

# ÉLASTICITÉ

J.F. Debongnie

2011

©DEBONGNIE (Jean-François), Liège, Belgium, 2011  
*Tous droits réservés.*

Dépôt légal :D/2011/0480/1  
ISBN13 : 978-29600313-8-6

# Préface

Cet ouvrage est né d'un ensemble de cours que nous avons donné à l'École Mohammadia d'Ingénieurs à Rabat. Il n'est pas conçu comme une première introduction à la mécanique des solides, mais comme une étude complémentaire destinée à un public déjà au courant des résultats classiques de la résistance des matériaux. Nous continuons en effet de penser qu'une introduction inductive à cette discipline permet, dans un premier temps, d'acquérir progressivement une compréhension physique des principaux phénomènes de la mécanique des solides. Le fait même que cette approche est limitée incite alors à aller plus loin, ce qui motive un seconde approche, plus déductive et plus fondamentale.

L'élasticité est une science déjà ancienne et par conséquent, ses résultats sont très nombreux. Il est donc nécessaire, dans le cadre d'un cours, de faire des choix. Notre but a été d'essayer d'allier un niveau théorique acceptable à un souci d'applicabilité – nos leçons sont destinées à des élèves ingénieurs mécaniciens.

Dans cet esprit, après un premier chapitre d'introduction mathématique, nécessaire à la compréhension de la suite, nous abordons successivement la cinématique des milieux déformables, le principe des travaux virtuels et l'étude des corps hyperélastiques dans le cadre géométriquement non linéaire. Dans une première lecture, on peut passer les sections relatives aux équations générales de compatibilité, aux interprétations des contraintes de Kirchhoff-Trefftz, à la stabilité locale et aux déformations avec variations de température.

Les équations de l'élasticité linéaire sont établies au chapitre 4. En ce qui concerne la compatibilité, on peut, en première lecture, s'arrêter après les équations de Beltrami-Michell.

Suivent trois chapitres d'application. Le premier traite de la torsion des poutres prismatiques, un problème où les insuffisances de la résistance des matériaux sont criantes. A côté de solutions exactes classiques, nous y introduisons des méthodes variationnelles conduisant immédiatement à des solutions approchées. Ceci prépare le lecteur à l'étude générale des principes variationnels, qui

sera donnée plus loin. Les deux chapitres suivants forment un enchaînement : le problème de Boussinesq est étudié parce qu'il sert de base au problème de Hertz ; ce dernier trouve de nombreuses applications en mécanique, notamment en théorie des roulements. Sa résolution est complète.

Nous exposons ensuite les principes variationnels, suivant la démarche de Fraeijs de Veubeke. L'analyse duale, qui en est une conséquence, est développée dans toute sa généralité, dans une approche qui nous est propre.

Le chapitre suivant est consacré à l'élasticité plane. Après l'établissement des équations fondamentales et quelques exemples, nous développons la méthode de résolution fondée sur l'utilisation de la variable complexe. Celle-ci est appliquée aux problèmes habituels, ainsi qu'à quelques problèmes de concentration de contrainte. Nous y avons ajouté une annexe relative aux disques d'épaisseur variable en rotation, dans laquelle est présentée une méthode de conception des roues de turbines originale et particulièrement simple.

Nous avons renoncé à développer la théorie rigoureuse des poutres de Barré de Saint-Venant, qui est complexe et malheureusement, très insuffisante pour les besoins de la pratique, puisqu'elle suppose les efforts tranchants et la torsion uniformes. Au lieu de cela, nous donnons ce que nous appelons une théorie technique des poutres, fondée sur une approche variationnelle et incluant les approches de Wagner pour la torsion non uniforme et de Vlassov pour les poutres à parois minces ouvertes. Pour ces dernières, nous présentons d'ailleurs une étude de la torsion plus rigoureuse que ce dernier auteur. Le cas des caissons est également envisagé, avec une approche de type éléments finis pour la recherche du gauchissement et des champs de cisaillement de flexion.

La flexion des plaques est également étudiée dans un cadre variationnel. Dans un premier temps, nous établissons la théorie de Reissner, puis nous envisageons celle de Hencky et surtout, l'hypothèse de Kirchhoff. Les résultats de ces théories sont comparés et reliés entre eux. Nous présentons alors les méthodes de résolution pour les rectangles (série double et série simple) et les plaques circulaires.

Les théorèmes énergétiques extérieurs (Castiglano, Menabrea, Clapeyron, Betti, Maxwell) sont souvent présentés d'une manière formelle et quelque peu naïve faisant appel à des forces concentrées dont on sait bien, pourtant, qu'elles mènent à une énergie infinie en dehors de quelques cas particuliers. Rompant avec cette tradition, nous les présentons comme des applications particulières des principes variationnels, ce qui mène à un exposé précis et rigoureux. C'est du reste l'occasion d'introduire le degré d'hyperstaticité.

Nous avons tenu à présenter la théorie des diagrammes d'influence, auxquels nous continuons d'accorder un intérêt pratique et pédagogique très grand.

Le dernier chapitre est consacré à la stabilité élastique. Outre la théorie générale de la stabilité, nous y traitons un certain nombre de cas de bifurcation courants, flambage, voilement des plaques, déversement de poutres fléchies.

Enfin, nous avons consacré une annexe à l'écriture des équations de l'élasticité en coordonnées curvilignes.

De nombreux exercices sont inclus. Parmi ceux-ci, certains sont de simples applications, mais d'autres constituent des variantes de la théorie, des compléments à celle-ci ou des théories approchées utiles que nous n'avons pas cru bon d'inclure au texte principal, pour ne pas alourdir celui-ci. Beaucoup sont entièrement résolus.

A la fin de la rédaction de cet ouvrage, nous avons une pensée particulière pour nos anciens étudiants de Rabat qui, par leur exigence et leur soif de savoir, nous ont conduit à un réel approfondissement de ces matières. Qu'ils en soient remerciés.



# Table des matières

<b>Preface</b>	i
<b>1 Préliminaires mathématiques</b>	1
1.1 Préambule . . . . .	1
1.2 Vecteurs . . . . .	1
1.3 Tenseurs . . . . .	4
1.4 Transformations d'axes . . . . .	6
1.5 Opérateurs de dérivation . . . . .	7
1.6 Théorème de Gauss-Ostrogradsky . . . . .	8
1.7 Éléments propres des tenseurs symétriques . . . . .	11
1.7.1 Éléments propres . . . . .	11
1.7.2 Développement spectral du tenseur . . . . .	12
1.7.3 Caractère d'invariance des éléments propres . . . . .	13
1.7.4 Décomposition d'un tenseur symétrique en un tenseur isotrope et un déviateur . . . . .	14
1.8 Structure des tenseurs antisymétriques . . . . .	15
1.9 Exercices . . . . .	15
<b>2 Cinématique des corps continus déformables</b>	19
2.1 Description du mouvement . . . . .	19
2.2 Choix de la description . . . . .	20
2.3 Tenseur des déformations de Green . . . . .	21
2.4 Interprétation du tenseur de Green . . . . .	23
2.5 Équations de compatibilité . . . . .	25
2.6 Hypothèses simplificatrices . . . . .	29
2.6.1 Petites déformations . . . . .	29
2.6.2 Petits déplacements . . . . .	30

2.6.3	Gradients de déplacements modérés . . . . .	30
2.7	Exercices . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Principe des travaux virtuels</b>	<b>37</b>
3.1	Déplacements virtuels . . . . .	37
3.2	Travail virtuel de déformation . . . . .	38
3.3	Notion d'équilibre . . . . .	39
3.4	Équations locales d'équilibre . . . . .	40
3.5	Interprétation de Trefftz . . . . .	43
3.6	Relation avec les contraintes eulériennes . . . . .	45
3.6.1	Contraintes eulériennes . . . . .	45
3.6.2	Relation entre les charges dans les deux descriptions . . . . .	46
3.6.3	Cas des petites déformations . . . . .	47
3.7	Exercices . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Corps hyperélastiques</b>	<b>57</b>
4.1	Hyperélasticité . . . . .	57
4.2	Développement de l'énergie de déformation . . . . .	58
4.3	Postulat de la stabilité locale . . . . .	61
4.4	Stabilité structurale de l'état de référence . . . . .	63
4.5	Déformations avec variations de température . . . . .	68
4.5.1	Expression de l'énergie libre . . . . .	68
4.5.2	Coefficients de dilatation thermique . . . . .	69
4.5.3	Déformations adiabatiques . . . . .	70
4.5.4	Autre expression des modules adiabatiques . . . . .	73
4.5.5	Mesure dynamique du module de Young . . . . .	75
4.6	Exercices . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Élasticité linéaire</b>	<b>83</b>
5.1	Linéarisation géométrique . . . . .	83
5.2	Unicité de la solution . . . . .	84
5.3	Méthode directe de résolution. Équation de Navier . . . . .	85
5.4	Méthode semi-inverse. Compatibilité . . . . .	86
5.5	Propriétés du tenseur d'incompatibilité . . . . .	89
5.6	Autre forme des équations de compatibilité de Saint-Venant . . . . .	90
5.7	Équations de Beltrami-Michell . . . . .	91
5.8	Corps multiplement connexes . . . . .	92
5.8.1	Introduction . . . . .	92
5.8.2	Topologie des corps multiplement connexes . . . . .	94

5.8.3	Intégration d'un gradient sur un corps multiplement connexe	96
5.8.4	Conditions globales de compatibilité dans les corps multiplement connexes . . . . .	98
5.8.5	Interprétation de Weingarten-Volterra . . . . .	100
5.9	Sur l'indépendance des équations de compatibilité . . . . .	101
5.9.1	Deux résultats généraux sur les champs d'autocontrainte . . . . .	103
5.9.2	Les deux théorèmes de Washizu . . . . .	103
5.9.3	Autre énoncé des théorèmes de Washizu . . . . .	104
5.10	Exercices . . . . .	104
<b>6</b>	<b>Torsion des poutres prismatiques</b>	<b>115</b>
6.1	Notion de poutre . . . . .	115
6.2	Torsion uniforme . . . . .	116
6.3	Équations d'équilibre . . . . .	117
6.4	Compatibilité . . . . .	120
6.5	Choix de la constante C . . . . .	121
6.6	Intégration des déplacements $u$ et $v$ . . . . .	122
6.7	Intégration du déplacement $w$ . . . . .	123
6.8	Principe variationnel (Prandtl) . . . . .	125
6.9	Principe variationnel (gauchissement) . . . . .	127
6.10	Centre de torsion . . . . .	129
6.11	Méthodes de résolution . . . . .	129
6.12	Solutions exactes . . . . .	131
6.12.1	Torsion d'une poutre à section elliptique . . . . .	131
6.12.2	Torsion d'une poutre à section rectangulaire . . . . .	132
6.12.3	Trou circulaire axial très petit dans un arbre cylindrique .	137
6.13	Solutions approchées (fonction de Prandtl) . . . . .	140
6.13.1	Théorie de Bredt . . . . .	141
6.13.2	Caissons multicellulaires . . . . .	142
6.13.3	Poutres à parois minces ouvertes . . . . .	144
6.13.4	Solution approchée pour les sections rectangulaires . . . . .	146
6.14	Solutions approchées (gauchissement) . . . . .	148
6.14.1	Solution élémentaire pour les sections massives . . . . .	149
6.14.2	Sections rectangulaires . . . . .	151
6.15	Exercices . . . . .	153

<b>7 Le problème de Boussinesq</b>	<b>161</b>
7.1 Introduction . . . . .	161
7.2 Système de coordonnées et équations . . . . .	161
7.3 Recherche de la solution générale . . . . .	163
7.3.1 Forme générale de la solution . . . . .	163
7.3.2 Détermination de la fonction $C$ . . . . .	164
7.3.3 Détermination de la fonction $D$ . . . . .	165
7.3.4 Calcul de la fonction $A$ . . . . .	165
7.3.5 Calcul de la fonction $B$ . . . . .	166
7.3.6 Expression générale des déplacements . . . . .	167
7.3.7 Expression générale des déformations . . . . .	168
7.3.8 Expression générale des contraintes . . . . .	168
7.4 Conditions aux limites . . . . .	169
7.5 Solution du problème de Boussinesq . . . . .	171
7.6 Exercice . . . . .	172
<b>8 Le problème de Hertz</b>	<b>175</b>
8.1 Introduction . . . . .	175
8.2 Considérations géométriques . . . . .	176
8.2.1 Description de la surface d'un corps . . . . .	176
8.2.2 Contact de deux corps . . . . .	178
8.3 Équilibre de la surface de contact . . . . .	182
8.4 Résolution des équations . . . . .	186
8.5 Comportements asymptotiques . . . . .	190
8.5.1 Cas où $e = 1$ . . . . .	190
8.5.2 Très faibles valeurs de $e$ . . . . .	191
8.6 Tables de la solution du problème de Hertz . . . . .	192
8.6.1 Valeurs courantes de $e$ . . . . .	192
8.6.2 Valeurs asymptotiques pour $e$ proche de zéro . . . . .	193
8.7 Annexe : potentiel de l'ellipsoïde chargé . . . . .	196
8.7.1 Calcul de $\partial V/\partial x$ . . . . .	197
8.7.2 Calcul de $\partial^2 V/\partial x^2$ et de $\Delta V$ . . . . .	198
8.8 Exercice . . . . .	200
<b>9 Principes variationnels</b>	<b>205</b>
9.1 Introduction . . . . .	205
9.2 Principe du minimum de l'énergie totale . . . . .	205
9.3 Multiplicateurs de Lagrange . . . . .	209
9.4 Principe à quatre champs de Fraeijs de Veubeke . . . . .	213

9.5	Principe de Hellinger-Reissner . . . . .	215
9.5.1	Invertibilité des relations constitutives . . . . .	216
9.5.2	Densité d'énergie complémentaire . . . . .	216
9.5.3	Principe de Hellinger-Reissner . . . . .	218
9.6	Principe à deux champs de Fraeij de Veubeke . . . . .	219
9.7	Principe du minimum de l'énergie complémentaire . . . . .	220
9.8	Note sur la forme faible de la compatibilité . . . . .	221
9.9	Exemple de solution approchée . . . . .	223
9.10	Classification des approches variationnelles . . . . .	228
9.11	Analyse duale . . . . .	229
9.11.1	Cas des relations constitutives linéaires . . . . .	229
9.11.2	Les cas particuliers de Fraeij de Veubeke . . . . .	232
9.11.3	Cas de relations constitutives non linéaires . . . . .	233
9.12	Bornes des raideurs . . . . .	236
9.13	Exercices . . . . .	238
<b>10</b>	<b>Élasticité plane</b>	<b>259</b>
10.1	État plan de contrainte . . . . .	259
10.2	État plan de déformation . . . . .	262
10.3	Équations générales des états plans . . . . .	264
10.3.1	Équation plane de Navier . . . . .	264
10.3.2	Équation plane de Beltrami-Michell . . . . .	265
10.4	Fonction d'Airy . . . . .	266
10.5	Compatibilité en termes de la fonction d'Airy . . . . .	269
10.6	Problèmes axisymétriques plans . . . . .	269
10.7	Cylindre épais sous pressions interne et externe . . . . .	271
10.7.1	Cas général . . . . .	271
10.7.2	Cas du cylindre très mince . . . . .	272
10.7.3	Cas du rayon intérieur tendant vers zéro . . . . .	274
10.7.4	Cas du rayon extérieur tendant vers l'infini . . . . .	275
10.8	Frettage . . . . .	275
10.9	Disque en rotation . . . . .	277
10.9.1	Disque plein de rayon extérieur $R_e$ . . . . .	278
10.9.2	Disque creux de rayons extrêmes $R_i$ et $R_e$ . . . . .	278
10.10	Utilisation de la variable complexe . . . . .	279
10.10.1	Généralités . . . . .	279
10.10.2	Fonctions analytiques et antianalytiques . . . . .	280
10.10.3	Coordonnées curvilignes orthogonales . . . . .	282
10.10.4	Transformation des vecteurs . . . . .	285

10.10.5 Transformation des tenseurs symétriques . . . . .	286
10.10.6 Structure générale d'une fonction harmonique réelle . . . . .	287
10.10.7 Structure générale d'une fonction biharmonique réelle . . . . .	288
10.11 Solution complexe en élasticité plane . . . . .	289
10.11.1 Déplacements . . . . .	289
10.11.2 Contraintes . . . . .	290
10.11.3 Fonctions de contrainte . . . . .	291
10.11.4 Calcul des contraintes en coordonnées curvilignes orthogonales . . . . .	292
10.11.5 Expression des tractions de surface . . . . .	293
10.12 Problème de Kolosoff . . . . .	293
10.13 Problème de Kirsch . . . . .	300
10.14 Fissure sous contrainte uniaxiale . . . . .	302
10.15 Coin soumis à une force et à un moment . . . . .	306
10.16 Problème de Flamant . . . . .	312
10.17 Disque circulaire soumis à deux forces $P$ opposées . . . . .	316
10.18 Poutre circulaire soumise à un moment constant . . . . .	320
10.19 Problème de Neuber . . . . .	324
10.20 Problème de Neuber en flexion . . . . .	330
10.21 Annexe : disques d'épaisseur variable en rotation . . . . .	334
10.21.1 Équations générales . . . . .	334
10.21.2 Disque d'égale résistance . . . . .	335
10.21.3 Jante . . . . .	335
10.21.4 Moyeu . . . . .	337
10.21.5 Renforcement neutre . . . . .	337
10.21.6 Exemple . . . . .	340
10.22 Exercices . . . . .	342
<b>11 Théorie technique des poutres</b>	<b>347</b>
11.1 Introduction . . . . .	347
11.2 Ordres de grandeur des contraintes . . . . .	347
11.3 Ordres de grandeur des déplacements . . . . .	348
11.4 Structure des déplacements $u_1$ et $u_2$ . . . . .	350
11.5 Gauchissement et énergie de déformation . . . . .	351
11.6 Définition du centre de torsion . . . . .	353
11.7 Fonction de Prandtl . . . . .	355
11.8 Résultantes et équations d'équilibre . . . . .	359
11.9 Conditions aux limites . . . . .	362
11.10 Calcul des contraintes . . . . .	363

11.11 Torsion non uniforme . . . . .	365
11.12 Étude approchée des sections massives . . . . .	368
11.13 Théorie des poutres à parois minces ouvertes . . . . .	370
11.13.1 Considérations géométriques . . . . .	370
11.13.2 Une formule d'intégration par parties . . . . .	373
11.13.3 Torsion . . . . .	374
11.13.4 Cisaillement de flexion . . . . .	379
11.14 Caissons . . . . .	382
11.14.1 Détermination du gauchissement . . . . .	382
11.14.2 Recherche des champs de cisaillement de flexion . . . . .	384
11.15 Exercices . . . . .	385
<b>12 Flexion des plaques</b>	<b>393</b>
12.1 Introduction . . . . .	393
12.2 Description et ordres de grandeur . . . . .	393
12.3 Structure des contraintes $\sigma_{\alpha\beta}$ . . . . .	396
12.4 Application du principe de Hellinger-Reissner . . . . .	398
12.5 Équations générales des plaques . . . . .	403
12.6 Autres types d'hypothèses . . . . .	405
12.7 L'hypothèse de Kirchhoff . . . . .	405
12.8 Le paradoxe de Kirchhoff . . . . .	408
12.9 Équation de Sophie Germain . . . . .	410
12.10 Résultantes de bord en termes des déplacements . . . . .	411
12.11 Comparaison des théories . . . . .	413
12.12 Torsion d'une plaque rectangulaire . . . . .	415
12.13 Plaque rectangulaire - Série double . . . . .	421
12.14 Plaque rectangulaire - Série simple . . . . .	425
12.15 Flexion des plaques circulaires . . . . .	430
12.16 Déformations axisymétriques . . . . .	433
12.17 Exercices . . . . .	439
<b>13 Théorèmes énergétiques extérieurs</b>	<b>441</b>
13.1 Préambule . . . . .	441
13.2 Théorème de Castigliano . . . . .	441
13.2.1 Déplacement d'un point d'une poutre . . . . .	443
13.2.2 Même problème pour une poutre hyperstatique . . . . .	443
13.2.3 Déplacements pondérés . . . . .	445
13.2.4 Rapprochement de deux points $A$ et $B$ . . . . .	445
13.2.5 Formules de Navier-Bresse . . . . .	446

13.3 Systèmes hyperstatiques - Théorème de Menabrea . . . . .	451
13.4 Exemples d'application des deux théorèmes précédents . . . . .	456
13.4.1 Arc à deux articulations . . . . .	456
13.4.2 Coupures généralisées . . . . .	458
13.5 Théorème de Clapeyron extérieur . . . . .	460
13.6 Théorème de réciprocité de Betti . . . . .	461
13.7 Théorème de réciprocité de Maxwell . . . . .	463
<b>14 Diagrammes d'influence . . . . .</b>	<b>465</b>
14.1 Notion de diagramme d'influence . . . . .	465
14.2 Diagramme d'influence d'un déplacement généralisé . . . . .	465
14.3 Diagramme d'influence d'un effet de type effort . . . . .	466
14.3.1 Remarque . . . . .	468
14.4 Exemples . . . . .	468
14.4.1 Réaction d'une poutre sur deux appuis . . . . .	468
14.4.2 Effort tranchant d'une poutre sur deux appuis . . . . .	469
14.4.3 Moment d'une poutre cantilever . . . . .	470
14.4.4 Moment dans un arc à trois articulations avec mise en charge indirecte . . . . .	471
14.4.5 Réaction de l'appui intermédiaire d'une poutre sur trois appuis . . . . .	473
14.4.6 Effort dans une barre quelconque d'un treillis isostatique .	473
<b>15 Stabilité des systèmes élastiques . . . . .</b>	<b>475</b>
15.1 Introduction . . . . .	475
15.2 Principe du minimum de l'énergie . . . . .	476
15.3 Variations successives de l'énergie totale . . . . .	478
15.4 Analyse générale de la stabilité . . . . .	480
15.5 Bifurcation de l'équilibre . . . . .	483
15.6 La colonne d'Euler . . . . .	485
15.7 Autres cas d'appuis . . . . .	487
15.7.1 Poutre bi-appuyée . . . . .	487
15.7.2 Poutre encastrée-appuyée . . . . .	489
15.7.3 Poutre bi-encastrée . . . . .	491
15.8 Colonne flambant sous son propre poids . . . . .	494
15.8.1 Colonne encastrée à sa base et flambant sous son propre poids . . . . .	494
15.8.2 Colonne bi-appuyée, soumise à la fois à une charge en bout et à une charge répartie . . . . .	496

15.9 Effet de la déformation due à l'effort tranchant . . . . .	497
15.10 Stabilité des plaques . . . . .	499
15.11 Plaque rectangulaire comprimée . . . . .	501
15.12 Flambage par flexion et torsion . . . . .	504
15.12.1 Le centre de torsion coïncide avec le centre de gravité . . . . .	507
15.12.2 La section possède un axe de symétrie . . . . .	508
15.13 Déversement des poutres fléchies . . . . .	508
15.13.1 Déversement d'une poutre soumise à un moment quelconque et appuyée à ses extrémités de telle façon que $v = 0$ et $\theta = 0$ . . . . .	510
15.13.2 Remarque sur la répartition des charges . . . . .	512
15.13.3 Déversement d'une poutre appuyée sur des fourches en ses deux extrémités, sous l'effet d'une charge centrale appliquée à une hauteur $a$ par rapport à l'axe neutre . . . . .	513
<b>A Coordonnées curvilignes orthogonales</b>	<b>517</b>
A.1 Introduction . . . . .	517
A.2 Coordonnées curvilignes . . . . .	517
A.2.1 Base covariante . . . . .	517
A.2.2 Tenseur métrique . . . . .	518
A.2.3 Base contravariante . . . . .	518
A.2.4 Produit scalaire de deux vecteurs . . . . .	519
A.2.5 Produit mixte et produit vectoriel . . . . .	519
A.3 Dérivation des vecteurs de base . . . . .	521
A.3.1 Dérivées de la base covariante . . . . .	521
A.3.2 Dérivées de la base contravariante . . . . .	521
A.3.3 Relations entre les symboles de Christoffel et le tenseur métrique . . . . .	522
A.4 Dérivation covariante d'un vecteur . . . . .	522
A.5 Tenseurs du second ordre et leurs dérivées covariantes . . . . .	523
A.6 Lemme de Ricci . . . . .	524
A.7 Propriétés de $\sqrt{g}$ . . . . .	524
A.8 Opérateurs différentiels courants . . . . .	525
A.8.1 Gradient . . . . .	525
A.8.2 Élément de surface orienté . . . . .	526
A.8.3 Divergence . . . . .	526
A.8.4 Laplacien . . . . .	527
A.8.5 Rotationnel . . . . .	527
A.9 Tenseur des déformations de Green . . . . .	528

A.10 Equations d'équilibre . . . . .	528
A.11 Coordonnées curvilignes orthogonales . . . . .	529
A.12 Utilisation des composantes physiques . . . . .	531
A.12.1 Gradient . . . . .	532
A.12.2 Divergence . . . . .	532
A.12.3 Rotationnel . . . . .	532
A.12.4 Laplacien . . . . .	532
A.12.5 Dérivées covariantes . . . . .	533
A.12.6 Déformations . . . . .	533
A.12.7 Équations d'équilibre . . . . .	533
A.13 Exercices . . . . .	534

# Chapitre 1

# Préliminaires mathématiques

## 1.1 Préambule

Il est utile d'introduire des notations rendant l'établissement des équations aussi simple que possible. Cet ouvrage fait usage des *notations indicielles*. Bien qu'un peu déroutantes au premier abord, ces notations présentent le double avantage d'être concises et d'abolir la nécessité de retenir un grand nombre de formules du calcul vectoriel. Nous engageons donc le lecteur à consacrer *sa meilleure attention* à ce chapitre introductif et à ne le quitter qu'après s'être assuré qu'il le domine *parfaitement*, car de là dépend la compréhension des chapitres qui suivent.

## 1.2 Vecteurs

Étant donné une base orthonormée  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  de l'espace physique, on peut décomposer tout vecteur  $\mathbf{u}$  dans cette base, ce qui introduit les composantes  $u_i$  de ce vecteur :

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i \quad (1.1)$$

Le vecteur est totalement déterminé par ses composantes et inversement, de même qu'une fonction est déterminée par ses valeurs. D'ailleurs, on peut considérer le vecteur  $\mathbf{u}$  comme une fonction de la variable  $i$  pouvant prendre les valeurs 1, 2 et 3, fonction, disions-nous, qui à chaque valeur de  $i$  associe les

composantes  $u_i$ , comme l'illustre la figure 1.1<sup>1</sup>. Lorsque l'on manipule des fonc-

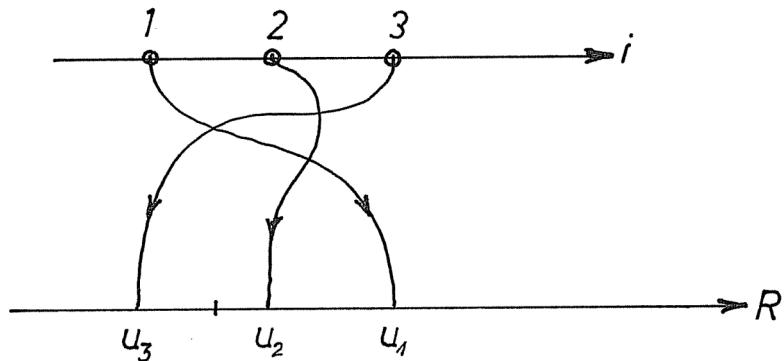


FIGURE 1.1 – Un vecteur considéré comme fonction de  $i=1,2,3$

tions, il est courant de décrire les opérations sur les valeurs et non pas sur les fonctions elles-mêmes. On écrira par exemple

$$f(x) = \sin 2x + \cos^2 x + \operatorname{arctg} x$$

notation dans laquelle on exprime les opérations à effectuer *pour un x donné*. Personne n'écrira

$$f = g + h + \ell$$

avec

$$\begin{aligned} g &: x \mapsto \sin 2x \\ h &: x \mapsto \cos^2 x \\ \ell &: x \mapsto \operatorname{arctg} x \end{aligned}$$

tout simplement parce que cette notation est trop lourde.

En revanche, on trouve souvent tout normal d'écrire

$$\mathbf{gradiv} \mathbf{u} - \mathbf{rotrot} \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

---

1. Bourbaki [5] s'est servi de ce point de vue pour définir les produits d'ensembles

quitte à expliciter séparément les opérations – souvent longues – menant au calcul effectif des composantes ! Ce faisant, on court encore le risque de ne pas s'apercevoir que cette équation équivaut à

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

et peut être traitée par les méthodes propres aux problèmes harmoniques.

La notation indicelle est au calcul vectoriel ce que la notation  $f(x)$  est au calcul des fonctions : *l'écriture la plus élémentaire*. En voici les règles. Elles sont simples et ne nécessitent aucun effort de mémoire particulier.

Un *vecteur* est donc représenté par *une composante générique* : le vecteur  $\mathbf{u}$  se note  $u_i$ . C'est précisément la présence de l'indice qui nous permettra de voir qu'il s'agit d'un vecteur : un scalaire ne possède pas d'indice.

La *somme* de deux vecteurs  $u_i$  et  $v_i$  s'obtient en sommant les composantes. On l'écrira donc tout naturellement

$$u_i + v_i \quad (1.2)$$

et en général, une combinaison linéaire de deux vecteurs s'écrira

$$\lambda u_i + \mu v_i \quad (1.3)$$

Une autre opération courante entre deux vecteurs est leur *produit scalaire*. On sait que ce produit vaut

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 u_i v_i$$

On aurait donc pu décider de noter le produit scalaire sous cette forme. Néanmoins, le signe  $\sum_{i=1}^3$  alourdit considérablement l'écriture de la formule et, à vrai dire, on peut s'en passer moyennant une *convention de notation* introduite par Einstein, qui consiste à dire que *chaque fois qu'un indice est répété dans un monôme, celui-ci représente en fait la somme des trois termes obtenus en donnant successivement à cet indice les valeurs 1, 2 et 3*. En conséquence, nous écrirons

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v_i \quad (1.4)$$

L'indice  $i$  de cette expression, qui a pris toutes les valeurs possibles, disparaît du résultat, qui est un scalaire. On dit que c'est un *indice muet*.

L'avantage de ces notations apparaît déjà lorsque l'on considère la relation

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

qui, en calcul vectoriel classique, demande à être démontrée et retenue, alors que nous l'écrirons sous la forme évidente

$$a_i(b_i + c_i) = a_i b_i + a_i c_i \quad (1.5)$$

### 1.3 Tenseurs

Une grandeur  $b_{ij}$  à deux indices qui, appliquée à un vecteur  $c_j$ , donne un autre vecteur  $a_i$  selon la loi

$$a_i = b_{ij}c_j \quad (1.6)$$

est un *tenseur du second ordre*. Un vecteur est encore appelé *tenseur du premier ordre* et un scalaire, *tenseur d'ordre 0*. Plus généralement, et par récurrence, une grandeur  $b_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_\ell}$  à  $(k + \ell)$  indices qui, appliquée à un tenseur d'ordre  $\ell$ ,  $c_{j_1 \dots j_\ell}$ , donne un tenseur d'ordre  $k$ ,  $a_{i_1 \dots i_k}$  selon la loi

$$a_{i_1 \dots i_k} = b_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_\ell} c_{j_1 \dots j_\ell} \quad (1.7)$$

est un tenseur d'ordre  $(k + \ell)$ .

Le plus simple des tenseurs du second ordre est le tenseur de Kronecker, défini par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1.8)$$

C'est bien un tenseur, car il applique un vecteur  $a_i$  sur lui-même :

$$a_i = \delta_{ij} a_j \quad (1.9)$$

Nous utiliserons également un tenseur du troisième ordre  $e_{ijk}$ , appelé *alternateur*, et défini par

$$e_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation paire de } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation impaire de } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{si } (i, j, k) \text{ n'est pas une permutation de } (1, 2, 3) \end{cases} \quad (1.10)$$

Ce tenseur permet d'exprimer le produit vectoriel  $a_i$  de deux vecteurs  $b_j$  et  $c_k$  par

$$a_i = e_{ijk} b_j c_k \quad (1.11)$$

comme on le vérifie aisément<sup>2</sup>. Pour  $i = 2$ , par exemple,  $e_{ijk}$  ne différera de zéro que si le triplet  $(i, j, k)$  vaut  $(2, 3, 1)$  (permutation paire) ou  $(2, 1, 3)$  (permutation impaire), ce qui donne

$$a_2 = e_{231}b_3c_1 + e_{213}b_1c_3 = b_3c_1 - b_1c_3$$

et l'on retrouve bien la deuxième composante du produit vectoriel.

La plupart des manipulations concernant l'alternateur reposent sur la formule fondamentale

$$e_{ijk}e_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \quad (1.12)$$

Tout d'abord, cette formule est évidente si  $j = k$  ou  $l = m$ . Il reste donc à examiner le cas  $j \neq k, l \neq m$ . On remarque pour commencer que

$$e_{ijk} = \det \begin{bmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} e_{ijk}e_{ilm} &= \sum_{i=1}^3 \det \left( \begin{bmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{i1} & \delta_{l1} & \delta_{m1} \\ \delta_{i2} & \delta_{l2} & \delta_{m2} \\ \delta_{i3} & \delta_{l3} & \delta_{m3} \end{bmatrix} \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \det \begin{bmatrix} 1 & \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{ji} & \delta_{jl} & \delta_{jm} \\ \delta_{ki} & \delta_{kl} & \delta_{km} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De ces déterminants, un seul peut ne pas être nul, celui pour lequel  $i, j$  et  $k$  sont tous différents. Ce déterminant s'écrit

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \delta_{il} & \delta_{im} \\ 0 & \delta_{jl} & \delta_{jm} \\ 0 & \delta_{kl} & \delta_{km} \end{bmatrix} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$

comme annoncé.

L'égalité (1.12) mène simplement à des relations qui, en calcul vectoriel classique, n'ont aucun caractère d'évidence. Calculons par exemple la valeur du double produit vectoriel

$$\mathbf{d} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$$

---

2. En toute rigueur, l'alternateur est un pseudo-tenseur, car le produit vectoriel est un pseudo-vecteur, changeant de sens lors du passage d'un système d'axes droitier à un système d'axes gaucher.

On a

$$d_i = e_{ijk}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_j c_k = e_{ijk}(e_{jlm} a_l b_m) c_k$$

Une permutation paire donne  $e_{ijk} = e_{jki}$ , d'où

$$d_i = e_{jki} e_{jlm} a_l b_m c_k = (\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{il}) a_l b_m c_k$$

soit

$$d_i = a_l b_i c_l - a_i b_k c_k$$

ce qui équivaut à la formule classique

$$\mathbf{d} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

## 1.4 Transformations d'axes

Étant donné une base orthonormée  $\{\mathbf{e}_i\}$ , comment passer à une autre base orthonormée  $\{\mathbf{E}_i\}$ ? Le principe est évidemment que les vecteurs doivent rester le mêmes, ce qui s'écrit

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i = U_i \mathbf{E}_i \quad (1.14)$$

Chaque vecteur de la base  $\{\mathbf{e}_i\}$  peut être décomposé dans l'autre base, sous la forme

$$\mathbf{e}_i = T_{ij} \mathbf{E}_j \quad (1.15)$$

La matrice de transformation  $T^3$  possède d'ailleurs quelques propriétés liées à l'orthonormalité des deux bases : on a en effet

$$\delta_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = T_{ik} T_{j\ell} \mathbf{E}_k \cdot \mathbf{E}_\ell = T_{ik} T_{jk} \quad (1.16)$$

ce qui signifie qu'il s'agit d'une *matrice orthonormale*. On sait que le déterminant d'une telle matrice vaut  $\pm 1$ . Dans le cas où il est *positif*, la transformation est dite *de signe positif* et elle conserve le caractère droitier ou gaucher du système d'axes. Dans le cas contraire, on dit que la transformation est *de signe négatif* et elle inverse le caractère gaucher ou droitier du système d'axes.

La transformation inverse est

$$\mathbf{E}_i = T_{ji} \mathbf{e}_j \quad (1.17)$$

Revenant au vecteur  $\mathbf{u}$ , on aura donc

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i = U_j \mathbf{E}_j = U_j T_{ij} \mathbf{e}_i$$

---

3. Ce n'est pas un tenseur!

soit

$$u_i = T_{ij}U_j \quad (1.18)$$

Réiproquement,

$$U_i = T_{ji}u_j \quad (1.19)$$

Telle est donc la loi de transformation d'un vecteur. Examinons à présent le cas d'un tenseur du second ordre. Nous avons défini celui-ci par le fait qu'il transforme un vecteur en un autre selon la loi

$$b_i = a_{ij}c_j$$

On en déduit successivement

$$b_i = a_{ij}T_{j\ell}C_\ell$$

et

$$B_k = T_{ik}b_i = T_{ik}T_{j\ell}a_{ij}C_\ell$$

soit

$$A_{kl} = T_{ik}T_{jl}a_{ij} \quad (1.20)$$

et, réiproquement,

$$a_{ij} = T_{ik}T_{jl}A_{kl} \quad (1.21)$$

Plus généralement, on tenseur d'ordre  $n$  se transforme suivant la loi

$$a_{i_1 \dots i_n} = T_{j_1 i_1} \dots T_{j_n i_n} A_{j_1 \dots j_n} \quad (1.22)$$

## 1.5 Opérateurs de dérivation

Toujours par souci de concision, nous noterons  $D_i$  la dérivée partielle  $\partial/\partial x_i$  par rapport à la  $i^e$  variable. Ainsi, le *gradient* d'un scalaire  $\varphi$  sera le vecteur de composantes

$$D_i\varphi \quad (1.23)$$

C'est bien un vecteur, car la différentielle de  $\varphi$ , qui est un scalaire, s'écrit

$$d\varphi = D_i\varphi dx_i$$

où  $dx_i$  est un vecteur.

La *divergence* d'un vecteur  $u_i$  admettra la représentation simple

$$\text{div}\mathbf{u} = D_i u_i \quad (1.24)$$

et en rassemblant ces deux formules, on obtient le laplacien :

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = D_{ii}\varphi = \Delta\varphi \quad (1.25)$$

où l'on a noté  $D_{ii}$  pour  $D_i D_i$ .

Le *rotationnel* se construit à la manière du produit vectoriel : si  $u_i$  est un vecteur, son rotationnel  $\omega_i$  est donné par

$$\omega_i = e_{ijk} D_j u_k \quad (1.26)$$

Ici encore, on obtient très aisément des formules utiles. Ainsi, le rotationnel du rotationnel est donné par

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u})_i &= e_{ijk} D_j (e_{krs} D_r u_s) \\ &= (\delta_{ir}\delta_{js} - \delta_{is}\delta_{jr}) D_{jr} u_s \\ &= D_{ij} u_j - D_{jj} u_i \end{aligned}$$

ce qui équivaut à

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} \quad (1.27)$$

résultat que nous obtenons avec la plus grande aisance.

## 1.6 Théorème de Gauss-Ostrogradsky

Considérons un champ de tenseurs  $F$ , dont nous omettons ici les indices éventuels, car ils ne jouent aucun rôle dans ce qui suit. Si  $V$  est un volume suffisamment régulier de surface  $S$ , et si  $n_i$  est le vecteur normal à cette surface, on a la formule générale

$$\int_V D_i F dV = \int_S n_i F dS \quad (1.28)$$

Il suffit évidemment de démontrer cette proposition pour une valeur quelconque de  $i$ , soit  $i = 1$ . On découpe le corps en prismes élémentaires, limités pour les grandes valeurs de  $x_1$  par une surface  $dS_+$  et, de l'autre côté, par une surface  $dS_-$  (voir figure 1.2). Ces prismes ont chacun une surface projetée sur le plan  $(Ox_2, Ox_3)$  égale à  $dS_0$ , d'où

$$\begin{aligned} \int_V D_1 F dV &= \int_{S_0} dS_0 \int_{x_{1-}}^{x_{1+}} D_1 F dx_1 \\ &= \int_{S_0} (F^+ - F^-) dS_0 \end{aligned}$$

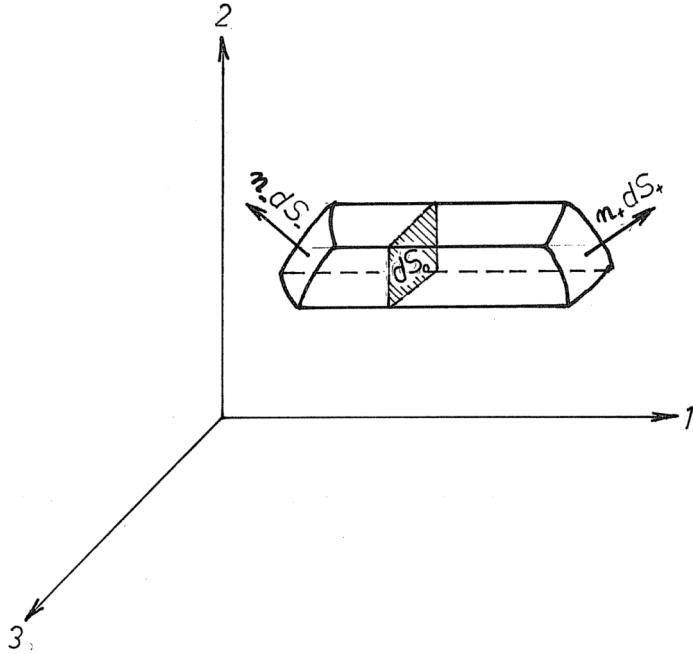


FIGURE 1.2 – Théorème de Gauss-Ostrogradsky

$S_0$  étant la projection de  $S_+$  et  $S_-$ , on a, en tenant compte des orientations relatives,

$$dS_0 = n_1^+ dS_+ = -n_1^- dS_-$$

ce qui entraîne

$$\int_{S_0} (F^+ - F^-) dS_0 = \int_{S_+} F^+ n_1^+ dS_+ + \int_{S_-} F^- n_1^- dS_-$$

soit finalement, comme  $S = S_+ \cup S_- \cup S_*$ , où  $S_*$  est l'éventuelle partie de la surface où  $n_1 = 0$ , partie dont la contribution est de toute façon nulle, on a bien

$$\int_V D_1 F dV = \int_S n_1 F dS$$

Voici quelques applications de ce théorème :

**Théorème de la divergence**

$$\int_V D_i u_i dV = \int_S n_i dS$$

soit

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{u} dV = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$$

**Théorème du gradient**

$$\int_V D_i \varphi dV = \int_S n_i \varphi dS$$

soit

$$\int_V \operatorname{grad} \varphi dV = \int_S \varphi \mathbf{n} dS$$

**Théorème du rotationnel**

$$\int_V e_{ijk} D_j u_k dV = \int_S e_{ijk} n_j u_k dS$$

soit

$$\int_V \operatorname{rot} \mathbf{u} dV = \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{u} dS$$

**Formule d'intégration par parties** Il convient encore de noter la formule suivante, dite d'intégration par parties : si  $F$  et  $G$  sont deux tenseurs, on a

$$\int_V F D_i G dV = \int_S F n_i G dS - \int_V G D_i F dV \quad (1.29)$$

résultat qui se déduit aisément du fait que

$$\int_S n_i F G dS = \int_V D_i (F G) dV = \int_V F D_i G dV + \int_V G D_i F dV$$

## 1.7 Éléments propres des tenseurs symétriques

### 1.7.1 Éléments propres

Un tenseur du second ordre  $a_{ij}$  est dit *symétrique* si l'on a toujours

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i \neq j$$

Les composantes de ce tenseur peuvent être représentées dans le tableau

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ \text{SYM} & & a_{33} \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

qui montre à l'évidence que seules, six d'entre elles sont indépendantes.

Par application de ce tenseur sur un vecteur  $b_j$ , on obtient en général un autre vecteur

$$c_j = a_{ij}b_j$$

qui diffère du vecteur de départ à la fois par sa norme et par son orientation. Mais ne peut-on trouver des vecteurs  $b_i$  particuliers dont l'image ne diffère que par la norme et, éventuellement, le sens, comme l'illustre la figure 1.3. Il s'agit



FIGURE 1.3 – Vecteurs propres et impropropres

d'obtenir la relation

$$a_{ij}b_j = \lambda b_i \quad (1.31)$$

ou encore,

$$(a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) b_j = 0$$

Matriciellement, cela revient à chercher les éléments propres de la matrice (1.30). On sait qu'une matrice symétrique à  $n$  dimensions possède exactement  $n$  vecteurs propres orthogonaux entre eux. Soient donc

$$b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$$

les trois vecteurs propres orthonormés, correspondant aux trois valeurs propres  $\lambda^{(1)}$ ,  $\lambda^{(2)}$  et  $\lambda^{(3)}$ . Les trois vecteurs en question sont appelés *directions principales* du tenseur, et les valeurs propres, *valeurs principales*.

### 1.7.2 Développement spectral du tenseur

Il est équivalent de donner les composantes du tenseur symétrique  $a_{ij}$  ou de donner ses valeurs et directions principales<sup>4</sup>, comme l'atteste la formule

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^3 \lambda^{(k)} b_i^{(k)} b_j^{(k)} \quad (1.32)$$

Pour démontrer cette formule, remarquons d'abord que tout vecteur  $c_i$  admet la décomposition

$$c_j = \sum_k (c_\ell b_\ell^{(k)}) b_j^{(k)}$$

On a donc

$$\begin{aligned} a_{ij} c_j &= \sum_k a_{ij} b_j^{(k)} b_\ell^{(k)} c_\ell \\ &= \sum_k \lambda^{(k)} b_i^{(k)} b_\ell^{(k)} c_\ell \end{aligned}$$

---

4. On pourrait croire que le nombre de paramètres est différent. En fait, il n'en est rien. Pour définir la première direction principale, il faut deux angles ; pour la seconde, il n'en faut plus qu'un, car elle est orthogonale à la première, et la troisième direction principale se déduit directement par orthogonalité aux deux premières. Il faut donc les trois valeurs propres et les trois paramètres définissant la base, ce qui fait bien 6 paramètres en tout.

### 1.7.3 Caractère d'invariance des éléments propres

Lors d'une transformation de coordonnées, que devient l'équation (1.31) ? Multipliant cette équation par  $T_{ik}$ , on obtient

$$T_{ik}a_{ij}b_j = \lambda T_{ik}b_i = \lambda B_k$$

soit encore

$$T_{ik}a_{ij}T_{j\ell}B_\ell = \lambda B_k$$

ce qui équivaut à

$$A_{k\ell}B_\ell = \lambda B_k \quad (1.33)$$

Dès lors, les valeurs principales sont indépendantes du système d'axes choisi. On dit qu'elles sont *invariantes*. L'équation caractéristique scalaire

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

a la forme générale

$$-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \text{ (trace)} \\ I_2 &= \frac{1}{2}(a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ij}) \\ I_3 &= \det(a_{ij}) \end{aligned} \quad (1.34)$$

Ses racines étant  $\lambda^{(1)}$ ,  $\lambda^{(2)}$  et  $\lambda^{(3)}$ , elle ne peut que s'écrire

$$(\lambda^{(1)} - \lambda)(\lambda^{(2)} - \lambda)(\lambda^{(3)} - \lambda) = 0$$

ce qui entraîne

$$I_1 = \lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \lambda^{(3)} \quad (1.35)$$

$$I_2 = \lambda^{(1)}\lambda^{(2)} + \lambda^{(2)}\lambda^{(3)} + \lambda^{(3)}\lambda^{(1)} \quad (1.35)$$

$$I_3 = \lambda^{(1)}\lambda^{(2)}\lambda^{(3)} \quad (1.36)$$

Il en découle que ces trois grandeurs sont également invariantes, ce qui justifie qu'on les nomme *les trois invariants d'un tenseur symétrique*.

### 1.7.4 Décomposition d'un tenseur symétrique en un tenseur isotrope et un déviateur

Le tenseur symétrique  $\delta_{ij}$  admet n'importe quel vecteur comme vecteur propre, avec la valeur propre 1. En conséquence, si  $a_{ij}$  est un tenseur symétrique de directions principales  $b_i^{(1)}, b_i^{(2)}, b_i^{(3)}$  et de valeurs principales  $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}$ , on aura

$$(a_{ij} - \alpha\delta_{ij})b_j^{(k)} = (\lambda^{(k)} - \alpha)b_i^{(k)} \quad (1.37)$$

Le second invariant du tenseur du premier membre vaudra donc

$$\begin{aligned} I_{2,\alpha} &= (\lambda^{(1)} - \alpha)(\lambda^{(2)} - \alpha) + (\lambda^{(2)} - \alpha)(\lambda^{(3)} - \alpha) + (\lambda^{(3)} - \alpha)(\lambda^{(1)} - \alpha) \\ &= I_2 - 2\alpha I_1 + 3\alpha^2 \end{aligned}$$

et admet, pour  $\alpha = I_1/3$ , un minimum égal à

$$\hat{I}_2 = I_2 - \frac{I_1^2}{3} \quad (1.38)$$

Le tenseur ainsi obtenu s'appelle *déviateur de  $a_{ij}$*  et on le note  $\hat{a}_{ij}$  :

$$\hat{a}_{ij} = a_{ij} - \frac{1}{3}a_{\ell\ell}\delta_{ij} \quad (1.39)$$

Son premier invariant est nul :

$$\hat{I}_1 = a_{ii} - \frac{1}{3}a_{\ell\ell}\delta_{ii} = 0$$

et son second invariant prend la forme

$$\hat{I}_2 = \frac{1}{2}(\hat{a}_{ii}\hat{a}_{jj} - \hat{a}_{ij}\hat{a}_{ij}) = -\frac{1}{2}\hat{a}_{ij}\hat{a}_{ij} \quad (1.40)$$

Il est donc *toujours négatif* et sa nullité entraîne celle du déviateur tout entier, dont  $(-\hat{I}_2)$  constitue une norme.

On en déduit par ailleurs qu'*un tenseur symétrique dont les deux premiers invariants sont nuls est nul*. En effet,

$$a_{ij} = \hat{a}_{ij} + \frac{I_1}{3}\delta_{ij}$$

et par la formule (1.38),  $\hat{I}_2$  est nul.

## 1.8 Structure des tenseurs antisymétriques du second ordre

Un tenseur  $\omega_{ij}$  est antisymétrique si

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji} \quad (1.41)$$

En particulier, ses termes diagonaux sont nuls. Introduisant le (pseudo-) vecteur

$$\omega_k = \frac{1}{2}e_{kij}\omega_{ij} \quad (1.42)$$

on obtient alors

$$\begin{aligned} e_{pqk}\omega_k &= \frac{1}{2}e_{pqk}e_{kij}\omega_{ij} \\ &= \frac{1}{2}(\delta_{pi}\delta_{qj} - \delta_{pj}\delta_{qi})\omega_{ij} \\ &= \frac{1}{2}(\omega_{pq} - \omega_{qp}) \\ &= \omega_{pq} \end{aligned}$$

ce qui illustre la correspondance biunivoque entre le tenseur  $\omega_{ij}$  et le vecteur  $\omega_k$ . L'expression

$$\omega_{ij} = e_{ijk}\omega_k \quad (1.43)$$

est la forme canonique des tenseurs antisymétriques du second ordre.

## 1.9 Exercices

**Exercice 1** Calculer l'expression  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$

*Solution* - Le résultatat  $f_i$  est donné par

$$\begin{aligned} f_i &= e_{ijk}a_jb_ke_{irs}c_rd_s \\ &= (\delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr})a_jb_kc_rd_s \\ &= a_jc_jb_kd_k - a_jd_jb_kc_k \end{aligned}$$

ce qui revient à dire que

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

**Exercice 2** Montrer que si  $a_{ij}$  est un tenseur symétrique, on a  $e_{ijk}a_{jk} = 0$ . En déduire que  $\text{divrot } \mathbf{u} = 0$ .

*Solution* - On a en effet, en changeant le nom des indices muets,

$$e_{ijk}a_{jk} = \frac{1}{2}(e_{ijk}a_{jk} + e_{ikj}a_{kj})$$

et, en vertu de la symétrie de  $a_{ij}$ , le second membre s'écrit encore

$$\frac{1}{2}(e_{ijk} + e_{ikj})a_{jk} = 0$$

car  $e_{ijk} = -e_{ikj}$ .

La seconde assertion résulte du fait que

$$\text{divrot } \mathbf{u} = D_i(e_{ijk}D_ju_k) = e_{ijk}D_{ij}u_k$$

avec  $D_{ij} = D_{ji}$ .

**Exercice 3** Montrer que  $\text{rot grad} \varphi = 0$

**Exercice 4** Démontrer la formule de Green

$$\int_V f\Delta g dV - \int_V g\Delta f dV = \int_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS - \int_S g \frac{\partial f}{\partial n} dS$$

**Exercice 5 \*** A partir de la formule de Gauss-Ostrogradsky, démontrer la formule de Stokes-Ampère

$$\int_S \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_C \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} ds$$

$\mathbf{t}$  étant la tangente au contour  $C$  de la surface, orientée suivant la règle du tire-bouchon autour de la normale. La surface  $S$  sera supposée projetable sans recouvrement sur un plan.

*Solution* - Soit  $V$  le volume du cylindre limité par la surface  $S$  et sa projection  $S_0$ , et soit  $S_\ell$  sa surface latérale (fig. 1.4). Pour un vecteur  $v_i$  quelconque, on a alors

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V e_{ijk}D_{ij}v_k dV \\ &= \int_S n_i e_{ijk}D_j v_k dS + \int_{S_0} n_i e_{ijk}D_j v_k dS + \int_{S_\ell} n_i e_{ijk}D_j v_k dS \end{aligned}$$

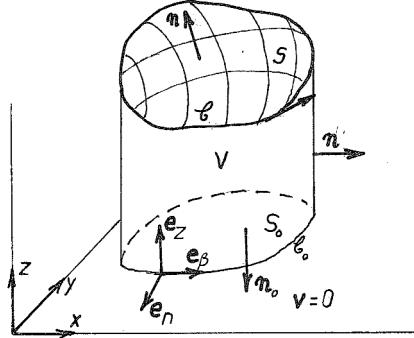


FIGURE 1.4 – Stokes-Ampère

Étant donné un vecteur  $u_i$  sur la surface  $S$  de hauteur  $h(x, y)$ , nous choisissons arbitrairement l'interpolation

$$v_i(x, y, z) = \frac{z}{h(x, y)} u_i(x, y)$$

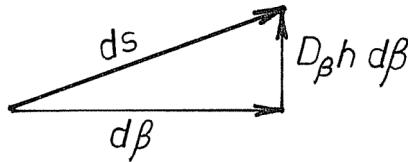
Dès lors, la contribution sur  $S_0$  est nulle. Sur la surface latérale, l'intégrand vaut, dans le système d'axes  $(\beta, z, n)$ ,

$$(D_\beta v_z - D_z v_\beta) = \frac{z}{h} (D_\beta u_z - D_z u_\beta) - \frac{z}{h^2} u_z D_\beta h - \frac{1}{h} u_\beta$$

d'où, en notant  $\mathcal{C}_0$  la projection de  $\mathcal{C}$  sur le plan de base,

$$\begin{aligned} \int_{S_\ell} (D_\beta u_z - D_z u_\beta) dS &= \int_{\mathcal{C}_0} d\beta \int_0^h \left[ \frac{z}{h} D_\beta u_z - \frac{z}{h^2} u_z D_\beta h - \frac{u_\beta}{h} \right] dz \\ &= \int_{\mathcal{C}_0} \left[ \frac{h}{2} D_\beta u_z - \frac{1}{2} u_z D_\beta h - u_\beta \right] d\beta \\ &= \int_{\mathcal{C}_0} D_\beta \left( \frac{h}{2} u_z \right) d\beta - \int_{\mathcal{C}_0} (u_\beta + u_z D_\beta h) d\beta \\ &= - \int_{\mathcal{C}_0} (u_\beta + u_z D_\beta h) d\beta \end{aligned}$$

Or, sur  $\mathcal{C}$ , on a (fig. 1.5)

FIGURE 1.5 – Tangente à  $\mathcal{C}$ 

$$\mathbf{ds} = b\beta \mathbf{e}_\beta + D_\beta h d\beta \mathbf{e}_z$$

si bien que cette intégrale de contour n'est autre que

$$-\int_C \mathbf{u} \cdot \mathbf{ds}$$

Au total, on obtient bien

$$\int_S \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS - \int_C \mathbf{u} \cdot \mathbf{ds} = 0$$

**Exercice 6** Montrer les relations

$$1. \int_S x_j n_j dS = (\text{mes } V) \delta_{ij}$$

$$2. \int_S n_i dS = 0$$

$$3. \int_S e_{ijk} n_j x_k dS = 0$$

où  $S$  est la surface frontière d'un volume  $V$ .

## Chapitre 2

# Cinématique des corps continus déformables

### 2.1 Description du mouvement

Considérons un corps continu occupant, dans un état de référence arbitraire, un volume  $V$ . Un point quelconque de ce corps peut être repéré, dans cet état de référence, par ses coordonnées  $x_i$  dans un repère cartésien.

Imaginons que ce corps se déforme en fonction d'un paramètre d'évolution  $t$ , qui pourra être *le temps* (bien que cette identification ne soit pas *nécessaire* en statique). Il prendra donc, à l'instant  $t$ , une autre configuration, occupant un volume  $V(t)$ . Un point situé en  $x_i$  dans la configuration de référence, prendra alors une nouvelle position, de coordonnées  $\xi_i$  dans le même repère cartésien (*fig.2.1*). On appelle *déplacement* de ce point le vecteur

$$u_i = \xi_i - x_i \quad (2.1)$$

Il est clair que l'on peut considérer ce déplacement aussi bien comme une fonction des coordonnées de départ  $x_i$  que comme une fonction des coordonnées d'arrivée  $\xi_i$ . Les premières sont appelées *coordonnées matérielles* pour la raison que définir un corps dans une configuration de référence, convenue une fois pour toutes, revient en quelque sorte à « donner un nom » à chaque particule. D'ailleurs, en supposant que l'on ait pu graver un réseau de coordonnées sur le corps dans cette position, ce réseau se retrouvera, déformé bien sûr, dans la position au temps  $t$ , où il définira un système de coordonnées curvilignes que

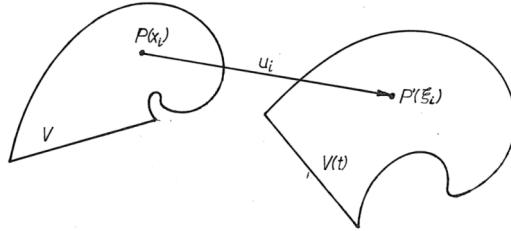


FIGURE 2.1 – Déplacement

l'on appelle les  *coordonnées convectées*. Ces coordonnées ont toujours, pour un point matériel donné, la même valeur que les coordonnées matérielles (*fig. 2.2*).

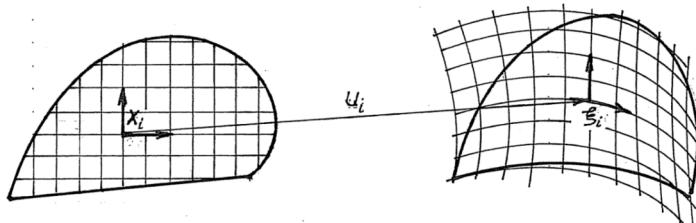


FIGURE 2.2 – Coordonnées convectées

Utiliser les coordonnées matérielles pour décrire le déplacement, c'est donc parler du déplacement du point qui, en  $t = 0$ , occupait la position  $x_i$  : il s'agit d'une *description lagrangienne*.

A l'inverse, les coordonnées  $\xi_i$  donnent la position spatiale du corps au temps  $t$ , ce qui leur vaut le nom de  *coordonnées spatiales*. Décrire le mouvement à l'aide des coordonnées spatiales, c'est donc parler du déplacement du point qui, à l'instant  $t$ , occupe la position  $\xi_i$  : il s'agit d'une *description eulérienne*.

## 2.2 Choix de la description

En mécanique des fluides, la plupart des problèmes consistent à étudier des écoulements perpétuels, bien qu'éventuellement variables, et on s'intéresse gé-

néralement aux champs de vitesses et de pressions dans une portion déterminée de l'espace, sans se soucier des positions préalables des particules. Dans ces circonstances, la description eulérienne s'impose. Seuls, quelques problèmes d'oscillations admettent une formulation lagrangienne plus élégante [14].

Au contraire, en calcul des structures, les corps considérés sont fréquemment anisotropes ou même inhomogènes et, presque toujours, de forme compliquée. *La seule configuration où les directions d'anisotropie, les frontières de matériaux différents et, plus simplement, la forme des corps, sont connues, est la position de référence.* C'est pourquoi *la description lagrangienne est de règle dans le calcul des structures, et nous l'adopterons toujours dans ce qui suit.* Remarquons qu'en conséquence, les volumes et les surfaces considérés dans les diverses intégrations sont toujours des volumes et des surfaces de référence, *indépendantes des déplacements.*

## 2.3 Tenseur des déformations de Green

Nous dirons qu'un corps se déforme si la distance entre deux au moins de ses points varie. Comment mesurer cette déformation ? Comme la distance est une notion cumulative le long d'un segment de droite, il suffit en fait de mesurer la variation de distance dans le voisinage de chaque point. Soit donc  $P(x_i)$  un point quelconque du corps, et  $Q(x_i + dx_i)$  un point voisin. La déformation les amène respectivement en  $P'(\xi_i)$  et  $Q'(\xi_i + d\xi_i)$ , avec (fig.2.3)

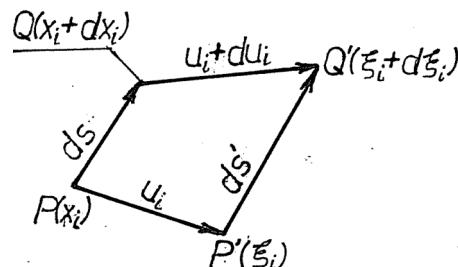


FIGURE 2.3 – Définition de la déformation

$$\begin{cases} \xi_i &= x_i + u_i \\ \xi_i + d\xi_i &= (x_i + dx_i) + (u_i + du_i) \end{cases}$$

## 22 CHAPITRE 2. CINÉMATIQUE DES CORPS CONTINUS DÉFORMABLES

Dans la configuration de référence, la distance entre ces deux points est donnée par

$$ds^2 = dx_i dx_i$$

La déformation transforme cette distance en

$$ds'^2 = d\xi_i d\xi_i = (dx_i + du_i)(dx_i + du_i)$$

Exprimant  $du_i$  comme la différentielle du déplacement :

$$du_i = D_j u_i dx_j$$

on obtient

$$\begin{aligned} ds'^2 &= (dx_i + D_j u_i dx_j)(dx_i + D_k u_i dx_k) \\ &= (\delta_{ij} + D_j u_i)dx_j(\delta_{ik} + D_k u_i)dx_k \\ &= (\delta_{jk} + D_j u_k + D_k u_j + D_j u_i D_k u_i)dx_j dx_k \end{aligned}$$

Pour savoir si cette distance diffère de la distance de référence, il suffit d'en faire la différence. L'usage veut que l'on en calcule plutôt la *demi-différence* :

$$\frac{1}{2}(ds'^2 - ds^2) = \frac{1}{2}(D_j u_k + D_k u_j + D_j u_i D_k u_i)dx_j dx_k = \gamma_{jk} dx_j dx_k \quad (2.2)$$

où apparaît le tenseur symétrique

$$\gamma_{jk} = \frac{1}{2}(D_j u_k + D_k u_j + D_j u_i D_k u_i) \quad (2.3)$$

appelé *tenseur des déformations de Green*. fait remarquable, à partir des six composantes indépendantes de ce tenseur en un point, il est possible de calculer la variation des longueurs infinitésimales dans *toutes* les directions autour du point considéré : il suffit en effet, à partir du vecteur  $dx_i$ , de calculer  $\gamma_{jk} dx_j dx_k$ .

**\* Remarque** La description ci-dessus considère que la déformation se mesure uniquement par des variations de longueur. En se rappelant la structure microscopique de la matière, on conçoit sans peine que *l'orientation relative* de deux particules voisines puisse jouer un rôle, menant à des configurations physiquement différentes, bien que  $\gamma_{ij} = 0$  partout (*fig.2.4*). (Ce serait le cas à cause d'effets magnétiques, par exemple). Dans ce cas, il faudrait encore pouvoir mesurer les variations d'orientation. De tels effets sont ignorés dans le cadre de la théorie *classique* des milieux continus. Il existe cependant des théories dites *asymétriques* où des effets de ce genre sont pris en compte à l'aide de *couples de contrainte* (*stress couples*) [58, 10].

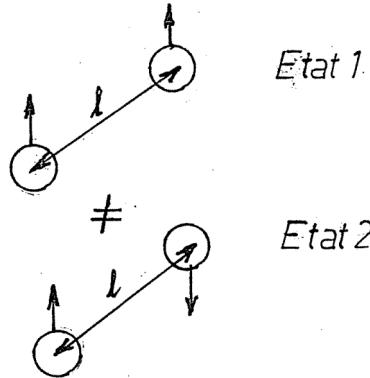


FIGURE 2.4 – Effet de l'orientation des particules

## 2.4 Interprétation du tenseur de Green

Pour interpréter les composantes du tenseur des déformations, il est utile de faire appel aux coordonnées convectées. La base  $(\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3)$  des coordonnées matérielles vérifie évidemment la relation

$$\mathbf{e}_i = D_i \mathbf{P} \quad (2.4)$$

Son image après déformation est donnée par les vecteurs

$$\mathbf{g}_i = D_i \mathbf{P}' \quad (2.5)$$

formant la base (covariante) locale des coordonnées convectées. Insistons sur le fait qu'en chaque point, la base  $(\mathbf{g}_i)$  peut avoir une orientation différente et que le plus souvent,  $|\mathbf{g}_i| \neq 1$ .

La distance entre deux points voisins  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{P} + d\mathbf{P}$  est donnée, dans la configuration de référence par

$$ds^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P} = dx_i dx_i$$

Dans la configuration déformée, on a

$$d\mathbf{P}' = \mathbf{g}_i dx_i$$

si bien que

$$ds'^2 = d\mathbf{P}' \cdot d\mathbf{P}' = \mathbf{g}_i dx_i \cdot \mathbf{g}_j dx_j = g_{ij} dx_i dx_j \quad (2.6)$$

## 24 CHAPITRE 2. CINÉMATIQUE DES CORPS CONTINUS DÉFORMABLES

où s'introduit le *tenseur métrique* de la configuration déformée

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \quad (2.7)$$

qui est visiblement symétrique. La comparaison des équations (2.6) et (2.2) donne visiblement

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \delta_{ij}) \quad (2.8)$$

Examinons d'abord une composante diagonale de  $\gamma_{ij}$ ,  $\gamma_{11}$  pour fixer les idées. Le vecteur  $\mathbf{e}_1$  prend, au cours de la déformation, une longueur

$$|\mathbf{g}_1| = |\mathbf{e}_1|(1 + \varepsilon) = 1 + \varepsilon \quad (2.9)$$

$\varepsilon$  étant son *allongement proportionnel*, au sens de la résistance des matériaux. On a

$$g_{11} = |\mathbf{g}_1|^2 = 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2$$

d'où

$$\gamma_{11} = \frac{1}{2}(g_{11} - \delta_{11}) = \frac{1}{2}(1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 - 1) = \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \quad (2.10)$$

Lorsque l'allongement proportionnel est petit, il vient simplement

$$\gamma_{11} \approx \varepsilon \quad (2.11)$$

Pourquoi, se demandera-t-on, n'avoir pas essayé de généraliser les allongements proportionnels de l'ingénieur, plutôt que d'introduire une autre mesure de déformation ? La réponse est qu'une telle approche, bien que possible, mène à un tenseur n'ayant pas de forme analytique simple avec les déplacements (déformation de Jaumann, [34, 36]. (Voir aussi exercice 10).

L'interprétation des termes croisés est aussi simple. Nous examinerons le terme  $\gamma_{12}$ . Dans la configuration de référence, les vecteurs de base  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  sont orthogonaux,

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$$

Dans la configuration déformée, les vecteurs  $\mathbf{g}_1$  et  $\mathbf{g}_2$  vérifient, en vertu de (2.8)

$$|\mathbf{g}_1| = \sqrt{1 + 2\gamma_{11}}, \quad |\mathbf{g}_2| = \sqrt{1 + 2\gamma_{22}}$$

et

$$\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + 2\gamma_{12} = 2\gamma_{12}$$

Le cosinus de l'angle  $\theta_{12}$  entre  $\mathbf{g}_1$  et  $\mathbf{g}_2$  est donc donné par

$$\cos \theta_{12} = \frac{\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2}{|\mathbf{g}_1||\mathbf{g}_2|} = \frac{2\gamma_{12}}{\sqrt{1+2\gamma_{11}}\sqrt{1+2\gamma_{22}}} \quad (2.12)$$

Pour de *petites* déformations, on a

$$\cos \theta_{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{12}\right) \approx \frac{\pi}{2} - \theta_{12}$$

et

$$\sqrt{1+2\gamma_{11}} \approx 1, \quad \sqrt{1+2\gamma_{22}} \approx 1$$

si bien que

$$\frac{\pi}{2} - \theta_{12} \approx 2\gamma_{12} \quad (2.13)$$

ce qui signifie que les termes croisés du tenseur de Green mesurent la variation des angles droits.

## 2.5 Équations de compatibilité

Nous avons vu comment calculer le tenseur des déformations à partir des déplacements. Posons-nous à présent le problème inverse [81, 53] : on donne en chaque point le tenseur de Green  $\gamma_{ij}$  ou, ce qui est équivalent, la métrique déformée  $g_{ij}$ , et on désire retrouver les coordonnées  $\xi_i$  ou les déplacements  $u_i$ . Ce problème admet-il une solution ? Si oui, est-elle unique ?

Nous ne discuterons ici que le cas de corps simplement connexes. Supposons connue la position  $\mathbf{P}'$  d'un point matériel  $\mathbf{P}$ . Pour en déduire la position de ses voisins, il faut intégrer les équations

$$D_i \mathbf{P}' = \mathbf{g}_i$$

Mais les  $\mathbf{g}_i$  eux-mêmes ne sont pas encore connus, et il faudra aussi que nous les intégrions. Sur ce point, notons d'abord la condition d'intégrabilité

$$D_i \mathbf{g}_j = D_{ij} \mathbf{P}' = D_j \mathbf{g}_i \quad (2.14)$$

Comme préliminaire à l'intégration de la base  $\{\mathbf{g}_i\}$ , remarquons que le tenseur métrique  $g_{ij}$  admet toujours un inverse  $g^{ij}$  défini par la relation

$$g^{im} g_{mj} = \delta_j^i$$

## 26 CHAPITRE 2. CINÉMATIQUE DES CORPS CONTINUS DÉFORMABLES

car la matrice  $\{g_{ij}\}$  est définie positive. On peut, à partir de cette inverse, définir une seconde base

$$\mathbf{g}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j$$

qui vérifie visiblement

$$\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j = g^{ik} \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_j = g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$$

Pour distinguer les deux bases, on appelle  $\{\mathbf{g}_i\}$  *base covariante* et  $\{\mathbf{g}^i\}$  *base contravariante*. Selon la base choisie, on écrira

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{g}_i \text{ ou } \mathbf{a} = a_i \mathbf{g}^i$$

distinguant soigneusement les composantes contravariantes (indice supérieur) des composantes covariantes (indice inférieur). Ceci étant, si l'on pose

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{g}^i$$

on a

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{g}_j = a_i \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = a_i \delta_j^i = a_j$$

et, de même,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{g}^i = a^i$$

Nous pouvons à présent examiner l'intégration de la base covariante  $\{\mathbf{g}_i\}$ . Si cette base est connue en un point, il faut intégrer à partir de ce point les équations

$$D_k \mathbf{g}_i = (D_k \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j) \mathbf{g}^j = \Gamma_{kji} \mathbf{g}^j \quad (2.15)$$

où les  $\Gamma_{kji}$ , dits *symboles de Christoffel*, doivent vérifier, en vertu de (2.14)

$$\Gamma_{kij} = D_k \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = D_i \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_j = \Gamma_{ijk} \quad (2.16)$$

c'est-à-dire être symétrique par rapport à leurs indices extrêmes. Nous allons montrer que ces symboles peuvent être déduits du tenseur des déformations. On a en effet

$$D_k g_{ij} = D_k (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j) = D_k \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j + \mathbf{g}_i \cdot D_k \mathbf{g}_j = \Gamma_{kji} + \Gamma_{kij} \quad (2.17)$$

(*lemme de Ricci*). Écrivant cette relation en permutant les indices, on obtient les trois relations

$$\begin{aligned} D_k g_{ij} &= \Gamma_{kij} + \Gamma_{kji} \\ D_j g_{ki} &= \Gamma_{jki} + \Gamma_{jik} \\ D_i g_{jk} &= \Gamma_{ijk} + \Gamma_{ikj} \end{aligned}$$

dont on tire, en vertu de (2.16)

$$\Gamma_{kij} = \frac{1}{2}(D_k g_{ij} + D_j g_{ki} - D_i g_{jk}) \quad (2.18)$$

De plus, comme

$$D_k g_{ij} = D_k(\delta_{ij} + 2\gamma_{ij}) = 2D_k \gamma_{ij}$$

on obtient

$$\Gamma_{kij} = D_k \gamma_{ij} + D_j \gamma_{ki} - D_i \gamma_{jk} \quad (2.19)$$

Cette relation permet de calculer, à partir des déformations, les symboles de Christoffel dont on a besoin pour intégrer la base covariante à partir des équations (2.15). Il reste encore à se poser la question de la compatibilité de ces équations, qui ne sera réalisée que si les dérivées croisées sont égales, ce qui s'écrit

$$D_p(D_q \mathbf{g}_i) = D_q(D_p \mathbf{g}_i) \quad (2.20)$$

Calculons donc

$$D_p(D_q \mathbf{g}_i) = D_p(\Gamma_{qji} \mathbf{g}^j) = \mathbf{g}^j D_p \Gamma_{qji} + \Gamma_{qji} D_p \mathbf{g}^j$$

Pour obtenir les dérivées de la base contravariante ( $\mathbf{g}^j$ ), notons que

$$0 = D_p \delta_m^j = D_p(\mathbf{g}^j \cdot \mathbf{g}_m) = \mathbf{g}_m \cdot D_p \mathbf{g}^j + \mathbf{g}^j \cdot D_p \mathbf{g}_m$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} D_p \mathbf{g}^j &= (\mathbf{g}_m \cdot D_p \mathbf{g}^j) \mathbf{g}^m \\ &= -(\mathbf{g}^j \cdot D_p \mathbf{g}^m) \mathbf{g}^m \\ &= -g^{j\ell} (\mathbf{g}_\ell \cdot D_p \mathbf{g}_m) \mathbf{g}^m \\ &= -g^{j\ell} \Gamma_{p\ell m} \mathbf{g}^m \end{aligned}$$

et

$$D_p(D_q \mathbf{g}_i) = \mathbf{g}^m (D_p \Gamma_{qmi} - g^{j\ell} \Gamma_{p\ell m} \Gamma_{qji})$$

La condition de compatibilité s'écrit donc

$$R_{mipq} = D_p \Gamma_{qmi} - D_q \Gamma_{pmi} - g^{j\ell} (\Gamma_{p\ell m} \Gamma_{qji} - \Gamma_{q\ell m} \Gamma_{pji}) = 0$$

On notera que le tenseur  $R_{mipq}$  est connu sous le nom de *tenseur de courbure*. Il nous reste à l'expliciter en termes des déformations. On a

$$\begin{aligned} D_p \Gamma_{qmi} &= D_p(D_q \gamma_{mi} + D_i \gamma_{mq} - D_m \gamma_{iq}) \\ &= D_{pq} \gamma_{mi} + D_{pi} \gamma_{mq} - D_{pm} \gamma_{iq} \end{aligned}$$

## 28 CHAPITRE 2. CINÉMATIQUE DES CORPS CONTINUS DÉFORMABLES

et, en permutant les indices  $p$  et  $q$ ,

$$D_q \Gamma_{pmi} = D_{pq} \gamma_{mi} + D_{qi} \gamma_{mp} - D_{qm} \gamma_{pi}$$

ce qui mène à la forme finale des *équations de compatibilité*,

$$\begin{aligned} & D_{pi} \gamma_{mq} + D_{qm} \gamma_{pi} - D_{pm} \gamma_{iq} - D_{qi} \gamma_{mp} \\ & - g^{j\ell} \{ (D_p \gamma_{\ell m} + D_m \gamma_{p\ell} - D_\ell \gamma_{pm}) (D_q \gamma_{ji} + D_i \gamma_{jq} - D_j \gamma_{iq}) \\ & - (D_q \gamma_{\ell m} + D_m \gamma_{q\ell} - D_\ell \gamma_{qm}) (D_p \gamma_{ji} + D_i \gamma_{pj} - D_j \gamma_{pi}) \} = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

A priori, le tenseur de courbure possède  $3^4 = 81$  composantes. Cependant, elles ne sont pas toutes indépendantes. En effet, on peut vérifier que

$$\begin{cases} R_{impq} = -R_{mipq} & (a) \\ R_{mipq} = -R_{mipq} & (b) \\ R_{pqmi} = R_{mipq} & (c) \end{cases}$$

La relation (a) réduit à trois le nombre de valeurs du couple  $(i, m)$  pour lesquelles les  $R_{impq}$  sont indépendants et non nuls, à savoir,

$$(i, m) = (1, 2), (2, 3) \text{ et } (3, 1)$$

De même, la relation (b) permet de ne considérer que les couples

$$(p, q) = (1, 2), (2, 3) \text{ et } (3, 1)$$

Enfin, en vertu de la relation (c), la matrice

$$\begin{bmatrix} R_{1212} & R_{1223} & R_{1231} \\ R_{2312} & R_{2323} & R_{2331} \\ R_{3112} & R_{3123} & R_{3131} \end{bmatrix}$$

est symétrique, donc compte *six* composantes indépendantes, à savoir,

$$R_{1212}, R_{1223}, R_{1231}, R_{2323}, R_{2331}, R_{3131}$$

*Les équations de compatibilité sont donc au nombre de six.*

Récapitulons. Supposant les équations de compatibilité (2.21) vérifiées, on peut intégrer les équations (2.15). Il reste à se donner la base  $\{\mathbf{g}_i\}$  en un point  $\mathbf{P}_0$  arbitraire. Le choix des  $\mathbf{g}_i(\mathbf{P}_0)$  devra vérifier les conditions

$$|\mathbf{g}_1(\mathbf{P}_0)|^2 = 1 + 2\gamma_{11}(\mathbf{P}_0)$$

et de même pour les deux autres vecteurs de base, ce qui fixe leurs normes. Les angles entre les vecteurs de base sont fixés par les conditions

$$\mathbf{g}_i(\mathbf{P}_0) \cdot \mathbf{g}_j(\mathbf{P}_0) = 2\gamma_{ij}(\mathbf{P}_0), \quad i \neq j$$

L'*orientation* de cette base locale est cependant arbitraire : les bases convectées sont définies à une rotation près.

Les  $\mathbf{g}_i$  étant déterminés, on peut calculer les coordonnées de tous les points en intégrant les relations

$$D_i \mathbf{P}' = \mathbf{g}_i$$

mais il faut encore se donner les coordonnées  $\xi_i(\mathbf{P}_0)$  du point où démarre le processus d'intégration, ce qui donne encore la liberté d'une *translation* du corps.

En conclusion, un *champ de tenseurs symétriques*  $\gamma_{ij}$  ne peut être un *champ de déformation de Green*, c'est-à-dire avoir la forme

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(D_i u_j + D_j u_i + D_i u_m D_j u_m)$$

que s'il vérifie les six équations de compatibilité (2.21). Dans ce cas, le champ de déplacement  $u_i$  est déterminé à une translation et une rotation près.

## 2.6 Hypothèses simplificatrices

Les équations de compatibilité (2.21) s'appliquent dans le cas général des grandes déformations. Malheureusement, elles sont compliquées, d'une part par leur non-linéarité (équations presque linéaires) et par le fait que le tenseur de déformation apparaît implicitement dans  $g^{ij}$ . En restreignant le champ de l'analyse, on peut les simplifier quelque peu.

### 2.6.1 Petites déformations

L'hypothèse des *petites déformations* consiste à poser

$$\sup_{\mathbf{a} \neq 0} \frac{|\gamma_{ij} a_i a_j|}{a_i a_i} \leq \Gamma \ll 1 \text{ pp dans } V \quad (2.22)$$

c'est-à-dire que les déformations principales sont inférieures en valeur absolue à  $\Gamma$ . Cette hypothèse, très généralement applicable aux métaux dans le domaine élastique, permet d'écrire

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \mathcal{O}(\Gamma), \quad g^{ij} = \delta^{ij} + \mathcal{O}(\Gamma)$$

et ramène les équations de compatibilité à la forme approchée plus simple [53]

$$\begin{aligned} & D_{pi}\gamma_{mq} + D_{qm}\gamma_{pi} - D_{pm}\gamma_{iq} - D_{qi}\gamma_{mp} \\ & -(D_p\gamma_{jm} + D_m\gamma_{pj} - D_j\gamma_{pm})(D_q\gamma_{ji} + D_i\gamma_{jq} - D_j\gamma_{iq}) \\ & -(D_q\gamma_{jm} + D_m\gamma_{qj} - D_j\gamma_{qm})(D_p\gamma_{ji} + D_i\gamma_{pj} - D_j\gamma_{pi}) \} = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

où les  $\gamma_{ij}$  n'apparaissent plus que sous forme explicite.

### 2.6.2 Petits déplacements

L'hypothèse dite des *petits déplacements* – il serait plus correct de dire des *petits gradients de déplacement* – consiste à poser

$$\sup_{i,j} |D_j u_i| \leq \Gamma \ll 1 \text{ pp dans } V \quad (2.24)$$

Cette hypothèse, plus forte que la précédente, entraîne

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{D_i u_j + D_j u_i}{\Gamma} + \frac{D_i u_m D_j u_m}{\Gamma^2} \right) \approx \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_m) = \varepsilon_{ij} \quad (2.25)$$

Nous démontrerons indépendamment au chapitre 5 que les équations de compatibilité pour les déformations linéaires  $\varepsilon_{ij}$  sont

$$D_{pi}\varepsilon_{mq} + D_{qm}\varepsilon_{pi} - D_{pm}\varepsilon_{iq} - D_{qi}\varepsilon_{mq} = 0$$

soit les relations (2.23) où les produits de  $\gamma_{ij}$  sont négligés devant leurs dérivées.

### 2.6.3 Gradients de déplacements modérés

Il s'agit d'un hypothèse intermédiaire entre les deux précédentes, bien utile en théorie de la stabilité (bifurcation de l'équilibre). Elle suppose de toute façon que les déformations sont petites ( $\mathcal{O}(\Gamma)$ ), mais ajoute une hypothèse que l'on peut présenter de deux façons équivalentes :

**Première définition :** *on admet que, quels que soient i et j, on a*

$$|D_i u_j| \leq \mathcal{O}(\Gamma^{1/2}) \quad (2.26)$$

Dans ce cadre, on a

$$\mathcal{O} \quad \frac{2\gamma_{11}}{\Gamma} = \frac{2D_1 u_1 + (D_1 u_1)^2}{\Gamma} + \frac{(D_1 u_2)^2}{\Gamma} + \frac{(D_1 u_3)^2}{\Gamma}$$

ce qui entraîne visiblement

$$D_1 u_1 = \mathcal{O}(\Gamma)$$

L'examen de  $\gamma_{22}$  et de  $\gamma_{33}$  donne de même

$$D_2 u_2 = \mathcal{O}(\Gamma) \text{ et } D_3 u_3 = \mathcal{O}(\Gamma)$$

**Deuxième définition :** *on admet que*

$$D_1 u_1 = \mathcal{O}(\Gamma), \quad D_2 u_2 = \mathcal{O}(\Gamma) \text{ et } D_3 u_3 = \mathcal{O}(\Gamma) \quad (2.27)$$

Moyennant cette hypothèse, on a

$$2(\gamma_{11} - D_1 u_1) = \mathcal{O}(\Gamma) = (D_1 u_2)^2 + (D_1 u_3)^2$$

ce qui n'est possible que si

$$D_1 u_2 = \mathcal{O}(\Gamma^{1/2}) \text{ et } D_1 u_3 = \mathcal{O}(\Gamma^{1/2})$$

De la même façon, l'examen de  $\gamma_{22}$  conduit aux conditions

$$D_2 u_1 = \mathcal{O}(\Gamma^{1/2}) \text{ et } D_2 u_3 = \mathcal{O}(\Gamma^{1/2})$$

et celui de  $\gamma_{33}$ , aux conditions

$$D_3 u_1 = \mathcal{O}(\Gamma^{1/2}) \text{ et } D_3 u_2 = \mathcal{O}(\Gamma^{1/2})$$

de sorte que les conditions (2.26) sont également vérifiées. Les deux présentations sont donc équivalentes.

Dans ce cadre, on peut simplifier l'expression des déformations de Green à condition d'admettre une erreur  $\mathcal{O}(\Gamma^2)$  sur les déformations directes et  $\mathcal{O}(\Gamma^{3/2})$  sur les déformations croisées. En effet, considérons d'abord  $\gamma_{11}$ . Le terme  $\frac{1}{2}(D_1 u_1)^2$  est  $\mathcal{O}(\Gamma^2)$ , donc on peut écrire

$$\gamma_{11} = D_1 u_1 + \frac{1}{2}(D_1 u_2)^2 + \frac{1}{2}(D_1 u_3)^2 + \mathcal{O}(\Gamma^2) \quad (2.28)$$

Par le même raisonnement,

$$\gamma_{22} = D_2 u_2 + \frac{1}{2}(D_2 u_1)^2 + \frac{1}{2}(D_2 u_3)^2 + \mathcal{O}(\Gamma^2) \quad (2.29)$$

$$\gamma_{33} = D_3 u_3 + \frac{1}{2}(D_3 u_1)^2 + \frac{1}{2}(D_3 u_2)^2 + \mathcal{O}(\Gamma^2) \quad (2.30)$$

## 32 CHAPITRE 2. CINÉMATIQUE DES CORPS CONTINUS DÉFORMABLES

Passons aux déformations croisées. On a

$$2\gamma_{12} = \frac{D_1 u_2 + D_2 u_1}{\mathcal{O}} + \frac{D_1 u_1 D_2 u_1}{\Gamma^{3/2}} + \frac{D_1 u_2 D_2 u_2}{\Gamma^{3/2}} + \frac{D_1 u_3 D_2 u_3}{\Gamma}$$

ce qui permet d'écrire

$$2\gamma_{12} = D_1 u_2 + D_2 u_1 + D_1 u_3 D_2 u_3 + \mathcal{O}(\Gamma^{3/2}) \quad (2.31)$$

et, de la même façon, on obtient aisément

$$2\gamma_{23} = D_2 u_3 + D_3 u_2 + D_2 u_1 D_3 u_1 + \mathcal{O}(\Gamma^{3/2}) \quad (2.32)$$

$$2\gamma_{31} = D_3 u_1 + D_1 u_3 + D_3 u_2 D_1 u_2 + \mathcal{O}(\Gamma^{3/2}) \quad (2.33)$$

## 2.7 Exercices

**Exercice 7** Déterminer, à partir de l'expression générale des déformations de Green, un champs de déplacement conduisant à

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = 0$$

$$2\gamma_{12} = \alpha$$

$$\gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$$

*Solution* - On cherchera un déplacement de la forme suivante :

$$u_1 = A(y), \quad u_2 = B(y), \quad u_3 = 0$$

Il vient alors

$$\gamma_{11} = 0$$

$$\gamma_{22} = B' + \frac{1}{2}A'^2 + \frac{1}{2}B'^2 = 0$$

$$\gamma_{33} = 0$$

$$2\gamma_{12} = A' = \alpha$$

$$2\gamma_{13} = 0$$

$$2\gamma_{23} = 0$$

On en déduit

$$0 = B'^2 + 2B' + A'^2 = B'^2 + 2B' + \alpha^2$$

soit

$$B' = -1 \pm \sqrt{1 - \alpha^2}$$

Cette solution n'a de sens que si  $|\alpha| < 1$ , ce qui est bien normal si l'on veut bien se référer à l'interprétation (6.12) des déformations croisées. Pour  $\alpha = 0$ , on doit avoir  $B' = 0$ , ce qui mène à choisir le signe + pour le radical. Une solution est donc

$$\begin{cases} u_1 &= \alpha y \\ u_2 &= (-1 + \sqrt{1 - \alpha^2})y \\ u_3 &= 0 \end{cases}$$

**Exercice 8** Déterminer de la même manière un champ de déplacement donnant  $\gamma_{11} = \alpha$ , les autres déformations étant nulles.

**Exercice 9** Montrer que les déformations doivent vérifier les conditions suivantes :

a)  $1 + 2\gamma_{11} > 0, 1 + \gamma_{22} > 0, 1 + \gamma_{33} > 0$

b)  $2|\gamma_{12}| \leq \sqrt{(1 + 2\gamma_{11})(1 + 2\gamma_{22})}$

c) Dans le cas d'un cisaillement pur, ( $\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = 0$ ), on doit avoir

$$\sqrt{\gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2 + \gamma_{23}^2 - 4\gamma_{12}\gamma_{23}\gamma_{31}} \leq \frac{1}{2}$$

*Solution* - L'élément de longueur après déformation, qui s'écrit

$$d\xi_i d\xi_i = (\delta_{kl} + 2\gamma_{k\ell}) dx_k dx_\ell$$

doit être positif quels que soient  $dx_k$  et  $dx_\ell$ , ce qui signifie que la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 + 2\gamma_{11} & 2\gamma_{12} & 2\gamma_{13} \\ 2\gamma_{21} & 1 + 2\gamma_{22} & 2\gamma_{23} \\ 2\gamma_{31} & 2\gamma_{32} & 1 + 2\gamma_{33} \end{bmatrix}$$

doit être définie positive. En particulier, ses éléments diagonaux doivent être positifs, d'où a). Les déterminants emboîtés,

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 1 + 2\gamma_{11} \\ \Delta_2 &= (1 + 2\gamma_{11})(1 + 2\gamma_{22}) - 4\gamma_{12}^2 \\ \Delta_3 &= (1 + 2\gamma_{11})(1 + 2\gamma_{22})(1 + 2\gamma_{33}) + 16\gamma_{13}\gamma_{21}\gamma_{32} \\ &\quad - 4\gamma_{12}^2(1 + \gamma_{33}) - 4\gamma_{13}^2(1 + 2\gamma_{22}) - 4\gamma_{23}^2(1 + 2\gamma_{11}) \end{aligned}$$

doivent être positifs. Cela étant,

## 34 CHAPITRE 2. CINÉMATIQUE DES CORPS CONTINUS DÉFORMABLES

- b) équivaut à  $\Delta_2 > 0$
- c) découle directement de  $\Delta_3 > 0$

**Exercice 10 \*** Montrer qu'il est possible de trouver un tenseur symétrique  $h_{ij}$  tel que

$$g_{ij} = \delta_{ij} + 2h_{ij} + h_{im}h_{jm}$$

*Solution* - La relation ci-dessus s'écrit encore

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \delta_{im}\delta_{jm} + h_{im}\delta_{jm} + \delta_{im}h_{jm} + h_{im}h_{jm} \\ &= \delta_{im}(\delta_{jm} + h_{jm}) + h_{im}(\delta_{jm} + h_{jm}) \\ &= (\delta_{im} + h_{im})(\delta_{jm} + h_{jm}) \end{aligned}$$

Passons aux axes principaux du tenseur  $g_{ij}$  par la transformation

$$g_{pq}^* = T_{pi}T_{qj}g_{ij}, \quad T_{pi}T_{qi} = \delta_{pq} \text{ (orthogonalité)}$$

On obtient

$$\{g_{pq}^*\} = \text{diag}(g_{11}^*, g_{22}^*, g_{33}^*)$$

tous ces éléments étant strictement positifs. La transformation inverse est visiblement

$$g_{rs} = T_{pr}T_{qs}g_{pq}^*$$

Définissons alors, dans les axes principaux du tenseur métrique, le tenseur « racine carrée »

$$\{a_{pq}^*\} = \text{diag}(\sqrt{g_{11}^*}, \sqrt{g_{22}^*}, \sqrt{g_{33}^*})$$

Il est clair que

$$a_{pq}^*a_{rq}^* = g_{pr}^*$$

Les composantes du tenseur racine carrée dans le système de départ sont données par

$$a_{rs} = T_{pr}T_{qs}a_{pq}^*$$

On a donc

$$\begin{aligned} a_{im}a_{jm} &= T_{pi}T_{qm}a_{pq}^*T_{rj}T_{sm}a_{rs}^* \\ &= T_{pi}T_{rj}\delta_{qs}a_{pq}^*a_{rs}^* \\ &= T_{pi}T_{rj}a_{pq}^*a_{rq}^* \\ &= T_{pi}T_{rj}g_{pr}^* \\ &= g_{ij} \end{aligned}$$

Il suffit alors de poser

$$h_{ij} = a_{ij} - \delta_{ij}$$

On remarquera que dans les axes principaux de déformation, on a

$$h_{11}^* = \sqrt{g_{11}^*} - 1, \quad h_{22}^* = \sqrt{g_{22}^*} - 1, \quad h_{33}^* = \sqrt{g_{33}^*} - 1$$

c'est-à-dire que dans les axes principaux, ce tenseur représente les allongements proportionnels, ce qui le rend séduisant. En contrepartie, il ne contient les déplacements que de manière implicite. Ce tenseur est connu sous le nom de *tenseur de déformation de Jaumann*.



# Chapitre 3

## Principe des travaux virtuels

### 3.1 Déplacements virtuels

A partir d'une certaine configuration du corps  $V$ , décrite par des déplacements  $u_i$ , considérons une configuration très voisine, correspondant aux déplacements  $\hat{u}_i$ . On appelle *variation du déplacement* ou *déplacement virtuel* le champ

$$\delta u_i = \hat{u}_i - u_i \quad (3.1)$$

A cette variation correspond une modification des déformations de Green

$$\hat{\gamma}_{ij} - \gamma_{ij} = \frac{1}{2}(D_i \hat{u}_j + D_j \hat{u}_i + D_i \hat{u}_m D_j \hat{u}_m) - \frac{1}{2}(D_i u_j + D_j u_i + D_i u_m D_j u_m)$$

Tenant compte de la définition des déplacements virtuels, on obtient

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{ij} - \gamma_{ij} &= \frac{1}{2}(D_i \delta u_j + D_j \delta u_i + D_i u_m D_j \delta u_m + D_j u_m D_i \delta u_m) \\ &\quad + \frac{1}{2}D_i \delta u_m D_j \delta u_m \\ &= \delta \gamma_{ij} = +\frac{1}{2}\delta^2 \gamma_{ij} \end{aligned} \quad (3.2)$$

avec

$$\delta \gamma_{ij} = \frac{1}{2}(D_i \delta u_j + D_j \delta u_i + D_i u_m D_j \delta u_m + D_j u_m D_i \delta u_m) \quad (3.3)$$

et

$$\delta^2 \gamma_{ij} = D_i \delta u_m D_j \delta u_m \quad (3.4)$$

Le terme  $\delta\gamma_{ij}$ , linéaire en la variation du déplacement, est appelé *variation première* ou, simplement, *variation de la déformation*. Il constitue une espèce de différentielle de la déformation par rapport à la variation de déplacement. Le deuxième terme,  $\delta^2\gamma_{ij}$ , est la *variation seconde*. Il est du second ordre et donc négligeable pour de très petites variations de déplacement.

Plus généralement, une fonction  $f(u_i)$  admet la modification

$$f(u_i + \delta u_i) = \delta f + \frac{1}{2}\delta^2 f + \frac{1}{3!}\delta^3 f + \dots$$

où l'on regroupe les termes homogènes d'ordre 1,2,3, ... en les  $\delta u_i$ . Le terme  $\delta f$  est appelé *variation (première) de f*.

## 3.2 Travail virtuel de déformation

Nous admettrons comme axiome fondamental qu'une déformation virtuelle  $\delta\gamma_{ij}$  d'un élément de volume  $dV$  d'un corps continu quelconque nécessite un *travail de déformation virtuel*  $\delta W dV$ . Pour déformer le corps entier, il faudra donc produire un travail virtuel

$$\delta\mathcal{U} = \int_V \delta W dV \quad (3.5)$$

Il est naturel d'admettre que la densité de travail virtuel  $\delta W$  dépend directement de la déformation virtuelle, et d'exprimer en conséquence  $\delta W$  sous la forme

$$\delta W = s^{11}\delta\gamma_{11} + s^{22}\delta\gamma_{22} + s^{33}\delta\gamma_{33} + 2s^{12}\delta\gamma_{12} + 2s^{13}\delta\gamma_{13} + 2s^{23}\delta\gamma_{23} \quad (3.6)$$

ce qui fait apparaître six nouvelles grandeurs  $s^{11}$ ,  $s^{22}$ ,  $s^{33}$ ,  $s^{12}$ ,  $s^{13}$  et  $s^{23}$  dont la dimension est celle d'une pression :

$$[s^{ij}] = \frac{[\delta W]}{[\delta\gamma_{ij}]} = \frac{\frac{FL}{L^3}}{1} = \frac{F}{L^2}$$

Nous appellerons ces six grandeurs *contraintes de Kirchhoff-Trefftz*. Elles apparaissent en effet sous cette forme dans les travaux de Kirchhoff [51], mais c'est à Trefftz [89] que revient l'interprétation que nous en donnerons en section 3.5.

Les coefficients 2 introduits pour les termes croisés dans l'expression (3.6) permettent d'écrire la densité du travail virtuel de déformation d'une manière plus compacte en introduisant les termes fictifs

$$s^{21} = s^{12}, \quad s^{31} = s^{13}, \quad s^{32} = s^{23}$$

qui complètent le tenseur des contraintes : on a alors

$$\begin{aligned}\delta W &= s^{11}\delta\gamma_{11} + s^{22}\delta\gamma_{22} + s^{33}\delta\gamma_{33} + s^{12}\delta\gamma_{12} + s^{13}\delta\gamma_{13} \\ &\quad + s^{23}\delta\gamma_{23} + s^{21}\delta\gamma_{21} + s^{31}\delta\gamma_{31} + s^{32}\delta\gamma_{32} \\ &= s^{ij}\delta\gamma_{ij}\end{aligned}\tag{3.7}$$

Il convient cependant d'être attentif au fait suivant : si l'on utilise la relation (3.6), tenant explicitement compte de la symétrie des contraintes et des déformations, on obtient

$$\begin{aligned}s^{11} &= \frac{\delta W}{\delta\gamma_{11}}, \quad s^{22} = \frac{\delta W}{\delta\gamma_{22}}, \quad s^{33} = \frac{\delta W}{\delta\gamma_{33}} \\ 2s^{12} &= \frac{\delta W}{\delta\gamma_{12}}, \quad 2s^{13} = \frac{\delta W}{\delta\gamma_{13}}, \quad 2s^{23} = \frac{\delta W}{\delta\gamma_{23}}\end{aligned}\tag{3.8}$$

tandis que si l'on utilise la relation (3.7) en faisant volontairement abstraction des relations de symétrie, il vient uniformément

$$s^{ij} = \frac{\delta W}{\delta\gamma_{ij}}\tag{3.9}$$

Insistons finalement sur le fait que nous ne postulons nullement que  $\delta W$  soit une différentielle totale. Les considérations qui précèdent sont donc valables pour des déformations irréversibles.

### 3.3 Notion d'équilibre

Nous supposerons que le corps  $V$  est soumis à un système de charges, dont nous ne préciserons pas pour le moment la distribution. Lors d'un déplacement virtuel  $\delta u_i$ , ces charges produisent un *travail virtuel*  $\delta\mathcal{T}$  ayant la forme générale

$$\delta\mathcal{T} = \sum_V F_i \delta u_i\tag{3.10}$$

Nous dirons que *le corps  $V$  est en équilibre dans une configuration donnée si, pour tout déplacement  $\delta u_i$ , le travail virtuel de déformation  $\delta\mathcal{U}$  est exactement égal au travail virtuel des charges  $\delta\mathcal{T}$*  :

$$\delta\mathcal{U} = \delta\mathcal{T} \quad \forall \delta u_i\tag{3.11}$$

C'est le *principe des travaux virtuels*, qui constitue donc un *définition énergétique de l'équilibre*.

Cette définition admet un cas particulier important. Pour un *déplacement virtuel de corps rigide* (translation ou rotation sans déformation), on a  $\delta\gamma_{ij} = 0$  dans tout le corps et, par conséquent,  $\delta\mathcal{U} = 0$ . Il en résulte la condition d'équilibre

$$\delta\mathcal{T} = 0 \text{ pour un déplacement de corps rigide} \quad (3.12)$$

en bon accord avec une propriété connue de la statique des corps parfaitement rigides.

### 3.4 Équations locales d'équilibre

En admettant au départ que la déformation peut être mesurée par le tenseur de Green, on restreint automatiquement la classe des charges que la structure peut admettre. Pour mettre ce fait en évidence, calculons explicitement  $\delta\mathcal{U}$ . On a

$$\begin{aligned}\delta\gamma_{ij} &= \frac{1}{2}(D_i\delta u_j + D_j\delta u_i + D_i\delta u_m D_j\delta u_m + D_j\delta u_m D_i\delta u_m) \\ &= \frac{1}{2}(\delta_{jm} + D_j u_m)D_i\delta u_m + \frac{1}{2}(\delta_{im} + D_i u_m)D_j\delta u_m\end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\delta W = \frac{1}{2}s^{ij}(\delta_{jm} + D_j u_m)D_i\delta u_m + \frac{1}{2}s^{ij}(\delta_{im} + D_i u_m)D_j\delta u_m \quad (3.13)$$

Il se trouve que les deux termes de cette somme sont *identiques*. En effet, la symétrie des contraintes permet d'écrire le premier sous la forme équivalente

$$\frac{1}{2}s^{ji}(\delta_{im} + D_i u_m)D_j\delta u_m$$

Les indices  $i$  et  $j$  étant muets, on peut donner à  $i$  et  $j$  les noms respectifs  $j$  et  $i$ , ce qui donne

$$\frac{1}{2}s^{ij}(\delta_{jm} + D_j u_m)D_i\delta u_m$$

soit précisément le second terme. Cette propriété permet de donner au travail virtuel de déformation la forme plus simple

$$\delta\mathcal{U} = \int_V s^{ij}(\delta_{im} + D_i u_m)D_j\delta u_m dV = \int_V t_{jm}D_j\delta u_m dV \quad (3.14)$$

en introduisant les grandeurs

$$t_{jm} = s^{ji}(\delta_{im} + D_i u_m) \quad (3.15)$$

connues sous le nom de *contraintes de Piola*. Ces contraintes *non symétriques* ne seront utilisées ici que pour abréger les écritures et nous nous ramènerons finalement aux contraintes de Kirchhoff-Trefftz. Une simple intégration par parties donne alors

$$\delta\mathcal{U} = \int_S t_{jm} n_j \delta u_m dS - \int_V (D_j t_{jm}) \delta u_m dV \quad (3.16)$$

Les deux intégrales qui composent cette expression peuvent être identifiées, la première à un travail virtuel à la surface et la seconde, à un travail virtuel dans le volume. On en déduit que le travail virtuel des charges pourra avoir la forme

$$\delta\mathcal{T} = \int_S t_m \delta u_m dS + \int_V f_m \delta u_m dV \quad (3.17)$$

où apparaissent les *tractions de surface*  $t_m$  et le *forces de volume*  $f_m$ , liées aux contraintes par les équations locales d'équilibre

$$\begin{cases} n_j t_{jm} &= t_m \quad \text{sur } S \\ D_j t_{jm} + f_m &= 0 \quad \text{dans } V \end{cases} \quad (3.18)$$

soit, en termes des contraintes de Kirchhoff-Trefftz,

$$\begin{cases} D_j [s^{ji}(\delta_{im} + D_i u_m)] + f_m &= 0 \quad \text{dans } V \\ n_j [s^{ji}(\delta_{im} + D_i u_m)] &= t_m \quad \text{sur } S \end{cases} \quad (3.19)$$

Les équations (3.19) sont connues sous le nom d'*équations de Signorini* [34]. Elles sont non linéaires par le fait qu'elles font intervenir les déplacements. Les équations d'équilibre en termes des contraintes de Piola sont plus simples, puisque linéaires. Mais il faut leur adjoindre des équations supplémentaires pour restituer leur définition en termes des contraintes de Kirchhoff-Trefftz, qui fixe leur dissymétrie. Ces équations sont [34, 36]

$$t_{jm}(\delta_{jp} + D_j u_p) = \underbrace{s^{ji}(\delta_{im} + D_i u_m)(\delta_{jp} + D_j u_p)}_{\text{symétrique}} = t_{ip}(\delta_{im} + D_i u_m) \quad (3.20)$$

Nous avons donc montré que le principe des travaux virtuels ne peut être vérifié que si le travail virtuel des charges a la forme (3.16), les efforts  $f_m$  et  $t_m$  étant alors définis par (3.19). Montrons à présent que si le travail virtuel des

charges a la forme (3.16), le principe des travaux virtuels *impliquera* les relations d'équilibre local (3.19). On aura en effet

$$\begin{aligned} 0 = \delta\mathcal{U} - \delta\mathcal{T} &= \int_V (t_{im} D_i \delta u_m - f_m \delta u_m) dV - \int_S t_m \delta u_m dS \\ &= \int_S (n_i t_{im} - t_m) \delta u_m dS - \int_V (D_i t_{im} + f_m) \delta u_m dV \end{aligned} \quad (3.21)$$

A ce stade, le raisonnement repose sur un théorème du calcul des variations :

**Théorème 1** *Soit  $V$  un ouvert de frontière  $S$ , et soient  $f$  une fonction continue sur  $V$  et  $g$  une fonction continue sur  $S$ . Si l'égalité*

$$\int_V f \delta u dV + \int_S g \delta u dS = 0$$

*est vérifiée pour toute fonction  $\delta u$  continûment dérivable dans  $V$  et prolongeable sur  $S$ , alors on a  $f = 0$  dans  $V$  et  $g = 0$  sur  $S$ .*

*Démonstration* - Montrons d'abord que  $f = 0$ . En supposant le contraire, soit  $\mathbf{y} \in V$  un point où  $f \neq 0$ , par exemple,  $f > 0$ . Il existe une boule  $B_R(\mathbf{y})$  de centre  $\mathbf{y}$  et de rayon  $R$  où  $f > 0$ ; comme  $V$  est ouvert, on peut supposer que cette boule est entièrement contenue dans  $V$ . Considérons alors la fonction

$$\delta u(\mathbf{x}) = \begin{cases} (R^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2)^2 & \text{dans } B_R(\mathbf{y}) \\ 0 & \text{hors de } B_R(\mathbf{y}) \end{cases}$$

Cette fonction est continûment dérivable. On a

$$\int_V f \delta u dV + \int_S g \delta u dS = \int_V f \delta u dV > 0$$

en contradiction avec l'hypothèse. Donc  $f = 0$  dans  $V$ .

Au vu de cette première conclusion, on a pour tout  $\delta u$

$$\int_V f \delta u dV + \int_S g \delta u dS = \int_V 0 \cdot \delta u dV + \int_S g \delta u dS = \int_S g \delta u dS$$

Montrons à présent que  $g = 0$ . En supposant le contraire, soit  $\mathbf{z} \in S$  un point où  $g \neq 0$ , par exemple,  $g > 0$ . Il existe une boule  $B_R(\mathbf{z})$  telle que  $g > 0$  dans  $B_R(\mathbf{z}) \cap S$ . Alors, la fonction

$$\delta u(\mathbf{x}) = \begin{cases} (R^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{z}|^2)^2 & \text{dans } B_R(\mathbf{z}) \cap V \\ 0 & \text{hors de } B_R(\mathbf{z}) \cap V \end{cases}$$

est continûment dérivable dans  $V$  et continûment prolongeable à  $S$ . On a

$$\int_S g \delta u dS > 0$$

ce qui contredit l'hypothèse, donc  $g = 0$  sur  $S$ , CQFD.

L'application de ce théorème à notre problème conduit aux conclusions

$$\begin{cases} D_i t_{im} + f_m &= 0 \quad \text{dans } V \\ n_i t_{im} &= t_m \quad \text{sur } S \end{cases}$$

Remarquons cependant que les équations locales d'équilibre ne sont obtenues que moyennant une régularité suffisante du problème. Dans le cas où cette régularité n'est pas acquise, c'est au principe des travaux virtuels qu'il faut faire appel pour obtenir les équations dont on a besoin. Au sens du mathématicien, les solutions au sens classique (local) des équations de Signorini sont des *solutions fortes*. Les solutions de l'équilibre au sens des travaux virtuels sont des *solutions faibles*[63]. Il est peut être utile de préciser que l'univers de l'ingénieur est peuplé de solutions faibles, bien plus que de solutions fortes. Les discontinuités de matériau, les charges peu régulières mènent invariablement à des solutions faibles. Ceci justifie le parti pris dans cet exposé de présenter directement l'équilibre sous la forme des travaux virtuels.

### 3.5 Interprétation de Trefftz

Trefftz [89] a donné l'interprétation suivante des contraintes de Kirchhoff-Trefftz. Considérons les équations d'équilibre à la surface, qui s'écrivent

$$n_i [s^{ij}(\delta_{ij} + D_j u_m)] = t_m$$

Observons d'abord que le second membre représente, localement, la charge de surface divisée par la surface *de référence* (et non pas la surface déformée!). Par ailleurs, on peut écrire cette équation sous la forme

$$n_i s^{ij} D_j \xi_m = t_m$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= t_m \mathbf{e}_m = (n_i s^{ij}) D_j \xi_m \mathbf{e}_m \\ &= (n_i s^{ij}) \mathbf{g}_j \end{aligned} \tag{3.22}$$

où apparaît la base convectée. Cette relation signifie que si l'on décompose le vecteur traction de surface dans la base convectée,

$$\mathbf{t} = T^j \mathbf{g}_j \quad (3.23)$$

(ce qui équivaut à  $T^j = \mathbf{t} \cdot \mathbf{g}^j$ ), le reste du calcul revient à définir  $T^j$  comme la projection de  $s^{ij}$  sur la normale *de référence* :

$$n_i s^{ij} = T^j \quad (3.24)$$

A titre d'exemple, dans une poutre qui fléchirait à la Navier sous une traction de surface  $\mathbf{t}$  3.1, on aurait

$$T^1 = \frac{|\mathbf{t}| \sin \theta}{|\mathbf{g}_1|}, \quad T^2 = -\frac{|\mathbf{t}| \cos \theta}{|\mathbf{g}_2|}$$

et comme  $n_1 = 1$  et  $n_2 = 0$ ,

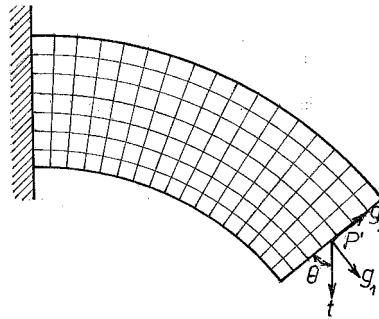
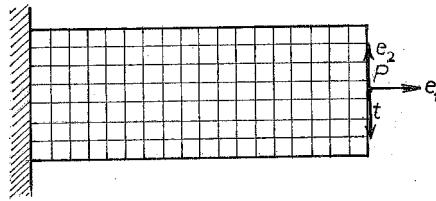


FIGURE 3.1 – Interprétation de Trefftz

$$T^1 = 1 \cdot s^{11} + 0 \cdot s^{12} = s^{11}, \quad T^2 = 1 \cdot s^{12} + 0 \cdot s^{22}$$

ce qui donne

$$s^{11} = \frac{|\mathbf{t}| \sin \theta}{\sqrt{g_{11}}}, \quad s^{12} = -\frac{|\mathbf{t}| \cos \theta}{\sqrt{g_{22}}}$$

## 3.6 Relation avec les contraintes eulériennes

### 3.6.1 Contraintes eulériennes

Une autre interprétation, beaucoup plus profonde, peut être obtenue en relation avec la description eulérienne. Nous noterons  $V'$  le volume déformé,  $S'$  sa surface et  $\mathbf{n}'$  la normale unitaire à cette surface. Nous écrirons en outre  $\partial_i$  pour  $\partial/\partial\xi_i$ . Enfin, nous utiliserons la matrice jacobienne

$$J_{ij} = D_j \xi_i \quad (3.25)$$

qui a pour inverse

$$J_{ij}^{-1} = \partial_j x_i \quad (3.26)$$

et pour déterminant

$$\mathcal{J} = \det(J) \quad (3.27)$$

Le travail virtuel de déformation peut être transformé comme suit

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{U} &= \int_V s^{ij} D_j \xi_m D_i \delta u_m dV \\ &= \int_{V'} s^{ij} D_j \xi_m D_i \delta u_m \frac{1}{\mathcal{J}} dV' \\ &= \int_{V'} \frac{1}{\mathcal{J}} s^{ij} D_j \xi_m D_i \xi_p \partial_p \delta u_m dV' \\ &= \int_{V'} \sigma_{mp} \partial_p \delta u_m dV' \end{aligned} \quad (3.28)$$

où apparaissent les *contraintes eulériennes*

$$\sigma_{mp} = \frac{1}{\mathcal{J}} s^{ij} D_j \xi_m D_i \xi_p \quad (3.29)$$

qui sont visiblement symétriques. On peut écrire, en adoptant les notations

dyadiques,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \sigma_{mp} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_p \\ &= \frac{1}{\mathcal{J}} s^{ij} (D_j \xi_m \mathbf{e}_m) \otimes (D_i \xi_p \mathbf{e}_p) \\ &= \frac{1}{\mathcal{J}} s^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j\end{aligned}\quad (3.30)$$

Ce qui signifie que *les contraintes de Kirchhoff-Trefftz s'identifient, au facteur  $\mathcal{J}$  près, aux composantes contravariantes du tenseur  $\sigma$  dans la base convectée.* Cette conclusion est très importante, comme nous le verrons sur un exemple plus loin. Mais auparavant, il est utile de préciser certains faits relatifs aux charges.

### 3.6.2 Relation entre les charges dans les deux descriptions

Le travail virtuel des charges appliquées s'écrit, dans la description lagrangienne,

$$\delta \mathcal{T} = \int_V f_i \delta u_i dV + \int_S t_i \delta u_i dS \quad (3.31)$$

Dans la description eulérienne, on écrira naturellement

$$\delta \mathcal{T} = \int_{V'} f'_i \delta u_i dV' + \int_{S'} t'_i \delta u_i dS' \quad (3.32)$$

ce qui mènera aux équations d'équilibre

$$\begin{cases} \partial_j \sigma_{ji} + f'_i &= 0 \quad \text{dans } V' \\ n'_j \sigma_{ji} &= t'_i \quad \text{sur } S' \end{cases} \quad (3.33)$$

Mais les deux expressions (3.31) et (3.32) du travail virtuel des charges ne seront équivalentes que si sont vérifiées les relations

$$f_i dV = f'_i dV' \quad (3.34)$$

et

$$t_i dS = t'_i dS' \quad (3.35)$$

Pour la première, cela implique, comme  $dV' = \mathcal{J}dV$ ,

$$f_i = \mathcal{J}f'_i \quad (3.36)$$

La condition (3.35) est un peu plus difficile à exploiter. Il nous faut pour cela déterminer le rapport entre  $dS$  et  $dS'$ . A cette fin, considérons une fonction  $\varphi$  quelconque. On a

$$\int_{S'} n'_i \varphi dS' = \int_{V'} \partial_i \varphi dV' = \int_V \mathcal{J} J_{ji}^{-1} D_j \varphi dV = \int_S \mathcal{J} n_j J_{ji}^{-1} \varphi dS$$

ce qui implique

$$n'_i dS' = \mathcal{J} n_j J_{ji}^{-1} dS \quad (3.37)$$

On en déduit

$$dS'^2 = n'_i dS' n'_i dS' = \mathcal{J}^2 n_j J_{ji}^{-1} n_k J_{ki}^{-1} dS^2 = \mathcal{J}^2 g^{kj} n_k n_j dS^2$$

soit

$$dS' = \mathcal{J} \sqrt{g^{kj} n_k n_j} dS \quad (3.38)$$

C'est la relation cherchée. On a donc

$$t'_i = t_i \frac{dS}{dS'} = \frac{t_i}{\mathcal{J} \sqrt{g^{k\ell} n_k n_\ell}} \quad (3.39)$$

Du reste, on peut encore déduire de (3.37) les composantes de la normale spatiale :

$$n'_i = \mathcal{J} n_j J_{ji}^{-1} \frac{dS}{dS'} = \mathcal{J} n_j J_{ji}^{-1} \frac{1}{\mathcal{J} \sqrt{g^{k\ell} n_k n_\ell}} = \frac{n_j J_{ji}^{-1}}{\sqrt{g^{k\ell} n_k n_\ell}} \quad (3.40)$$

### 3.6.3 Cas des petites déformations

Lorsque les déformations sont petites, on peut écrire

$$\mathcal{J} \approx 1, \quad g^{ij} n_i n_j \approx 1$$

ce qui permet de confondre sans grande erreur les charges définies dans la structure de référence et celles de la structure déformée. En outre, les angles entre les vecteurs de la base déformée diffèrent peu d'un angle droit. Les contraintes de Kirchhoff-Trefftz s'assimilent alors à des contraintes eulériennes, calculées dans un système d'axes particulier. Il se trouve d'ailleurs que ce système d'axes est *le plus pratique que l'on puisse trouver*. Imaginons par exemple un corps composé de deux pièces collées (fig. 3.2). Les colles résistent d'une façon très limitée en extension (contrainte  $\sigma$  sur la figure 3.3) et d'une façon bien meilleure en cisaillement (contrainte  $\tau$  sur la figure 3.3). Sur la figure 2, la contrainte normale sur

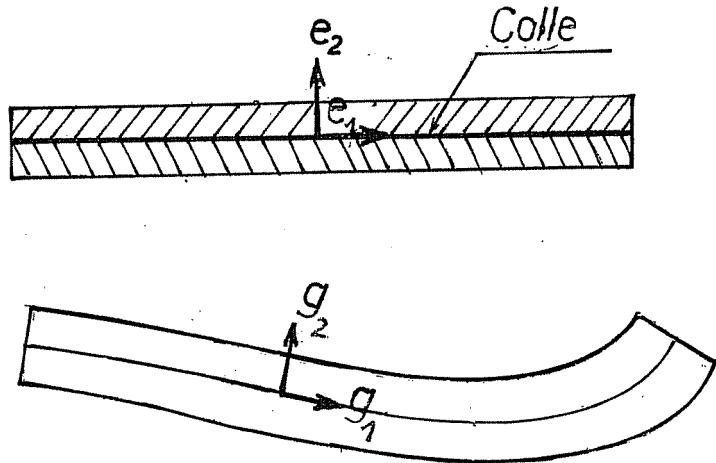


FIGURE 3.2 – Pièce collée

la colle est à peu de chose près  $s^{22}$  et celle de cisaillement, approximativement  $s^{12}$  et ce, quelle que soit la forme prise par le joint collé. En supposant que le critère de mise hors service soit de la forme

$$F\left(\frac{\sigma}{\sigma_{\lim}}, \frac{\tau}{\tau_{\lim}}\right)$$

on pourra l'écrire simplement

$$F\left(\frac{s^{22}}{\sigma_{\lim}}, \frac{s^{12}}{\tau_{\lim}}\right)$$

quel que soit le déplacement, tant que les déformations restent faibles.

### 3.7 Exercices

**Exercice 11** Interpréter les contraintes de Piola dans le cas d'une poutre fléchissant à la Navier (fig. 3.1)

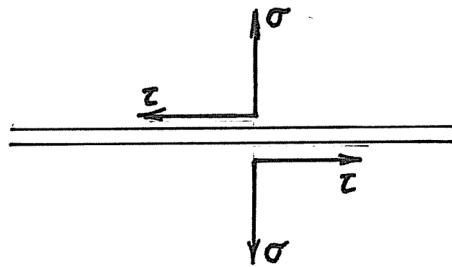


FIGURE 3.3 – Résistance de la colle

*Solution* - On a tout simplement

$$\begin{aligned} 0 &= n_1 t_{11} + n_2 t_{12} = t_{11} \\ -t &= n_1 t_{12} + n_2 t_{22} = t_{12} \end{aligned}$$

On notera le caractère artificiel de ces contraintes, qui ne tiennent aucun compte de la déformation.

**Exercice 12 \*** *Déduire l'expression générale des déplacements virtuels de corps rigide à partir de la condition  $\delta\gamma_{ij} = 0$*

*Solution* - On a

$$\begin{aligned} \delta\gamma_{ij} &= \frac{1}{2}(D_i \xi_m D_j \delta u_m + D_j \xi_m D_i \delta u_m) \\ &= \frac{1}{2}(J_{mi} D_j \delta u_m + J_{mj} D_i \delta u_m) = 0 \end{aligned}$$

en faisant usage de la matrice jacobienne définie en section 3.6.1. Multipliant cette équation par  $2J_{ip}^{-1}J_{jq}^{-1}$  et contractant, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= J_{ip}^{-1} J_{jq}^{-1} J_{mi} D_j \delta u_m + J_{ip}^{-1} J_{jq}^{-1} J_{mj} D_i \delta u_m \\ &= \delta_{mp} J_{jq}^{-1} D_j \delta u_m + \delta_{mq} J_{ip}^{-1} D_i \delta u_m \\ &= \partial_p \delta u_q + \partial_q \delta u_p \end{aligned}$$

Ces équations admettent de toute évidence une solution générale du type

$$\partial_p \delta u_q = \Omega_{pq}$$

avec  $\Omega_{pq} = -\Omega_{qp}$ . Mais alors, on a

$$\partial_k \Omega_{pq} = \partial_{kp} \delta u_q = \partial_{pk} \delta u_q = \partial_p \Omega_{kq}$$

ce qui entraîne la chaîne suivante :

$$\partial_k \Omega_{pq} = \partial_p \Omega_{kq} = -\partial_p \Omega_{qk} = -\partial_q \Omega_{pk} = \partial_q \Omega_{kp} = \partial_k \Omega_{qp} = -\partial_k \Omega_{pq}$$

dont on déduit

$$\partial_k \Omega_{pq} = 0$$

On obtient donc, en donnant au tenseur antisymétrique  $\Omega_{pq}$  sa forme canonique

$$\Omega_{pq} = e_{pqr} \Omega_r$$

la forme générale

$$\begin{aligned} \delta u_q &= a_q + \Omega_{pq} \xi_p = a_p + e_{pqi} \xi_p \Omega_i \\ &= a_q + e_{qip} \Omega_i \xi_p \end{aligned}$$

soit la combinaison d'une translation et d'une rotation d'ensemble.

**Exercice 13 \*** Soit un corps libre dans l'espace, chargé de forces  $f_i$  dans  $V$  et de charges  $t_i$  sur  $S$ . Montrer que pour que ce champ de forces puisse être équilibré intérieurement par un champ de contraintes de manière que  $\delta U = \delta T$ , il est nécessaire que soient vérifiées les conditions

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \int_V f_i dV + \int_S t_i dS &=& 0 \quad (\text{Équilibre de translation}) \\ e_{ipq} \left[ \int_V \xi_p f_q dV + \int_S \xi_p t_q dS \right] &=& 0 \quad (\text{Équilibre de rotation}) \end{array} \right.$$

*Solution* - Pour un déplacement virtuel de corps rigide, on doit avoir  $\delta T = 0$ . Or, (voir exercice 12), ces déplacements sont de la forme

$$\delta u_i = a_i + e_{ipq} \Omega_p \xi_q$$

d'où la condition

$$a_i \left( \int_V f_i dV + \int_S t_i dS \right) + \Omega_p e_{pqi} \left( \int_V \xi_q f_i dV + \int_S \xi_q t_i dS \right) = 0$$

quels que soient  $a_i$  et  $\Omega_q$ , ce qui entraîne les conditions annoncées.

**Exercice 14** La condition  $\delta U = 0$  s'applique également aux mécanismes parfaits, c'est-à-dire composés de corps rigides articulés sans frottement. En déduire la réaction au point A de la poutre représentée en figure 3.4.

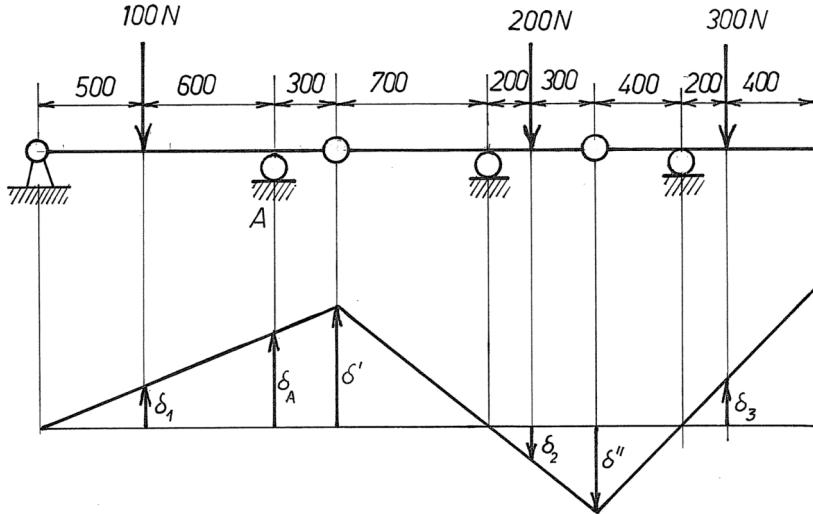


FIGURE 3.4 – Poutre

*Solution* - Il suffit de considérer  $R_A$  comme une force, l'appui en  $A$  étant coupé. Le mécanisme ainsi constitué peut alors prendre des déplacements selon la figure, ce qui permet d'écrire

$$\delta\mathcal{T} = R_A\delta_A - 100\delta_1 + 200\delta_2 - 300\delta_3 = 0$$

Or,

$$\begin{aligned}
 \delta_1 &= \frac{500}{1100}\delta_A = 0,4545\delta_A \\
 \delta' &= \frac{1400}{1100}\delta_A = 1,273\delta_A \\
 \delta_2 &= \frac{200}{700}\delta' = 0,3637\delta_A \\
 \delta'' &= \frac{500}{700}\delta' = 0,9093\delta_A \\
 \delta_3 &= \frac{200}{400}\delta'' = 0,4546\delta_A
 \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned} R_A &= 100 \frac{\delta_1}{\delta_A} - 200 \frac{\delta_2}{\delta_A} + 300 \frac{\delta_3}{\delta_A} \\ &= 100 \cdot 0,4545 - 200 \cdot 0,3637 + 300 \cdot 0,4546 = \mathbf{109,1N} \end{aligned}$$

**Exercice 15** Déterminer la loi  $P = f(x)$  pour le quadrilatère articulé de la figure 3.5. Le ressort, de longueur naturelle  $\ell$ , a une énergie de déformation

$$U = k \frac{(\Delta\ell)^2}{2}$$

Les barres sont supposées indéformables et idéalement articulées.

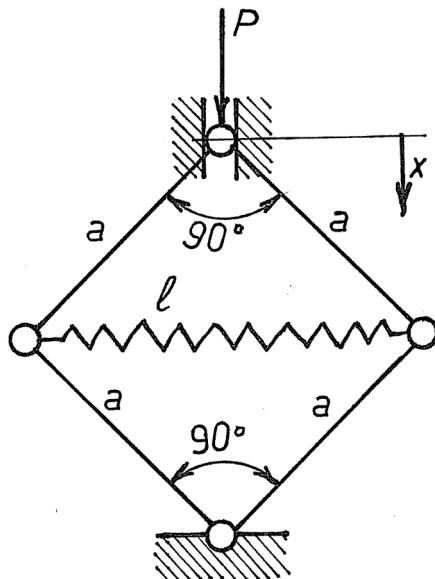


FIGURE 3.5 – Quadrilatère articulé

*Solution* - Le principe des travaux virtuels s'écrit

$$k\Delta\ell\delta\Delta\ell = P\delta x$$

Pour exprimer les liaisons entre  $\Delta\ell$  et  $x$ , le plus simple est d'utiliser le paramètre

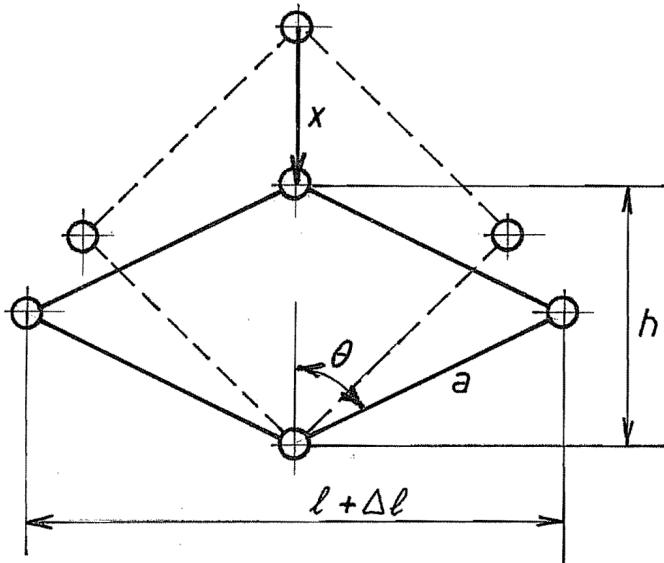


FIGURE 3.6 – Déformation du quadrilatère

$\theta$  représenté en figure 3.6. On a en effet

$$h = 2a \cos \theta \quad \text{et} \quad l + \Delta l = 2a \sin \theta$$

d'où

$$x = a\sqrt{2} - h = a(\sqrt{2} - 2 \cos \theta)$$

et

$$\Delta l = 2a \sin \theta - l = a(2 \sin \theta - \sqrt{2})$$

On en déduit

$$\delta x = 2a \sin \theta \delta \theta \quad \text{et} \quad \delta \Delta l = 2a \cos \theta \delta \theta$$

ce qui ramène l'équation d'équilibre à

$$ka(2 \sin \theta - \sqrt{2})2a \cos \theta = P \cdot 2a \sin \theta$$

Divisant les deux membres par  $2a \sin \theta$ , on obtient

$$P = ka(2 \cos \theta - \sqrt{2} \cot \theta)$$

Cette équation atteint un maximum pour

$$\frac{dP}{d\theta} = ka \left( -2 \sin \theta + \frac{\sqrt{2}}{\sin^2 \theta} \right) = 0$$

soit pour

$$\sin^3 \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ce qui donne  $\theta = 62,99^\circ$ . Il y correspond la charge maximale

$$P_{max} = 0,1874ka$$

correspondant à une instabilité. On peut établir le tableau suivant :

$\theta(^{\circ})$	$P/(ka)$	$x/a$	$\delta\ell/a$
0	$-\infty$	-0,5858	-1,414
10	-6,051	-0,5786	-1,067
20	-2,006	-0,4652	-0,7302
30	-0,7174	-0,3478	-0,4142
40	-0,1533	-0,1179	-0,1286
45	0	0	0
50	0,09891	0,1286	0,1179
60	0,1835	0,4142	0,3178
62,99	0,1874	0,5059	0,3676
70	0,1693	0,7302	0,4652
80	0,09793	1,067	0,5554
90	0	1,414	0,5858

Ces résultats sont illustrés par la figure 3.7.

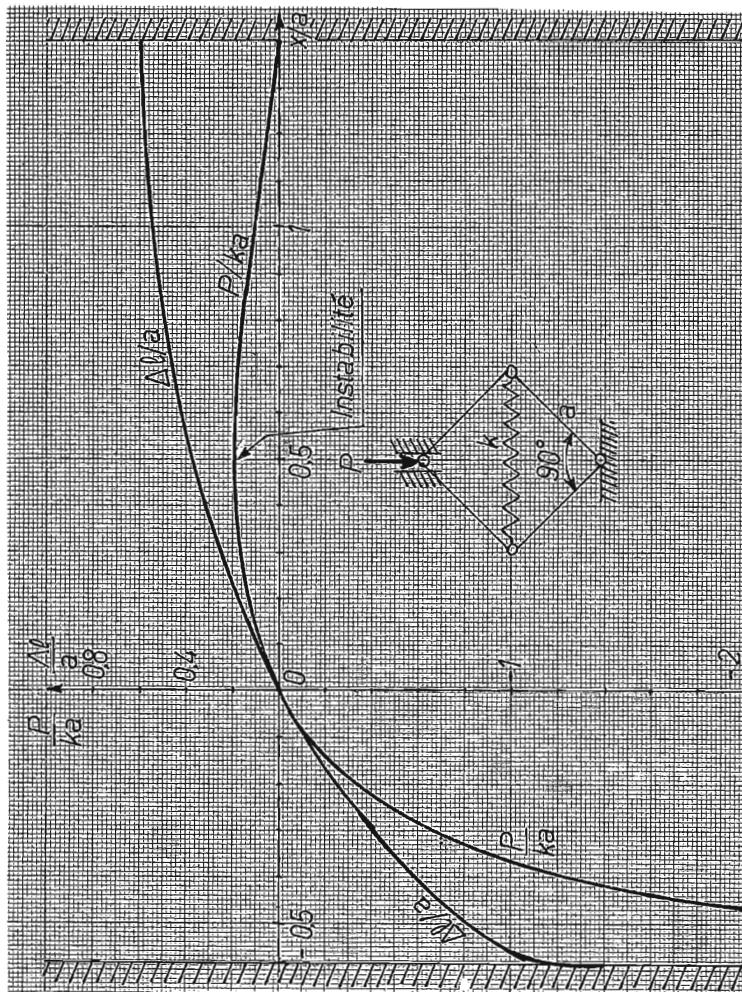


FIGURE 3.7 – Quadrilatère articulé : solution



# Chapitre 4

## Corps hyperélastiques

### 4.1 Hyperélasticité

Dans ce qui précède, le travail de déformation a été introduit sans hypothèse sur sa nature physique. Lorsque l'on suppose qu'il est *conservatif*, c'est-à-dire que  $\delta W$  est la différentielle totale d'une *densité d'énergie de déformation*  $W$ , le corps est dit *hyperélastique*. On a alors

$$s^{ij} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} \quad (4.1)$$

si l'on fait abstraction, dans la dérivation, des relations de symétrie  $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ . Les équations (4.1) n'ont de solution que si

$$\frac{\partial s^{ij}}{\partial \gamma_{kl}} = \frac{\partial s^{kl}}{\partial \gamma_{ij}} \quad (4.2)$$

ce qui exprime analytiquement la condition d'hyperélasticité.

Comme l'a fait remarquer Lord Kelvin [46], *il serait totalement erroné de croire que l'hyperélasticité implique l'absence d'échange de chaleur*. Dans le cas d'une sollicitations *statische* (mise en charge lente et progressive, comme on la réalise lors d'un essai de traction), la lenteur de la transformation permet de considérer que le corps garde constamment la température de l'ambiance, c'est-à-dire que *la température reste constante*. Si  $U$  et  $S$  sont respectivement la densité d'énergie interne et la densité d'entropie, on aura donc

$$\delta W = \delta U - T \delta S = \delta(U - TS) = \delta F \quad (4.3)$$

où  $F$  est la densité d'*énergie libre*. Nous verrons d'ailleurs dans la suite que la variation d'entropie *n'est pas nulle* lors de la déformation. Par contre, dans le cas des *vibrations*, la lenteur relative des échanges de chaleur permet de poser en première approximation que l'entropie ne varie pas, si bien que

$$\delta W = \delta U \quad (4.4)$$

Ainsi, la nature de l'énergie de déformation est différente dans le cas d'une sollicitation statique et dans le cas des vibrations. Il en résulte une différence entre les modules correspondant à ces deux types de sollicitations. Ceci sera étudié en détail en section 4.5 de ce chapitre.

## 4.2 Développement en série de Taylor de l'énergie de déformation

Nous nous limiterons, dans ce qui suit, à l'étude des *petites déformations*. Cette restriction permet de développer la densité d'énergie de déformation en une série de Taylor, que nous limiterons au second ordre :

$$W(\gamma) = W_0 + \left( \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} \right)_0 \gamma_{ij} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}} \right)_0 \gamma_{ij} \gamma_{kl} + \mathcal{O}(\gamma^3) \quad (4.5)$$

En dérivant ce développement par rapport aux déformations, on obtient l'expression suivante des contraintes<sup>1</sup> :

$$s_{ij} = \left( \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} \right)_0 + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}} \right)_0 \gamma_{kl} + \mathcal{O}(\gamma^2) \quad (4.6)$$

Les deux termes significatifs de cette expression s'interprètent comme suit : le terme

$$s_{ij}^0 = \left( \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} \right)_0 \quad (4.7)$$

représente les *contraintes résiduelles*, présentes dans l'état non déformé ; le second terme est linéaire en la déformation et fait apparaître le tenseur du quatrième ordre

$$C_{ijkl} = \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}} \right)_0 \quad (4.8)$$

---

1. Dorénavant, nous écrirons  $s_{ij}$  au lieu de  $s^{ij}$ , car nous ne ferons plus référence au caractère tensoriel covariant des contraintes

dit *tenseur des modules élastiques*. L'expression (4.6) donne donc, en négligeant  $\mathcal{O}(\gamma^2)$ ,

$$s_{ij} = s_{ij}^0 + C_{ijkl}\gamma_{kl} \quad (4.9)$$

et l'énergie s'écrit à  $\mathcal{O}(\gamma^3)$  près

$$W = W_0 + s_{ij}^0\gamma_{ij} + \frac{1}{2}C_{ijkl}\gamma_{ij}\gamma_{kl} \quad (4.10)$$

La question du *nombre* de modules indépendants a fait, au *XIX<sup>e</sup>* siècle, l'objet de nombreuses controverses. C'est ainsi que l'on a connu des théories « à modules rares » et des théories « à modules nombreux » (de 1 à 36 modules) [46, 49, 47, 50, 66, 83, 87]. La manière la plus simple de traiter le problème consiste à remarquer que les déformations forment six grandeurs indépendantes

$$\begin{aligned} G_1 &= \gamma_{11} \\ G_2 &= \gamma_{22} \\ G_3 &= \gamma_{33} \\ G_4 &= \gamma_{12} \\ G_5 &= \gamma_{23} \\ G_6 &= \gamma_{31} \end{aligned} \quad (4.11)$$

La matrice hessienne de l'énergie, définie par

$$H_{ij} = \left( \frac{\partial^2 W}{\partial G_i \partial G_j} \right)_0 \quad (4.12)$$

est d'ailleurs appelée *matrice de Hooke*. Cette matrice symétrique de dimension  $6 \times 6$  possède en général

$$\frac{6 \times 7}{2} = 21$$

termes indépendants. Tel est le nombre de modules indépendants d'un solide *anisotrope*.

Dans le cas d'un solide *isotrope*, le terme quadratique

$$W_2 = \frac{1}{2}C_{ijkl}\gamma_{ij}\gamma_{kl} \quad (4.13)$$

de la densité d'énergie de déformation doit avoir une expression indépendante du système d'axes choisi. Il ne peut donc dépendre que des invariants du tenseur

des déformations,

$$\begin{cases} I_1 &= \gamma_{ii} \\ \hat{I}_2 &= -\frac{1}{2}(\gamma_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{\ell\ell}\delta_{ij})(\gamma_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{mm}\delta_{ij}) \\ I_3 &= \det(g_{ij}) \end{cases}$$

Le choix de  $\hat{I}_2$  plutôt que  $I_2$  est dicté par des conditions de commodité. Parmi ces trois invariants, seuls  $I_1$  et  $\hat{I}_2$  sont susceptibles de former une combinaison quadratique, qui aura la forme

$$W_2 = -2G\hat{I}_2 + \frac{K}{2}I_1^2 \quad (4.14)$$

Les grandeurs  $G$  et  $K$  sont appelées respectivement *module de Coulomb* et *module de compressibilité* (Bulk modulus). Cette dernière appellation provient du fait que dans le cadre des petites déformations, on a

$$dV' = \mathcal{J}dV \approx dV$$

ce qui revient à dire que

$$|\eta| = \left| \frac{dV' - dV}{dV} \right| = |\mathcal{J} - 1| \ll 1$$

Or,

$$\det(g_{ij}) = \mathcal{J}^2 = |1 + (\mathcal{J} - 1)|^2 = 1 + 2\eta + \eta^2 \quad (4.15)$$

Calculons

$$\begin{aligned} \det(g_{ij}) &= \begin{vmatrix} 1 + 2\gamma_{11} & 2\gamma_{12} & 2\gamma_{13} \\ 2\gamma_{21} & 1 + 2\gamma_{22} & 2\gamma_{23} \\ 2\gamma_{31} & 2\gamma_{32} & 1 + 2\gamma_{33} \end{vmatrix} \\ &= 1 + 2\gamma_{ii} + \mathcal{O}(\gamma^2) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Identifiant les expressions (4.15) et (4.16), on obtient

$$2\eta = 2\gamma_{ii} + \mathcal{O}(\gamma^2) + \mathcal{O}(\eta^2)$$

soit

$$\gamma_{ii} \approx \frac{dV' - dV}{dV} \quad (4.17)$$

Dans la pratique, on utilise souvent deux autres modules, à savoir le *module de Young E* et le *coefficient de Poisson ν*, qui sont liés aux précédents par les relations

$$\begin{aligned} G &= \frac{E}{2(1+\nu)} \\ K &= \frac{E}{3(1-2\nu)} = \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \\ E &= \frac{9KG}{3K+2G} \\ \nu &= \frac{1}{2} \left( \frac{3K-2G}{3K+G} \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

En fonction de  $G$  et  $\nu$ , on calcule aisément

$$W_2 = G(\gamma_{ij}\gamma_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\gamma_{\ell\ell}\gamma_{ii}) \quad (4.19)$$

On rencontre aussi les *coefficients de Lamé*, provenant de l'expression de  $W_2$  en termes des invariants  $I_1$  et  $I_2$  :

$$W_2 = 2\mu I_2 + \frac{\lambda}{2} I_1^2$$

Ces modules sont liés à  $G$  et  $K$  par les relations

$$\mu = G \text{ et } \lambda = K - \frac{2}{3}G \quad (4.20)$$

### 4.3 Postulat de la stabilité locale

Isolons un morceau infiniment petit  $dV$  du corps hyperélastique. Placé dans la structure, il est en équilibre avec son voisinage, pour une certaine valeur de la déformation. Imaginons qu'on le découpe du corps : toute relation de compatibilité, c'est-à-dire d'égalité des déplacements de sa frontière avec les déplacements de ses voisins étant coupée, il tendra vers une position d'équilibre propre définie par la condition

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} = 0$$

Le postulat de *stabilité locale* consiste à affirmer que cette position d'équilibre propre correspond à un *minimum* d'énergie. Analytiquement, comme

$$W = s_{ij}^0 \gamma_{ij} + \frac{1}{2} C_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl}$$

la condition d'équilibre s'écrit

$$s_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} = s_{ij}^0 + C_{ijkl} \gamma_{kl} = 0$$

La solution  $\gamma_{ij}^0$  de cette équation constitue la *déformation de relaxation*. La condition de stabilité locale s'écrit alors

$$0 = W(\gamma_{ij}^0 + \delta\gamma_{ij}) - W(\gamma_{ij}^0) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}} \right)_{\gamma^0} \delta\gamma_{ij} \delta\gamma_{kl} + \mathcal{O}(\delta\gamma^3)$$

et, en négligeant le troisième ordre, elle s'exprime par la condition

$$\delta^2 W = C_{ijkl} \delta\gamma_{ij} \delta\gamma_{kl} > 0 \quad (4.21)$$

quelle que soit la variation de déformation  $\delta\gamma_{ij}$ . Cette condition revient à admettre que *la matrice de Hooke est définie positive*. Introduite pour la première fois par Kirchhoff [49, 52] et utilisée après lui par Clebsch [9], cette condition est actuellement admise de manière assez générale [56].

Dans le cas d'un corps isotrope, les deux formes quadratiques  $(-\hat{I}_2)$  et  $I_1^2$  sont positives et indépendantes. La positivité de la matrice de Hooke sera donc réalisée si

$$G > 0 \text{ et } K > 0 \quad (4.22)$$

Dans ce cadre, en effet, on ne pourra avoir  $W_2 = 0$  que si  $I_1$  et  $\hat{I}_2$  sont simultanément nuls, ce qui, nous l'avons vu, entraîne  $\gamma_{ij} = 0$ . En termes du module de Young et du coefficient de Poisson, les conditions (4.22) impliquent d'abord

$$E = \frac{9KG}{3K + 2G} > 0$$

c'est-à-dire que *le module de Young est positif*. Le coefficient de Poisson, donné par

$$\nu = \frac{3K - 2G}{6K + 2G} = \frac{3 - 2\frac{G}{K}}{6 + 2\frac{G}{K}}$$

pourra varier entre  $1/2$  pour  $G/K = 0$  et  $-1$  pour  $G/K = \infty$ . Les conditions sont donc, si les modules  $G$  et  $K$  sont finis,

$$-1 < \nu < \frac{1}{2}$$

Il est à noter que les corps élastiques connus vérifient tous  $\nu \geq 0$ , bien que des valeurs négatives ne soient pas absurdes sur le plan énergétique. Le cas extrême  $K = \infty$  se rencontre dans les corps *incompressibles*, au rang desquels on classe généralement le caoutchouc. Le fait que  $K$  soit infini entraîne quelques particularités qui nécessitent, dans les méthodes numériques, un traitement spécial [37, 13, 16, 15].

## 4.4 Stabilité structurale de l'état de référence

Il faut se garder de croire que la stabilité locale définie ci-dessus implique la stabilité structurale dans le cas général [36]. Ceci n'est vrai que dans le cas de la linéarisation géométrique (petits déplacements). Dans le cadre des grands déplacements, la non-linéarité des déformations en termes des déplacements peut être source d'instabilité. L'étude générale de la stabilité fera l'objet d'un chapitre spécial. On pourra d'ailleurs consulter à ce sujet des ouvrages spécialisés [58, 86].

Nous remarquerons cependant, que, le plus souvent, la configuration de référence est un état d'équilibre stable. Il faut entendre par là que

$$\mathcal{U}(\delta\mathbf{u}) - \mathcal{U}_0 \geq 0 \quad (4.23)$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que si  $\delta u_i$  représente un déplacement de corps rigide. Cette situation implique un certain nombre de faits que nous allons mettre en évidence. A cette fin, développons la densité d'énergie de déformation sous la forme

$$W(\delta\mathbf{u}) = W_0 + \delta W + \frac{1}{2}\delta^2 W + \dots$$

où apparaissent la variation première et la variation seconde. Par intégration, on obtiendra

$$\mathcal{U}(\delta\mathbf{u}) = \mathcal{U}_0 + \delta\mathcal{U} + \frac{1}{2}\delta^2\mathcal{U} + \dots$$

La condition d'équilibre, en l'absence de charge, s'écrit

$$\delta\mathcal{U} = 0 \quad (4.24)$$

La condition de stabilité, déduite de (4.23), sera, au troisième ordre près,

$$\delta^2 \mathcal{U} \geq 0 \quad (4.25)$$

l'égalité n'ayant lieu que si  $\delta u_i$  est un déplacement de corps rigide.

Calculons explicitement la variation première. On a, dans le cas général,

$$\delta W = s_{ij}^0 \delta \gamma_{ij} + C_{ijkl} \gamma_{ij} \delta \gamma_{kl}$$

et, l'état de référence étant défini par  $\gamma_{ij} = 0$ , il vient

$$\delta \mathcal{U} = \int_V s_{ij}^0 \delta \gamma_{ij} dV = 0 \quad (4.26)$$

quel que soit le champ de déplacements virtuels. On reconnaît l'équation des travaux virtuels en l'absence de charge, ce qui signifie que *les contraintes résiduelles sont nécessairement auto-équilibrées*. On dit encore que ce sont des *états d'autocontrainte*.

Venons-en à la variation seconde. Dans l'expression générale

$$\delta^2 W = s_{ij}^0 \delta^2 \gamma_{ij} + C_{ijkl} \delta \gamma_{ij} \delta \gamma_{kl} + C_{ijkl} \gamma_{ij} \delta^2 \gamma_{kl}$$

on note que, pour la position de référence,

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= 0 \\ \delta \gamma_{ij} &= \frac{1}{2}(D_i \delta u_j + D_j \delta u_i) \\ \delta^2 \gamma_{ij} &= D_i \delta u_m D_j \delta u_m \end{aligned}$$

ce qui mène à l'expression

$$\delta^2 \mathcal{U} = \int_V [s_{ij}^0 D_i \delta u_m D_j \delta u_m + \frac{1}{4} C_{ijkl} (D_i \delta u_j + D_j \delta u_i)(D_k \delta u_l + D_l \delta u_k)] dV \geq 0 \quad (4.27)$$

Cette condition montre que si, en chaque point, les trois valeurs principales des contraintes résiduelles sont positives, la stabilité est assurée, puisque les modules sont définis positifs. Mais cette circonstance est rare et en réalité, il existe presque toujours des zones où les contraintes résiduelles principales sont négatives. Lorsque ces contraintes résiduelles sont suffisamment grandes, la stabilité peut être compromise. La figure 4.1 donne un exemple d'une telle situation. La barre centrale, très élancée, peut être comprimée à l'aide d'une vis, ce qui provoque un état d'autocontrainte dans lequel les deux colonnes sont tendues et la

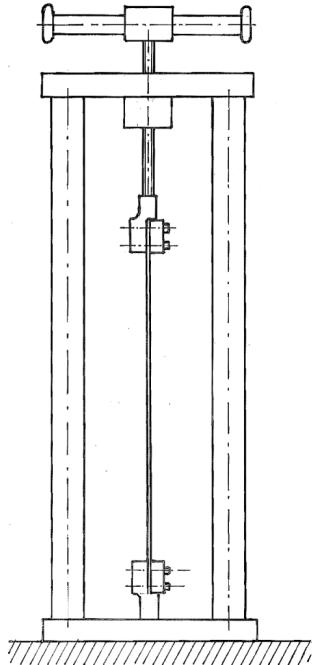


FIGURE 4.1 – Une structure pouvant être instable dans son état de référence

barre centrale, comprimée. L'équilibre exige que la somme des efforts dans les colonnes égale l'effort dans la barre centrale. Pour un effort de compression égal à la charge d'Euler, la barre flambe, ce qui constitue une instabilité. Dans ce cas, l'état de référence (barre rectiligne précomprimée) n'est pas stable, car la moindre perturbation du déplacement transversal de la barre mène à un nouvel état d'équilibre (flambé).

En conclusion, *l'état de référence ne peut être stable que si les contraintes résiduelles de compression sont suffisamment modérées.*

Passons à présent à la question de la relaxation des contraintes résiduelles : peut-on trouver un champ de déplacements  $u_i^0$  qui *relaxe*, c'est-à-dire annule totalement les tensions résiduelles ? Il est clair que si un tel champ de déplacements existe, les déformations  $\gamma_{ij}^0$  qui en dérivent doivent vérifier la condition

$$s_{ij}(\gamma_{kl}^0) = s_{ij}^0 + C_{ijkl}\gamma_{kl}^0 = 0$$

soit

$$s_{ij}^0 = -C_{ijkl}\gamma_{kl}^0$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(u_i^0) &= \mathcal{U}_0 + \int_V s_{ij}^0 \gamma_{ij}^0 dV + \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl} \gamma_{ij}^0 \gamma_{kl}^0 dV \\ &= \mathcal{U}_0 - \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl} \gamma_{ij}^0 \gamma_{kl}^0 dV < \mathcal{U}_0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Or, la stabilité de l'équilibre de référence implique que cette inégalité n'est pas possible *dans le voisinage* de cet état, car l'énergie n'y peut qu'augmenter. Ceci ne signifie pas que la relaxation soit nécessairement impossible, mais seulement qu'elle ne peut avoir lieu dans une configuration très voisine de l'état de référence. La stabilité de cet état équivaut en effet à dire qu'il se trouve au fond d'un puits de potentiel. Mais on peut très bien imaginer (fig 4.2) de passer

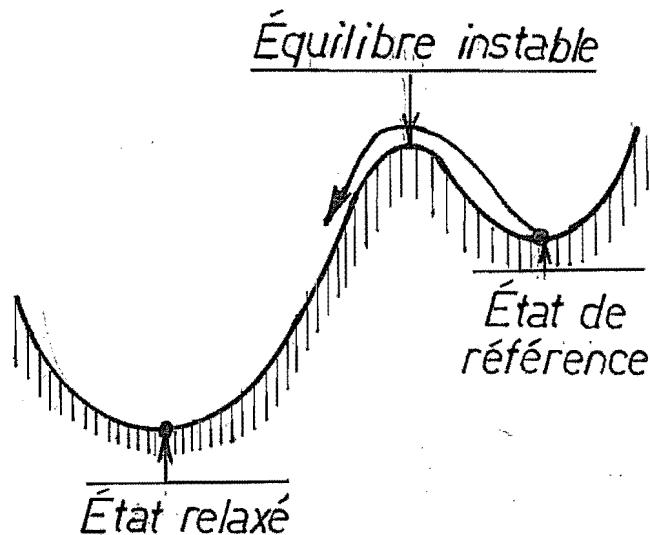


FIGURE 4.2 – Relaxation par passage d'une instabilité

d'abord au sommet d'une « montagne » (point d'équilibre instable) pour redescendre au fond d'un nouveau puits plus profond que le précédent, dans lequel les contraintes résiduelles seraient relaxées.

Ainsi, la relaxation des contraintes résiduelles, quand elle est possible, suppose toujours le passage d'une instabilité. Par ailleurs, il ressort de (4.28) que l'état relaxé correspond à un minimum absolu d'énergie<sup>2</sup>.

Il est du reste assez aisément de trouver un exemple de relaxation par passage d'une instabilité. Le système à deux barres de la figure 4.3 a été supposé

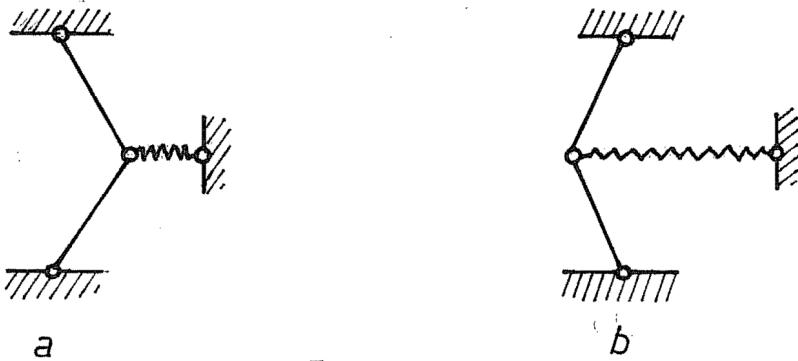


FIGURE 4.3 – Le système ci-dessus peut être relaxé par passage d'une instabilité

monté sans contraintes résiduelles, on peut faire passer les deux barres à gauche de leur ligne d'appui, moyennant une instabilité dite par *claquage* (snap through) après quoi le système se retrouve dans une position d'équilibre sous autocontrainte, représentée en b sur la même figure. Dans cette position, les deux barres sont comprimées, et le ressort est tendu. Cet état étant pris comme référence, il ne peut y avoir de relaxation à gauche de la ligne d'appui des barres. Pour annuler les contraintes, il faut nécessairement repasser l'instabilité en sens inverse.

2. Ce problème a été étudié dans le cadre des petits déplacements par Fraeijs de Veubeke [36]. Comme il n'existe pas, en théorie linéaire, d'instabilités, la relaxation est alors totalement impossible.

## 4.5 Déformations avec variations de température

### 4.5.1 Expression de l'énergie libre

Lorsque les températures des différents points du corps ne coïncident pas avec la température de référence  $T_0$ , il convient de développer l'énergie libre, non seulement en termes des déformations, mais encore en termes des écarts de température

$$\theta = T - T_0 \quad (4.29)$$

On écrira donc

$$\begin{aligned} F = F(\gamma_{ij}, \theta) &= F_0 + \left( \frac{\partial F}{\partial \gamma_{ij}} \right)_0 \gamma_{ij} + \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_0 \theta \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}} \right)_0 \gamma_{ij} \gamma_{kl} + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \gamma_{ij} \partial T} \right)_0 \gamma_{ij} \theta + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_0 \theta^2 \\ &\quad + 3^e \text{ordre} \end{aligned}$$

Les contraintes sont alors données par

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \frac{\partial F}{\partial \gamma_{ij}} \\ &= \left( \frac{\partial F}{\partial \gamma_{ij}} \right)_0 + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \gamma_{ij} \partial T} \right)_0 \theta + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}} \right)_0 \gamma_{kl} \end{aligned}$$

expression où l'on voit apparaître, outre les grandeurs connues  $s_{ij}^0$  et  $C_{ijkl}$ , un nouveau terme  $(-\beta_{ij}\theta)$ , avec

$$\beta_{ij} = - \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \gamma_{ij} \partial T} \right)_0 = - \left( \frac{\partial s_{ij}}{\partial T} \right)_0$$

Il s'agit des contraintes qui naissent du fait que pour  $\gamma_{ij} = 0$ , la dilatation thermique est empêchée, ce qui induit des contraintes de compression lorsque la température s'élève. Les grandeurs  $(-\beta_{ij}\theta)$  sont appelées *contraintes de bridage de Duhamel*. L'expression générale des contraintes est donc

$$s_{ij} = \underbrace{s_{ij}^0}_{\text{résiduelles}} + \underbrace{-\beta_{ij}\theta}_{\text{bridage Duhamel}} + \underbrace{C_{ijkl}\gamma_{kl}}_{\text{élastiques}} \quad (4.30)$$

Comme on le sait, la dérivée de l'énergie libre par rapport à la température est, au signe près, égale à l'entropie. On a donc

$$\begin{aligned} S &= -\frac{\partial F}{\partial T} \\ &= -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \gamma_{ij} \partial T}\right)_0 \gamma_{ij} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_0 \theta \end{aligned}$$

Le premier terme sera tout naturellement noté  $S_0$ . Le deuxième fait intervenir les  $\beta_{ij}$  déjà définis. Enfin, pour le troisième, on note que

$$-\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\gamma=\text{cte}} = \frac{\rho c_v}{T}$$

où  $c_v$  représente la capacité thermique par unité de masse, à *déformation* constante, généralisation naturelle de la capacité thermique à volume constant des fluides. On a donc

$$S = S_0 + \beta_{ij} \gamma_{ij} + \left(\frac{\rho c_v}{T}\right)_0 \theta \quad (4.31)$$

Rassemblant tous ces résultats, on obtient l'expression suivante pour la densité d'énergie libre :

$$F(\gamma_{ij}, T) = F_0 + s_{ij}^0 \gamma_{ij} - S_0 \theta + \frac{1}{2} C_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} - \beta_{ij} \theta \gamma_{ij} - \left(\frac{\rho c_v}{T}\right)_0 \frac{\theta^2}{2} \quad (4.32)$$

### 4.5.2 Coefficients de dilatation thermique

Considérons un petit volume  $dV$  du corps, supposé à l'état relaxé à la température  $T_0$ . Chauffons ce petit volume *en le bridant*, c'est-à-dire en empêchant tous ses déplacements. Au cours de cette opération, l'énergie libre prend la valeur

$$F = F_0 - S_0 \theta - \left(\frac{\rho c_v}{T}\right)_0 \frac{\theta^2}{2}$$

Relâchons à présent les brides, laissant ainsi à ce petit volume la liberté de se déformer, *tout en maintenant sa température constante*. (Ceci suppose que les brides soient relâchées progressivement et lentement.) L'énergie libre cherchera un minimum, qu'elle atteindra pour

$$\frac{\partial F}{\partial \gamma_{ij}} = -\beta_{ij} \theta + C_{ijkl} \gamma_{kl} = 0$$

soit pour une déformation

$$\gamma_{ij}(\theta) = C_{ijkl}^{-1} \beta_{kl} \theta$$

Le tenseur

$$\alpha_{ij} = C_{ijkl}^{-1} \beta_{kl} \quad (4.33)$$

est appelé *tenseur des coefficients de dilatation* : c'est l'accroissement de  $\gamma_{ij}$  à  $s_{ij} = 0$ , pour une variation de température unitaire. Dans le cas d'un matériau thermiquement isotrope, on a simplement

$$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij} \quad (4.34)$$

$\alpha$  étant le *coefficient de dilatation thermique*. En voici quelques valeurs :

Coefficients de dilatation pour $T = 30^\circ C$	
Matériau	$10^6 \alpha (K^{-1})$
Acier au carbone	11,1
Fonte grise	9,9
Bronze $CuMn4Sn6$	17,2
Laiton $CuZn38$	18,0
Aluminium, dural	23,1

#### 4.5.3 Déformations adiabatiques

Nous avons déjà signalé que les déformations d'un corps en vibration peuvent être considérées somme isentropiques et que cela entraîne une légère modification des modules par rapport au cas statique [47, 56]. La condition de constance de l'entropie s'écrit

$$S - S_0 = \left( \frac{\rho c_v}{T} \right)_0 \theta + \beta_{ij} \gamma_{ij} = 0,$$

ce qui fournit la *variation de température au cours de la déformation*

$$\theta = - \left( \frac{T}{\rho c_v} \right)_0 \beta_{ij} \gamma_{ij} \quad (4.35)$$

Dans le cas d'un corps isotrope,

$$\beta_{ij} = C_{ijkl} \delta_{kl} \alpha = C_{ijkk} \alpha = 3K \alpha \delta_{ij}$$

ce qui donne

$$\theta = -3 \left( \frac{T}{\rho c_v} \right)_0 K \alpha \gamma_{ii} \quad (4.36)$$

Ainsi, une augmentation de volume produit un abaissement de température, et inversement, une diminution de volume élève la température.

Le calcul des modules adiabatiques peut être mené de plusieurs façons. On pourrait par exemple développer l'expression de l'énergie interne

$$U = F + TS$$

puis la dériver deux fois par rapport aux déformations. Il est plus simple de raisonner comme suit : dans l'expression générale (4.30) des contraintes, introduisons la variation de température (4.35) exprimant la constance de l'entropie : il vient

$$s_{ij} = s_{ij}^0 + \left( \frac{T}{\rho c_v} \right)_0 \beta_{kl} \gamma_{kl} \beta_{ij} + C_{ijkl} \gamma_{kl}$$

Identifiant alors à

$$s_{ij} = s_{ij}^0 + C_{ijkl}^{ad} \gamma_{kl}$$

on obtient simplement

$$C_{ijkl}^{ad} = C_{ijkl} + \left( \frac{T}{\rho c_v} \right)_0 \beta_{ij} \beta_{kl} \quad (4.37)$$

### Cas des corps isotropes

Examinons en détail le cas des corps isotropes. Comme

$$\beta_{ij} = 3K\alpha\delta_{ij}$$

on a

$$\Delta C_{ijkl} = \left( \frac{T}{\rho c_v} \right)_0 \beta_{ij} \beta_{kl} = 9 \left( \frac{T}{\rho c_v} \right)_0 K^2 \alpha^2 \delta_{ij} \delta_{kl}$$

et

$$\Delta C_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} = 9 \left( \frac{T}{\rho c_v} \right)_0 K^2 \alpha^2 \gamma_{ii} \gamma_{kk}$$

ce qui permet d'écrire, dans le cas isentropique,

$$\begin{aligned} U &= U_0 + s_{ij}^0 \gamma_{ij} + \frac{1}{2} (C_{ijkl} + \Delta C_{ijkl}) \gamma_{ij} \gamma_{kl} \\ &= U_0 + s_{ij}^0 \gamma_{ij} - 2G\hat{I}_2 + \frac{1}{2} [K + 9 \left( \frac{T}{\rho c_v} \right)_0 K^2 \alpha^2] \gamma_{ii} \gamma_{kk} \end{aligned}$$

On constate donc que le module de Coulomb n'est pas affecté, tandis que le module de compressibilité  $K$  est remplacé par

$$K^{ad} = K + 9 \left( \frac{T}{\rho c_v} \right)_0 K^2 \alpha^2 \quad (4.38)$$

La correction relative est donc

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{K^{ad} - K}{K} = 9 \left( \frac{T}{\rho c_v} \right)_0 K \alpha^2 \quad (4.39)$$

Comme nous le verrons ci-dessous, cette correction est de quelques centièmes, ce qui permet de traiter les corrections du module de Young et du coefficient de Poisson comme des différentielles. Des relations (4.18), on déduit d'abord

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E}{E} &= \frac{\Delta K}{K} - \frac{3\Delta K}{3K + G} \\ &= \frac{(3K + G)\Delta K - 3K\Delta K}{3K + G} \\ &= \frac{G}{3K + G} \frac{\Delta K}{K} \\ &= \frac{E}{9K} \frac{\Delta K}{K} \end{aligned}$$

soit

$$\frac{\Delta E}{E} = E \left( \frac{T}{\rho c_v} \right)_0 \alpha^2 \quad (4.40)$$

de même, comme

$$1 + \nu = \frac{E}{2G}$$

on a

$$\frac{\Delta \nu}{1 + \nu} = \frac{\Delta E}{E} = E \left( \frac{T}{\rho c_v} \right)_0 \alpha^2 \quad (4.41)$$

### Exemple numérique

Considérons par exemple le cas de l'acier. On a

$$\begin{aligned} E &= 2,1 \cdot 10^{11} Pa \\ \nu &= 0,3 \\ \alpha &= 1,1 \cdot 10^{-5} K^{-1} \\ \rho &= 7800 kg/m^3 \\ c_v &= 474 \frac{J}{K \cdot kg} \end{aligned}$$

ce qui donne, pour  $T = 293K$ ,

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \frac{2,1 \cdot 10^{11}}{3 \cdot 0,4} = 175 \cdot 10^9 Pa$$

et

$$\varphi = \left( \frac{T}{\rho c_v} \right)_0 \alpha^2 = \frac{293}{7800 \cdot 474} \cdot 1,21 \cdot 10^{-10} = 9,671 \cdot 10^{-15} Pa^{-1}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\Delta K}{K} &= 9K\varphi = 9 \cdot (175 \cdot 10^9) \cdot (9,671 \cdot 10^{-15}) = 0,01523 \\ \frac{\Delta E}{E} &= E\varphi = (2,1 \cdot 10^{11}) \cdot (9,671 \cdot 10^{-15}) = 2,031 \cdot 10^{-3} \\ \Delta\nu &= (1+\nu) \frac{\Delta E}{E} = 1,3 \cdot (2,031 \cdot 10^{-3}) = 0,002640 \end{aligned}$$

La plus grande variation relative est celle du module de compressibilité. Elle est de 1,5%. Pour le module de Young, elle n'est que de 2 pour mille. La petitesse de ces différences justifie la pratique courante consistant à confondre les deux types de modules.

#### 4.5.4 Autre expression des modules adiabatiques

Proposons-nous d'exprimer l'entropie en termes de la température et des contraintes. A cette fin, nous inverserons les relations

$$s_{ij} - s_{ij}^0 = C_{ijkl} \gamma_{kl} - \beta_{ij} \theta$$

ce qui donne

$$\gamma_{ij} = C_{ijkl}^{-1} (s_{kl} - s_{kl}^0) + \alpha_{ij} \theta$$

L'introduction de ce résultat dans l'expression (4.31) de l'entropie conduit à

$$S = S_0 + \alpha_{ij}(s_{ij} - s_{ij}^0) + \left[ \left( \frac{\rho c_v}{T} \right)_0 + \alpha_{ij}\beta_{ij} \right] \theta$$

Le facteur entre crochets est la dérivée de l'entropie par rapport à la température, à *contraintes constantes*. Il est donc de la forme

$$\left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_s = \frac{\rho c_p}{T}$$

en notant  $c_p$  la chaleur spécifique à *contraintes constantes*. On a donc

$$S = S_0 + \alpha_{ij}(s_{ij} - s_{ij}^0) + \left( \frac{\rho c_p}{T} \right)_0 \theta \quad (4.42)$$

Quant à la liaison entre  $c_p$  et  $c_v$ , elle est donnée par

$$c_p - c_v = \frac{\alpha_{ij}\beta_{ij}T}{\rho} \quad (4.43)$$

dans le cas général. Pour des corps isotropes, cela donne

$$c_p - c_v = \frac{9K\alpha^2 T}{\rho} \quad (4.44)$$

Dans le cas de l'acier traité dans la section précédente, on obtient

$$\frac{c_p - c_v}{c_v} = \frac{9 \cdot (175 \cdot 10^9) \cdot (1,21 \cdot 10^{-10}) \cdot 293}{7800 \cdot 474} = 0,0151$$

ce qui justifie le fait que l'on néglige d'ordinaire de distinguer les deux chaleurs spécifiques.

Venons en à présent aux modules adiabatiques. De la formule (4.42) on déduit que lors d'une déformation isentropique, la variation de température est donnée par

$$\theta = - \left( \frac{T}{\rho c_p} \right)_0 \alpha_{kl}(s_{kl} - s_{kl}^0)$$

Dès lors, la déformation vaudra

$$\gamma_{ij} = C_{ijkl}(s_{ij} - s_{ij}^0) - \left( \frac{T}{\rho c_p} \right)_0 \alpha_{ij}\alpha_{kl}(s_{kl} - s_{kl}^0)$$

ce qui revient à dire que

$$(C^{ad})_{ijkl}^{-1} = C_{ijkl} - \left( \frac{T}{\rho c_p} \right)_0 \alpha_{ij} \alpha_{kl} \quad (4.45)$$

Dans le cas isotrope, on a donc

$$(C^a d)_{ijkl}^{-1} = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \delta_{ik} \delta_{jl} - \nu \delta_{ij} \delta_{kl}] - \left( \frac{T}{\rho c_p} \right)_0 \alpha^2 \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (4.46)$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que les deux expressions (4.37) et (4.45) des modules adiabatiques sont équivalentes, ce qui résulte de la relation (4.43) entre  $c_p$  et  $c_v$ .

#### 4.5.5 Mesure dynamique du module de Young

A ce stade, il convient de noter qu'il existe des méthodes fort précises de détermination du module de Young adiabatique par des mesures de fréquences propres. La figure 4.4 schématise un tel dispositif. Un barreau cylindrique est

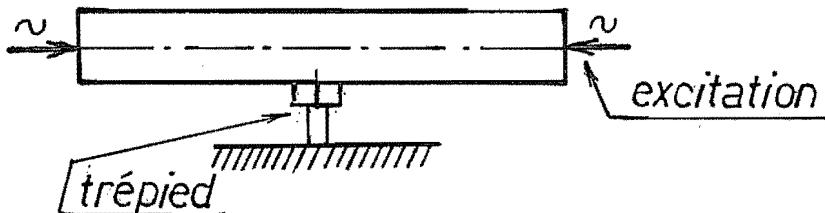


FIGURE 4.4 – Mesure du module de Young par un essai vibratoire

appuyé en son milieu sur un trépied de faibles dimensions. Ses extrémités sont excitées en vibrations longitudinales. La fréquence propre est donnée par

$$f = \frac{1}{2\ell} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

où  $\ell$  est la longueur du barreau et  $\rho$  sa masse volumique. Il en découle la relation

$$E = 4\rho\ell^2 f^2 \quad (4.47)$$

permettant de déterminer  $E$  à partir de la fréquence propre.

Couplé à un essai de traction, cet essai se fait de préférence, non pas sur un barreau cylindrique, mais sur l'éprouvette de traction elle-même. Dans ce cas, la formule (4.47) n'est plus valable, mais on peut, avec une bonne approximation, la remplacer par

$$E = \psi \cdot 4\rho\ell^2 f^2$$

le facteur correctif étant donné par (fig. 4.5)

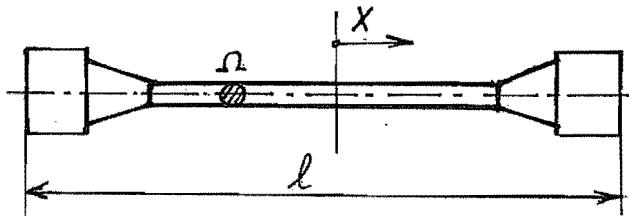


FIGURE 4.5 – Cas de l'éprouvette de traction

$$\psi = \frac{\int_{-\ell/2}^{\ell/2} \Omega \sin^2 \frac{\pi x}{\ell} dx}{\int_{-\ell/2}^{\ell/2} \Omega \cos^2 \frac{\pi x}{\ell} dx}$$

formule que l'on obtient aisément par la méthode de Rayleigh. Dans le cas d'éprouvettes de traction assez longues, on peut considérer que dans les régions où  $\Omega \neq \Omega_0$ ,  $\Omega_0$  étant le section de la partie cylindrique,

$$\sin^2 \frac{\pi x}{\ell} \approx 1 \text{ et } \cos^2 \frac{\pi x}{\ell} \approx 0$$

et en notant

$$\Delta\Omega = \Omega - \Omega_0$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \Omega \sin^2 \frac{\pi x}{\ell} dx &= \Omega_0 \frac{\ell}{2} + \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \Delta\Omega \sin^2 \frac{\pi x}{\ell} dx \\ &\approx \Omega_0 \frac{\ell}{2} + \Delta V \end{aligned}$$

$\Delta V$  étant la différence entre le volume de l'éprouvette et le volume d'une éprouvette cylindrique de section  $\Omega_0$  et de même longueur :

$$\Delta V = V - \Omega_0 \frac{\ell}{2}$$

(Le volume  $V$  peut du reste être obtenu par pesée ou par immersion.) De la même façon,

$$\int_{-\ell/2}^{\ell/2} \Omega \cos^2 \frac{\pi x}{\ell} dx \approx \Omega_0 \frac{\ell}{2}$$

ce qui conduit finalement à la formule approchée

$$\psi \approx 1 + 2 \frac{\Delta V}{\Omega_0 \ell}$$

Cette dernière formule est d'autant meilleure que la longueur des épaulements est plus faible devant la longueur de l'éprouvette.

## 4.6 Exercices

**Exercice 16** *Un expérimentateur obtient, à l'aide d'un essai de traction sur un matériau,  $E = 200GPa$  et, par un essai de torsion,  $G = 110GPa$ . Quel est le coefficient de Poisson ? Cette valeur est-elle normale sur le plan théorique ? Est-ce une valeur habituelle ?*

**Exercice 17** *Soit le système à deux barres de la figure 4.6, dont la position de repos correspond à l'angle  $\alpha$ . Exprimer l'énergie de déformation à l'aide du tenseur de Green pour différents angles  $\theta$  et chercher les puits de potentiel.*

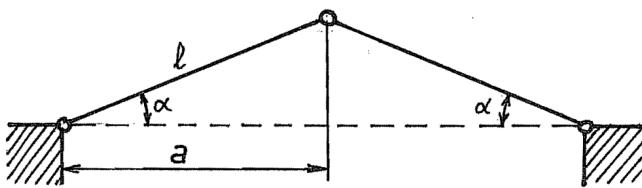


FIGURE 4.6 – Système à deux barres

*Solution* - Pour un angle  $\theta$ , la longueur d'une barre devient  $a/\cos\theta$ , si bien que

$$\gamma = \left( \frac{a^2}{\cos^2\theta} - \frac{a^2}{\cos^2\alpha} \right) \frac{\cos^2\alpha}{2a^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\theta} - 1 \right)$$

L'énergie de déformation vaut alors (extension simple)

$$\mathcal{U} = 2 \cdot \frac{1}{2} E\Omega\ell^2 \gamma^2 = \frac{E\Omega\ell}{4} \left( \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\theta} - 1 \right)^2$$

Cherchons les extrema de cette expression. On a

$$\frac{d\mathcal{U}}{d\theta} = \frac{E\Omega\ell}{2} \left( \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\theta} - 1 \right) \left( 2 \frac{\cos^2\alpha}{\cos^3\theta} \sin\theta \right)$$

Cette expression ne s'annule que pour les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} \theta = 0 \\ \cos\theta = \cos\alpha \text{ soit } \theta = \pm\alpha \end{cases}$$

Il y a donc trois positions d'équilibre en l'absence de charge. Sont-ce des puits ?  
On a

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathcal{U}}{d\theta^2} &= \frac{E\Omega\ell}{2} \left( \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\theta} - 1 \right) \left( 2 \frac{\cos^2\alpha}{\cos^3\theta} \cos\theta + 6 \frac{\cos^2\alpha}{\cos^4\theta} \sin^2\theta \right) \\ &\quad + \frac{E\Omega\ell}{2} \left( \frac{2\cos^2\alpha}{\cos^3\theta} \sin\theta \right)^2 \end{aligned} \quad (4.48)$$

- Pour  $\theta = 0$ , on a  $\cos\alpha < \cos\theta = 1$ , d'où  $d^2\mathcal{U}/d\theta^2 < 0$  : *instable*.
- Pour  $\theta = \pm\alpha$ , on a

$$\frac{d^2\mathcal{U}}{d\theta^2} = E\Omega\ell \operatorname{tg}^2\alpha > 0$$

et il s'agit d'un équilibre *stable*.

Les figures 4.7 et 4.8 représentent l'allure de la fonction  $\mathcal{U}$  et de sa dérivée.

**Exercice 18** Exprimer directement, à partir de la loi

$$W_2 = -2G\hat{I}_2 + \frac{K}{2} I_i^2$$

la loi de Hooke. En particulier, montrer que  $s_{kk} = 3K\gamma_{kk}$ . Exprimer enfin la loi de Hooke inverse.

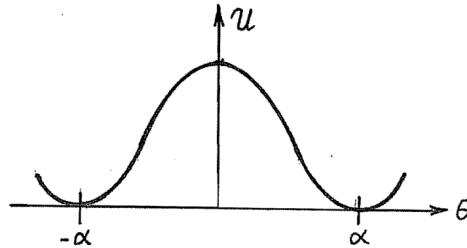


FIGURE 4.7 – Énergie du système à deux barres

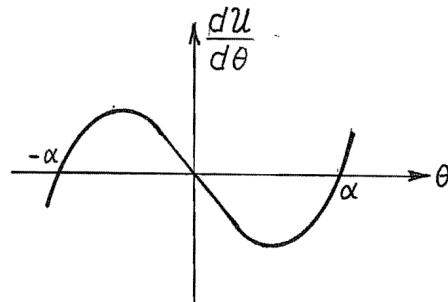


FIGURE 4.8 – Dérivée de l'énergie

*Solution* - On a

$$W_2 = 2G \frac{\hat{\gamma}_{ij} \hat{\gamma}_{ij}}{2} + \frac{K}{2} (\gamma_{kk})^2$$

d'où

$$s_{pq} = \frac{\partial W_2}{\partial \gamma_{pq}} = 2G \hat{\gamma}_{ij} \frac{\partial \hat{\gamma}_{ij}}{\partial \gamma_{pq}} + K \gamma_{kk} \frac{\partial \gamma_{ll}}{\partial \gamma_{pq}}$$

Comme

$$\hat{\gamma}_{ij} = \gamma_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ll} \delta_{ij}$$

on a

$$\frac{\partial \hat{\gamma}_{ij}}{\partial \gamma_{pq}} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \frac{1}{3} \delta_{lp} \delta_{lq} \delta_{ij} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \frac{1}{3} \delta_{pq} \delta_{ij}$$

D'autre part,

$$\frac{\partial \gamma_{ll}}{\partial \gamma_{pq}} = \delta_{lp}\delta_{lq} = \delta_{pq}$$

Il en découle

$$s_{pq} = 2G\hat{\gamma}_{ij}(\delta_{ip}\delta_{jq} - \frac{1}{3}\delta_{pq}\delta_{ij}) + K\gamma_{kk}\delta_{pq}$$

et, comme  $\hat{\gamma}_{ii} = 0$ ,

$$s_{pq} = 2G\hat{\gamma}_{pq} + K\gamma_{kk}\delta_{pq}$$

En particulier, on a

$$s_{pp} = K\gamma_{kk}\delta_{pp} = 3K\gamma_{kk}$$

comme annoncé.

La loi inverse s'obtient en partant de

$$\hat{\gamma}_{pq} = \frac{1}{2G}s_{pq} - \frac{K}{2G}\gamma_{kk}\delta_{pq}$$

Comme

$$\gamma_{kk} = \frac{s_{kk}}{3K}$$

il vient

$$\begin{aligned} \gamma_{pq} &= \hat{\gamma}_{pq} + \frac{1}{3}\gamma_{kk}\delta_{pq} \\ &= \frac{1}{2G}s_{pq} - \frac{K}{2G}\frac{s_{kk}}{3K}\delta_{pq} + \frac{1}{3}\frac{s_{kk}}{3K}\delta_{pq} \\ &= \frac{1}{2G}s_{pq} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2G} - \frac{1}{3K}\right)s_{kk}\delta_{pq} \\ &= \frac{1+\nu}{E}s_{pq} - \frac{1}{3}\left(\frac{1+\nu}{E} - \frac{1-2\nu}{E}\right)s_{kk}\delta_{pq} \\ &= \frac{1}{E}[(1+\nu)s_{pq} - \nu s_{kk}\delta_{pq}] \end{aligned}$$

**Exercice 19** Partant de la loi connue de la résistance des matériaux

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{E}[(1+\nu)s_{ij} - \nu s_{ll}\delta_{ij}]$$

- a) Exprimer  $s_{ij}$  en termes de  $\gamma_{ij}$ .
- b) Calculer la densité d'énergie de déformation  $W_2$ .
- c) Donner la matrice de Hooke et chercher les conditions pour qu'elle soit définie positive.

*Solution*

a) On a

$$s_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \gamma_{ij} + \frac{\nu}{1+\nu} s_{ll} \delta_{ij}$$

Comme

$$\gamma_{ii} = \frac{1}{E} [(1+\nu) - 3\nu] s_{ii} = \frac{1-2\nu}{E} s_{ii}$$

on obtient

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \frac{E}{1+\nu} \gamma_{ij} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \gamma_{ll} \delta_{ij} \\ &= 2G[\gamma_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \gamma_{ll} \delta_{ij}] \end{aligned}$$

b)  $W = \int s_{ij} d\gamma_{ij} = G(\gamma_{ij} \gamma_{ij} + \frac{\nu}{1+\nu} \gamma_{ll} \gamma_{ii})$

c) Posant  $\beta = \frac{\nu}{1+\nu}$ , on a

$$H = 2G \left[ \begin{array}{ccc|c} 1+\beta & \beta & \beta & 0 \\ \beta & 1+\beta & \beta & \\ \beta & \beta & 1+\beta & \\ \hline 0 & & & 1 \\ & & & 1 \\ & & & 1 \end{array} \right]$$

Les conditions de positive définition sont (positivité des déterminants principaux) :

1.  $1+\beta > 0$ , soit  $\beta > -1$ .
2.  $(1+\beta)^2 - \beta^2 = 1+2\beta > 0$ , soit  $\beta > -1/2$ .
3.  $(1+\beta)^3 + 2\beta^3 - 3\beta^2(1+\beta) = 1+3\beta > 0$ , soit  $\beta > -1/3$

La plus forte de ces conditions est  $\beta > -1/3$ , ce qui s'écrit encore

$$\frac{\nu}{1-2\nu} + \frac{1}{3} = \frac{3\nu+1-2\nu}{3(1-2\nu)} = \frac{1+\nu}{3(1-2\nu)} > 0$$

Le signe de cette fraction est identique à celui du produit  $(1+\nu)(1-2\nu)$ , positif pour

$$-1 < \nu < \frac{1}{2}$$



# Chapitre 5

## Élasticité linéaire

### 5.1 Linéarisation géométrique

Les équations d'équilibre, que l'on utilise les contraintes de Piola, celles de Kirchhoff-Trefftz ou encore les contraintes eulériennes, font toujours intervenir les déplacements, ce qui rend le problème non linéaire. Mais si, en plus des déformations, les *rotations* sont petites, on peut écrire

$$\delta_{ij} + D_j u_i \approx \delta_{ij} \quad (5.1)$$

ce qui constitue le cadre de la linéarisation géométrique. On parle souvent de théorie des *petits déplacements*, bien que cette dénomination soit impropre, car aucune restriction n'est nécessaire sur les déplacements de translation.

Moyennant l'hypothèse (5.1), les déformations admettent l'expression linéaire simplifiée

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(D_i u_j + D_j u_i) \quad (5.2)$$

Les contraintes de Kirchhoff-Trefftz, celles de Piola et les contraintes eulériennes sont alors pratiquement identiques, et nous les noterons  $\sigma_{ij}$  conformément à la tradition. Les équations d'équilibre s'écrivent

$$D_j \sigma_{ji} + f_i = 0 \text{ dans } V \quad (5.3)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \text{ dans } V \quad (5.4)$$

$$n_j \sigma_{ji} = t_i \text{ sur } S \quad (5.5)$$

Enfin, nous supposerons souvent, dans ce qui suit, le corps isotrope, cas où il admettra les équations constitutives

$$\sigma_{ij} = 2G \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (5.6)$$

Cet ensemble d'équations forme la base de l'élasticité linéaire. Bien que considérablement simplifiées, ces équations restent passablement difficiles à résoudre, excepté par voie numérique.

Signalons encore qu'en élasticité linéaire, la structure est toujours stable : les phénomènes du type *flambement* ne peuvent être traités à partir de ces équations. Il en résulte également que les contraintes résiduelles ne peuvent jamais être relaxées par voie élastique.

## 5.2 Unicité de la solution

Nous allons établir un résultat important dû à Kirchhoff [48, 49]. On appelle *déplacements de corps rigide* ou encore, *modes rigides* (linéarisés) les solutions des équations  $\varepsilon_{ij} = 0$ . Ces équations qui s'écrivent<sup>1</sup>

$$D_i u_j + D_j u_i = 0$$

admettent de toute évidence les solutions

$$D_i u_j = \omega_{ij}$$

avec  $\omega_{ij} = \omega_{ji}$ . Mais alors, on doit avoir

$$D_k \omega_{ij} = D_{ki} u_j = D_{ik} u_j = D_i \omega_{kj}$$

ce qui entraîne la chaîne suivante d'égalités :

$$D_k \omega_{ij} = D_i \omega_{kj} = -D_i \omega_{jk} = -D_j \omega_{ik} = D_j \omega_{ki} = D_k \omega_{ji} = -D_k \omega_{ij}$$

soit

$$D_k \omega_{ij} = 0$$

Il vient donc, en notant  $\omega_{ij} = e_{ijk} \omega_k$ ,

$$u_i = a_i + e_{ijk} \omega_j x_k$$

---

1. La démonstration peut être faite encore plus simplement à partir des équations de Beltrami (voir section 5.4), établies indépendamment de ce résultat.

### 5.3. MÉTHODE DIRECTE DE RÉSOLUTION. ÉQUATION DE NAVIER85

avec  $a_i$  et  $\omega_i$  constants, représentant respectivement une *translation d'ensemble* et une *rotation (linéarisée) d'ensemble*.

Cela étant, le théorème de Kirchhoff s'énonce comme suit :

**Théorème 2** *Deux champs de déplacements vérifiant les conditions d'équilibre ne peuvent différer que d'un mode rigide.*

En effet, soient  $u_i$  et  $v_i$  deux solutions des équations d'équilibre. On a, pour tout déplacement virtuel  $\delta u_i$

$$\int_V \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \delta \varepsilon_{ij} dV = \delta \mathcal{T} = \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{v}) \delta \varepsilon_{ij} dV$$

ce qui entraîne

$$\int_V [\sigma_{ij}(\mathbf{u}) - \sigma_{ij}(\mathbf{v})] \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V C_{ijkl} [\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) - \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})] \delta \varepsilon_{ij} dV = 0$$

Choisissons alors  $\delta u_i = u_i - v_i$ , on obtient

$$\int_V C_{ijkl} [\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) - \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})] [\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) - \varepsilon_{kl}(\mathbf{v})] dV = 0$$

ce qui, vu la positive définition des modules, implique

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = 0$$

### 5.3 Méthode directe de résolution. Équation de Navier

La résolution d'un problème d'élasticité peut être menée en exprimant toutes les variables en termes des déplacements, suite à quoi on cherche pour quel champ de déplacements l'équilibre est vérifié; c'est la *méthode directe*.

Cherchons l'équation correspondante dans le cas isotrope. Les relations

$$\sigma_{ij} = 2G \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (5.7)$$

entraînent

$$D_j \sigma_{ji} = 2G \left( D_j \varepsilon_{ji} + \frac{\nu}{1-2\nu} D_i \varepsilon_{kk} \right)$$

Notant alors que

$$2D_j \varepsilon_{ji} = D_j(D_i u_j + D_j u_i) = D_{ij} u_j + D_{jj} u_i$$

on obtient aisément l'*équation de Navier*

$$G \left( D_{jj} u_i + \frac{1}{1-2\nu} D_{ij} u_j \right) + f_i = 0 \quad (5.8)$$

On peut lui donner une autre forme en notant que

$$\Delta \mathbf{u} = \text{graddiv}\mathbf{u} - \text{rotrot}\mathbf{u}$$

ce qui, tous calculs faits, donne

$$G \left( \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \text{graddiv}\mathbf{u} - \text{rotrot}\mathbf{u} \right) + \mathbf{f} = 0 \quad (5.9)$$

## 5.4 Méthode semi-inverse. Compatibilité

Le cheminement de la méthode directe est tellement naturel que l'on ne pense guère à en analyser les étapes. Ce n'est pourtant pas sans intérêt, pour la bonne compréhension de la méthode semi-inverse. Ces étapes sont reprises dans le schéma suivant :

$$\mathbf{u} \xrightarrow{\partial} \boldsymbol{\varepsilon} \xrightarrow{C} \boldsymbol{\sigma} \longrightarrow \boxed{\text{Équilibre}}$$

Partant du champ de déplacements, on en a déduit le champ des déformations à l'aide d'un opérateur de dérivation  $\partial$ ; les contraintes se calculent alors à l'aide de l'opérateur matriciel  $C$ , et il suffit alors de vérifier qu'elles sont en équilibre.

La *méthode semi-inverse* consiste à suivre le chemin opposé. Dans un certain nombre de cas, en effet, il est assez aisé de trouver la solution générale, en termes des contraintes, des équations d'équilibre (5.3), (5.4) et (5.5). On devra alors suivre le chemin inverse, représenté ci-dessous :

$$\mathbf{u} \xleftarrow[?]{\boldsymbol{\varepsilon}} \xleftarrow[C^{-1}]{\boldsymbol{\sigma}} \longleftarrow \boxed{\text{Équilibre}}$$

Le passage des contraintes aux déformations se fait aisément par la loi de Hooke inverse qui existe toujours, car la matrice des modules est définie positive. Mais *peut-on, à partir d'un champ de déformations, remonter aux déplacements ?* Il est clair que ce n'est pas possible dans tous les cas, car s'il existe le plus souvent plusieurs champs de contraintes qui vérifient l'équilibre, le théorème de Kirchhoff nous apprend qu'il n'en existe qu'*un seul* qui dérive d'un champ de déplacements<sup>2</sup>. (C'est évidemment la solution cherchée.) Il en résulte que l'in-

---

2. Puisque les modes rigides ne donnent pas de contraintes

tégration du champ de déplacements ne sera possible que moyennant certaines conditions sur les déformations appelées *équations de compatibilité*.

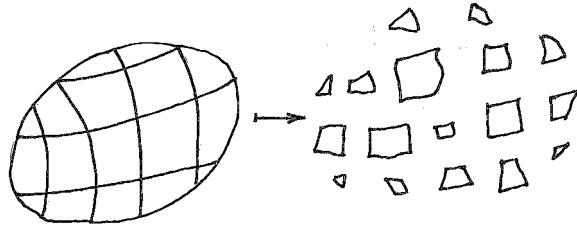


FIGURE 5.1 – Illustration de la compatibilité

Avant de déterminer ces conditions, essayons de les interpréter par un raisonnement physique. A cette fin, imaginons (*fig. 5.1*) que le corps soit découpé en morceaux très petits, et que chacun de ces morceaux soit déformé de manière arbitraire. En dehors de cas très particuliers, on ne pourra pas recoller entre eux les morceaux ainsi déformés de manière que leurs bords se correspondent parfaitement. La *compatibilité* exprime précisément que ces morceaux pourront être réassemblés correctement, comme les pièces d'un puzzle.

La présentation la plus naturelle des équations de compatibilité est celle de Beltrami, qui procède par une voie constructive, donnant ainsi une méthode d'intégration des déplacements.

Partons de l'identité

$$D_i u_j = \frac{1}{2}(D_i u_j + D_j u_i) + \frac{1}{2}(D_i u_j - D_j u_i)$$

où apparaît, outre le tenseur des déformations, le tenseur antisymétrique

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(D_i u_j - D_j u_i) \quad (5.10)$$

Ce dernier est directement lié au demi-rotationnel

$$\omega_k = \frac{1}{2}e_{krs}D_r u_s \quad (5.11)$$

puisque

$$e_{ijk}\omega_k = \frac{1}{2}e_{kij}e_{krs}D_r u_s = \frac{1}{2}(\delta_{ir}\delta_{js} - \delta_{is}\delta_{jr})D_r u_s = \frac{1}{2}(D_i u_j - D_j u_i) = \omega_{ij}$$

On peut donc écrire

$$D_i u_j = \varepsilon_{ij} + e_{ijk} \omega_k \quad (5.12)$$

Dans cette équation, seuls les  $\varepsilon_{ij}$  sont donnés. La question de la compatibilité se ramène donc à déterminer s'il existe un champ  $\omega_k$  tel que  $(\varepsilon_{ij} + e_{ijk} \omega_k)$  soit le gradient d'un vecteur. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que les dérivées croisées soient égales, ce qui s'écrit

$$0 = e_{pmi} D_m (D_i u_j) = e_{pmi} D_m \varepsilon_{ij} + e_{pmi} e_{ijk} D_m \omega_k$$

Le dernier terme du second membre s'écrit encore

$$D_m \omega_k (\delta_{pj} \delta_{km} - \delta_{pk} \delta_{jm}) = D_k \omega_k \delta_{pj} - D_j \omega_p$$

Il vient donc

$$D_j \omega_p - D_k \omega_k \delta_{pj} = e_{pmi} D_m \varepsilon_{ij} \quad (5.13)$$

En particulier, en contractant sur les indices  $p$  et  $j$ , on obtient

$$D_j \omega_j (1 - 3) = e_{jmi} D_m \varepsilon_{ij} = 0$$

puisque  $\varepsilon_{ij}$  est un tenseur symétrique. Soustrayant cette équation, combinaison de plusieurs des équations (5.13), à celles-ci, on obtient le système équivalent

$$D_j \omega_p = e_{pmi} D_m \varepsilon_{ij} \quad (5.14)$$

Ce sont les *équations de compatibilité de Beltrami*, auxquelles il faut donc accorder le sens suivant : un champ de déformations  $\varepsilon_{ij}$  est compatible si et seulement si on peut lui associer un champ de vecteurs-rotation  $\omega_p$  qui vérifie les équations de Beltrami.

Cependant, les cas où l'on peut exhiber directement le bon vecteur-rotation sont très rares (voir un exemple en section 5.9). Dans la plupart des cas, il est préférable de déterminer les conditions de son existence. Il s'agit encore de l'égalité des dérivées croisées :

$$0 = e_{qrj} D_r (D_j \omega_p) = e_{qrj} e_{pmi} D_{rm} \varepsilon_{ij}$$

ce qui correspond à la nullité du *tenseur* (symétrique) d'incompatibilité

$$T_{pq} = e_{pmi} e_{qrj} D_{mr} \varepsilon_{ij} \quad (5.15)$$

introduit par Washizu [93]. Les six équations

$$T_{pq} = 0 \quad (5.16)$$

sont connues sous le nom d'*équations de compatibilité de Barré de Saint-Venant*. Elles garantissent l'existence du vecteur  $\omega_i$  et donc aussi la compatibilité.

## 5.5 Propriétés du tenseur d'incompatibilité

Le tenseur d'incompatibilité jouit de quelques propriétés intéressantes. Tout d'abord, que la compatibilité soit vérifiée ou non, on a toujours

$$D_p T_{pq} = e_{pmi} e_{qrj} D_{pmr} \varepsilon_{ij} = e_{qrj} D_r (e_{pmi} D_{pm} \varepsilon_{ij}) = 0 \quad (5.17)$$

c'est-à-dire que le tenseur d'incompatibilité est toujours un champ intérieurement auto-équilibré.

Par ailleurs, ce tenseur permet de répondre à la question de l'existence d'un vecteur  $\omega_p$  unique sur une surface. Il s'agit de savoir si sur toute courbe fermée de cette surface (fig. 5.2), on a bien



FIGURE 5.2 – Unicité du vecteur-rotation sur une surface

$$0 = \int_C d\omega_p = \int_C D_j \omega_p dx_j$$

$D_j \omega_p$  étant calculé à partir de (5.14). Utilisant le théorème de Stokes-Ampère, on calcule

$$\begin{aligned} \int_C D_j \omega_p dx_j &= \int_C e_{pmi} D_m \varepsilon_{ij} dx_j \\ &= \int_S n_q e_{qrj} D_r (e_{pmi} D_m \varepsilon_{ij}) dS \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\int_C d\omega_p = \int_S n_q e_{qrj} e_{pmi} D_{rm} \varepsilon_{ij} dS = \int_S n_q T_{qp} dS$$

et la nullité de cette grandeur sur toute courbe fermée tracée sur  $S$  nécessite donc

$$n_q T_{qp} = 0 \text{ sur } S \quad (5.18)$$

C'est ce que nous appellerons les *conditions de compatibilité superficielle*.

## 5.6 Autre forme des équations de compatibilité de Saint-Venant

On emploie souvent, au lieu du tenseur d'incompatibilité ci-dessus, une autre expression équivalente, que nous utiliserons plus loin. On peut l'obtenir en s'appuyant sur le fait suivant : si  $a_{pq}$  est un tenseur symétrique, le tenseur

$$\hat{a}_{ls} = e_{klp} e_{ksq} a_{pq} \quad (5.19)$$

lui correspond biunivoquement. En effet, on a

$$\hat{a}_{ls} = (\delta_{ls}\delta_{pq} - \delta_{lq}\delta_{ps})a_{pq} = a_{pp}\delta_{ls} - a_{ls}$$

et, en particulier,

$$\hat{a}_{ll} = 3a_{pp} - a_{ll} = 2a_{ll}$$

ce qui permet d'obtenir aisément la relation inverse

$$a_{ls} = \frac{1}{2} \hat{a}_{pp} \delta_{ls} - \hat{a}_{ls}$$

Dans le cas présent, il est donc indifférent d'annuler  $T_{ls}$  ou le tenseur  $\hat{T}_{ls}$  qui lui est associé par la relation (5.19). Or,

$$\begin{aligned} \hat{T}_{ls} &= e_{klp} e_{ksq} T_{pq} \\ &= e_{klp} e_{pmi} e_{ksq} e_{qrj} D_{mr} \varepsilon_{ij} \\ &= (\delta_{km}\delta_{li} - \delta_{ki}\delta_{lm})(\delta_{kr}\delta_{sj} - \delta_{kj}\delta_{sr}) D_{mr} \varepsilon_{ij} \\ &= (\delta_{km}\delta_{li} - \delta_{ki}\delta_{lm})(D_{mk}\varepsilon_{ij} - D_{ms}\varepsilon_{ik}) \end{aligned}$$

ce qui fournit une seconde forme des équations de compatibilité de Saint-Venant :

$$\hat{T}_{ls} = D_{kk}\varepsilon_{ls} - D_{li}\varepsilon_{is} - D_{ks}\varepsilon_{lk} + D_{ls}\varepsilon_{kk} = 0 \quad (5.20)$$

## 5.7 Équations de Beltrami-Michell

Dans le cas d'un corps élastique homogène et isotrope, il est possible d'exprimer directement les équations de compatibilité en termes des contraintes, ce qui constitue un raccourci avantageux.

Rappelons d'abord l'établissement de l'équation de Hooke inverse. Partant de (5.6), on calcule d'abord

$$\sigma_{ii} = 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{ii}$$

d'où

$$2G\varepsilon_{ii} = \frac{1-2\nu}{1+\nu} \sigma_{ii}$$

La réintroduction de ce résultat dans (5.6) donne

$$2G\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{1-2\nu}{1+\nu} \sigma_{ll} \delta_{ij}$$

soit encore, en multipliant les deux membres par  $1/(2G) = (1+\nu)/E$ ,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{ll}\delta_{ij}] \quad (5.21)$$

Ceci posé, on a visiblement

$$\begin{aligned} 2G\hat{T}_{ij} &= (D_{kk}\sigma_{ij} + D_{ij}\sigma_{kk} - D_{ik}\sigma_{jk} - D_{jk}\sigma_{ik}) \\ &\quad - \frac{\nu}{1+\nu} (D_{kk}\sigma_{ll}\delta_{ij} + D_{ij}\sigma_{ll}\delta_{kk} - D_{ik}\sigma_{ll}\delta_{jk} - D_{jk}\sigma_{ll}\delta_{ik}) \end{aligned}$$

Notant alors que, si l'équilibre est vérifié, on a

$$D_k\sigma_{kj} = -f_j$$

on transforme l'expression obtenue en

$$2G\hat{T}_{ij} = D_{kk}\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} D_{ij}\sigma_{kk} + (D_i f_j + D_j f_i) - \frac{\nu}{1+\nu} D_{kk}\sigma_{ll}\delta_{ij}$$

Ce résultat peut encore être amélioré si l'on note que la contraction sur les indices  $i$  et  $j$  donne

$$2G\hat{T}_{ii} = 2 \frac{1-\nu}{1+\nu} D_{kk}\sigma_{ii} + 2D_i f_i = 0$$

c'est-à-dire

$$D_{kk}\sigma_{ii} = -\frac{1+\nu}{1-\nu} D_i f_i$$

Il vient donc finalement

$$2G\hat{T}_{ij} = D_{kk}\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} D_{ij}\sigma_{kk} + \left( D_i f_j + D_j f_i + \frac{\nu}{1-\nu} D_k f_k \delta_{ij} \right) = 0 \quad (5.22)$$

Ce sont les *équations de Beltrami-Michell* [61]. En l'absence de forces de volume, elles se ramènent à l'expression simple

$$D_{kk}\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} D_{ij}\sigma_{kk} = 0 \quad (5.23)$$

Ce sont des combinaisons de l'équilibre et de la compatibilité, qui n'auront donc la valeur d'équations de compatibilité que si l'équilibre intérieur est déjà vérifié par ailleurs.

## 5.8 Compatibilité dans les corps multiplement connexes

### 5.8.1 Introduction

Les conditions de compatibilité obtenues ci-dessus sont *nécessaires* pour assurer l'existence des déplacements. Mais sont-elles suffisantes ? Cette question se réduit fondamentalement à la suivante : étant donné un champ  $f_i$  irrotationnel dans  $V$ , admet-il un potentiel  $\varphi$  tel que  $f_i = D_i \varphi$  dans  $V$  ? La construction du potentiel est classique : étant donné un point  $\mathbf{a} \in V$ , on calcule  $\varphi$  en un point  $\mathbf{x} \in V$  par la formule

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{a}) + \int_{C_{ax}} f_i dx_i \quad (5.24)$$

$C_{ax}$  étant une courbe quelconque de  $V$  joignant  $\mathbf{a}$  à  $\mathbf{x}$  (fig. 5.3). Bien entendu, cette formule ne définit un potentiel unique que si la valeur  $\varphi(\mathbf{x})$  ne dépend pas de la courbe choisie. Étant donné deux courbes différentes  $C_1$  et  $C_2$  (fig. 5.4), on doit donc avoir

$$\int_{C_1} f_i dx_i = \int_{C_2} f_i dx_i$$

ou, ce qui revient au même

$$\int_{C_1 \cup (-C_2)} f_i dx_i = 0 \quad (5.25)$$

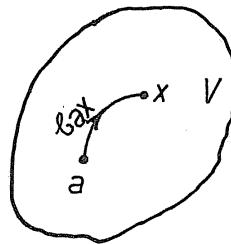


FIGURE 5.3 – Intégration du potentiel

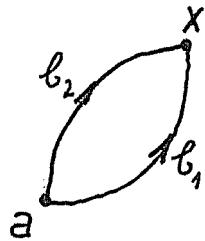


FIGURE 5.4 – Unicité du potentiel

en notant  $(-C_2)$  la courbe  $C_2$  parcourue en sens inverse. En d'autres termes, *la circulation de  $f_i$  sur tout circuit fermé doit être nulle.*

A ce stade, deux cas sont possibles :

1. Sur tout circuit fermé de  $V$ , on peut appuyer une surface  $S$  entièrement contenue dans  $V$ . On dit alors que  $V$  est *simplement connexe* (fig. 5.5).
2. Il existe des circuits fermés de  $V$  sur lesquels on ne peut appuyer aucune surface entièrement contenue dans  $V$ . On dit alors que  $V$  est *multiplement connexe* (fig. 5.5).

Considérons d'abord le premier cas, qui est du reste le seul à être traité dans les manuels élémentaires d'analyse. Par application du théorème de Stokes-Ampère, on a alors sur un circuit quelconque (fig. 5.7)

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{f} dS$$

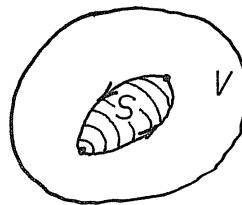


FIGURE 5.5 – Simplement connexe

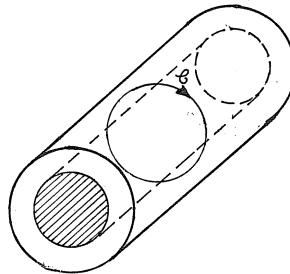


FIGURE 5.6 – Multiplement connexe

soit, dans nos notations,

$$\int_C f_i dx_i = \int_S n_i e_{ijk} D_j f_k dS$$

et comme  $f_i$  est irrotationnel,

$$\int_C f_i dx_i = 0$$

donc l'existence du potentiel est assurée. Il en découle que *dans un corps simplement connexe, les conditions de compatibilité suffisent à assurer l'existence du champ de déplacements.*

### 5.8.2 Topologie des corps multiplelement connexes

Dans un corps  $V$  quelconque, deux circuits sont dits *réconciliabiles* si l'on peut faire coïncider le premier avec le second par une déformation continue ne

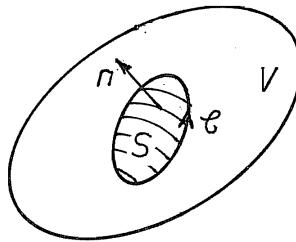
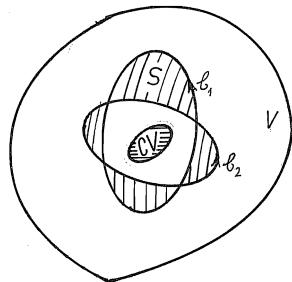


FIGURE 5.7 – Cas d'un ouvert simplement connexe

FIGURE 5.8 –  $C_1$  et  $C_2$  sont réconciliables

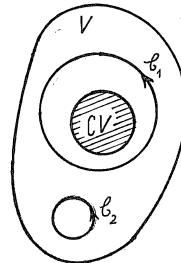
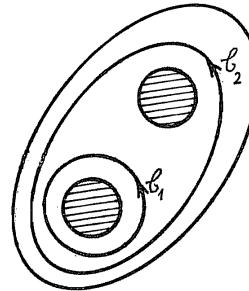
le faisant pas sortir du corps. La trajectoire de réconciliation définit donc une surface  $S \subset V$  (fig. 5.8).

Certains circuits peuvent être déformés jusqu'à ne plus former qu'un point : on les appelle *réductibles*. Tout autre circuit est *irréductible*. Toute surface  $S$  construite sur un circuit irréductible coupe donc  $\mathbb{C}V$  (fig. 5.9).

Un circuit irréductible  $C$  est dit *simple* si l'on peut construire sur  $C$  une surface  $S$  telle que  $S \cap \mathbb{C}V$  soit *d'un seul tenant*. Sinon,  $C$  est dit *composé*. Intuitivement, un circuit simple « n'entoure qu'un trou ».

Appliquée aux circuits simples, la condition  $C_1 \mathcal{R} C_2$  ( $\mathcal{R}$  signifie « réconciliable avec ») est une relation d'équivalence (fig. 5.11) :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 \mathcal{R} C_2 \text{ et } C_2 \mathcal{R} C_3 \Rightarrow C_1 \mathcal{R} C_3 \\ C_1 \mathcal{R} C_2 \Rightarrow C_2 \mathcal{R} C_1 \end{array} \right.$$

FIGURE 5.9 –  $\mathcal{C}_1$  est irréductible,  $\mathcal{C}_2$  est réductibleFIGURE 5.10 –  $\mathcal{C}_1$  est simple,  $\mathcal{C}_2$  est composé

Elle divise donc les circuits simples en *classes d'équivalence*. Le nombre de ces classes, +1 (pour les circuits réductibles) définit la *multiplicité de la connexion du corps*  $V$ .

### 5.8.3 Intégration d'un gradient sur un corps multiplement connexe

L'intérêt des définitions précédentes réside dans la propriété que voici :

**Théorème 3** *Étant donné un champ irrotationnel  $f_i$ , ses circulations sur deux circuits simples réconciliables sont identiques.*

Soient en effet  $\mathbf{a} \in \mathcal{C}_1$  et  $\mathbf{b} \in \mathcal{C}_2$  deux points qui se correspondent dans la déformation de  $\mathcal{C}_1$  à  $\mathcal{C}_2$  (fig. 5.12). Lisons-les par la trajectoire  $\mathcal{C}_3$  de  $\mathbf{a}$  vers  $\mathbf{b}$

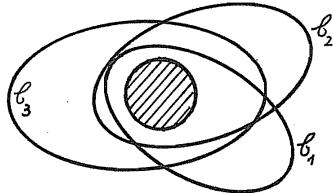


FIGURE 5.11 – « réconciliable avec » est une relation d'équivalence.

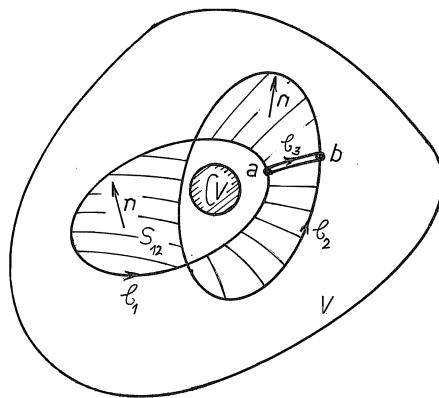


FIGURE 5.12 – Constantes cycliques

lors de cette déformation. Alors,

$$\int_{C_1} f_i dx_i - \int_{C_2} f_i dx_i = \\ \int_{C_3} f_i dx_i + \int_{C_2} f_i dx_i - \int_{C_3} f_i dx_i - \int_{C_1} f_i dx_i = 0$$

car le circuit  $\mathcal{C} = (C_3, C_2, -C_3, -C_1)$  est réductible, si bien que

$$\int_{\mathcal{C}} f_i dx_i = \int_{S_{12}} n_i e_{ijk} D_j f_k dS = 0$$

Ainsi, il existe, associée à chaque classe de circuits simples, une *constante cyclique*  $\Delta\varphi$  égale à la circulation de  $f_i$  sur un quelconque des circuits de cette classe.

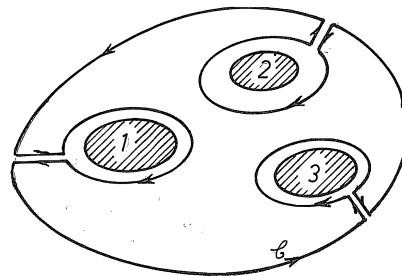


FIGURE 5.13 – Cas des circuits composés

Le cas des *circuits composés* s'y réduit aisément. En effet, comme le montre la figure 5.13, il est possible de tracer autour de chaque composante connexe de  $S \cap \bar{C}V$  un circuit simple. A l'aide de ponts comme ci-dessus, on obtient que la valeur de la circulation de  $f_i$  vaut la somme des constantes cycliques relatives aux différents trous embrassés.

De tout ceci, il résulte qu'*un champ irrotationnel dans un ouvert de connexion m-uple admet un potentiel si et seulement si les  $(m - 1)$  constantes cycliques des classes de circuits simples sont nulles.*

#### 5.8.4 Conditions globales de compatibilité dans les corps multiplement connexes

Partant des relations

$$D_j \omega_p = e_{pmi} D_m \varepsilon_{ij}$$

on commence par intégrer les rotations, en supposant vérifiées les conditions de compatibilité de Saint-Venant :

$$\omega_p(\mathbf{y}) = \omega_p(0) + \int_0^{\mathbf{y}} e_{pmi} D_m \varepsilon_{ij} dx_j$$

par un chemin quelconque. Pour assurer l'unicité, il faudra que sur chaque classe de circuits simples, les trois constantes cycliques

$$\Delta\omega_p = \int_C e_{pmi} D_m \varepsilon_{ij} dx_j \quad (5.26)$$

s'annulent, ce qui donne  $3(m - 1)$  conditions pour un corps  $m$  fois connexe.

Les déplacements se calculent alors à partir des relations

$$D_i u_j = \varepsilon_{ij} + e_{ijp} \omega_p$$

Dans ce cas-ci, il faut faire attention à l'existence possible de  $\Delta\omega_p$ . Pour deux

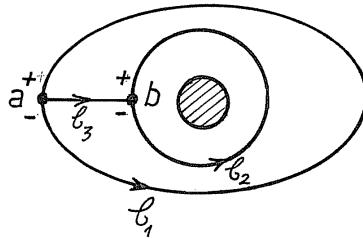


FIGURE 5.14 – Intégration des déplacements

circuits  $C_1$  et  $C_2$  réconciliables (fig. 5.14), on a, *avant de faire un tour*,

$$u_j^-(\mathbf{b}) = u_j^-(\mathbf{a}) + \int_{C_3} (\varepsilon_{ij} + e_{ijp} \omega_p^-) dx_i$$

et, *après avoir fait un tour*,

$$u_j^+(\mathbf{b}) = u_j^+(\mathbf{a}) + \int_{C_3} (\varepsilon_{ij} + e_{ijp} \omega_p^+) dx_i$$

soit, par différence,

$$\Delta u_j(\mathbf{b}) = \Delta u_j(\mathbf{a}) + e_{ijp} \Delta\omega_p (b_i - a_i) \quad (5.27)$$

c'est-à-dire que le saut de déplacement se compose d'une *translation*  $\Delta u_j(\mathbf{a})$  et d'une *rotation*  $e_{ijp} \Delta\omega_p (b_i - a_i)$ . Tout saut est annulé moyennant les conditions  $\Delta\omega_p = 0$  et

$$\Delta u_j = \int_C (\varepsilon_{ij} + e_{ijp} \omega_p) dx_i = 0 \quad (5.28)$$

### 5.8.5 Interprétation de Weintgarten-Volterra

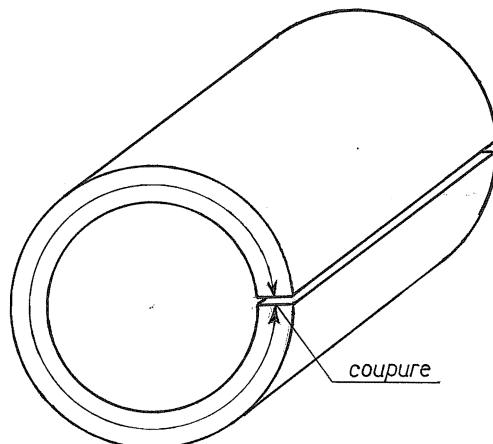


FIGURE 5.15 – Coupure rendant le corps simplement connexe

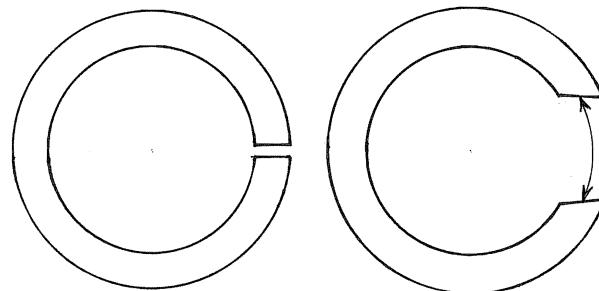


FIGURE 5.16 – Déplacements des lèvres de la coupure

Comment interpréter le fait que les conditions locales de compatibilité ne suffisent pas dans le cas d'un corps multiplement connexe ? Faisons des *coupures* rendant le corps simplement connexe. Il suffit pour cela de supprimer l'existence de circuits irréductibles (*fig. 5.15*). A partir des relations locales de compatibilité, on peut alors construire un champ de déplacements dans le corps ainsi transformé. Mais en général, les lèvres de la coupure vont alors s'écartier d'une translation et d'une rotation : ce sont les *dislocations de Volterra* [96, 91].

Pour recoller le lèvres de la coupure, il faudra appliquer au corps des *efforts* capables de l'obliger à vérifier les équations globales  $\Delta u_p = 0$  et  $\Delta \omega_p = 0$ . Il est donc possible, en fabriquant par exemple un tube par cintrage et soudage, d'introduire des *contraintes résiduelles*. Ces contraintes ne pourront pas être annulées sans rompre la compatibilité. C'est pourquoi on dit encore qu'un corps  $m$  fois connexe est  $6(m - 1)$  fois cinématiquement *hyperstatique*.

## 5.9 Sur l'indépendance des équations de compatibilité

Les équations de compatibilité de Saint-Venant sont au nombre de six. Mais sont-elles totalement indépendantes ? Nous allons montrer que, moyennement certaines conditions sur la surface du corps, on peut se limiter à ne vérifier que *trois* équations de compatibilité. Nous commencerons par établir deux lemmes dus à Fraeijs de Veubeke [36], qui nous aideront à obtenir des théorèmes plus généraux dus à Washizu [93].

**Lemme 1** *Si l'on se donne arbitrairement les éléments diagonaux  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{33}$  du champ de déformation, il est toujours possible de le compléter de manière à le rendre compatible.*

En effet, soit  $(u_1^0, u_2^0, u_3^0)$  une solution particulière des équations

$$D_1 u_1^0 = \varepsilon_{11}, \quad D_2 u_2^0 = \varepsilon_{22}, \quad D_3 u_3^0 = \varepsilon_{33}$$

Il suffira d'écrire

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(D_1 u_2^0 + D_2 u_1^0), \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}(D_2 u_3^0 + D_3 u_2^0), \quad \varepsilon_{31} = \frac{1}{2}(D_3 u_1^0 + D_1 u_3^0)$$

**Lemme 2** *Si l'on se donne arbitrairement les termes non diagonaux  $\varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_{23}$ ,  $\varepsilon_{31}$  du champ de déformation, il est toujours possible de le compléter de manière à le rendre compatible.*

En effet<sup>3</sup>, il suffit de copier partiellement le raisonnement de Beltrami, en écrivant

$$\begin{aligned} D_2 u_1 &= \varepsilon_{21} - \omega_3 \\ D_3 u_1 &= \varepsilon_{31} + \omega_2 \\ D_1 u_2 &= \varepsilon_{12} + \omega_3 \\ D_3 u_2 &= \varepsilon_{32} - \omega_1 \\ D_1 u_3 &= \varepsilon_{13} - \omega_2 \\ D_2 u_3 &= \varepsilon_{23} + \omega_1 \end{aligned} \quad (5.29)$$

Les deux premières équations seront compatibles, c'est-à-dire que l'on pourra trouver un déplacement  $u_1$ , si

$$D_3 \omega_3 + D_2 \omega_2 = D_3 \varepsilon_{21} - D_2 \varepsilon_{31} \quad (5.30)$$

La deuxième paire d'équations, relative à l'existence de  $u_2$ , exige

$$D_3 \omega_3 + D_1 \omega_1 = D_1 \varepsilon_{32} - D_3 \varepsilon_{12} \quad (5.31)$$

Enfin, le troisième couple d'équations, relatif à l'existence de  $u_3$ , conduit à la condition

$$D_1 \omega_1 + D_2 \omega_2 = D_2 \varepsilon_{13} - D_1 \varepsilon_{23} \quad (5.32)$$

Visiblement, la somme des trois conditions (5.30), (5.31), (5.32) donne

$$D_1 \omega_1 + D_2 \omega_2 + D_3 \omega_3 = 0$$

ce qui nous ramène aux conditions

$$\begin{aligned} D_1 \omega_1 &= -D_3 \varepsilon_{21} + D_2 \varepsilon_{31} \\ D_2 \omega_2 &= -D_1 \varepsilon_{32} + D_3 \varepsilon_{12} \\ D_3 \omega_3 &= -D_2 \varepsilon_{13} + D_1 \varepsilon_{23} \end{aligned}$$

qui permettent toujours de trouver une solution particulière  $\omega_i^0$ . Il suffit alors d'introduire ce champ  $\omega_i^0$  dans les relations (5.29) pour obtenir une solution particulière  $u_i^0$  dont on pourra déduire les déformations manquantes.

---

3. La présente démonstration diffère de celle de Fraeijs de Veubeke

### 5.9.1 Deux résultats généraux sur les champs d'autocontrainte

Les deux lemmes ci-dessus vont nous permettre d'établir deux théorèmes sur les états d'autocontrainte.

**Théorème 4** *Soit  $\sigma_{ij}$  un état d'autocontrainte, c'est à dire vérifiant  $D_j \sigma_{ij} = 0$  dans  $V$  et  $n_j \sigma_{ij} = 0$  sur  $S$ . Si ce champ a ses termes diagonaux nuls dans  $V$ , il est identiquement nul.*

En effet, il résulte du deuxième lemme ci-dessus que l'on peut trouver un champ de déplacement  $v_i$  tel que

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(D_i v_j + D_j v_i), \quad i \neq j$$

Alors, comme  $\sigma_{11} = 0$ ,  $\sigma_{22} = 0$  et  $\sigma_{33} = 0$ , on a

$$\begin{aligned} \int_V (2\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{23}^2 + 2\sigma_{31}^2) dV &= \int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2}(D_i v_j + D_j v_i) dV \\ &= \int_S n_j \sigma_{ij} v_i dS - \int_V v_i D_j \sigma_{ji} dV \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque il s'agit d'un état d'autocontrainte.

**Théorème 5** *Soit  $\sigma_{ij}$  un état d'autocontrainte, c'est à dire vérifiant  $D_j \sigma_{ij} = 0$  dans  $V$  et  $n_j \sigma_{ij} = 0$  sur  $S$ . Si ce champ a ses termes non diagonaux nuls dans  $V$ , il est identiquement nul.*

Le schéma de la démonstration est le même, en se basant sur le premier lemme ci-dessus.

### 5.9.2 Les deux théorèmes de Washizu

Revenons au tenseur d'incompatibilité  $T_{ij}$ . On sait qu'il vérifie l'équilibre intérieur :

$$D_j T_{ji} = 0 \text{ dans } V$$

Il en découle les deux théorèmes suivants :

**Théorème 6** *Si un champ de déformations satisfait aux seules équations de compatibilité  $T_{11} = 0$ ,  $T_{22} = 0$  et  $T_{33} = 0$  dans un domaine  $V$ , le tenseur  $T_{ij}$  est nul dans  $V$  chaque fois que les conditions de surface  $n_j T_{ji} = 0$  sont vérifiées<sup>4</sup>.*

En effet, les conditions sont telles que le tenseur d'incompatibilité est un état d'autocontrainte dont les éléments diagonaux sont nuls. De la même façon, on a le

**Théorème 7** *Si un champ de déformations satisfait aux seules équations de compatibilité  $T_{12} = 0$ ,  $T_{23} = 0$  et  $T_{31} = 0$  dans un domaine  $V$ , le tenseur  $T_{ij}$  est nul dans  $V$  chaque fois que les conditions de surface  $n_j T_{ji} = 0$  sont vérifiées<sup>5</sup>.*

### 5.9.3 Autre énoncé des théorèmes de Washizu

Nous avons vu en section 5.5 que la nullité de l'expression  $n_i T_{ip}$  sur la surface du corps est une condition nécessaire à l'existence d'un vecteur rotation univoque sur cette surface. On peut donc encore énoncer le

**Théorème 8** *Si le vecteur rotation est défini de manière univoque sur la surface, il suffira, pour assurer la nullité du tenseur d'incompatibilité, d'exiger un des deux triplets de conditions  $T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0$  ou  $T_{12} = T_{23} = T_{31} = 0$ .*

## 5.10 Exercices

**Exercice 20** *Écrire explicitement les six composantes du tenseur d'incompatibilité  $T_{ij}$*

*Solution*

$$\begin{aligned} T_{11} &= D_{22}\varepsilon_{33} + D_{33}\varepsilon_{22} - 2D_{23}\varepsilon_{23} \\ T_{22} &= D_{33}\varepsilon_{11} + D_{11}\varepsilon_{33} - 2D_{13}\varepsilon_{13} \\ T_{33} &= D_{11}\varepsilon_{22} + D_{22}\varepsilon_{11} - 2D_{12}\varepsilon_{12} \\ T_{12} &= D_{23}\varepsilon_{31} + D_{31}\varepsilon_{23} - D_{21}\varepsilon_{33} - D_{33}\varepsilon_{21} \\ T_{23} &= D_{31}\varepsilon_{12} + D_{12}\varepsilon_{31} - D_{32}\varepsilon_{11} - D_{11}\varepsilon_{32} \\ T_{31} &= D_{12}\varepsilon_{23} + D_{23}\varepsilon_{12} - D_{13}\varepsilon_{22} - D_{22}\varepsilon_{31} \end{aligned}$$

---

4. Washizu exigeait en fait  $T_{ij} = 0$  sur  $S$ , ce qui est plus restrictif

5. Même remarque que pour le théorème précédent

**Exercice 21** Montrer qu'un champ de contraintes en équilibre homogène à l'intérieur de  $V$  est en général formé des dérivées secondees de trois fonctions de contrainte que l'on peut définir d'au moins deux manières différentes.

*Solution* - Les relations

$$D_j \sigma_{ji} = 0$$

admettent, si l'on fait provisoirement abstraction de la symétrie des contraintes, la solution générale

$$\sigma_{ji} = e_{jkl} D_k A_{li}$$

les  $A_{li}$  étant des fonctions de contrainte du premier ordre. On jouit, dans cette expression, d'une *invariance de jauge*, en ce sens que l'on ne modifie pas les contraintes en remplaçant les  $A_{li}$  par

$$\hat{A}_{li} = A_{li} + D_l \psi_i$$

$\psi_i$  étant un vecteur quelconque. On peut en particulier choisir les  $\psi_i$  de manière à annuler  $\hat{A}_{11}$ ,  $\hat{A}_{22}$  et  $\hat{A}_{33}$  : il suffit pour cela que

$$D_1 \psi_1 = -A_{11}, \quad D_2 \psi_2 = -A_{22}, \quad D_3 \psi_3 = -A_{33}$$

La condition de symétrie des contraintes s'écrit alors

$$0 = e_{rji} \sigma_{ji} = e_{jir} e_{jpq} D_p \hat{A}_{qi} = D_p \hat{A}_{qi} (\delta_{ip} \delta_{qr} - \delta_{iq} \delta_{pr})$$

soit

$$0 = D_i \hat{A}_{ri} - D_r \hat{A}_{ii} = D_i \hat{A}_{ri}$$

puisque, par construction,  $\hat{A}_{ii} = 0$ . La solution générale de cette équation a la forme

$$\hat{A}_{ri} = e_{imn} D_m B_{rn}$$

A nouveau, on jouit d'une invariance de jauge, car on ne modifie pas les  $\hat{A}_{li}$  en remplaçant  $B_{rn}$  par

$$\hat{B}_{rn} = B_{rn} + D_n \chi_r \tag{5.33}$$

Remarquons d'abord que l'on peut choisir les  $\chi_r$  de manière à symétriser  $\hat{B}_{rn}$  : en effet, pour obtenir

$$e_{irn} \hat{B}_{rn} = e_{irn} B_{rn} + e_{irn} D_n \chi_r = 0$$

il faut que

$$e_{inr} D_n \chi_r = e_{irn} B_{rn}$$

ce qui est possible si

$$D_i(e_{irn}B_{rn}) = 0$$

ce qui revient à dire

$$-e_{rin}D_iB_{rn} = -\hat{A}_{rr} = 0$$

condition effectivement vérifiée. On obtient ainsi l'expression

$$\sigma_{ij} = e_{ikl}e_{jmn}D_{km}\hat{B}_{ln} \quad (5.34)$$

avec  $\hat{B}_{ln}$  symétrique. Mais on peut aller plus loin en jouant sur une nouvelle forme de l'invariance de jauge, qui ne rompt pas la symétrie : il résulte en effet de l'expression du tenseur d'incompatibilité que les contraintes ne sont pas altérées si l'on remplace  $\hat{B}_{ij}$  par

$$\tilde{B}_{ij} = \hat{B}_{ij} + \frac{1}{2}(D_i\beta_j + D_j\beta_i)$$

Or, il est possible de trouver un champ  $\beta_i$  qui vérifie l'une des deux conditions suivantes :

1.  $\frac{1}{2}(D_i\beta_j + D_j\beta_i) = -\hat{B}_{ij}$  pour  $i \neq j$
2.  $D_1\beta_1 = -\hat{B}_{11}, D_2\beta_2 = -\hat{B}_{22}, D_3\beta_3 = -\hat{B}_{33}$

Pour le choix (1), le tenseur  $\tilde{B}_{ij}$  se réduit à la seule diagonale. En notant  $\varphi_1 = \tilde{B}_{11}$ ,  $\varphi_2 = \tilde{B}_{22}$  et  $\varphi_3 = \tilde{B}_{33}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= D_{22}\varphi_3 + D_{33}\varphi_2 \\ \sigma_{22} &= D_{33}\varphi_1 + D_{11}\varphi_3 \\ \sigma_{33} &= D_{11}\varphi_2 + D_{22}\varphi_1 \\ \sigma_{12} &= -D_{12}\varphi_3 \\ \sigma_{23} &= -D_{23}\varphi_1 \\ \sigma_{31} &= -D_{31}\varphi_2 \end{aligned}$$

C'est le système de *fonctions de contrainte de Maxwell* (1870) [75].

Le choix (2) mène à un tenseur  $\tilde{B}_{ij}$  réduit à ses termes non diagonaux. En notant  $\Phi_1 = -2\tilde{B}_{23}$ ,  $\Phi_2 = -2\tilde{B}_{31}$  et  $\Phi_3 = -2\tilde{B}_{12}$ , on obtient

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= D_{23}\Phi_1 \\ \sigma_{22} &= D_{13}\Phi_2 \\ \sigma_{33} &= D_{12}\Phi_3 \\ \sigma_{12} &= -\frac{1}{2}D_3(D_1\Phi_1 + D_2\Phi_2 - D_3\Phi_3) \\ \sigma_{13} &= -\frac{1}{2}D_2(D_3\Phi_3 + D_1\Phi_1 - D_2\Phi_2) \\ \sigma_{23} &= -\frac{1}{2}D_1(D_2\Phi_2 + D_3\Phi_3 - D_1\Phi_1)\end{aligned}$$

C'est le système de *fonctions de contrainte de Morera* (1892) [75].

**Exercice 22** *En théorie des poutres, on pose*

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= a(z) + xb(z) + yc(z) \\ \sigma_{xx} = \sigma_{yy} &= 0\end{aligned}$$

*Montrer que, dans le cadre de ces hypothèses, et pour autant que la poutre soit simplement connexe, il est toujours possible de trouver des contraintes  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yz}$  et  $\sigma_{zx}$  de manière à assurer la compatibilité.*

**Exercice 23** *Analyser les conséquences du théorème d'unicité de Kirchhoff en ce qui concerne*

- la stabilité ;
- les contraintes résiduelles.

*Peut-on étudier le flambement dans le cadre de la théorie linéaire ?*

**Exercice 24** *Quelles sont les conditions pour qu'un champ de déformation de la forme  $\varepsilon_{ij} = f(\mathbf{x})\delta_{ij}$  soit compatible ?*

*Solution* - On a

$$\begin{aligned}T_{pq} &= e_{pmi}e_{qrj}D_{mr}f\delta_{ij} = D_{mr}fe_{pmi}e_{qri} \\ &= D_{mr}f(\delta_{pq}\delta_{mr} - \delta_{pr}\delta_{qm}) \\ &= D_{mm}f\delta_{pq} - D_{qp}f\end{aligned}$$

soit

$$D_{pq}f = D_{mm}f\delta_{pq} \quad (5.35)$$

Contractant sur  $p$  et  $q$ , on obtient

$$D_{pp}f = 3D_{mm}f \text{ soit } D_{mm}f = 0$$

ce qui, comparé à (5.35) donne

$$D_{pq}f = 0$$

La solution de ces 6 équations est

$$f = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$$

**Exercice 25** *A partir des équations de Navier, étudier le problème d'une sphère creuse épaisse soumise à une pression interne. En déduire le cas limite d'une faible épaisseur.*

*Solution -* La symétrie du problème implique  $u_\theta = u_\varphi = 0$  (dans les coordonnées sphériques), soit  $\mathbf{u} = ue_r$ . On a encore  $\partial u / \partial \theta = \partial u / \partial \varphi = 0$ . Il en résulte

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta u) + 0 + 0 \right] = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u)$$

et

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ u & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Les forces de volume étant nulles, on a simplement

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

ce qui signifie que

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = C$$

soit, explicitement,

$$\frac{d}{dr} (r^2 u) = Cr^2$$

On en déduit successivement

$$r^2 u = C \frac{r^3}{3} + D$$

puis

$$u = C \frac{r}{3} + \frac{D}{r^2}$$

ce que l'on peut encore écrire

$$u = Ar + \frac{B}{r^2}$$

Les déformations sont donc

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} = A - \frac{2B}{r^3} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{u}{r} = A + \frac{B}{r^3} \\ \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\varphi\varphi} &= 3A \end{aligned}$$

On en déduit aisément les contraintes :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2G \left( \varepsilon_{rr} + \frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) \\ &= 2G \left( A - \frac{2B}{r^3} + \frac{3\nu}{1-2\nu} A \right) \\ &= 2G \left( \frac{1+\nu}{1-2\nu} A - \frac{2B}{r^3} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} &= 2G \left( \varepsilon_{\theta\theta} + \frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) \\ &= 2G \left( A + \frac{B}{r^3} + \frac{3\nu}{1-2\nu} A \right) \\ &= 2G \left( \frac{1+\nu}{1-2\nu} A + \frac{B}{r^3} \right) \end{aligned}$$

Les conditions aux limites sont

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = -p & \text{en } r = R_i \\ \sigma_{rr} = 0 & \text{en } r = R_e \end{cases}$$

On en déduit d'abord

$$B = \frac{R_e^3}{2} \frac{1+\nu}{1-2\nu} A$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2GA \frac{1+\nu}{1-2\nu} \left( 1 - \frac{R_e^3}{r^3} \right) = \frac{EA}{1-2\nu} \left( 1 - \frac{R_e^3}{r^3} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} &= 2GA \frac{1+\nu}{1-2\nu} \left( 1 + \frac{R_e^3}{2r^3} \right) = \frac{EA}{1-2\nu} \left( 1 + \frac{R_e^3}{2r^3} \right) \end{aligned}$$

Pour  $r = R_i$ , on trouve

$$-p = \frac{EA}{1-2\nu} \left( 1 - \frac{R_e^3}{R_i^3} \right)$$

soit

$$A = \frac{p(1-2\nu)}{E \left( \frac{R_e^3}{R_i^3} - 1 \right)}$$

La solution finale est donc

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = -p \frac{\frac{R_e^3}{r^3} - 1}{\frac{R_e^3}{R_i^3} - 1} \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = p \frac{\frac{R_e^3}{2r^3} + 1}{\frac{R_e^3}{R_i^3} - 1} \end{cases} \quad (5.36)$$

Quant au déplacement, il vaut

$$\begin{aligned} u = Ar + \frac{B}{r^2} &= A \left[ r + \frac{1}{2} \frac{1+\nu}{1-2\nu} \frac{R_e^3}{r^2} \right] \\ &= \frac{pr}{2E \left( \frac{R_e^3}{R_i^3} - 1 \right)} \left[ (2-4\nu) + (1+\nu) \frac{R_e^3}{r^3} \right] \end{aligned}$$

soit

$$u = \frac{pr}{2E} \frac{(2-4\nu) + (1+\nu) \frac{R_e^3}{r^3}}{\frac{R_e^3}{R_i^3} - 1} \quad (5.37)$$

Dans le cas d'une *faible épaisseur*, c'est-à-dire  $t/R = \eta \ll 1$ , où  $t$  est l'épaisseur, et  $R$ , le rayon, on a

$$r = R(1 + \eta\rho), \text{ avec } -\frac{1}{2} \leq \rho \leq \frac{1}{2}$$

$$\rho = \left( \frac{r}{R} - 1 \right) \frac{1}{\eta}$$

et

$$R_e = R(1 + \frac{\eta}{2}), \quad R_i = R(1 - \frac{\eta}{2})$$

d'où

$$\frac{R_e}{R_i} = \frac{1 + \eta/2}{1 - \eta/2} = 1 + \frac{\eta}{1 - \eta/2} = 1 + \eta + \mathcal{O}(\eta^2)$$

et

$$\left(\frac{R_e}{R_i}\right)^3 = 1 + 3\eta + \mathcal{O}(\eta^2)$$

De la même façon, on a

$$r = R(1 + \mathcal{O}(\eta))$$

et

$$\frac{R_e}{r} = \frac{1 + \eta/2}{1 + \eta\rho} = \frac{1 + \eta\rho + \eta(\frac{1}{2} - \rho)}{1 + \eta\rho} = 1 + \eta(\frac{1}{2} - \rho) + \mathcal{O}(\eta^2)$$

d'où

$$\left(\frac{R_e}{r}\right)^3 = 1 + 3\eta(\frac{1}{2} - \rho) + \mathcal{O}(\eta^2)$$

On en déduit

$$\sigma_{rr} = -p \frac{3\eta(\frac{1}{2} - \rho) + \mathcal{O}(\eta^2)}{3\eta + \mathcal{O}(\eta^2)} = -p \frac{(\frac{1}{2} - \rho) + \mathcal{O}(\eta)}{1 + \mathcal{O}(\eta)} = -p(\frac{1}{2} - \rho) + \mathcal{O}(\eta)$$

puis

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} &= p \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\eta(\frac{1}{2} - \rho) + \mathcal{O}(\eta^2) + 1}{3\eta + \mathcal{O}(\eta^2)} \\ &= p \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\eta(\frac{1}{2} - \rho) + \mathcal{O}(\eta^2)}{3\eta(1 + \mathcal{O}(\eta))} = \frac{p}{2\eta}(1 + \mathcal{O}(\eta)) \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} u &= \frac{pR(1 + \mathcal{O}(\eta))}{2E} \frac{(2 - 4\nu) + (1 + \nu)[1 + 3\eta(\frac{1}{2} - \rho) + \mathcal{O}(\eta^2)]}{3\eta + \mathcal{O}(\eta^2)} \\ &= \frac{pR}{2E} \frac{(3 - 3\nu)(1 + \mathcal{O}(\eta))}{3\eta(1 + \mathcal{O}(\eta))} = \frac{pR}{2E\eta}(1 - \nu)(1 + \mathcal{O}(\eta)) \end{aligned}$$

A un ordre de  $\eta$  près, on a donc

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &\approx -p\left(\frac{1}{2} - \rho\right) (= \mathcal{O}(p)) \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} &\approx \frac{pR}{2t} (= \mathcal{O}(p/\eta)) \\ u &\approx \frac{pR^2(1-\nu)}{2Et}\end{aligned}\tag{5.38}$$

On le constate, en comparaison des autres contraintes,  $\sigma_{rr}$  est de l'ordre des termes négligés. Il est donc raisonnable de la considérer comme *approximativement nulle*. C'est pourquoi on considère généralement qu'une sphère mince sous pression est en *état plan de contrainte* ( $\sigma_{rr} \approx 0$ ).

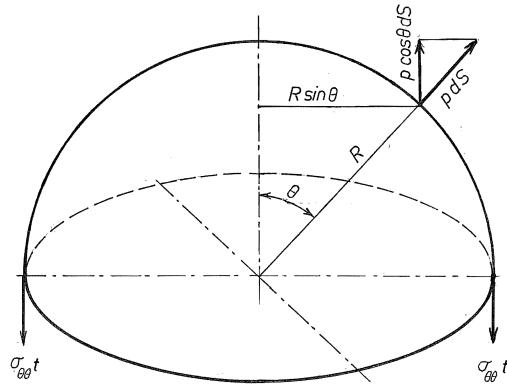


FIGURE 5.17 – Sphère mince : calcul de  $\sigma_{\theta\theta}$ .

La valeur de  $\sigma_{\theta\theta}$  peut être obtenue par le raisonnement simple que voici (*fig. 5.17*) : la résultante verticale des pressions sur la demi-sphère vaut

$$\begin{aligned} p \int_S \cos \theta dS &= p \int_0^{\pi/2} \cos \theta \cdot 2\pi R \sin \theta \cdot R d\theta \\ &= p\pi R^2 \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta \\ &= p\pi R^2 \left[ -\frac{\cos 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} \\ &= p\frac{\pi R^2}{2} (\cos 0 - \cos \pi) \\ &= p\pi R^2 \end{aligned}$$

Cet effort est équilibré par les contraintes  $\sigma_{\theta\theta}$  sur l'équateur, dont la résultante vaut

$$\sigma_{\theta\theta} t \cdot 2\pi R$$

On a donc

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{p\pi R^2}{2\pi R t} = \frac{pR}{2t}$$

Un raisonnement semblable prouverait que  $\sigma_{\varphi\varphi}$  a la même valeur. On en déduit d'ailleurs

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{R} = \frac{1}{E}(\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{\varphi\varphi}) = \frac{1-\nu}{E}\sigma_{\theta\theta} = \frac{pR}{2Et}(1-\nu)$$

d'où

$$u = \frac{pR^2}{2Et}(1-\nu)$$

**Exercice 26** Montrer que les hypothèses de Saint-Venant pour les poutres,

$$\sigma_x = \tau_{xy} = \sigma_y = 0$$

impliquent

$$\sigma_z = a_0(z) + xa_1(z) + ya_2(z)$$

où  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  sont des fonctions affines de  $z$  pour que la compatibilité soit vérifiée.

*Solution* - Les équations de Beltrami-Michell s'écrivent alors

1.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} &= 0\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\sigma_z = a_0(z) + x a_1(z) + y a_2(z)$$

2.

$$\begin{aligned}\Delta \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0 \\ \Delta \tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial z} &= 0 \Rightarrow \Delta \tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{da_1}{dz} = 0 \\ \Delta \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z} &= 0 \Rightarrow \Delta \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{da_2}{dz} = 0\end{aligned}$$

# Chapitre 6

## Torsion des poutres prismatiques

### 6.1 Notion de poutre

Une poutre est un corps *élancé*, c'est-à-dire qu'une de ses dimensions surpasse largement les autres (*fig. 6.1*). Nous placerons l'axe des  $z$  suivant la grande dimension. Dans une poutre prismatique, la section  $\Omega$  est indépendante de  $z$ . Nous placerons l'origine des axes  $Gx, Gy$  de la section au centre de gravité de celle-ci, dans les axes principaux d'inertie (le trièdre  $(G, x, y, z)$  est supposé dextrorsum). Dès lors,

$$\int_{\Omega} xd\Omega = \int_{\Omega} yd\Omega = \int_{\Omega} xyd\Omega = 0 \quad (6.1)$$

Nous noterons

$$\Omega = \int_{\Omega} 1d\Omega, \quad I_x = \int_{\Omega} x^2 d\Omega, \quad I_y = \int_{\Omega} y^2 d\Omega \quad (6.2)$$

La surface latérale de la poutre, y compris celle des trous éventuels, est appelée *manteau*.

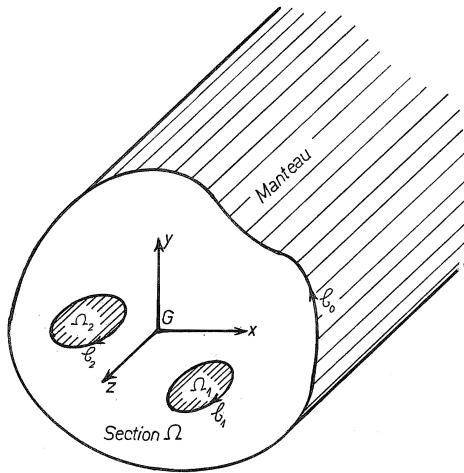


FIGURE 6.1 – Poutre

## 6.2 Torsion uniforme

Les hypothèses de la théorie classique des poutres de Barré de Saint-Venant [4, 3] sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = 0, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0 \\ \text{Pas de charge sur le manteau} \\ \text{Pas de forces de volume} \end{array} \right. \quad (6.3)$$

Parmi les différents états de contrainte possibles dans ce cadre, la torsion uniforme se caractérise par la condition supplémentaire

$$\sigma_z = 0 \quad (6.4)$$

### 6.3 Équations d'équilibre

Les équations générales d'équilibre<sup>1</sup>

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \end{cases}$$

se réduisent, dans le cadre des hypothèses ci-dessus, à

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (6.5)$$

et

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (6.6)$$

On satisfait à ces trois conditions en posant

$$\tau_{xz} = G\theta \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -G\theta \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (6.7)$$

$\theta$  étant une constante arbitraire et  $\varphi$ , une fonction de  $x$  et  $y$  seulement, appelée *fonction de Prandtl* [70]. Elle est définie à une constante additive près.

Sur le manteau, on a  $n_z = 0$ , et les conditions d'équilibre s'écrivent

$$\begin{cases} n_x \sigma_x + n_y \tau_{xy} = 0 \\ n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_y = 0 \\ n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} = 0 \end{cases}$$

Vu les hypothèses, il ne subsiste que la seule équation

$$n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} = 0 \quad (6.8)$$

En termes de la fonction de Prandtl, elle s'écrit

$$n_x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - n_y \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (6.9)$$

Définissons sur le contour (*fig. 6.2*) le vecteur unitaire tangent positif comme

---

1. Dans les applications, nous utiliserons librement les notations d'ingénieur  $\sigma_x = \sigma_{xx}$ ,  $\tau_{xy} = \sigma_{xy}$  et  $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$ , etc., pour autant qu'aucune confusion ne soit possible avec les déformations de Green

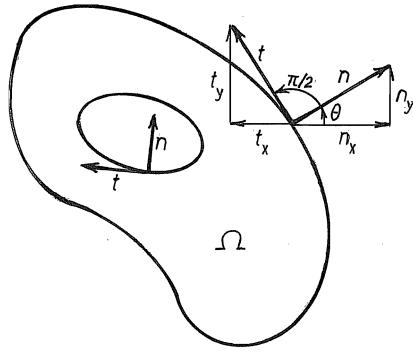


FIGURE 6.2 – Normale et tangente sur le contour

obtenu par rotation du vecteur normal extérieur de  $\pi/2$  selon la règle du tire-bouchon autour de l'axe  $z$ . Alors, comme

$$n_x = \cos \theta, \quad n_y = \sin \theta$$

on obtient

$$\begin{aligned} t_x &= \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin \theta &= -n_y \\ t_y &= \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos \theta &= n_x \end{aligned}$$

L'équation (6.9) devient alors

$$t_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + t_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

ce qui signifie que  $\varphi$  est constante sur toute composante connexe du contour  $\mathcal{C}$ . Appelant  $\mathcal{C}_0$  le contour extérieur, on fixe la constante arbitraire dans la définition (6.7) de la fonction de Prandtl par la condition

$$\varphi|_{\mathcal{C}_0} = 0 \tag{6.10}$$

Sur les contours intérieurs  $\mathcal{C}_i$ , on peut seulement dire

$$\varphi|_{\mathcal{C}_i} = \varphi_i \text{ (cte)} \tag{6.11}$$

On peut également prolonger la fonction  $\varphi$  à  $\Omega_0 = \Omega \cup (\bigcup_i \Omega_i)$  où les  $\Omega_i$  sont les trous, en posant

$$\begin{cases} \hat{\varphi} &= \varphi \quad \text{dans } \Omega \\ \hat{\varphi} &= \varphi_i \quad \text{dans } \Omega_i \end{cases}$$

La fonction prolongée  $\hat{\varphi}$  permet dans bien des cas de simplifier le problème.

Proposons-nous de calculer les résultantes du champ de cisaillement. Les efforts tranchants sont définis par

$$T_x = \int_{\Omega} \tau_{xz} d\Omega, \quad T_y = \int_{\Omega} \tau_{yz} d\Omega$$

On a

$$\begin{aligned} T_x &= G\theta \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\Omega = G\theta \int_{\Omega_0} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} d\Omega = G\theta \int_{C_0} \hat{\varphi} n_y ds = 0 \\ T_y &= -G\theta \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\Omega = -G\theta \int_{\Omega_0} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x} d\Omega = -G\theta \int_{C_0} \hat{\varphi} n_x ds = 0 \end{aligned}$$

La résultante du torseur des contraintes tangentielle étant nulle, il possède donc un moment indépendant du point par rapport auquel il est calculé. Ce moment, dit *moment de torsion*, vaut (*fig. 6.3*)

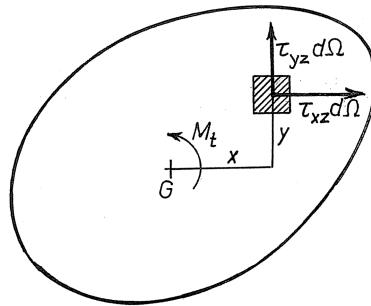


FIGURE 6.3 – Moment de torsion

$$M_t = \int_{\Omega} (x\tau_{yz} - y\tau_{xz}) d\Omega$$

On a

$$\begin{aligned}
 M_t &= -G\theta \int_{\Omega} \left( x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) d\Omega \\
 &= -G\theta \int_{\Omega_0} \left( x \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x} + y \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} \right) d\Omega \\
 &= -G\theta \int_{C_0} (xn_x + yn_y)\hat{\varphi} ds + G\theta \int_{\Omega_0} \hat{\varphi} \left( \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} \right) d\Omega \\
 &= 2G\theta \int_{\Omega_0} \hat{\varphi} d\Omega
 \end{aligned}$$

Ce résultat peut s'écrire

$$J = \frac{M_t}{G\theta} = 2 \int_{\Omega_0} \hat{\varphi} d\Omega \quad (6.12)$$

## 6.4 Compatibilité

Nous exprimerons la compatibilité à l'aide des équations de Beltrami-Michell

$$D_{kk}\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} D_{ij}\sigma_{kk} = 0$$

Tenant compte des hypothèses et des équations d'équilibre (6.5), on obtient

$$\nabla^2 \tau_{xz} = 0, \quad \nabla^2 \tau_{yz} = 0 \quad (6.13)$$

en notant

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (6.14)$$

Ces équations, qui s'écrivent encore

$$\nabla^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \nabla^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

impliquent

$$\nabla^2 \varphi = C = cte \quad (6.15)$$

## 6.5 Choix de la constante C

Partant des relations générales

$$\frac{1}{G}\tau_{xz} = \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{1}{G}\tau_{yz} = \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

on obtient, en termes de  $\varphi$ ,

$$\theta \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad -\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (6.16)$$

Dérivons la première de ces équations par rapport à  $y$ , et la seconde par rapport à  $x$ . On obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \end{aligned}$$

En sommant ces deux équations, on élimine  $w$ , ce qui donne

$$\theta \nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0$$

Le groupement entre parenthèses n'est autre que le double du vecteur rotation local  $\omega$  autour de l'axe de la poutre. On a donc

$$2 \frac{\partial \omega}{\partial z} = -\theta \nabla^2 \varphi = -C\theta$$

Par conséquent, la *torsion*  $\partial \omega / \partial z$  des fibres est constante par rapport à  $z$ . On s'aperçoit qu'en posant

$$C = -2 \quad (6.17)$$

on a simplement

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = \theta \quad (6.18)$$

ce qui donne à  $\theta$  une signification simple. L'équation régissant la fonction de Prandtl est alors

$$\nabla^2 \varphi = -2 \quad (6.19)$$

## 6.6 Intégration des déplacements $u$ et $v$

Les déplacements  $u$  et  $v$  vérifient les équations constitutives

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) = 0 \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x - \nu\sigma_z) = 0 \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} = 0 \quad (6.22)$$

De plus,

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega$$

ce qui, couplé avec (6.22), donne

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = \omega \quad (6.23)$$

Les équations (6.20) et (6.21) entraînent alors

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

c'est-à-dire que *l'angle de rotation  $\omega$  a une valeur unique dans toute la section.*  
On déduit donc de (6.23), (6.20) et (6.21)

$$u = u_0(z) - \omega(z)y, \quad v = v_0(z) + \omega(z)x \quad (6.24)$$

Examinons la variation de  $u_0$  et  $v_0$ . Des équations

$$\tau_{xz} = G \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \tau_{yz} = G \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

on déduit

$$0 = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = G \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right), \quad 0 = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = G \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right)$$

et comme

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y) = 0$$

on obtient, à partir de (6.24) et (6.18)

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}, \quad 0 = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} \quad (6.25)$$

Par conséquent,

$$u_0 = A_1 + A_2 z, \quad v_0 = B_1 + B_2 z \quad (6.26)$$

Les paramètres  $A_1$  et  $A_2$  régissent un déplacement de corps rigide et peuvent donc être omis. On a alors

$$u = A_2 z - (\theta z)y, \quad v = B_2 z + (\theta z)x$$

Posant

$$y_T = \frac{A_2}{\theta}, \quad x_T = -\frac{B_2}{\theta}$$

on obtient

$$u = -\theta z(y - y_T), \quad v = \theta z(x - x_T) \quad (6.27)$$

$x_T$  et  $y_T$  définissant les coordonnées d'un centre de torsion.

## 6.7 Intégration du déplacement $w$

Éliminant  $\varphi$  entre les deux équations (6.16), on obtient, par (6.20) et (6.22)

$$\begin{aligned} \theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned}$$

d'où

$$\nabla^2 w = 0 \quad (6.28)$$

Les conditions aux limites relatives au champ  $w$  s'obtiennent comme suit : par (6.16),

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \theta \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} = \theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + y - y_T \right) \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= -\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} = -\theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + x - x_T \right) \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \theta \left[ n_x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - n_y \frac{\partial \varphi}{\partial x} + n_x(y - y_T) - n_y(x - x_T) \right]$$

soit

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \theta \left[ t_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + t_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + n_x(y - y_T) - n_y(x - x_T) \right]$$

Comme  $\partial \varphi / \partial t = 0$  sur le contour, on a simplement

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \theta [n_x(y - y_T) - n_y(x - x_T)] \quad (6.29)$$

Tenant compte du fait que

$$n_x = t_y = \frac{d}{dt}(y - y_T) \text{ et } n_y = -t_x = -\frac{d}{dt}(x - x_T)$$

on peut encore écrire

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \theta \frac{d}{dt} \left[ \frac{(x - x_T)^2 + (y - y_T)^2}{2} \right] \quad (6.30)$$

Dans le cas de sections *multiplement connexes*, l'intégrabilité de  $w$  n'est pas garantie sans condition. En effet, on a, sur les  $C_i$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= t_x \frac{\partial w}{\partial x} + t_y \frac{\partial w}{\partial y} \\ &= \theta \left[ t_x \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + y - y_T \right) - t_y \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + x - x_T \right) \right] \\ &= -\theta \left[ n_y \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + y - y_T \right) + n_x \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + x - x_T \right) \right] \\ &= -\theta \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial n} + n_x(x - x_T) + n_y(y - y_T) \right] \end{aligned}$$

La condition d'intégrabilité de  $w$  est alors

$$0 = \int_{C_i} \frac{\partial w}{\partial t} ds = -\theta \left\{ \int_{C_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds + \int_{C_i} [n_x(x - x_T) + n_y(y - y_T)] ds \right\}$$

soit, en faisant usage de la normale intérieure  $\mathbf{n}^- = -\mathbf{n}$  (fig. 6.4),

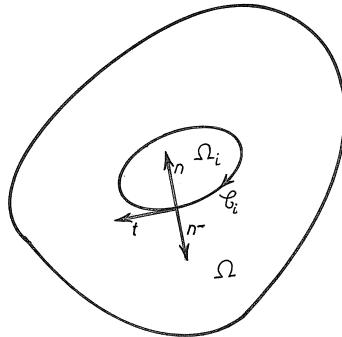


FIGURE 6.4 – Normale intérieure

$$\begin{aligned}
 \int_{C_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds &= \int_{C_i} [n_x^-(x - x_T) + n_y^-(y - y_T)] ds \\
 &= \int_{\Omega_i} \left[ \frac{\partial}{\partial x}(x - x_T) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_T) \right] d\Omega \\
 &= 2\Omega_i
 \end{aligned}$$

Ainsi, dans le cas de sections multiplement connexes, la fonction de Prandtl devra encore vérifier les conditions

$$\int_{C_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 2\Omega_i \quad (6.31)$$

pour que l'unicité du déplacement  $w$  soit assurée.

## 6.8 Principe variationnel régissant la fonction de Prandtl étendue

De l'équation

$$\nabla^2 \varphi = -2 \text{ dans } \Omega$$

on déduit, comme  $\varphi|_{C_0} = 0$  et  $\varphi|_{C_i} = \varphi_i$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (\nabla^2 \varphi + 2) \delta \varphi d\Omega \\ &= \sum_i \delta \varphi_i \int_{C_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \mathbf{grad} \varphi \cdot \mathbf{grad} \delta \varphi d\Omega + 2 \int_{\Omega} \delta \varphi d\Omega \end{aligned}$$

Tenant compte du fait que

$$\int_{C_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 2\Omega_i$$

on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \sum_i \delta \varphi_i \Omega_i + 2 \int_{\Omega} \delta \varphi d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{grad} \varphi \cdot \mathbf{grad} \delta \varphi d\Omega \\ &= 2 \int_{\Omega_0} \delta \hat{\varphi} d\Omega - \int_{\Omega_0} \mathbf{grad} \hat{\varphi} \cdot \mathbf{grad} \delta \hat{\varphi} d\Omega \end{aligned}$$

ou encore,

$$\delta \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} |\mathbf{grad} \hat{\varphi}|^2 d\Omega - 2 \int_{\Omega_0} \hat{\varphi} d\Omega \right] = 0 \quad (6.32)$$

les variations  $\delta \hat{\varphi}$  étant astreintes aux conditions

$$\delta \hat{\varphi}|_{C_0} = 0, \quad \delta \hat{\varphi}|_{\Omega_i} = \delta \varphi_i (cte) \quad (6.33)$$

Ce principe variationnel peut d'ailleurs servir de base pour démontrer l'unicité de la solution  $\hat{\varphi}$ . En effet, supposons qu'il existe deux solutions  $\hat{\varphi}^{(1)}$  et  $\hat{\varphi}^{(2)}$ . Elles vérifient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \mathbf{grad} \hat{\varphi}^{(1)} \cdot \mathbf{grad} \delta \hat{\varphi}^{(1)} d\Omega &= 2 \int_{\Omega_0} \delta \hat{\varphi}^{(1)} d\Omega \\ \int_{\Omega_0} \mathbf{grad} \hat{\varphi}^{(2)} \cdot \mathbf{grad} \delta \hat{\varphi}^{(2)} d\Omega &= 2 \int_{\Omega_0} \delta \hat{\varphi}^{(2)} d\Omega \end{aligned}$$

Soustrayant ces équations variationnelles, on obtient

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{grad}(\hat{\varphi}^{(1)} - \hat{\varphi}^{(2)}) \cdot \mathbf{grad} \delta \hat{\varphi}^{(1)} d\Omega = 0$$

ou, en posant  $\hat{\psi} = \hat{\varphi}^{(1)} - \hat{\varphi}^{(2)}$ ,

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{grad} \hat{\psi} \cdot \mathbf{grad} \delta \hat{\varphi}^{(1)} d\Omega = 0$$

Or,  $\hat{\psi}$  est une variation  $\delta\hat{\varphi}$  admissible, car elle vérifie les conditions (6.33) :

$$\begin{aligned}\hat{\psi}|_{\mathcal{C}_0} &= \hat{\varphi}^{(1)}|_{\mathcal{C}_0} - \hat{\varphi}_{\mathcal{C}_0}^{(2)} = 0 - 0 = 0 \\ \hat{\psi}|_{\Omega_i} &= \hat{\varphi}^{(1)}|_{\Omega_i} - \hat{\varphi}^{(2)}|_{\Omega_i} = \hat{\varphi}_i - \hat{\varphi}_i = \hat{\psi}_i(\text{cte})\end{aligned}$$

On a donc

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{grad}\hat{\psi} \cdot \mathbf{grad}\hat{\psi} d\Omega = 0$$

ce qui implique

$$\mathbf{grad}\hat{\psi} = 0 \text{ dans } \Omega_0$$

et, comme  $\hat{\psi}|_{\mathcal{C}_0} = 0$ , on a  $\hat{\psi} = 0$ .

## 6.9 Principe variationnel régissant le gauchissement

Rappelons que l'on a

$$\begin{aligned}\nabla^2 w &= 0 \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial n} &= \theta[n_x(y - y_T) - n_y(x - x_T)] \text{ sur } \mathcal{C}\end{aligned}$$

Il est donc naturel de poser

$$w = \theta g_T \tag{6.34}$$

ce qui définit le *gauchissement*  $g_T$ , ce qui donne

$$\begin{aligned}\nabla^2 g_T &= 0 \text{ dans } \Omega \\ n_x \left( \frac{\partial g_T}{\partial x} - y + y_T \right) + n_y \left( \frac{\partial g_T}{\partial y} + x - x_T \right) &= 0 \text{ sur } \mathcal{C}\end{aligned}$$

Il est encore équivalent d'écrire l'équation dans  $\Omega$  sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial g_T}{\partial x} - y + y_T \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial g_T}{\partial y} + x - x_T \right) = 0 \tag{6.35}$$

Pour éviter de faire apparaître explicitement  $x_T$  et  $y_T$ , définissons la fonction auxiliaire

$$g = g_T + y_T x - x_T y \tag{6.36}$$

Elle vérifie les équations

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial g}{\partial x} - y \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial g}{\partial y} + x \right) &= 0 \text{ dans } \Omega \\ n_x \left( \frac{\partial g}{\partial x} - y \right) + n_y \left( \frac{\partial g}{\partial y} + x \right) &= 0 \text{ sur } \mathcal{C}\end{aligned}\quad (6.37)$$

On a donc

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial g}{\partial x} - y \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial g}{\partial y} + x \right) \right] \delta g d\Omega \\ &= \int_{\mathcal{C}} \left[ n_x \left( \frac{\partial g}{\partial x} - y \right) + n_y \left( \frac{\partial g}{\partial y} + x \right) \right] \delta g ds \\ &\quad - \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial x} - y \right) \frac{\partial \delta g}{\partial x} + \left( \frac{\partial g}{\partial y} + x \right) \frac{\partial \delta g}{\partial y} \right] \delta g d\Omega\end{aligned}$$

L'intégrale de contour est nulle et comme

$$\delta \left( \frac{\partial g}{\partial x} - y \right) = \frac{\partial \delta g}{\partial x}, \quad \delta \left( \frac{\partial g}{\partial y} + x \right) = \frac{\partial \delta g}{\partial y}$$

on obtient le principe

$$\delta \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial x} - y \right)^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial y} + x \right)^2 \right] d\Omega \right\} = 0 \quad (6.38)$$

Ici encore, ce principe variationnel permet d'assurer l'unicité de la solution. Supposons en effet qu'il existe deux solutions  $g_1$  et  $g_2$ . Elles vérifient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial g_1}{\partial x} - y \right) \frac{\partial \delta g}{\partial x} + \left( \frac{\partial g_1}{\partial y} + x \right) \frac{\partial \delta g}{\partial y} \right] d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial g_2}{\partial x} - y \right) \frac{\partial \delta g}{\partial x} + \left( \frac{\partial g_2}{\partial y} + x \right) \frac{\partial \delta g}{\partial y} \right] d\Omega &= 0\end{aligned}$$

Soustrayons ces deux équations et posons  $\psi = g_1 - g_2$ . Il vient

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \delta g}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \delta g}{\partial y} \right) d\Omega = 0$$

Or,  $\psi$  est une variation  $\delta g$  admissible, ce qui implique

$$\int_{\Omega} |\mathbf{grad} \psi|^2 d\Omega = 0$$

soit

$$\mathbf{grad}\psi = 0$$

ou encore,

$$\psi = cte$$

La solution est donc définie à une constante additive près. On fixe cette constante en imposant la condition

$$\int_{\Omega} gd\Omega = 0 \quad (6.39)$$

qui exprime que *le déplacement d'ensemble est nul.*

## 6.10 Centre de torsion

Le moment est venu de choisir un centre de torsion  $(x_T, y_T)$ . On exigera à cet effet que

$$\int_{\Omega} g_T x d\Omega = 0, \quad \int_{\Omega} g_T y d\Omega = 0 \quad (6.40)$$

c'est-à-dire que les rotations moyennes de la section s'annulent. Comme

$$g_T = g - y_T x + x_T y$$

on obtient les conditions

$$y_T = \frac{1}{I_x} \int_{\Omega} x g d\Omega, \quad x_T = -\frac{1}{I_y} \int_{\Omega} y g d\Omega \quad (6.41)$$

Ces coordonnées définissent le centre de torsion de Weinstein-Kappus [36, 28].

## 6.11 Méthodes de résolution

Dans ce qui suit, nous présenterons d'abord quelques solutions exactes. Malheureusement, la théorie ne s'applique facilement qu'à quelques sections simples. Pour des géométries plus compliquées, on ne peut s'en tirer sans faire d'approximations. Un outil fécond pour construire celles-ci est constitué par les deux principes variationnels ci-dessus.

En approchant la fonction de Prandtl, on obtient une théorie *sous-estimant*<sup>2</sup> la raideur de torsion, mesurée par le module

$$J = \frac{M_t}{G\theta} = 2 \int_{\Omega_0} \varphi d\Omega$$

Au contraire, en approchant les gauchissements, on *surestime* la raideur de torsion<sup>3</sup>. Le module  $J$  se calcule alors par

$$J = \frac{M_t}{G\theta} = \int_{\Omega} \left[ x \left( \frac{\partial g}{\partial y} + x \right) - y \left( \frac{\partial g}{\partial x} - y \right) \right] d\Omega \quad (6.42)$$

Notant que, pour  $\delta g = g$ , on obtient par (6.38)

$$0 = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial g}{\partial y} \left( \frac{\partial g}{\partial y} + x \right) + \frac{\partial g}{\partial x} \left( \frac{\partial g}{\partial x} - y \right) \right] d\Omega \quad (6.43)$$

on a encore

$$J = \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial y} + x \right)^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial x} - y \right)^2 \right] d\Omega \quad (6.44)$$

On remarquera d'ailleurs que la relation (6.43) implique

$$\int_{\Omega} \left( x \frac{\partial g}{\partial y} - y \frac{\partial g}{\partial x} \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 \right] d\Omega$$

si bien que

$$J = I_x + I_y - \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 \right] d\Omega$$

Ainsi, la raideur de torsion de Barré de Saint-Venant est inférieure à la raideur de torsion de Coulomb ( $I_x + I_y$ ) chaque fois que le gauchissement  $g$  diffère de zéro.

En effectuant deux calculs approchés, l'un pour la fonction de Prandtl, l'autre par le gauchissement  $g$ , on obtient deux valeurs différentes de  $J$ . Leur proximité relative permet de juger de la qualité des approximations.

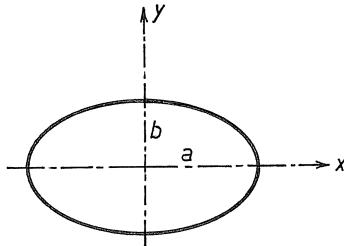


FIGURE 6.5 – Ellipse

## 6.12 Solutions exactes

### 6.12.1 Torsion d'une poutre à section elliptique

La fonction de Prandtl doit s'annuler sur le contour de l'ellipse de la figure 6.5 dont le contour a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Mais on a justement

$$\nabla^2 \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 2 \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$$

si bien que la fonction

$$\varphi(x, y) = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

vérifie l'équation

$$\nabla^2 \varphi = -2$$

et constitue donc la solution cherchée. On en déduit les contraintes

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= G\theta \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2G\theta \frac{a^2 y}{a^2 + b^2} \\ \tau_{yz} &= -G\theta \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2G\theta \frac{b^2 x}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

---

2. La justification de cette assertion sera donnée dans le chapitre relatif aux principes variationnels en élasticité.

3. Idem.

En ce qui concerne la raideur de torsion, il faut calculer

$$J = 2 \int_{\Omega} \varphi d\Omega = 2 \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \int_{\Omega} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) d\Omega$$

Posons

$$x = a\rho \cos \theta, \quad y = b\rho \sin \theta$$

avec

$$\rho \in ]0, 1[, \quad \theta \in ]0, 2\pi[$$

Le jacobien vaut  $ab\rho$  et on obtient

$$J = 2 \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \cdot 2\pi \int_0^1 (1 - \rho^2) d\rho = \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

Vu la symétrie du profil par rapport aux axes, le centre de torsion devra se trouver à l'origine. Le gauchissement  $g$  vérifie les équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + y = -\frac{2a^2 y}{a^2 + b^2} + y = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} y \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - x = -\frac{2b^2 x}{a^2 + b^2} - x = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} x \end{aligned}$$

ce qui donne, en tenant compte de la condition  $\int_{\Omega} g d\Omega = 0$ ,

$$g = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} xy$$

### 6.12.2 Torsion d'une poutre à section rectangulaire

Supposons que, dans la section représentée en figure 6.6, on ait  $b \leq a$  et définissons la coordonnée auxiliaire

$$\eta = y + \frac{b}{2}$$

On cherche alors une solution par la méthode des séries simples de Lévy, qui consiste à poser

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) \sin \frac{n\pi\eta}{b}$$

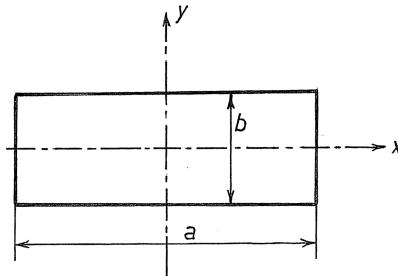


FIGURE 6.6 – Rectangle

ce qui permet de vérifier dès le départ les conditions de nullité de  $\varphi$  en  $y = \pm b/2$ . On a immédiatement

$$\nabla^2 \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n'' - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} A_n \right) \sin \frac{n\pi\eta}{b}$$

Pour résoudre l'équation  $\nabla^2 \varphi = -2$ , il convient de développer la fonction unité en série de sinus. En raison de l'orthogonalité des sinus,

$$\int_0^b \sin \frac{m\pi\eta}{b} \sin \frac{n\pi\eta}{b} d\eta = \frac{b}{2} \delta_{mn}$$

on obtient, pour

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi\eta}{b}$$

les relations

$$\frac{b}{2} \alpha_n = \int_0^b \sin \frac{n\pi\eta}{b} d\eta = -\frac{b}{n\pi} \left[ \cos \frac{n\pi\eta}{b} \right]_0^b = \frac{b}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

ce qui donne

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

si bien que

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\eta}{b}$$

L'équation à résoudre se développe donc en

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \left( A_n'' - \frac{n^2\pi^2}{b^2} A_n + \frac{8}{n\pi} \right) \sin \frac{n\pi\eta}{b} + \sum_{\substack{n=2 \\ \text{pair}}}^{\infty} \left( A_n'' - \frac{n^2\pi^2}{b^2} A_n \right) \sin \frac{n\pi\eta}{b} = 0$$

Pour  $n$  pair, on obtient

$$A_n'' - \frac{n^2\pi^2}{b^2} A_n = 0$$

ce qui donne

$$A_n = B_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} + C_n \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b}$$

Les conditions  $A_n(\pm a/2) = 0$  mènent alors à  $B_n = C_n = 0$ .

Pour  $n$  impair, l'équation s'écrit

$$A_n'' - \frac{n^2\pi^2}{b^2} A_n = -\frac{8}{n\pi}$$

et admet pour solution particulière

$$A_n = \frac{8b^2}{n^3\pi^3}$$

d'où la solution générale

$$A_n = B_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} + C_n \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} + \frac{8b^2}{n^3\pi^3}$$

Les conditions de nullité aux extrémités  $x = \pm a/2$  s'écrivent

$$B_n \operatorname{ch} \left( \pm \frac{n\pi a}{2b} \right) + C_n \operatorname{sh} \left( \pm \frac{n\pi a}{2b} \right) + \frac{8b^2}{n^3\pi^3} = 0$$

ce qui implique  $C_n = 0$  et

$$B_n = -\frac{8b^2}{n^3\pi^3} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}}$$

Il vient donc

$$A_n = \frac{8b^2}{n^3\pi^3} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} \right)$$

et la solution finale s'écrit

$$\varphi = \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} \right) \sin \frac{n\pi \eta}{b}$$

A ce stade, il est intéressant de remarquer que la série

$$-\frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi \eta}{b}$$

est la primitive seconde de la série représentant la fonction  $(-2)$ , nulle en  $\eta = 0$  et  $\eta = b$ . Elle est donc égale à

$$\eta(\eta - b) = y^2 - \frac{b^2}{4}$$

ce qui permet d'écrire  $\varphi$  sous la forme

$$\varphi = \left( \frac{b^2}{4} - y^2 \right) - \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^3} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi(y + b/2)}{b}$$

La série restante se présente alors comme une correction aux extrémités des deux premiers termes qui constituent la solution-limite pour  $b/a \rightarrow \infty$ .

Une simple dérivation conduit à l'expression des contraintes :

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{xz}}{G\theta} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2y - \frac{8b}{\pi^2} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} \cos \frac{n\pi(y + b/2)}{b} \\ \frac{\tau_{yz}}{G\theta} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{8b}{\pi^2} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi(y + b/2)}{b} \end{aligned}$$

La valeur maximale de  $\tau_{xz}$  est obtenue en  $x = 0$ ,  $y = \pm b/2$  et vaut

$$|\tau_{xz}|_{max} = G\theta \left( b + \frac{8b}{\pi^2} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} \right)$$

Calculons à présent la raideur de torsion. On a

$$\begin{aligned}
 J &= 2 \int_{\Omega} \varphi d\Omega \\
 &= \frac{ab^3}{2} - 2a \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy \\
 &\quad - \frac{16b^2}{\pi^3} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^3} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} dx \int_{-b/2}^{b/2} \sin \frac{n\pi(y + b/2)}{b} dy \\
 &= \frac{ab^3}{2} - \frac{ab^3}{6} - \frac{16b^2}{\pi^3} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^3} \frac{2b}{n\pi} \operatorname{th} \frac{n\pi a}{2b} \frac{b}{n\pi} \cdot 2
 \end{aligned}$$

soit finalement

$$J = \frac{ab^3}{3} \left( 1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{b}{a} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{th} \frac{n\pi a}{2b} \right)$$

Dans cette expression, le facteur entre parenthèses constitue la correction par rapport à la valeur  $ab^3/3$  qui est la limite du module de torsion pour  $a/b \rightarrow \infty$ .

On peut approcher la valeur ci-dessus par une expression plus simple que l'on obtient de la manière suivante. A partir de  $n = 3$ , on a nécessairement (puisque  $a \geq b$ )

$$\frac{n\pi a}{2b} \geq \frac{3\pi}{2} = 4,712$$

Pour cette valeur de l'argument, la tangente hyperbolique vaut 0,99984 et diffère donc de l'unité de moins de deux dix-millièmes. On a donc

$$J \approx \frac{ab^3}{3} \left[ 1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{b}{a} \left( \operatorname{th} \frac{\pi a}{2b} + \sum_{\substack{n=3 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^5} \right) \right]$$

Il suffit alors de calculer, à partir des résultats bien connus relatifs aux séries de Riemann [1]

$$\sum_{\substack{n=3 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^5} = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^5} - 1 = 1,00425376279513961613\dots - 1 = 4,253763\dots 10^{-3}$$

ce qui donne la formule

$$J \approx \frac{ab^3}{3} \left[ 1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{b}{a} \left( \operatorname{th} \frac{\pi a}{2b} + 4,524 \cdot 10^{-3} \right) \right]$$

qui a au moins le mérite de ne plus contenir de série à calculer.

Venons-en au calcul du gauchissement. Ici encore, la symétrie implique que le centre de torsion coïncide avec le centre de gravité. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + y \\ &= -y - \frac{8b}{\pi^2} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} \cos \frac{n\pi(y+b/2)}{b} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - x \\ &= -x + \frac{8b}{\pi^2} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi(y+b/2)}{b} \end{aligned}$$

d'où

$$g = -xy - \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \cos \frac{n\pi(y+b/2)}{b}$$

Il se décompose en un terme relatif aux sections longues – le terme  $(-xy)$  – et un effet de bord à décroissance rapide si  $a/b$  est grand.

### 6.12.3 Trou circulaire axial très petit dans un arbre cylindrique

La section est représentée en figure 6.7. Le trou circulaire est supposé très petit, c'est-à-dire que la distance  $r$  du centre du trou au contour de l'arbre vérifie

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 = \varepsilon \ll 1$$

pour tout  $\beta$ . L'équation du contour est

$$r^2 + b^2 - 2br \cos \beta = R^2$$

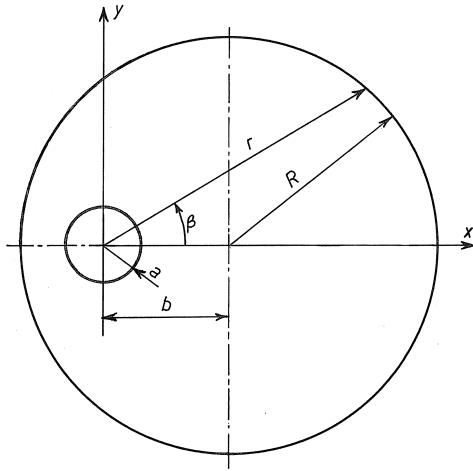


FIGURE 6.7 – Arbre avec trou

Par ailleurs, la fonction

$$\varphi_0 = -\frac{1}{2}r^2 + br \cos \beta + \frac{R^2 - b^2}{2}$$

est une solution particulière de l'équation  $\nabla^2 \varphi = -2$ , car il en est ainsi de  $(-r^2/2)$ , et les autres termes sont de la forme  $\Re F(z)$  avec

$$F(z) = bz + \frac{R^2 - b^2}{2}$$

et donc harmoniques. Visiblement, la fonction  $\varphi_0$  s'annule sur le contour extérieur. Par contre, sur le cercle de rayon  $a$ , elle vaut

$$\varphi_0 = -\frac{a^2}{2} + ab \cos \beta + \frac{R^2 - b^2}{2}$$

ce qui n'est pas constant. Mais en y ajoutant la fonction

$$\varphi_1 = -\Re \left( \frac{a^2 b}{z} \right) = -\frac{a^2 b}{r} \cos \beta$$

on obtient une fonction constante sur le cercle de rayon  $a$ , à savoir

$$\varphi = -\frac{r^2}{2} + b \cos \beta \left( r - \frac{a^2}{r} \right) + \frac{R^2 - b^2}{2}$$

La valeur de cette fonction sur le contour intérieur est

$$-\frac{a^2}{2} + \frac{R^2 - b^2}{2} = \mathcal{O}(R^2)$$

tandis que sur le contour extérieur, sa valeur absolue est

$$\left| -\frac{a^2 b \cos \beta}{r} \right| \leq \frac{a^2}{r^2} br = \mathcal{O}(\varepsilon R^2)$$

très petite devant la précédente, et tendant vers zéro avec  $\varepsilon$ .

Les contraintes valent alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{G\theta} \tau_{rz} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = -b \sin \beta \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \\ \frac{1}{G\theta} \tau_{\beta z} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = r - b \cos \beta \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \end{aligned}$$

Sur le contour intérieur, on a

$$\tau_{\beta z} = G\theta(a - 2b \cos \beta)$$

et cette contrainte atteint pour  $\beta = \pi$  son maximum

$$\tau_{max} = G\theta(2b + a)$$

Pour  $a \rightarrow 0$ , le coefficient de concentration de contrainte vaut donc

$$\alpha_k = \frac{\tau_{max}}{G\theta b} = 2$$

Sur le contour extérieur, on a

$$\begin{aligned} \tau_{rz}^2 + \tau_{\beta z}^2 &= (G\theta)^2 \left[ r^2 - 2br \cos \beta \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + b^2 \cos^2 \beta \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + b^2 \sin^2 \beta \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \right] \end{aligned}$$

et, pour  $a \rightarrow 0$ ,

$$\tau^2 = (G\theta)^2 [r^2 - 2br \cos \beta + b^2] = (G\theta)^2 R^2$$

Il n'y a donc pas de supplément de contrainte sur le contour. En conclusion, l'influence du trou sur la résistance ne se fait sentir que si

$$2G\theta b > G\theta R$$

c'est-à-dire si

$$b > \frac{R}{2}$$

### 6.13 Solutions approchées (fonction de Prandtl)

On peut obtenir de nombreuses solutions approchées en torsion en considérant des fonctions d'essai  $\hat{\varphi}$  nulles sur  $\mathcal{C}_0$  et constantes sur les  $\Omega_i$ , dépendant de quelques paramètres :

$$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(x, y; \alpha_1, \dots, \alpha_k)$$

On détermine alors les paramètres de manière que la fonctionnelle

$$\mathcal{B}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \int_{\Omega_0} \left[ \frac{1}{2} |\mathbf{grad} \hat{\varphi}|^2 - 2\hat{\varphi} \right] d\Omega_0$$

soit minimale, ce qui conduit aux  $k$  équations

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \alpha_j} = 0$$

Pour déterminer les  $\alpha_j$ . C'est la *méthode de Rayleigh-Ritz*. Les  $\alpha_j$  étant obtenus, on peut déterminer le champ de cisaillement par

$$\boldsymbol{\tau} = (\tau_{xz}, \tau_{yz}) = \mathbf{grad} \hat{\varphi} \times \mathbf{e}_z$$

et la constante  $J$  par

$$J = \int_{\Omega_0} \hat{\varphi} d\Omega_0$$

On notera que dans le cas d'une solution approchée, la constante  $J$  est toujours *sous-estimée* (d'autant moins que la solution est plus proche de la réalité).

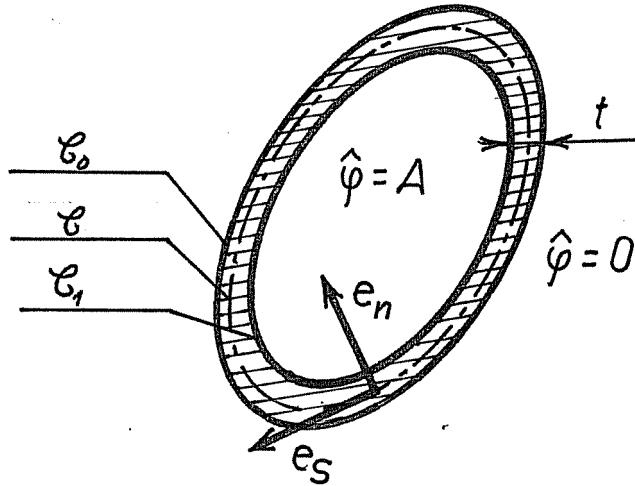


FIGURE 6.8 – Théorie de Bredt

### 6.13.1 Théorie de Bredt

Pour traiter les caissons à parois minces à une cellule (*fig. 6.8*), Bredt [7] a proposé la solution approchée suivante. On peut admettre que la variation de  $\hat{\varphi}$ , entre le contour  $\mathcal{C}_0$  où cette fonction est nulle et le contour  $\mathcal{C}_1$  où elle prend une valeur constante  $A$ , est linéaire. On a alors

$$\mathbf{grad}\hat{\varphi} = \frac{A}{t} \mathbf{e}_n$$

$\mathbf{e}_n$  étant le vecteur unitaire normal à la courbe moyenne  $\mathcal{C}$  de la paroi, pointant vers l'intérieur. On en déduit immédiatement

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_0} |\mathbf{grad}\hat{\varphi}|^2 d\Omega_0 = \frac{A^2}{2} \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{t^2} t ds = \frac{A^2}{2} \int_{\mathcal{C}} \frac{ds}{t}$$

et

$$2 \int_{\Omega_0} \hat{\varphi} d\Omega_0 = 2A\Omega_1 + 2 \int_{\mathcal{C}} \frac{A}{2} t ds = 2AS$$

en notant  $S$  la surface contenue dans la courbe  $\mathcal{C}$ . Il vient finalement

$$\mathcal{B}(A) = \frac{1}{2} A^2 \int_{\mathcal{C}} \frac{ds}{t} - 2AS$$

Le minimum est obtenu pour

$$A = \frac{2S}{\int_{\mathcal{C}} \frac{ds}{t}}$$

On en déduit

$$J = 2AS = \frac{4S^2}{\int_{\mathcal{C}} \frac{ds}{t}}$$

résultat connu sous le nom de *deuxième formule de Bredt*. Par ailleurs, la contrainte de cisaillement, toujours tangentielle, vaut

$$\begin{aligned}\tau &= G\theta \frac{A}{t} \\ &= G\theta \frac{2S}{\int_{\mathcal{C}} \frac{ds}{t}} \frac{1}{t} \\ &= G\theta J \frac{1}{2St} \\ &= \frac{M_t}{2St}\end{aligned}$$

C'est la *première formule de Bredt*.

### 6.13.2 Caissons multicellulaires

La même méthode permet de traiter avec autant de facilité le problème de la torsion d'un caisson multicellulaire. Illustrons la méthode sur le caisson à trois cellules de la figure 6.9. Le cisaillement dans la courbe  $\mathcal{C}_{10}$  vaudra  $G\theta\varphi_1/t$ , celui qui règne sur  $\mathcal{C}_{12}$  vaudra  $G\theta(\varphi_1 - \varphi_2)/t$ , etc. On a donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int_{\Omega_0} |\mathbf{grad} \hat{\varphi}|^2 d\Omega_0 &= \frac{\varphi_1^2}{2} \int_{\mathcal{C}_{10}} \frac{ds}{t} + \frac{\varphi_2^2}{2} \int_{\mathcal{C}_{20}} \frac{ds}{t} + \frac{\varphi_3^2}{2} \int_{\mathcal{C}_{30}} \frac{ds}{t} \\ &\quad + \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2} \int_{\mathcal{C}_{12}} \frac{ds}{t} + \frac{(\varphi_2 - \varphi_3)^2}{2} \int_{\mathcal{C}_{23}} \frac{ds}{t}\end{aligned}$$

et

$$2 \int_{\Omega_0} \hat{\varphi} d\Omega_0 = 2\varphi_1 S_1 + 2\varphi_2 S_2 + 2\varphi_3 S_3$$

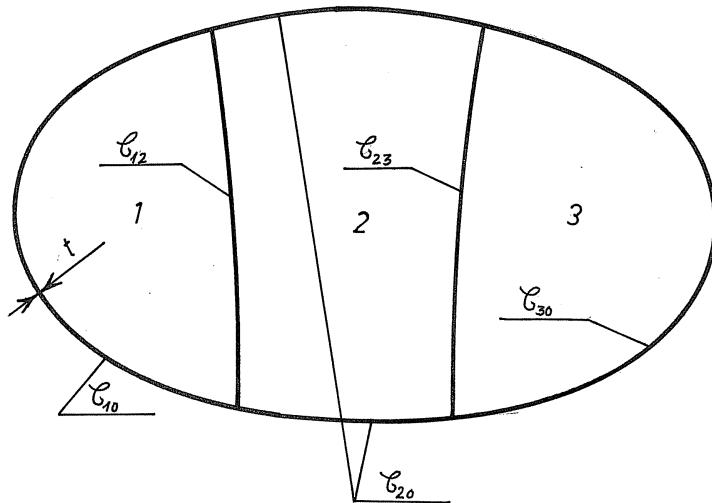


FIGURE 6.9 – Caisson à trois cellules

$S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  étant les surfaces arrêtées à mi-paroi. La minimisation de la différence  $\mathcal{B}$  de ces deux expressions mène aux trois équations

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \varphi_1} &= \left( \int_{C_{10}} \frac{ds}{t} + \int_{C_{12}} \frac{ds}{t} \right) \varphi_1 - \left( \int_{C_{12}} \frac{ds}{t} \right) \varphi_2 - 2S_1 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \varphi_2} &= - \left( \int_{C_{12}} \frac{ds}{t} \right) \varphi_1 + \left( \int_{C_{20}} \frac{ds}{t} + \int_{C_{12}} \frac{ds}{t} + \int_{C_{23}} \frac{ds}{t} \right) \varphi_2 \\ &\quad - \left( \int_{C_{23}} \frac{ds}{t} \right) \varphi_3 - 2S_2 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \varphi_3} &= - \left( \int_{C_{23}} \frac{ds}{t} \right) \varphi_2 + \left( \int_{C_{30}} \frac{ds}{t} + \int_{C_{23}} \frac{ds}{t} \right) \varphi_3 - 2S_3 = 0\end{aligned}$$

permettant de déterminer aisément  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$ . Ceux-ci connus, on a simplement

$$J = 2(\varphi_1 S_1 + \varphi_2 S_2 + \varphi_3 S_3)$$

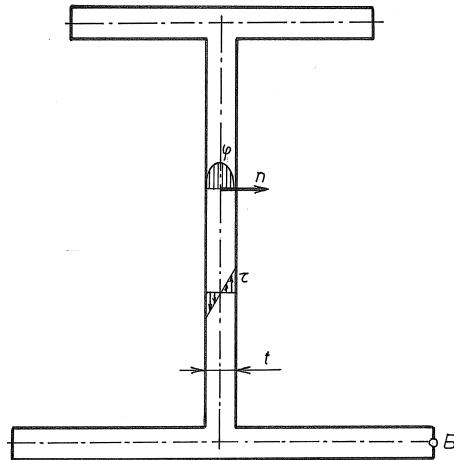


FIGURE 6.10 – Poutre à parois minces ouverte

### 6.13.3 Poutres à parois minces ouvertes

Dans le cas de poutre à parois minces ouvertes comme celle de la figure 6.10, la fonction de Prandtl doit s'annuler sur tout le contour. On écrira donc

$$\varphi = A \left( 1 - \frac{4n^2}{t^2} \right) \text{ avec } A = \text{cte}$$

En principe, il faudrait encore tenir compte de la nullité de  $\varphi$  aux extrémités comme le point  $B$  de la figure. Cependant, cet effet de bord se fait sur une longueur très faible, de l'ordre de l'épaisseur  $t$ , et nous le négligerons à titre d'*approximation supplémentaire*<sup>4</sup>. Le champ de cisaillement se déduit par dérivation :

$$|\mathbf{grad}\varphi| = \frac{8An}{t^2}$$

Il est linéaire sur l'épaisseur. Calculons les deux termes de la fonctionnelle  $\mathcal{B}$  à minimiser :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{grad}\varphi|^2 d\Omega = 32A^2 \int_C \frac{t^3}{12t^4} ds = \frac{8}{3} A^2 \int_C \frac{ds}{t}$$

---

4. Strictement parlant, il s'agit d'une violation des principes de la méthode de Rayleigh-Ritz.

et

$$2 \int_{\Omega} \varphi d\Omega = 2A \int_{\mathcal{C}} \frac{2}{3} t ds = \frac{4}{3} A \int_{\mathcal{C}} t ds$$

ce qui donne

$$\mathcal{B}(A) = \frac{8}{3} A^2 \int_{\mathcal{C}} \frac{ds}{t} - \frac{4}{3} A \int_{\mathcal{C}} t ds$$

Le minimum de cette fonction de A s'obtient pour

$$0 = \frac{d\mathcal{B}}{dA} = \frac{16}{3} A \int_{\mathcal{C}} \frac{ds}{t} - \frac{4}{3} \int_{\mathcal{C}} t ds$$

ce qui donne

$$A = \frac{1}{4} \frac{\int_{\mathcal{C}} t ds}{\int_{\mathcal{C}} \frac{ds}{t}}$$

On obtient donc

$$J = \frac{4}{3} A \int_{\mathcal{C}} t ds = \frac{1}{3} \frac{(\int_{\mathcal{C}} t ds)^2}{\int_{\mathcal{C}} \frac{ds}{t}}$$

et

$$\tau_{max} = G\theta |\mathbf{grad} \varphi|_{max} = G\theta \frac{4A}{t_{min}} = \frac{G\theta}{t_{min}} \frac{\int_{\mathcal{C}} t ds}{\int_{\mathcal{C}} \frac{ds}{t}}$$

ou, en termes du moment de torsion,

$$\tau_{max} = \frac{3M_t}{t_{min} \int_{\mathcal{C}} t ds}$$

Pour une épaisseur  $t$  constante, on a simplement

$$J = \frac{1}{3} Ght^3$$

avec

$$h = \int_{\mathcal{C}} ds$$

et

$$\tau = G\theta t = \frac{3M_t}{ht^2}$$

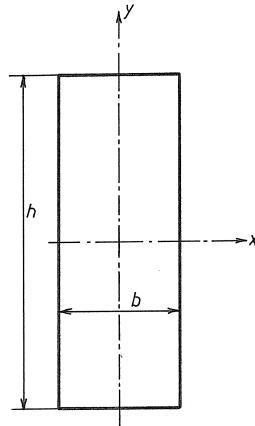


FIGURE 6.11 – Section rectangulaire

#### 6.13.4 Solution approchée pour les sections rectangulaires

Pour la section rectangulaire représentée en figure 6.11, on suppose  $b < h$ . On cherche une solution de la forme

$$\varphi(x, y) = \left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right) f(y)$$

$f(y)$  étant une fonction à déterminer, avec la condition  $f(\pm h/2) = 0$ . On a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{8x}{b^2} f(y) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right) f'(y) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{grad} \varphi|^2 d\Omega &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} dy \int_{-b/2}^{b/2} \left[ \frac{64x^2}{b^4} f^2 + \left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right)^2 f'^2 \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{16}{3b} f^2 + \frac{8}{15} b f'^2 \right) dy \end{aligned}$$

On a d'autre part

$$2 \int_{\Omega} \varphi d\Omega = 2 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{2}{3} b f dy$$

La condition d'extremum mène à l'équation

$$-\frac{8}{15} b f'' + \frac{16}{3b} f - \frac{4}{3} b = 0$$

soit

$$f'' - \frac{10}{b^2} f = -\frac{5}{2}$$

La solution générale de l'équation homogène s'écrit

$$f_0 = A \operatorname{sh} \sqrt{\frac{10}{b}} \left( y - \frac{h}{2} \right) + B \operatorname{sh} \sqrt{\frac{10}{b}} \left( y + \frac{h}{2} \right)$$

et une solution particulière de l'équation complète est visiblement donnée par

$$f_1 = \frac{b^2}{4}$$

ce qui donne au total

$$f = f_0 + f_1 = A \operatorname{sh} \sqrt{\frac{10}{b}} \left( y - \frac{h}{2} \right) + B \operatorname{sh} \sqrt{\frac{10}{b}} \left( y + \frac{h}{2} \right) + \frac{b^2}{4}$$

Les conditions aux limites sont

$$\text{en } y = h/2 \quad : \quad B \operatorname{sh} \sqrt{\frac{10}{b^2}} h = -\frac{b^2}{4}$$

$$\text{en } y = -h/2 \quad : \quad -A \operatorname{sh} \sqrt{\frac{10}{b^2}} h = -\frac{b^2}{4}$$

ce qui donne, en notant, pour la concision,  $\beta = \frac{\sqrt{10}}{b}$ ,

$$f = \frac{b^2}{4} \left[ 1 + \frac{\operatorname{sh} \beta \left( y - \frac{h}{2} \right)}{\operatorname{sh} \beta h} - \frac{\operatorname{sh} \beta \left( y + \frac{h}{2} \right)}{\operatorname{sh} \beta h} \right]$$

On notera que

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \beta \left( y - \frac{h}{2} \right) - \operatorname{sh} \beta \left( y + \frac{h}{2} \right) &= \operatorname{sh} \beta y \operatorname{ch} \beta \frac{h}{2} - \operatorname{sh} \beta \frac{h}{2} \operatorname{ch} \beta y \\ &\quad - \operatorname{sh} \beta y \operatorname{ch} \beta \frac{h}{2} - \operatorname{sh} \beta \frac{h}{2} \operatorname{ch} \beta y \\ &= -2 \operatorname{sh} \beta \frac{h}{2} \operatorname{ch} \beta y \end{aligned}$$

et que

$$\operatorname{sh} \beta h = 2 \operatorname{sh} \beta \frac{h}{2} \operatorname{ch} \beta \frac{h}{2}$$

ce qui donne finalement

$$f = \frac{b^2}{4} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \beta y}{\operatorname{ch} \beta \frac{h}{2}} \right)$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} J &= \frac{b^3}{3} \int_{-h/2}^{h/2} f dy \\ &= \frac{b^3}{3} \left( h - \frac{2 \operatorname{sh} \beta \frac{h}{2}}{\beta \operatorname{ch} \beta \frac{h}{2}} \right) \\ &= \frac{b^3}{3} \left( h - \frac{2}{\beta} \operatorname{th} \beta \frac{h}{2} \right) \end{aligned}$$

soit, en réintroduisant la valeur de  $\beta$ ,

$$J = \frac{1}{3} h b^3 \left( 1 - \frac{b}{h \sqrt{2,5}} \operatorname{th} \frac{h \sqrt{2,5}}{b} \right)$$

On a par ailleurs

$$\tau_{max} = \frac{4}{b} f(0) G \theta = G \theta b \left( 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{h \sqrt{2,5}}{b}} \right)$$

Cette solution approchée est très proche de la réalité, comme le montre le tableau suivant :

	$h/b$	1	1,5	2	3	4	$\infty$
$J/(hb^3)$	approché	0,140	0,195	0,228	0,263	0,281	0,333
	exact	0,141	0,196	0,229	0,263	0,281	0,333
$\tau_{max}/(G\theta b)$	approché	0,605	0,815	0,915	0,983	0,996	1,000
	exact	0,675	0,852	0,928	0,977	0,990	1,000

## 6.14 Solutions approchées (gauchissement)

La fonctionnelle à minimiser est ici

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial x} - y \right)^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial y} + x \right)^2 \right] d\Omega$$

la fonction  $g$  n'étant astreinte à aucune condition aux limites à priori. Le résultat de la minimisation fournit la fonction  $g$  à une constante additive près, que l'on fixe par la condition

$$\int_{\Omega} gd\Omega = 0$$

On peut alors obtenir le centre de torsion par les relations

$$x_T = -\frac{1}{I_y} \int_{\Omega} gyd\Omega, \quad y_T = \frac{1}{I_x} \int_{\Omega} gxd\Omega$$

La raideur de torsion est alors donnée par

$$J = I_p - \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 \right] = 2\mathcal{A}$$

et les contraintes valent

$$\tau_{xz} = G\theta \left( \frac{\partial g}{\partial x} - y \right), \quad \tau_{yz} = G\theta \left( \frac{\partial g}{\partial y} + x \right)$$

### 6.14.1 Solution élémentaire pour les sections massives

La forme la plus simple que l'on puisse imaginer pour la fonction  $g$  est

$$g = Axy$$

Cette fonction a bien son intégrale nulle. On obtient

$$\mathcal{A} = \int_{\Omega} [(A-1)^2y^2 + (A+1)^2x^2] d\Omega = (A-1)^2I_y + (A+1)^2I_x$$

Minimisons par rapport à la constante  $A$  :

$$0 = \frac{d\mathcal{A}}{dA} = 2(A-1)I_y + 2(A+1)I_x$$

soit

$$A = \frac{I_y - I_x}{I_p}$$

Pour la raideur de torsion, on obtient

$$J = 2\mathcal{A} = \left( \frac{I_y - I_x - I_x - I_y}{I_p} \right)^2 I_y + \left( \frac{I_y - I_x + I_x + I_y}{I_p} \right)^2 I_x$$

soit

$$J = \frac{4I_x I_y}{I_p}$$

Les contraintes de cisaillement valent

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= G\theta(A - 1)y = -2G\theta \frac{I_x}{I_p}y \\ \tau_{yz} &= G\theta(A + 1)y = 2G\theta \frac{I_y}{I_p}x\end{aligned}$$

Enfin,

$$|\tau| = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = 2G\theta \frac{\sqrt{I_x^2 y^2 + I_y^2 x^2}}{I_p}$$

$r$  étant la distance à l'axe.

Cette théorie, exacte pour une section elliptique, représente la correction la plus élémentaire que l'on puisse apporter à celle de Coulomb. Elle donne souvent une première approximation raisonnable. Examinons par exemple le cas des sections rectangulaires. On a

$$I_x = \frac{hb^3}{12}, \quad I_y = \frac{bh^3}{12}$$

Nous poserons, pour fixer les idées,  $h \geq b$ . On a donc

$$I_p = \frac{bh^3}{12} \left(1 + \frac{b^2}{h^2}\right)$$

et

$$J = \frac{1}{3}hb^3 \frac{1}{1 + \frac{b^2}{h^2}}$$

Quant aux contraintes, elles valent, selon cette théorie,

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= -2G\theta \frac{b^2}{h^2} \frac{y}{1 + \frac{b^2}{h^2}} \\ \tau_{yz} &= 2G\theta \frac{x}{1 + \frac{b^2}{h^2}}\end{aligned}$$

Le maximum de leur résultante a lieu pour  $x = b/2$ ,  $y = h/2$  et vaut

$$\tau_{max} = G\theta b \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{h^2}}}$$

En comparaison, la théorie de Coulomb donne la valeur

$$\tau_{max} = G\theta\sqrt{b^2 + h^2} = G\theta b \sqrt{1 + \frac{h^2}{b^2}}$$

On peut donc établir le tableau suivant :

	$h/b$	1	1,5	2	3	4	$\infty$
$J/(hb^3)$	approché	0,167	0,231	0,267	0,300	0,314	0,333
	exact	0,141	0,196	0,229	0,263	0,281	0,333
	Coulomb	0,167	0,271	0,417	0,833	1,42	$\infty$
$\tau_{max}/(G\theta b)$	approché	0,707	0,832	0,894	0,949	0,970	1,000
	exact	0,675	0,852	0,928	0,977	0,990	1,000
	Coulomb	1,000	1,803	2,236	3,162	4,123	$\infty$

On remarquera cependant que les contraintes maximales sont mal positionnées.

### 6.14.2 Sections rectangulaires

On peut également approcher les sections rectangulaires en prenant un gauchissement de la forme

$$g(x, y) = yf(x)$$

en supposant que le grand côté  $h$  est dirigé suivant l'axe des  $x$ . L'autre côté a pour longueur  $b$ . On a alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} - y &= (f'(x) - 1)y \\ \frac{\partial g}{\partial y} + x &= f(x) + x \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{b^3}{12} (f' - 1)^2 + b(f + x)^2 \right] dx$$

Variant  $f$ , on obtient l'équation

$$-\frac{b^3}{12} f'' + bf + bx = 0$$

soit

$$f'' - \frac{12}{b^2} f = \frac{12}{b} x$$

et les conditions naturelles d'extrémité

$$\frac{b^3}{12}(f' - 1) = 0 \text{ en } x = \pm h/2$$

Une solution partielle de l'équation différentielle est

$$f = -x$$

Comme la solution générale de l'équation homogène associée est

$$f = A \operatorname{ch} \beta x + B \operatorname{sh} \beta x$$

avec

$$\beta = \frac{\sqrt{12}}{b}$$

on obtient comme solution générale de l'équation complète

$$f = -x + A \operatorname{ch} \beta x + B \operatorname{sh} \beta x$$

Les conditions d'extrémité sont

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{h}{2}\right) &= -1 + \beta A \operatorname{sh} \beta \frac{h}{2} + \beta B \operatorname{ch} \beta \frac{h}{2} = 1 \\ f'\left(-\frac{h}{2}\right) &= -1 - \beta A \operatorname{sh} \beta \frac{h}{2} + \beta B \operatorname{ch} \beta \frac{h}{2} = 1 \end{aligned}$$

On en déduit aisément  $A = 0$  et

$$B = \frac{2}{\beta \operatorname{ch} \beta \frac{h}{2}}$$

ce qui donne finalement

$$f = -x + 2 \frac{\operatorname{sh} \beta x}{\beta \operatorname{ch} \beta \frac{h}{2}}$$

Pour effectuer le calcul de  $J$ , notons que

$$\begin{aligned} J &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{b^3}{12}(f' - 1)f + b(f + x)f \right] dx \\ &\quad + \int_{-h/2}^{h/2} \left[ -\frac{b^3}{12}(f' - 1) + b(f + x)x \right] dx \end{aligned}$$

La première de ces intégrales est nulle, comme on s'en rend compte en posant  $\delta f = f$  dans la variation première de  $\mathcal{A}$ . Il suffit donc de calculer

$$\begin{aligned} - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{b^3}{12} (f' - 1) dx &= - \frac{b^3}{12} \int_{-h/2}^{h/2} 2 \left( \frac{\operatorname{ch} \beta x}{\operatorname{ch} \beta \frac{h}{2}} - 1 \right) dx \\ &= \frac{b^3}{12} \left( 2h - \frac{4}{\beta} \operatorname{th} \beta \frac{h}{2} \right) \\ &= \frac{hb^3}{6} - \frac{b^3}{3\beta} \operatorname{th} \beta \frac{h}{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} bx(f + x) dx &= \frac{2b}{\beta \operatorname{ch} \beta \frac{h}{2}} \int_{-h/2}^{h/2} x \operatorname{sh} \beta x dx \\ &= \frac{2b}{\beta \operatorname{ch} \beta \frac{h}{2}} \left\{ \left[ \frac{x \operatorname{ch} \beta x}{\beta} \right]_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\operatorname{ch} \beta x}{\beta} dx \right\} \\ &= \frac{2b}{\beta^2 \operatorname{ch} \beta \frac{h}{2}} \left[ 2 \frac{h}{2} \operatorname{ch} \beta \frac{h}{2} - \frac{2}{\beta} \operatorname{sh} \beta \frac{h}{2} \right] \\ &= \frac{hb^3}{6} - \frac{b^3}{3\beta} \operatorname{th} \beta \frac{h}{2} \end{aligned}$$

Au total, il vient

$$J = \frac{hb^3}{3} - \frac{2b^3}{3\beta} \operatorname{th} \beta \frac{h}{2} = \frac{hb^3}{3} \left( 1 - \frac{b}{h\sqrt{3}} \operatorname{th} \frac{h\sqrt{3}}{b} \right)$$

Il est intéressant de noter que ce résultat est très proche de celui de la section 6.13.4. La seule différence est le facteur  $\sqrt{3} = 1,732$  au lieu de  $\sqrt{2,5} = 1,581$ . La présente théorie est un petit peu plus raide que celle de la section 6.13.4 :

	$h/b$	1	1,5	2	3	4	$\infty$
$J/(hb^3)$	$\hat{\varphi}$	0,140	0,195	0,228	0,263	0,280	0,333
	exact	0,141	0,196	0,229	0,263	0,281	0,333
	$g$	0,153	0,207	0,237	0,269	0,285	0,333

## 6.15 Exercices

**Exercice 27** Étudier la torsion d'une barre dont la section est un triangle équilatéral (problème de Barré de Saint-Venant).

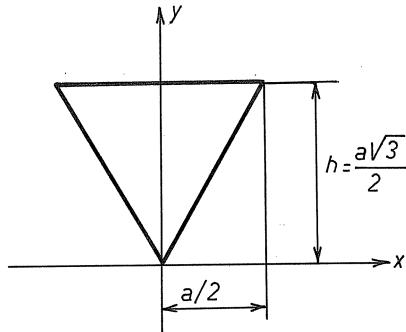


FIGURE 6.12 – Triangle équilatéral

*Suggestion* - La fonction de Prandtl est le produit des équations des trois côtés, à un facteur constant près.

*Solution* - Dans le système d'axes de la figure 6.12, les équations des trois côtés sont

$$y = x\sqrt{3}, \quad y = -x\sqrt{3}, \quad y = h$$

Essayons une fonction de Prandtl de la forme

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= K \left( y - x\sqrt{3} \right) \left( y + x\sqrt{3} \right) (y - h) \\ &= K (y^2 - 3x^2) (y - h) \\ &= K (y^3 - hy^2 - 3x^2y + 3hx^2)\end{aligned}$$

On obtient successivement

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= K(-6xy + 6hx) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= K(-6y + 6h) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= K(3y^2 - 2hy - 3x^2) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= K(6y - 2h)\end{aligned}$$

si bien que

$$\nabla^2 \varphi = K(-6y + 6h + 6y - 2h) = 4Kh = -2$$

à condition de poser

$$K = -\frac{1}{2h} = -\frac{1}{a\sqrt{3}}$$

Le résultat est donc

$$\varphi = -\frac{1}{2h}(y^3 - hy^2 - 3x^2y + 3hx^2)$$

Un examen des lignes de niveau de la fonction  $\varphi$  indique que la contrainte tangentielle est maximale au milieu des côtés. On a

$$\tau_{xz} = G\theta \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{2h}(3y^2 - 2hy - 3x^2)$$

et en  $x = 0, y = h$ ,

$$\tau_{xz} = -\frac{G\theta}{2h}(3h^2 - 2h^2) = -\frac{G\theta h}{2}$$

soit

$$\tau_{max} = \frac{G\theta h}{2} = \frac{G\theta a\sqrt{3}}{4} = 0,4330G\theta a$$

On calcule  $J$  par

$$\begin{aligned} J &= 2 \int_{\Omega} \varphi d\Omega \\ &= -\frac{1}{h} \int_0^h dy \int_{-y/\sqrt{3}}^{y/\sqrt{3}} (y^3 - hy^2 - 3x^2y + 3hx^2) dx \\ &= \frac{h^4}{15\sqrt{3}} \end{aligned}$$

soit encore

$$J = \frac{\sqrt{3}}{80}a^4$$

On a enfin

$$\frac{\tau_{max}}{M_t} = \frac{20}{a^3}$$

**Exercice 28** *Problème de Weber (1921)[94] - Étudier la torsion d'une barre ronde de diamètre  $b$  comportant une rainure semi-circulaire centrée sur la circonférence (fig. 6.13).*

- Chercher la fonction de Prandtl.*
- Rechercher la tension maximale.*
- Calculer le coefficient de concentration de contrainte*

$$\alpha_k = \frac{\tau_{max}}{G\theta b/2}$$

et sa limite pour  $a/b \rightarrow 0$ .

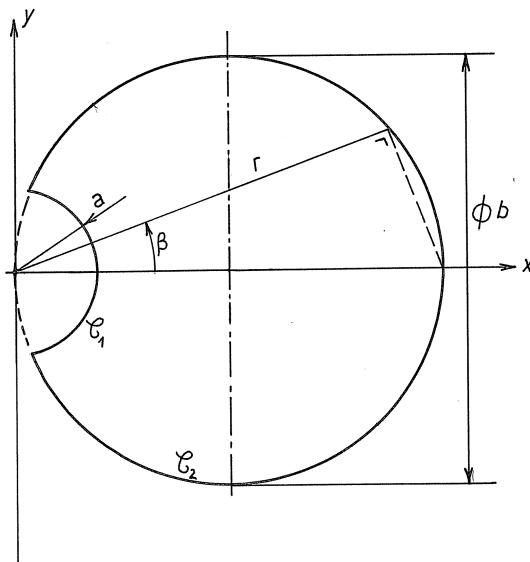


FIGURE 6.13 – Barre rainurée

*Suggestion pour le point a :*

- Équation de  $C_1 : r^2 - a^2 = 0$
- Équation de  $C_2 : r - a \cos \beta = 0$

Multiplier ces deux équations, diviser par  $r$ , multiplier le tout par une constante à déterminer, repasser en coordonnées cartésiennes, vérifier si l'équation de Prandtl est satisfaite

*Solution de c :* la limite du coefficient de concentration de contrainte est 2.

**Exercice 29** Exprimer, pour  $M_t = 20Nm$ , les contraintes dans la poutre à parois minces de la figure 6.14, aux points A, B, C et le rapport  $k = M_t/\theta$ . On donne :  $G = 80GPa$ .

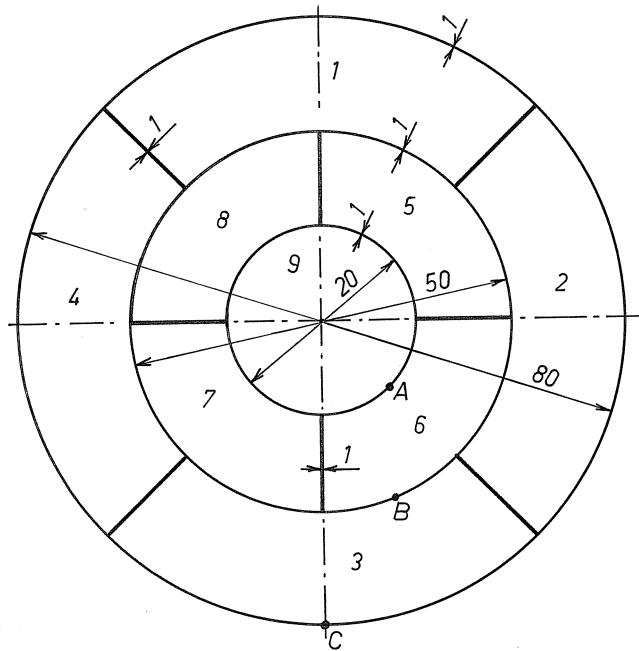


FIGURE 6.14 – Poutre à parois minces

*Solution* - Par symétrie, la fonction  $\hat{\varphi}$  ne prend que trois valeurs différentes dans les cellules, à savoir,

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4, \quad \varphi_5 = \varphi_6 = \varphi_7 = \varphi_8 \text{ et } \varphi_9$$

et les parois radiales ne jouent aucun rôle (si ce n'est le positionnement). On a donc

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_0} |\mathbf{grad} \hat{\varphi}|^2 d\Omega = \frac{1}{2} \frac{\varphi_1^2}{1} \pi \cdot 80 + \frac{1}{2} \frac{(\varphi_1 - \varphi_5)^2}{1} \pi \cdot 50 + \frac{1}{2} \frac{(\varphi_5 - \varphi_9)^2}{1} \pi \cdot 20$$

et

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega_0} \hat{\varphi} d\Omega &= \varphi_1 \pi \frac{80^2 - 50^2}{2} + \varphi_5 \pi \frac{50^2 - 20^2}{2} + \varphi_9 \pi \frac{20^2}{2} \\ &= 1950\pi\varphi_1 + 1050\pi\varphi_5 + 200\pi\varphi_9 \end{aligned}$$

ce qui conduit aux équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 130\varphi_1 - 50\varphi_5 & = & 1950 \\ -50\varphi_1 + 70\varphi_5 - 20\varphi_9 & = & 200 \\ -20\varphi_2 + 20\varphi_9 & = & 200 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

On en déduit

$$(3) \Rightarrow \varphi_9 = \varphi_5 + 10$$

$$(2) \text{ et } (3) \Rightarrow \varphi_5 = \varphi_1 + 25$$

et en conjuguant ce résultat avec (1),

$$\varphi_1 = 40$$

d'où

$$\varphi_1 = 40, \varphi_5 = 65, \varphi_9 = 75$$

Il en résulte

$$J = \pi(1950 \cdot 40 + 1050 \cdot 65 + 200 \cdot 75) = 506,6 \cdot 10^3 \text{ mm}^4 = 506,6 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$$

d'où

$$k = \frac{M_t}{\theta} = GJ = 80 \cdot 10^9 \cdot 506,6 \cdot 10^{-9} = 40530 \text{ Nm}^2/\text{rad}$$

On a alors

$$\begin{aligned} |\mathbf{grad}\hat{\varphi}|_A &= \frac{10}{1} = 10 \text{ mm} \\ |\mathbf{grad}\hat{\varphi}|_B &= \frac{25}{1} = 25 \text{ mm} \\ |\mathbf{grad}\hat{\varphi}|_C &= \frac{40}{1} = 40 \text{ mm} \end{aligned}$$

et pour  $M_t = 20 \text{ Nm} = 2 \cdot 10^4 \text{ Nmm}$ , on a

$$G\theta = \frac{M_t}{J} = 39,48 \cdot 10^{-3} \text{ N/mm}^2$$

On calcule alors les contraintes en  $A$ ,  $B$  et  $C$  par  $\tau = G\theta|\mathbf{grad}\hat{\varphi}|$ , ce qui donne

$$\tau_A = 0,3948 MPa$$

$$\tau_B = 0,9870 MPa$$

$$\tau_C = 1,579 MPa$$



# Chapitre 7

## Le problème de Boussinesq

### 7.1 Introduction

Le problème de Boussinesq [6] consiste à étudier un corps semi-infini soumis à une charge ponctuelle normale au plan qui le limite. En lui-même, ce problème n'a guère d'intérêt pratique, mais il constitue une solution élémentaire utile dans les problèmes de contact.

### 7.2 Système de coordonnées et équations

La symétrie du problème suggère l'usage de coordonnées sphériques ayant pour origine le point d'application de la charge (voir fig. 7.1). Toujours pour des raisons de symétrie, le déplacement  $u_\varphi$  doit être nul, de même que toute espèce de dérivées par rapport à la longitude  $\varphi$ . Nous utiliserons alors les équations de Navier, ce qui nécessite le calcul des opérateurs divergence et rotationnel. On a

$$\Theta = \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta u_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta u_\theta) \right] \quad (7.1)$$

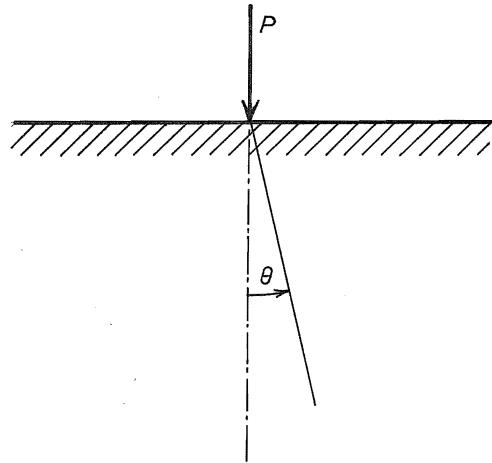


FIGURE 7.1 – Problème de Boussinesq

et

$$\begin{aligned} \text{rotu} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r \sin \theta \mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ u_r & r u_\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\varphi \\ &= 2\omega \mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

en posant

$$2\omega = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \quad (7.2)$$

Nous avons encore besoin de calculer

$$\begin{aligned} \text{rotrotu} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & 2\omega r \sin \theta \end{vmatrix} \\ &= \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\omega r \sin \theta) \mathbf{e}_r - \frac{2}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} (\omega r \sin \theta) \mathbf{e}_\theta \quad (7.3) \end{aligned}$$

L'introduction de ces résultats dans l'équation de Navier

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mathbf{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0 \quad (7.4)$$

conduit aux deux équations suivantes :

$$\text{Selon } \mathbf{e}_r : \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\omega r \sin \theta) = 0 \quad (7.5)$$

$$\text{Selon } \mathbf{e}_\theta : \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} (\omega r \sin \theta) = 0 \quad (7.6)$$

On peut simplifier quelque peu ce système en remarquant que l'équation (7.4) implique, par passage à la divergence, la suivante :

$$\Delta \operatorname{div} \mathbf{u} = \Delta \Theta = 0 \quad (7.7)$$

relation qui peut avantageusement remplacer l'une des deux précédentes.

## 7.3 Recherche de la solution générale

### 7.3.1 Forme générale de la solution

La solution générale procédera de la résolution des équations d'équilibre (7.5) et (7.6). Mais on peut d'emblée remarquer qu'un changement d'échelle ne peut changer la distribution angulaire des déplacements, car il n'affecte que les valeurs du rayon et non celles de la colatitude  $\theta$ . On peut donc donner aux déplacements la forme générale séparée

$$f(r)g(\theta)$$

Par ailleurs, la force appliquée  $P$  doit être équilibrée par des contraintes agissant sur l'hémisphère de rayon  $r$ , dont la surface vaut  $2\pi r^2$ . Les contraintes seront donc de la forme

$$\frac{h(\theta)}{r^2}$$

Les déplacements, combinaisons de primitives des contraintes, seront donc de la forme

$$u_r = \frac{A(\theta)}{r}, \quad u_\theta = \frac{B(\theta)}{r} \quad (7.8)$$

$A$  et  $B$  étant des fonctions de  $\theta$  seul. De ces expressions, on déduit par (7.1) et (7.2) celles de la divergence et du rotationnel : d'une part,

$$\Theta = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta A) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta B) \right] = \frac{C(\theta)}{r^2} \quad (7.9)$$

avec

$$C = A + B' + B \cot \theta \quad (7.10)$$

et, d'autre part,

$$\omega \sin \theta = \frac{\sin \theta}{2r} \left( \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{A'}{r} \right) = -\frac{D(\theta)}{r^2} \quad (7.11)$$

où

$$D = \frac{A' \sin \theta}{2} \quad (7.12)$$

### 7.3.2 Détermination de la fonction $C$

Exprimons à présent l'harmonicité de la divergence : on a d'abord

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} \Theta &= \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{C}{r^2} \right) + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{C}{r^2} \right) \\ &= -2 \frac{C}{r^3} \mathbf{e}_r + \frac{C'}{r^3} \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \Delta \Theta &= \operatorname{div} \mathbf{grad} \Theta \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( -2r^2 \sin \theta \frac{C}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( r \sin \theta \frac{C'}{r^3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ 2 \frac{C}{r^2} \sin \theta + \frac{C''}{r^2} \sin \theta + \frac{C'}{r^2} \cos \theta \right] \end{aligned}$$

La nullité de cette expression s'écrit

$$C'' + C' \cot \theta + 2C = 0 \quad (7.13)$$

Cette équation différentielle linéaire à coefficients variables admet visiblement la solution particulière suivante :

$$C_1 = \cos \theta$$

La méthode générale de résolution des équations différentielles linéaires voudrait que l'on recherche une seconde solution particulière de la forme

$$C_2 = z(\theta) \cos \theta$$

mais en réalité, on pourra résoudre le présent problème en se limitant à la solution

$$C = a \cos \theta \quad (7.14)$$

$a$  étant une constante à déterminer.

### 7.3.3 Détermination de la fonction $D$

Nous utiliserons à présent l'équation (7.6) qui, par (7.9) et (7.10), devient

$$\frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{1}{r^3} C' - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{D}{r} \right) = 0$$

soit

$$\frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{C'}{r^3} + \frac{1}{r^3 \sin \theta} D = 0$$

ou encore

$$D = -\frac{1-\nu}{1-2\nu} C' \sin \theta \quad (7.15)$$

Combinant cette relation avec (7.14), on obtient

$$D = \frac{1-\nu}{1-2\nu} a \sin^2 \theta \quad (7.16)$$

### 7.3.4 Calcul de la fonction $A$

On déduit alors la fonction  $A$  de l'équation (7.12) :

$$A' = \frac{2D}{\sin \theta} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} a \sin \theta$$

d'où

$$A = -\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} a \cos \theta + b \quad (7.17)$$

$b$  étant une constante à déterminer.

### 7.3.5 Calcul de la fonction $B$

En vertu de la relation (7.10), la fonction  $B$  vérifie l'équation

$$B' + B \cotg \theta = C - A = a + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} a \cos \theta - b$$

soit

$$B' + B \cotg \theta = \frac{3-4\nu}{1-2\nu} a \cos \theta - b \quad (7.18)$$

La solution générale  $B_1$  de l'équation homogène associée qui s'écrit encore

$$\frac{dB_1}{B_1} = -\cotg \theta d\theta = -\frac{\cos \theta d\theta}{\sin \theta}$$

est donnée par

$$\ln B_1 = -\ln \sin \theta + \ln c$$

ou encore, par

$$B_1 = \frac{c}{\sin \theta} \quad (7.19)$$

Nous chercherons alors une solution particulière de l'équation complète par la méthode de variation des constantes, ce qui revient à la chercher sous la forme

$$B_2 = \frac{E(\theta)}{\sin \theta} \quad (7.20)$$

Ceci mène à l'équation

$$\frac{E'}{\sin \theta} - \frac{E \cos \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{E \cotg \theta}{\sin \theta} = \frac{3-4\nu}{1-2\nu} a \cos \theta - b$$

soit

$$E' = \frac{3-4\nu}{1-2\nu} a \sin \theta \cos \theta - b \sin \theta$$

ce qui entraîne

$$E = \frac{3-4\nu}{1-2\nu} a \frac{\sin^2 \theta}{2} + b \cos \theta \quad (7.21)$$

Rassemblant les résultats (7.19), (7.20) et (7.21), on obtient

$$B = \frac{c}{\sin \theta} + \frac{3-4\nu}{2(1-2\nu)} a \sin \theta + b \cotg \theta \quad (7.22)$$

Mais cette expression ne peut être admise telle quelle, car en  $\theta = 0$ , elle donnerait un déplacement  $u_\theta$  infini pour tout  $r$ , du fait du  $\sin \theta$  aux dénominateurs des deux termes extrêmes. Il est donc nécessaire d'imposer une liaison entre  $b$  et  $c$  garantissant que

$$\lim_{\theta=0} \frac{b \cos \theta + c}{\sin \theta} \neq \infty$$

Ceci ne sera réalisé que moyennant la condition  $c = -b$  qui, introduite dans les deux derniers termes du second membre de (7.22), donne

$$b \frac{\cos \theta - 1}{\sin \theta} = b \frac{\cos^2 \theta - 1}{\sin \theta (\cos \theta + 1)} = - \frac{b \sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

et ramène donc  $B$  à l'expression suivante :

$$B = \frac{3 - 4\nu}{2(1 - 2\nu)} a \sin \theta - b \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \quad (7.23)$$

### 7.3.6 Expression générale des déplacements

Les relations (7.17) et (7.23) permettent d'écrire

$$u_r = - \frac{2(1 - \nu)}{1 - 2\nu} a \frac{\cos \theta}{r} + \frac{b}{r} \quad (7.24)$$

$$u_\theta = \frac{3 - 4\nu}{2(1 - \nu)} a \frac{\sin \theta}{r} - \frac{b}{r} \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \quad (7.25)$$

### 7.3.7 Expression générale des déformations

On a

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{a \cos \theta}{r^2} - \frac{b}{r^2} \quad (7.26)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\ &= \frac{3-4\nu}{2(1-2\nu)} a \frac{\cos \theta}{r^2} - \frac{b}{r^2} \frac{\cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{(1+\cos \theta)^2} \end{aligned} \quad (7.27)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{4-4\nu}{2(1-2\nu)} a \frac{\cos \theta}{r^2} + \frac{b}{r^2} \frac{1+2\cos \theta + \cos^2 \theta}{(1+\cos \theta)^2} \\ &= -\frac{1}{2(1-2\nu)} a \frac{\cos \theta}{r^2} + \frac{b}{r^2} \frac{\cos \theta}{1+\cos \theta} \end{aligned} \quad (7.28)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varphi &= \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r} \cotg \theta \\ &= \frac{a \cos \theta}{2(1-2\nu)r^2} (3-4\nu-4+4\nu) + \frac{b}{r^2} \frac{1+\cos \theta - \cos \theta}{1+\cos \theta} \\ &= -\frac{1}{2(1-2\nu)} \frac{a \cos \theta}{r^2} + \frac{b}{r^2} \frac{1}{1+\cos \theta} \end{aligned} \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) \\ &= \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{a}{r^2} \sin \theta - \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{a}{r^2} \sin \theta + 2 \frac{b}{r^2} \frac{\sin \theta}{1+\cos \theta} \\ &= -\frac{a \sin \theta}{r^2} + \frac{b}{r^2} \frac{2 \sin \theta}{1+\cos \theta} \end{aligned} \quad (7.30)$$

$$\gamma_{\theta\varphi} = 0 \quad (7.31)$$

$$\gamma_{r\varphi} = 0 \quad (7.32)$$

### 7.3.8 Expression générale des contraintes

Partant de la relation de Hooke

$$\sigma_{ij} = 2G \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{ll} \delta_{ij} \right)$$

notons d'abord que

$$\varepsilon_{ll} = \Theta = \frac{C}{r^2} = \frac{a \cos \theta}{r^2}$$

On obtient alors aisément

$$\frac{\sigma_r}{2G} = \frac{a \cos \theta}{r^2} \frac{2 - \nu}{1 - 2\nu} - \frac{b}{r^2} \quad (7.33)$$

$$\frac{\sigma_\theta}{2G} = -\frac{a \cos \theta}{2r^2} + \frac{b}{r^2} \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta} \quad (7.34)$$

$$\frac{\sigma_\varphi}{2G} = -\frac{a \cos \theta}{2r^2} + \frac{b}{r^2} \frac{1}{1 + \cos \theta} \quad (7.35)$$

$$\frac{\tau_{r\theta}}{2G} = -\frac{a \sin \theta}{r^2} + \frac{2b}{r^2} \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \quad (7.36)$$

$$\tau_{\theta\varphi} = 0 \quad (7.37)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0 \quad (7.38)$$

## 7.4 Conditions aux limites

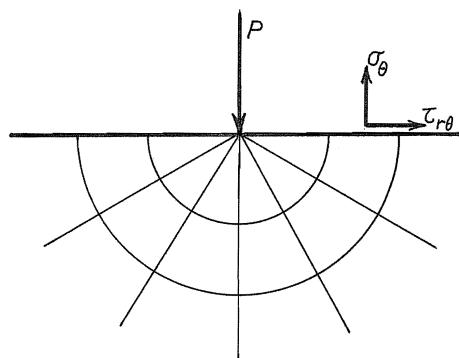


FIGURE 7.2 – Conditions sur la surface libre

Pour  $r > 0$ , les conditions sur la surface libre sont (fig. 7.2)

$$\sigma_\theta|_{\theta=\pm\pi/2} = 0, \quad \tau_{r\theta}|_{\theta=\pm\pi/2} = 0$$

On notera que la condition portant sur  $\sigma_\theta$  est automatiquement vérifiée. Quant à la nullité de  $\tau_{r\theta}$ , elle nécessite

$$-a + 2b = 0$$

soit

$$b = \frac{a}{2} \quad (7.39)$$

Il faut à présent exprimer  $a$  en termes de la charge  $P$ . Pour ce faire, on notera que la résultante des contraintes sur n'importe quel hémisphère centré sur le point d'application de la charge doit équilibrer  $P$ . Ainsi que le montre la

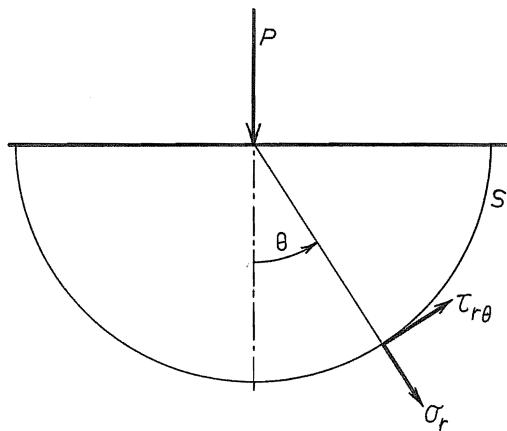


FIGURE 7.3 – Équilibre global

figure 7.3, cette condition s'écrit

$$\int_S (\tau_{r\theta} \sin \theta - \sigma_r \cos \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = P$$

ou, en tenant compte de la symétrie par rapport à  $\varphi$ ,

$$P = \int_0^{\pi/2} (\tau_{r\theta} \sin \theta - \sigma_r \cos \theta) 2\pi r^2 \sin \theta d\theta \quad (7.40)$$

Nous ferons le calcul en séparant les termes contenant  $a$  et les termes contenant  $b$  :

**a) Termes contenant  $a$** 

$$\begin{aligned}
 P_a &= 2\pi Ga \int_0^{\pi/2} \left( -\sin^3 \theta - 2 \frac{2-\nu}{1-2\nu} \cos^2 \theta \sin \theta \right) d\theta \\
 &= -2\pi Ga \int_0^{\pi/2} \left[ (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \frac{3}{1-2\nu} \cos^2 \theta \right] \sin \theta d\theta \\
 &= -2\pi Ga \left\{ -[\cos \theta]_0^{\pi/2} - \frac{3}{1-2\nu} \left[ \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi/2} \right\} \\
 &= -\frac{4\pi Ga(1-\nu)}{1-2\nu}
 \end{aligned}$$

**b) Termes contenant  $b$** 

$$\begin{aligned}
 P_b &= 4\pi Gb \int_0^{\pi/2} \left( \frac{\sin^2 \theta}{1+\cos \theta} + \cos \theta \right) \sin \theta d\theta \\
 &= 4\pi Gb \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \theta + \cos \theta) \sin \theta d\theta \\
 &= 4\pi Gb [-\cos \theta]_0^{\pi/2} \\
 &= 4\pi Gb
 \end{aligned}$$

Au total, et en tenant compte de la relation  $b = a/2$ , on obtient

$$P = P_a + P_b = 4\pi Ga \left[ -\frac{1-\nu}{1-2\nu} + \frac{1}{2} \right] = -4\pi Ga \frac{1}{2(1-2\nu)}$$

soit

$$a = -\frac{(1-2\nu)P}{2\pi G}, \quad b = \frac{a}{2} \quad (7.41)$$

## 7.5 Solution du problème de Boussinesq

Connaissant ces valeurs, on peut enfin les réintroduire dans la solution générale, ce qui fournit la *solution du problème de Boussinesq* :

1. Déplacements :

$$u_r = \frac{P}{4\pi Gr} [4(1-\nu) \cos \theta - (1-2\nu)] \quad (7.42)$$

$$u_\theta = \frac{P \sin \theta}{4\pi Gr} \left[ \frac{1-2\nu}{1+\cos \theta} - (3-4\nu) \right] \quad (7.43)$$

$$u_\varphi = 0 \quad (7.44)$$

$$(7.45)$$

2. Contraintes :

$$\sigma_r = \frac{(1-2\nu)P}{2\pi r^2} \left( 1 - \frac{4-2\nu}{1-2\nu} \cos \theta \right) \quad (7.46)$$

$$\sigma_\theta = \frac{(1-2\nu)P}{2\pi r^2} \frac{\cos^2 \theta}{1+\cos \theta} \quad (7.47)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{(1-2\nu)P}{2\pi r^2} \frac{\cos \theta - \sin^2 \theta}{1+\cos \theta} \quad (7.48)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{(1-2\nu)P}{2\pi r^2} \frac{\sin \theta \cos \theta}{1+\cos \theta} \quad (7.49)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0 \quad (7.50)$$

$$\tau_{\theta\varphi} = 0 \quad (7.51)$$

Dans les problèmes de contact, on s'intéresse spécialement aux déplacements des points du plan limitant le demi-espace, qui valent

$$\begin{aligned} u_r|_{\theta=\pi/2} &= -\frac{P(1-2\nu)}{4\pi Gr} \\ u_\theta|_{\theta=\pi/2} &= -\frac{P(1-\nu)}{2\pi Gr} = -\frac{P(1-\nu^2)}{\pi Er} \end{aligned} \quad (7.52)$$

## 7.6 Exercice

**Exercice 30** Étudier le problème de Lord Kelvin, consistant en une charge concentrée dans un massif indéfini (fig. 7.4)

*Suggestion :* Ce problème ne diffère de celui de Boussinesq que par ses conditions aux limites.

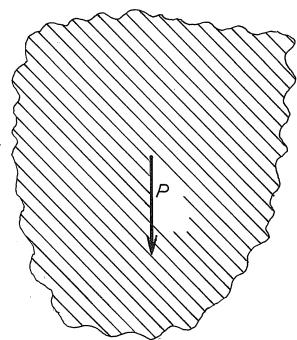


FIGURE 7.4 – Problème de Lord Kelvin



# Chapitre 8

## Le problème de Hertz

### 8.1 Introduction

Le problème de Hertz [44] consiste à étudier les forces naissant lors du contact pressé de deux solides élastiques. Ce problème a notamment une importance considérable dans l'étude des roulements à billes [82]. Bien que l'on se place

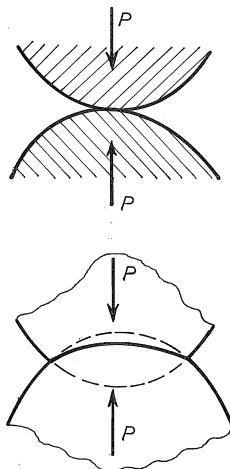


FIGURE 8.1 – Problème de Hertz

dans le cadre de la linéarisation géométrique et d'un matériau linéaire, la relation entre la force et le rapprochement des deux corps en contact n'est pas linéaire, pour la raison suivante : sous l'effet de la charge, les deux corps s'aplatissent en leur contact (*fig. 8.1*), si bien qu'il se forme une *aire de contact* d'autant plus grande que l'effort est plus important. La raideur s'accroît donc avec la force.

La théorie des contacts ponctuels – on dit encore des contacts *hertziens* – repose sur la solution du problème de Boussinesq, qu'il convient donc d'avoir étudié au préalable.

## 8.2 Considérations géométriques

### 8.2.1 Description de la surface d'un corps

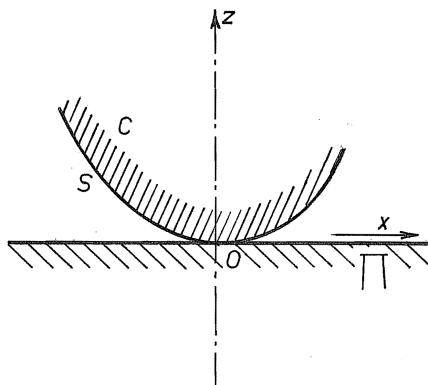


FIGURE 8.2 – Courbure de la surface d'un corps

Considérons un corps  $C$  de surface régulière  $S$  (au moins deux fois différentiable), posé en un point  $O$  sur un plan  $\Pi$  auquel sa surface est tangente (*fig. 8.2*). Nous adopterons le système d'axes suivants :  $Oz$  sera l'axe normal au plan, dirigé vers l'intérieur du corps  $C$ ;  $Ox$  et  $Oy$  seront deux axes orthogonaux à  $Oz$  et entre eux (et, par conséquent, situés dans le plan  $\Pi$ ). Dans ce système, la surface du corps  $C$  admet, dans un voisinage du point de contact  $O$ , une équation de la forme

$$z = Z(x, y) \quad (8.1)$$

Notre hypothèse de régularité de la surface nous permet, dans un voisinage éventuellement plus petit que le précédent, d'utiliser un développement de Taylor limité :

$$\begin{aligned} Z(x, y) &= Z(0, 0) + \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_0 y \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right)_0 x^2 + \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}\right)_0 xy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)_0 y^2 + o(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Les conditions de contact entre le corps et le plan s'écrivent

$$Z(0, 0) = 0, \quad \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_0$$

on se ramène à

$$Z(x, y) \approx \frac{1}{2} K_{11} x^2 + K_{12} xy + \frac{1}{2} K_{22} y^2 \quad (8.2)$$

où apparaît le *tenseur de courbure*  $K_{ij}$  défini par

$$K_{11} = \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right)_0, \quad K_{12} = \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}\right)_0, \quad K_{22} = \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)_0 \quad (8.3)$$

Comme tout tenseur symétrique à deux dimensions, il admet deux axes propres orthogonaux  $\overline{Ox}$  et  $\overline{Oy}$  tels que

$$Z(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2} \bar{K}_{11} \bar{x}^2 + \frac{1}{2} \bar{K}_{22} \bar{y}^2$$

Ces axes propres sont appelés *axes principaux de courbure*. Les valeurs propres  $\bar{K}_{11}$  et  $\bar{K}_{22}$  sont les *courbures principales* et leurs inverses sont les *rayons principaux de courbure*. On notera dans la suite

$$\rho_1 = \frac{1}{R_1} = \bar{K}_{11}, \quad \rho_2 = \frac{1}{R_2} = \bar{K}_{22}$$

En fonction du signe des courbures principales, on dit que le corps est *convexe* ou *concave* : *convexe* dans toute direction principale dont la courbure est *positive*, *concave* dans toute direction principale dont la courbure est *négative* et enfin *rectiligne* dans toute direction principale de courbure nulle. Une surface dont une courbure principale est nulle est *développable*. Seuls les plans ont leurs deux courbures principales nulles.

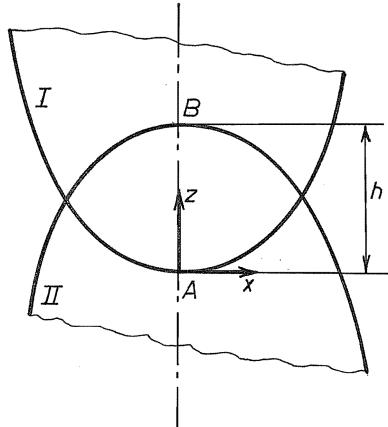


FIGURE 8.3 – Interpénétration fictive des deux corps

### 8.2.2 Contact de deux corps

Étant donné deux corps élastiques en contact, imaginons un instant qu'ils puissent s'interpénétrer. Partant de leur position de premier contact, ils se pénètrent mutuellement d'une profondeur  $h$ . Prenant l'origine des axes au point  $A$  de la figure 8.3, les surfaces des deux corps admettront donc les équations suivantes, en se limitant au second ordre :

$$\begin{aligned} \text{Corps I : } z^I &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 K_{ij}^I x_i x_j \\ \text{Corps II : } z^{II} &= h - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 K_{ij}^{II} x_i x_j \end{aligned} \quad (8.4)$$

Le choix des signes est destiné à maintenir la convention de positivité des courbures en cas de convexité. La réalité, bien entendu, est tout autre, et les deux corps vont *se repousser mutuellement* comme le montre la figure 8.4. Le corps I admettra un déplacement  $w^I$  dirigé vers le haut (c'est-à-dire dans le sens des  $z$  positifs) et le corps II, un déplacement  $w^{II}$  dirigé vers le bas, d'où les valeurs

$$\begin{aligned} z^I &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 K_{ij}^I x_i x_j + w^I \\ z^{II} &= h - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 K_{ij}^{II} x_i x_j - w^{II} \end{aligned}$$

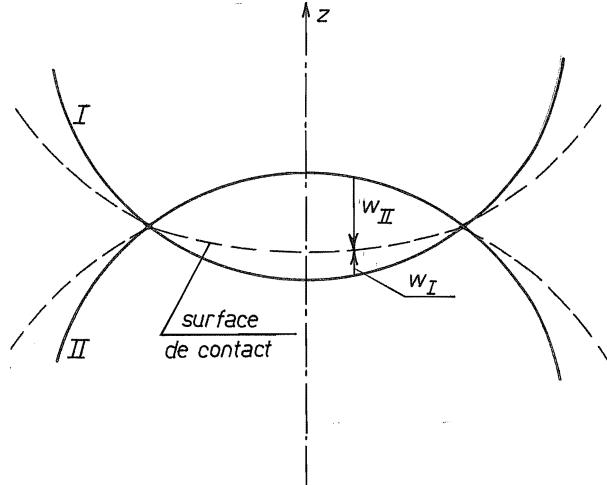


FIGURE 8.4 – Situation réelle

de manière à assurer, dans la zone de contact, l'égalité des cotes,  $z^I = z^{II}$ , ce qui implique un déplacement total

$$w = w^I + w^{II} = h - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 (K_{ij}^I + K_{ij}^{II}) x_i x_j \quad (8.5)$$

où apparaît le *tenseur des courbures résultantes* défini par

$$K_{ij}^R = K_{ij}^I + K_{ij}^{II} \quad (8.6)$$

Dans ce qui suit, nous omettrons l'indice supérieur  $R$  pour alléger les écritures. L'étude de ce tenseur est particulièrement instructive. Il admet en effet, comme les tenseurs de courbure des corps, deux directions principales orthogonales, dans lesquelles on peut écrire

$$w = h - A\bar{x}^2 - B\bar{y}^2, \quad A = \frac{1}{2}\bar{K}_{11}, \quad B = \frac{1}{2}\bar{K}_{22} \quad (8.7)$$

Lorsque les deux valeurs propres  $\bar{K}_{11}$  et  $\bar{K}_{22}$  sont positives, les lignes  $w = cte$  sont des ellipses : on dit que le contact est *ponctuel*. Lorsque l'une des deux est positive et l'autre, nulle, ces mêmes lignes sont des droites : le contact est

*linéaire.* Enfin, lorsque l'une au moins de ces valeurs propres est négative, le déplacement est d'autant plus grand que l'on s'éloigne du centre de contact dans les directions correspondantes, ce qui signifie que le contact ne peut débuter à l'origine : le problème est alors mal posé. Dans ce qui suit, nous nous limiterons aux contacts *ponctuels*.

Dans le cas relativement fréquent où les deux corps se présentent de manière telle que leurs axes principaux de courbure soient confondus, on a simplement, dans ces axes,

$$w = h - Ax^2 - By^2$$

avec

$$A = \frac{1}{2} (\rho_1^I + \rho_1^{II}), \quad B = \frac{1}{2} (\rho_2^I + \rho_2^{II}) \quad (8.8)$$

Dans le cas général, les axes principaux  $Ox^{II}$  et  $Oy^{II}$  du corps II peuvent

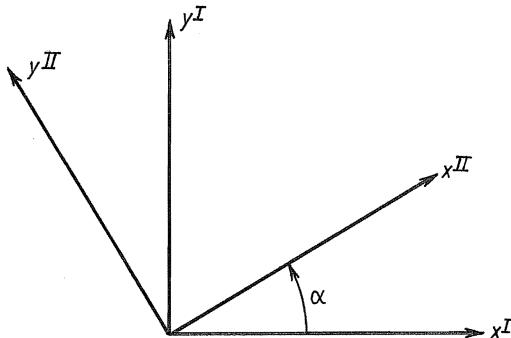


FIGURE 8.5 – Axes principaux de courbure des deux corps

former un angle  $\alpha$  avec ceux du corps I (*fig. 8.5*). Dans les axes principaux des deux corps, on aura donc

$$z^I = \frac{1}{2}\rho_1^I (x^I)^2 + \frac{1}{2}\rho_2^I (y^I)^2$$

et

$$h - z^{II} = \frac{1}{2}\rho_1^{II} (x^{II})^2 + \frac{1}{2}\rho_2^{II} (y^{II})^2$$

On peut ramener le tout dans les axes du corps I en notant que

$$\begin{aligned} x^{II} &= x^I \cos \alpha + y^I \sin \alpha \\ y^{II} &= -x^I \sin \alpha + y^I \cos \alpha \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} h - z^{II} &= \frac{1}{2} (\rho_1^{II} \cos^2 \alpha + \rho_2^{II} \sin^2 \alpha) (x^I)^2 + (\rho_1^{II} - \rho_2^{II}) \sin \alpha \cos \alpha x^I y^I \\ &\quad + \frac{1}{2} (\rho_1^{II} \sin^2 \alpha + \rho_2^{II} \cos^2 \alpha) (y^I)^2 \end{aligned}$$

et

$$w = h - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \hat{K}_{ij} x_i^I x_j^I \quad (8.9)$$

avec

$$\begin{cases} \hat{K}_{11} &= \rho_1^I + \rho_1^{II} \cos^2 \alpha + \rho_2^{II} \sin^2 \alpha \\ \hat{K}_{12} &= (\rho_1^{II} - \rho_2^{II}) \sin \alpha \cos \alpha \\ \hat{K}_{22} &= \rho_2^I + \rho_2^{II} \cos^2 \alpha + \rho_1^{II} \sin^2 \alpha \end{cases} \quad (8.10)$$

Les valeurs principales de la courbure résultante sont donc les solutions  $2A$  et  $2B$  de l'équation séculaire

$$\begin{vmatrix} \hat{K}_{11} - \lambda & \hat{K}_{12} \\ \hat{K}_{12} & \hat{K}_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

soit

$$\lambda^2 - \lambda (\hat{K}_{11} + \hat{K}_{22}) + (\hat{K}_{11} \hat{K}_{22} - \hat{K}_{12}^2) = 0 \quad (8.11)$$

Il vient donc, en posant *arbitrairement*  $B \geq A$ ,

$$2(B + A) = \hat{K}_{11} + \hat{K}_{22} = (\rho_1^I + \rho_1^{II} + \rho_2^I + \rho_2^{II}) = \sum \rho \quad (8.12)$$

et

$$\begin{aligned} 2(B - A) &= \sqrt{\left(\hat{K}_{11} + \hat{K}_{22}\right)^2 - 4\left(\hat{K}_{11}\hat{K}_{22} - \hat{K}_{12}^2\right)} \\ &= \sqrt{\left(\hat{K}_{11} - \hat{K}_{22}\right)^2 + 4\hat{K}_{12}^2} \\ &= \left\{ [\rho_1^I - \rho_2^I + (\rho_1^{II} - \rho_2^{II}) \cos 2\alpha]^2 + (\rho_1^{II} - \rho_2^{II})^2 \sin^2 2\alpha \right\}^{1/2} \\ &= \left[ (\rho_1^I - \rho_2^I)^2 + (\rho_1^{II} - \rho_2^{II})^2 + 2(\rho_1^I - \rho_2^I)(\rho_1^{II} - \rho_2^{II}) \cos 2\alpha \right]^{1/2} \\ &= F(\rho) \end{aligned} \quad (8.13)$$

On utilise souvent l'angle auxiliaire  $\delta$  défini par

$$\cos \delta = \frac{B - A}{B + A} = \frac{F(\rho)}{\sum \rho} \quad (8.14)$$

en fonction duquel on obtient aisément

$$A = (A + B) \frac{A}{A + B} = \frac{1}{2}(A + B)(1 - \cos \delta) = \frac{1}{2} \sum \rho \sin^2 \frac{\delta}{2} \quad (8.15)$$

et

$$B = (A + B) \frac{B}{A + B} = \frac{1}{2} \sum \rho \cos^2 \frac{\delta}{2} \quad (8.16)$$

Ainsi, il existe un système d'axes  $\overline{Ox}, \overline{Oy}$  dans lequel le déplacement total prend la forme

$$w = h - A\bar{x}^2 - B\bar{y}^2 \quad (8.17)$$

$A$  et  $B$  ayant les expressions (8.15) et (8.16).

### 8.3 Équilibre de la surface de contact des corps

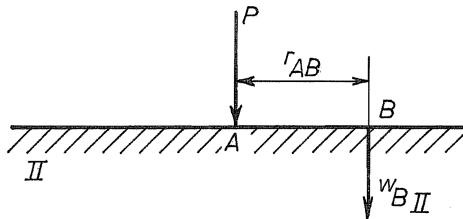


FIGURE 8.6 – Déplacement en  $B$  dû à une charge en  $A$

La surface de contact étant supposée très petite par rapport aux dimensions des corps, on peut identifier ceux-ci à des massifs indéfinis en ce qui concerne les efforts. L'étude du problème de Boussinesq nous a montré qu'une charge concentrée en un point  $A$  produit en un autre point  $B$  situé sur la surface (*fig. 8.6*) un déplacement

$$w_B^{II} = \frac{1 - \nu_{II}^2}{\pi E_{II}} \frac{P}{r_{AB}} \quad (8.18)$$

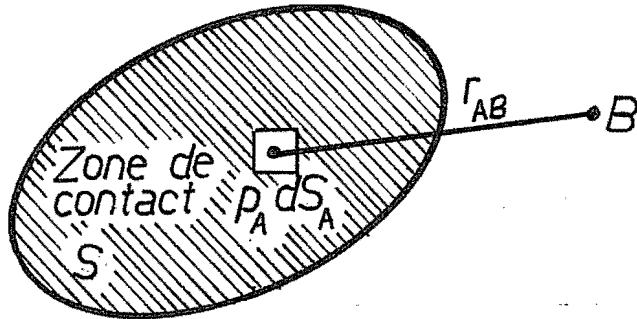


FIGURE 8.7 – Superposition de l'effet des pressions dans la zone de contact

Dès lors, par superposition, un système de pressions  $p$  appliquées sur la surface de contact  $S$  (fig. 8.7) produit dans le corps II un déplacement

$$w_B^{II} = \frac{1 - \nu_{II}^2}{\pi E_{II}} \int_S \frac{p_A}{r_{AB}} dS_A = \varepsilon_{II} \int_S \frac{p_A}{r_{AB}} dS_A \quad (8.19)$$

en posant

$$\varepsilon_{II} = \frac{1 - \nu_{II}^2}{\pi E_{II}} \quad (8.20)$$

De la même façon, le déplacement du corps I vaut

$$w_B^I = \varepsilon_I \int_S \frac{p_A}{r_{AB}} dS_A \quad (8.21)$$

valeur proportionnelle à la précédente, dans le rapport

$$\frac{w_B^I}{w_B^{II}} = \frac{\varepsilon_I}{\varepsilon_{II}} \quad (8.22)$$

Le déplacement est donc identique dans les deux corps dans le cas assez habituel où ils sont constitués de matériaux de mêmes constantes élastiques  $E$  et  $\nu$ .

Enfin, le déplacement total, qui a la forme (8.17), vaut

$$w_B = (\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) \int_S \frac{p_A}{r_{AB}} dS_A \quad (8.23)$$

Il s'agit d'une équation intégrale en  $p_A$ , que l'on désire résoudre analytiquement pour des valeurs quelconques de  $h$ ,  $A$  et  $B$ . On notera l'analogie entre ce problème et l'expression donnant le potentiel en électrostatique :

$$V_B = \int_V \frac{\rho_A}{r_{AB}} dS_A$$

où

$$\rho_A = \frac{\text{densité de charge}}{4\pi\varepsilon_0}$$

Or, il est bien connu (voir annexe) que le potentiel d'une charge uniforme dans un ellipsoïde s'écrit

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= \int_{\text{ellipsoïde}} \frac{\rho(\alpha, \beta, \gamma)}{\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2}} d\alpha d\beta d\gamma \\ &= \pi\rho abc \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi} - \frac{z^2}{c^2 + \xi}\right) \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)(c^2 + \xi)}} \end{aligned} \quad (8.24)$$

L'expression de ce potentiel présente une forte ressemblance avec l'équation de  $w$ , n'était-ce le terme en  $z$ . Nous le supprimerons, ainsi que  $\gamma$ , de la façon suivante. Commençons par mettre les variables à l'échelle :

$$\begin{cases} x = a\hat{x} & , \quad y = b\hat{y} & , \quad z = c\hat{z} \\ \alpha = a\hat{\alpha} & , \quad \beta = b\hat{\beta} & , \quad \gamma = c\hat{\gamma} \end{cases}$$

et exprimons  $V(x, y, 0)$  en termes de ces variables sans dimensions. On a, en notant  $B_1$  la boule unité,

$$\begin{aligned} V(x, y, 0) &= \int_{B_1} \frac{\rho abcd\hat{\alpha}d\hat{\beta}d\hat{\gamma}}{\sqrt{a^2(\hat{x} - \hat{\alpha})^2 + b^2(\hat{y} - \hat{\beta})^2 + c^2\hat{\gamma}^2}} \\ &= \pi\rho abc \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi}\right) \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)(c^2 + \xi)}} \end{aligned}$$

Divisons les deux derniers membres par  $c$  et faisons ensuite tendre  $c$  vers zéro.

On obtient l'identité

$$\begin{aligned} \int_{B^1} \frac{\rho ab d\hat{\alpha} d\hat{\beta} d\hat{\gamma}}{\sqrt{a^2(\hat{x} - \hat{\alpha})^2 + b^2(\hat{y} - \hat{\beta})^2}} \\ = \pi \rho ab \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi}\right) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)}} \end{aligned}$$

dont le premier membre peut être intégré par rapport à  $\hat{\gamma}$  entre les limites  $\pm\sqrt{1 - \hat{\alpha}^2 - \hat{\beta}^2}$  ce qui donne

$$\begin{aligned} \text{Premier membre} &= \int_{\text{disque unité}} \frac{2\rho ab d\hat{\alpha} d\hat{\beta} \sqrt{1 - \hat{\alpha}^2 - \hat{\beta}^2} d\hat{\gamma}}{\sqrt{a^2(\hat{x} - \hat{\alpha})^2 + b^2(\hat{y} - \hat{\beta})^2}} \\ &= \int_{\text{ellipse}(a,b)} \frac{2\rho \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}} d\alpha d\beta}{r} \end{aligned}$$

Le résultat final de ces manipulations est

$$\begin{aligned} \int_{\text{ellipse}(a,b)} \frac{\rho \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}} d\alpha d\beta}{r} \\ = \rho \frac{\pi ab}{2} \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi}\right) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)}} \quad (8.25) \end{aligned}$$

Nous avons donc obtenu une distribution du type (8.23) conduisant à un déplacement de la forme voulue (8.17). Ceci signifie que la solution consiste en une pression de la forme

$$p = p_H \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (8.26)$$

à laquelle correspondent les variables  $h, A, B$  par les relations

$$h = (\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) p_H \frac{\pi ab}{2} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)}} \quad (8.27)$$

$$A = (\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) p_H \frac{\pi ab}{2} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(a^2 + \xi)^3(b^2 + \xi)}} \quad (8.28)$$

$$B = (\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) p_H \frac{\pi ab}{2} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)^3}} \quad (8.29)$$

La pression maximale, encore appelée *pression de Hertz*, est liée à la résultante  $P$  des pressions réciproques par la relation

$$P = \int_{\text{ellipse}(a,b)} p_H \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dS$$

Posant

$$x = a\rho \cos \varphi, \quad y = b\rho \sin \varphi, \quad \rho \in ]0, 1[, \quad \varphi \in ]0, 2\pi[$$

on obtient

$$dS = ab \cdot 2\pi \rho d\rho, \quad \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} = \sqrt{1 - \rho^2}$$

d'où

$$P = p_H 2\pi ab \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho$$

Posant encore  $\rho = \sin \xi$ , on obtient

$$P = p_H 2\pi ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 \xi \sin \xi d\xi = \frac{2}{3} \pi ab p_H$$

soit

$$p_H = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab} \tag{8.30}$$

équation qui signifie que *la pression de Hertz vaut 1,5 fois la pression moyenne*.

On peut ré-exprimer les résultats (8.27), (8.28) et (8.29) en termes de  $P$  au lieu de  $p_H$ , ce qui donne

$$h = (\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) \frac{3P}{4} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)}} \tag{8.31}$$

$$A = (\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) \frac{3P}{4} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(a^2 + \xi)^3(b^2 + \xi)}} \tag{8.32}$$

$$B = (\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) \frac{3P}{4} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)^3}} \tag{8.33}$$

## 8.4 Résolution des équations

Les équations (8.31) à (8.33) donnent la *solution de principe* du problème : connaissant  $A$ ,  $B$  et  $P$ , on peut déterminer  $a$  et  $b$  par les deux dernières équations, puis  $h$  par la première. Mais il faut pour cela parvenir à calculer les intégrales des seconds membres.

Tout d'abord, nous introduirons les *intégrales elliptiques complètes*

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - m \sin^2 x}}, \quad E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m \sin^2 x} dx \quad (8.34)$$

avec  $m \in ]0, 1[$ , dont voici une table [1].

$m$	$K(m)$	$E(m)$
0	1,5780	1,5780
0,1	1,61244	1,53076
0,2	1,65962	1,48094
0,3	1,71386	1,44536
0,4	1,77752	1,39939
0,5	1,85407	1,35064
0,6	1,94957	1,29843
0,7	2,07536	1,24167
0,8	2,25721	1,17849
0,9	2,57809	1,10477
0,95	2,90834	1,06047
1	$\infty$	1

On remarquera que ces intégrales admettent l'expression équivalente

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - m \cos^2 x}}, \quad E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m \cos^2 x} dx \quad (8.35)$$

Cela étant, il est aisément de transformer les intégrales apparaissant dans les formules (8.31) à (8.33).

1. Tout d'abord, en posant  $\xi = a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi$  et  $e = b/a$ ,

$$\begin{aligned} I_1 = \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)}} &= \frac{2}{a} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}{\sqrt{e^2 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} \\ &= \frac{2}{a} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{e^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}} \\ &= \frac{2}{a} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - (1 - e^2) \cos^2 \varphi}} \\ &= \frac{2}{a} K(1 - e^2) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$h = (\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) \frac{3P}{2a} K(1 - e^2) \quad (8.36)$$

2. Le même changement de variables permet d'écrire

$$\begin{aligned} I_2 = \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(a^2 + \xi)^3(b^2 + \xi)}} &= \frac{2}{a^3} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{e^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}} \\ &= \frac{2}{a^3} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - (1 - e^2) \cos^2 \varphi}} \end{aligned}$$

Comme, par ailleurs,

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 - e^2}(1 - e^2) \cos^2 \varphi = \frac{1}{1 - e^2} - \frac{1}{1 - e^2}[1 - (1 - e^2) \cos^2 \varphi]$$

on obtient

$$I_2 = \frac{2}{a^3(1 - e^2)} [K(1 - e^2) - E(1 - e^2)]$$

d'où

$$A = (\varepsilon_+ \varepsilon_2) \frac{3P}{2a^3(1 - e^2)} [K(1 - e^2) - E(1 - e^2)] \quad (8.37)$$

3. Posant enfin  $\xi = b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi$ , on obtient

$$\begin{aligned} I_3 = \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)^3}} &= \frac{2}{b^3} \int_0^{\pi/2} \frac{e \cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{e^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}} \\ &= \frac{2}{b^3} \int_0^{\pi/2} \frac{e \cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - (1 - e^2) \cos^2 \varphi}} \end{aligned}$$

Notant que

$$\begin{aligned} \cos^2 \varphi &= \frac{1 - e^2}{1 - e^2} \cos^2 \varphi \\ &= \frac{1}{1 - e^2} [(1 - e^2) - (1 - e^2) \sin^2 \varphi] \\ &= \frac{1 - (1 - e^2) \sin^2 \varphi}{1 - e^2} - \frac{e^2}{1 - e^2} \end{aligned}$$

on obtient

$$I_3 = \frac{2e}{b^3} K(1 - e^2) - \frac{2e^3}{b^3} E(1 - e^2)$$

ce qui entraîne

$$B = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{3P}{2a^3(1-e^2)} \left[ \frac{1}{e^2} E(1-e^2) - K(1-e^2) \right] \quad (8.38)$$

Les équations (8.15), (8.16), (8.37) et (8.38) impliquent

$$\frac{A}{B} = \operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2} = \frac{K(1-e^2) - E(1-e^2)}{\frac{1}{e^2} E(1-e^2) - K(1-e^2)} \quad (8.39)$$

Cette équation permet de calculer  $e$  en fonction du paramètre  $\delta$  (graphiquement, on peut tracer une courbe de  $\delta$  en fonction de  $e$ ). La valeur de  $e$  étant connue, on calcule  $a$  à partir de (8.37) et (8.38), en notant que

$$A = \frac{1}{2} \sum \rho \sin^2 \frac{\delta}{2}, \quad B = \frac{1}{2} \sum \rho \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

ce qui donne

$$a = \left\{ \frac{3}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \frac{1}{1-e^2} [K(1-e^2) - E(1-e^2)] \right\}^{1/3} (\varepsilon_I + \varepsilon_{II})^{1/3} \left( \frac{P}{\sum \rho} \right)^{1/3} \quad (8.40)$$

Pour une plus grande simplicité, on utilise généralement un *module de Young équivalent*  $E_m$  défini par

$$\frac{1}{E_m} = \frac{1}{2} \left( \frac{1-\nu_I^2}{E_I} + \frac{1-\nu_{II}^2}{E_{II}} \right) = \frac{\pi}{2} (\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) \quad (8.41)$$

à l'aide duquel on peut écrire

$$a = k_a \left( \frac{P}{E_m \sum \rho} \right)^{1/3} \quad (8.42)$$

avec

$$k_a = \left\{ \frac{6}{\pi \sin^2 \frac{\delta}{2}} \frac{1}{1-e^2} [K(1-e^2) - E(1-e^2)] \right\}^{1/3} \quad (8.43)$$

On en déduit d'abord

$$b = k_b \left( \frac{P}{E_m \sum \rho} \right)^{1/3} \quad (8.44)$$

avec

$$k_b = e k_a \quad (8.45)$$

puis

$$p_H = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab} = k_p P^{1/3} \left( E_m \sum \rho \right)^{2/3} \quad (8.46)$$

avec

$$k_p = \frac{3}{2\pi k_a k_b} \quad (8.47)$$

et enfin,

$$h = \frac{3P}{\pi a E_m} K(1 - e^2) = k_h \frac{P^{2/3}}{(E_m \sum \rho)^{1/3}} \quad (8.48)$$

où

$$k_h = \frac{3}{\pi k_a} K(1 - e^2) \quad (8.49)$$

## 8.5 Comportements asymptotiques

### 8.5.1 Cas où $e = 1$

Pour  $e = 1$ , les formules ci-dessus mènent à des formes indéterminées, ce qui rend nécessaire une étude du comportement des fonctions  $K$  et  $E$  au voisinage de  $e = 1$ . On a, pour  $e$  proche de l'unité,

$$\begin{aligned} K(1 - e^2) &= \int_0^{\pi/2} [1 - (1 - e^2) \sin^2 \theta]^{-1/2} d\theta \\ &\approx \int_0^{\pi/2} \left( 1 + \frac{1 - e^2}{2} \sin^2 \theta \right) \\ &\approx \frac{\pi}{2} + (1 - e^2) \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E(1 - e^2) &= \int_0^{\pi/2} [1 - (1 - e^2) \sin^2 \theta]^{1/2} d\theta \\ &\approx \int_0^{\pi/2} \left( 1 - \frac{1 - e^2}{2} \sin^2 \theta \right) \\ &\approx \frac{\pi}{2} - (1 - e^2) \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\lim_{e \rightarrow 1} \frac{K(1 - e^2) - E(1 - e^2)}{1 - e^2} = \frac{\pi}{4}$$

Comme, pour  $e = 1$ , on a  $\delta = 90^\circ$  et  $\sin^2(\delta/2) = 1/2$ , il vient

$$\begin{aligned} k_a &= \left( \frac{6\pi}{\pi \cdot 4} \cdot 2 \right)^{1/3} = \sqrt[3]{3} = 1,442 \\ k_b &= k_a \\ k_p &= \frac{3}{2\pi} \frac{1}{3^{2/3}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{2\pi} = 0,2295 \\ k_h &= \frac{3}{\pi} \frac{1}{3^{1/3}} \frac{\pi}{2} = \frac{3^{2/3}}{2} = 1,040 \end{aligned}$$

### 8.5.2 Très faibles valeurs de $e$

Pour  $e \rightarrow 0$ , on peut montrer [1] que

$$K(1 - e^2) \approx \ln(4e)$$

tandis que

$$E(1 - e^2) \approx 1$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2} &= \frac{K - E}{\frac{E}{e^2} - K} \\ &\approx \frac{\ln(4/e) - 1}{\frac{1}{e^2} - \ln(4/e)} \\ &\approx e^2 \ln(4/e) \end{aligned}$$

Comme c'est une petite valeur, on a encore

$$\sin^2 \frac{\delta}{2} \approx \operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2}$$

d'où, par les formules (6.40) et suivantes,

$$\begin{aligned}
 k_a &\approx \left[ \frac{6}{\pi} \frac{\frac{E}{e^2} - K}{K - E} \frac{1}{1 - e^2} (K - E) \right]^{1/3} \\
 &\approx \left[ \frac{6}{\pi} \frac{1}{1 - e^2} \left( \frac{E}{e^2} - K \right) \right]^{1/3} \\
 &\approx \left( \frac{6}{\pi} \right)^{1/3} e^{-2/3} \\
 k_b &\approx \left( \frac{6}{\pi} \right)^{1/3} e^{1/3} \\
 k_p &= \frac{3}{2\pi k_a k_b} \approx \frac{1}{4} \left( \frac{6}{\pi} \right)^{1/3} e^{1/3} \\
 k_h &\approx \frac{1}{2} \left( \frac{6}{\pi} \right)^{2/3} e^{2/3} \ln(4/e)
 \end{aligned}$$

## 8.6 Tables de la solution du problème de Hertz

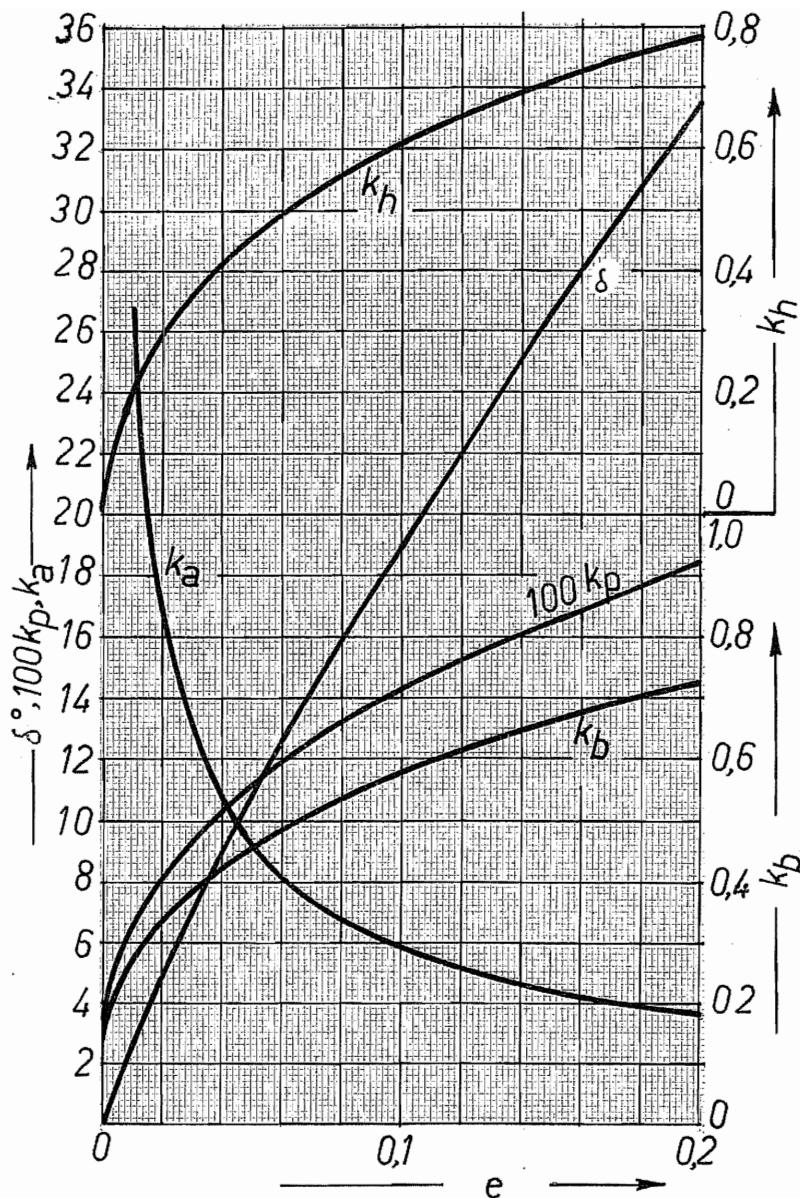
### 8.6.1 Valeurs courantes de $e$

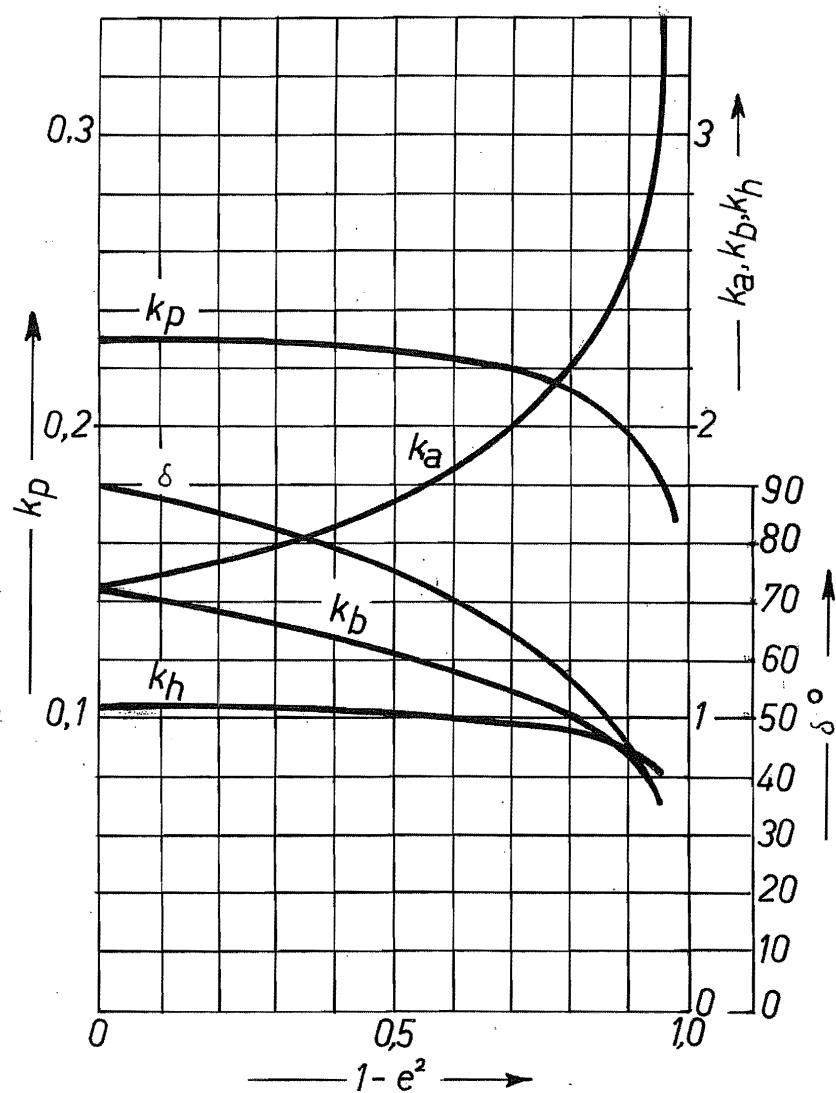
$1 - e^2$	$e$	$\delta(^{\circ})$	$k_a$	$k_b$	$k_p$	$k_h$
0	1	90	1,442	1,442	0,2296	1,040
0,1	0,9487	87,33	1,481	1,405	0,2294	1,040
0,2	0,8944	85,19	1,526	1,365	0,2292	1,039
0,3	0,8367	82,37	1,580	1,322	0,2286	1,036
0,4	0,7746	79,09	1,645	1,274	0,2278	1,032
0,5	0,7071	75,25	1,728	1,222	0,2261	1,025
0,6	0,6325	70,66	1,837	1,162	0,2237	1,013
0,7	0,5477	64,88	1,992	1,091	0,2197	0,9949
0,8	0,4472	57,16	2,241	1,002	0,2126	0,9618
0,9	0,3162	45,28	2,763	0,8737	0,1978	0,8910
0,95	0,2236	35,26	3,434	0,7678	0,1811	0,8088
1	0	0	$\infty$	0	0	0

### 8.6.2 Valeurs asymptotiques pour $e$ proche de zéro

$e$	$\delta(^{\circ})$	$k_a$	$k_b$	$k_p$	$k_h$
0,01	2,560	26,73	0,2673	0,06683	0,2140
0,02	4,754	16,84	0,3368	0,08420	0,3005
0,05	10,57	9,142	0,4571	0,1143	0,4577
0,1	18,97	5,759	0,5759	0,1440	0,6117
0,15	26,50	4,395	0,6592	0,1648	0,7134
0,20	33,52	3,628	0,7256	0,1814	0,7885

Ces résultats sont représentés graphiquement en figures 8.8 et 8.9

FIGURE 8.8 – Solution du problème de Hertz pour les valeurs courantes de  $e$

FIGURE 8.9 – Solution du problème de Hertz pour  $e$  proche de zéro

## 8.7 Annexe : potentiel de l'ellipsoïde chargé

Soit à chercher la solution du problème

$$\Delta V = \begin{cases} -4\pi\rho & \text{dans un ellipsoïde} \\ 0 & \text{en dehors} \end{cases} \quad (8.50)$$

La solution qui suit est due à Dirichlet [57]. Nous nous référerons à Appell [2]. La surface de l'ellipsoïde ayant pour équation

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0$$

tout point extérieur vérifie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 > 0$$

En un tel point, l'équation

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} - 1 = 0 \quad (8.51)$$

admet une et une seule solution  $u > 0$ . En effet, en appelant  $f(u)$  le premier membre de cette équation, on a le schéma de variation suivant :

$\frac{u}{f(u)}$	0	↗	$\infty$
	+	↘	-1

et on ne peut avoir qu'une seule fois  $f(\xi) = 0$ . Ceci définit une fonction  $\xi$  des points  $P = (x, y, z)$  telle que

$$\begin{cases} \xi(P) = 0 & \text{si } P \text{ est sur la surface de l'ellipsoïde} \\ \xi(P) > 0 & \text{si } P \text{ est extérieur à l'ellipsoïde} \end{cases}$$

Cela étant, nous allons montrer que *le potentiel  $V$  cherché est* :

1. *Si  $P$  est extérieur à l'ellipsoïde,*

$$V(P) = \pi\rho abc \int_u^\infty \left( 1 - \frac{x^2}{a^2+\xi} - \frac{y^2}{b^2+\xi} - \frac{z^2}{c^2+\xi} \right) \frac{d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}}$$

où

$$\varphi(\xi) = (a^2 + \xi)(b^2 + \xi)(c^2 + \xi)$$

2. Si  $P$  est intérieur à l'ellipsoïde,

$$V(P) = \pi \rho abc \int_0^\infty \left( 1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi} - \frac{z^2}{c^2 + \xi} \right) \frac{d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}}$$

en donnant la même signification à  $\varphi(\xi)$ .

On notera que les deux formules se raccordent sur la surface de l'ellipsoïde, où  $u = 0$ .

Pour démontrer ce résultat, il nous suffira de calculer  $\Delta V$  dans les deux cas et de vérifier qu'à l'infini,  $V$  tend vers zéro. Ce dernier point est évident, car  $u \rightarrow 0$  à l'infini.

### 8.7.1 Calcul de $\partial V / \partial x$

#### $P$ extérieur

Tenant compte du fait que  $u$  varie avec  $x$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -2\pi \rho abc x \int_u^\infty \frac{d\xi}{(a^2 + \xi) \sqrt{\varphi(\xi)}} \\ &\quad - \pi \rho abc x \left( 1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi} - \frac{z^2}{c^2 + \xi} \right) \frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}} \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}$$

Le dernier terme, résultant du fait que la limite inférieure d'intégration est variable, s'annule en vertu de la relation (8.51) qui définit  $u$ . Il reste donc

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2\pi \rho abc x \int_u^\infty \frac{d\xi}{(a^2 + \xi) \sqrt{\varphi(\xi)}}$$

#### $P$ intérieur

On trouve immédiatement

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2\pi \rho abc x \int_0^\infty \frac{d\xi}{(a^2 + \xi) \sqrt{\varphi(\xi)}}$$

### 8.7.2 Calcul de $\partial^2 V / \partial x^2$ et de $\Delta V$

*P extérieur*

On calcule

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -2\pi\rho abc \int_u^\infty \frac{d\xi}{(a^2 + \xi)\sqrt{\varphi(\xi)}} + 2\pi\rho abc \frac{1}{(a^2 + u)\sqrt{\varphi(u)}} \frac{\partial u}{\partial x}$$

Il est aisément de déterminer  $\partial^2 V / \partial y^2$  et  $\partial^2 V / \partial z^2$  par analogie. Il vient ainsi

$$\begin{aligned} \Delta V = 2\pi\rho abc & \left[ - \int_u^\infty \left( \frac{1}{a^2 + \xi} + \frac{1}{b^2 + \xi} + \frac{1}{c^2 + \xi} \right) \frac{d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}} \left( \frac{x}{a^2 + u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y}{b^2 + u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{c^2 + u} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \end{aligned}$$

Arrivé à ce point, on notera d'abord que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\sqrt{\varphi(\xi)}} \right) &= -\frac{1}{2[\varphi(\xi)]^{3/2}} [(b^2 + \xi)(c^2 + \xi) + (a^2 + \xi)(c^2 + \xi) \\ &\quad + (a^2 + \xi)(b^2 + \xi)] \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{\varphi(\xi)}} \left[ \frac{1}{a^2 + \xi} + \frac{1}{b^2 + \xi} + \frac{1}{c^2 + \xi} \right] \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\int \left[ \frac{1}{a^2 + \xi} + \frac{1}{b^2 + \xi} + \frac{1}{c^2 + \xi} \right] \frac{d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} = -\frac{2}{\sqrt{\varphi(\xi)}}$$

et

$$\int_u^\infty \left[ \frac{1}{a^2 + \xi} + \frac{1}{b^2 + \xi} + \frac{1}{c^2 + \xi} \right] \frac{d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} = -\frac{2}{\sqrt{\varphi(u)}}$$

Nous obtenons donc

$$\Delta V = 2\pi\rho abc \left[ \frac{x}{a^2 + u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y}{b^2 + u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{c^2 + u} \frac{\partial u}{\partial z} - 2 \right] \frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}$$

Le facteur entre crochets est nul. En effet, en dérivant successivement la relation (8.51) par rapport à  $x$ ,  $y$  et  $z$ , on obtient

$$\begin{aligned}\frac{2x}{a^2+u} - \left[ \frac{x^2}{(a^2+u)^2} + \frac{y^2}{(b^2+u)^2} + \frac{z^2}{(c^2+u)^2} \right] \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{2y}{b^2+u} - \left[ \frac{x^2}{(a^2+u)^2} + \frac{y^2}{(b^2+u)^2} + \frac{z^2}{(c^2+u)^2} \right] \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\ \frac{2z}{c^2+u} - \left[ \frac{x^2}{(a^2+u)^2} + \frac{y^2}{(b^2+u)^2} + \frac{z^2}{(c^2+u)^2} \right] \frac{\partial u}{\partial z} &= 0\end{aligned}$$

Multiplions la première équation par  $x/(a^2+u)$ , la deuxième par  $y/(b^2+u)$  et la troisième par  $z/(c^2+u)$  et additionnons. On obtient, en notant

$$[\dots] = \left[ \frac{x^2}{(a^2+u)^2} + \frac{y^2}{(b^2+u)^2} + \frac{z^2}{(c^2+u)^2} \right]$$

la relation

$$2[\dots] - [\dots] \left( \frac{x}{a^2+u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y}{b^2+u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{c^2+u} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0$$

soit

$$2 = \frac{x}{a^2+u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y}{b^2+u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{c^2+u} \frac{\partial u}{\partial z}$$

Ainsi,  $\Delta V = 0$  à l'extérieur de l'ellipsoïde.

### *P intérieur*

On a directement

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -2\pi\rho abc \int_0^\infty \frac{d\xi}{(a^2+\xi)\sqrt{\varphi(\xi)}}$$

et

$$\begin{aligned}\Delta V &= -2\pi\rho abc \int_0^\infty \left( \frac{1}{a^2+\xi} + \frac{1}{b^2+\xi} + \frac{1}{c^2+\xi} \right) \frac{d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} \\ &= 4\pi\rho abc \left( \frac{1}{\sqrt{\varphi(\infty)}} - \frac{1}{\sqrt{\varphi(0)}} \right)\end{aligned}$$

et comme

$$\sqrt{\varphi(0)} = abc$$

il vient

$$\Delta V = -4\pi\rho$$

La démonstration est donc achevée.

## 8.8 Exercice

**Exercice 31** Étudier le problème de Hertz dans le cas de deux sphères, sans passer par les intégrales elliptiques complètes.

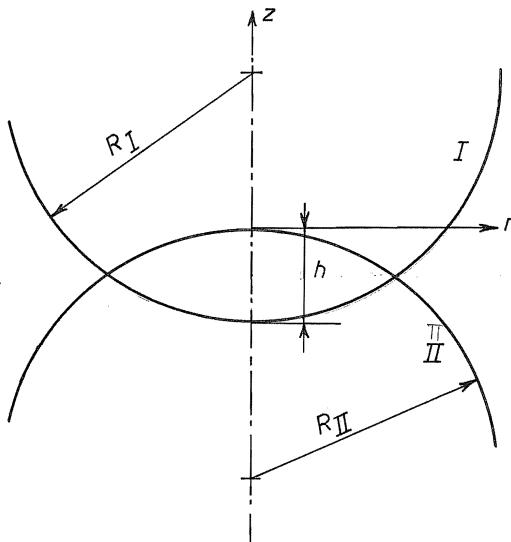


FIGURE 8.10 – Contact de deux sphères

*Solution* - En supposant possible l'interférence des deux corps, on aurait (fig. 8.10)

$$z_I = -h + \frac{r^2}{2R_I}, \quad z_{II} = -\frac{r^2}{2R_{II}}$$

en assimilant les sphères à des paraboloïdes. La déformation mène à

$$z_I = -h + \frac{r^2}{2R_I} + w_I, \quad z_{II} = -\frac{r^2}{2R_{II}} + w_{II}$$

avec  $z_I = z_{II}$ , ce qui implique

$$w = w_I + w_{II} = h - \beta r^2$$

avec

$$\beta = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_I} + \frac{1}{R_{II}} \right) = \frac{1}{4} \sum \rho$$

où

$$\sum \rho = \frac{2}{R_I} + \frac{2}{R_{II}}$$

Le problème de Boussinesq donne, pour une charge concentrée (*fig. 8.7*)

$$w_{BII} = \frac{1 - \nu_{II}^2}{\pi E_{II}} \frac{P}{r_{AB}} = \varepsilon_{II} \frac{P}{r_{AB}}$$

et, par superposition, si  $S$  est la surface de contact,

$$w_{BII} = \varepsilon_{II} \int_S \frac{p_A}{r_{AB}} dS_A$$

De la même façon, on a

$$w_{BI} = \varepsilon_I \int_S \frac{p_A}{r_{AB}} dS_A$$

d'où la relation toujours vérifiée

$$\frac{w_{BII}}{w_{BI}} = \frac{\varepsilon_{II}}{\varepsilon_I}$$

(Dans le cas de deux matériaux identiques, on a donc  $w_{BII} = w_{BI}$ ). Il faut donc résoudre l'équation intégrale

$$w_B = (\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) \int_S \frac{p_A}{r_{AB}} dS_A = h - \beta r^2$$

ou encore,

$$w_B = \frac{2}{\pi E_m} \int_S \frac{p_A}{r_{AB}} dS_A = h - \beta r^2$$

en définissant  $E_m$  par

$$\frac{1}{E_m} = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \nu_I^2}{E_I} + \frac{1 - \nu_{II}^2}{E_{II}} \right)$$

Par symétrie, la zone de contact est un cercle de rayon  $a$ . Montrons que la solution a la forme

$$p = p_H \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} = \frac{p_H}{a} \sqrt{r^2 - a^2}$$

Soit (fig. 8.11)  $B$  un point de la zone de contact situé à une distance  $r$  du centre

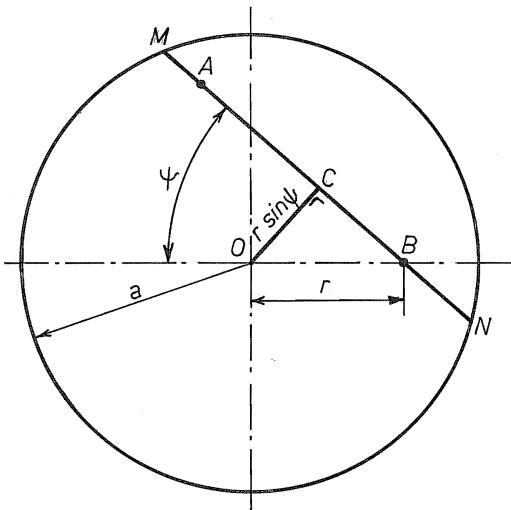


FIGURE 8.11 – Distance du point  $A$  au point  $B$

de celle-ci. Considérons un segment  $MN$  passant par  $B$ , limité à la circonférence, et faisant un angle  $\psi$  avec  $OB$ . On a donc

$$\begin{aligned} OC &= r \sin \psi \\ CN &= \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \psi} \end{aligned}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}\int_S \frac{p_A}{r_{AB}} dS &= \int_S \frac{p_A}{r_{AB}} r_{AB} dr_{AB} d\psi \\ &= \int_S p_A dr_{AB} d\psi\end{aligned}$$

Ainsi que l'illustre la figure (8.12), le diagramme de  $p$  étant sphérique, la section

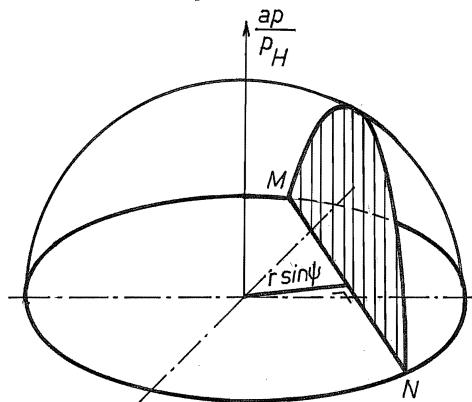


FIGURE 8.12 – Calcul du déplacement en  $B$

verticale  $MN$  est encore un demi-cercle de rayon  $\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \psi}$ , dont la surface vaut

$$\frac{\pi}{2}(a^2 - r^2 \sin^2 \psi)$$

Il suffit donc de calculer

$$\begin{aligned}\frac{a}{p_H} \int_S p dr d\psi &= \frac{a}{p_H} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\pi}{2}(a^2 - r^2 \sin^2 \psi) d\psi \\ &= \frac{a}{p_H} \frac{\pi}{2} (a^2 \pi - \frac{\pi}{2} r^2)\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} w_B &= \frac{2}{\pi E_m} \int_S p_A dr_{AB} d\psi \\ &= \frac{2}{\pi E_m} \frac{p_H}{a} \left( \frac{\pi^2 a^2}{2} - \frac{\pi^2 r^2}{4} \right) \\ &= \frac{p_H \pi a}{E_m} - \frac{p_H \pi}{2a E_m} r^2 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$h = \frac{p_H \pi a}{E_m} \quad (8.52)$$

et

$$\beta = \frac{1}{4} \sum \rho = \frac{p_H \pi}{2a E_m}$$

d'où

$$a = \frac{2p_H \pi}{E_m \sum \rho} \quad (8.53)$$

On détermine  $p_H$  par la condition

$$P = \int_S pdS = \frac{p_H}{a} \frac{2}{3} \pi a^3 = \frac{2}{3} \pi p_H a^2$$

ce qui donne

$$p_H = \frac{3P}{2\pi a^2} \quad (8.54)$$

Il vient alors, en combinant (8.53), (8.54) et (8.52),

$$a = \sqrt[3]{3 \frac{P}{E_m \sum \rho}} = 1,442 \sqrt[3]{\frac{P}{E_m \sum \rho}} \quad (8.55)$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{9}{8} \left( \frac{P}{E_m} \right)^2 \sum \rho} = 1,040 \sqrt[3]{\left( \frac{P}{E_m} \right)^2 \sum \rho} \quad (8.56)$$

$$p_H = \sqrt[3]{\frac{3}{8\pi^3} P \left( E_m \sum \rho \right)^2} = 0,2295 \sqrt[3]{P \left( E_m \sum \rho \right)^2} \quad (8.57)$$

# Chapitre 9

## Principes variationnels de l'élasticité géométriquement linéaire

### 9.1 Introduction

Les principes variationnels constituent un outil fécond pour la construction de solutions approchées en élasticité. De telles solutions ont déjà été construites dans le chapitre relatif à la torsion. Le présent chapitre développe ce concept dans le cas général de l'élasticité géométriquement linéaire.

### 9.2 Principe du minimum de l'énergie totale

Considérons un corps élastique  $V$ . Pour exprimer ses liaisons avec la fondation, nous distinguerons sur sa frontière  $S$  deux parties distinctes et complémentaires  $S_1$  et  $S_2$  telles que

$$\begin{cases} S &= S_1 \cup S_2 \\ \text{mes}(S_1) &\neq 0 \\ \text{mes}(S_1 \cap S_2) &= 0 \end{cases} \quad (9.1)$$

Sur  $S_1$ , on imposera des déplacements  $\bar{u}_i$ , tandis que sur  $S_2$ , on imposera des tractions de surface  $\bar{t}_i$ . En outre, le corps est soumis à des forces de volume

$\bar{f}_i$ . Dans ce qui suit, nous considérerons que les charges  $\bar{f}_i$  et  $\bar{t}_i$  sont *mortes*, c'est-à-dire indépendantes des déplacements.

Un champ de déplacements  $u_i$  sera dit *cinétiquement admissible* si, d'une part,

$$u_i = \bar{u}_i \text{ sur } S_1 \quad (9.2)$$

et si, d'autre part,

$$\mathcal{U}(u) = \int_V W(Du)dv < \infty \quad (9.3)$$

où  $W(Du)$  est la densité d'énergie de déformation calculée à partir de ce champ de déplacements,  $D$  symbolisant l'opérateur de calcul des déformations. Notons que dans les développements qui suivent, il n'est pas nécessaire de supposer le matériau linéaire.

Définissons le potentiel des charges  $\mathcal{P}$  par les conditions

$$\begin{cases} \mathcal{P}(0) = 0 \\ \delta\mathcal{P}(u) = -\delta\mathcal{T}(u) = -\int_V \bar{f}_i \delta u_i dV - \int_{S_2} \bar{t}_i \delta u_i dS \end{cases} \quad (9.4)$$

On considère alors l'énergie totale

$$\mathcal{E}(u) = \mathcal{U}(u) + \mathcal{P}(u) \quad (9.5)$$

Le *principe du minimum de l'énergie totale*, encore appelé *principe de variation des déplacements*, stipule que *parmi tous les déplacements cinématiquement admissibles, celui qui vérifie l'équilibre est caractérisé par le fait qu'il minimise l'énergie totale*.

Soit en effet  $u$  la solution cherchée. Tout autre champ de déplacements cinématiquement admissible  $v$  vérifiera par définition les conditions (9.2) et (9.3), ce qui implique que la variation

$$\delta u = v - u$$

vérifiera

$$\delta u_i = 0 \text{ sur } S_1 \quad (9.6)$$

Il est équivalent de dire qu'une variation de déplacement d'énergie finie est admissible si elle vérifie la condition (9.6). Cela étant, la recherche du minimum est classique. On a

$$\mathcal{E}(u + \delta u) = \mathcal{E}(u) + \delta\mathcal{E} + \frac{1}{2}\delta^2\mathcal{E} + o((\delta u)^2)$$

et les conditions de minimum sont

$$\delta\mathcal{E} = 0, \quad \delta^2\mathcal{E} > 0 \quad \forall \delta u \text{ admissible} \quad (9.7)$$

La condition de nullité de la variation première s'écrit

$$\delta\mathcal{E} = \delta\mathcal{U} + \delta\mathcal{P} = \delta\mathcal{U} - \delta\mathcal{T} = 0 \quad \forall \delta(u) \text{ admissible} \quad (9.8)$$

Il s'agit d'un cas particulier du principe des travaux virtuels, restreint aux seuls déplacements admissibles. Pour obtenir les équations locales qui en résultent, on calcule

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{U} &= \int_V \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{1}{2} (D_i \delta u_j + D_j \delta u_i) dV \\ &= \int_{S_2} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} n_j \delta u_i dS - \int_V D_j \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \delta u_i dV \end{aligned}$$

d'où, en tenant compte de l'expression (9.4) de  $\delta\mathcal{P}$ , on tire

$$\begin{cases} D_j \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} + \bar{f}_i &= 0 \quad \text{dans } V \\ n_j \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} &= \bar{t}_i \quad \text{sur } S_2 \end{cases} \quad (9.9)$$

L'énoncé du principe du minimum de l'énergie totale est dû à Kirchhoff [48] (1850).

De manière générale, un principe variationnel contient certaines variables soumises à priori à ce que l'on appelle des *conditions essentielles*. Le résultat de la variation de ces variables conduit à ce que l'on appelle les *conditions naturelles*. Dans le cas présent, on peut donc établir le tableau suivant :

Principe de l'énergie potentielle totale		
Variable	Conditions essentielles	Conditions naturelles
$u_i$	$u_i = \bar{u}_i$ sur $S_1$	Équilibre dans $V$ et sur $S_1$

Supposons que l'on cherche une solution *approchée* en se limitant à certains déplacements particuliers : on écrira par exemple

$$u_i = \varphi_i(x; \alpha_1, \dots, \alpha_p) \quad (9.10)$$

les  $\alpha_k$  étant des paramètres scalaires. L'application correcte du principe de variation des déplacements suppose que les conditions  $u_i = \bar{u}_i$  soient vérifiées

*exactement*, quelles que soient les valeurs des  $\alpha_k$ . On calculera alors

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(\alpha_1, \dots, \alpha_p) &= \int_V W(D\varphi(x; \alpha_1, \dots, \alpha_p)) dV \\ \mathcal{P}(\alpha_1, \dots, \alpha_p) &= - \int_V \bar{f}_i \varphi_i(x; \alpha_1, \dots, \alpha_p) dV - \int_{S_2} \bar{t}_i \varphi_i(x; \alpha_1, \dots, \alpha_p) dS\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{E}(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = \mathcal{U}(\alpha_1, \dots, \alpha_p) + \mathcal{P}(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$$

ce qui ramène le problème élastique à la minimisation d'une fonction de  $p$  variables scalaires. La solution approchée sera donc caractérisée par les conditions

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha_k} = 0, \quad k = 1, \dots, p \quad (9.11)$$

Que perd-on par rapport à la solution exacte en travaillant de la sorte ? En adoptant la forme restrictive (9.10) pour les déplacements, on limite évidemment l'ensemble des variations possibles. Ces variations sont « responsables » de la vérification de l'équilibre. De fait, la solution approchée ne vérifiera pas les équations d'équilibre locales, mais seulement  $p$  *conditions d'équilibre globales, qui s'écrivent*

$$\int_V \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\varphi)}{\partial \alpha_k} dV = \int_V \bar{f}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_k} dV + \int_{S_2} \bar{t}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_k} dS \quad (9.12)$$

La procédure décrite ci-dessus pour construire une approximation est connue sous le nom de *méthode de Rayleigh-Ritz* [71, 77, 88, 69, 95]. Dans ce type d'ap-proche, ce sont toujours les conditions naturelles qui sont affaiblies (globalisées).

Enfin, la condition  $\delta^2 \mathcal{E} = \delta^2 \mathcal{U} > 0$  permet de distinguer les minima des maxima. Elle s'écrit explicitement

$$\int_V \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \delta \varepsilon_{ij}(u) \delta \varepsilon_{kl}(u) dV > 0$$

et est vérifiée à priori si l'on admet la stabilité locale du matériau, condition qui s'écrit

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \text{ définie positive} \quad (9.13)$$

### 9.3 Multiplicateurs de Lagrange

Rappelons brièvement la technique des multiplicateurs de Lagrange pour la résolution des problèmes *d'extrema liés*. Soit à chercher le minimum d'une fonction  $f(x_1, \dots, x_n)$  dans la variété  $\mathcal{V}$  définie par les conditions

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, g_p(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (p < n) \quad (9.14)$$

Nous supposerons que ces  $p$  liaisons sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire que

$$\sum_{k=1}^p \alpha_k \mathbf{grad} g_k = 0 \implies \alpha_k = 0, \quad k = 1, \dots, p$$

Considérons de nouvelles variables

$$\begin{cases} \xi_1 = g_1(x), \dots, \xi_p = g_p(x) \\ \xi_{p+1}, \dots, \xi_n \text{ arbitraires} \end{cases}$$

pourvu que la relation  $x \leftrightarrow \xi$  soit biunivoque :

$$\frac{\partial(x)}{\partial(\xi)} \neq 0, \quad \frac{\partial(\xi)}{\partial(x)} \neq 0$$

On a alors

$$df = \frac{\partial f}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial \xi_p} d\xi_p + \frac{\partial f}{\partial \xi_{p+1}} d\xi_{p+1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial \xi_n} d\xi_n$$

Il est clair que pour des accroissements vérifiant les conditions (9.14),  $d\xi_1 = \dots = d\xi_p = 0$ , si bien que la condition d'extremum s'écrira

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_{p+1}} d\xi_{p+1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial \xi_n} d\xi_n = 0 \quad \forall(d\xi_{p+1}, \dots, d\xi_n)$$

Or, cette condition s'écrit encore

$$df - \frac{\partial f}{\partial \xi_1} d\xi_1 - \dots - \frac{\partial f}{\partial \xi_p} d\xi_p = 0 \quad \forall(d\xi_1, \dots, d\xi_n)$$

Il existe donc  $p$  nombres

$$\lambda_1 = \frac{\partial f}{\partial \xi_1}, \dots, \lambda_p = \frac{\partial f}{\partial \xi_p} \quad (9.15)$$

tels que

$$d(f - \lambda_1 g_1 - \dots - \lambda_p g_p) = 0 \quad (9.16)$$

Le système de  $(n + p)$  équations aux  $(n + p)$  inconnues  $(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_p)$

$$\begin{cases} \mathbf{grad}(f - \lambda_1 g_1 - \dots - \lambda_p g_p) = 0 \\ g_k = 0 \end{cases}, \quad k = 1, \dots, p \quad (9.17)$$

permet de déterminer le point extrémal cherché. Les  $p$  inconnues supplémentaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont appelées *multiplicateurs de Lagrange*. En définissant la *fonction augmentée*

$$f^*(x, \lambda) = f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \dots - \lambda_p g_p(x) \quad (9.18)$$

on constate que le système (9.17) s'écrit encore

$$\begin{cases} \frac{\partial f^*}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \\ \frac{\partial f^*}{\partial \lambda_k} = 0, \quad k = 1, \dots, p \end{cases} \quad (9.19)$$

Les relations (9.15) permettent de donner l'interprétation suivante des multi-

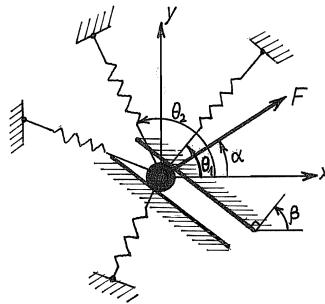


FIGURE 9.1 – Interprétation des multiplicateurs de Lagrange

plicateurs de Lagrange obtenus à la solution :  $\lambda_k$  est le taux de variation de  $f$  lorsque l'on perturbe la  $k^e$  liaison. Illustrons ces considérations par un exemple. Soit (fig. 9.1) un point lié à  $n$  ressorts et astreint à se déplacer dans une glissière, de telle façon que ses déplacements soient soumis à l'équation

$$g = u \cos \beta + v \sin \beta = 0 \quad (9.20)$$

( $\beta$  est l'inclinaison par rapport à l'axe des  $x$  de la normale à la glissière). Le point considéré est fourni à une force  $\mathbf{F}$  inclinée d'un angle  $\alpha$  sur l'axe des  $x$ . L'énergie du ressort  $n^{\circ}i$  vaut

$$\mathcal{U}_i = \frac{1}{2} k_i u_i^2$$

où  $u_i$  est le déplacement dans la direction de ce ressort :

$$u_i = u \cos \theta_i + v \sin \theta_i$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \frac{1}{2} \sum_i k_i (u \cos \theta_i + v \sin \theta_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} K_{uu} u^2 + K_{uv} uv + \frac{1}{2} K_{vv} v^2 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} K_{uu} &= \sum_i k_i \cos^2 \theta_i \\ K_{uv} &= \sum_i k_i \sin \theta_i \cos \theta_i \\ K_{vv} &= \sum_i k_i \sin^2 \theta_i \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{P} = -F(u \cos \alpha + v \sin \alpha)$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathcal{U} + \mathcal{P} \\ &= \frac{1}{2} \sum_i k_i (u \cos \theta_i + v \sin \theta_i)^2 - F(u \cos \alpha + v \sin \alpha) \end{aligned}$$

En l'absence de liaison, la solution s'obtiendrait en écrivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u} &=& K_{uu} u + K_{uv} v - F \cos \alpha = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v} &=& K_{uv} u + K_{vv} v - F \sin \alpha = 0 \end{array} \right. \quad (9.21)$$

Pour tenir compte de la liaison, on considérera la fonction augmentée

$$\mathcal{E}^*(u, v, \lambda) = \mathcal{U} + \mathcal{P} - \lambda(u \cos \beta + v \sin \beta)$$

dont le point stationnaire est donné par

$$\begin{cases} K_{uu}u + K_{uv}v &= F \cos \alpha + \lambda \cos \beta \\ K_{uv}u + K_{vv}v &= F \sin \alpha + \lambda \sin \beta \\ u \cos \beta + v \sin \beta &= 0 \end{cases} \quad (9.22)$$

Comparant le système (9.22) au système (9.21), on constate que  $\lambda$  s'interprète comme une *force normale à la glissière*. De fait, par (9.15),

$$\lambda = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g} \quad (9.23)$$

représente l'effort nécessaire pour obtenir

$$\delta g = \delta u \cos \beta + \delta v \sin \beta = 1$$

C'est donc la *réaction* de la glissière, positive dans la direction indiquée par l'angle  $\beta$ .

Les résultats qui précèdent peuvent être généralisés aux problèmes variationnels. Le problème consistant à chercher l'extremum de

$$\mathcal{A}(u_1, \dots, u_n) = \int_V f(u_1, \dots, u_n) dV$$

moyennant les conditions

$$g_1(u) = 0, \dots, g_p(u) = 0 \text{ dans } V$$

revient à écrire, *en chaque point de*  $V$

$$\sum_i \frac{\delta f}{\delta u_i} \delta u_i = 0$$

chaque fois que

$$\sum_i \frac{\delta g_1}{\delta u_i} \delta u_i = 0, \dots, \sum_i \frac{\delta g_p}{\delta u_i} \delta u_i = 0$$

Il faut donc, en chaque point de  $V$ , résoudre le problème

$$\begin{cases} \delta f - \sum_{k=1}^p \lambda_k \delta g_k &= 0 \\ g_k &= 0 \end{cases}$$

Les multiplicateurs  $\lambda_k$  varient évidemment d'un point à l'autre : on a donc des *champs de multiplicateurs de Lagrange*. La fonctionnelle augmentée est alors

$$\mathcal{A}^*(u, \lambda) = \int_V \left[ f(u) - \sum_k \lambda_k g_k(u) \right] dV$$

les  $\lambda_k$  étant des fonctions des coordonnées.

## 9.4 Principe à quatre champs de Fraeijjs de Veu-beke

Dans le principe de variation des déplacements, les déformations n'apparaissent que comme dérivées des déplacements. La compatibilité intérieure, exprimée par

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(D_i u_j + D_j u_i) \quad \text{dans } V \quad (9.24)$$

est donc vérifiée à priori. De même les conditions de compatibilité sur  $S_1$ ,

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{sur } S_1 \quad (9.25)$$

doivent être vérifiées à priori.

Une autre manière de procéder consiste à considérer les déformations  $\varepsilon_{ij}$  comme des variables indépendantes et à ignorer au départ les relations (9.25). Dans cette optique, le problème élastique consiste à minimiser la fonctionnelle

$$\mathcal{E}(\varepsilon, u) = \mathcal{U}(\varepsilon) + \mathcal{P}(u) \quad (9.26)$$

avec

$$\mathcal{U}(\varepsilon) = \int_V W(\varepsilon) dV \quad (9.27)$$

moyennant les *liaisons* (9.24) et (9.25), dont on tiendra compte à l'aide d'un champ spatial de multiplicateurs de Lagrange  $\sigma_{ij}$  pour la condition (9.24) et d'un champ superficiel de multiplicateurs de Lagrange  $t_i$  pour la condition (9.25). La fonctionnelle augmentée sera donc

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^*(\varepsilon, u, \sigma, t) = & \\ & \int_V \left\{ W(\varepsilon) + \sigma_{ij} \left[ \frac{1}{2}(D_i u_j + D_j u_i) - \varepsilon_{ij} \right] - \bar{f}_i u_i \right\} dV \\ & - \int_{S_2} \bar{t}_i u_i dS - \int_{S_1} t_i (u_i - \bar{u}_i) dS \end{aligned} \quad (9.28)$$

Elle sera extrémale par rapport à toutes les variables, sans conditions essentielles. Ce principe est souvent attribué à Washizu [93], bien qu'il ait été énoncé cinq ans plus tôt par Fraeijis de Veubeke [27]. L'exposé ci-dessus suit du reste ce dernier auteur qui, pour la méthode utilisée, faisait référence à Friedrichs [11, 38]. En variant la fonctionnelle  $\mathcal{E}^*$  par rapport aux quatre champs  $\varepsilon, u, \sigma, t$ , libres de toute liaison, on obtient toutes les équations de l'élasticité.

1. En variant les déformations, on obtient visiblement l'équation

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \quad (9.29)$$

qui donne aux multiplicateurs  $\sigma_{ij}$  la signification *énergétique* de contraintes, en tant que grandeurs liées aux déformations. Les relations (9.29) sont en fait les *équations constitutives*.

2. La variation des déplacements donne

$$\begin{aligned} \int_V \left[ \sigma_{ij} \frac{1}{2} (D_i \delta u_j + D_j \delta u_i) - \bar{f}_i \delta u_i \right] dV \\ - \int_{S_2} \bar{t}_i \delta u_i ds - \int_{S_1} t_i \delta u_i dS = 0 \end{aligned} \quad (9.30)$$

Effectuant une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \int_S n_j \sigma_{ij} \delta u_i dS - \int_V (D_j \sigma_{ij}) \delta u_i dV - \int_V \bar{f}_i \delta u_i dV \\ - \int_{S_2} \bar{t}_i \delta u_i dS - \int_{S_1} t_i \delta u_i dS = 0 \end{aligned} \quad (9.31)$$

ce qui conduit aux équations

$$D_j \sigma_{ij} + \bar{f}_i = 0 \text{ dans } V \quad (9.32)$$

$$n_j \sigma_{ij} = \bar{t}_i \text{ sur } S_2 \quad (9.33)$$

$$n_j \sigma_{ij} = t_i \text{ sur } S_1 \quad (9.34)$$

L'équation (9.32) exprime l'équilibre intérieur pour les contraintes  $\lambda_{ij}$ ; l'équation (9.33), l'équilibre sur  $S_2$ ; enfin, l'équation (9.34) permet d'interpréter les  $t_i$  comme des tractions de surface, réactions sur  $S_1$ .

3. La variation des contraintes  $\sigma_{ij}$  restitue les relations de compatibilité (9.24). Ces contraintes apparaissent donc comme les réactions aux forces qui voudraient provoquer la dislocation du corps.

4. La variation des réactions  $t_i$  restitue la compatibilité superficielle. Les  $t_i$  apparaissent donc comme les réactions aux forces qui voudraient rompre les liaisons cinématiques sur  $S_1$ .

Ces relations sont résumées dans le tableau suivant :

Principe à 4 champs de FdV		
Variable	Conditions essentielles	Conditions naturelles
$u_i$	néant	Équilibre dans $V$ , sur $S_1$ et sur $S_2$
$\varepsilon_{ij}$	néant	Équations constitutives
$\sigma_{ij}$	néant	Compatibilité intérieure
$t_i$	néant	Compatibilité sur $S_1$

On constate donc que, dans un langage imagé,

- la variation des déplacements est « responsable » de l'équilibre : toute restriction sur les déplacements mènera à des équations d'équilibre globalisées ;
- la variation des contraintes  $\sigma_{ij}$  est « responsable » de la compatibilité intérieure : toute restriction sur les contraintes mènera à des conditions de compatibilité globalisées ;
- la variation des réactions  $t_i$  est « responsable » de la compatibilité extérieure : toute restriction sur les  $t_i$  mènera à une compatibilité superficielle globalisée ;
- la variation des déformations  $\varepsilon_{ij}$  est « responsable » des équations constitutives : toute restriction sur les déformations mènera à une globalisation des équations constitutives.

## 9.5 Principe de Hellinger-Reissner

A partir du principe à quatre champs de Fraeijns de Veubeke, on peut en obtenir d'autres, plus simples, en supposant certaines relations vérifiées à priori.

Supposons les équations constitutives (9.29) vérifiées. La fonctionnelle à utiliser sera alors

$$\mathcal{R}(u, \sigma, t) = \min_{\varepsilon} \mathcal{E}^*(\varepsilon, u, \sigma, t)$$

où, bien entendu, les déformations cesseront d'être indépendantes, et devront être exprimées en termes des  $\sigma_{ij}$ , ce qui pose le problème de l'invertibilité des relations constitutives.

### 9.5.1 Invertibilité des relations constitutives

Les relations constitutives

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

peuvent-elles être inversées en une relation donnant  $\varepsilon$  en fonction de  $\sigma$ ? Pour construire une telle relation, on partira d'un couple  $(\sigma, \varepsilon)$  donné et on notera que les relations constitutives impliquent

$$d\sigma_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} d\varepsilon_{kl} = H_{ijkl} d\varepsilon_{kl}$$

Si l'on peut inverser cette relation sous la forme

$$d\varepsilon_{kl} = H_{ijkl}^{-1} d\sigma_{kl} \quad (9.35)$$

on peut calculer  $\varepsilon$  en fonction de  $\sigma$  par intégration. Cette inversion est possible si et seulement si

$$(H_{ijkl} \eta_{kl} = 0 \quad \text{avec} \quad \eta_{kl} = \eta_{lk}) \Rightarrow \eta_{kl} = 0$$

Comme nous le verrons en exercice, on peut aisément imaginer des structures de la densité d'énergie de déformation pour lesquelles cette relation n'est pas vérifiée. Il faut en outre remarquer que les relations (9.35) ne définissent des déformations univalentes que si

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl} \partial \sigma_{pq}} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{pq} \partial \sigma_{kl}}$$

soit

$$\frac{\partial H_{ijkl}^{-1}}{\partial \sigma_{pq}} = \frac{\partial H_{ijpq}^{-1}}{\partial \sigma_{kl}}$$

condition dont la vérification à priori n'est pas évidente. Une autre manière de procéder est fondée sur la transformation de Legendre, que nous allons introduire ci-dessous.

### 9.5.2 Densité d'énergie complémentaire

Dans le principe à quatre champs, on voit apparaître le groupement

$$A(\sigma, \varepsilon) = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - W(\varepsilon)$$

dont les propriétés sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial \sigma_{ij}} &= \varepsilon_{ij} \\ \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} &= \sigma_{ij} - \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}\end{aligned}$$

Définissons la fonction

$$\Phi(\sigma) = \max_{\varepsilon} A(\sigma, \varepsilon) \quad (9.36)$$

Il s'agit d'une fonction de  $\sigma$  uniquement, ayant pour dérivées

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial A}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij} \quad (9.37)$$

On l'appelle *densité d'énergie complémentaire*. Ce procédé de construction de la fonction  $\Phi$ , qui permet en fait d'inverser les relations constitutives, porte le nom de *transformation de Legendre* ou encore, de *transformation de contact*.

On donne à la fonction  $\Phi(\sigma)$  le nom de *densité d'énergie complémentaire*. Cette appellation provient du fait que dans le cas d'un problème unidimensionnel, si l'on trace la courbe  $\sigma = F(\varepsilon)$ , la densité d'énergie de déformation représente l'aire comprise entre cette courbe et l'axe des  $\varepsilon$ . La densité d'énergie complémentaire représente l'aire comprise entre la courbe et l'axe des  $\sigma$  (fig. 9.2). Elles se complètent mutuellement pour former un rectangle d'aire  $\sigma\varepsilon$ .

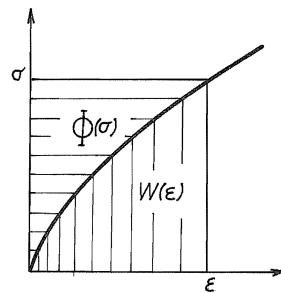


FIGURE 9.2 – Énergie complémentaire

Dans le cas de relations constitutives linéaires et, plus généralement, *homogènes de degré 1*, on a, pour  $\alpha \in [0, 1]$

$$\sigma_{ij}(\alpha \varepsilon) = \alpha \sigma_{ij}(\varepsilon)$$

et en progressant par accroissement homogène des déformations,

$$\begin{aligned}
 W(\varepsilon) &= \int_0^\varepsilon \sigma_{ij}(\varepsilon^*) d\varepsilon_{ij}^* \\
 &= \int_0^1 \sigma_{ij}(\alpha\varepsilon) \varepsilon_{ij} d\alpha \\
 &= \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \int_0^1 \alpha d\alpha \\
 &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}
 \end{aligned} \tag{9.38}$$

si bien que la densité d'énergie de déformation et la densité d'énergie complémentaire ont constamment la même valeur. Ce résultat est connu sous le nom de *théorème de Clapeyron intérieur*.

### 9.5.3 Principe de Hellinger-Reissner

Nous sommes à présent en mesure d'expliciter la fonctionnelle de Hellinger-Reissner,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}(u, \sigma, \mu) &= \min_{\varepsilon} \mathcal{E}^*(\varepsilon, u, \sigma, \mu) = \\
 &= \int_V \left[ \sigma_{ij} \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) - \Phi(\sigma) - \bar{f}_i u_i \right] dV \\
 &\quad - \int_{S_2} \bar{t}_i u_i dS - \int_{S_1} t_i (u_i - \bar{u}_i) dS
 \end{aligned} \tag{9.39}$$

C'est le principe de Hellinger-Reissner (Reissner l'a énoncé en 1950 [74] mais il a été découvert plus tard que Hellinger l'avait déjà publié en 1914). Dans ce principe,

1. la variation des contraintes conduit à une expression des conditions de compatibilité sous la forme de relations entre les contraintes et les dérivées des déplacements :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) \tag{9.40}$$

2. la variation des réactions  $t_i$  conduit aux conditions de compatibilité extérieures ;

3. la variation des déplacements mène aux équations d'équilibre

$$\begin{cases} D_j \sigma_{ji} + \bar{f}_i &= 0 \quad \text{dans } V \\ n_j \sigma_{ji} &= \bar{t}_i \quad \text{sur } S_2 \\ n_j \sigma_{ji} &= t_i \quad \text{sur } S_1 \end{cases} \quad (9.41)$$

Ces résultats sont résumés dans le tableau suivant :

Principe de Hellinger-Reissner		
Variable	Conditions essentielles	Conditions naturelles
$u_i$	néant	Équilibre dans $V$ , sur $S_1$ et sur $S_2$
$\sigma_{ij}$	néant	Compatibilité intérieure (sous forme d'équations constitutives)
$t_i$	néant	Compatibilité sur $S_1$

## 9.6 Principe à deux champs de Fraeijjs de Veubeke [33]

Dans le principe à quatre champs, on peut également imposer à priori l'équilibre, sous forme des travaux virtuels :

$$\int_V \left[ \sigma_{ij} \frac{1}{2} (D_i \delta u_j + D_j \delta u_i) - \bar{f}_i \delta u_i \right] dV - \int_{S_2} \bar{t}_i \delta u_i dS - \int_{S_1} t_i \delta u_i dS = 0 \quad (9.42)$$

Comme aucune restriction n'est imposée aux déplacements, on peut en particulier poser  $\delta u_i = u_i$ , ce qui donne

$$\int_V \left[ \sigma_{ij} \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) - \bar{f}_i u_i \right] dV - \int_{S_2} \bar{t}_i u_i dS - \int_{S_1} t_i u_i dS = 0 \quad (9.43)$$

Soustrayant cette relation à l'expression générale de  $\mathcal{E}^*$ , on obtient

$$\int_V [W(\varepsilon) - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}] dV + \int_{S_1} t_i \bar{u}_i dS$$

et comme l'équilibre implique en particulier

$$t_i = n_j \sigma_{ij}$$

on est conduit à la fonctionnelle

$$\mathcal{F}(\varepsilon, \sigma) = \int_V [W(\varepsilon) - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}]dV + \int_{S_1} n_j \sigma_{ji} \bar{u}_i dS \quad (9.44)$$

dont le caractère stationnaire constitue le principe à deux champs de Fraeijns de Veubeke. Dans ce principe, les déformations sont libres de toute liaison, et leur variation fournit les équations constitutives

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}$$

Le résultat de la variation des contraintes  $\sigma_{ij}$ , soumises aux conditions d'équilibre, est la compatibilité, comme on peut s'en rendre compte en supprimant, dans le tableau relatif au principe à quatre champs, les lignes relatives aux déplacements et aux  $t_i$  :

Principe à 2 champs de FDV		
Variable	Conditions essentielles	Conditions naturelles
$\varepsilon_{ij}$	néant	Équations constitutives
$\sigma_{ij}$	équilibre dans $V$ , sur $S_1$ et sur $S_2$	Compatibilité

Signalons qu'il est possible de vérifier à priori l'équilibre pour  $\bar{f}_i = 0$  à l'aide de fonctions de contrainte : fonction d'Airy en état plan de contrainte, fonctions de Maxwell ou de Morera dans le cas tridimensionnel et fonction de Prandtl en torsion.

## 9.7 Principe du minimum de l'énergie complémentaire

Ce principe, encore appelé principe de variation des contraintes, est le symétrique du principe de variation des déplacements. On peut l'établir de deux manières.

1. Dans le principe à deux champs de Fraeijns de Veubeke, on assure à priori les équations constitutives, ce qui mène à utiliser, comme dans le principe de Hellinger-Reissner, la densité d'énergie complémentaire  $\Phi(\sigma)$ . On obtient ainsi, après un changement de signe, la fonctionnelle

$$\mathcal{C}(\sigma) = \int_V \Phi(\sigma) dV - \int_{S_1} n_j \sigma_{ji} \bar{u}_i dS \quad (9.45)$$

stationnaire par rapport à tous les états de contrainte *statiquement admissibles*, c'est-à-dire vérifiant l'équilibre intérieur et extérieur.

2. Dans le principe de Hellinger-Reissner, on suppose l'équilibre vérifié à priori. La transformation suit la même voie que pour la déduction du principe à deux champs de Fraeijs de Veubeke et donne également la fonctionnelle (9.45).

Ce principe est résumé par le tableau suivant :

Principe de variation des contraintes		
Variable	Conditions essentielles	Conditions naturelles
$\sigma_{ij}$	équilibre dans $V$ , sur $S_1$ et sur $S_2$	Compatibilité

Si l'on utilise le principe de l'énergie complémentaire pour construire des solutions approchées, les champs de contrainte utilisés doivent tous vérifier exactement les conditions d'équilibre. La solution approchée ne vérifiera la compatibilité que sous certaines formes globales. Il ne sera donc plus possible de définir des déplacements locaux et il faudra se satisfaire de certaines valeurs moyennes.

## 9.8 Note sur la forme faible de la compatibilité

Notons  $E$  l'espace des champs de tenseurs symétriques du second ordre sur  $V$ , muni du produit scalaire

$$(\varphi, \psi) = \int_V \varphi_{ij} \psi_{ij} dV \quad (9.46)$$

Un champ de tenseurs compatible est par définition de la forme

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(D_i u_j + D_j u_i)$$

où  $u_i$  est un champ de déplacements admissible, c'est-à-dire vérifiant

$$\begin{cases} \|\varepsilon(u)\|^2 &= \int_V \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(u) dV < \infty \\ u_i &= \bar{u}_i \text{ sur } S_1 \end{cases}$$

Une *variation de tenseur compatible* est de la forme

$$\delta \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\delta u)$$

où  $\delta u$  est la différence de deux champs de déplacements admissibles, de telle sorte que sur  $S_1$ , on a

$$\delta u_i = 0$$

Les variations de tenseurs compatibles forment un sous-espace  $C_0$  de  $E$ . On peut montrer que, muni du produit scalaire (9.46), ce sous-espace est complet et donc, fermé dans  $E$ . On notera que si l'on connaît un champ de déplacements particulier  $u_0$  tel que  $u_{0i} = \bar{u}_i$  sur  $S_1$ , tout champ de déplacements admissible est de la forme

$$u = u_0 + \Delta u$$

où  $\Delta u$  est une variation admissible de déplacement.

Considérons à présent le complément orthogonal  $S_0$  de  $C_0$ . Il est défini par la condition

$$\sigma \in S_0 \Leftrightarrow \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = 0 \quad \forall \varepsilon \in C_0$$

Ceci s'écrit explicitement

$$\int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2} (D_i \delta u_j + D_j \delta u_i) dV = 0$$

ce qui signifie que  $\sigma$  est un champ d'autocontrainte. Ainsi,  $S_0$  n'est autre que l'ensemble des champs d'autocontrainte. Comme  $C_0$  est fermé, l'orthogonal de  $S_0$  est  $C_0$ .

Soit à présent un champ de tenseurs  $\varphi_{ij}$  vérifiant

$$\int_V \varphi_{ij} \delta \sigma_{ij} dV - \int_{S_1} n_j \delta \sigma_{ij} \bar{u}_i dS = 0 \tag{9.47}$$

pour tout champ d'autocontrainte  $\delta \sigma_{ij}$ . Introduisant un champ de déplacements  $u_0$  tel que  $u_{0i} = \bar{u}_i$  sur  $S_1$ , on a

$$\begin{aligned} \int_V \varepsilon_{ij}(u_0) \delta \sigma_{ij} dV &= \int_V \delta \sigma_{ij} \frac{1}{2} (D_i u_{0j} + D_j u_{0i}) dV \\ &= \int_{S_1} n_j \delta \sigma_{ij} u_{0i} dS + \int_{S_2} n_j \delta \sigma_{ij} u_{0i} dS + \int_V u_{0i} D_j \delta \sigma_{ij} dV \\ &= \int_{S_1} n_j \delta \sigma_{ij} u_{0i} dS + 0 + 0 \end{aligned}$$

La condition (9.47) est donc équivalente à

$$\int_V \delta \sigma_{ij} [\varphi_{ij} - \varepsilon_{ij}(u_0)] dV = 0 \quad \forall \delta \sigma$$

ou

$$\varphi_{ij} - \varepsilon_{ij}(u_0) \in C_0$$

ce qui revient à dire qu'il existe une variation admissible de déplacement  $\Delta u$  telle que

$$\varphi_{ij} = \varepsilon_{ij}(u_0) + \varepsilon_{ij}(\Delta u)$$

ou encore

$$\varphi_{ij} = \varepsilon_{ij}(u_0 + \Delta u)$$

et ceci exprime précisément la compatibilité.

## 9.9 Exemple de solution approchée construite par le calcul des variations

Pour illustrer la méthode variationnelle de construction de solutions approchées, étudions la flexion des poutres en  $I$  (fig. 9.3). Nous ferons les hypothèses suivantes :

1. Les *semelles* sont parfaitement flexibles dans le plan  $x0y$ , ce qui revient à dire qu'elles ne résistent qu'à l'extension. On posera donc

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \text{ dans les semelles} \quad (9.48)$$

On supposera en outre le déplacement axial uniforme dans chacune des semelles :

$$u = u_{\pm}(x) \quad (9.49)$$

l'indice (+) correspondant à la semelle inférieure (située en  $y > 0$ ) et l'indice (-), à l'autre semelle.

2. Dans *l'âme*, on admettra d'abord que l'état de contrainte est plan

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (9.50)$$

On ajoutera les hypothèses cinématiques suivantes :

$$\begin{cases} u &= U(x) + y\alpha(x) \\ v &= V(x) \end{cases} \quad (9.51)$$

La première représente une flexion à la Navier. La seconde, assez bien vérifiée si la poutre est raidie par des éléments transversaux non représentés

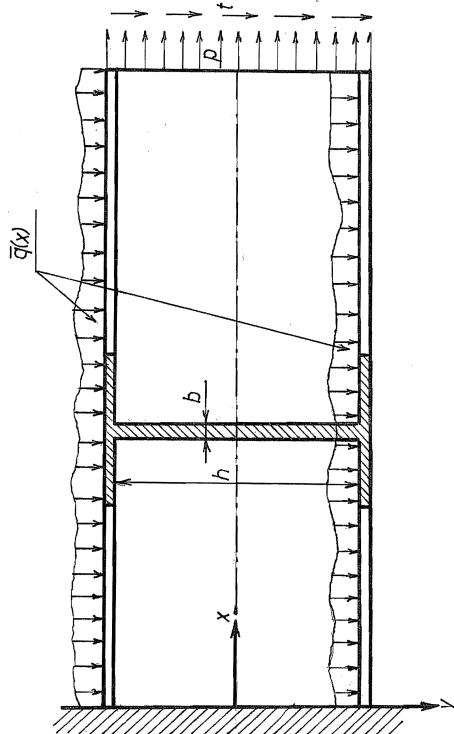


FIGURE 9.3 – Poutre en I

ici, entraîne que les charges transversales, de densité linéique  $q(x)$ , ont un travail virtuel

$$\delta \mathcal{T}_q = \int_0^\ell \bar{q}(x) \delta V(x) dx \quad (9.52)$$

*quel que soit leur point d'application sur la section de la poutre.* C'est pour cette raison que nous les avons représentées distribuées sur les deux semelles.

3. La *liaison* entre l'âme et la semelle sera assurée par les équations de compatibilité

$$v_{\text{semelles}} = V \quad (9.53)$$

et

$$u_+ = U + \frac{h}{2}\alpha, \quad u_- = U - \frac{h}{2}\alpha \quad (9.54)$$

Pour fixer les idées, nous considérerons une poutre console de longueur  $\ell$ . les conditions d'encastrement sont

$$U(0) = 0, \quad \alpha(0) = 0, \quad V(0) = 0 \quad (9.55)$$

En  $x = \ell$ , la poutre est soumise à des efforts longitudinaux  $\bar{p}$  et transversaux  $\bar{t}$ . Au vu des hypothèses relatives aux efforts dans les semelles, on doit avoir  $\bar{t} = 0$  sur celles-ci. Par contre, ces charges sont compatibles avec les hypothèses relatives à l'âme, et fournissent un travail virtuel

$$\delta\mathcal{T}_t = \int_{\Omega_{\text{âme}}} \bar{t} \delta V(\ell) d\Omega = \bar{T} \delta V(\ell) \text{ où } \bar{T} = \int_{\Omega_{\text{âme}}} \bar{t} d\Omega \quad (9.56)$$

$\bar{T}$  étant l'*effort tranchant* imposé. Cette globalisation des efforts résulte des hypothèses cinématiques. Quant aux efforts  $\bar{p}$ , ils peuvent être répartis aussi bien sur l'âme que sur les semelles. Leur travail virtuel vaut

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{T}_p &= \int_{\Omega_+} \bar{p} \left[ \delta U(\ell) + \frac{h}{2} \delta \alpha(\ell) \right] d\Omega + \int_{\Omega_-} \bar{p} \left[ \delta U(\ell) - \frac{h}{2} \delta \alpha(\ell) \right] d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega_a} \bar{p} [\delta U(\ell) + y \delta \alpha(\ell)] d\Omega \\ &= \bar{N} \delta U(\ell) + \bar{M} \delta \alpha(\ell) \end{aligned} \quad (9.57)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \bar{N} &= \int_{\Omega_+} \bar{p} d\Omega + \int_{\Omega_-} \bar{p} d\Omega + \int_{\Omega_a} \bar{p} d\Omega && (\text{effort normal}) \\ \bar{M} &= \frac{h}{2} \int_{\Omega_+} \bar{p} d\Omega - \frac{h}{2} \int_{\Omega_-} \bar{p} d\Omega + \int_{\Omega_a} \bar{p} y d\Omega && (\text{moment}) \end{aligned} \right\} \quad (9.58)$$

La fonctionnelle du principe de Hellinger-Reissner s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \int_0^\ell \left\{ \int_{\Omega_a} \left[ \sigma_x \left( \frac{dU}{dx} + y \frac{d\alpha}{dx} \right) + \tau_{xy} \left( \alpha + \frac{dV}{dx} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y}{2E} - \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \right] d\Omega \right\} dx \\ &\quad + \int_{\Omega_+} \left[ \sigma_x \left( \frac{dU}{dx} + \frac{h}{2} \frac{d\alpha}{dx} \right) - \frac{\sigma_x^2}{2E} \right] d\Omega + \int_{\Omega_-} \left[ \sigma_x \left( \frac{dU}{dx} - \frac{h}{2} \frac{d\alpha}{dx} \right) - \frac{\sigma_x^2}{2E} \right] d\Omega \\ &\quad - q(x)V(x) dx - \bar{N}U(\ell) - \bar{M}\alpha(\ell) - \bar{T}V(\ell) \end{aligned} \quad (9.59)$$

Par variation des différentes grandeurs qui interviennent dans cette fonctionnelle, on peut obtenir les équations de la poutre.

1. *Variation de  $\sigma_y$*  : on obtient

$$\frac{\sigma_y - \nu\sigma_x}{E} = 0$$

soit

$$\sigma_y = \nu\sigma_x \quad (9.60)$$

2. *Variation de  $\sigma_x$*  : dans l'âme, on obtient

$$\sigma_x - \nu\sigma_y = E \left( \frac{dU}{dx} + y \frac{d\alpha}{dx} \right)$$

ce qui, combiné avec (9.60), donne

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} \left( \frac{dU}{dx} + y \frac{d\alpha}{dx} \right) \quad (9.61)$$

*Dans les semelles*, on a

$$(\sigma_x)_{\pm} = E \left( \frac{dU}{dx} \pm \frac{h}{2} \frac{d\alpha}{dx} \right) \quad (9.62)$$

3. *Variation de  $U$*  : ce déplacement ne dépendant que de  $x$ , il faut d'abord intégrer sur la section, ce qui donne

$$\int_0^\ell \left[ \int_{\Omega_+} \sigma_x d\Omega + \int_{\Omega_-} \sigma_x d\Omega + \int_{\Omega_a} \sigma_x d\Omega \right] \frac{d\delta U}{dx} dx = \bar{N} \delta U(\ell) = 0$$

ce qui fait apparaître le groupement

$$N = \int_{\Omega_+} \sigma_x d\Omega + \int_{\Omega_-} \sigma_x d\Omega + \int_{\Omega_a} \sigma_x d\Omega \quad (9.63)$$

qui s'identifie à l'*effort normal*. Il vient donc

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\ell N \frac{d\delta U}{dx} dx - \bar{N} \delta U(\ell) \\ &= [N \delta U]_0^\ell - \bar{N} \delta U(\ell) - \int_0^\ell \frac{dN}{dx} \delta U(x) dx \end{aligned}$$

Tenant compte de la condition d'encastrement  $\delta U(0) = 0$ , on obtient

$$\begin{cases} \frac{dN}{dx} = 0 & \text{dans } ]0, \ell[ \\ N(\ell) = \bar{N} \end{cases} \quad (9.64)$$

4. *Variation de V* : on obtient

$$\int_0^\ell \left\{ \left[ \int_{\Omega_a} \tau_{xy} dS \right] \frac{d\delta V}{dx} - q\delta V \right\} dx - \bar{T}\delta V(\ell) = 0$$

En définissant l'*effort tranchant*

$$T = \int_{\Omega_a} \tau_{xy} dS \quad (9.65)$$

on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\ell \left( T \frac{d\delta V}{dx} - q\delta V \right) dx - \bar{T}\delta V(\ell) \\ &= [T\delta V]_0^\ell - \bar{T}\delta V(\ell) - \int_0^\ell \left( \frac{dT}{dx} + q \right) \delta V dx \end{aligned}$$

d'où, comme  $\delta V(0) = 0$ , les équations

$$\begin{cases} \frac{dT}{dx} + q = 0 & \text{dans } ]0, \ell[ \\ T(\ell) = \bar{T} \end{cases} \quad (9.66)$$

5. *Variation de  $\alpha$*  : on obtient ici

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \left\{ \left[ \int_{\Omega_+} \frac{h}{2} \sigma_x d\Omega - \int_{\Omega_-} \frac{h}{2} \sigma_x d\Omega + \int_{\Omega_a} y \sigma_x d\Omega \right] \frac{d\delta\alpha}{dx} \right. \\ \left. + \left[ \int_{\Omega_a} \tau_{xy} d\Omega \right] \delta\alpha \right\} dx - \bar{M}\delta\alpha(\ell) = 0 \end{aligned}$$

Définissant le *moment*

$$M = \frac{h}{2} \int_{\Omega_+} \sigma_x d\Omega - \frac{h}{2} \int_{\Omega_-} \sigma_x d\Omega + \int_{\Omega_a} \sigma_x y d\Omega \quad (9.67)$$

et tenant compte de la définition (9.65), on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\ell \left( M \frac{d\delta\alpha}{dx} + T\delta\alpha \right) dx \\ &= [M\delta\alpha]_0^\ell - \bar{M}\delta\alpha(\ell) - \int_0^\ell \left( \frac{dM}{dx} - T \right) \delta\alpha dx \end{aligned}$$

ce qui, comme  $\delta\alpha(0) = 0$ , donne

$$\begin{cases} \frac{dM}{dx} = T & \text{dans } ]0, \ell[ \\ M(\ell) = \bar{M} \end{cases} \quad (9.68)$$

6. *Variation de  $\tau_{xy}$*  : il vient

$$\tau_{xy} = G \left( \alpha + \frac{dV}{dx} \right) \text{ dans l'âme} \quad (9.69)$$

Comme on peut le voir, les contraintes étant libres de toute liaison, les équations de compatibilité (9.60), (9.61), 9.62 et (9.69) sont vérifiées localement. Au contraire, les restrictions faites sur les déplacements mènent à des équations d'équilibre globales. Ceci était prévisible à partir du tableau résumant le fonctionnement du principe de Hellinger-Reissner.

Par ailleurs, en combinant les équations ((9.60), (9.61), 9.62) et (9.69) aux définitions (9.63), (9.65) et (9.67) des résultantes, on peut obtenir des équations constitutives globales. Ce seront, en notant  $b$  l'épaisseur de l'âme,

$$\begin{cases} N = EA \frac{dU}{dx} & \text{avec } A = \Omega_+ + \Omega_- + \frac{bh}{1-\nu^2} \\ T = GS \left( \alpha + \frac{dV}{dx} \right) & \text{avec } S = bh \\ M = EI \frac{d\alpha}{dx} & \text{avec } I = \Omega_+ \frac{h^2}{4} + \Omega_- \frac{h^2}{4} + \frac{bh^3}{12(1-\nu^2)} \end{cases} \quad (9.70)$$

On retrouve ici des calculs simplifiés assez courants dans la pratique, consistant, d'une part, à utiliser la section de l'âme comme section de cisaillement et, d'autre part, à négliger l'inertie propre des semelles. Quant au facteur  $(1-\nu^2)$ , il provient de l'hypothèse selon laquelle le déplacement vertical ne dépend pas de  $y$ .

## 9.10 Classification des approches variationnelles

D'après le type d'hypothèses adoptées, on peut distinguer :

- les approches dont les hypothèses ne portent que sur les déplacements (avec respect des conditions sur  $S_1$ ), que l'on appelle *cinétiquement admissibles* (C.A.) ;
- les approches dont les hypothèses ne portent que sur les contraintes (avec respect de l'équilibre dans  $V$  et sur  $S_2$ ), que l'on appelle *statiquement admissibles* (S.A.) ;
- les approches dont les hypothèses portent à la fois sur les contraintes et les déplacements, que l'on appelle *mixtes*.

Les approches C.A. mènent à des équations d'équilibre approchées (globales), tandis que les approches S.A. donnent des équations de compatibilité approchées. Dans les approches mixtes, ni les équations d'équilibre, ni les équations de compatibilité ne sont vérifiées localement.

Ainsi, la théorie de la section précédente est une approche mixte. Cependant, si l'on considère que les hypothèses (9.48), (9.49) et (9.50) *définissent* la notion de poutre en I, il s'agit d'une théorie C.A. dans ce cadre. On trouvera dans les exercices du présent chapitre une théorie S.A. dans le cadre des poutres, qui mène à une vérification locale de l'équilibre, mais non de la compatibilité.

## 9.11 Analyse duale

Qui dit solution approchée dit erreur. Ne peut-on pas essayer de chiffrer cette dernière ? C'est l'objet de l'analyse duale, consistant à effectuer, pour un même problème, une analyse C.A *et* une analyse S.A., puis de les comparer.

### 9.11.1 Cas des relations constitutives linéaires

Nos commencerons par envisager le cas de relations constitutives linéaires, qui est le plus simple et celui dont les conclusions sont les plus fortes. Le présent mode d'exposé suit la méthode développée par l'auteur [17, 21, 20, 18].

Soit donc un problème élastique linéaire, dont la solution est caractérisée par des déplacements  $u$  et des contraintes  $\sigma$ , obtenues par variation des fonctionnelles

$$\begin{cases} \mathcal{E}(u) &= \int_V W(Du)dV - \int_V \bar{f}_i u_i dV - \int_{S_2} \bar{t}_i u_i dS \\ \mathcal{C}(\sigma) &= \int_V \Phi(\sigma)dV - \int_{S_1} n_j \sigma_{ji} \bar{u}_i dS \end{cases}$$

Par définition de l'énergie complémentaire, on a

$$\int_V W(Du)dV + \int_V \Phi(\sigma)dV = \int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) dV$$

Or, en posant, dans le théorème des travaux virtuels,

$$\delta u_i = u_i \text{ dans } V \cup S_2 \text{ et } \delta u_i = \bar{u}_i \text{ sur } S_1$$

on obtient

$$\int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) dV - \int_V \bar{f}_i u_i dS - \int_{S_2} \bar{t}_i u_i dS - \int_{S_1} n_j \sigma_{ji} \bar{u}_i dS = 0$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{E}(u) + \mathcal{C}(\sigma) = 0 \quad (9.71)$$

Pour un *quelconque* autre champ de déplacements C.A.  $\tilde{u}$ , on peut écrire  $\tilde{u}_i = u_i + \Delta u_i$  et, comme l'énergie totale est une fonction quadratique,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\tilde{u}) &= \mathcal{E}(u + \Delta u) \\ &= \mathcal{E}(u) + \delta\mathcal{E}(u; \Delta u) + \frac{1}{2}\delta^2\mathcal{E}(u; \Delta u) \\ &= \mathcal{E}(u) + \frac{1}{2}\delta^2\mathcal{E}(u; \Delta u) \end{aligned} \quad (9.72)$$

puisque le déplacement  $u$  réalise la stationnarité. On a d'ailleurs

$$\delta^2\mathcal{E}(u; \Delta u) = \int_V C_{ijkl}\varepsilon_{ij}(\Delta u)\varepsilon_{kl}(\Delta u)dV \geq 0 \quad (9.73)$$

et cette grandeur est une mesure énergétique de l'erreur, définie positive, que l'on peut noter  $\|\Delta u\|$ .

De la même façon, pour un *quelconque* autre champ de contraintes  $\tilde{\sigma}$ , on peut écrire  $\tilde{\sigma} = \sigma + \Delta\sigma$  et on a comme ci-dessus

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\tilde{\sigma}) &= \mathcal{C}(\sigma + \Delta\sigma) \\ &= \mathcal{C}(\sigma) + \delta\mathcal{C}(\sigma; \Delta\sigma) + \frac{1}{2}\delta^2\mathcal{C}(\sigma; \Delta\sigma) \\ &= \mathcal{C}(\sigma) + \frac{1}{2}\delta^2\mathcal{C}(\sigma; \Delta\sigma) \end{aligned} \quad (9.74)$$

avec

$$\delta^2\sigma(\sigma; \Delta\sigma) = \int_V C_{ijkl}^{-1}\Delta\sigma_{ij}\Delta\sigma_{kl}dV \geq 0 \quad (9.75)$$

cette grandeur étant une mesure énergétique de l'erreur, définie positive, que l'on peut noter  $\|\Delta\sigma\|$ . Additionnant les résultats (9.72) et (9.74), on obtient

$$\mathcal{E}(\tilde{u}) + \mathcal{C}(\tilde{\sigma}) = \mathcal{E}(u) + \mathcal{C}(\sigma) + \frac{1}{2}\delta^2\mathcal{E}(u; \Delta u) + \frac{1}{2}\delta^2\mathcal{C}(\sigma; \Delta\sigma) \quad (9.76)$$

soit, en tenant compte de (9.71),

$$\mathcal{E}(\tilde{u}) + \mathcal{C}(\tilde{\sigma}) = \frac{1}{2} (\|\Delta u\|^2 + \|\Delta\sigma\|^2) \quad (9.77)$$

Cette formule sert de fondement à l'analyse duale de l'erreur : *pour connaître la somme des erreurs d'énergie, il suffit d'additionner les valeurs des deux fonctionnelles  $\mathcal{E}(\tilde{u})$  et  $\mathcal{C}(\tilde{\sigma})$ .* On peut d'ailleurs développer certaines relations d'orthogonalité et, à partir de là, montrer que  $\sqrt{2[\mathcal{E}(\tilde{u}) + \mathcal{C}(\tilde{\sigma})]}$  définit une distance entre les deux approximations, mais ces faits, bien qu'intéressants, ne nous serviront pas.

Dans le cadre de méthodes numériques comme celle des éléments finis, il est utile de représenter la convergence d'approximations successives sur un diagramme. A cette fin, définissons l'*énergie complémentaire prolongée*  $\mathcal{C}^*$  par

$$\mathcal{C}^* = \begin{cases} -\mathcal{E}(\tilde{u}) & \text{pour l'approche C.A.} \\ \mathcal{C}(\tilde{\sigma}) & \text{pour l'approche S.A.} \end{cases} \quad (9.78)$$

On obtient alors, en fonction des paramètres de la discrétisation, des courbes de convergence d'un des deux types représentés en figure (9.4). La première version,

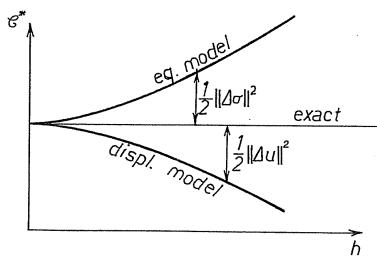
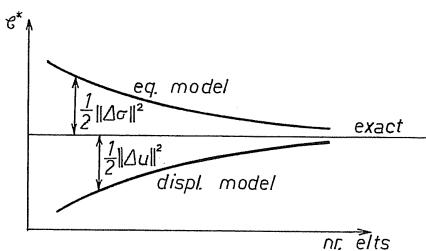


FIGURE 9.4 – Courbes de convergence

où la convergence est exprimée en termes du nombre de degrés de liberté ou de

l'inverse de la taille des éléments finis, est la plus courante. La seconde, dont l'abscisse est l'inverse du nombre de degrés de liberté ou la taille d'une maille, est par certains côtés préférable, car la solution exacte est alors la valeur à l'origine de  $\mathcal{C}^*$ , plus facile à estimer que la valeur asymptotique de la première représentation.

### 9.11.2 Les cas particuliers de Fraeijs de Veubeke

La formule (9.77) admet deux cas particuliers, obtenus antérieurement par Fraeijs de Veubeke [30, 32, 35]. Pour abréger les notations, nous écrirons

$$\begin{cases} \mathcal{U}(u) = \int_V W(Du)dV, & \mathcal{P}(u) = -\int_V \bar{f}_i u_i dV - \int_{S_2} \bar{t}_i u_i dS \\ \Psi(\sigma) = \int_V \Phi(\sigma)dV, & \mathcal{Q}(\sigma) = -\int_{S_1} n_j \sigma_{ji} \bar{u}_i dS \end{cases} \quad (9.79)$$

1. *On suppose que sur  $S_1$ , on a  $\bar{u}_i = 0$ . On suppose en outre que le champ de déplacement  $\tilde{u}$  a été obtenu par une technique de Rayleigh-Ritz, c'est-à-dire que*

$$\delta\mathcal{U}(\tilde{u}; \delta\tilde{u}) + \delta\mathcal{P}(\delta\tilde{u}) = 0$$

*pour tout  $\delta\tilde{u}$  de l'espace des déplacements approchés.* Alors, la solution exacte  $u$  et la solution approchée  $\tilde{u}$  sont des variations admissibles de déplacement et on a

$$\delta\mathcal{U}(u; u) = 2\mathcal{U}(u) = -\mathcal{P}(u)$$

et de même

$$\delta\mathcal{U}(\tilde{u}; \tilde{u}) = 2\mathcal{U}(\tilde{u}) = -\mathcal{P}(\tilde{u})$$

ce qui entraîne

$$\mathcal{E}(u) = -\mathcal{U}(u) \text{ et } \mathcal{E}(\tilde{u}) = -\mathcal{U}(\tilde{u})$$

et

$$\mathcal{U}(\tilde{u}) \leq \mathcal{U}(u)$$

D'autre part,

$$\mathcal{C}(\sigma) = \Psi(\sigma) \leq \mathcal{C}(\tilde{\sigma}) = \Psi(\tilde{\sigma})$$

On a alors

$$\mathcal{U}(\tilde{u}) \leq \mathcal{U}(u) = \Psi(\sigma) \leq \Psi(\tilde{\sigma}) \quad (9.80)$$

et

$$\mathcal{E}(\tilde{u}) + \mathcal{C}(\tilde{\sigma}) = \Psi(\tilde{\sigma}) - \mathcal{U}(\tilde{u}) \quad (9.81)$$

2. On suppose que  $\bar{f}_i = 0, \bar{t}_i = 0$ . On suppose en outre que le champ de contraintes  $\tilde{\sigma}$  a été obtenu par une technique de Rayleigh-Ritz, c'est-à-dire que

$$\delta\Psi(\tilde{\sigma}, \delta\tilde{\sigma}) + \delta\mathcal{Q}(\delta\tilde{\sigma}) = 0$$

pour tout  $\delta\tilde{\sigma}$  de l'espace des contraintes approchées. Alors, la solution exacte  $\sigma$  et la solution approchée  $\tilde{\sigma}$  sont des variations admissibles de contrainte et on a

$$\delta\Psi(\sigma; \sigma) = 2\Psi(\sigma) = -\mathcal{Q}(\sigma)$$

et

$$\delta\Psi(\tilde{\sigma}; \tilde{\sigma}) = 2\Psi(\tilde{\sigma}) = -\mathcal{Q}(\tilde{\sigma})$$

ce qui entraîne

$$\mathcal{C}(\sigma) = -\Psi(\sigma) \text{ et } \mathcal{C}(\tilde{\sigma}) = -\Psi(\tilde{\sigma})$$

Par ailleurs,

$$\mathcal{E}(u) = \mathcal{U}(u) \leq \mathcal{E}(\tilde{u}) = \mathcal{U}(\tilde{u})$$

On a donc

$$\Psi(\tilde{\sigma}) \leq \Psi(\sigma) = \mathcal{U}(u) \leq \mathcal{U}(\tilde{u}) \quad (9.82)$$

et

$$\mathcal{E}(\tilde{u}) + \mathcal{C}(\tilde{\sigma}) = \mathcal{U}(\tilde{u}) - \Psi(\tilde{\sigma}) \quad (9.83)$$

### 9.11.3 Cas de relations constitutives non linéaires

On peut se poser la question de ce qu'il subsiste de l'analyse duale lorsque les relations constitutives sont non linéaires. En examinant la démonstration du cas linéaire, on remarque que tout repose sur le fait que la variation seconde de l'énergie totale et de l'énergie complémentaire totale est positive. En fait, cela revient à dire que  $W(\varepsilon)$  et que  $\Phi(\sigma)$  sont *convexes*.

Rappelons qu'une fonction  $W(\varepsilon)$  est convexe si pour tout couple  $(\varepsilon^1, \varepsilon^2)$ , on a systématiquement, pour  $0 \leq \lambda \leq 1$ , la relation

$$W((1-\lambda)\varepsilon^1 + \lambda\varepsilon^2) \leq (1-\lambda)W(\varepsilon^1) + \lambda W(\varepsilon^2) \quad (9.84)$$

On notera d'abord le théorème suivant :

**Théorème 9** Si  $W(\varepsilon)$  est convexe, il en est de même de  $\Phi(\sigma)$ .

En effet, partant de la définition de  $\Phi(\sigma)$ ,

$$\Phi(\sigma) = \max_{\varepsilon} (\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - W(\varepsilon))$$

il est clair que pour un choix *quelconque*  $\varepsilon^*$  de  $\varepsilon$ , on a

$$\Phi(\sigma) \geq \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^* - W(\varepsilon^*)$$

Choisissons  $\varepsilon^*$  correspondant par les équations constitutives au champ de contrainte  $(1 - \lambda)\sigma^1 + \lambda\sigma^2$ . On a donc

$$\Phi((1 - \lambda)\sigma^1 + \lambda\sigma^2) = ((1 - \lambda)\sigma_{ij}^1 + \lambda\sigma_{ij}^2) \varepsilon_{ij}^* - W(\varepsilon^*) \quad (9.85)$$

Mais

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma^1) &\geq \sigma_{ij}^1\varepsilon_{ij}^* - W(\varepsilon^*) \\ \Phi(\sigma^2) &\geq \sigma_{ij}^2\varepsilon_{ij}^* - W(\varepsilon^*) \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$(1 - \lambda)\Phi(\sigma^1) + \lambda\Phi(\sigma^2) \geq ((1 - \lambda)\sigma_{ij}^1 + \lambda\sigma_{ij}^2) \varepsilon_{ij}^* - W(\varepsilon^*) \quad (9.86)$$

La comparaison de (9.85) et (9.86) donne

$$\Phi((1 - \lambda)\sigma^1 + \lambda\sigma^2) \leq (1 - \lambda)\Phi(\sigma^1) + \lambda\Phi(\sigma^2)$$

**Remarque -** La réciproque est vraie, car on a également

$$W(\varepsilon) = \max_{\sigma} (\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - \Phi(\sigma))$$

En outre, il est aisément de montrer le

**Théorème 10** Si  $W(\varepsilon)$  est convexe et différentiable, on a

$$W(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \geq W(\varepsilon) + \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{\varepsilon} \Delta\varepsilon_{ij}$$

En effet, pour  $\lambda \in [0, 1]$ , on a

$$\begin{aligned} W(\varepsilon + \lambda\Delta\varepsilon) &\leq (1 - \lambda)W(\varepsilon) + \lambda W(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \\ &\leq W(\varepsilon) + \lambda[W(\varepsilon + \Delta\varepsilon) - W(\varepsilon)] \end{aligned}$$

si bien que

$$\frac{W(\varepsilon + \lambda\delta\varepsilon) - W(\varepsilon)}{\lambda} \leq W(\varepsilon + \Delta\varepsilon) - W(\varepsilon)$$

Or,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{W(\varepsilon + \lambda\delta\varepsilon) - W(\varepsilon)}{\lambda} = \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_\varepsilon \Delta\varepsilon_{ij}$$

Revenons à l'analyse duale. On a

$$\mathcal{E}(u + \Delta u) - \mathcal{E}(u) = \int_V [W(\varepsilon + \Delta\varepsilon) - W(\varepsilon)] + \mathcal{P}(\Delta u)$$

Le fait que  $\mathcal{E}$  soit stationnaire en  $u$  s'écrit

$$\delta\mathcal{E}(u; \Delta u) = \int_V \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_\varepsilon \Delta\varepsilon_{ij} + \mathcal{P}(\Delta u) = 0$$

Soustrayant ces deux relations, on obtient

$$\mathcal{E}(u + \Delta u) - \mathcal{E}(u) = \int_V [W(\varepsilon + \Delta\varepsilon) - W(\varepsilon) - \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_\varepsilon \Delta\varepsilon_{ij}] dV \geq 0$$

en vertu du théorème 10. De la même façon, on obtient aisément

$$\mathcal{C}(\sigma + \Delta\sigma) \geq \mathcal{C}(\sigma)$$

et du reste, la relation (9.71) subsiste, car elle ne fait appel qu'au théorème des travaux virtuels et à la définition de  $\Phi(\sigma)$  par transformation de Legendre.

Malheureusement, cela ne suffit pas pour obtenir une idée de la distance entre les solutions approchées et la solution exacte. Il faut pour cela faire une hypothèse plus restrictive, à savoir, la *convexité forte*, qui consiste à supposer qu'il existe deux constantes positives  $\alpha$  et  $\beta$  telles que

$$\begin{cases} W(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \geq W(\varepsilon) + \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_\varepsilon \Delta\varepsilon_{ij} + \alpha |\Delta\varepsilon|^2 \\ \Phi(\sigma + \Delta\sigma) \geq \Phi(\sigma) + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \right)_\sigma \Delta\sigma_{ij} + \beta |\Delta\sigma|^2 \end{cases} \quad (9.87)$$

Ces conditions sont remplies si  $W$  et  $\Phi$  sont de classe  $C^2$  et que les valeurs propres (v.p.) de leurs matrices hessiennes respectives

$$H_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}$$

et

$$H_{ijkl}^{-1} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}}$$

vérifient

$$\begin{aligned} \inf_{x \in V} \min_{\varepsilon} [\text{v.p.}(H)] &= \alpha > 0 \\ \inf_{x \in V} \min_{\sigma} [\text{v.p.}(H^{-1})] &= \beta > 0 \end{aligned}$$

On obtient alors une forme affaiblie de l'analyse duale, à savoir,

$$\begin{aligned} \alpha \|\varepsilon(\Delta u)\|_0^2 &\leq \mathcal{E}(\tilde{u}) - \mathcal{E}(u) \\ \beta \|\Delta \sigma\|_0^2 &\leq \mathcal{C}(\tilde{\sigma}) - \mathcal{C}(\sigma) \end{aligned}$$

où  $\|\cdot\|_0$  figure la norme dans  $L^2$ . En d'autres termes, la différence d'énergie totale ou d'énergie complémentaire totale *majore* l'erreur en norme  $L^2$  des déformations ou des contraintes

## 9.12 Bornes des raideurs et coefficients d'influence directs

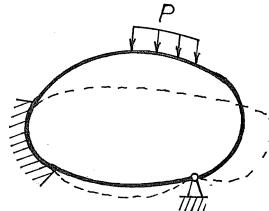


FIGURE 9.5 – Bornes des raideurs

Les relations (9.80) et (9.82) impliquent également la possibilité d'encadrer les coefficients directs d'influence ou de raideur [79, 78, 80, 95]. Soit d'abord un système de charges dont l'intensité est contrôlée par un paramètre  $P$ , appelé *charge généralisée* (fig. 9.5). Sous ce système de charges, la structure subira des déplacements conduisant à un travail  $\mathcal{T}$ . On appelle *déplacement généralisé conjugué à la charge généralisée*  $P$  le rapport

$$U = \frac{\mathcal{T}}{P} = \frac{2\mathcal{U}}{P} = \frac{2\Psi}{P} \quad (9.88)$$

Le coefficient d'influence direct de la charge  $P$  est alors défini par

$$F = \frac{U}{P} = \frac{\mathcal{T}}{P^2} \quad (9.89)$$

Pour le déterminer, on peut utiliser un modèle C.A. : on aura alors, puisque  $\bar{u}_i = 0$  sur  $S_1$ ,

$$F_{CA} = \frac{\mathcal{T}}{P^2} = \frac{2\mathcal{U}_{CA}}{P^2}$$

Dans un modèle S.A., on définira  $F_{SA}$  par

$$F_{SA} = \frac{2\Psi_{SA}}{P^2}$$

Il résulte alors de (9.80) que

$$F_{CA} \leq F \leq F_{SA} \quad (9.90)$$

De la même façon, supposons que l'on impose à la structure un système de déplacements de frontière contrôlés par un paramètre  $U$ , appelé *déplacement généralisé*. Si  $\mathcal{T}$  est le travail de ces déplacements, la *force généralisée conjuguée* est par définition

$$P = \frac{\mathcal{T}}{U} = \frac{2\mathcal{U}}{U} = \frac{2\Psi}{U} \quad (9.91)$$

et la *raideur directe*,

$$K = \frac{P}{U} = \frac{\mathcal{T}}{U^2} \quad (9.92)$$

Dans le cadre d'un modèle S.A., on calculera

$$K_{SA} = -\frac{\mathcal{Q}_{SA}}{U^2} = \frac{2\Psi_{SA}}{U^2}$$

et dans le cadre d'un modèle C.A.,

$$K_{CA} = \frac{2\mathcal{U}}{U^2}$$

Il résulte alors de (9.82) que

$$K_{SA} \leq K \leq K_{CA} \quad (9.93)$$

Cette possibilité d'encadrer la vraie valeur des raideurs ou des coefficients d'influence rend de nombreux services en pratique.

### 9.13 Exercices

**Exercice 32** Montrer qu'il est possible d'imaginer des relations constitutives homogènes de degré 1 mais non linéaires.

*Suggestion* - Pour

$$W = \sqrt{\varepsilon_{11}^4 + \varepsilon_{22}^4 + \varepsilon_{33}^4 + \gamma_{12}^4 + \gamma_{23}^4 + \gamma_{31}^4}$$

(homogène de degré 2), on a

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{2\varepsilon_{11}^3}{W}, & \sigma_{22} &= \frac{2\varepsilon_{22}^3}{W}, & \sigma_{33} &= \frac{2\varepsilon_{33}^3}{W} \\ \tau_{12} &= \frac{2\gamma_{12}^3}{W}, & \tau_{23} &= \frac{2\gamma_{23}^3}{W}, & \tau_{31} &= \frac{2\gamma_{31}^3}{W}\end{aligned}$$

et ces relations sont visiblement homogènes de degré 1 :

$$\sigma_{11}(\alpha\varepsilon) = \frac{2\alpha^3\varepsilon_{11}^3}{\alpha^2W} = \alpha \frac{2\varepsilon_{11}^3}{W} = \alpha\sigma_{11}(\varepsilon), \text{ etc.}$$

On vérifie que

$$\begin{aligned}\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\varepsilon_{33} + \tau_{12}\gamma_{12} + \tau_{23}\gamma_{23} + \tau_{31}\gamma_{31} \\ = \frac{2(\varepsilon_{11}^4 + \varepsilon_{22}^4 + \varepsilon_{33}^4 + \gamma_{12}^4 + \gamma_{23}^4 + \gamma_{31}^4)}{W} = 2W\end{aligned}$$

**Exercice 33** Montrer que si les relations constitutives sont invertibles,

1.  $W(\varepsilon)$  ne peut être homogène de degré 1.
2.  $\Phi(\sigma)$  ne peut être constante.

*Solution*

1. Si  $W(\varepsilon)$  est homogène de degré 1, on a, par le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes,

$$W(\varepsilon) = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij}$$

ce qui entraîne

$$dW = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} d\varepsilon_{kl}$$

Comme, par ailleurs,

$$dW = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}$$

on obtient

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{ij} d\varepsilon_{kl} \quad \forall d\varepsilon_{kl}$$

ce qui implique

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{ij} = 0$$

en contradiction avec l'hypothèse.

2. Si  $\Phi(\sigma) = \text{cte}$ , on a

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} = 0$$

donc la relation entre  $\sigma$  et  $\varepsilon$  n'est pas bijective.

**Exercice 34** Étudier la poutre en I décrite en section 9.9, pour  $q(x) \equiv 0$ , en faisant les hypothèses suivantes :

H1. Les semelles sont parfaitement souples en flexion,

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

et leur déplacement est uniforme :

$$u = u_{\pm}(x)$$

H2. L'âme ne résiste qu'au cisaillement :

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$$

- a) Quelles distributions de charges d'extrémité  $\bar{p}$  et  $\bar{t}$  peut-elle admettre dans ces hypothèses ?
- b) Écrire les équations de la poutre.
- c) Dans le cadre des hypothèses H1, la solution de la section 9.9 est C.A., et celle de cet exercice est S.A.. Que peut-on en déduire pour les coefficients d'influence relatifs à l'effort tranchant d'extrémité ? Vérifier que c'est bien le cas.
- d) Étudier la compatibilité des déplacements de l'âme et des déplacements de la semelle.

*Solution*

a) Dans l'âme, les équations d'équilibre s'écrivent

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \\ 0 &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

La contrainte  $\tau_{xy}$  est donc une constante, que nous noterons  $\tau$ . Dès lors, à l'extrémité,

- les charges  $\bar{p}$  doivent être concentrées sur les semelles ;
- les charges  $\bar{t}$  doivent être uniformément réparties sur l'âme seule.

b) L'énergie complémentaire de l'âme s'écrit

$$\int_0^\ell \frac{\tau^2}{2G} \Omega_a dx = \frac{\tau^2}{2G} \Omega_a \ell \quad (9.94)$$

et la fonctionnelle de Hellinger-Reissner pour l'âme a pour expression

$$\mathcal{R}_a = \int_0^\ell \left[ \int_{\Omega_a} \tau \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\Omega_a \right] dx - \frac{\tau^2}{2G} \Omega_a \ell \quad (9.95)$$

Pour les semelles, on a

$$\mathcal{R}_s = \int_0^\ell \left[ \int_{\Omega_+} \left( \sigma_+ \frac{du_+}{dx} - \frac{\sigma_+^2}{2E} \right) d\Omega + \int_{\Omega_-} \left( \sigma_- \frac{du_-}{dx} - \frac{\sigma_-^2}{2E} \right) d\Omega \right] dx \quad (9.96)$$

Enfin, les charges ont pour contribution

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_c = \mathcal{P} &= -u_+(\ell) \int_{\Omega_+} \bar{p} d\Omega - u_-(\ell) \int_{\Omega_-} \bar{p} d\Omega - \bar{t} \int_{\Omega_a} v(\ell) d\Omega \\ &= -\bar{N}_+ u_+(\ell) - \bar{N}_- u_-(\ell) - \bar{T} \frac{1}{\Omega_a} \int_{\Omega_a} v(\ell) d\Omega \end{aligned} \quad (9.97)$$

où l'on a posé

$$\bar{N}_+ = \int_{\Omega_+} \bar{p} d\Omega, \quad \bar{N}_- = \int_{\Omega_-} \bar{p} d\Omega \quad (9.98)$$

et

$$\bar{T} = \bar{t}\Omega_a \quad (9.99)$$

La fonctionnelle complète est

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_a + \mathcal{R}_s + \mathcal{R}_c \quad (9.100)$$

Varions les différentes grandeurs :

**(i) Variation de  $\tau$  :** on obtient

$$\delta\tau \int_0^\ell \left[ \int_{\Omega_a} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\Omega_a \right] dx - \frac{\tau}{G} \Omega_a \ell \delta\tau = 0$$

soit

$$\tau = \frac{G}{\Omega_a \ell} \int_0^\ell \left[ \int_{\Omega_a} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\Omega_a \right] dx \quad (9.101)$$

**(ii) Variation de  $\sigma_\pm$  :** il vient

$$\int_0^\ell \left[ \int_{\Omega_\pm} \delta\sigma_\pm \left( \frac{du_\pm}{dx} - \frac{\sigma_\pm}{E} \right) d\Omega \right] dx = 0$$

ce qui donne

$$\sigma_\pm(x) = E \frac{du_\pm}{dx} \quad (9.102)$$

**(iii) Variation de  $u$  :** Dans l'âme,  $\delta u$  est arbitraire; à la jonction de l'âme et des semelles, on a

$$\delta u_\pm = \delta u(x, \pm \frac{h}{2})$$

Il en découle

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell \left[ \int_{\Omega_a} \tau \frac{\partial \delta u}{\partial y} d\Omega \right] dx + \int_0^\ell \left( \int_{\Omega_+} \sigma_+ d\Omega_+ \right) \frac{d}{dx} \delta u(x, \frac{h}{2}) dx \\ & + \int_0^\ell \left( \int_{\Omega_-} \sigma_- d\Omega_- \right) \frac{d}{dx} \delta u(x, -\frac{h}{2}) dx - \bar{N}_+ \delta u_+(\ell) - \bar{N}_- \delta u_-(\ell) = 0 \end{aligned}$$

Posant

$$N_+(x) = \int_{\Omega_+} \sigma_+(x) d\Omega, \quad N_-(x) = \int_{\Omega_-} \sigma_-(x) d\Omega \quad (9.103)$$

on obtient, comme  $\tau$  est constant,

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \left[ b\tau \delta u(x, \frac{h}{2}) - b\tau \delta u(x, -\frac{h}{2}) - \frac{dN_+}{dx} \delta u(x, \frac{h}{2}) - \frac{dN_-}{dx} \delta u(x, -\frac{h}{2}) \right] dx \\ + [N_+(\ell) - \bar{N}_+] \delta u(\ell, \frac{h}{2}) + [N_-(\ell) - \bar{N}_-] \delta u(\ell, -\frac{h}{2}) = 0 \end{aligned}$$

On en déduit les conditions d'extrémité

$$N_+(\ell) = \bar{N}_+, \quad N_-(\ell) = \bar{N}_- \quad (9.104)$$

et les conditions de transition âme-semelles

$$\frac{dN_+}{dx} = b\tau, \quad \frac{dN_-}{dx} = -b\tau \quad (9.105)$$

**(iv) Variation de  $v$  :** on obtient

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0, \quad \tau(\ell) = q = \tau \quad (9.106)$$

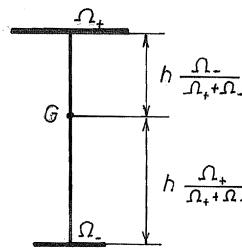


FIGURE 9.6 – Poutre en I à âmes inégales

Il est intéressant de ramener ces équations à la forme classique des poutres. Notons que le centre de gravité de la section est placé du côté de la semelle

la plus large, avec un rapport de segments  $\Omega_+/\Omega_-$  (fig. 9.6). Nous poserons donc

$$\begin{aligned} N(x) &= N_+(x) + N_-(x) \\ \bar{N} &= \bar{N}_+ + \bar{N}_- \\ M(x) &= \frac{h}{\Omega_+ + \Omega_-} (\Omega_- N_+(x) - \Omega_+ N_-(x)) \\ \bar{M} &= \frac{h}{\Omega_+ + \Omega_-} (\Omega_- \bar{N}_+ - \Omega_+ \bar{N}_-) \\ T(x) &= \tau b h = \bar{T} \end{aligned} \quad (9.107)$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dx} &= \frac{dN_+}{dx} + \frac{dN_-}{dx} = 0, & N(x) &= \text{cte} = \bar{N} \\ \frac{dM}{dx} &= \frac{h}{\Omega_+ + \Omega_-} \left( \Omega_- \frac{dN_+}{dx} - \Omega_+ \frac{dN_-}{dx} \right) = bh\tau = T, & M(\ell) &= \bar{M} \\ \frac{dT}{dx} &= 0, & T(x) &= \bar{T} \end{aligned} \quad (9.108)$$

On en déduit directement

$$M(x) = \bar{M} - Tx$$

et comme

$$N(x) + \frac{\Omega_+ + \Omega_-}{\Omega_+ h} M(x) = N_+(x) + \frac{\Omega_-}{\Omega_+} N_-(x)$$

on a

$$\begin{aligned} N_+(x) &= \frac{1}{1 + \frac{\Omega_-}{\Omega_+}} \left( N(x) + \frac{\Omega_+ + \Omega_-}{\Omega_+ h} M(x) \right) \\ &= \frac{\Omega_+}{\Omega_+ + \Omega_-} N(x) + \frac{1}{h} M(x) \end{aligned} \quad (9.109)$$

et, de même,

$$N_-(x) = \frac{\Omega_-}{\Omega_+ + \Omega_-} N(x) - \frac{1}{h} M(x)$$

On peut également établir les équations constitutives globales. On a d'abord

$$N_+ = E\Omega_+ \frac{du_+}{dx}, \quad N_- = E\Omega_- \frac{du_-}{dx}$$

puis

$$N = E \left( \Omega_+ \frac{du_+}{dx} + \Omega_- \frac{du_-}{dx} \right) = E(\Omega_+ + \Omega_-) \frac{d\hat{u}}{dx} \quad (9.110)$$

avec

$$\hat{u} = \frac{\Omega_+}{\Omega_+ + \Omega_-} u_+ + \frac{\Omega_-}{\Omega_+ + \Omega_-} u_-$$

Pour le moment de flexion,

$$\begin{aligned} M &= \frac{hE}{\Omega_+ + \Omega_-} \left( \Omega_- \Omega_+ \frac{du_+}{dx} - \Omega_+ \Omega_- \frac{du_-}{dx} \right) \\ &= \frac{E\Omega_+ \Omega_- h}{\Omega_+ + \Omega_-} \left( \frac{du_+}{dx} - \frac{du_-}{dx} \right) \\ &= EI \frac{d\alpha}{dx} \end{aligned} \quad (9.111)$$

avec

$$\hat{I} = \Omega_+ \left( \frac{h\Omega_-}{\Omega_+ + \Omega_-} \right)^2 + \Omega_- \left( \frac{h\Omega_+}{\Omega_+ + \Omega_-} \right)^2 = \frac{h^2 \Omega_+ \Omega_-}{\Omega_+ + \Omega_-} \quad (9.112)$$

et

$$\alpha = \frac{u_+ - u_-}{h} \quad (9.113)$$

Enfin, pour l'effort tranchant,

$$\begin{aligned} T &= G \int_{\Omega_a} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\Omega_a \\ &= G \left[ b(u_+ - u_-) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\Omega_a} v d\Omega_a \right] \\ &= Gbh \left( \alpha + \frac{d\hat{v}}{dx} \right) \end{aligned} \quad (9.114)$$

avec

$$\hat{v} = \frac{1}{bh} \int_{\Omega_a} v d\Omega \quad (9.115)$$

- c) Dans la théorie de la section 9.9, pour une charge en bout, on a (en posant  $\Omega_+ = \Omega_- = \Omega_s$ )

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dx} &= 0 \Rightarrow \frac{d^2M}{dx^2} = 0, \quad M = -\bar{T}(\ell - x) \\ \alpha &= \frac{1}{EI} \int M dx = -\frac{\bar{T}}{EI} \left( \ell x - \frac{x^2}{2} \right) \\ \frac{dV}{dx} &= \frac{\bar{T}}{GS} - \alpha = \frac{\bar{T}}{GS} + \frac{\bar{T}}{EI} \left( \ell x - \frac{x^2}{2} \right) \\ V &= \bar{T} \left( \frac{x}{GS} + \frac{\ell x^2}{2EI} - \frac{x^3}{6EI} \right)\end{aligned}$$

et, à l'extrémité,

$$V(\ell) = \bar{T} \left( \frac{\ell}{GS} + \frac{\ell^3}{3EI} \right)$$

Le travail vaut donc

$$\mathcal{T} = \bar{T}V(\ell) = \bar{T}^2 \left( \frac{\ell}{GS} + \frac{\ell^3}{EI} \right)$$

d'où

$$F_{CA} = \frac{\ell}{GS} + \frac{\ell^3}{EI}$$

Dans la présente théorie, les mêmes équations s'appliquent, et on a

$$F_{SA} = \frac{\ell}{G\hat{S}} + \frac{\ell^3}{E\hat{I}}$$

Mais

$$\begin{cases} I &= \Omega_s \frac{h^2}{2} + \frac{bh^3}{12(1-\nu^2)}, & \hat{I} &= \Omega_s \frac{h^2}{2} \leq I \\ \hat{S} &= S = bh \end{cases}$$

On a donc

$$F_{CA} \leq F_{\text{réel}} \leq F_{SA}$$

- d) Nous nous limiterons au cas des semelles identiques. On a, d'une part,

$$\frac{du_{\pm}}{dx} = \frac{N_{\pm}}{E\Omega_{\pm}} = \frac{1}{E\Omega_s} \left[ \bar{N} \pm \frac{2}{h} (\bar{M} - \bar{T}x) \right] = \frac{1}{E\Omega_s} [\bar{N} \mp \bar{T}\ell]$$

et, d'autre part,

$$\tau = G \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

ce qui entraîne

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau}{G} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

et

$$\int_{\Omega_a} \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{\tau b h}{G} - \hat{S} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x}$$

soit

$$\begin{aligned} \left[ u(x, \frac{h}{2}) - u(x, -\frac{h}{2}) \right] b &= \frac{\tau b h}{G} - \hat{S} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \\ &= \frac{\bar{T}}{G} - \hat{S} \left[ \frac{\bar{T}}{G \hat{S}} + \frac{\bar{T}}{E \hat{I}} \left( \ell x - \frac{x^2}{2} \right) \right] \\ &= -\frac{\bar{T} \hat{S}}{E \hat{I}} \left( \ell x - \frac{x^2}{2} \right) \end{aligned}$$

à comparer à

$$b[u_+(x) - u_-(x)] = -\frac{2b}{E \Omega_s} \bar{T} \ell x$$

On constate que ces déplacements sont différents : *la compatibilité locale est violée*, du fait des restrictions sur les contraintes.

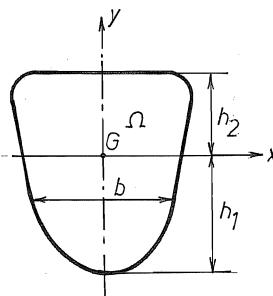


FIGURE 9.7 – Poutre à section symétrique par rapport au plan de flexion

**Exercice 35** Établir une théorie statiquement admissible de la flexion des poutres ayant le plan de flexion comme plan de symétrie (fig. 9.7), en faisant les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_z = \frac{y}{I} M(z), & \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{yz} = \frac{1}{I} A(y, z) \\ \tau_{xz} = \tau_{yz} \frac{x}{b} \frac{db}{dy} \end{cases}$$

où  $M$  est le moment de flexion,  $I$  l'inertie de la section ( $\int_{\Omega} y^2 d\Omega$ ), et  $b(y)$  la largeur de la section selon  $x$ .

1. Montrer que ce système d'hypothèses garantit l'équilibre sur le manteau de la poutre.
2. Écrire le principe de Hellinger-Reissner dans le cadre des hypothèses ci-dessus, pour une poutre console chargée en bout.
3. Étudier comment est vérifiée la compatibilité.
4. Déterminer la fonction  $A(y, z)$  pour que l'équilibre interne soit réalisé.
5. Transformer le principe variationnel en tenant compte de la forme obtenue de  $A(y, z)$ , de manière à obtenir les équations globales de la poutre.

*Solution*

1. Appelant  $\mathcal{C}_+$  la partie du contour de la section située en  $x > 0$  et  $\mathcal{C}_-$  l'autre partie, la normale sur  $\mathcal{C}_{\pm}$  a ses composantes proportionnelles à  $(1, \mp \frac{1}{2} \frac{db}{dy})$  (fig. 9.8). En vertu des hypothèses, sur le manteau, le « vecteur »  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{xz}, \tau_{yz})$  vaut

$$\boldsymbol{\tau} = (\pm \frac{1}{2} \frac{db}{dy} \tau_{yz}, \tau_{yz})$$

donc

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = k(\pm \frac{1}{2} \frac{db}{dy} \tau_{yz} \mp \frac{1}{2} \frac{db}{dy} \tau_{yz}) = 0$$

2. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = \int_0^{\ell} dz \int_{\Omega} \left\{ \frac{My}{I} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{A}{I} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{x}{b} \frac{db}{dy} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \right. \\ \left. - \frac{M^2}{2EI} - \frac{A^2}{2GI^2} \left[ 1 + \frac{x^2}{b^2} \left( \frac{db}{dy} \right)^2 \right] \right\} d\Omega + \mathcal{P} \quad (9.116) \end{aligned}$$

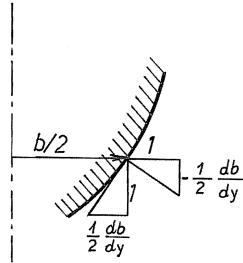


FIGURE 9.8 – Normale au manteau

Pour  $\mathcal{P}$ , on considère des charges en bout :

$$\mathcal{P} = - \int_{\Omega} [\bar{p}w(\ell) - \bar{q}_x u(\ell) - \bar{q}_y v(\ell)] d\Omega$$

3. a) En variant  $M$ , on obtient

$$\delta M \left( \frac{1}{I} \int_{\Omega} y \frac{\partial w}{\partial z} d\Omega - \frac{M}{EI} \right) = 0$$

soit

$$\frac{d\alpha}{dz} = \frac{M}{EI}$$

en introduisant la *rotation moyenne*

$$\alpha = \frac{1}{I} \int_{\Omega} y w d\Omega$$

b) En variant  $A$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{I} \int_{-b/2}^{b/2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{x}{b} \frac{db}{dy} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dx \\ - \frac{A}{GI^2} \int_{-b/2}^{b/2} \left[ 1 + \frac{x^2}{b^2} \left( \frac{db}{dy} \right)^2 \right] dx = 0 \quad (9.117) \end{aligned}$$

On a immédiatement

$$\int_{-b/2}^{b/2} \left[ 1 + \frac{x^2}{b^2} \left( \frac{db}{dy} \right)^2 \right] dx = b \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{db}{dy} \right)^2 \right]$$

L'intégrale contenant les déplacements peut être transformée comme suit.  
On a d'abord

$$\int_{-b/2}^{b/2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{x}{b} \frac{db}{dy} \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx = \frac{\partial}{\partial z} \int_{-b/2}^{b/2} \left( v + \frac{x}{b} \frac{db}{dy} u \right) dx = b \frac{\partial \hat{v}}{\partial z}$$

en posant

$$\hat{v} = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \left( v + \frac{x}{b} \frac{db}{dy} u \right) dx \quad (\text{déplacement vertical moyen})$$

Passons à présent aux termes contenant  $w$ , qui s'écrivent

$$\int_{-b/2}^{b/2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{x}{b} \frac{db}{dy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx$$

Dans le but de faire également apparaître des moyennes, on notera que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} w dx \right\} = -\frac{1}{b^2} \frac{db}{dy} \int_{-b/2}^{b/2} w dx + \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b/2}^{b/2} w dx \quad (9.118)$$

Or, d'une part,

$$\frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b/2}^{b/2} w dx = \frac{1}{b} \frac{1}{2} \frac{db}{dy} \left[ w \left( \frac{b}{2} \right) + w \left( -\frac{b}{2} \right) \right] + \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\partial w}{\partial y} dy \quad (9.119)$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{b^2} \frac{db}{dy} \int_{-b/2}^{b/2} w dx &= -\frac{1}{b^2} \frac{db}{dy} [xw]_{-b/2}^{b/2} + \frac{1}{b^2} \frac{db}{dy} \int_{-b/2}^{b/2} x \frac{\partial w}{\partial x} dx \\ &= -\frac{1}{b} \frac{1}{2} \frac{db}{dy} \left[ w \left( \frac{b}{2} \right) + w \left( -\frac{b}{2} \right) \right] + \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{x}{b} \frac{db}{dy} \frac{\partial w}{\partial x} dx \end{aligned} \quad (9.120)$$

Rassemblant les résultats (9.118), (9.119) et (9.120), on obtient donc simplement

$$\int_{-b/2}^{b/2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{x}{b} \frac{db}{dy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx = b \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} w dx \right\} = b \frac{\partial \hat{w}}{\partial x}$$

en posant

$$\hat{w} = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} w dx \quad (\text{déplacement axial moyen d'un segment } y=\text{cte})$$

Cela étant, l'équation de compatibilité cherchée est

$$A = \frac{GI}{1 + \frac{1}{12} \left( \frac{db}{dy} \right)^2} \left( \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} \right)$$

Il s'agit d'une équation globalisée par segments  $y = \text{cte}$ , ce qui est logique, puisque  $A$  est constante sur un tel segment.

4. Les équations d'équilibre s'obtiennent en variant les déplacements.

a) La variation de  $u$  donne

$$\begin{cases} -\frac{1}{I} \frac{x}{b} \frac{db}{dy} \frac{dA}{dz} = 0 & \Rightarrow \frac{dA}{dz} = 0 \\ \frac{1}{I} \frac{x}{b} \frac{db}{dy} A(y, \ell) = \bar{q}_x \end{cases}$$

La forme de  $\bar{q}_x$  doit donc être bien définie pour s'accorder au champ intérieur.

b) Variant  $v$ , on obtient

$$\begin{cases} -\frac{1}{I} \frac{dA}{dz} = 0 & \Rightarrow \frac{dA}{dz} = 0 \\ \frac{1}{I} A(y, \ell) = \bar{q}_y \end{cases}$$

Également,  $\bar{q}_y$  doit avoir une forme bien définie.

c) Venons-en à la variation de  $w$ . Il vient, dans  $\Omega$ ,

$$-\frac{y}{I} \frac{dM}{dz} - \frac{1}{I} \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{Ib} \frac{db}{dy} A = 0$$

et, sur le contour,

$$\frac{A}{I} \left( n_y + \frac{x}{b} \frac{db}{dy} n_x \right) = 0$$

Cette dernière relation est une identité. La précédente s'écrit

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{1}{b} \frac{db}{dy} A = -y \frac{dM}{dz}$$

Pour  $dM/dz = 0$ , cette équation se réduit à

$$\frac{\frac{\partial A}{\partial y}}{A} = -\frac{\frac{db}{dy}}{b}$$

et a pour solution générale

$$A_1(y, z) = \frac{B(z)}{b}$$

Cherchons donc une solution particulière de l'équation complète sous la forme

$$A_2(y, z) = \frac{C(y, z)}{b}$$

Il vient

$$\frac{1}{b} \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{1}{b^2} \frac{db}{dy} C + \frac{1}{b^2} \frac{db}{dy} C = -y \frac{dM}{dz}$$

soit

$$\frac{\partial C}{\partial y} = -\frac{dM}{dz} b y$$

Comme solution particulière, on peut adopter

$$C(y, z) = \frac{dM}{dz} S(y)$$

avec

$$S(y) = \int_y^{h_2} b(Y) Y dY$$

Il s'agit du moment statique de la partie de la section située au-dessus de  $y$ . Rappelons que

$$S(-h_1) = \int_{-h_1}^{h_2} b(y) y dy = 0$$

dès lors que l'origine des axes est située au centre de gravité de la section. La solution générale de l'équation complète est donc

$$A(y, z) = \frac{B(z)}{b} + \frac{dM}{dz} \frac{S(y)}{b}$$

On détermine  $B(z)$  en examinant les points  $y = -h_1$  et  $y = h_2$ . Trois cas sont possibles :

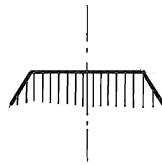


FIGURE 9.9 – Section avec méplat

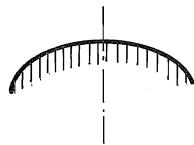


FIGURE 9.10 – Section régulière



FIGURE 9.11 – Section à sommet anguleux

- *Premier cas : la section y présente un méplat :  $b(h_2) \neq 0$ , par exemple (fig. 9.9).* Alors, sur ce méplat, on a la condition  $\tau_{yz} = 0$ , ce qui entraîne

$$0 = A(h_2, z) = \frac{B(z)}{b(h_2)} + \frac{dM}{dz} \cdot 0 \Rightarrow B(z) = 0$$

La même conclusion vaut si le méplat est situé en  $y = -h_1$ , car  $S(-h_1) = 0$ .

- *Deuxième cas : la section coupe l'axe de  $y$  en lui étant perpendiculaire (fig. 9.10).* Alors,  $\tau_{yz} = 0$  en ce point ( $h_2$ , pour fixer les idées). On a

$$0 = \lim_{y \rightarrow h_2} \left( \frac{B(z)}{b(y)} + S(y) \frac{dM}{dz} \right) \Rightarrow \lim_{y \rightarrow h_2} \frac{B(z)}{b(y)} = 0$$

ce qui n'est possible que si  $B(z) = 0$ .

- *Troisième cas : la section coupe l'axe de  $y$  en faisant avec lui un angle  $\theta$ , avec  $0 < \theta < \pi$  (fig 9.11).* Alors, en supposant que cela se passe en  $y = h_2$ , posons  $\xi = h_2 - y$ . Il vient

$$b(h_2 - \xi) = \xi \operatorname{tg} \theta + \mathcal{O}(\xi^2)$$

et

$$\begin{aligned} S(h_2 - \xi) &= \int_{h_2 - \xi}^{h_2} y b(y) dy \\ &= \int_{-\xi}^0 (h_2 - \Xi) (\Xi \operatorname{tg} \theta + \mathcal{O}(\Xi^2)) d\Xi \\ &= h_2 \frac{\xi^2}{2} \operatorname{tg} \theta + \mathcal{O}(\xi^3) \end{aligned}$$

donc  $\frac{S}{b} \rightarrow 0$  pour  $\xi \rightarrow 0$  et comme  $b \rightarrow 0$ , il faudra que  $B(z) = 0$  pour que  $A(y, z)$  reste fini.

En résumé, dans les trois cas ci-dessus, on a  $B = 0$  et

$$A(y, z) = \frac{dM}{dz} \frac{S(y)}{b}$$

Les contraintes de cisaillement ont donc la forme définitive suivante :

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= \frac{dM}{dz} \frac{S(y)}{Ib} \\ \tau_{xz} &= \frac{dM}{dz} \frac{S(y)}{Ib} \frac{x}{b} \frac{dy}{dy} \end{aligned}$$

5. On notera que

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \frac{S}{Ib} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{x}{b} \frac{db}{dy} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] d\Omega \\ &= \int_{-h_1}^{h_2} \frac{S}{I} \left\{ \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{x}{b} \frac{db}{dy} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dx \right\} dy \\ &= \int_{-h_1}^{h_2} \frac{S}{I} \left( \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} \right) dy \end{aligned}$$

comme nous l'avons vu en 3). On peut encore écrire

$$\int_{-h_1}^{h_2} \frac{S}{I} \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} dy = \frac{dV}{dz}$$

avec

$$V = \int_{-h_1}^{h_2} \frac{S}{I} \hat{v} dy = \int_{\Omega} \frac{S}{Ib} \left( v + \frac{x}{b} \frac{db}{dy} u \right) d\Omega$$

De plus,

$$\begin{aligned} \int_{-h_1}^{h_2} \frac{S}{I} \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} dy &= \left[ \frac{S}{I} \hat{w} \right]_{-h_1}^{h_2} - \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\hat{w}}{I} \frac{dS}{dy} dy \\ &= \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\hat{w}}{I} y b dy \\ &= \frac{1}{I} \int_{\Omega} w y dy = \alpha \end{aligned}$$

On a donc

$$\int_{-h_1}^{h_2} \frac{S}{I} \left( \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} \right) dy = \alpha + \frac{dV}{dz}$$

Ceci permet d'écrire le principe variationnel, en posant

$$A = \frac{TS}{b}$$

sous la forme

$$\mathcal{R} = \int_0^{\ell} \left[ M \frac{d\alpha}{dz} + T \left( \alpha + \frac{dV}{dz} \right) - \frac{M^2}{2EI} - \frac{T^2}{2G\Omega^*} \right] dx - \bar{M}\alpha(\ell) - \bar{T}V(\ell)$$

où l'on a posé

$$\frac{1}{\Omega^*} = \int_{\Omega} \frac{S^2}{I^2 b^2} \left[ 1 + \frac{x^2}{b^2} \left( \frac{db}{dy} \right)^2 \right] d\Omega$$

soit

$$\Omega^* = \frac{I^2}{\int_{\Omega} \frac{S^2}{b} \left[ 1 + \frac{x^2}{b^2} \left( \frac{db}{dy} \right)^2 \right] d\Omega} = \frac{I^2}{\int_{-h_1}^{h_2} \frac{S^2}{b} \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{db}{dy} \right)^2 \right] dy}$$

C'est la *section réduite de cisaillement*. Les équations globales sont

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{dM}{dz} & = & T, \\ \frac{dT}{dz} & = & 0, \\ M & = & EI \frac{d\alpha}{dz} \\ T & = & G\Omega^* \left( \alpha + \frac{dV}{dz} \right) \end{array} \right.$$

**Exercice 36** Étudier la même poutre que ci-dessus, en posant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} w & = & y\alpha(z) \\ u & = & 0 \\ v & = & v(z) \\ \sigma_x & = & 0 \\ \sigma_y & = & 0 \\ \tau_{xy} & = & 0 \end{array} \right.$$

Comparer aux résultats de l'exercice précédent.

*Solution* - Le principe de Hellinger-Reissner s'écrit ici

$$\int_0^\ell \int_\Omega \left[ \sigma_z y \alpha'(z) + \tau_{yz} \left( \alpha + \frac{dv}{dz} \right) - \frac{\sigma_z^2}{2E} - \frac{\tau_{yz}^2}{2G} \right] d\Omega dz - \int_\Omega [py\alpha(\ell) + q_y v(\ell)] d\Omega \text{ stat.}$$

Variant  $\sigma_z$  on obtient

$$\sigma_z = E y \alpha'(z)$$

La variation de  $\tau_{yz}$  donne

$$\tau_{yz} = G \left( \alpha + \frac{dv}{dz} \right)$$

En variant  $\alpha$ , on obtient

$$\begin{cases} -\frac{d}{dz} \int_{\Omega} \sigma_z y d\Omega + \int_{\Omega} \tau_{yz} d\Omega = 0 \\ \left[ \int_{\Omega} \sigma_z y d\Omega \right]_{z=\ell} = \int_{\Omega} p y d\Omega \end{cases}$$

Ceci mène à définir

- le moment  $M = \int_{\Omega} y \sigma_z d\Omega$
- l'effort tranchant  $T = \tau_{yz} d\Omega$
- le moment d'extrémité  $\bar{M} = \int_{\Omega} p y d\Omega$

en fonction desquels ces équations s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{dM}{dx} = T \\ M(\ell) = \bar{M} \end{cases}$$

En variant  $v$ , on obtient

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \int_{\Omega} \tau_{yz} d\Omega = \frac{dT}{dz} = 0 \\ T(\ell) = \bar{T} = \int_{\Omega} q_y d\Omega \end{cases}$$

On peut réécrire ces équations en termes des résultantes. De simples intégrations donnent

$$\begin{aligned} M &= \int_{\Omega} y \sigma_z d\Omega = EI \frac{d\alpha}{dz} \\ T &= \int_{\Omega} \tau_{yz} d\Omega = G\Omega \left( \alpha + \frac{dv}{dz} \right) \end{aligned}$$

et

$$\sigma_z = \frac{M}{I} y, \quad \tau_{yz} = \frac{T}{G\Omega}$$

d'où la forme globale de la fonctionnelle de Hellinger-Reissner :

$$\int_0^{\ell} \left[ M \frac{d\alpha}{dz} + T \left( \alpha + \frac{dv}{dz} \right) - \frac{M^2}{2EI} - \frac{T^2}{2G\Omega} \right] - \bar{M}\alpha(\ell) - \bar{T}v(\ell)$$

Par rapport à la solution de l'exercice précédent, qui est S.A., celle-ci est C.A. dans le cadre des hypothèses de poutre  $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ . La seule différence

finale est la présence de  $\Omega$  à la place de  $\Omega^*$ . La théorie des bornes nous permet d'affirmer que

$$\Omega_{\text{exercice précédent}}^* \leq \Omega_{\text{réel}}^* \leq \Omega$$

(ce qui prouve en particulier que les sections de cisaillement sont toujours inférieures aux sections).

