SUR CERTAINES INÉGALITÉS FONDAMENTALES ET LEUR GÉNÉRALISATION DANS LA THÉORIE DES BORNES SUPÉRIEURES ET INFÉRIEURES EN ÉLASTICITÉ

PAR

B. FRAEIJS de VEUBEKE,

Professeur à l'Université de Liège

Extrait de la *Revue Universelle des Mines*
(9e Série, tome XVII, nº 5, 1961, pages 305 à 314)

LIEGE
VAILLANT-CARMANNE, S. A. IMPRIMEUR-EDITEUR, 4, PLACE ST-MICHEL, 4
1961

24615

Sur certaines Inégalités fondamentales et leur Généralisation dans la Théorie des Bornes supérieures et inférieures en Élasticité

par B. FRAEIJS de VEUBEKE,
Professeur à l'Université de Liège

Résumé. — *Les principes énergétiques classiques de l'élasticité permettent d'établir une paire fondamentale d'inégalités, encadrant la valeur exacte d'une intégrale de l'état de tension, entre deux bornes accessibles à des calculs simplifiés. Ces inégalités suffisent à évaluer certaines caractéristiques élastiques globales d'une structure, en choisissant convenablement l'état de tension correspondant à chacune d'elles.*

Pour encadrer d'autres intégrales d'un état déterminé de tension, les inégalités fondamentales sont généralisées suivant une méthode inspirée par celle des charges fictives.

En raison de leur concision les notations essentielles de la théorie de l'espace des états de tension sont exposées et utilisées.

I. — Les principes énergétiques classiques

Soient U l'énergie de déformation, exprimée à partir des dérivées du champ des vecteurs déplacement, et P l'énergie potentielle de charges extérieures mortes (invariantes en intensité et direction). Le principe du minimum de l'énergie totale peut être énoncé comme suit : « Parmi tous les déplacements possibles, respectant éventuellement des conditions géométriques a priori (appuis, encastrements, etc), ceux qui sont physiquement réalisés rendent l'énergie totale $U + P$ minimum ».

On montre en effet [2, 3, 4] que pour de tels déplacements les conditions d'équilibre en volume et en surface avec les charges données sont satisfaites.

Soient Ψ l'énergie de déformation exprimée cette fois à partir d'un champ de tensions et Q l'énergie potentielle complémentaire. Cette dernière peut être définie au signe près comme le travail virtuel des réactions inconnues sur les déplacements imposés a priori. Le principe du minimum de l'énergie complémentaire peut alors s'énoncer comme suit : « Parmi tous les champs de tension qui vérifient l'équilibre avec les charges imposées, celui qui est physiquement réalisé rend minimum l'énergie complémentaire totale $\Psi + Q$ ».

On montre en effet [2, 3, 4] que les déformations locales associées à ce champ de tensions obéissent aux conditions de compatibilité locales qui permettent d'en déduire par intégration un champ de déplacements. De plus, si l'espace occupé par la structure est à connexion multiple (structure hyperstatique), les conditions qui rendent le champ de déplacements univalent sont également vérifiées.

Notons que si les relations entre tensions et déformations ne sont pas linéaires, le premier principe reste valable à condition d'y substituer à « minimum » le qualificatif « stationnaire ». Le second principe reste aussi valable avec une modification supplémentaire : l'énergie complémentaire Ψ doit être définie par une transformation de contact de Legendre [4] et n'est plus simplement une expression modifiée de l'énergie de déformation même.

Les inégalités fondamentales qui seront établies ci-dessous reposent strictement sur le caractère de minimalité des principes et par conséquent sur l'hypothèse d'une relation linéaire entre tensions et déformations.

2. — Les inégalités de base

Supposons que nous résolvions un problème d'élasticité en faisant des hypothèses simplificatrices restrictives sur l'ensemble des champs de déplacement possibles. En vertu du caractère minimal du premier principe nous pourrons écrire :

$$U + P \geqslant U_e + P_e \qquad (1)$$

où U_e et P_e sont respectivement l'énergie de déformation et l'énergie potentielle des charges dans la solution exacte inconnue. L'effet des hypothèses restrictives est bien connu : au lieu d'être vérifiées partout exactement, les équations d'équilibre ne le sont plus que suivant certaines moyennes pondérées. On peut dire que le champ de tensions de la solution approchée est un champ « compatible » (ses déformations dérivent d'un champ de déplacements ayant les caractères de continuité et d'univalence désirables) mais ce n'est plus un champ d'équilibre exact.

Supposons maintenant que nous puissions résoudre le même problème en formulant des hypothèses simplificatrices restrictives sur l'ensemble des états d'équilibre possibles. En vertu du caractère minimal du second principe nous aurons :

$$\Psi + Q \geqslant \Psi_e + Q_e \qquad (2)$$

Cette fois le champ de tensions approché est un champ d'équilibre exact mais n'est plus un champ exactement compatible.

Pour exploiter les inégalités précédentes considérons les deux égalités suivantes :

$$U_e = \Psi_e = -\frac{1}{2}(P_e + Q_e) \qquad (3)$$

La première est évidente puisque, dans le cas de relations linéaires entre tensions et déformations, U_e et Ψ_e ne sont que deux formes distinctes de la même énergie. La deuxième égalité est l'expression du théorème de Clapeyron (extérieur) suivant lequel l'énergie de déformation d'un corps élastique est égale à la moitié du produit des charges (y compris les réactions dont les points d'application se déplacent) par les déplacements correspondants.

A l'aide des équations (3) éliminons U_e et Ψ_e des inégalités (1) et (2) qui deviennent respectivement :

$$U + P \geqslant \frac{1}{2}(P_e - Q_e)$$

$$\Psi + Q \geqslant \frac{1}{2}(Q_e - P_e)$$

Soit, moyennant un changement de signe et donc de sens de la seconde inégalité :

$$U + P \geqslant \frac{1}{2}(P_e - Q_e) \geqslant -(\Psi + Q) \qquad (4)$$

Ce sont les inégalités de base.

Le champ des déplacements et l'état de tension d'une structure sont en principe déterminés de façon unique par les données : charges et déplacements imposés. A cet état ne correspond par (4) qu'une seule intégrale caractéristique que nous puissions évaluer par bornes supérieures et inférieures sans résoudre exactement le problème posé par la recherche de l'état correspondant aux données. Les renseignements que nous pouvons tirer des inégalités (4) concernant un état spécifié de la structure sont donc limités. Mais les renseignements que nous pouvons tirer concernant les propriétés élastiques de la structure même sont aussi nombreux que les problèmes que nous pouvons poser en variant les données. C'est donc ici le problème qui doit être choisi en fonction de la caractéristique élastique à déterminer.

Par contre nous pouvons être confrontés avec un problème de détermination d'un état de tension, de résolution exacte difficile, et désirer encadrer une propriété de la solution entre des bornes accessibles à des calculs simples. N'étant plus maîtres du problème posé, les inégalités (4) ne fournissent en général pas le renseignement voulu. Nous verrons cependant qu'elles peuvent encore constituer la base d'une généralisation répondant à de telles préoccupations.

Si les inégalités (4) et leur démonstration élémentaire ne semblent pas figurer dans la littérature, la raison en est probablement à l'orientation très particulière donnée au calcul des bornes supérieures et inférieures par l'emploi du formalisme d'un espace vectoriel des états de tension [5, 8, 10]. Le grand intérêt des bases de ce formalisme nous incite à les exposer brièvement et à redémontrer les principes énergétiques et la place qu'y occupent les inégalités (4) avant de procéder à leur généralisation.

3. — Champs compatibles et champs d'équilibre

Pour simplifier au maximum l'exposé un « champ » désignera désormais, sauf qualification expresse, un champ de tensions dans une structure déterminée. A tout champ de tensions est toujours associé par les règles :

$$\begin{array}{lll} \varepsilon_x = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \sigma_x} & \varepsilon_y = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \sigma_y} & \varepsilon_z = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \sigma_z} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \tau_{xy}} & \gamma_{yz} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \tau_{yz}} & \gamma_{zx} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \tau_{zx}} \end{array} \qquad (5)$$

un champ de déformations. Dans ces expressions Φ est la densité d'énergie (complémentaire) exprimée à partir des tensions. Par exemple :

$$\Phi = \frac{1}{2E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)^2 +$$

$$\frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x\right)$$

pour un matériau isotrope; les dérivations indiquées en (5) restituant alors les lois de Hooke usuelles.

Un champ sera dit champ d'équilibre quand les tensions vérifient les équations d'équilibre en volume :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\rho \overline{X} \qquad \text{etc...} \qquad (6)$$

avec les charges imposées par unité de masse $(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z})$ et les équations d'équilibre en surface :

$$l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} = \overline{p}_x \qquad \text{etc... sur } \Sigma_1 \qquad (7)$$

avec les charges $(\overline{p}_x, \overline{p}_y, \overline{p}_z)$ sur l'ensemble Σ_1 des surfaces où elles sont imposées; (l, m, n) désignent les cosinus directeurs de la normale extérieure.

Un champ sera dit « compatible » si un champ de déplacements (u, v, w) ayant les caractères de continuité et d'univalence voulus existe, tel que :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_x} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{xy}} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{etc...} \qquad (8)$$

C′ désigne un champ compatible particulier vérifiant les conditions :

$$u' = \overline{u} \quad v' = \overline{v} \quad w' = \overline{w} \quad \text{sur } \Sigma_2 \qquad (9)$$

sur l'ensemble Σ_2, complémentaire à Σ_1, des surfaces où les déplacements seraient imposés.

C désigne tout champ compatible vérifiant les conditions homogènes :

$$u = 0 \quad v = 0 \quad w = 0 \quad \text{sur } \Sigma_2 \qquad (10)$$

E^0 désigne un champ d'équilibre particulier, vérifiant les équations d'équilibre (6) et (7) et prenant des valeurs particulières :

$$p_x = p_x^0 \quad p_y = p_y^0 \quad p_z = p_z^0 \text{ sur } \Sigma_2 \qquad (11)$$

E désigne un champ arbitraire d'auto-tensions. C'est un champ vérifiant les équations d'équilibre (6) et (7) rendues homogènes par annulation des seconds membres. Les valeurs (p_{xE}, p_{yE}, p_{zE}) qui lui sont associées sur Σ_2 sont arbitraires.

D'après ces définitions, l'ensemble des champs compatibles d'un problème peut être représenté par C′ + C; l'ensemble des champs d'équilibre du même problème par E^0 + E.

S désignera le champ exact répondant aux conditions du problème; il est simultanément champ d'équilibre et champ compatible.

4. — Définition du produit scalaire de deux champs

Le produit scalaire de deux champs A et B est par définition l'intégrale de volume :

$$(A, B) = \int_{\text{Vol}} (\sigma_{xA}\varepsilon_{xB} + \sigma_{yA}\varepsilon_{yB} + \sigma_{zA}\varepsilon_{zB} + \tau_{xyA}\gamma_{xyB} + \tau_{yzA}\gamma_{yzB} + \tau_{zxA}\gamma_{zxB})\, d\,\text{Vol.}$$

ou encore, par suite des formules (5) :

$$(A, B) = \int_{\text{Vol}} \left(\sigma_{xA} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{xB}} + \ldots + \tau_{xyA} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{xyB}} + \ldots\right) d\,\text{Vol.}$$

Les propriétés des formes bilinéaires permettent alors d'écrire aussi :

$$(A, B) = \int_{\text{Vol}} \left(\sigma_{xB} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{xA}} + \ldots + \tau_{xyB} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{xyA}}\right) d\,\text{Vol.} = (B, A).$$

Cette propriété de commutativité du produit scalaire est ici la traduction du principe de réciprocité de Betti-Rayleigh.

Le carré de la norme d'un champ est l'expression :

$$(A, A) = \int_{\text{Vol}} \left(\sigma_{xA} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{xA}} + \ldots + \tau_{xyA} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{xyA}} + \ldots\right) d\,\text{Vol.} = 2 \int_{\text{Vol}} \Phi \, d\,\text{Vol.}$$

Ici a été appliqué le théorème d'Euler sur les fonctions quadratiques homogènes et il en est découlé le théorème de Clapeyron intérieur : « l'énergie de déformation est égale à la moitié du produit des tensions par les déformations, intégré dans le volume ». Comme l'énergie de déformation ne s'annule que si le champ est identiquement nul, la métrique définie dans l'espace des états de tension est définie-positive.

5. — Un théorème fondamental

Le produit scalaire d'un champ d'auto-tensions et d'un champ compatible vérifiant les conditions homogènes (10) est nul :

$$(E, C) = (C, E) = 0 \qquad (12)$$

En effet, puisque C est un champ compatible :

$$(\mathrm{E}, \mathrm{C}) = \int_{\mathrm{Vol}} \left(\sigma_{x\mathrm{E}} \frac{\partial u_c}{\partial x} + \ldots + \tau_{xy\mathrm{E}} \left(\frac{\partial u_c}{\partial y} + \frac{\partial v_c}{\partial x} \right) + \ldots \right) d\,\mathrm{Vol}.$$

Intégrons par parties, il vient :

$$\begin{aligned}(\mathrm{E}, \mathrm{C}) = &\int_{\Sigma_1+\Sigma_2} [u_c\,(l\sigma_{x\mathrm{E}} + m\tau_{xy\mathrm{E}} + n\tau_{xz\mathrm{E}}) + v_c\,(\ldots) + w_c\,(\ldots)]\, d\Sigma \\ &- \int_{\mathrm{Vol}} \left[u_c \left(\frac{\partial \sigma_{x\mathrm{E}}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy\mathrm{E}}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz\mathrm{E}}}{\partial z} \right) + v_c\,(\ldots) + w_c\,(\ldots) \right] d\,\mathrm{Vol},\end{aligned} \tag{13}$$

Or, de par sa définition, le champ E satisfait aux équations (6) et (7) sans second membre, ce qui rend nulles les intégrales de volume et de surface sur Σ_1. L'intégrale sur Σ_2 disparait aussi du fait que le champ C satisfait aux équations (10). Le théorème se trouve ainsi démontré.

Deux réciproques importantes :

(A, C) = 0 pour tout C implique A = E (14)

« Un champ A orthogonal à tous les champs compatibles vérifiant les conditions homogènes (10) est un champ d'auto-tensions ».

(A, E) = 0 pour tout E implique A = C (15)

« Un champ A orthogonal à tous les champs d'auto-tensions est un champ compatible vérifiant les conditions homogènes (10) ».

Une autre conséquence importante est l'unicité d'une solution. Si en effet S_1 et S_2 étaient deux solutions exactes d'un même problème, leur différence $S_2 - S_1$ serait à la fois un champ d'auto-tensions et un champ compatible vérifiant les conditions homogènes (10). On en déduit par le théorème (12) :

$$(\mathrm{S}_2 - \mathrm{S}_1,\ \mathrm{S}_2 - \mathrm{S}_1) = 0$$

Mais alors l'énergie de déformation associée au champ $S_2 - S_1$ est nulle et $S_2 = S_1$.

Il sera utile pour la suite de généraliser la formule (13). Chaque fois que dans un produit scalaire de deux champs l'un d'eux est un champ compatible, il est possible d'intégrer par parties et d'exprimer le produit sous forme d'intégrales de volume et de surface portant sur les charges associées à l'autre champ. Ainsi, si B est un champ compatible :

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = &\int_{\Sigma_1+\Sigma_2} (p_{x\mathrm{A}} u_{\mathrm{B}} + p_{y\mathrm{A}} v_{\mathrm{B}} + p_{z\mathrm{A}} w_{\mathrm{B}})\, d\Sigma\ + \\ &+ \int_{\mathrm{Vol}} \rho\,(\mathrm{X}_{\mathrm{A}} u_{\mathrm{B}} + \mathrm{Y}_{\mathrm{A}} v_{\mathrm{B}} + \mathrm{Z}_{\mathrm{A}} w_{\mathrm{B}})\, d\,\mathrm{Vol}.\end{aligned} \tag{16}$$

où :

$$p_{x\mathrm{A}} = l\sigma_{x\mathrm{A}} + m\tau_{xy\mathrm{A}} + n\tau_{xz\mathrm{A}} \qquad \text{etc...}$$

$$-\rho \mathrm{X}_{\mathrm{A}} = \frac{\partial \sigma_{x\mathrm{A}}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy\mathrm{A}}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz\mathrm{A}}}{\partial z} \qquad \text{etc...}$$

6. — Le principe du minimum de l'énergie totale

Intégrant par parties, ou utilisant directement le résultat (16) avec les propriétés (6), (7) et (11) du champ E^0, il vient :

$$(\mathrm{E}^0, \mathrm{C}' + \mathrm{C}) = -\mathrm{P} + \int_{\Sigma_2} (p_x^0 \bar{u} + p_y^0 \bar{v} + p_z^0 \bar{w})\, d\Sigma \tag{17}$$

où P est l'énergie potentielle :

$$\mathrm{P} = - \int_{\Sigma_1} [\bar{p}_x\,(u_c + u') + \ldots]\, d\Sigma - \int_{\mathrm{Vol}} [\bar{\mathrm{X}}\,(u_c + u') + \ldots]\, d\,\mathrm{Vol}. \tag{18}$$

Par conséquent $-(E^0, C' + C)$ est, à une constante près, l'énergie potentielle des charges appliquées associée aux déplacements du champ compatible général C′ + C. Le principe du minimum de l'énergie totale peut s'énoncer :

$$m_1 = \frac{1}{2}\,(\mathrm{C}' + \mathrm{C}, \mathrm{C}' + \mathrm{C}) - (\mathrm{E}^0, \mathrm{C}' + \mathrm{C})$$

prend sa plus petite valeur pour C′ + C = S.

En effet, puisque S est un champ compatible, la différence entre S et C′ + C est un champ compatible δC, vérifiant les conditions homogènes (10). Pour C′ + C = S + δC la valeur prise par m_1 est :

$$\begin{aligned}m_1 &= \frac{1}{2}\,(\mathrm{S} + \delta\mathrm{C}, \mathrm{S} + \delta\mathrm{C}) - (\mathrm{E}^0, \mathrm{S} + \delta\mathrm{C}) \\ &= \left[\frac{1}{2}\,(\mathrm{S}, \mathrm{S}) - (\mathrm{E}^0, \mathrm{S}) \right] + \\ &\qquad + \frac{1}{2}\,(\delta\mathrm{C}, \delta\mathrm{C}) + (\delta\mathrm{C}, \mathrm{S} - \mathrm{E}^0)\end{aligned}$$

Mais, S étant aussi un champ d'équilibre, $S - E^0$ est un champ d'auto-tensions et en vertu du théorème (12).

$$(\delta\mathrm{C}, \mathrm{S} - \mathrm{E}^0) = 0$$

D'autre part le premier terme du second membre est la valeur prise par m_1 pour la solution exacte. Enfin comme :

$$(\delta C, \delta C) \geqslant 0$$

et égal à zéro seulement si le champ δC est identiquement nul, le principe est prouvé. Il fournit l'inégalité :

$$\frac{1}{2}(C' + C, C' + C) - (E^0, C' + C) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}(S, S) - (E^0, S) \quad (19)$$

Dans les solutions approchées le champ $C' + C$ n'est pas le plus général possible. Il est restreint à certains modes de déplacement principaux, suggérés par l'intuition physique ou les solutions connues de problèmes voisins. Les paramètres ou fonctions inconnues qui subsistent dans le système de déplacements auquel on s'est volontairement restreint pour la simplicité des calculs, sont eux-mêmes déterminés en cherchant le minimum que prend m_1 dans de telles conditions. Ceci se fait à l'aide du calcul des variations et donne finalement une meilleure approximation en ce sens que l'inégalité (19) est la plus serrée.

7. — Le principe du minimum de l'énergie complémentaire

A l'aide du résultat (16) on trouve de façon similaire :

$$(C', E^0 + E) = -Q + \int_{\Sigma_1} (\bar{p}_x u' + \ldots)\, d\Sigma +$$

$$+ \int_{Vol} (\bar{X} u' + \ldots)\, d\,\mathrm{Vol} \quad (20)$$

où Q désigne l'énergie potentielle complémentaire:

$$Q =$$

$$-\int_{\Sigma_2} [(p_x{}^0 + p_{xE})\bar{u} + (p_y{}^0 + p_{yE})\bar{v} + (p_z{}^0 + p_{zE})\bar{w}]\, d\Sigma \quad (21)$$

Par conséquent $-(C', E^0 + E)$ est, à une constante près, l'énergie potentielle complémentaire associée aux réactions du champ d'équilibre général $E^0 + E$. Le principe du minimum de l'énergie complémentaire peut s'énoncer :

$$m_2 = \frac{1}{2}(E^0 + E, E^0 + E) - (C', E^0 + E)$$

prend sa plus petite valeur quand $E^0 + E = S$.

En effet, puisque S est un champ d'équilibre, la différence entre S et $E^0 + E$ est un champ d'auto-tensions δE. Pour $E^0 + E = S + \delta E$, la valeur prise par m_2 est :

$$m_2 = \frac{1}{2}(S + \delta E, S + \delta E) - (C', S + \delta E)$$

$$= \left[\frac{1}{2}(S, S) - (C', S)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}(\delta E, \delta E) + (\delta E, S - C')$$

Mais S étant aussi un champ compatible, $S - C'$ est un champ compatible vérifiant les conditions homogènes (10) et, en vertu du théorème (12) :

$$(\delta E, S - C') = 0$$

Le premier terme du second membre étant la valeur prise par m_2 pour la solution exacte et comme :

$$(\delta E, \delta E) \geqslant 0$$

et égal à zéro seulement si le champ δE est identiquement nul, la preuve du second principe est établie. Elle fournit l'inégalité :

$$\frac{1}{2}(E^0 + E, E^0 + E) - (C', E^0 + E) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}(S, S) - (C', S) \quad (22)$$

Cette fois les solutions approchées sont basées sur la considération d'états d'équilibre limités à certaines modes suggérés par l'intuition physique ou la solution de problèmes voisins. Les paramètres ou fonctions indéterminés dans l'ensemble des états envisagés se déterminent par le calcul des variations. Ils donnent à m_2 sa plus petite valeur dans ce cadre restreint et par conséquent l'inégalité (22) la plus serrée.

8. — Les inégalités de base

En vertu du théorème (12) on peut écrire :

$$(S - E^0, S - C') = 0$$

Le développement de cette relation fournit :

$$\frac{1}{2}(S, S) = \frac{1}{2}(E^0, S) + \frac{1}{2}(S, C') - \frac{1}{2}(E^0, C') \quad (23)$$

A gauche figure l'énergie de déformation exacte. A droite on trouve après application de transformations du type (16) et simplifications :

$$\frac{1}{2}\int_{\Sigma_1} (\bar{p}_x u + \ldots)\, d\Sigma + \frac{1}{2}\int_{\Sigma_2} (p_x \bar{u} + \ldots)\, d\Sigma +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{Vol} \rho(\bar{X} u + \ldots)\, d\,\mathrm{Vol}.$$

où les déplacements (u, v, w) et les (p_x, p_y, p_z) appartiennent à la solution exacte. L'équation (23) n'est donc autre que la traduction du théorème de Clapeyron extérieur. Il nous permet de recalculer les membres de droite des inégalités (19) et (22) qui deviennent :

$$\frac{1}{2}(C' + C, C' + C) - (E^0, C' + C) \geqslant \geqslant \frac{1}{2} h - \frac{1}{2}(E^0, C')$$

$$\frac{1}{2}(E^0 + E, E^0 + E) - (C', E^0 + E) \geqslant \geqslant -\frac{1}{2} h - \frac{1}{2}(E^0, C')$$

où :

$$h = (S, C' - E^0) \qquad (24)$$

En ajoutant (E^0, C') aux deux membres de la seconde inégalité on obtient le principe d'encadrement :

$$\frac{1}{2}(C' + C, C' + C) - (E^0, C' + C) \geqslant \geqslant \frac{1}{2}[h - (E^0, C')] \geqslant -\frac{1}{2}(E^0 + E, E^0 + E) + (C', E) \qquad (25)$$

Il permet d'enfermer h, grandeur caractéristique de la solution exacte, entre deux bornes calculables sans faire appel à cette solution exacte. L'écart entre les deux bornes permet d'apprécier la nécessité de raffiner les solutions approchées en étendant l'ensemble des champs compatibles et des champs d'équilibre servant à les construire.

L'équivalence complète entre les inégalités (25) et celles (4) devient apparente après le calcul explicite de :

$$h - (E^0, C') = P_e - Q_e - - 2 \int_{\Sigma_2} (p_x^0 \bar{u} + p_y^0 \bar{v} + p_z^0 \bar{w})\, d\Sigma$$

Tous les membres de (25) ne diffèrent des membres de (4) que par une constante, dont la valeur ne dépend pas des éléments inconnus de la solution exacte. Cette constante pourrait encore être annulée en vue d'une identification complète, en précisant que le champ E^0 doit vérifier sur Σ_2 les conditions supplémentaires $p_x^0 = 0, p_y^0 = 0, p_z^0 = 0$. Ceci ne fait cependant qu'introduire une difficulté supplémentaire et inutile dans les calculs.

9. — Les inégalités généralisées

Les inégalités (25) ou (4) sont suffisantes pour la recherche de bornes à certaines caractéristiques de rigidité globales d'une structure. On les verra en particulier appliquées à la recherche des coefficients d'influence directe d'un treillis hyperstatique [11]. Pour d'autres caractéristiques, telles que les coefficients d'influence mutuelle, il faut disposer d'inégalités d'un caractère plus général. Des inégalités de caractère général, basées sur la méthode dite « de l'hypercercle », ont été données dans la littérature par Prager [5, 8], Synge [5, 10], Greenberg [6, 7], Diaz [7] et Washizu [9]. Nous poursuivrons ici une voie différente en généralisant les inégalités de base de façon à permettre en principe l'encadrement de n'importe quelle caractéristique de la solution exacte d'un problème d'élasticité relatif à une structure donnée.

Considérons deux problèmes distincts relatifs à la même structure. L'un a pour solution exacte le champ S_1 et correspond aux données :

$(\bar{X}_1, \bar{Y}_1, \bar{Z}_1)$ en volume $(\bar{p}_{x1}, \bar{p}_{y1}, \bar{p}_{z1})$ sur Σ_1 $(\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{w}_1)$ sur Σ_2.

L'autre a pour solution exacte le champ S_2 et correspond à :

$(\bar{X}_2, \bar{Y}_2, \bar{Z}_2)$ en volume $(\bar{p}_{x2}, \bar{p}_{y2}, \bar{p}_{z2})$ sur Σ_1 $(\bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{w}_2)$ sur Σ_2.

Introduisons les notations :

$$\overline{c_{11}} = \frac{1}{2}(C_1' + C_1, C_1' + C_1) - (E^0_1, C_1' + C_1)$$

$$c_{11} = \frac{1}{2}(S_1, C_1' - E_1^0) - \frac{1}{2}(E_1^0, C_1')$$

$$\underline{c_{11}} = -\frac{1}{2}(E_1^0 + E_1, E_1^0 + E_1) + (C_1', E_1)$$

de façon à écrire les inégalités (25) relatives au premier problème sous la forme condensée :

$$\overline{c_{11}} \geqslant c_{11} \geqslant \underline{c_{11}} \qquad (26)$$

Avec les notations correspondantes pour le second problème :

$$\overline{c_{22}} \geqslant c_{22} \geqslant \underline{c_{22}} \qquad (27)$$

Appliquons ensuite les inégalités fondamentales au problème dont la solution exacte est $S_1 + \lambda S_2$, λ étant un paramètre arbitraire. Nous trouvons qu'elles peuvent s'écrire :

$$\overline{c_{11}} + 2\lambda\overline{c_{12}} + \lambda^2\overline{c_{22}} \geqslant c_{11} + 2\lambda c_{12} + + \lambda^2 c_{22} \geqslant \underline{c_{11}} + 2\lambda\underline{c_{12}} + \lambda^2\underline{c_{22}} \qquad (28)$$

à condition de poser :

$$2\overline{c_{12}} = (C_1' + C_1, C_2' + C_2) - (E_1^0, C_2' + C_2) - - (E_2^0, C_1' + C_1)$$

$$2c_{12} = \frac{1}{2}(S_1, C_2' - E_2^0) + \frac{1}{2}(S_2, C_1' - E_1^0) - - \frac{1}{2}(E_1^0, C_2') - \frac{1}{2}(E_2^0, C_1') \quad (29)$$

$$2\underline{c_{12}} = -(E_1^0 + E_1, E_2^0 + E_2) + + (C_1', E_2) + (C_2', E_1)$$

De (28) nous tirons en divisant par un λ positif :

$$2c_{12} \leqslant \frac{1}{\lambda}(\overline{c_{11}} - c_{11}) + 2\overline{c_{12}} + \lambda(\overline{c_{22}} - c_{22}) \quad (30)$$

et, a fortiori grâce à (26) et (27) :

$$2c_{12} \leqslant \frac{1}{\lambda}(\overline{c_{11}} - \underline{c_{11}}) + 2\overline{c_{12}} + \lambda(\overline{c_{22}} - \underline{c_{22}})$$

Nous obtenons la meilleure borne supérieure en cherchant le minimum du membre de droite pour λ positif. En annulant la dérivée par rapport à λ nous obtenons immédiatement :

$$\lambda = \sqrt{\frac{\overline{c_{11}} - \underline{c_{11}}}{\overline{c_{22}} - \underline{c_{22}}}}$$

et

$$c_{12} \leqslant \overline{c_{12}} + \sqrt{(\overline{c_{11}} - \underline{c_{11}})(\overline{c_{22}} - \underline{c_{22}})}$$

Pour une valeur négative de λ nous devons changer le sens de l'inégalité (30) et de nouveau en vertu de (26) et (27) :

$$2c_{12} \geqslant \frac{1}{\lambda}(\overline{c_{11}} - \underline{c_{11}}) + 2\overline{c_{12}} + \lambda(\overline{c_{22}} - \underline{c_{22}})$$

Cette fois le maximum du membre de droite pour un λ négatif est obtenu pour :

$$\lambda = -\sqrt{\frac{\overline{c_{11}} - \underline{c_{11}}}{\overline{c_{22}} - \underline{c_{22}}}}$$

et

$$c_{12} \geqslant \overline{c_{12}} - \sqrt{(\overline{c_{11}} - \underline{c_{11}})(\overline{c_{22}} - \underline{c_{22}})}$$

Ainsi on dispose déjà des inégalités :

$$\overline{c_{12}} + \sqrt{(\overline{c_{11}} - \underline{c_{11}})(\overline{c_{22}} - \underline{c_{22}})} \geqslant c_{12} \geqslant \geqslant \overline{c_{12}} - \sqrt{(\overline{c_{11}} - \underline{c_{11}})(\overline{c_{22}} - \underline{c_{22}})} \quad (31)$$

En traitant de la même façon la seconde des inégalités (28) il vient :

$$\underline{c_{12}} + \sqrt{(\overline{c_{11}} - \underline{c_{11}})(\overline{c_{22}} - \underline{c_{22}})} \geqslant c_{12} \geqslant \geqslant \underline{c_{12}} - \sqrt{(\overline{c_{11}} - \underline{c_{11}})(\overline{c_{22}} - \underline{c_{22}})} \quad (32)$$

Suivant que l'on trouve $\overline{c_{12}} > \underline{c_{12}}$ ou $\overline{c_{12}} < \underline{c_{12}}$, la meilleure paire de bornes sera constituée de la seconde de (31) et la première de (32) ou de la première de (31) et la seconde de (32). Ces bornes sont manifestement telles qu'elles peuvent être estimées sans faire appel aux solutions exactes des problèmes S_1 ni S_2. La grandeur estimée est, après évaluation des termes à l'aide de (16) et simplifications, égale à :

$$4\,c_{12} = -\int_{\Sigma_1}(\overline{p_{x_2}}u_1 + \overline{p_{x_1}}u_2 + \ldots)\,d\Sigma - - \int_{\mathrm{Vol}}\rho(\overline{X}_2u_1 + \overline{X}_1u_2 + \ldots)\,d\mathrm{Vol}. + \int_{\Sigma_2}(p_{x_1}\overline{u_2} + p_{x_2}\overline{u_1} + \ldots)\,d\Sigma - - 2\int_{\Sigma_2}(p_{x_1}{}^0\overline{u_2} + p_{x_2}{}^0\overline{u_1} + \ldots)\,d\Sigma$$

Le dernier terme ne dépend d'aucun des éléments inconnus de S_1 ni de S_2 ; c'est de nouveau une constante parasite. Le résultat se simplifie en faisant usage du principe de réciprocité suivant :

$$(S_1, S_2) = \int_{\Sigma_1}(\overline{p_{x_1}}u_2 + \ldots)\,d\Sigma + + \int_{\mathrm{Vol}}\rho(\overline{X}_1u_2 + \ldots)\,d\mathrm{Vol} + \int_{\Sigma_2}(p_{x_1}\overline{u_2} + \ldots)\,d\Sigma = = \int_{\Sigma_1}(\overline{p_{x_2}}u_1 + \ldots)\,d\Sigma + \int_{\mathrm{Vol}}\rho(\overline{X}_2u_1 + \ldots)\,d\mathrm{Vol} + + \int_{\Sigma_2}(p_{x_2}\overline{u_1} + \ldots)\,d\Sigma = (S_2, S_1) \quad (33)$$

Ceci nous donne les deux formes suivantes de la grandeur enfermée entre bornes :

$$2\,c_{12} + \int_{\Sigma_2}(p_{x_1}{}^0\overline{u_2} + p_{x_2}{}^0\overline{u_1} + \ldots)\,d\Sigma =$$

$$= \int_{\Sigma_2}(p_{x_1}\overline{u_2} + \ldots)\,d\Sigma - \int_{\Sigma_1}(\overline{p_{x_2}}u_1 + \ldots)\,d\Sigma - \int_{\mathrm{Vol}}\rho(\overline{X}_2u_1 + \ldots)\,d\mathrm{Vol} \quad (34)$$

$$= \int_{\Sigma_2}(p_{x_2}\overline{u_1} + \ldots)\,d\Sigma - \int_{\Sigma_1}(\overline{p_{x_1}}u_2 + \ldots)\,d\Sigma - \int_{\mathrm{Vol}}\rho(\overline{X}_1u_2 + \ldots)\,d\mathrm{Vol} \quad (35)$$

On observera que la première (34) est une caractéristique de la solution inconnue du problème S_1 estimée uniquement à l'aide des données de S_2. La seconde (35) est la caractéristique formellement analogue de la solution inconnue S_2 estimée uniquement à l'aide des données de S_1.

On peut poser en principe qu'un choix judicieux du problème S_2 permet de mettre n'importe quelle caractéristique de la solution S_1 sous la forme (34). S'il s'agit de trouver des bornes à une tension ou à un déplacement local, le problème S_2 sera celui d'une solution unitaire, ou fonction de Green, comportant une singularité locale correspondante.

Si la solution exacte du problème S_2 était connue il serait possible d'évaluer exactement la grandeur cherchée à l'aide de la formulation équivalente (35) puisque celle-ci ne fait appel qu'aux données connues de S_1. Ce procédé revient évidemment à se servir directement du principe de réciprocité de Betti-Rayleigh. Dans ce cas d'ailleurs notre système d'inégalités se réduit aux identités :

$$c_{12} = \overline{c_{12}} = \underline{c_{12}} = -(E_1^o, S_2)$$

ce qu'on vérifie aisément en posant :

$$E_2^o = C_2' = S_2 \qquad E_2 = 0 \qquad C_2 = 0$$

En général le problème S_2 qui se pose est lui-même d'une difficulté égale à celle du problème S_1. Les inégalités généralisées (31) et (32) jouent alors leur rôle pour encadrer la caractéristique cherchée à l'aide d'approximations simultanées sur les deux problèmes.

10. — La raideur de torsion des barres prismatiques massives

Cet exemple classique est choisi à dessein parce que, avec un article de Trefftz [1], il se trouve à l'origine des recherches sur ces questions. Nous le traiterons comme une application typique des inégalités de base puis nous tenterons de faire ressortir par contraste le point de vue original de Trefftz.

La structure élastique consiste en un prisme de génératrices parallèles à l'axe oz, compris entre les sections $z = 0$ et $z = L$. La section droite massive D est limitée par un contour simple fermé c, le matériau est supposé isotrope. Les spécifications du problème conduisant à une estimation de la raideur de torsion sont les suivantes :

$$\overline{X} = 0 \quad \overline{Y} = 0 \quad \overline{Z} = 0 \tag{36}$$

sur la section $z = 0$ $\quad \overline{\sigma_z} = 0$ (37)

$$\bar{u} = 0 \quad \bar{v} = 0 \tag{38}$$

sur la section $z = L$ $\quad \overline{\sigma_z} = 0$ (39)

$$\bar{u} = -\theta\, Ly \qquad \bar{v} = \theta\, Lx \tag{40}$$

Cette section est donc tournée d'un angle imposé θL par rapport à la section $z = 0$. Enfin le manteau cylindrique est libre de tensions ; comme le cosinus directeur n y est nul on a donc :

$$\text{sur } \Sigma' \quad \left.\begin{array}{l} l\sigma_x + m\tau_{xy} = 0 \\ l\tau_{xy} + m\sigma_y = 0 \end{array}\right\} \tag{41}$$

$$l\tau_{xz} + m\tau_{yz} = 0 \tag{42}$$

Dans la solution exacte qu'il a donnée de ce problème, Barré de Saint Venant adopte les hypothèses semi-inverses :

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

qui satisfont déjà à (37), (39) et (41). Avec Prandtl nous introduisons une fonction de tension $\Theta\,(x, y)$, telle que :

$$\tau_{xz} = G\theta \frac{\partial\Theta}{\partial y} = G\theta\Theta_y \qquad \tau_{yz} = -G\theta\Theta_x \tag{43}$$

Compte tenu de (36) on vérifie alors facilement que les équations d'équilibre en volume sont satisfaites. Les hypothèses précédentes seront retenues aussi bien pour la solution exacte que pour les solutions approchées. La seule équation d'équilibre restant à satisfaire est celle de surface (42) qui devient :

$$l\Theta_y - m\Theta_x = \frac{\partial\Theta}{\partial s} = 0 \qquad \text{sur } c$$

En effet si s désigne l'arc mesuré le long du contour c décrit dans le sens de rotation de ox vers oy on a :

$$l = dy/ds \qquad m = -dx/ds$$

Comme la fonction de tension ne doit être définie qu'à une constante près, il nous est loisible de satisfaire à cette dernière équation d'équilibre en demandant que :

$$\Theta = 0 \text{ sur } c \tag{44}$$

Par conséquent du moment que la fonction de tension vérifie cette condition aux limites nous obtenons un champ d'équilibre. Il résulte des hypothèses semi-inverses que les équations du type (8), exprimant la compatibilité des déformations se réduisent pour un matériau isotrope aux suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{45}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \tau_{xz} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad \tau_{yz} = G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{46}$$

On satisfait au groupe (45) et simultanément aux spécifications (38) et (40) en prenant :

$$u = -\theta zy \qquad v = \theta zx \qquad (47)$$

Posant $w = \theta W(x, y)$ pour satisfaire à la première des relations (46) les deux autres deviennent, compte tenu de (43) et (47) :

$$\Theta_y = W_x - y \qquad -\Theta_x = W_y + x$$

La condition de compatibilité se résume donc ici à la condition d'intégrabilité de W soit, par élimination de W, à :

$$\Theta_{xx} + \Theta_{yy} = \Delta^2\Theta = -2 \qquad (48)$$

Par conséquent nous obtenons un champ compatible du moment que la fonction de tension satisfait à l'équation aux dérivées partielles (48). La solution exacte du problème est obtenue en déterminant la fonction de tension qui satisfait à (48) avec la condition aux limites (44), elle se ramène au problème de Dirichlet.

Déterminons maintenant la caractéristique élastique de la pièce correspondant à ce problème dans les inégalités (4). Il résulte immédiatement des spécifications du problème que :

$$P_e = 0$$

$$Q_e = -\iint_D (-\theta L y \tau_{zx} + \theta L x \tau_{zy})\, dxdy = -\theta LC$$

où C est le couple de torsion. La raideur de torsion J étant définie par $C = GJ\theta$, il en résulte :

$$-\frac{Q_e}{GL\theta^2} = J = -\iint_D (x\Theta_x + y\Theta_y) dxdy \qquad (49)$$

En divisant nos inégalités par le facteur $\frac{1}{2} GL\theta^2$, nous obtiendrons donc des bornes à la raideur de torsion. L'énergie de déformation, divisée par ce facteur vaut :

$$\frac{2}{GL\theta^2}\frac{L}{2G}\iint_D (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)\, dxdy = $$
$$= \iint_D (\Theta_x^2 + \Theta_y^2)\, dxdy$$

Désignant alors par φ une fonction de tension qui ne satisfait éventuellement qu'à (48), par Ψ une qui ne satisfait éventuellement qu'à (44), nous avons les inégalités :

$$\iint_D (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dxdy \geqslant J \geqslant -$$
$$-\iint_D (\Psi_x^2 + \Psi_y^2)\, dxdy -$$
$$-2\iint_D (x\Psi_x + y\Psi_y)\, dxdy \qquad (50)$$

Donnons immédiatement l'application numérique suivante, également empruntée à Trefftz. Il s'agit d'évaluer J pour une section carrée, les équations des côtés étant $x = \pm a$, $y = \pm a$. La fonction de tension à deux paramètres :

$$\Psi = a^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)\left(\frac{y^2}{a^2} - 1\right)\left[\alpha + \beta\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}\right)\right]$$

possède la symétrie requise et satisfait à la condition frontière (44). Tous calculs effectués elle donne au membre de droite de (50) la valeur :

$$\frac{64}{45} a^4 \left[-\frac{4}{105}(105\,\alpha^2 + 72\,\alpha\beta + 44\,\beta^2) + 5\alpha + 2\,\beta\right]$$

Son maximum est atteint pour les valeurs :

$\alpha = 74\,\dfrac{35}{4432}$ $\qquad \beta = 15\,\dfrac{35}{4432}$ des paramètres

et l'on obtient finalement

$$J \geqslant (5600)/(2493)\, a^4 = 2{,}2463\, a^4$$

La fonction de tension à un paramètre :

$$\varphi = -\frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{\alpha}{a^2}(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$$

a la symétrie requise et satisfait à l'équation aux dérivées partielles (48). Tous calculs effectués elle donne au membre de gauche de l'inégalité (50) la valeur :

$$\frac{8}{105}(35 + 112\,\alpha + 576\,\alpha^2)\, a^4$$

dont le minimum est atteint pour $\alpha = -7/72$ et fournit finalement $J \geqslant (2128)/(945)\ a^4 = 2{,}2518\ a^4$. Dans ce cas l'écart entre la borne supérieure et la borne inférieure est inférieur à 2,5 pour mille de la moyenne arithmétique. Cette puissance de la méthode est typique dans l'évaluation de caractéristiques de rigidité globales. Les caractéristiques locales d'une solution, évaluées par les inégalités généralisées, demandent en général pour la même précision un labeur plus considérable.

Trefftz a centré ses considérations sur la dualité entre vérification des conditions aux limites et vérification de l'équation aux dérivées partielles. On est en droit de se demander s'il a réalisé la coïncidence fortuite de cette dualité avec la dualité entre champ d'équilibre et champ compatible, qui justifie de façon profonde ses inégalités en les présentant comme un cas particulier de (4). Il est instructif à cet égard de suivre sa démonstration. Celle que nous présentons ci-dessous suit fidèlement ses idées tout en supprimant la nécessité d'introduire, comme il a dû le faire, un multiplicateur lagrangien. Observons d'abord que l'on peut modifier le membre de droite de (50) par :

$$\iint_D (x\Psi_x + y\Psi_y)\, dxdy = \int_C (lx + my)\, \Psi ds - 2 \iint_D \Psi dxdy = -2 \iint_D \Psi dxdy$$

puisque la fonction Ψ doit être prise nulle sur c.

D'où :

$$\iint_D (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dxdy \geqslant J \geqslant 4 \iint_D \Psi dxdy - \iint_D (\Psi_x^2 + \Psi_y^2)\, dxdy \qquad (51)$$

Pour la même raison on peut écrire

$$J = 2 \iint_D \Theta dxdy \qquad (52)$$

Partons de l'inégalité évidente :

$$\iint_D [(\varphi_x - \Theta_x)^2 + (\varphi_y - \Theta_y)^2]\, dxdy = \iint_D (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dxdy -$$

$$- 2 \iint_D (\varphi_x\Theta_x + \varphi_y\Theta_y)\, dxdy + \iint_D (\Theta_x^2 + \Theta_y^2)\, dxdy \geqslant 0$$

et transformons les deuxième et troisième termes par des intégrations par parties :

$$\iint_D (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dxdy - 2 \int_C \varphi_n\Theta ds + 2 \iint_D \Delta^2\varphi\, \Theta\, dxdy + \int_C \Theta\Theta_n ds - \iint_D \Theta\Delta^2\Theta\, dxdy \geqslant 0$$

Tenant compte du fait que φ vérifie (48) et Θ (44) et (48) :

$$\iint_D (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dxdy - 2 \iint_D \Theta\, dxdy = \iint_D (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dxdy - J \geqslant 0$$

Ceci démontre l'inégalité de gauche dans (51). Partons ensuite de l'autre inégalité évidente :

$$\iint_D [(\Psi_x - \Theta_x)^2 + (\Psi_y - \Theta_y)^2]\, dxdy = \iint_D (\Psi_x^2 + \Psi_y^2)\, dxdy -$$

$$- 2 \iint_D (\Psi_x\Theta_x + \Psi_y\Theta_y)\, dxdy + \iint_D (\Theta_x^2 + \Theta_y^2)\, dxdy \geqslant 0$$

et transformons encore à l'aide d'intégrations par parties :

$$\iint_D (\Psi_x^2 + \Psi_y^2)\, dxdy - 2 \int_C \Psi\Theta_n\, ds + 2 \iint_D \Psi\Delta^2\Theta\, dxdy + \int_C \Theta\Theta_n\, ds - \iint_D \Theta\Delta^2\Theta\, dxdy \geqslant 0$$

Comme Ψ vérifie (44) et Θ (44) et (48) il vient :

$$\iint_D (\Psi_x^2 + \Psi_y^2)\, dxdy - 4 \iint_D \Psi\, dxdy + J \geqslant 0$$

ainsi se trouve démontrée l'inégalité de droite dans (51).

REFERENCES

1. E. Trefftz. — Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. Proceedings of the 2nd International Congress for Applied Mechanics, Zürich (1926), pp. 131-7.
2. I. S. Sokolnikoff. — Mathematical Theory of Elasticity. New-York, MacGraw-Hill, 1946.
3. N. J. Hoff. — The Analysis of Structures. New-York, John Wiley et Sons, 1956.
4. B. Fraeijs de Veubeke. — Diffusion des Inconnues Hyperstatiques dans les Voilures à Longerons Couplés. *Bulletin du Service Technique de l'Aéronautique*, no 24, 1951.
5. W. Prager et J. L. Synge. — Approximations in Elasticity based on the Concept of Function Space. *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 5 (1947), pp. 241-69.
6. H. J. Greenberg. — The Determination of upper and lower Bounds for the Solution of the Dirichlet Problem. *Journal of Mathematics and Physics*, vol. 27 (1949), pp. 161-82.
7. J. B. Diaz et H. J. Greenberg. — Upper and lower bounds for the Solution of the first biharmonic Boundary value Problem. *Journal of Mathematics and Physics*, vol. 27 (1948), pp. 193-201.
8. W. Prager. — The extremum Principles of the mathematical Theory of Elasticity and their Use in Stress Analysis. *Univ. of Washington Eng. Exp. Station, Bulletin* 119 (1951).
9. K. Washizu. — Bounds for Solutions of Boundary Value Problems in Elasticity. *Journal of Mathematics and Physics*, vol. 32 (1953), pp. 117-28.
10. J. L. Synge. — The Hypercircle in Mathematical Physics. Cambridge University Press (1957).
11. A. Genot. — Détermination de bornes supérieures et inférieures aux coefficients d'influence dans une structure hyperstatique en treillis. *R. U. M.*, 1961, no 5, p. 315.