

Table des matières

Préface	i
1 Préliminaires mathématiques	1
1.1 Préambule	1
1.2 Vecteurs	1
1.3 Tenseurs	4
1.4 Transformations d'axes	6
1.5 Opérateurs de dérivation	7
1.6 Théorème de Gauss-Ostrogradsky	8
1.7 Éléments propres des tenseurs symétriques	11
1.7.1 Éléments propres	11
1.7.2 Développement spectral du tenseur	12
1.7.3 Caractère d'invariance des éléments propres	13
1.7.4 Décomposition d'un tenseur symétrique en un tenseur isotrope et un déviateur	14
1.8 Structure des tenseurs antisymétriques	15
1.9 Exercices	15
2 Cinématique des corps continus déformables	19
2.1 Description du mouvement	19
2.2 Choix de la description	20
2.3 Tenseur des déformations de Green	21
2.4 Interprétation du tenseur de Green	23
2.5 Équations de compatibilité	25
2.6 Hypothèses simplificatrices	29
2.6.1 Petites déformations	29
2.6.2 Petits déplacements	30

2.6.3	Gradients de déplacements modérés	30
2.7	Exercices	32
3	Principe des travaux virtuels	37
3.1	Déplacements virtuels	37
3.2	Travail virtuel de déformation	38
3.3	Notion d'équilibre	39
3.4	Équations locales d'équilibre	40
3.5	Interprétation de Trefftz	43
3.6	Relation avec les contraintes eulériennes	45
3.6.1	Contraintes eulériennes	45
3.6.2	Relation entre les charges dans les deux descriptions . . .	46
3.6.3	Cas des petites déformations	47
3.7	Exercices	48
4	Corps hyperélastiques	57
4.1	Hyperélasticité	57
4.2	Développement de l'énergie de déformation	58
4.3	Postulat de la stabilité locale	61
4.4	Stabilité structurale de l'état de référence	63
4.5	Déformations avec variations de température	68
4.5.1	Expression de l'énergie libre	68
4.5.2	Coefficients de dilatation thermique	69
4.5.3	Déformations adiabatiques	70
4.5.4	Autre expression des modules adiabatiques	73
4.5.5	Mesure dynamique du module de Young	75
4.6	Exercices	77
5	Élasticité linéaire	83
5.1	Linéarisation géométrique	83
5.2	Unicité de la solution	84
5.3	Méthode directe de résolution. Équation de Navier	85
5.4	Méthode semi-inverse. Compatibilité	86
5.5	Propriétés du tenseur d'incompatibilité	89
5.6	Autre forme des équations de compatibilité de Saint-Venant . . .	90
5.7	Équations de Beltrami-Michell	91
5.8	Corps multiples connexes	92
5.8.1	Introduction	92
5.8.2	Topologie des corps multiples connexes	94

5.8.3	Intégration d'un gradient sur un corps multiplement connexe	96
5.8.4	Conditions globales de compatibilité dans les corps multiplement connexes	98
5.8.5	Interprétation de Weintgarten-Volterra	100
5.9	Sur l'indépendance des équations de compatibilité	101
5.9.1	Deux résultats généraux sur les champs d'autocontrainte .	103
5.9.2	Les deux théorèmes de Washizu	103
5.9.3	Autre énoncé des théorèmes de Washizu	104
5.10	Exercices	104
6	Torsion des poutres prismatiques	115
6.1	Notion de poutre	115
6.2	Torsion uniforme	116
6.3	Équations d'équilibre	117
6.4	Compatibilité	120
6.5	Choix de la constante C	121
6.6	Intégration des déplacements u et v	122
6.7	Intégration du déplacement w	123
6.8	Principe variationnel (Prandtl)	125
6.9	Principe variationnel (gauchissement)	127
6.10	Centre de torsion	129
6.11	Méthodes de résolution	129
6.12	Solutions exactes	131
6.12.1	Torsion d'une poutre à section elliptique	131
6.12.2	Torsion d'une poutre à section rectangulaire	132
6.12.3	Trou circulaire axial très petit dans un arbre cylindrique .	137
6.13	Solutions approchées (fonction de Prandtl)	140
6.13.1	Théorie de Bredt	141
6.13.2	Caissons multicellulaires	142
6.13.3	Poutres à parois minces ouvertes	144
6.13.4	Solution approchée pour les sections rectangulaires	146
6.14	Solutions approchées (gauchissement)	148
6.14.1	Solution élémentaire pour les sections massives	149
6.14.2	Sections rectangulaires	151
6.15	Exercices	153

7	Le problème de Boussinesq	161
7.1	Introduction	161
7.2	Système de coordonnées et équations	161
7.3	Recherche de la solution générale	163
7.3.1	Forme générale de la solution	163
7.3.2	Détermination de la fonction C	164
7.3.3	Détermination de la fonction D	165
7.3.4	Calcul de la fonction A	165
7.3.5	Calcul de la fonction B	166
7.3.6	Expression générale des déplacements	167
7.3.7	Expression générale des déformations	168
7.3.8	Expression générale des contraintes	168
7.4	Conditions aux limites	169
7.5	Solution du problème de Boussinesq	171
7.6	Exercice	172
8	Le problème de Hertz	175
8.1	Introduction	175
8.2	Considérations géométriques	176
8.2.1	Description de la surface d'un corps	176
8.2.2	Contact de deux corps	178
8.3	Équilibre de la surface de contact	182
8.4	Résolution des équations	186
8.5	Comportements asymptotiques	190
8.5.1	Cas où $e = 1$	190
8.5.2	Très faibles valeurs de e	191
8.6	Tables de la solution du problème de Hertz	192
8.6.1	Valeurs courantes de e	192
8.6.2	Valeurs asymptotiques pour e proche de zéro	193
8.7	Annexe : potentiel de l'ellipsoïde chargé	196
8.7.1	Calcul de $\partial V/\partial x$	197
8.7.2	Calcul de $\partial^2 V/\partial x^2$ et de ΔV	198
8.8	Exercice	200
9	Principes variationnels	205
9.1	Introduction	205
9.2	Principe du minimum de l'énergie totale	205
9.3	Multiplicateurs de Lagrange	209
9.4	Principe à quatre champs de Fraeijs de Veubeke	213

9.5	Principe de Hellinger-Reissner	215
9.5.1	Invertibilité des relations constitutives	216
9.5.2	Densité d'énergie complémentaire	216
9.5.3	Principe de Hellinger-Reissner	218
9.6	Principe à deux champs de Fraeijis de Veubeke	219
9.7	Principe du minimum de l'énergie complémentaire	220
9.8	Note sur la forme faible de la compatibilité	221
9.9	Exemple de solution approchée	223
9.10	Classification des approches variationnelles	228
9.11	Analyse duale	229
9.11.1	Cas des relations constitutives linéaires	229
9.11.2	Les cas particuliers de Fraeijis de Veubeke	232
9.11.3	Cas de relations constitutives non linéaires	233
9.12	Bornes des raideurs	236
9.13	Exercices	238
10	Élasticité plane	259
10.1	État plan de contrainte	259
10.2	État plan de déformation	262
10.3	Équations générales des états plans	264
10.3.1	Équation plane de Navier	264
10.3.2	Équation plane de Beltrami-Michell	265
10.4	Fonction d'Airy	266
10.5	Compatibilité en termes de la fonction d'Airy	269
10.6	Problèmes axisymétriques plans	269
10.7	Cylindre épais sous pressions interne et externe	271
10.7.1	Cas général	271
10.7.2	Cas du cylindre très mince	272
10.7.3	Cas du rayon intérieur tendant vers zéro	274
10.7.4	Cas du rayon extérieur tendant vers l'infini	275
10.8	Frettage	275
10.9	Disque en rotation	277
10.9.1	Disque plein de rayon extérieur R_e	278
10.9.2	Disque creux de rayons extrêmes R_i et R_e	278
10.10	Utilisation de la variable complexe	279
10.10.1	Généralités	279
10.10.2	Fonctions analytiques et antianalytiques	280
10.10.3	Coordonnées curvilignes orthogonales	282
10.10.4	Transformation des vecteurs	285

10.10.5	Transformation des tenseurs symétriques	286
10.10.6	Structure générale d'une fonction harmonique réelle	287
10.10.7	Structure générale d'une fonction biharmonique réelle	288
10.11	Solution complexe en élasticité plane	289
10.11.1	Déplacements	289
10.11.2	Contraintes	290
10.11.3	Fonctions de contrainte	291
10.11.4	Calcul des contraintes en coordonnées curvilignes ortho- gonales	292
10.11.5	Expression des tractions de surface	293
10.12	Problème de Kolossoff	293
10.13	Problème de Kirsch	300
10.14	Fissure sous contrainte uniaxiale	302
10.15	Coin soumis à une force et à un moment	306
10.16	Problème de Flamant	312
10.17	Disque circulaire soumis à deux forces P opposées	316
10.18	Poutre circulaire soumise à un moment constant	320
10.19	Problème de Neuber	324
10.20	Problème de Neuber en flexion	330
10.21	Annexe : disques d'épaisseur variable en rotation	334
10.21.1	Équations générales	334
10.21.2	Disque d'égale résistance	335
10.21.3	Jante	335
10.21.4	Moyeu	337
10.21.5	Renforcement neutre	337
10.21.6	Exemple	340
10.22	Exercices	342
11	Théorie technique des poutres	347
11.1	Introduction	347
11.2	Ordres de grandeur des contraintes	347
11.3	Ordres de grandeur des déplacements	348
11.4	Structure des déplacements u_1 et u_2	350
11.5	Gauchissement et énergie de déformation	351
11.6	Définition du centre de torsion	353
11.7	Fonction de Prandtl	355
11.8	Résultantes et équations d'équilibre	359
11.9	Conditions aux limites	362
11.10	Calcul des contraintes	363

11.11	Torsion non uniforme	365
11.12	Étude approchée des sections massives	368
11.13	Théorie des poutres à parois minces ouvertes	370
11.13.1	Considérations géométriques	370
11.13.2	Une formule d'intégration par parties	373
11.13.3	Torsion	374
11.13.4	Cisaillement de flexion	379
11.14	Caissons	382
11.14.1	Détermination du gauchissement	382
11.14.2	Recherche des champs de cisaillement de flexion	384
11.15	Exercices	385
12	Flexion des plaques	393
12.1	Introduction	393
12.2	Description et ordres de grandeur	393
12.3	Structure des contraintes $\sigma_{\alpha\beta}$	396
12.4	Application du principe de Hellinger-Reissner	398
12.5	Équations générales des plaques	403
12.6	Autres types d'hypothèses	405
12.7	L'hypothèse de Kirchhoff	405
12.8	Le paradoxe de Kirchhoff	408
12.9	Équation de Sophie Germain	410
12.10	Résultantes de bord en termes des déplacements	411
12.11	Comparaison des théories	413
12.12	Torsion d'une plaque rectangulaire	415
12.13	Plaque rectangulaire - Série double	421
12.14	Plaque rectangulaire - Série simple	425
12.15	Flexion des plaques circulaires	430
12.16	Déformations axisymétriques	433
12.17	Exercices	439
13	Théorèmes énergétiques extérieurs	441
13.1	Préambule	441
13.2	Théorème de Castigliano	441
13.2.1	Déplacement d'un point d'une poutre	443
13.2.2	Même problème pour une poutre hyperstatique	443
13.2.3	Déplacements pondérés	445
13.2.4	Rapprochement de deux points A et B	445
13.2.5	Formules de Navier-Bresse	446

13.3	Systèmes hyperstatiques - Théorème de Menabrea	451
13.4	Exemples d'application des deux théorèmes précédents	456
13.4.1	Arc à deux articulations	456
13.4.2	Coupures généralisées	458
13.5	Théorème de Clapeyron extérieur	460
13.6	Théorème de réciprocité de Betti	461
13.7	Théorème de réciprocité de Maxwell	463
14	Diagrammes d'influence	465
14.1	Notion de diagramme d'influence	465
14.2	Diagramme d'influence d'un déplacement généralisé	465
14.3	Diagramme d'influence d'un effet de type effort	466
14.3.1	Remarque	468
14.4	Exemples	468
14.4.1	Réaction d'une poutre sur deux appuis	468
14.4.2	Effort tranchant d'une poutre sur deux appuis	469
14.4.3	Moment d'une poutre cantilever	470
14.4.4	Moment dans un arc à trois articulations avec mise en charge indirecte	471
14.4.5	Réaction de l'appui intermédiaire d'une poutre sur trois appuis	473
14.4.6	Effort dans une barre quelconque d'un treillis isostatique	473
15	Stabilité des systèmes élastiques	475
15.1	Introduction	475
15.2	Principe du minimum de l'énergie	476
15.3	Variations successives de l'énergie totale	478
15.4	Analyse générale de la stabilité	480
15.5	Bifurcation de l'équilibre	483
15.6	La colonne d'Euler	485
15.7	Autres cas d'appuis	487
15.7.1	Poutre bi-appuyée	487
15.7.2	Poutre encastree-appuyée	489
15.7.3	Poutre bi-encastree	491
15.8	Colonne flambant sous son propre poids	494
15.8.1	Colonne encastree à sa base et flambant sous son propre poids	494
15.8.2	Colonne bi-appuyée, soumise à la fois à une charge en bout et à une charge répartie	496

15.9	Effet de la déformation due à l'effort tranchant	497
15.10	Stabilité des plaques	499
15.11	Plaque rectangulaire comprimée	501
15.12	Flambage par flexion et torsion	504
15.12.1	Le centre de torsion coïncide avec le centre de gravité	507
15.12.2	La section possède un axe de symétrie	508
15.13	Déversement des poutres fléchies	508
15.13.1	Déversement d'une poutre soumise à un moment quelconque et appuyée à ses extrémités de telle façon que $v = 0$ et $\theta = 0$	510
15.13.2	Remarque sur la répartition des charges	512
15.13.3	Déversement d'une poutre appuyée sur des fourches en ses deux extrémités, sous l'effet d'une charge centrale appliquée à une hauteur a par rapport à l'axe neutre	513
A	Coordonnées curvilignes orthogonales	517
A.1	Introduction	517
A.2	Coordonnées curvilignes	517
A.2.1	Base covariante	517
A.2.2	Tenseur métrique	518
A.2.3	Base contravariante	518
A.2.4	Produit scalaire de deux vecteurs	519
A.2.5	Produit mixte et produit vectoriel	519
A.3	Dérivation des vecteurs de base	521
A.3.1	Dérivées de la base covariante	521
A.3.2	Dérivées de la base contravariante	521
A.3.3	Relations entre les symboles de Christoffel et le tenseur métrique	522
A.4	Dérivation covariante d'un vecteur	522
A.5	Tenseurs du second ordre et leurs dérivées covariantes	523
A.6	Lemme de Ricci	524
A.7	Propriétés de \sqrt{g}	524
A.8	Opérateurs différentiels courants	525
A.8.1	Gradient	525
A.8.2	Élément de surface orienté	526
A.8.3	Divergence	526
A.8.4	Laplacien	527
A.8.5	Rotationnel	527
A.9	Tenseur des déformations de Green	528

A.10 Equations d'équilibre	528
A.11 Coordonnées curvilignes orthogonales	529
A.12 Utilisation des composantes physiques	531
A.12.1 Gradient	532
A.12.2 Divergence	532
A.12.3 Rotationnel	532
A.12.4 Laplacien	532
A.12.5 Dérivées covariantes	533
A.12.6 Déformations	533
A.12.7 Équations d'équilibre	533
A.13 Exercices	534