THÈSES DE DOCTORAT

Quelle compréhension du symbolisme mathématique au travers de la résolution
de problèmes arithmétiques ?
Aperçu d'une thèse de doctorat en sciences de l'éducation.

Des savoirs en jeu au savoir en "je". Médiations sociales et processus de subjectivation en formation initiale d'enseignants

QUELLE COMPRÉHENSION DU SYMBOLISME MATHÉMATIQUE AU TRAVERS DE LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES ? APERÇU D'UNE THÈSE DE DOCTORAT EN SCIENCES DE L'ÉDUCATION

Annick Fagnant

La thèse de doctorat présentée ici a été défendue le 31 janvier 2002 devant un jury composé des Professeurs Marcel Crahay, Jacqueline Beckers et Lieven Verschaffel, membres du Comité de thèse, Professeurs Jacques Grégoire et Michel Fayol, membres du Jury. L'article proposé vise à en donner un bref aperçu au travers d'un texte retraçant la présentation réalisée le jour de la défense.

Cadre théorique

Tout d'abord, il paraît important de préciser le **champ de recherche** dans lequel se situe la problématique.

Plusieurs auteurs (Carpenter et Moser, 1983 ; Fuson, 1992 ; Riley, Greeno et Heller, 1983 ; Vergnaud, 1982 ; 1990) ont mis au point des typologies de problèmes qui présentent le grand intérêt de mettre en évidence la variété des significations que l'on peut attribuer aux opérations additives et soustractives.

Sur la base de ces typologies, de nombreuses recherches ont porté sur l'étude des stratégies informelles de résolution (Carpenter, Hiebert et Moser, 1981 ; Carpenter et Moser, 1982, 1983, 1984 ; De Corte et Verschaffel, 1987a, b). Ces stratégies peuvent être développées par les élèves avant tout enseignement formel en arithmétique ou en résolution de problèmes. Elles présentent une grande variété : les enfants jouent l'histoire en tentant de modéliser les actions ou les relations décrites dans les problèmes. Les stratégies ainsi développées sont intimement liées aux structures des problèmes.

Les auteurs qui se sont intéressés à cet aspect de la résolution de problèmes ont élaboré des classifications permettant de décrire les différentes stratégies utilisées par les élèves. Ils ont aussi amplement

documenté l'analyse des erreurs produites par les élèves et ils y ont apporté différentes interprétations (De Corte et Verschaffel, 1985a ; Dellarosa, 1991 ; Lewis et Mayer, 1987 ; Riley, Greeno et Heller, 1983 ; Stern, 1993).
Ce champ de recherche est très fouillé et très clairement structuré.

Un constat important issu de ces recherches est que le calcul ne peut pas être considéré comme un prérequis à la résolution de problèmes.

Quelques chercheurs (Bebout, 1990 ; Carey, 1991 ; Carpenter, Hiebert et Moser, 1983 ; Carpenter, Moser et Bebout, 1988 ; De Corte et Verschaffel, 1985b ; Hiebert, 1988 ; Hiebert et Lefevre, 1986 ; Vergnaud, 1982) se sont également intéressés à la symbolisation mathématique ; c'est-à-dire à la tâche de production d'un calcul. Les études réalisées dans ce domaine montrent l'intérêt de cette problématique. Globalement, les résultats indiquent que les élèves éprouvent des difficultés à ce niveau mais celles-ci ne sont ni très bien documentées, ni très détaillées.
Il ressort également de ces études l'importance de distinguer les calculs canoniques et les calculs relationnels. Les calculs canoniques sont les calculs de forme standard, c'est-à-dire présentant la réponse derrière le signe d'égalité (a+b= ? ou a=b= ?). Les calculs relationnels sont ceux qui correspondent aux structures des problèmes (et généralement aux stratégies de résolution lorsque celles-ci retracent une modélisation de l'histoire). Ils peuvent prendre différentes formes comme celles de calculs à trou (a+b= ?, a+?=c, ?+b=c ; a–b= ?, a–?=b et ?–b=c).

Loin des stratégies informelles des jeunes élèves qui témoignent d'une réelle volonté d'analyse des situations, d'aucuns (Carpenter, Hiebert et Moser, 1983 ; Greer, 1987 ; Verschaffel et De Corte, 1997) ont mis en évidence que les élèves plus âgés avaient tendance à développer des stratégies superficielles focalisées sur les calculs et négligeant l'étape de représentation de la situation.

Les différents domaines de recherche évoqués ci-dessus ont donné lieu à diverses recommandations pour la pratique de classe. Quelques études (Bebout, 1990 ; De Corte et Verschaffel, 1985c ; Jaspers, 1991 ; Rudmitsky, Etheredge, Freeman et Gilbert, 1995 ; Stellingwerf et Van Lieshout, 1997 ; Willis et Fuson, 1988 ; Wolters, 1983) ont cherché à concrétiser cela au travers de diverses expériences éducatives.

En dehors du champ de recherches et des recommandations pédagogiques qui y sont associées, il paraît important d'apporter quelques précisions relatives au **champ scolaire** dans lequel se situe l'étude réalisée dans le cadre de la présente thèse de doctorat.

Tout d'abord, il faut spécifier que les problèmes ne sont pas proposés en première année dans les classes où se situent les élèves de l'échantillon. Cette matière est jugée comme trop complexe. En corollaire, très peu d'attention (voire aucune) est accordée aux stratégies informelles des élèves.

Le symbolisme mathématique est introduit très tôt (dès le début de l'année pour les additions et un peu plus tard pour les soustractions). L'objectif est d'amener les élèves à développer une maîtrise des techniques de calcul. Celles-ci sont considérées comme un prérequis à la résolution de problèmes.
Les problèmes ne sont proposés qu'en deuxième année avec pour objectif d'illustrer l'applicabilité des opérations formelles vues précédemment dans des situations « concrètes ».

Problématique de recherche

C'est spécifiquement sur l'aspect de la symbolisation que l'étude est focalisée. Plus précisément, dans le contexte scolaire qui vient d'être décrit, on peut présenter les choses comme suit :

- en classe, les élèves sont fréquemment soumis à des calculs en vue d'entraîner les techniques opératoires ;
- en situation de test (dans le cadre de l'étude), on leur propose des situations problèmes en vue de leur permettre de développer leurs stratégies informelles de résolution.

Autrement dit, on a d'un côté les connaissances scolaires et de l'autre, des connaissances plus intuitives et spontanées. Se pose alors la question du LIEN entre les deux types de connaissances.
C'est cela qui constitue la problématique centrale de la thèse ; problématique que l'on peut traduire par l'interrogation suivante :

> Les enfants sont-ils capables d'utiliser le symbolisme mathématique en résolution de problèmes arithmétiques ? Autrement dit, quelle est leur compréhension du symbolisme ?

Il faut tout de suite préciser ce qu'on entend par « compréhension ». Le terme a été défini dans une acception très concrète et contextuelle. Plus précisément :

> On considère que l'enfant donne du sens au symbolisme mathématique s'il est capable de le relier à des situations problèmes et/ou aux stratégies de résolution qu'il développe pour les résoudre.

Méthodologie de recherche

La méthodologie de recherche employée consistait en des interviews individuelles qui ont été proposées aux élèves à deux moments de l'année : en janvier et en fin d'année.
Vingt-cinq élèves ont été interrogés. Ils ont été choisis aléatoirement au départ de six classes provenant de quatre écoles différentes.
Les quatorze problèmes de la classification de Riley *et al.* (1983) ont été utilisés de façon à rencontrer la variété des significations que l'on peut attribuer aux opérations additives et soustractives.

Deux techniques d'observation ont été utilisées. La première technique constitue l'approche principale. Les problèmes étaient lus oralement aux élèves et ces derniers étaient invités à les résoudre. Ils disposaient pour ce faire de matériel manipulable. Ceci devait leur permettre de développer des stratégies informelles de résolution. Ils devaient ensuite produire un calcul en lien avec l'histoire, avec ce qu'ils avaient compté avec les blocs,…
La deuxième technique d'observation consistait à proposer un problème accompagné d'une représentation dessinée. Les élèves devaient directement produire un calcul en lien avec le dessin qui leur était proposé.

Axes d'analyses

Pour organiser la masse d'informations recueillies au travers des interviews, deux axes d'analyse et cinq questions de recherche ont été déterminés.

Le **premier axe** est une analyse par type de problèmes : on s'intéresse aux démarches développées par l'ensemble des élèves face à chaque type de problème. Plusieurs questions de recherche ont été distinguées :

- La première question s'intéresse aux problèmes résolus correctement et face auxquels les élèves proposent un calcul correct. L'analyse porte alors sur les différents types de liens entre les histoires (les problèmes), les stratégies de résolution et les calculs.
- La deuxième question se focalise sur les problèmes résolus correctement mais face auxquels les élèves proposent un calcul incorrect. On touche alors spécifiquement aux difficultés de symbolisation. Les analyses ont permis de déboucher sur la construction d'une typologie d'erreurs.
- La troisième question porte sur les problèmes qui ont été à la fois résolus et symbolisés incorrectement. Les analyses ont également permis de déboucher sur une

typologie d'erreurs, tentant, cette fois de mettre en perspective les difficultés de résolution proprement dites et celles relevant de la symbolisation.

Il est important de constater qu'on ne rencontre jamais de situations résolues incorrectement et face auxquelles l'élève propose ensuite un calcul correct. Cette constatation est un résultat de recherche important. Les recherches portant sur les stratégies informelles de résolution avaient montré que le calcul n'était pas un prérequis à la résolution de problèmes. Les résultats obtenus ici permettent de constater que le calcul en soi n'est pas non plus une aide à la résolution de problèmes.

Le **deuxième axe** est une analyse par profil d'élèves : on regarde alors ce que fait chaque élève face à l'ensemble des situations proposées.

- La question de recherche relative à cet axe (question 4) permet de dégager des profils d'élèves en fonction des situations qu'ils parviennent à symboliser correctement et en fonction des types de calculs produits.

Les quatre premières questions de recherche ont été abordées au travers de la première technique d'observation qui, comme nous l'avons déjà mentionné, constitue la méthodologie de recherche principale.

- Une cinquième question de recherche a permis de comparer les résultats issus des deux techniques d'observation au travers des différents angles d'analyse explicités ci-dessus.

Avant d'entrer dans une présentation plus détaillée de certains résultats, il convient de préciser les critères qui ont été pris en compte pour la détermination des calculs corrects.

Concrètement, le calcul est considéré comme correct….
- … s'il est de structure correcte (pas les calculs de type $3-8=5$ ou $8+3=5$) ;
- … s'il comprend le triplet numérique attendu (c'est-à-dire les données de l'énoncé et la solution attendue) ;
- … et si la réponse est correctement identifiée en son sein.

Quelques résultats

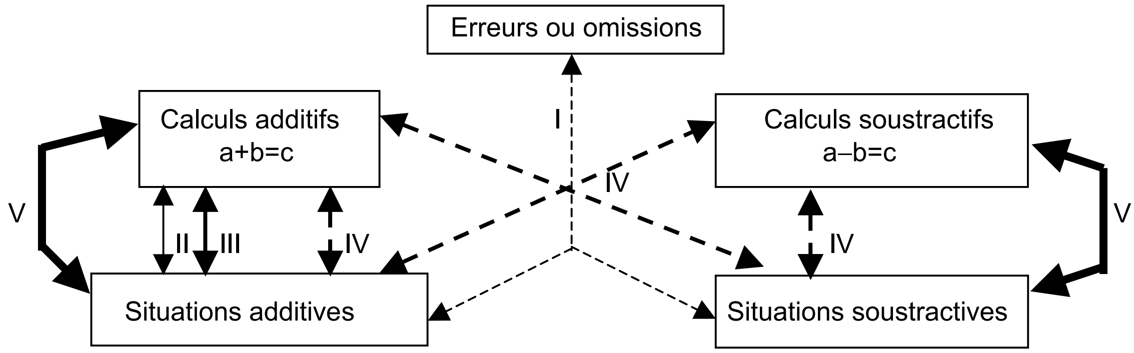
Etant donné l'impossibilité de présenter l'ensemble des résultats dans le cadre du présent article, le choix de deux angles d'analyse a été privilégié.

Premier angle d'analyse : aperçu des profils d'élèves

Le schéma présenté plus loin donne un aperçu de l'analyse réalisée.

Tout d'abord, les calculs produits par les élèves ont été distingués en

deux catégories : les calculs additifs, de forme a+b=c, et les calculs soustractifs, de forme a–b=c. Dans chaque cas, l'inconnue pouvait se situer aux différents endroits (a, b ou c). Il s'agit là de calculs corrects mais les élèves pouvaient aussi commettre des erreurs ou proposer des omissions.
Par ailleurs, les problèmes ont été catégorisés en deux grandes classes : les situations additives et les situations soustractives. Globalement, les situations additives regroupent les problèmes de structure additive ; c'est-à-dire ceux pour lesquels le calcul relationnel qui les représente (ou le calcul canonique) est additif. A l'opposé, les situations soustractives regroupent les problèmes de structure soustractive ; c'est-à-dire ceux correspondant à des calculs relationnel et canonique soustractifs.



Au **profil I**, les élèves parviennent à résoudre et à symboliser correctement un certain nombre de problèmes mais ils ne proposent aucun calcul correct en lien. Ce profil s'intitule LE NEANT et comporte 3 élèves en fin d'année.

Au **profil II**, les élèves parviennent uniquement à proposer des calculs additifs face aux situations additives. Ils sont démunis face aux situations soustractives et ne les symbolisent jamais correctement. Ce profil s'intitule DES ADDITIONS POUR DES SITUATIONS ADDITIVES et comporte 4 élèves en fin d'année.

Au **profil III**, les élèves parviennent à symboliser correctement les deux types de situations mais uniquement avec des calculs additifs. Ce profil s'intitule DES ADDITIONS POUR DES SITUATIONS DE TOUTES SORTES et comporte 9 élèves en fin d'année.

Au **profil IV**, les élèves utilisent les deux types de calculs mais pas toujours de façon bien adaptée aux situations. Il leur arrive encore de ne pas parvenir à produire un calcul correct face à une situation résolue correctement. Ce profil s'intitule DES ADDITIONS ET DES SOUSTRACTIONS DANS TOUTES SORTES DE SITUATIONS et comporte 5 élèves en fin d'année.

Au dernier profil (**profil V**), les élèves utilisent des calculs adaptés aux situations (calculs additifs dans les situations additives et calculs soustractifs dans les situations soustractives). De plus, ils symbolisent correctement tous les problèmes (de types changement et combinaison) résolus correctement. Ce profil s'intitule DES ADDITIONS ET DES SOUSTRACTIONS BIEN ADAPTEES AUX SITUATIONS et comporte 4 élèves en fin d'année.

Il est intéressant de procéder à quelques regroupements : si on comptabilise les trois premiers profils, on constate que 16 élèves sur 25 sont limités à l'utilisation des additions ; ils ne produisent pas un seul calcul soustractif correct en fin d'année.

Seuls 9 élèves parviennent donc à utiliser les deux types de symbolisme et seuls 4 le font de manière adaptée. Précisons encore que le dernier profil n'est pas un profil d'expertise absolue parce que des erreurs ou des omissions relatives aux problèmes de type comparaison (les plus complexes de la classification) sont encore tolérées.

En bref, cet aperçu de l'analyse par profils d'élèves permet de mettre en évidence la compréhension limitée que possèdent les élèves de la symbolisation mathématique.

Deuxième angle d'analyse : le symbolisme mathématique peut-il être considéré comme un facteur déclencheur de démarches superficielles ?

Cet angle d'analyse est illustré au départ de la troisième question de recherche ; c'est-à-dire au travers des problèmes face auxquels les élèves proposent une réponse et un calcul incorrects.

Le premier exemple porte sur le problème comparaison 3 : *Pierre a 4 pommes. Anne a 9 pommes de plus que Pierre. Combien de pommes Anne a-t-elle ?*
Au niveau de la résolution proprement dite, l'erreur la plus courante est de répondre « 9 » (on trouve 27 erreurs de ce type : 19 en janvier et 8 en fin d'année). Cette erreur peut s'expliquer par une mauvaise compréhension de la proposition relationnelle : « *Anne a 9 pommes de plus que Pierre* » est compris comme une proposition d'appartenance (*Anne a 9 pommes*) ou comme deux propositions séparées (*Anne a 9 pommes. Elle a plus de pommes que Pierre*). Il est intéressant de constater que lorsque l'on demande à ces élèves de produire un calcul, plusieurs proposent le calcul « 4+9=13 » (11 calculs au total). Lorsqu'on leur repose la question, ils répondent « 9 ». Le calcul est donc considéré comme incorrect puisqu'il ne respecte pas le critère d'identification de la

solution. Le calcul n'a aucun lien avec l'histoire telle que l'élève l'a comprise, ni avec la stratégie de résolution puisque l'enfant répond en proposant une donnée de l'énoncé. Dans le calcul « 4+9=13 », soit l'élève n'attribue aucune signification concrète au nombre « 13 », soit il considère que c'est ce que les deux enfants ont ensemble (ce qui n'était nullement demandé dans le problème).

Un autre exemple peut être apporté au travers du problème comparaison 1 : *Pierre a 5 pommes. Anne a 11 pommes. Combien de pommes Anne a-t-elle de plus que Pierre ?*
Au niveau de la résolution, l'erreur la plus courante est de répondre « 11 » (18 erreurs de ce type : 12 en janvier et 6 en fin d'année). Ceci peut être soumis au même type d'interprétation que précédemment : « *Combien de pommes Anne a-t-elle ?* » Il est intéressant de constater qu'aucun élève ne propose la réponse « 16 » ; erreur qui pourrait résulter d'une démarche superficielle basée sur les mots-clés (« de plus » conduit à effectuer la somme des données). Par contre, au moment de la production du calcul, quelques élèves proposent le calcul « 5+11=16 » tout en spécifiant que la réponse est « 11 » (et non « 16 » - on trouve 3 calculs au total).

D'une manière générale, ce type d'analyse se révèle pertinent pour la grande majorité des problèmes proposés. Autrement dit, les erreurs au niveau de l'étape de résolution peuvent globalement s'expliquer par des difficultés de nature conceptuelle. En revanche, au niveau des calculs, on constate l'apparition de stratégies superficielles basées sur les mots-clés ou de type « *extract-and-add* » (prendre les données et les additionner).
On constate donc un fossé important entre la résolution et le calcul.

Au niveau de la symbolisation, les stratégies superficielles conduisent à produire des calculs qui auraient été considérés comme corrects si on n'avait pas pris en compte le critère d'identification de la solution. Face aux problèmes soustractifs, cela conduit à produire des calculs inverses aux calculs attendus.
L'importance du fossé entre les étapes de résolution et de calcul se marque également par le fait que la réponse obtenue par calcul n'est pas considérée comme étant la solution du problème.

Enseigner les problèmes en première année : une étude exploratoire

Les différentes analyses réalisées ont permis de révéler que les élèves avaient une compréhension très limitée des opérations additives et soustractives ; c'est-à-dire qu'ils éprouvaient des difficultés à créer des liens entre le symbolisme mathématique utilisé en classe pour entraîner les techniques de calculs, d'une part, et des situations « concrètes » ou des actions réalisées pour les résoudre, d'autre part. De plus, on note également une tendance à développer des stratégies superficielles de résolution.

Ces deux types de constatations justifient pleinement d'enseigner la résolution de problèmes en première année en vue de donner du sens au symbolisme mathématique (autrement dit, pour créer des liens avec des situations concrètes).

C'est ce que nous avons tenté d'investiguer dans une étude exploratoire menée dans deux classes de première année. Cette étude est illustrée ici au départ d'une présentation des différentes démarches que l'on peut rencontrer en résolution de problèmes.

La démarche schématisée ci-dessous représente la **démarche experte** de résolution. Au départ d'un problème proposé, on construit une représentation de la situation. C'est sur la base de cette représentation qu'on met en œuvre le processus de résolution qui, dans les cas qui nous concernent, peut se traduire par la production d'un calcul relationnel ou canonique.

Problème → Représentation → Résolution

Calcul canonique OU Calcul relationnel

La **démarche superficielle**, dont il faut à tout prix éviter le développement, consiste à passer directement à l'étape de résolution, sans procéder à une réelle analyse de la situation (sans en construire une représentation). La résolution peut alors se traduire par la production d'un calcul canonique correct ou non (et ceci en fonction des mots-clés qui induisent ou non l'opération attendue).

En ce qui concerne les **démarches informelles** de résolution, on peut considérer que les phases de représentation et de résolution sont entremêlées puisque l'élève « joue l'histoire » ; il résout le problème en modélisant les actions ou les relations impliquées. Ces démarches ne passent pas par la production d'un calcul et on a pu constater que cette étape posait d'importantes difficultés aux élèves.

La **première méthode** d'enseignement développée dans l'étude exploratoire est ancrée dans les démarches informelles des élèves et a pour objectif de leur apprendre à produire un calcul en lien avec leur stratégie (calcul canonique ou relationnel selon la stratégie développée).

La **deuxième méthode** retrace globalement les étapes de la démarche experte : on apprend aux élèves à construire une représentation du problème qui s'extériorise par un dessin. On les amène ensuite à produire un calcul relationnel directement lié à la situation représentée.

Les résultats de cette étude exploratoire ne sont pas détaillés ici mais il faut préciser que les deux méthodes « fonctionnent » bien et qu'il est donc possible d'enseigner la résolution de problèmes en première année en vue de donner du sens au symbolisme mathématique…

Conclusions et perspectives….

Si on se repositionne au départ du champ de recherche défini en début d'article, on peut escompter que la présente thèse de doctorat a permis d'apporter un éclairage important quant à la problématique de l'utilisation du symbolisme mathématique en résolution de problèmes arithmétiques.

Les études portant sur les stratégies informelles de résolution avaient déjà amplement apporté des justifications à un enseignement précoce de la résolution de problèmes en vue de s'appuyer sur les démarches intuitives et spontanées des élèves. L'étude dont un aperçu est proposé ici permet d'apporter des arguments complémentaires et d'un tout autre poids.
En effet, les résultats obtenus montrent que les élèves éprouvent de grosses difficultés à donner du sens au symbolisme mathématique qu'ils utilisent abondamment en classe pour entraîner les techniques de calcul. Leur compréhension en est très limitée et il paraît donc essentiel de les aider à créer des connections avec des situations plus concrètes. L'utilisation d'un symbolisme vide de sens est dangereuse et pourrait être à l'origine du développement de démarches superficielles. En allant plus loin, on pourrait même y trouver les bases du fossé fréquemment rencontré, chez les élèves plus âgés, entre les mathématiques et les situations de la vie courante.
L'étude exploratoire que nous avons réalisée a permis de montrer qu'il était possible d'enseigner la résolution de problèmes aux jeunes élèves de première année.

Comme nous l'avons précisé en début d'article, le champ de recherche relatif à la problématique qui nous préoccupe est extrêmement bien documenté. Par ailleurs, comme en témoigne la brève présentation du champ scolaire dans lequel l'étude a été réalisée, ces différents résultats semblent avoir peu d'échos dans les classes.

On pourrait alors conclure ici par une métaphore qui ouvre la voie vers de nouvelles perspectives de recherches :

- On peut comparer le « champ de recherche » à une immense bibliothèque : la bibliothèque des chercheurs…
- De l'autre côté, on a le « champ scolaire » avec les enfants, les enseignants,… mais aussi les inspecteurs, les concepteurs de

manuels, les rédacteurs de programmes,…

On peut alors se demander comment faire pour donner aux enseignants la clé de la bibliothèque des chercheurs…

Références

Bebout, H.C. (1990). Children's symbolic representation of addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *2*(2), 123-131.

Carey, D.A. (1991). Number sentences : Linking addition and subtraction word problems and symbols. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(4), 266-280.

Carpenter, T.P., Hiebert, J. & Moser, J.M. (1981). Problem structure and first-grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *12*(1), 27-39.

Carpenter, T.P., Hiebert, J. & Moser, M. (1983). The effect of instruction on children's solution of addition and subtraction word problems. *Educational Studies in Mathematics*, *14*, 55-72.

Carpenter, T.P. & Moser, J.M. (1982). The development of addition and subtraction problem solving skills. In T.P. Carpenter, J.M. Moser and T.A. Romberg (Eds). *Addition and Subtraction. A cognitive perspective* (9-24). Hillsdale, N.J. : Lawrence Erlbaum

Carpenter, T.P. & Moser, J.M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. In R. Lesh et M. Landau (Eds), *Acquisition of mathematical concepts and processes* (7-44). New York : Academic Press.

Carpenter, T.P. & Moser, J.M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grade one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*(3), 179-202.

Carpenter, T.P., Moser, J.M. & Bebout, H.C. (1988). Representation of addition and substraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *4*, 345-357.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1985a). Beginning first grader's initial representation of arithmetic word problems. *Journal of Mathematical Behavior*, *4*, 3-21.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1985b). Writing number sentences to represent addition and substraction problems. In J.K. Damarin and M. Shelton (Eds), *Proceeding of the Seventh Annual Meeting of North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Columbus (50-56). International Group for the Psychology of Mathematics Education.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1985c). Working with simple word problems in early mathematics instruction. In L. Streefland (Ed.), *Proceeding of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 1*. (304-309). The Netherlands : State University of Utrecht.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1987a). The effect of semantic structure on first graders' solution strategies of elementary addition and substraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*, 363-381.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1987b). Children's problem-solving capacities and processes with respect to elementary arithmetic word problems. In E. De Corte, E. Lodewijks, P. Span & E. Parmentier (Eds), *Learning and Instruction. European research in an international context. Vol. 1* (300-308). Oxford/Leuven : Pergamon Press/Leuven University Press.

Dellarosa-Cummins, D. (1991). Children interpretation of arithmetic word-problems. *Cognition and Instruction*, *8*(3), 261-289.

Fuson, K.C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In D.A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (243-275). New York : MacMillan.

Greer, B. (1987). Understanding arithmetical operations as models of situations. In J.A. Sloboda & D. Rogers (Eds.), *Cognitive process in mathemati*cs (60-80). Oxford : Calrendon Press.

Hiebert, S. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational Studies in Mathematics*, *19*, 333-355.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics : an introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge : the case of mathematics* (1-27). Hilsdale, N.J. : Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Jaspers, M.W.M. (1991). *Prototypes of computer assisted instruction for arithmetic word problem solving*. Unpublished doctoral dissertation. Université de Nijmegen, NL.

Lewis, A.B. & Mayer, R.F. (1987). Student's miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational psychology*, *75*(4), 363-371.

Riley, M.S., Greeno, J.G. & Heller, J.I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H.P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking*. New York : Academic Press.

Rudmitsky, A., Etheredge, S., Freeman, S.J.M., Gilbert, T. (1995). Learning to solve addition and subtraction word problems through a structure - plus - writing approach. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(5), 467-486.

Stellingwerf, B.P. & Van Lieshout, E.C.D.M. (1997). *Objects and number sentences in arithmetic word problem solving*. Paper presented at the 7th European Conference for Research on Learning and Instruction. Athens, Greece, 26-30.

Stern, E. (1993). What makes certain arithmetic word problems involving the comparison of sets so difficult for children ? *Journal of Educational Psychology, 85(1), 7-23.*

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operation of thought involved in addition and subtraction problems. In T.P. Carpenter, J.M. Moser and T.A. Romberg (Eds). *Addition and Subtraction. A cognitive perspective*, (39-59). Hillsdale, N.J. : Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Vergnaud, G. (1990a). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en didactique des Mathématiques*, *10* (2.3), 133-170.

Verschaffel, L. & De Corte, E. (1997). Word problems : A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school ? In T. Nunes & P. Bryant (Eds), *Learning and Teaching Mathematics : An*

International Perspective (69-97). UK : Psychology Press Ltd.

Willis, G.B. & Fuson, K.C. (1988). Teaching children to use schematic drawings to solve addition and substraction word problems. *Journal of Educational Psychology*, *80*(2), 192-201.

Wolters, M.A.D. (1983). The part-whole schema and arithmetical problems. *Educational Studies in Mathematics*, *14*, 127-138.