{kl}(w) dV - \sigma \int_V S_{ij} D_i w_k D_j w_k dV \right\} = 0 \quad (15.21)$$

les formes critique vérifient alors l'équation

$$D_\ell (C_{k\ell ij} \varepsilon_{ij}(w)) - \sigma D_j (S_{ji} D_i w_k) = 0 \quad \text{dans } V \quad (15.22)$$

et les conditions aux limites

$$n_\ell (C_{k\ell ij} \varepsilon_{ij}(w)) - \sigma n_j (S_{ij} D_i w_k) = 0 \quad \text{sur } S_2 \quad (15.23)$$

$S_2$  étant la portion de la surface où les efforts sont imposés nuls.

## 15.6 La colonne d'Euler

le plus classique des problèmes de bifurcation est celui d'une colonne encastree en son pied et soumise à une charge  $P$  en son sommet (fig. 15.7). Sous une

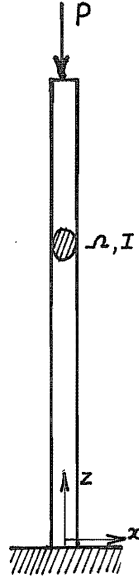


FIGURE 15.7 – Colonne d'Euler.

faible charge, la colonne reste droite ; mais à partir d'une charge donnée, elle fléchit. C'est ce que l'on appelle le *flambage*. Appelant  $z$  la coordonnée prise le long de la colonne et  $x$  l'axe tel que  $I_x$  soit le plus petit des deux moments d'inertie, on écrira

$$\begin{aligned} u_3 &= w(z) + x\alpha(z) \\ u_1 &= u(z) \end{aligned} \tag{15.24}$$

En admettant l'approximation des gradients de déplacements modérés, on écrira, en notant d'un prime la dérivation par rapport à  $z$ ,

$$\begin{aligned} \gamma_{33} &= D_3 u_3 + \frac{1}{2}(D_3 u_1)^2 = w' + x\alpha' + \frac{1}{2}u'^2 \\ \gamma_{13} &= D_1 u_3 + D_3 u_1 = \alpha + u' \end{aligned} \tag{15.25}$$

Le déplacement à l'équilibre est  $w_0$ . La perturbation est caractérisée par  $w$ ,  $u$  et  $\alpha$ . Nous ferons l'hypothèse d'absence de déformation due à l'effort tranchant, ce qui s'écrit

$$\alpha = -u' \quad (15.26)$$

et donne

$$\gamma_{33} = w' - xu'' + \frac{1}{2}u'^2$$

soit

$$\begin{aligned} \epsilon_{33} &= w' - xu'' \\ \gamma_{33}^2 &= u'^2 \end{aligned}$$

L'état de contrainte initial normalisé est  $S_{33} = -1/\Omega$ , ce qui donne directement la charge critique  $P$  comme facteur d'amplitude. Le principe variationnel s'écrit alors

$$\int_0^\ell (E\Omega w'^2 + EI u''^2 - Pu'^2) dz \quad \text{stationnaire} \quad (15.27)$$

Les formes critiques vérifient donc les équations suivantes

$$\begin{cases} -E\Omega w'' &= 0 & \text{dans } ]0, \ell[ \\ E\Omega w'(\ell) &= 0 \\ w(0) &= 0 \end{cases} \quad (15.28)$$

et

$$\begin{cases} EI u^{IV} + Pu'' &= 0 & \text{dans } ]0, \ell[ \\ -EI u'''(\ell) - Pu'(\ell) &= 0 \\ u(0) &= 0 \\ u'(0) &= 0 \end{cases} \quad (15.29)$$

Des équations (15.28), on déduit  $w = 0$ . À partir des deux premières équations du système (15.29), on déduit

$$u'''(z) + \frac{P}{EI} u'(z) = 0$$

ce qui donne la solution générale

$$u(z) = A \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} z + B \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} z + C$$

Des conditions aux limites en  $z = 0$ , on déduit  $B = 0$  et  $C = -A$ . La condition d'extrémité donne alors

$$\cos \sqrt{\frac{P}{EI}} \ell = 0$$

soit

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} \ell = \frac{\pi}{2} + (n-1)\pi = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, \quad n \text{ entier } > 0$$

ou encore

$$P = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$$

Ce sont les *charges d'Euler*. La plus petite d'entre elles, qui marque la limite de stabilité, est

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4\ell^2} \quad (15.30)$$

## 15.7 Autres cas d'appuis

Lorsque les appuis sont différents du cas envisagé ci-dessus, les équations d'équilibre intérieur restent inchangées, mais les conditions aux limites varient. Voici quelques cas courants.

### 15.7.1 Poutre bi-appuyée

Ce cas est illustré par la figure 15.8. Les conditions d'extrémité sont ici

$$u(0) = 0, \quad u(\ell) = 0, \quad u''(0) = 0, \quad u''(\ell) = 0$$

L'équation d'équilibre

$$u^{IV} + \frac{P}{EI} u'' = 0$$

admet la solution générale

$$u(z) = A \cos \omega z + B \sin \omega z + Cz + D \quad (15.31)$$

avec

$$\omega^2 = \frac{P}{EI}$$

Les conditions en  $z = 0$  donnent

$$A + D = 0$$

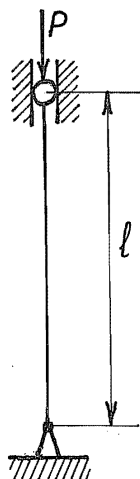


FIGURE 15.8 – Flambage d'une poutre sur deux appuis.

et

$$-A\omega^2 = 0$$

ce qui implique  $A = D = 0$ , en excluant le cas  $\omega = 0$  pour lequel la solution est identiquement nulle. Ensuite, on déduit des conditions en  $z = \ell$

$$B \sin \omega \ell + C \ell = 0$$

et

$$-B^2 \omega^2 \sin \omega \ell = 0$$

d'où  $C = 0$  et, pour que la solution ne soit pas identiquement nulle,

$$\sin \omega \ell = 0$$

ce qui donne

$$\omega \ell = n\pi, \quad n \text{ entier} > 0$$

On obtient donc

$$P = n^2 \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}, \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (15.32)$$

### 15.7.2 Poutre encastrée-appuyée



FIGURE 15.9 – Flambage d’une poutre encastrée-appuyée.

C’est le cas illustré en figure 15.9. Portant dans la solution générale (15.31) les conditions aux limites

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u(\ell) = 0, \quad u''(\ell) = 0$$

on obtient d’abord

$$A + D = 0, \quad \omega B + C = 0$$

puis

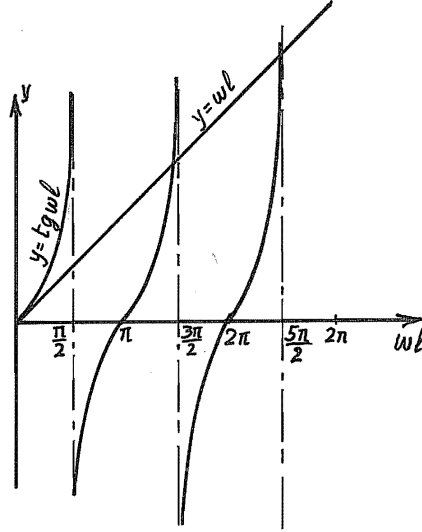
$$\begin{cases} A(\cos \omega \ell - 1) + B(\sin \omega \ell - \omega \ell) &= 0 \\ -A\omega^2 \cos \omega \ell - B\omega^2 \sin \omega \ell &= 0 \end{cases}$$

Ce système homogène de deux équations aux inconnues  $A$  et  $B$  n’admet de solution non nulle que si son déterminant est nul,

$$-\omega^2 \sin \omega \ell (\cos \omega \ell - 1) + \omega^2 (\sin \omega \ell - \omega \ell) = 0$$

soit, en excluant la solution triviale  $\omega = 0$ ,

$$\operatorname{tg} \omega \ell = \omega \ell \tag{15.33}$$

FIGURE 15.10 – Représentation des solutions de  $\text{tg } \omega\ell = \omega\ell$ .

Pour résoudre cette équation, il est utile de tracer les graphes  $y = \text{tg } \omega\ell$  et  $y = \omega\ell$ , voir figure 15.10. Les solutions cherchées sont leurs intersections. Pour  $\omega\ell$  grand, on peut résoudre approximativement l'équation  $\text{tg } \omega\ell = \infty$ , ce qui mène aux solutions asymptotiques

$$(\omega\ell)_n \approx \frac{\pi}{2} + n\pi$$

Pour obtenir avec précision la première solution, on peut utiliser l'itération

$$(\omega\ell)_{k+1} = \arctg(\omega\ell)_k + \pi$$

en partant de  $\pi$ . Après quatre itérations, 4 chiffres sont stabilisés :

$$\omega\ell = 4,493 = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

ce qui donne

$$P_{cr} = \frac{(4,493)^2 EI}{\ell^2} = 20,19 \frac{EI}{\ell^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0,6992\ell)^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{(0,7\ell)^2} \quad (15.34)$$



La solution asymptotique  $\omega\ell = \frac{3\pi}{2}$  eût donné la valeur par excès

$$P_{cr} \approx \frac{\pi^2 EI}{(0,6667\ell)^2} = 22,21 \frac{EI}{\ell^2}$$

### 15.7.3 Poutre bi-encastée



FIGURE 15.11 – Flambage d'une poutre bi-encastée.

Les conditions aux appuis de ce cas représenté en figure 15.11 sont

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u(\ell) = 0, \quad u'(\ell) = 0$$

En les portant dans la solution générale (15.31), on obtient d'abord

$$A + D = 0, \quad \omega B + C = 0$$

puis

$$\begin{cases} A(\cos \omega\ell - 1) + B(\sin \omega\ell - \omega\ell) &= 0 \\ -A\omega \sin \omega\ell + B(\cos \omega\ell - 1) &= 0 \end{cases}$$

Ce système homogène en  $A$  et  $B$  n'admet de solution non nulle que si

$$\omega(\cos \omega \ell - 1)^2 + \omega(\sin \omega \ell - \omega \ell) \sin \omega \ell = 0$$

ce qui implique, pour  $\omega \neq 0$

$$\cos^2 \omega \ell - 2 \cos \omega \ell + 1 + \sin^2 \omega \ell - \omega \ell \sin \omega \ell = 0$$

soit

$$2(1 - \cos \omega \ell) = \omega \ell \sin \omega \ell$$

Ceci peut encore s'écrire

$$4 \sin^2 \frac{\omega \ell}{2} = \omega \ell \cdot 2 \sin \frac{\omega \ell}{2} \cos \frac{\omega \ell}{2}$$

soit

$$4 \sin \frac{\omega \ell}{2} \left( \sin \frac{\omega \ell}{2} - \frac{\omega \ell}{2} \cos \frac{\omega \ell}{2} \right) = 0 \quad (15.35)$$

Cette équation est résolue chaque fois que

$$\sin \frac{\omega \ell}{2} = 0 \quad (15.36)$$

ou

$$\operatorname{tg} \frac{\omega \ell}{2} = \frac{\omega \ell}{2} \quad (15.37)$$

Les solutions de (15.36) sont

$$\frac{\omega \ell}{2} = n\pi, \quad n \text{ entier} > 0$$

soit

$$P = \frac{4n^2 \pi^2 EI}{\ell^2}, \quad P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (15.38)$$

Quant à l'équation (15.37), elle se résout comme dans le cas de la poutre encastrée-appuyée. La plus petite valeur de  $\frac{\omega \ell}{2}$  est alors 4,493, ce qui donne

$$P'_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{(0,6992\ell)^2} \quad (15.39)$$

valeur plus grande que la précédente. L'existence de ces deux familles de modes critiques s'explique aisément : le premier mode critique présente deux points

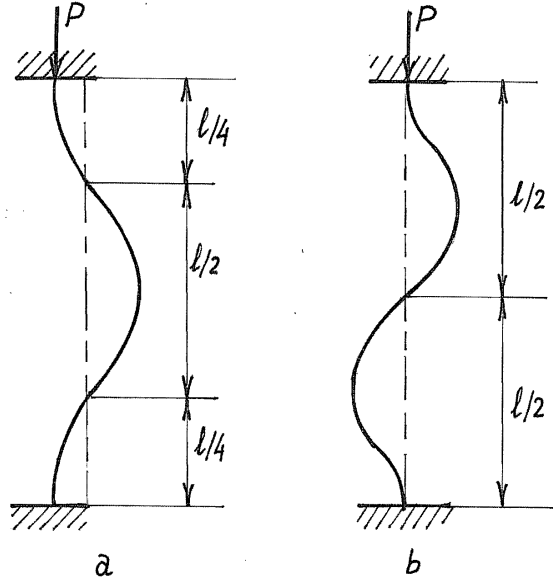


FIGURE 15.12 – Les deux familles de modes critiques d'une poutre bi-encastée.

d'inflexion où  $M = 0$ , voir figure 15.12a. La partie centrale, de longueur  $\ell/2$ , peut donc être identifiée à une poutre sur deux appuis, d'où la solution

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\ell/2)^2}$$

Le deuxième présente un point d'inflexion au centre et la poutre peut donc être assimilée à l'assemblage bout à bout de deux poutres encastées-appuyées de longueur  $\ell/2$ , voir figure 15.12b. Il vient donc

$$P'_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0,6992 \frac{\ell}{2})^2}$$

## 15.8 Colonne flambant sous son propre poids ou sous une charge longitudinale uniformément répartie

### 15.8.1 Colonne encastree à sa base et flambant sous son propre poids

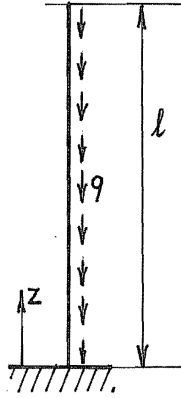


FIGURE 15.13 – Colonne sous une charge uniformément répartie.

Dans ce cas illustré en figure 15.13, soit  $q$  la densité linéique de charge. La solution statique est donc

$$N^0 = -q(\ell - z) \quad (15.40)$$

ce qui mène au problème de stationnarisation de la fonctionnelle

$$\int_0^\ell EI u''^2 dz - q \int_0^\ell (\ell - z) u'^2 dz \quad (15.41)$$

L'équation de la forme critique est donc

$$EI u^{IV} + q \frac{d}{dz} [(\ell - z) u'] = 0 \quad (15.42)$$

avec les conditions aux limites

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -EIu'''(\ell) - q(\ell - \ell)u'(\ell) & = & 0 \\ EIu''(\ell) & = & 0 \\ u(0) & = & 0 \\ u'(0) & = & 0 \end{array} \right. \quad (15.43)$$

La solution exacte de ce problème a été développée par Greenhill [42, 86]. Elle fait appel aux fonctions de Bessel d'ordre  $1/3$  et son exposé est assez lourd. Nous nous contenterons ici de développer une solution approchée par la méthode de Rayleigh-Ritz. Posant

$$u = az^2 + Bz^3 \quad (15.44)$$

on satisfait aux conditions aux limites en  $z = 0$ . On calcule sans difficulté

$$\int_0^\ell (\ell - z)u'^2 dz = \ell^4 \left( \frac{1}{3}A^2 + \frac{3}{10}B^2\ell^2 + \frac{6}{10}AB\ell \right)$$

et

$$\int_0^\ell u''^2 dz = \ell (4A^2 + 12AB\ell + 12B^2\ell^2)$$

Il suffit donc de trouver les points stationnaires de la forme quadratique

$$A^2 \left( 4 - \frac{\beta}{3} \right) + 2AB\ell \left( 6 - \frac{3\beta}{10} \right) + B^2\ell^2 \left( 12 - \frac{3\beta}{10} \right)$$

en posant

$$\beta = \frac{q\ell^3}{EI}$$

Il en découle les équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \left( 4 - \frac{\beta}{3} \right) A + \left( 6 - \frac{3\beta}{10} \right) B & = & 0 \\ \left( 6 - \frac{3\beta}{10} \right) A + \left( 12 - \frac{3\beta}{10} \right) B & = & 0 \end{array} \right.$$

compatibles en dehors de la solution nulle moyennant la condition

$$\left( 4 - \frac{\beta}{3} \right) \left( 12 - \frac{3\beta}{10} \right) - \left( 6 - \frac{3\beta}{10} \right)^2 = 0$$

soit

$$\beta^2 - 160\beta + 1200 = 0$$

La plus petite racine de cette équation est

$$\beta_{cr} = 7,889 \quad (15.45)$$

ce qui donne

$$(q\ell)_{cr} = 7,889 \frac{EI}{\ell^2} \quad (15.46)$$

La solution exacte est  $\beta_{cr} = 7,837$ , inférieure à la valeur approchée de  $7^\circ/\infty$  seulement.

### 15.8.2 Colonne bi-appuyée, soumise à la fois à une charge en bout et à une charge répartie

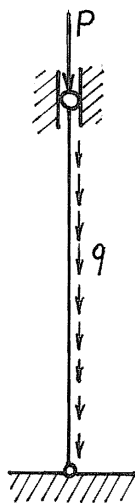


FIGURE 15.14 – Colonne bi-appuyée, soumise à la fois à une charge en bout et à une charge répartie.

En comptant, comme l'indique la figure 15.14, la coordonnée  $z$  à partir du point le plus haut de la poutre, on a ici

$$N^0(z) = -P - qz \quad (15.47)$$

ce qui mène à rendre stationnaire l'expression

$$\int_0^\ell EI u''^2 dz - P \int_0^\ell u'^2 dz - q \int_0^\ell z u'^2 dz$$

On résout ce problème de manière approchée en posant [86]

$$u(z) = A \sin \frac{\pi z}{\ell} \quad (15.48)$$

ce qui ramène la variation seconde à

$$EI \frac{\pi^4}{\ell^4} A^2 \frac{\ell}{2} - P \frac{\pi^2 A^2}{\ell^2} \frac{\ell}{2} - q \frac{\pi^2 A^2}{\ell^2} \frac{\ell^2}{4}$$

Le point stationnaire correspond donc à la condition

$$P + \frac{q\ell}{2} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} = P_E \quad (15.49)$$

On constate que cette solution équivaut à admettre que la moitié de la charge répartie est appliquée à chacune des extrémités de la poutre.

## 15.9 Effet de la déformation due à l'effort tranchant

Pour évaluer l'effet de la déformation due à l'effort tranchant, nous repartirons des expressions (15.24) et (15.25), mais nous abandonnerons l'hypothèse (15.26). La variation seconde s'écrit alors

$$\delta^2 \mathcal{U} = \int_0^\ell \{ E\Omega w'^2 + EI\alpha'^2 + G\Omega^*(\alpha + u'^2) \} dz + \int_0^\ell N_0 u'^2 dz \quad (15.50)$$

Traisons par exemple le cas d'une poutre bi-appuyée chargée en bout. Nous noterons encore  $N_0 = -P$ . Les équations relatives à  $w$  sont les mêmes qu'en l'absence de déformation à l'effort tranchant et mènent encore à  $w = 0$ . Les équations relatives à  $\alpha$  et  $u$  sont

$$\left\{ \begin{array}{ll} -(EI\alpha')' + G\Omega^*(\alpha + u') & = 0 \quad \text{dans } ]0, \ell[ \\ -(G\Omega^*(\alpha + u'))' + (Pu')' & = 0 \quad \text{dans } ]0, \ell[ \\ EI\alpha'(0) & = 0 \\ EI\alpha'(\ell) & = 0 \\ u(0) & = 0 \\ u(\ell) & = 0 \end{array} \right. \quad (15.51)$$

De la deuxième, on tire

$$\alpha' = - \left( 1 - \frac{P}{G\Omega^*} \right) u'' \quad (15.52)$$

soit

$$\alpha = - \left( 1 - \frac{P}{G\Omega^*} \right) u' + A$$

avec  $A = \text{cte}$  et

$$(\alpha + u') = \frac{P}{G\Omega^*} u' + G\Omega^* A$$

Introduisant ces résultats dans la première équation de (15.51), on obtient

$$EI \left( 1 - \frac{P}{G\Omega^*} \right) u''' + Pu' + G\Omega^* A = 0$$

ce qui équivaut à

$$u^{IV} + \omega^2 u'' = 0 \quad (15.53)$$

avec

$$\omega^2 = \frac{P}{EI \left( 1 - \frac{P}{G\Omega^*} \right)} \quad (15.54)$$

Les conditions aux limites sont, compte tenu de (15.52)

$$u(0) = u(\ell) = u''(0) = u''(\ell)$$

On retrouve donc le même problème que sans effort tranchant, mais avec une autre définition de  $\omega$ . La solution est donc encore

$$\omega = \frac{n\pi}{\ell}$$

soit

$$\frac{P}{1 - \frac{P}{G\Omega^*}} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{\ell^2} = n^2 P_E$$

en notant  $P_E$  la charge d'Euler. On en déduit, pour  $m = 1$ ,

$$P_{cr} = P_E \left( 1 - \frac{P_{cr}}{G\Omega^*} \right)$$



soit

$$P_{cr} = \frac{P_E}{1 + \frac{P_E}{G\Omega^*}} \quad (15.55)$$

Ce résultat a été obtenu par Engesser [23]. La correction relative par rapport à la charge d'Euler est

$$\frac{\pi^2 EI}{G\Omega^* \ell^2} \quad (15.56)$$

Pour les poutres courantes, ce rapport est petit, et la correction est négligeable. En revanche, pour les poutres composées de plusieurs matériaux et pour les structures en treillis étudiées comme des poutres à titre d'approximation, la section de cisaillement  $\Omega^*$  peut être relativement petite, de sorte que le rapport (15.56) ne soit plus négligeable devant l'unité. La formule d'Engesser a d'ailleurs été mise à l'honneur suite à la ruine, au début du  $XX^e$  siècle, du Pont du Québec qui était formé de poutres en treillis [24, 25].

## 15.10 Stabilité des plaques

Nous considérerons, dans cette section, des plaques de Kirchhoff soumises à des efforts membranaires

$$N_{\alpha\beta}^0 = t\sigma_{\alpha\beta}^0$$

Dans certaines circonstances, ces efforts peuvent mener au *voilement*, qui consiste en une flexion de la plaque. Le champ de déplacements correspondant est de la forme

$$\begin{cases} u_1 &= -zD_1w(x,y) \\ u_2 &= -zD_2w(x,y) \\ u_3 &= w(x,y) \end{cases} \quad (15.57)$$

Les déformations de Green correspondant à la sollicitation initiale s'écrivent alors, dans le cadre des gradients de déplacements modérés,

$$\begin{aligned}
 \gamma_{11} &= D_1 u_1 + \frac{1}{2}(D_1 u_2)^2 + \frac{1}{2}(D_1 u_3)^2 \\
 &= D_1 u_1 + \frac{1}{2}z^2(D_{12}w)^2 + \frac{1}{2}(D_1 w)^2 \\
 \gamma_{22} &= D_2 u_2 + \frac{1}{2}(D_2 u_1)^2 + \frac{1}{2}(D_2 u_3)^2 \\
 &= D_2 u_2 + \frac{1}{2}z^2(D_{21}w)^2 + \frac{1}{2}(D_2 w)^2 \\
 \gamma_{12} &= \frac{1}{2}(D_1 u_2 + D_2 u_1 + D_1 u_3 D_2 u_3) \\
 &= \frac{1}{2}(D_1 u_2 + D_2 u_1 + D_1 w D_2 w)
 \end{aligned} \tag{15.58}$$

si bien que

$$\begin{aligned}
 \gamma_{11}^2 &= z^2(D_{12}w)^2 + (D_1 w)^2 \\
 \gamma_{22}^2 &= z^2(D_{12}w)^2 + (D_2 w)^2 \\
 \gamma_{12}^2 &= D_1 w D_2 w
 \end{aligned} \tag{15.59}$$

La variation seconde de l'énergie s'écrit donc

$$\begin{aligned}
 \delta^2 \mathcal{U} &= \int_S D \{ (\nabla^2 w)^2 + 2(1 - \nu) [(D_{12}w)^2 - D_{11}w D_{22}w] \} ds \\
 &\quad + \int_S (\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0) \frac{t^3}{12} (D_{12}w)^2 dS + \int_S N_{\alpha\beta}^0 D_\alpha w D_\beta w dS
 \end{aligned}$$

On notera que comme les contraintes initiales sont nécessairement beaucoup plus petites que les modules élastiques, la deuxième intégrale de cette expression est négligeable devant la première. Dès lors, en posant

$$N_{\alpha\beta}^0 = -P \bar{N}_{\alpha\beta} \tag{15.60}$$

on obtient l'expression simplifiée suivante

$$\begin{aligned}
 \delta^2 \mathcal{U} &= \int_S D \{ (\nabla^2 w)^2 + 2(1 - \nu) [(D_{12}w)^2 - D_{11}w D_{22}w] \} ds \\
 &\quad - P \int_S \bar{N}_{\alpha\beta} D_\alpha w D_\beta w dS
 \end{aligned} \tag{15.61}$$

qui est due à Bryan [8].

### 15.11 Voilement d'une plaque rectangulaire simplement appuyée et comprimée dans une direction

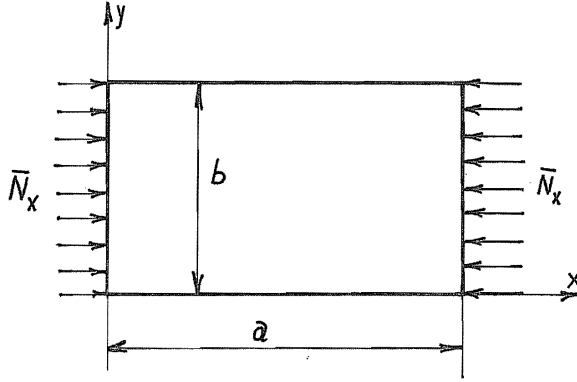


FIGURE 15.15 – Plaque comprimée dans une direction.

La figure 15.15 représente le problème. Développant le déplacement  $w$  en série double de Navier

$$w = \sum_{m,n} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (15.62)$$

on obtient aisément à partir de (15.61), en posant  $\bar{N}_x = 1$ ,

$$\delta^2 \mathcal{U} = D \frac{\pi^4 ab}{4} \sum_{m,n} w_{mn}^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - P \sum_{m,n} \frac{m^2}{a^2} w_{mn}^2 \frac{\pi^2 ab}{4}$$

La variation de  $w_{mn}$  fournit la charge

$$P_{mn} = \frac{D\pi^2 a^2}{m^2} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 = \frac{D\pi^2}{a^2} \left( m + \frac{n^2 a^2}{m b^2} \right)^2 \quad (15.63)$$

Pour  $m$  fixé, c'est toujours  $P_{m1}$  qui a la plus petite valeur,

$$P_{m1} = \frac{D\pi^2}{a^2} \left( m + \frac{1}{m} \frac{a^2}{b^2} \right)^2 \quad (15.64)$$

La valeur critique de  $m$  dépend du rapport  $a/b$ . On a

$$\frac{\partial P_{m1}}{\partial m} = \frac{D\pi^2}{a^2} 2 \left( m + \frac{1}{m} \frac{a^2}{b^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{m^2} \frac{a^2}{b^2} \right)$$

et cette dérivée s'annule pour

$$m = \frac{a}{b} \quad (15.65)$$

C'est donc la valeur entière de  $m$  la plus proche de  $a/b$  qui donne le minimum. La valeur de celui-ci est toujours supérieure à

$$\frac{D\pi^2}{a^2} \left( \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \right)^2 = 4 \frac{D\pi^2}{b^2}$$

On a donc toujours en pratique

$$P_{cr} = 4k \frac{D\pi^2}{b^2}, \quad k \geq 1, \quad k \approx 1 \quad (15.66)$$

Pour trouver la valeur de  $k$ , voyons comment évoluent les charges  $P_{m1}$  en fonction du rapport  $a/b$ . On a

$$\begin{aligned} P_{m1} &= \frac{D\pi^2}{a^2} \left( m + \frac{1}{m} \frac{a^2}{b^2} \right)^2 \\ P_{m+1,1} &= \frac{D\pi^2}{a^2} \left( (m+1) + \frac{1}{(m+1)} \frac{a^2}{b^2} \right)^2 \end{aligned}$$

donc  $P_{m1} = P_{(m+1),1}$  lorsque

$$m + \frac{1}{m} \frac{a^2}{b^2} = (m+1) + \frac{1}{m+1} \frac{a^2}{b^2}$$

soit pour

$$\frac{1}{m(m+1)} \frac{a^2}{b^2} = 1$$

c'est-à-dire

$$\frac{a}{b} = \sqrt{m(m+1)}$$

En ce point, la valeur commune est

$$P_{m1} = \frac{D\pi^2}{a^2} [m + (m+1)]^2 = \frac{D\pi^2}{a^2} (2m+1)^2 = \frac{D\pi^2}{b^2} \left( \frac{4m^2 + 4m + 1}{m^2 + m} \right)$$

soit

$$k = 1 + \frac{1}{4m(m+1)}$$

Ainsi, à partir de  $a/b = 1$ , on a toujours

$$1 < k < 1 + \frac{1}{4m(m+1)} \approx 1 + \frac{1}{4\frac{a^2}{b^2}} = 1 + \frac{b^2}{4a^2}$$

c'est-à-dire que  $k$  ne s'écarte guère de l'unité. En particulier, la transition entre  $P_{11}$  et  $P_{21}$  a lieu pour

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

valeur pour laquelle

$$k = 1 + \frac{1}{8} = 1,125$$

C'est la plus grande valeur pour  $a/b > 1$ . Pour  $a/b < 1$ , on a

$$P_{11} = \frac{D\pi^2}{a^2} \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 = \frac{D\pi^2}{b^2} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)^2$$

soit

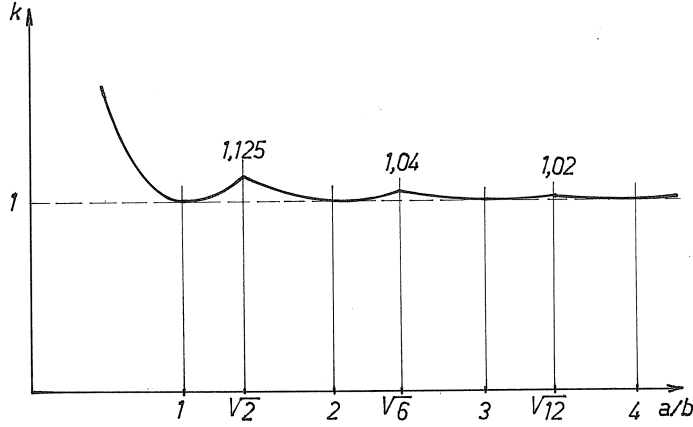
$$k = \frac{1}{4} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)^2$$

Pour les besoins de la pratique, on se place du côté de la sécurité en admettant la valeur unique

$$P_{cr} \approx \frac{4D\pi^2}{b^2}$$

toujours approchée par défaut, et d'autant plus correcte que le rapport  $a/b$  est plus grand. Tout ce qui précède est bien illustré par la figure 15.16 qui représente les valeurs de  $k$  en fonction du rapport  $a/b$ .

Il est intéressant, quant à la physique du problème, de noter que la condition (15.65) signifie que la plaque tend à voiler selon des cellules de voilement sensiblement carrées. C'est l'impossibilité de ce mode de déformation pour  $a/b$  non entier qui relève la charge critique.

FIGURE 15.16 – Diagramme du coefficient  $k$  en fonction du rapport  $a/b$ .

## 15.12 Flambage par flexion et torsion

Dans l'étude du flambage, nous n'avons jusqu'ici considéré que l'instabilité en flexion. Mais il peut se faire, lorsque la poutre a une faible raideur de torsion, que des formes critiques plus complexes mènent à une charge critique plus faible. Ce genre d'instabilité est fréquent dans le cas des poutres à parois minces. Nous considérerons donc des déplacements transversaux incluant de la torsion, soit

$$\begin{aligned} u_1 &= u(z) - y\theta(z) \\ u_2 &= v(z) + x\theta(z) \end{aligned} \quad (15.67)$$

Il vient alors, dans le cadre des gradients de déplacements modérés,

$$\begin{aligned} \gamma_{33} &= D_3 u_3 + \frac{1}{2}(D_3 u_1)^2 + \frac{1}{2}(D_3 u_2)^2 \\ &= \frac{1}{2}u'^2 + \frac{1}{2}v'^2 - u'\theta'y + v'\theta'x + \frac{1}{2}\theta'(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

soit

$$\gamma_{33}^2 = u'^2 + v'^2 - 2u'\theta'y + 2v'\theta'x + \theta'(x^2 + y^2) \quad (15.68)$$

Dans le cas d'un champ de contrainte initial de compression pure

$$\sigma_{33}^0 = -\frac{P}{\Omega} \quad (15.69)$$

on a donc

$$\int_V \sigma_{33}^0 \gamma_{33}^2 dV = -P \int_0^\ell \left( u'^2 + v'^2 + \frac{I_p}{\Omega} \theta'^2 \right) dz \quad (15.70)$$

Reprenant alors le terme linéaire de l'énergie d'une poutre en flexion et torsion, on obtient

$$\begin{aligned} \delta^2 \mathcal{U} = & \int_0^\ell (EI_x u''^2 + EI_y v''^2 + EK \theta''^2 + 2EL_y v'' \theta'' + 2EL_x u'' \theta'') dz \\ & + \int_0^\ell GJ \theta'^2 dz - P \int_0^\ell \left( u'^2 + v'^2 + \frac{I_p}{\Omega} \theta'^2 \right) dz \end{aligned} \quad (15.71)$$

où, rappelons-le, les intégrales  $L_x$  et  $L_y$  sont liées aux coordonnées du centre de torsion par les relations

$$L_x = -I_x y_T, \quad L_y = I_y x_T \quad (15.72)$$

Les équations régissant les formes critiques se déduisent aisément de l'expression (15.71). Dans le cas d'une colonne encastree à sa base et libre à son extrémité, elles s'écrivent

– **Pour**  $u$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} EI_x u^{IV} + EL_x \theta^{IV} + Pu'' & = & 0 \quad \text{dans } ]0, \ell[ \\ u(0) & = & 0 \\ u'(0) & = & 0 \\ EI_x u''(\ell) + EL_x \theta''(\ell) & = & 0 \\ EI_x u'''(\ell) + EL_x \theta'''(\ell) + Pu'(\ell) & = & 0 \end{array} \right.$$

– **Pour**  $v$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} EI_y v^{IV} + EL_y \theta^{IV} + Pv'' & = & 0 \quad \text{dans } ]0, \ell[ \\ v(0) & = & 0 \\ v'(0) & = & 0 \\ EI_y v''(\ell) + EL_y \theta''(\ell) & = & 0 \\ EI_y v'''(\ell) + EL_y \theta'''(\ell) + Pv'(\ell) & = & 0 \end{array} \right.$$

– **Pour  $\theta$**

$$\left\{ \begin{array}{l} EK\theta^{IV} + EL_x u^{IV} + EL_y v^{IV} - GJ\theta'' + P \frac{I_p}{\Omega} \theta'' = 0 \quad \text{dans } ]0, \ell[ \\ \theta(0) = 0 \\ \text{nullité du gauchissement : } \theta'(0) = 0 \\ EK\theta''(\ell) + EL_x u''(\ell) + EL_y v''(\ell) = 0 \\ EK\theta'''(\ell) + EL_x'''(\ell) + EL_y v'''(\ell) - GJ\theta'(\ell) + P \frac{I_p}{\Omega} \theta'(\ell) = 0 \end{array} \right.$$

En posant

$$u = U \left(1 - \cos \frac{\pi z}{\ell}\right), \quad v = \left(1 - \cos \frac{\pi z}{\ell}\right), \quad \theta = \Theta \left(1 - \cos \frac{\pi z}{\ell}\right) \quad (15.73)$$

on satisfait aux trois premières conditions aux limites pour chaque champ. Il reste alors à vérifier les conditions

$$\begin{aligned} \left(EI_x \frac{\pi^3}{8\ell^3} - \frac{P\pi}{2\ell}\right) U + EL_x \frac{\pi^3}{8\ell^3} \Theta &= 0 \\ \left(EI_y \frac{\pi^3}{8\ell^3} - \frac{P\pi}{2\ell}\right) V + EL_y \frac{\pi^3}{8\ell^3} \Theta &= 0 \\ EL_x \frac{\pi^3}{8\ell^3} U + EL_y \frac{\pi^3}{8\ell^3} V + \left(EK \frac{\pi^3}{8\ell^3} + GJ \frac{\pi}{2\ell} - P \frac{I_p}{\Omega} \frac{\pi}{2\ell}\right) \Theta &= 0 \end{aligned} \quad (15.74)$$

En introduisant les notations

$$P_x = \frac{\pi^2 EI_x}{4\ell^2}, \quad P_y = \frac{\pi^2 EI_y}{4\ell^2}, \quad P_\theta = \frac{\Omega}{I_p} \left( \frac{\pi^2 EK}{4\ell^2} + GJ \right) \quad (15.75)$$

on obtient la condition suivante :

$$\begin{vmatrix} P_x - P & 0 & -y_T P_x \\ 0 & P_y - P & x_T P_y \\ -y_T P_x & x_T P_y & \frac{I_p}{\Omega} (P_\theta - P) \end{vmatrix} = 0 \quad (15.76)$$

dont les trois solutions sont les charges critiques relatives aux trois formes fondamentales de flambage. Les formes critiques s'obtiennent alors en combinant (15.73) et (15.74). Il est intéressant de considérer deux cas particuliers.



### 15.12.1 Le centre de torsion coïncide avec le centre de gravité

Dans ce cas,  $L_x = L_y = 0$  et le système (15.74) est découplé. Les trois charges critiques sont  $P_x, P_y, P_\theta$ . Si  $y$  est la plus petite des deux inerties de flexion, le flambage par torsion sera déterminant si

$$\frac{\Omega}{I_p} \left( GJ + \frac{\pi^2 EK}{4\ell^2} \right) \leq \frac{\pi^2 EI_y}{4\ell^2}$$

soit si

$$\frac{J}{I_p} + \frac{E \pi^2 EK}{G 4I_p \ell^2} \leq \frac{\pi^2 EI_y}{4\Omega \ell^2}$$

Or, le gauchissement de torsion  $\psi$  a les coordonnées pour gradient, ce qui implique  $\psi = \mathcal{O}(\rho^2)$  où  $\rho$  est le rayon de giration de la section. Il en découle que

$$K = \int_V \psi^2 dV = \mathcal{O}(\rho^4 \Omega)$$

Comme

$$I_p = \rho^2 \Omega$$

ce qui signifie que l'on doit avoir

$$\frac{J}{I_p} \leq \frac{\pi^2 EI_y}{4\ell^2} - \frac{E \pi^2 EK}{G 4I_p \ell^2} = \mathcal{O}\left(\frac{\rho^2}{\ell^2}\right)$$

Cette condition d'extrême petitesse du rapport  $J/I_p$  n'est vérifiée en pratique que pour les sections minces, pour lesquelles

$$\begin{aligned} J &= \mathcal{O}(\rho t^3), \quad t = \text{épaisseur du profil} \\ I_p &= \mathcal{O}(\rho^4) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\frac{J}{I_p} = \mathcal{O}\left(\frac{t^3}{\rho^3}\right)$$

si bien que le flambement par torsion ne pourra être déterminant que si

$$\frac{t}{\rho} \leq \mathcal{O}\left(\frac{\rho}{\ell}\right)^{2/3} \quad (15.77)$$

### 15.12.2 La section possède un axe de symétrie

Dans ce cas, une des coordonnées du centre de torsion, soit  $y_T$ , est nulle et une des charges critiques est  $P_x$ . Les deux autres vérifient l'équation

$$(P_y - P) \frac{I_p}{\Omega} (P_\theta - P) - x_T^2 P_y = 0$$

soit

$$P^2 - (P_y + P_\theta)P + \left( P_y P_\theta - \frac{\Omega x_T^2}{I_p} P_y \right) = 0$$

Les solutions de cette équation sont données par

$$P = \frac{1}{2} \left[ (P_y + P_\theta) \pm \sqrt{(P_y - P_\theta)^2 + 4 \frac{\Omega x_T^2}{I_p} P_y} \right] \quad (15.78)$$

La *plus petite* de ces valeurs est inférieure à  $P_x$  et à  $P_y$  et la plus grande leur est supérieure. Cependant, pour que cet écart se fasse sentir, il faut que

$$4 \frac{\Omega x_T^2}{I_p} P_y$$

soit du même ordre de grandeur que  $|P_y - P_\theta|$ .

## 15.13 Déversement des poutres fléchies

Le *déversement* est une instabilité particulière des poutres possédant un moment d'inertie  $I_x$  beaucoup plus grand que l'autre et chargées en flexion dans le plan de forte inertie (c'est notamment le cas des poutres en I ayant une âme très haute et des semelles de faible largeur). On observe qu'à partir d'une certaine valeur du moment, le plan de forte inertie de la poutre se voile, dans un mouvement comprenant à la fois de la translation et de la torsion. Nous nous limiterons au cas des poutres ayant deux axes de symétrie. On a donc

$$I_x \gg I_y, \quad I_x \gg J, \quad x_T = y_T = 0 \quad (15.79)$$

La sollicitation initiale est un moment  $x^0$ , pouvant dépendre de  $z$ . Il y est associé une contrainte d'extension

$$\sigma_z^0 = \frac{M_x^0}{I_x} x \quad (15.80)$$

et des contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}^0$  et  $\tau_{yz}^0$  vérifiant les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 \tau_{xz}^0 + D_2 \tau_{yz}^0 + \frac{M_x^{0'}}{I_x} x = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ n_1 \tau_{xz} + n_2 \tau_{yz} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \int_{\Omega} \tau_{xz} d\Omega = T_x^0 = M_x^{0'} \\ \int_{\Omega} \tau_{yz} d\Omega = 0 \end{array} \right. \quad (15.81)$$

La perturbation de déplacement sera de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = u(z) - y\theta(z) \\ u_2 = v(z) + x\theta(z) \end{array} \right. \quad (15.82)$$

ce qui donne, dans le cadre des gradients de déplacements modérés,

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{33}^2 = (D_1 u_1)^2 + (D_1 u_2)^2 = u'^2 + v'^2 - 2y\theta' u' + 2x\theta' v' + \theta'^2 (x^2 + y^2) \\ \gamma_{13}^2 = D_1 u_2 D_3 u_2 = \theta(v' + \theta' x) \\ \gamma_{23}^2 = D_2 u_1 D_3 u_1 = -\theta(u' - \theta' y) \end{array} \right. \quad (15.83)$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\sigma_z^0 \gamma_{33}^2 + 2\tau_{xz}^0 \gamma_{13}^2 + 2\tau_{yz}^0 \gamma_{23}^2) d\Omega \\ = 2M_x^0 \theta' v' + 2\theta v' T_x^0 + 2\theta\theta' \int_{\Omega} (x\tau_{xz} + y\tau_{yz}) d\Omega \end{aligned} \quad (15.84)$$

Examinons la dernière intégrale du second membre. On a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (x\tau_{xz} + y\tau_{yz}) d\Omega &= \int_{\Omega} \left[ \tau_{xz} D_1 \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right) + \tau_{yz} D_2 \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right) \right] d\Omega \\ &= \int_{\partial\Omega} \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right) (n_1 \tau_{xz} + n_2 \tau_{yz}) d\Omega - \int_{\omega} \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right) (D_1 \tau_{xz} + D_2 \tau_{yz}) d\Omega \\ &= \frac{T_x^0}{I_x} \int_{\Omega} \left( \frac{x^3 + xy^2}{2} \right) d\Omega = 0 \end{aligned}$$

en vertu des symétries de la section. En conséquence,

$$\int_{\Omega} (\sigma_z^0 \gamma_{33}^2 + 2\tau_{xz}^0 \gamma_{13}^2 + 2\tau_{yz}^0 \gamma_{23}^2) d\Omega = 2M_x^0 \theta' v' + 2\theta v' T_x^0 = 2v' (M_x^0 \theta)' \quad (15.85)$$

compte tenu du fait que  $T_x^0 = M_x^{0'}$ .

La variation seconde de l'énergie de déformation s'écrit donc, en posant  $M_x^0 = \lambda\mu(z)$ ,

$$\delta^2\mathcal{U} = \int_0^\ell (EI_y v''^2 + EK\theta''^2 + GJ\theta'^2)dz + 2\lambda \int_0^\ell v'(\mu\theta)'dz \quad (15.86)$$

### 15.13.1 Déversement d'une poutre soumise à un moment quelconque et appuyée à ses extrémités de telle façon que $v = 0$ et $\theta = 0$

Ce genre d'appui correspond rigoureusement à une fourche articulée à ses extrémités, voir figure 15.17. La variation de  $v$  dans (15.86) fournit les conditions

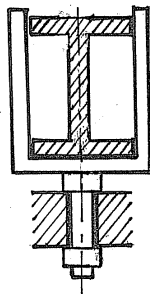


FIGURE 15.17 – Appui sur fourche.

$$\begin{aligned} EI_y v^{IV} - \lambda(\mu\theta)'' &= 0 \quad \text{dans } ]0, \ell[ \\ v(0) = v(\ell) &= 0 \\ EI_y v''(0) = EI_y v''(\ell) &= 0 \end{aligned} \quad (15.87)$$

De l'équation (15.87), on déduit

$$v'' = \lambda \frac{\mu\theta}{EI_y} + C_1 z + C_2$$

et, comme  $v''$  et  $\theta$  s'annulent aux extrémités, cela se ramène à

$$v'' = \lambda \frac{\mu\theta}{EI_y} \quad (15.88)$$

Réintroduisons ce résultat dans (15.86). On a d'une part

$$\int_0^\ell EI_y v''^2 dz = \lambda^2 \int_0^\ell \frac{\mu^2 \theta^2}{EI_y} dz$$

et d'autre part, comme  $\theta = 0$  aux extrémités,

$$2\lambda \int_0^\ell v'(\mu\theta)' dz = 2[v'\mu\theta]_0^\ell - 2 \int_0^\ell v'' \frac{\mu\theta}{EI_y} dz = -2\lambda^2 \int_0^\ell \frac{\mu^2 \theta^2}{EI_y} dz$$

Ceci ramène la variation seconde à l'expression suivante qui ne contient que le champ  $\theta$  :

$$\delta^2 \mathcal{U} = \int_0^\ell (EK\theta''^2 + GJ\theta'^2) dz - \lambda^2 \int_0^\ell \frac{\mu^2 \theta^2}{EI_y} dz \quad (15.89)$$

Il en découle la formule générale

$$\lambda_{cr} = \sqrt{EI_y \cdot GJ} \left( \inf_{\theta} \frac{\int_0^\ell (\theta'^2 + \frac{EK}{GJ} \theta''^2) dz}{\int_0^\ell \mu^2 \theta^2 dz} \right)^{1/2} \quad (15.90)$$

Traisons le cas particulier d'un moment constant ( $\mu = 1$ ). La variation de  $\theta$  dans (15.89) conduit alors à l'équation

$$EK\theta^{IV} - GJ\theta'' - \lambda^2 \frac{\theta}{EI_y} = 0$$

La solution générale de cette équation est

$$\theta = C_1 \cos \alpha z + C_2 \sin \alpha z + C_3 \operatorname{ch} \beta z + C_4 \operatorname{sh} \beta z$$

avec

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{G^2 J^2 + 4\lambda^2 \frac{K}{I_y}} - GJ}{2EK}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{G^2 J^2 + 4\lambda^2 \frac{K}{I_y}} + GJ}{2EK}}$$

Les conditions en  $z = 0$  sont

$$\begin{aligned} \theta &= 0 & \text{d'où} & C_1 + C_3 = 0 \\ \theta'' &= 0 & \text{d'où} & \alpha C_1 + \beta C_3 = 0 \end{aligned}$$

ce qui implique  $C_1 = C_3 = 0$ . En  $z = \ell$ ,

$$\begin{aligned}\theta &= 0 & \text{d'où} & C_2 \sin \alpha \ell + C_4 \operatorname{sh} \beta \ell = 0 \\ \theta'' &= 0 & \text{d'où} & -\alpha^2 C_2 \sin \alpha \ell + \beta^2 C_4 \operatorname{sh} \beta \ell = 0\end{aligned}$$

La compatibilité de ce système en  $C_2$  et  $C_4$  exige

$$\sin \alpha \ell \operatorname{sh} \beta \ell (\alpha^2 + \beta^2) = 0$$

et, comme  $\alpha$  et  $\beta$  sont positifs, cela implique

$$\sin \alpha \ell = 0$$

et, donc,  $C_4 = 0$ . On obtient finalement

$$\theta = C_2 \sin \alpha z$$

avec  $\alpha \ell = n\pi$ , soit

$$\sqrt{G^2 J^2 + 4\lambda^2 \frac{K}{I_y}} - GJ = 2EK \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2}$$

c'est-à-dire

$$G^2 J^2 + 4\lambda^2 \frac{K}{I_y} = \left( 2EK \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} \right)^2 + G^2 J^2 + 4EK \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} GJ$$

ou encore,

$$\lambda^2 = \frac{EI_y GJ}{\ell^2} n^2 \pi^2 \left( 1 + \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} \frac{EK}{GJ} \right)$$

La charge critique est donc

$$\lambda_{cr} = \frac{\sqrt{EI_y GJ}}{\ell} \pi \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{\ell^2} \frac{EK}{GJ}} \quad (15.91)$$

### 15.13.2 Remarque sur la répartition des charges [58]

Dans le problème du déversement, si les charges ne sont pas appliquées sur l'axe neutre, mais à une hauteur  $a$  par rapport à celui-ci, leur énergie potentielle s'écrit (voir fig. 15.18)

$$\mathcal{P} = -P[u + a(1 - \cos \theta)]$$

si bien que

$$\delta^2 \mathcal{P} = -Pa\theta^2$$

et ce terme doit être ajouté à la variation seconde :

$$\delta^2 \mathcal{E} = \delta^2 \mathcal{U} - Pa\theta^2 \quad (15.92)$$

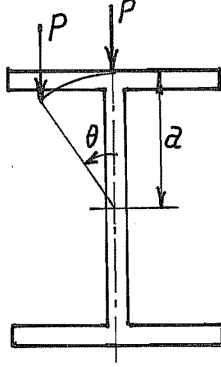


FIGURE 15.18 – Effet déstabilisant de la hauteur du point d’application de la charge.

### 15.13.3 Déversement d’une poutre appuyée sur des fourches en ses deux extrémités, sous l’effet d’une charge centrale appliquée à une hauteur $a$ par rapport à l’axe neutre

On peut chercher une solution approchée de ce problème par une technique de Rayleigh-Ritz, en posant

$$\theta(z) = \Theta \sin \frac{\pi z}{\ell} \quad (15.93)$$

Le moment d’équilibre vaut

$$M_x^0 = \begin{cases} P \frac{z}{2} & \text{dans } ]0, \ell/2[ \\ P \frac{\ell - z}{2} & \text{dans } ]\ell/2, \ell[ \end{cases}$$

Il vient alors, en tenant compte de la symétrie du problème par rapport au point d'application de la charge,

$$\begin{aligned}\delta^2 \mathcal{E} &= \int_0^\ell (EK\theta'^2 + GK\theta'^2)dz - \frac{2P^2}{4EI_x} \int_0^{\ell/2} z^2 \theta^2 dz - Pa \left[ \theta \left( \frac{\ell}{2} \right) \right]^2 \\ &= EK \frac{\pi^4}{2\ell^3} \Theta^2 + GJ \frac{\pi^2}{2\ell} \Theta^2 - 2 \frac{P^2 \Theta^2}{4EI_x} \int_0^{\ell/2} z^2 \sin^2 \frac{\pi z}{\ell} dz - Pa \Theta^2\end{aligned}$$

Pour le calcul de l'intégrale qui reste encore, on note que

$$\begin{aligned}\int_0^{\ell/2} z^2 \sin^2 \frac{\pi z}{\ell} dz &= \frac{1}{2} \int_0^{\ell/2} z^2 \left( 1 - \cos \frac{2\pi z}{\ell} \right) dz \\ &= \frac{\ell^3}{48} - \frac{1}{2} \int_0^{\ell/2} z^2 \cos \frac{2\pi z}{\ell} dz \\ &= \frac{\ell^3}{48} - \frac{\ell^3}{16\pi^3} \int_0^\pi \xi^2 \cos \xi d\xi \\ &= \ell^3 \left\{ \frac{1}{48} - \frac{1}{16\pi^3} [2\xi \cos \xi + (\xi^2 - 2) \sin \xi]_0^\pi \right\} \\ &= \ell^3 \left( \frac{1}{48} + \frac{1}{8\pi^2} \right) = \ell^3 \frac{\pi^2 + 6}{48\pi^2}\end{aligned}$$

L'annulation de la variation seconde donne alors une équation du second degré en  $P$ ,

$$\frac{(\pi^2 + 6)\ell^3}{96\pi^2 EI_x} P^2 + Pa - \frac{\pi^2}{2\ell} \left( 1 + \frac{\pi^2}{\ell^2} \frac{EK}{GJ} \right) GJ = 0$$

soit

$$P^2 + \frac{96\pi^2 EI_x a}{(\pi^2 + 6)\ell^3} P - \frac{48\pi^4}{\pi^2 + 6} \frac{EI_x GJ}{\ell^4} \left( 1 + \frac{\pi^2}{\ell^2} \frac{EK}{GJ} \right) = 0$$

La racine positive de cette équation de la forme

$$P^2 + bP - c = 0$$

est

$$P = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2} = \frac{c}{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} + \frac{b}{2}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{4c}} + \frac{b}{2\sqrt{c}}}$$



soit, explicitement,

$$P_{cr} = 17,16 \frac{\sqrt{EI_x GJ \left(1 + \frac{\pi^2}{\ell^2} \frac{EK}{GJ}\right)}}{\ell^2} \cdot \mathcal{K} \quad (15.94)$$

avec

$$\mathcal{K} = \frac{1}{\sqrt{1 + 12,10 \frac{a^2}{\ell^2} \frac{EI_x}{GJ \left(1 + \frac{\pi^2}{\ell^2} \frac{EK}{GJ}\right)} + 3,478 \frac{a}{\ell} \sqrt{\frac{EI_x}{GJ \left(1 + \frac{\pi^2}{\ell^2} \frac{EK}{GJ}\right)}}}} \quad (15.95)$$

Pour les faibles valeurs du rapport  $a/\ell$ , on peut écrire sans grande erreur

$$P_{cr} = 17,16 \frac{\sqrt{EI_x GJ \left(1 + \frac{\pi^2}{\ell^2} \frac{EK}{GJ}\right)}}{\ell^2} \left(1 - 3,478 \frac{a}{\ell} \sqrt{\frac{EI_x}{GJ \left(1 + \frac{\pi^2}{\ell^2} \frac{EK}{GJ}\right)}}\right) \quad (15.96)$$

La formule (15.94) estime la charge critique avec un excès d'environ 3%. Les valeurs exactes ont été calculées par Timoshenko [85] à partir d'un développement en série.



## Annexe A

# Équations de l'élasticité en coordonnées curvilignes orthogonales

### A.1 Introduction

Il n'est pas rare de devoir écrire les équations de l'élasticité en coordonnées curvilignes. Le plus souvent, il est vrai, il s'agit de coordonnées curvilignes orthogonales. Mais après un certain nombre de travaux dans ce cadre restreint [14], nous sommes finalement arrivé à la conclusion que le chemin le plus simple est encore d'examiner au départ le cas de coordonnées curvilignes quelconques, puis de particulariser les résultats aux coordonnées curvilignes orthogonales. On peut ainsi obtenir sans grand effort la forme générale des opérateurs courants – gradient, divergence, rotationnel, laplacien – ainsi que l'expression générale des déformations et des équations d'équilibre pour tout système orthogonal.

### A.2 Coordonnées curvilignes

#### A.2.1 Base covariante

Soit  $\mathbf{P}$  un point de l'espace euclidien à trois dimensions, dépendant de trois coordonnées  $x^1, x^2, x^3$ , de telle façon que  $\mathbf{P}(x^1, x^2, x^3) \in C^2$ . On appelle *base*

*covariante* l'ensemble des trois vecteurs

$$\mathbf{g}_i = D_i \mathbf{P} \quad (\text{A.1})$$

pour autant qu'ils soient linéairement indépendants. Tout vecteur  $\mathbf{a}$  peut alors être mis sous la forme

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{g}_i \quad (\text{A.2})$$

Les nombres  $a^i$  sont appelés *composantes contravariantes du vecteur a*.

### A.2.2 Tenseur métrique

Pour une variation infinitésimale  $dx^i$  des coordonnées, le point  $\mathbf{P}$  se déplace d'un vecteur  $d\mathbf{P} = \mathbf{g}_i dx^i$ . L'élément de longueur correspondant est donné par

$$ds^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P} = \mathbf{g}_i dx^i \cdot \mathbf{g}_j dx^j = g_{ij} dx^i dx^j \quad (\text{A.3})$$

ce qui fait apparaître le *tenseur métrique*

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \quad (\text{A.4})$$

qui, par définition, est symétrique et défini positif. Son inverse est noté  $g^{ij}$ , c'est-à-dire que

$$g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i \quad (\text{A.5})$$

### A.2.3 Base contravariante

Appliquant le tenseur métrique inverse  $g^{ij}$  à la base covariante, on obtient les vecteurs

$$\mathbf{g}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j \quad (\text{A.6})$$

qui jouissent de la propriété suivante :

$$\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = g^{ik} \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_j = g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i \quad (\text{A.7})$$

Ces vecteurs  $\mathbf{g}^i$  forment la *base contravariante*. La propriété (A.7) exprime que les deux bases sont *biorthogonales*. Tout vecteur  $\mathbf{a}$  peut être mis sous la forme

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{g}^i \quad (\text{A.8})$$

Les nombres  $a_i$  sont appelés *composantes covariantes du vecteur a*. On notera que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{g}_i = a_j \mathbf{g}^j \cdot \mathbf{g}_i = a_j \delta_i^j = a_i \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{g}^i = a^k \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}^i = a^k \delta_i^k = a^i \quad (\text{A.10})$$

### A.2.4 Produit scalaire de deux vecteurs

Étant donné deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ , on a les quatre expressions suivantes de leur produit scalaire :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{cases} a_i \mathbf{g}^i \cdot b^k \mathbf{g}_k & = & a_i b^k \delta_k^i & = & a_i b^i \\ a^i \mathbf{g}_i \cdot b_k \mathbf{g}^k & = & a^i b_k \delta_i^k & = & a^i b_i \\ a^i \mathbf{g}_i \cdot b^j \mathbf{g}_j & = & g_{ij} a^i b^j \\ a_i \mathbf{g}^i \cdot b_j \mathbf{g}^j & = & g^{ij} a_i b_j \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

### A.2.5 Produit mixte et produit vectoriel

#### Produit mixte de trois vecteurs

Le *produit mixte*  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  de trois vecteurs  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}$  est un nombre défini comme suit :

- Sa *grandeur* est égale au volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs en question.
- Son *signe* est positif si le trièdre  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$  a la même orientation (dextrorsum ou sinistrorsum) que le trièdre  $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ , négatif dans le cas contraire.

Il va de soi que cette définition n'est pas totalement indépendante de la base choisie, puisque le produit mixte change de signe si l'on change l'orientation d'un des vecteurs de base ou si l'on permute deux éléments de la base. C'est pourquoi on dit que le produit mixte est un *pseudo-scalaire*.

Le produit mixte jouit de la propriété suivante :

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{e} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{f} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{e} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{f} \\ \mathbf{c} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{c} \cdot \mathbf{e} & \mathbf{c} \cdot \mathbf{f} \end{vmatrix} \quad (\text{A.12})$$

qu'il est facile de vérifier dans un système d'axes cartésiens rectangulaires, où

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Introduisant alors le pseudo-tenseur de Lévy-Civita

$$\varepsilon_{ijk} = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k) \quad (\text{A.13})$$

on remarquera qu'il est totalement antisymétrique et ne possède de ce fait qu'une seule composante indépendante, à savoir

$$\varepsilon_{123} = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3) > 0$$

La propriété (A.12) entraîne alors

$$(\varepsilon_{123})^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_3 \\ \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_3 \\ \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_3 \end{vmatrix} = g$$

en notant  $g$  le déterminant du tenseur métrique. Il vient donc

$$\varepsilon_{123} = \sqrt{g} \quad (\text{A.14})$$

### Produit vectoriel

On définit alors le *produit vectoriel*  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  de deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  par

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{g}_k) \mathbf{g}^k$$

Développant  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  dans la base covariante, on obtient alors

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a^i b^j (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k) \mathbf{g}^k = \varepsilon_{kij} a^i b^j \mathbf{g}^k$$

soit, pour  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ,

$$c_k = \varepsilon_{kij} a^i b^j \quad (\text{A.15})$$

De la même façon, en posant

$$\varepsilon^{ijk} = (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}^k) = g^{i\ell} g^{jm} g^{kn} \varepsilon_{\ell mn} \quad (\text{A.16})$$

on trouve

$$\varepsilon^{123} = \frac{1}{\sqrt{g}} \quad (\text{A.17})$$

et, pour  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , il vient

$$c^i = \varepsilon^{ijk} a_j b_k \quad (\text{A.18})$$

### Produits de pseudo-tenseurs de Lévy-Civita

La propriété (A.12) implique

$$\begin{aligned}\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{lmn} &= (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}^k)(\mathbf{g}_\ell, \mathbf{g}_m, \mathbf{g}_n) = \begin{vmatrix} \delta_\ell^i & \delta_m^i & \delta_n^i \\ \delta_\ell^j & \delta_m^j & \delta_n^j \\ \delta_\ell^k & \delta_m^k & \delta_n^k \end{vmatrix} \\ &= \delta_\ell^i \delta_m^j \delta_n^k + \delta_\ell^j \delta_m^k \delta_n^i + \delta_m^i \delta_n^j \delta_\ell^k - \delta_n^i \delta_m^j \delta_\ell^k - \delta_\ell^i \delta_n^j \delta_m^k - \delta_m^i \delta_\ell^j \delta_n^k \quad (\text{A.19})\end{aligned}$$

En particulier,

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{imn} = 3\delta_m^j \delta_n^k + \delta_n^j \delta_m^k + \delta_m^k \delta_n^j - \delta_n^k \delta_m^j - 3\delta_n^j \delta_m^k - \delta_m^j \delta_n^k = \delta_m^j \delta_n^k - \delta_m^k \delta_n^j \quad (\text{A.20})$$

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{ijn} = 3\delta_n^k - \delta_n^k = 2\delta_n^k \quad (\text{A.21})$$

et

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6 \quad (\text{A.22})$$

## A.3 Dérivation des vecteurs de base

### A.3.1 Dérivées de la base covariante

Dans maintes applications, il est nécessaire de dériver les vecteurs de base. A cette fin, on pose

$$D_k \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_\ell = \Gamma_{k\ell i} \quad (\text{A.23})$$

On donne aux  $\Gamma_{k\ell i}$  le nom de *symboles de Christoffel de première espèce*. Ils sont symétriques par rapport à leurs indices extrêmes, puisque

$$\Gamma_{k\ell i} = D_{ki} \mathbf{P} \cdot \mathbf{g}_\ell$$

En projetant les dérivées de la base covariante sur la base contravariante, on obtient

$$D_k \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^\ell = g^{\ell m} D_k \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_m = g^{\ell m} \Gamma_{kmi} = \Gamma_k^\ell{}_i \quad (\text{A.24})$$

Les  $\Gamma_k^\ell{}_i$  sont appelés *symboles de Christoffel de seconde espèce*.

### A.3.2 Dérivées de la base contravariante

Pour obtenir les dérivées de la base contravariante, notons que

$$D_k \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^\ell = D_k (\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_\ell) - \mathbf{g}^i \cdot D_k \mathbf{g}_\ell = -\Gamma_k^i{}_\ell \quad (\text{A.25})$$

### A.3.3 Relations entre les symboles de Christoffel et le tenseur métrique

On a immédiatement

$$D_i g_{jk} = D_i(\mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}_k) = D_i \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}_k + \mathbf{g}_j \cdot D_i \mathbf{g}_k = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{ijk} \quad (\text{A.26})$$

Écrivons trois fois cette relation, en permutant les indices de manière cyclique :

$$\begin{aligned} D_i g_{jk} &= \Gamma_{ijk} + \Gamma_{ikj} \\ D_j g_{ki} &= \Gamma_{jki} + \Gamma_{jik} \\ D_k g_{ij} &= \Gamma_{kij} + \Gamma_{kji} \end{aligned}$$

et soustrayons la deuxième relation de la somme des deux autres, puis divisons par deux. On obtient, en tenant compte de la symétrie des symboles de Christoffel par rapport à leurs indices extrêmes, la relation fondamentale suivante :

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(D_i g_{jk} + D_k g_{ij} - D_j g_{ki}) \quad (\text{A.27})$$

Cette relation est très utile, car elle permet de calculer les symboles de Christoffel à partir du tenseur métrique.

## A.4 Dérivation covariante d'un vecteur

La dérivation d'un vecteur nécessite à la fois la dérivation de ses composantes et celle de la base. Pour  $\mathbf{u} = u^i \mathbf{g}_i$ , on a

$$D_k \mathbf{u} = D_k u^i \mathbf{g}_i + u^i D_k \mathbf{g}_i = D_k u^i \mathbf{g}_i + u^i \Gamma_{ik}^\ell \mathbf{g}_\ell = (D_k u^i + u^\ell \Gamma_{k\ell}^i) \mathbf{g}_i$$

La quantité entre parenthèses est appelée *dérivée covariante* et notée  $u^i|_k$ . Ainsi,

$$D_k \mathbf{u} = u^i|_k \mathbf{g}_i \quad \text{avec} \quad u^i|_k = D_k u^i + \Gamma_{k\ell}^i u^\ell \quad (\text{A.28})$$

Passons au cas  $\mathbf{u} = u_i \mathbf{g}^i$ . On a

$$D_k \mathbf{u} = D_k u_i \mathbf{g}^i + u_i D_k \mathbf{g}^i = D_k u_i \mathbf{g}^i - u_i \Gamma_{k\ell}^i \mathbf{g}^\ell = (D_k u_i - \Gamma_{k\ell}^i u_\ell) \mathbf{g}^i$$

ce qui mène à écrire

$$D_k \mathbf{u} = u_i|_k \mathbf{g}^i \quad \text{avec} \quad u_i|_k = D_k u_i - \Gamma_{k\ell}^i u_\ell \quad (\text{A.29})$$



## A.5 Tenseurs du second ordre et leurs dérivées covariantes

Un tenseur du second ordre est une grandeur à deux indices qui, appliquée à un vecteur, donne un nouveau vecteur. Plusieurs cas sont possibles :

1.  $a_{ij}b^j = c_i$  (tenseur deux fois covariant)
2.  $a^{ij}b_j = c^i$  (tenseur deux fois contravariant)
3.  $a_j^ib^j = c^i$  (tenseur mixte)
4.  $a_i^jb_j = c_i$  (tenseur mixte)

La dérivation covariante des tenseurs est définie par les relations

$$\begin{aligned} (a_{ij}b^j)|_k &= a_{ij}|_k b^j + a_{ij}b^j|_k \\ (a^{ij}b_j)|_k &= a^{ij}|_k b_j + a^{ij}b_j|_k \\ (a_j^ib^j)|_k &= a_j^i|_k b^j + a_j^ib^j|_k \\ (a_i^jb_j)|_k &= a_i^j|_k b_j + a_i^jb_j|_k \end{aligned}$$

Examinons le cas d'un tenseur deux fois contravariant. Posant  $c^i = a^{ij}b_j$ , on doit donc avoir

$$c^i|_k = D_k c^i + \Gamma_k^i{}_\ell c^\ell = a^{ij}|_k b_j + a^{ij} D_k b_j - a^{ij} \Gamma_k^\ell{}_j b_\ell$$

soit

$$D_k a^{ij} b_j + a^{ij} D_k b_j + \Gamma_k^i{}_\ell a^{\ell j} b_j = a^{ij}|_k b_j + a^{ij} D_k b_j - a^{ij} \Gamma_k^\ell{}_j b_\ell$$

ce qui équivaut à

$$a^{ij}|_k b_j = (D_k a_{ij} + \Gamma_k^i{}_\ell a^{\ell j} + \Gamma_k^j{}_\ell a^{i\ell}) b_\ell$$

Ceci devant être vrai pour tout vecteur  $b_i$ , on obtient

$$a^{ij}|_k = D_k a_{ij} + \Gamma_k^i{}_\ell a^{\ell j} + \Gamma_k^j{}_\ell a^{i\ell} \quad (\text{A.30})$$

On montrerait de même que

$$a_{ij}|_k = D_k a_{ij} - \Gamma_k^\ell{}_i a_{\ell j} - \Gamma_k^\ell{}_j a_{i\ell} \quad (\text{A.31})$$

$$a_j^i|_k = D_k a_j^i + \Gamma_k^i{}_\ell a_j^\ell - \Gamma_k^\ell{}_j a_\ell^i \quad (\text{A.32})$$

## A.6 Lemme de Ricci

Calculons les dérivées covariantes du tenseur métrique. On a

$$g_{ij}|_k = D_k g_{ij} - \Gamma_{k\ i}^\ell g_{\ell j} - \Gamma_{k\ j}^\ell g_{i\ell} = D_k g_{ij} - \Gamma_{kji} - \Gamma_{kij} = 0$$

en vertu de (A.26). C'est le *lemme de Ricci : les dérivées covariantes du tenseur métrique sont nulles*.

Le tenseur métrique inverse possède la même propriété. En effet, en dérivant l'identité

$$g_{ij}g^{jm} = \delta_i^m$$

on obtient

$$D_k g_{ij}g^{jm} + g_{ij}D_k g^{jm} = 0$$

Contractons avec  $g^{pi}$ . On obtient

$$g^{pi}g^{jm}D_k g^{ij} + \delta_j^p D_k g^{jm} = 0$$

soit

$$\begin{aligned} D_k g^{pm} &= -g^{pi}g^{jm}D_k g_{ij} \\ &= -g^{pi}g^{jm}(\Gamma_{kij} + \Gamma_{kji}) \\ &= -g^{jm}\Gamma_{k\ j}^p - g^{pi}\Gamma_{k\ i}^m \end{aligned}$$

Dès lors,

$$g^{pm}|_k = D_k g^{pm} + \Gamma_{k\ j}^p g^{jm} + \Gamma_{k\ i}^m g^{pi} = 0$$

Enfin, on a encore

$$\delta_i^j|_k = D_k \delta_i^j + \Gamma_{k\ m}^j \delta_i^m - \Gamma_{k\ i}^m \delta_m^j = 0 + \Gamma_{k\ i}^j - \Gamma_{k\ i}^j = 0$$

Une conséquence importante de ce lemme est

$$\begin{aligned} a_i|_k &= (g_{ij}a^j)|_k = g_{ij}a^j|_k \\ a^i|_k &= (g^{ij}a_j)|_k = g^{ij}a_j|_k \end{aligned} \tag{A.33}$$

## A.7 Propriétés de $\sqrt{g}$

Remarquons d'abord que l'élément de volume élémentaire se construit sur le parallélépipède formé par les trois vecteurs  $\mathbf{g}_1 dx^1$ ,  $\mathbf{g}_2 dx^2$  et  $\mathbf{g}_3 dx^3$ , ce qui donne

$$dV = (\mathbf{g}_1 dx^1, \mathbf{g}_2 dx^2, \mathbf{g}_3 dx^3) = \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 \tag{A.34}$$

Les dérivées de  $\sqrt{g}$  sont tout-à-fait remarquables. En effet,

$$\begin{aligned} D_i(\sqrt{g}) &= D_i\varepsilon_{123} = (D_i\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3) + (\mathbf{g}_1, D_i\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3) + (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, D_i\mathbf{g}_3) \\ &= \Gamma_{i\ 1}^k(\mathbf{g}_k, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3) + \Gamma_{i\ 2}^k(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_k, \mathbf{g}_3) + \Gamma_{i\ 3}^k(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_k) \end{aligned}$$

En vertu des propriétés du produit mixte, cela donne

$$D_i(\sqrt{g}) = \Gamma_{i\ 1}^1\varepsilon_{123} + \Gamma_{i\ 2}^2\varepsilon_{123} + \Gamma_{i\ 3}^3\varepsilon_{123} = \sqrt{g}\Gamma_{i\ k}^k \quad (\text{A.35})$$

Enfin, il y a lieu de signaler une identité utile :

$$D_i(\sqrt{g}\mathbf{g}^i) = (D_i\sqrt{g})\mathbf{g}^i + \sqrt{g}D_i\mathbf{g}^i = \sqrt{g}(\Gamma_{i\ k}^k\mathbf{g}^i - \Gamma_{i\ \ell}^i\mathbf{g}^\ell) = 0 \quad (\text{A.36})$$

que nous appellerons dans la suite *identité de Jacobi*<sup>1</sup>.

## A.8 Opérateurs différentiels courants

### A.8.1 Gradient

Étant donné une fonction scalaire  $\varphi$ , on définit son gradient par la relation

$$d\varphi = \mathbf{grad}\varphi \cdot d\mathbf{P}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$d\varphi = \mathbf{grad}\varphi \cdot \mathbf{g}_i dx^i$$

Or, on sait que

$$d\varphi = D_i\varphi dx^i$$

Par comparaison, on déduit que

$$\mathbf{grad}\varphi \cdot \mathbf{g}_i = D_i\varphi \quad (\text{A.37})$$

ce qui revient à dire que les dérivées courantes sont les composantes covariantes du gradient.

---

1. Dans le cadre d'une présentation des coordonnées curvilignes par transformation des coordonnées cartésiennes [14], le même résultat se retrouve comme une propriété du déterminant jacobien et est connu sous le nom d'*identité de Jacobi* [39]. Il est donc légitime de conserver cette appellation pour l'identité (A.36) ci-dessus qui est son strict équivalent géométrique.

### A.8.2 Élément de surface orienté

Considérons une fonction arbitraire  $\varphi$ . On connaît la relation d'Ostrogradski

$$\int_V \mathbf{grad} \varphi dV = \int_S \varphi \mathbf{n} dS \quad (\text{A.38})$$

Le groupement  $\mathbf{n} dS$  qui apparaît dans l'élément de surface est ce que nous appellerons l'élément de surface orienté. Transposons la première intégrale de la relation ci-dessus dans l'espace des coordonnées  $x^i$ . Au volume  $V$  de l'espace physique correspond le volume  $V'$  de l'espace des coordonnées. L'élément de volume physique étant  $dV = \sqrt{g} dV'$ , on a

$$\int_V \mathbf{grad} \varphi dV = \int_{V'} \sqrt{g} D_i \varphi \mathbf{g}^i dV'$$

Notons  $S'$  la frontière de  $V'$  et soit  $\nu_i$  le vecteur normal à cette surface. L'application du théorème d'Ostrogradski donne ici

$$\int_{V'} \sqrt{g} D_i \varphi \mathbf{g}^i dV' = \int_{S'} \sqrt{g} \nu_i \varphi \mathbf{g}^i dS' - \int_{V'} \varphi D_i (\sqrt{g} \mathbf{g}^i) dV' \quad (\text{A.39})$$

et le dernier terme du second membre est nul en vertu de l'identité de Jacobi. L'identification des termes de surface de (A.38) et (A.39) pour toute fonction  $\varphi$  conduit alors à la relation

$$\mathbf{n} dS = \sqrt{g} \nu_i \mathbf{g}^i dS'$$

soit encore

$$n_j dS = \mathbf{n} \cdot \mathbf{g}_j dS = \sqrt{g} \nu_j dS' \quad (\text{A.40})$$

### A.8.3 Divergence

La formule classique

$$\int_V \text{div} \mathbf{u} dV = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{A.41})$$

se transforme en

$$\int_{V'} \sqrt{g} \text{div} \mathbf{u} dV' = \int_{S'} \sqrt{g} \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}^i \nu_i dS' = \int_{S'} \sqrt{g} u^i \nu_i dS' = \int_{V'} D_i (\sqrt{g} u^i) dV'$$

ce qui donne

$$\text{div} \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{g}} D_i (\sqrt{g} u^i) \quad (\text{A.42})$$

Tenant compte de l'expression (A.35) des dérivées de  $\sqrt{g}$ , on peut encore écrire

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g} D_i u^i + u^i \sqrt{g} \Gamma_{i \ k}^k) = D_i u^i + \Gamma_{i \ k}^i u^k = u^i|_i \quad (\text{A.43})$$

On déduit alors de (A.41) la relation fondamentale

$$\int_V u^i|_i dV = \int_S u^i n_i dS \quad (\text{A.44})$$

#### A.8.4 Laplacien

Le laplacien est défini par la relation

$$\Delta \varphi = \operatorname{div} \mathbf{grad} \varphi$$

ce qui, en vertu de (A.42) et de (A.37) traduit sous la forme

$$(\mathbf{grad} \varphi)^i = g^{ij} D_j \varphi$$

entraîne

$$\Delta \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} D_i (\sqrt{g} g^{ij} D_j \varphi) \quad (\text{A.45})$$

#### A.8.5 Rotationnel

Nous introduirons le rotationnel par la relation

$$\int_V \mathbf{rot} \mathbf{u} dV = \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{u} dS$$

qui se transforme dans l'espace des coordonnées comme suit

$$\int_{V'} \sqrt{g} \mathbf{rot} \mathbf{u} dV' = \int_{S'} \sqrt{g} \nu_i \mathbf{g}^i \times \mathbf{u} dS' = \int_{V'} D_i (\sqrt{g} \mathbf{g}^i \times \mathbf{u}) dV'$$

En vertu de l'identité de Jacobi, la dernière intégrale se réduit à

$$\int_{V'} \sqrt{g} \mathbf{g}^i \times D_i \mathbf{u} dV'$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
 \mathbf{rot} \mathbf{u} &= \mathbf{g}^i \times D_i \mathbf{u} \\
 &= \mathbf{g}_p \varepsilon^{pqr} (\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_q) u_r|_i \\
 &= \mathbf{g}_p \varepsilon^{pqr} \delta_q^i u_r|_i \\
 &= \mathbf{g}_p \varepsilon^{pqr} u_r|_q
 \end{aligned} \tag{A.46}$$

On notera que

$$\varepsilon^{pqr} u_r|_q = \varepsilon^{pqr} D_q u_r + \varepsilon^{pqr} \Gamma_q^m u_m = \varepsilon^{pqr} D_q u_r$$

en vertu de la symétrie des symboles de Christoffel par rapport à leurs indices extrêmes. On obtient ainsi l'expression plus simple

$$\mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}^p = \varepsilon^{pqr} D_q u_r \tag{A.47}$$

## A.9 Tenseur des déformations de Green

Au cours de la déformation, un point  $\mathbf{P}$  se transporte en  $\mathbf{P} + \mathbf{u}$ . On a alors

$$d(\mathbf{P} + \mathbf{u}) = (D_k \mathbf{P} + D_k \mathbf{u}) dx^k = (\mathbf{g}_k + D_k \mathbf{u}) dx^k$$

et l'élément de longueur après déformation est donc donné par

$$\begin{aligned}
 |d(\mathbf{P} + \mathbf{u})|^2 &= (\mathbf{g}_k + D_k \mathbf{u}) dx^k \cdot (\mathbf{g}_\ell + D_\ell \mathbf{u}) dx^\ell \\
 &= (g_{k\ell} + \mathbf{g}_k \cdot D_\ell \mathbf{u} + \mathbf{g}_\ell \cdot D_k \mathbf{u} + D_k \mathbf{u} \cdot D_\ell \mathbf{u}) dx^k dx^\ell \\
 &= (g_{k\ell} + 2\gamma_{kl}^1 + \gamma_{kl}^2) dx^k dx^\ell
 \end{aligned}$$

avec

$$\gamma_{kl}^1 = \frac{1}{2} (u_k|_\ell + u_\ell|_k) \tag{A.48}$$

$$\gamma_{kl}^2 = u^i|_k \mathbf{g}_i \cdot u_j|_\ell \mathbf{g}^j = u^i|_k u_i|_\ell \tag{A.49}$$

## A.10 Equations d'équilibre

Nous nous limitons ici au cas géométriquement linéaire. On écrit alors  $\varepsilon_{kl} = \gamma_{kl}^1$ . Pour un déplacement virtuel  $\delta \mathbf{u}$ , le théorème des déplacements virtuels s'écrit

$$\int_V (\sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} - f^i \delta u_i) dV = \int_S t^i \delta u_i dS = 0 \tag{A.50}$$

Or,

$$\int_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma^{ij} (\delta u_i|_j + \delta u_j|_i) dV = \int_V \sigma^{ij} \delta u_i|_j dV$$

Notons que le théorème de la divergence entraîne

$$\int_V (\sigma^{ij} \delta u_i)|_j dV = \int_S \sigma_{ij} \delta u_i n_j dS$$

ce qui se développe en

$$\int_V \sigma_{ij}|_j \delta u_i dV + \int_V \sigma_{ij} \delta u_i|_j dV = \int_S \sigma_{ij} \delta u_i n_j dS$$

soit

$$\int_V \sigma^{ij} \delta u_i|_j dV = \int_S \sigma^{ij} \delta u_i n_j dS - \int_V \sigma_{ij}|_j \delta u_i dV$$

Dès lors, (A.50) se ramène à

$$- \int_V (\sigma^{ij}|_j + f^i) \delta u_i dV + \int_S (n_j \sigma^{ij} - t^i) dS = 0$$

ce qui donne les équations d'équilibre

$$\begin{aligned} \sigma^{ij}|_j + f^i &= 0 & \text{dans } V \\ n_j \sigma^{ij} &= t^i & \text{sur } S \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

## A.11 Coordonnées curvilignes orthogonales

Des coordonnées curvilignes sont dites *orthogonales* si leur tenseur métrique est diagonal. Dans tout ce qui concerne ce type de coordonnées, *nous ne suivrons pas la convention de sommation d'Einstein et les sommes à effectuer seront notées explicitement*. Par définition, on a ici

$$g_{ij} = h_i^2 \delta_{ij} \quad (\text{A.52})$$

avec  $h_i = |\mathbf{g}_i|$ . On a immédiatement

$$\sqrt{g} = h_1 h_2 h_3 \quad (\text{A.53})$$

Les symboles de Christoffel se calculent alors par la formule classique (A.29), ce qui donne

$$\Gamma_{kil} = \frac{1}{2} [D_k(h_i^2 \delta_{i\ell}) + D_\ell(h_i^2 \delta_{ki}) - D_i(h_k^2 \delta_{k\ell})]$$

L'examen de ce résultat mène à la conclusion que deux indices au moins doivent être confondus pour trouver une valeur non nulle et que

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{kk\ell} &= \frac{1}{2}D_\ell(h_k^2) = h_k D_\ell h_k \\
 \Gamma_{kik} &= -\frac{1}{2}D_i(h_k^2) = -h_k D_i h_k \\
 \Gamma_{kkk} &= \frac{1}{2}[D_k(h_k^2) + D_k(h_k^2) - D_k(h_k^2)] = h_k D_k h_k
 \end{aligned} \tag{A.54}$$

On en déduit aisément

$$\begin{aligned}
 \Gamma_k^k{}_\ell &= \frac{D_\ell h_k}{h_k} \\
 \Gamma_k^i{}_k &= -\frac{D_i h_k}{h_k^2} \\
 \Gamma_k^k{}_k &= \frac{D_k h_k}{h_k}
 \end{aligned} \tag{A.55}$$

et les dérivées covariantes se calculent comme suit

1. Pour  $i \neq k$ ,

$$\begin{aligned}
 u_i|_k &= D_k u_i - \sum_m \Gamma_i^m{}_k u_m \\
 &= D_k u_i - \frac{D_k h_i}{h_i} u_i - \frac{D_i h_k}{h_k} u_k \\
 &= h_i D_k \left( \frac{u_i}{h_i} \right) - \frac{u_k}{h_k} D_i h_k
 \end{aligned} \tag{A.56}$$

2.

$$\begin{aligned}
 u_i|_i &= D_i u_i - \sum_m \Gamma_i^m{}_i u_m \\
 &= D_i u_i - \sum_{m \neq i} \Gamma_i^m{}_i u_m - \Gamma_i^i{}_i u_i \\
 &= D_i u_i + \sum_{m \neq i} \frac{h_i D_m h_i}{h_m^2} u_m - \frac{D_i h_i}{h_i} u_i \\
 &= h_i D_i \left( \frac{u_i}{h_i} \right) + \sum_{m \neq i} \frac{u_m}{h_m} \frac{h_i D_m h_i}{h_m}
 \end{aligned} \tag{A.57}$$



3. Pour  $i \neq k$ ,

$$\begin{aligned}
 u^i|_k &= D_k u^i + \sum_m \Gamma_k^i{}_m u^m \\
 &= D_k u^i + \Gamma_k^i{}_k u^k + \Gamma_k^i{}_i u^i \\
 &= D_k u^i - \frac{h_k D_i h_k}{h_i^2} u^k + \frac{D_k h_i}{h_i} u^i \\
 &= \frac{1}{h_i} D_k (h_i u^i) - (h_k u^k) \frac{D_i h_k}{h_i^2} \quad (\text{A.58})
 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 u^i|_i &= D_i u^i + \sum_m \Gamma_i^i{}_m u^m \\
 &= D_i u^i + \sum_{m \neq i} \Gamma_i^i{}_m u^m + \Gamma_i^i{}_i u^i \\
 &= D_i u^i + \sum_{m \neq i} u^m \frac{D_m h_i}{h_i} + u^i \frac{D_i h_i}{h_i} \\
 &= \frac{1}{h_i} D_i (h_i u) + \sum_{m \neq i} (h_m u^m) \frac{D_m h_i}{h_i h_m} \quad (\text{A.59})
 \end{aligned}$$

## A.12 Utilisation des composantes physiques

Il est d'usage, dans le cas des coordonnées curvilignes orthogonales, d'utiliser la base dite physique,

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{g}_i}{h_i} = h_i \mathbf{g}^i \quad (\text{A.60})$$

qui est orthonormée. Un vecteur s'écrit alors

$$\mathbf{a} = \sum_i \hat{a}_i \mathbf{e}_i$$

les  $\hat{a}_i$  étant ses composantes physiques. Comme

$$\mathbf{a} \sum_i \hat{a}_i \mathbf{e}_i = \sum_i \hat{a}_i \frac{\mathbf{g}_i}{h_i} = \sum_i \hat{a}_i h_i \mathbf{g}^i$$

il est clair que

$$a^i = \frac{\hat{a}_i}{h_i}, \quad a_i = h_i \hat{a}_i \quad (\text{A.61})$$

Pour les tenseurs, on utilisera la condition d'invariance du scalaire

$$\varphi = a_{ij}b^i c^j = a_{ij} \frac{\hat{b}_i}{h_i} \frac{\hat{c}_j}{h_j} = \hat{a}_{ij} \hat{b}_i \hat{c}_j$$

ce qui donne

$$a_{ij} = h_i h_j \hat{a}_{ij} \quad (\text{A.62})$$

et de même,

$$a^{ij} = \frac{1}{h_i h_j} \hat{a}_{ij}, \quad a_j^i = \frac{h_j}{h_i} \hat{a}_{ij} \quad (\text{A.63})$$

Reprenons dans ce cadre les opérateurs usuels

### A.12.1 Gradient

$$\mathbf{grad} \varphi = \sum_i D_i \varphi \mathbf{g}_i = \sum_i \frac{1}{h_i} D_i \varphi \mathbf{e}_i \quad (\text{A.64})$$

### A.12.2 Divergence

$$\text{div} \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i D_i (\sqrt{g} u^i) = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i D_i \left( \frac{\sqrt{g}}{h_i} \hat{u}_i \right) \quad (\text{A.65})$$

### A.12.3 Rotationnel

$$\mathbf{rot} \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\ell, i, k} \mathbf{g}_\ell e_{\ell ik} D_i u_k = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\ell, i, k} e_{\ell ik} h_\ell \mathbf{e}_\ell D_i (h_k \hat{u}_k)$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\mathbf{rot} \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ h_1 \hat{u}_1 & h_2 \hat{u}_2 & h_3 \hat{u}_3 \end{vmatrix} \quad (\text{A.66})$$

### A.12.4 Laplacien

$$\Delta \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i, j} D_i (\sqrt{g} g^{ij} D_j \varphi) = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \left( \frac{\sqrt{g}}{h_i^2} D_i \varphi \right) \quad (\text{A.67})$$

### A.12.5 Dérivées covariantes

Pour  $i \neq k$ , on tire de (A.56)

$$u_i|_k = h_i D_k \hat{u}_i - \hat{u}_k D_i h_k \quad (\text{A.68})$$

et, par (A.57),

$$u_i|_i = h_i D_i \hat{u}_i + \sum_{m \neq i} \hat{u}_m \frac{h_i D_m h_i}{h_m} \quad (\text{A.69})$$

### A.12.6 Déformations

Des formules précédentes, on déduit, pour  $i \neq k$

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{ik} &= h_i D_k \hat{u}_i - \hat{u}_k D_i h_k + h_k D_i \hat{u}_k - \hat{u}_i D_k h_i \\ &= h_i^2 D_k \left( \frac{\hat{u}_i}{h_i} \right) + h_k^2 D_i \left( \frac{\hat{u}_k}{h_k} \right) \end{aligned}$$

En conséquence,

$$2\hat{\varepsilon}_{ik} = \frac{2\varepsilon_{ik}}{h_i h_k} = \frac{h_i}{h_k} D_k \left( \frac{\hat{u}_i}{h_i} \right) + \frac{h_k}{h_i} D_i \left( \frac{\hat{u}_k}{h_k} \right) \quad (\text{A.70})$$

De même,

$$\hat{\varepsilon}_{ii} = \frac{1}{h_i^2} u_i|_i = \frac{1}{h_i} D_i \hat{u}_i + \sum_{m \neq i} \hat{u}_m \frac{D_m h_i}{h_i h_m} \quad (\text{A.71})$$

### A.12.7 Équations d'équilibre

La démarche la plus simple pour obtenir les équations d'équilibre consiste à utiliser le principe des travaux virtuels. Pour une variation de déplacement  $\delta \hat{u}_k$ , on a, en vertu de (A.70) et (A.71)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \delta \hat{\varepsilon}_{kk} &= \frac{1}{h_k} D_k \delta \hat{u}_k \\ \text{Pour } i \neq k & \delta \hat{\varepsilon}_{ii} = \frac{D_k h_i}{h_i h_k} \delta \hat{u}_k \\ \text{Pour } \ell \neq k & 2\delta \hat{\varepsilon}_{k\ell} = \frac{h_k}{h_\ell} D_\ell \left( \frac{\delta \hat{u}_k}{h_k} \right) \end{array} \right.$$

Le principe des travaux virtuels s'écrit donc, pour  $\delta\hat{u}_k$ ,

$$\int_{V'} \sqrt{g} \left\{ \hat{\sigma}_{kk} \frac{1}{h_k} D_k \delta\hat{u}_k + \sum_{i \neq k} \hat{\sigma}_{ii} \frac{D_k h_i}{h_i h_k} \delta\hat{u}_k + \sum_{\ell \neq k} \hat{\sigma}_{k\ell} \frac{h_k}{h_\ell} D_\ell \left( \frac{\delta\hat{u}_k}{h_k} \right) - \hat{f}_k \delta\hat{u}_k \right\} dV' = 0$$

ce qui conduit à la condition d'équilibre intérieur

$$-D_k \left( \frac{\sqrt{g}}{h_k} \hat{\sigma}_{kk} \right) - \frac{1}{h_k} \sum_{\ell \neq k} D_\ell \left( \frac{\sqrt{g} h_k}{h_\ell} \hat{\sigma}_{k\ell} \right) + \sum_{i \neq k} \sqrt{g} \hat{\sigma}_{ii} \frac{D_k h_i}{h_i h_k} - \sqrt{g} \hat{f}_k = 0$$

soit encore

$$\frac{1}{\sqrt{g}} D_k \left( \frac{\sqrt{g}}{h_k} \hat{\sigma}_{kk} \right) + \frac{1}{\sqrt{g} h_k} \sum_{\ell \neq k} D_\ell \left( \frac{\sqrt{g} h_k}{h_\ell} \hat{\sigma}_{k\ell} \right) - \sum_{i \neq k} \hat{\sigma}_{ii} \frac{D_k h_i}{h_i h_k} + \hat{f}_k = 0 \quad (\text{A.72})$$

### A.13 Exercices

**Exercice 49** *Écrire l'expression du gradient, de la divergence, du rotationnel, du laplacien, des déformations et des équations d'équilibre en coordonnées cylindriques.*

*Indication*

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g}_r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_\theta = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie aisément leur orthogonalité.

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_z = 1$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$$

$$\sqrt{g} = r$$

**Exercice 50** *Idem pour les coordonnées sphériques caractérisées par*

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

*Indication*

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta$$

**Exercice 51** *Idem pour les coordonnées elliptiques cylindriques, données par les relations*

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a \operatorname{ch} \xi \cos \eta \\ a \operatorname{sh} \xi \sin \eta \\ z \end{pmatrix}$$

*Indication*

$$h_\xi = h_\eta = a \sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta}, \quad h_z = 1$$



# Bibliographie

- [1] M. ABRAMOWITZ et I. STEGUN – *Handbook of mathematical functions*, Dover, New York, 1965.
- [2] P. APPELL – *Mécanique rationnelle*, 3e éd., vol. 3, Gauthier-Villars, Paris, 1952.
- [3] A. J. C. BARRÉ DE SAINT-VENANT – « Mémoire sur la flexion des prismes élastiques », *Journal de mathématiques pures et appliquées (Liouville)*.
- [4] — , « Mémoire sur la torsion des prismes », *Mémoires de divers savants de l'Académie des Sciences* (1855), p. 233.
- [5] N. BOURBAKI – *Théorie des ensembles*, Hermann, Paris, 1970.
- [6] J. BOUSSINESQ – *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques, principalement au calcul des déformations et des pressions que produisent, dans ces solides, des effets quelconques exercés sur une petite partie de leur surface ou de leur intérieur ; mémoire suivi de notes étendues sur divers points de physique mathématique et d'analyse*, vol. 13, Recueil de la Société des Sciences de Lille, Lille, 1885.
- [7] R. BREDT – « Kritische Bemerkungen zur Drehungselasticität », *Z. V.D.I.* **40** (1896), no. 29, p. 819–917.
- [8] H. BRYAN – « On the stability of a plane plate under thruts in its own plane, with application to the buckling of the sides of a ship », *Proc. London Math. Soc.* **22** (1890), p. 54–67.
- [9] A. CLEBSCH – *Theorie der Elasticität der fester Körper von Dr. A. Clebsch, Professor an der polytechnische Schule zu Carlsruhe*, Leipzig, 1862.
- [10] E. COSSERAT et F. COSSERAT – *Théorie des corps déformables*, Hermann, Paris, 1909.
- [11] R. COURANT et D. HILBERT – *Methoden der mathematischen Physic*, 3d éd., vol. 1, Springer, Berlin, 1968.

- [12] J. COURBON – *Résistance des matériaux*, 3e éd., vol. 1, Dunod, Paris, 1971.
- [13] J. F. DEBONGNIE – « A new look at Hermann's formulation of incompressibility », *Proc. Symp. Computer Meth. in Engng, University of Southern California* (Los Angeles), 1977.
- [14] — , « Modélisation de problèmes hydroélastiques par éléments finis. Application aux lanceurs aérospatiaux », thèse de doctorat, Université de Liège, Liège, 1978.
- [15] — , « Sur la formulation de Herrmann pour l'étude des solides incompressibles », *Journal de Mécanique* **17** (1978), no. 4, p. 531–558.
- [16] — , « On the approximation of incompressible materials in the displacement method », *Int. Jl. Num. Meth. Engng.* **14** (1979), p. 1095–1099.
- [17] — , « A general theory of dual error bounds by finite elements », Rapprt LMF 5, Université de Liège, Liège, 1983.
- [18] — , *Fundamentals of finite elements*, Éditions de l'Université de Liège, Liège, 2003.
- [19] — , *Conception mécanique*, vol. 2, Debongnie (Jean-François), Liège, 2007.
- [20] J. F. DEBONGNIE et P. BECKERS – « Recent advances in the dual analysis theory », *IV Congreso Métodos Numericos in Ingenieria*.
- [21] J. F. DEBONGNIE, H. G. ZHONG et P. BECKERS – « Dual analysis with general boundary conditions », *Computer methods in applied mechanics and engineering* **22**, no. 1–2, p. 183–192.
- [22] D. S. DUGDALE et C. RUIZ – *Élasticité à l'usage des ingénieurs et des physiciens*, Ediscience, Paris, 1972.
- [23] F. ENGESSER – « Die Knickfestigkeit gerader Stäbe », *Zentr. Bauverwaltung* **11** (1891), p. 483–486.
- [24] — , « Zum einsturzder Brücke über den St. Lorenzstrom bie Quebec », *Zentr. Bauverwaltung* **27** (1907), p. 609.
- [25] — , *Z.V.D.I* (1908), p. 309.
- [26] V. FEODOSSIEV – *Résistance des matériaux*, 3e éd., Mir, Moscou, 1976.
- [27] B. M. FRAEIJIS DE VEUBEKE – « Diffusion des inconnues hyperstatiques dans les voilures à longerons couplés », *Bulletin du Service Technique de l'Aéronautique* (1951), no. 24.
- [28] — , « Aspects cinématiques et énergétiques de la flexion sans torsion », *Académie des Sciences de Belgique, classe des sciences, collection in-8* **29** (1955).



- [29] — , « Flexion et extension des plaques d'épaisseur modérée », *Académie des Sciences de Belgique, classe des sciences, mémoires* **31** (1959).
- [30] — , « Sur certaines inégalités fondamentales et leur généralisation dans la théorie des bornes supérieures et inférieures en élasticité », *Revue universelle des mines* **17** (1961), no. 5.
- [31] — , « Théorie des coques prismatiques minces renforcées par lisses et diaphragmes », *Académie Royale de Belgique Mémoire* **8** (1961), no. 1729.
- [32] — , « Upper and lower bounds in matrix structural analysis », *AGARDograph* **72** (1964), p. 65.
- [33] — , « Displacement and equilibrium models in the finite element method », ch. 9, Wiley, 1965.
- [34] — , « A new variational principle for finite elastic displacements », *Intl. Jl. Eng. Sci.* **10** (1972), p. 745–763.
- [35] — , « Duality in structural analysis by finite elements », *NATO advanced studies institute. Lecture series on finite element methods in continuum mechanics, Lisbon, 1971* (Oden et Oliveira, éds.), U.A.H. Press, 1973.
- [36] — , *A course in elasticity*, Applied Mechanical Sciences, no. 29, Springer Verlag, New York, 1979.
- [37] I. FRIED – « Finite element analysis of incompressible materials by residual energy balancing », *Int. Jl. Solids Struct.* **10** (1974), p. 993–1002.
- [38] K. O. FRIEDRICHS – « Ein Verfahren der Variationsrechnung », *Nachrichten der Ges. d. Wiss. zu Göttingen*, 1929, p. 13–20.
- [39] H. G. GARNIR – *Fonctions de variables réelles*, vol. 1, Librairie universitaire, Louvain, 1963.
- [40] H. GOLOVIN – « Un problème statique du corps élastique », *Bulletin de l'Institut Technologique de Saint Petersburg* (1881).
- [41] E. GOURSAT – *Cours d'analyse mathématique*, 5e éd., vol. 3, Gauthier-Villars, Paris, 1942.
- [42] A. G. GREENHILL – « Determination of the greatest height consistent with stability that a vertical pole or mast can be made and of the greatest height to which a tree of given proportion can grow », *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **4** (1881), p. 65–73.
- [43] H. HENCKY – « Ueber die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten », *Ing. Archiv* **16** (1947).
- [44] H. HERTZ – *Gesammelte Werke*, vol. 1., Berlin, 1895.

- [45] R. KAPPUS – « Drillknicken zentisch gedrückter Stäbe mit offener Profil in elastische Bereich », *Luftfahrtforschung* **14** (1937), no. 9, p. 444–457.
- [46] LORD KELVIN – « On the thermo-elastic, thermo-magnetic and pyro-electric properties of matter », *Quarterly Journal of Mathematics* **1** (1857), p. 57–77.
- [47] — , « Elasticity », p. 796–825, *Encyclopedia Britannica*, London and Edinburgh, 1878.
- [48] G. R. KIRCHHOFF – « Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines elastischen Scheibe », *Crelles Journal* **40** (1850), p. 51–58.
- [49] — , « Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünner Stabes », *Crelles Journal* **56** (1858), p. 285–313.
- [50] — , « Ueber das Verhältniss der Quercontraction sur Längendilatation bei Stäben von federhärten Stahl », *Poggendorf Annalen* **108** (1859), p. 369–392.
- [51] — , « Ueber die Gleichungen des Gleichgewichtes eines elastischen Körpers bei nicht unendlich kleinen Verschiebungen seiner Teile », *Sitzungsberichte der mathem.-naturwiss. Classe der k. Akademie der Wissenschaften, Wien* **9** (1872), p. 762–773.
- [52] — , *Vorlesungen über mathematische Physik von Dr. Gustav Kirchhoff (Professor der Physik an der Universität der Berlin)*, vol. 1, *Mechanik*, 1874.
- [53] W. T. KOITER – « A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells », *Report of the lab. voor toegepaste mechanica*, Technische Hogeschool, Delft, 1959.
- [54] G. KOLOSOFF – « Sur une application des formules de M. Schwarz, de M. Villat et de M. Dini au problème plan de l'élasticité », *Compte rendus* **193** (1931), p. 89.
- [55] G. LAMÉ et E. CLAPEYRON – « Mémoires sur l'équilibre intérieur des solides homogènes », *Mémoires présentés par divers savants* **4** (1833).
- [56] L. LANDAU et E. LIFSCHITZ – *Théorie de l'élasticité*, Mir, Moscou, 1967.
- [57] G. LEJEUNE-DIRICHLET – « Sur un moyen général de vérifier l'expression du potentiel relatif à une masse quelconque, homogène ou hétérogène », *Journal de Crelle* **32** (1846), p. 80–94.
- [58] C. MASSONNET – *Résistance des matériaux*, vol. 2, Dunod, Paris, 1965.
- [59] — , *Résistance des matériaux*, 2e éd., vol. 1, Sciences et Lettres, Liège, 1967.

- [60] — , *Éléments de statique des constructions*, vol. 1, Société coopérative de l'A.E.E.S, Liège, 1970.
- [61] J. H. MICHELL — « On the direct determination of stress in an elastic solid, with application to the theory of plates », *Proceedings of the London Mathematical Society* **31** (1899), p. 100–124.
- [62] N. I. MUSKELISHVILI — *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*, 2e éd., Noordhof, Groningen, 1953.
- [63] J. NECAS — *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, 1967.
- [64] H. NEUBER — « Elastisch-Strenge Lösungen zur Kerbwirkung bei Scheiben und Umdrehungskörpern », *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **13** (1933), p. 439–443.
- [65] — , *Kerbspannungslehre*, 2e éd., Springer, Berlin, 1958.
- [66] F. NEUMANN — *Vorlesungen über die theorie der elasticität der fester körper und lichtäthers*, 1885.
- [67] A. PIRARD — *Traité d'hyperstatique analytique et graphique*, Vaillant-Carmanne, Liège, 1960.
- [68] G. PISSARENKO, A. YAKOVLEV et V. MATVEEV — *Aide-mémoire de résistance des matériaux*, Mir, Moscou, 1979.
- [69] W. PRAGER et J. L. SYNGE — « Approximations in elasticity based on the concept of function spaces », *Quart. Appl. Math.* **5** (1947).
- [70] L. PRANDTL — « Zur Torsion von prismatische Stäben », *Physicalische Zeitschrift* **4** (1903), p. 758–770.
- [71] J. W. S. RAYLEIGH — *Theory of sound*, Macmillan, 1894.
- [72] E. REISSNER — « On the theory of bending of elastic plates », *Jl. of Math. and Physics* **23** (1944), p. 184–191.
- [73] — , « The effect of the transverse shear deformation on the bending of elastic plates », *Jl. of Applied Mechanics* (1945).
- [74] — , « On a variational theorem in elasticity », *Journal of mathematics and physics* **29** (1950).
- [75] V. REKATCH — *Théorie de l'élasticité - Manuel de résolution des problèmes*, Mir, Moscou, 1980.
- [76] F. RIESZ et B. S. NAGY — *Leçons d'analyse fonctionnelle*, 6e éd., Gauthier-Villars, Paris, 1975.

- [77] W. RITZ – « Ueber eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme des mathematische Physik », *J. Die reine und angew. Math.*
- [78] G. SANDER – « Bornes supérieures et inférieures dans l'analyse des plaques en flexion-torsion », *Bull. Soc. Royale ses Sciences* **33e année** (1964), no. 7–8, p. 465–494.
- [79] — , « Application of the dual analysis principle », *Proc. IUTAM, Liège*, 1970.
- [80] G. SANDER et B. M. FRAEIJIS DE VEUBEKE – « Upper and lower bounds to structural deformation by dual analysis in finite elements », *AFFDL-TR-66-199* (1967).
- [81] L. SEDOV – *Mécanique des milieux continus*, vol. 1, Mir, Moscou, 1975.
- [82] R. STRIBECK – « Kugellager für beliebige Belastungen », **45** (1901), p. 73–118.
- [83] W. THOMSON et P. G. TAIT – *Treatise on natural philosophy*, vol. 1, Oxford, 1867.
- [84] S. TIMOSHENKO – « Lateral buckling of beams », *Bulletin de l'Institut Polytechnique* **4** (1905), no. 5.
- [85] — , « Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie », *Z. Angew. Math. und Physik* **28** (1910), p. 357–385.
- [86] S. TIMOSHENKO et J. M. GERE – *Theory of elastic stability*, 2 éd., Mc Graw Hill, New York, 1961.
- [87] I. TODHUNTER – *A history of the theory of elasticity and of the strength of materials*, Dover, 1960.
- [88] E. TREFFTZ – « Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren », *Verhandlungen d. 2. Int. Kongr. für technische Mechanik* (Zürich), 1927, p. 191.
- [89] — , *Math. Mech.* **13** (1939), p. 160 sqq.
- [90] V. Z. VLASSOV – *Thin walled elastic beams*, Israel program for scientific translation, Jerusalem, 1961.
- [91] V. VOLTERRA – « Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes », *Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure (Paris)* **24** (1907), no. 3, p. 401–517.
- [92] H. WAGNER – « Verdrehung und Knickung von offenen Profilen », (1929).
- [93] K. WASHIZU – *Variational methods in elasticity and plasticity*, Pergamon, 1968.

- [94] C. WEBER – « Uebertragung des Drehmomentes in Balken mit doppelflanshigem Querschnitt », *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **6** (1926), p. 85–97.
- [95] — , « Eingrenzung von Verschiebungen und Zerrungen mit Hilfe der Minimalsätze », *Z.A.M.M.* **22** (1952), p. 130.
- [96] G. WEINTGARTEN – « Sulle superficie de discontinuà nelle teoria della elasticità dei corpi solidi », *Atti nella Reale Accademia dei Lincei (Roma)* **5** (1901), no. 10, p. 57–60.
- [97] E. WINKLER – « Formänderung und Festigkeit gekrümmter Körper, insbesondere der Ringe », *Der Civilingenieur* **4** (1858), p. 232–246.
- [98] — , *Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit*, Prague, 1867.