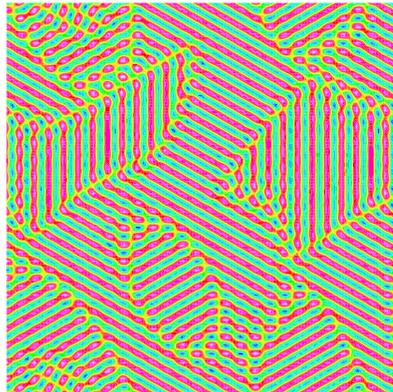




UNIVERSITÉ DE LIÈGE
FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES

Thermoconvection dans les milieux poreux:
stabilité et dynamique non-linéaire



Thomas DESAIVE

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE
DE L'OBTENTION DU GRADE DE
DOCTEUR EN SCIENCES APPLIQUÉES
LIÈGE, DÉCEMBRE 2002

La pensée ne doit jamais se soumettre, ni à un dogme, ni à un parti, ni à une passion, ni à un intérêt, ni à une idée préconçue, ni à quoi que ce soit, si ce n'est aux faits eux-mêmes, parce que, pour elle, se soumettre, se serait cesser d'être.

Henri Poincaré.

Remerciements

Au terme de ce travail, je voudrais adresser mes remerciements les plus chaleureux au Professeur Georgy Lebon. Sa disponibilité, sa gentillesse, sa culture scientifique et sa bonne humeur ont fait de ces cinq années de recherche, même pendant les moments de doute, une expérience extraordinaire. Qu'il trouve en cette thèse, l'expression de ma gratitude et de ma reconnaissance.

Je tiens également à remercier Pierre Dauby pour nos nombreuses discussions stimulantes et enrichissantes, où son esprit critique, sa rigueur et son expertise des instabilités hydrodynamiques ont été d'une aide inestimable.

Tout au long de ce travail, j'ai bénéficié de l'aide amicale et compétente de Marcel Hennenberg. Initiateur de ce projet, lecteur attentif, scientifique passionné, il a su rendre notre coopération ULg-ULB intense et fructueuse...

Merci aussi à Raphaël Selak et à Jean Bragard pour nos fréquents échanges scientifiques et amicaux et à Nathalie, Johnathan, Mireille et Santiago pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour ce travail.

Je voulais aussi remercier mes parents de m'avoir donné le goût de l'effort et du travail soigné ainsi que pour leur relecture aussi attentive qu'inexperte de ce manuscrit...

Enfin et surtout, j'aimerais témoigner à Julie mon infinie reconnaissance pour son soutien quotidien, sa patience angélique, ses encouragements au cours de ces années de doctorat et plus particulièrement de ces quatre derniers mois. Je lui dédie ce travail ainsi qu'à mes enfants Arthur et Emma.

Table des matières

Nomenclature	9
Introduction	13
1 Généralités	21
1.1 Mécanismes d'instabilité	21
1.1.1 Instabilité de Rayleigh dans un fluide	21
1.1.2 Instabilité de Marangoni à la surface libre d'un fluide	23
1.2 Instabilités thermoconvectives dans les milieux poreux	25
1.2.1 Caractérisation d'un milieu poreux	25
1.2.2 Instabilités thermoconvectives	25
1.2.2.1 Instabilité de Rayleigh	25
1.2.2.2 Instabilité de Marangoni	26
1.2.2.3 Influence de la rotation	27
1.3 Ferrohydrodynamique	28
2 Modélisation mathématique de la convection naturelle dans un milieu poreux	33
2.1 Introduction	33
2.2 Équation de continuité	34
2.3 Équation de bilan de la quantité de mouvement	35
2.3.1 Équation de Darcy	35
2.3.2 Modèle de Brinkman	36
2.3.3 Modèle de Darcy <i>vs</i> modèle de Brinkman	37
2.4 Équation de bilan de l'énergie	37
2.5 Approximation de Boussinesq	38
2.6 État conductif de référence, adimensionalisation et équations aux perturbations pour le problème de Horton-Rogers-Lapwood	39
2.6.1 État de référence conductif	40
2.6.2 Équations aux perturbations et adimensionalisation	41
2.7 Analyse en modes normaux du problème de Horton-Rogers-Lapwood	43

2.8	Méthodologie numérique de résolution du problème aux valeurs propres	45
2.9	Comparaison des modèles de Darcy et de Brinkman pour le problème de Horton-Rogers-Lapwood	46
3	Étude d'un système bicouche poreux-liquide	49
3.1	Introduction	49
3.2	Formulation mathématique	50
3.3	Équations de bilan pour les petites perturbations et conditions aux limites	52
3.4	Décomposition en modes normaux	57
3.5	Analyse des résultats linéaires	59
3.5.1	Résultats analytiques pour des frontières isolantes	59
3.5.1.1	Fluide visqueux compris entre une frontière rigide et une libre.	59
3.5.1.2	Milieu poreux avec une surface supérieure libre	60
3.5.2	Validation du code numérique	60
3.5.3	Influence de la viscosité effective	62
3.5.4	Influence du nombre de Darcy	64
3.5.5	Influence des conditions aux limites supérieures sur les valeurs critiques	66
3.5.6	Influence de la condition de Marangoni	67
3.6	Simulations numériques directes du problème non-linéaire	68
3.6.1	Surface supérieure rigide	68
3.7	Résumé	71
4	Étude linéaire d'une couche poreuse en rotation	75
4.1	Équations linéaires pour les perturbations et conditions aux limites	75
4.2	Décomposition en modes normaux	79
4.3	Résultats analytiques pour le modèle de Darcy	80
4.3.1	Cas marginal stationnaire	80
4.3.2	Cas marginal oscillant	81
4.4	Résultats numériques pour le modèle de Brinkman	83
4.4.1	Courbes neutres	83
4.4.2	Influence du nombre de Taylor poreux	83
4.4.3	Influence du nombre de Prandtl de filtration	86
4.4.4	Point de codimension 2	88
4.4.5	Influence du nombre de Darcy	88
4.4.6	Influence du nombre de Biot	90
4.5	Résumé	93

5	Étude linéaire d'une couche poreuse saturée par un ferro-fluide en rotation	97
5.1	Équations de bilan	97
5.1.1	Bilan de quantité de mouvement	97
5.1.2	Bilan d'énergie	101
5.2	Équations du problème de stabilité linéaire	101
5.2.1	État de référence	102
5.2.2	Équations linéarisées pour les perturbations	103
5.3	Courbes neutres pour un chauffage par le bas	109
5.3.1	Frontières horizontales libres	109
5.3.2	Frontières horizontales rigides	111
5.4	Ferroconvection pour un chauffage par le haut	116
5.4.1	Courbes neutres	116
5.4.2	Influence du nombre de Darcy	121
5.5	Résumé	121
6	Analyse non-linéaire d'une couche poreuse en rotation	125
6.1	Introduction	125
6.2	Écriture du problème non-linéaire	126
6.3	Problème linéaire direct aux valeurs propres	128
6.4	Problème linéaire adjoint aux valeurs propres et relations de biorthogonalité	129
6.4.1	Problème adjoint	129
6.4.2	Relations de biorthogonalités	131
6.5	Détermination des équations aux amplitudes	132
6.5.1	Projection de la partie linéaire	132
6.5.1.1	Projection de \mathcal{L}_c	132
6.5.1.2	Projection de \mathcal{L}_{Δ_c}	133
6.5.1.3	Projection du terme temporel	134
6.5.2	Projection de la partie non-linéaire	134
6.5.3	Résumé des équations projetées	135
6.6	Réduction de la dynamique non-linéaire:élimination adiabatique des modes esclaves	136
6.7	Instabilité de Küppers-Lortz	138
6.8	Modèle de Busse-Heikes	144
6.8.1	Analyse théorique	144
6.8.2	Application aux milieux poreux	147
6.9	Résumé	150
	Conclusions et perspectives	153

A Détermination de l'équation de Brinkman à partir de l'EIT	159
A.1 Rappel	159
A.2 Étape n°1:détermination de l'ensemble des variables d'état . .	159
A.3 Étape n°2:détermination des équations d'évolution des variables	160
A.4 Étape n° 3:inégalité d'entropie	161
A.5 Étape n°4:exploitation de l'inégalité d'entropie	162
A.6 Étape n°5:formulation finale de l'équation du flux de matière	163
A.7 Étape n°6:Bilan de quantité de mouvement pour la vitesse du fluide	164
 Bibliographie	 166

Nomenclature

$\mathbf{a} = (a_x, a_y)$	nombre d'onde de la perturbation
A	amplitude
\mathbf{B}	vecteur induction magnétique
Bi	nombre de Biot
Bi_m	nombre de Biot modifié
c	chaleur spécifique du solide
c_P	chaleur spécifique à pression constante du fluide
d	rapport de l'épaisseur du milieu poreux à l'épaisseur du système total
D	coefficient de diffusion
d^*	hauteur de la couche poreuse
Da	nombre de Darcy
\mathbf{e}_z	vecteur unitaire suivant la verticale
$\mathbf{f} = [w, \zeta, T]^T$	vecteur des inconnues dans le problème non-linéaire
\mathbf{F}_m	force de Kelvin
Fr	nombre de Froude
g	accélération de la gravité
g_m	gravité équivalente dans le problème magnétique
h	coefficient d'échange de chaleur
\mathbf{H}	vecteur champ magnétique
\mathbf{H}_e	champ magnétique extérieur
\mathbf{I}	tenseur identité
j	flux conductif de référence
\mathbf{J}	flux de masse
\mathcal{J}^s	flux d'entropie
k	conductivité thermique
K	perméabilité du milieu poreux
K_c	ensemble des modes critiques
k_B	constante de Boltzmann
K_s	ensemble des modes esclaves
\mathcal{L}_c	opérateur linéaire calculé au seuil de convection
\mathcal{L}_Δ	opérateur linéaire représentant l'écart au seuil de convection
\mathcal{L}_t	opérateur linéaire temporel
\mathbf{M}	magnétisation du ferrofluide

m	moment magnétique d'une particule magnétique
\mathcal{M}	taux de magnétisation
Ma	nombre de Marangoni
M_s	magnétisation de saturation
n	nombre de particules magnétiques en suspension dans le ferrofluide
N	nombre de Kelvin poreux
N_{cl}	nombre de Kelvin
\mathcal{NL}	opérateur non-linéaire
p	pression
Pr	nombre de Prandtl
\mathbf{q}	flux de chaleur à la surface
\mathbf{r}	rayon vecteur d'un élément du système en rotation
Ra	nombre de Rayleigh dans le système bicouche poreux-liquide
Ra_l	nombre de Rayleigh liquide
Ra_p	nombre de Rayleigh poreux
S	rapport des capacités calorifiques
t	temps
$s = s_{\Re} + i s_{\Im}$	variation temporelle des perturbations
s_{\Re}	taux de croissance des perturbations
T	température
Ta	nombre de Taylor
\mathbf{T}_m	tenseur des tensions magnétique
$\mathbf{u} = (u, v, w)$	vitesse de filtration ou vitesse de Darcy
\mathbf{U}	vitesse intrinsèque du fluide
U	dépendance en z de la vitesse horizontale selon x
V	dépendance en z de la vitesse horizontale selon y
W	dépendance en z de la vitesse verticale
(x, y, z)	coordonnées cartésiennes
X	rapport des conductivités thermiques
Z	dépendance en z de la composante verticale de la vortacité

Lettres grecques

α	taux de gravité
α_{BJ}	constante de Beavers-Joseph
α_p	coefficient de compressibilité
α_{pm}	coefficient pyromagnétique
α_{sm}	susceptibilité magnétique
α_T	coefficient d'expansion thermique
γ	taux de variation de la tension de surface avec la température
ΔT	différence de température entre les plaques inférieure et supérieure
ϵ	écart au seuil de convection linéaire
ζ	composante verticale de la vortacité

Θ	dépendance en z de la température
κ	diffusivité thermique
λ	taux de chauffage
Λ	rapport des viscosités dynamiques
μ_0	perméabilité magnétique du vide
μ_c	potentiel chimique du fluide
ϕ	porosité
μ_e	viscosité effective
μ	viscosité dynamique
ρ	masse spécifique
σ	tension de surface du liquide
σ^s	production d'entropie
Φ	dépendance en z du potentiel magnétique
φ	potentiel magnétique
χ	nombre de Prandtl de filtration
ω	fréquence d'oscillation des perturbations
Ω	vitesse angulaire autour d'un axe vertical
$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$	opérateur nabla
$\nabla_h = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$	opérateur nabla

Indices

c	valeur critique
l	relatif à la phase liquide
p	relatif au milieu poreux
ref	relatif à l'état conductif de référence
s	relatif à la phase solide
tot	relatif au système total dans le problème bicouche

Exposants

'	relatif aux perturbations
*	relatif au problème adjoint
c	valeur critique
osc	grandeur oscillante
sta	grandeur stationnaire
T	transposé

Introduction

Yet not every solution of the equations of motion, even if it is exact, can actually occur in Nature. The flows that occur in Nature must not only obey the equations of fluid dynamics, but also be stable.

L. D. Landau & E. M. Lifshitz (1959)

Plus d'un siècle après les premières expériences de Bénard [Bénard, 1900], l'étude des instabilités thermoconvectives demeure toujours l'objet de recherches intensives et de nouvelles découvertes. En effet, ces phénomènes convectifs sont importants dans la dynamique des océans, celle de l'atmosphère où encore à l'intérieur des étoiles et des planètes [Busse, 1978, 1989; Getling, 1998]. Outre leurs applications industrielles nombreuses, ils constituent des exemples fondamentaux d'organisation spatio-temporelle loin de l'équilibre.

Lorsqu'une couche de fluide est soumise à un gradient de température parallèle à l'accélération de la pesanteur et suffisamment intense, le liquide se met en mouvement. L'organisation spatiale des structures convectives ainsi observée est appelée *pattern* en référence au terme anglais qui, faute d'équivalent strict, se retrouve souvent tel quel en français. Lorsque le système est soumis à la gravité uniquement (instabilité de Rayleigh), les patterns se pré-

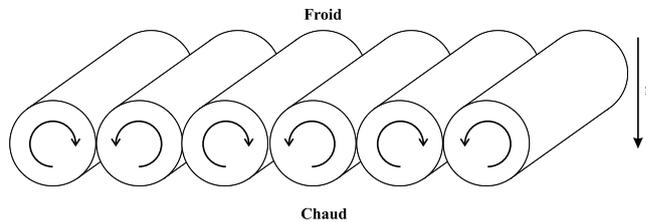


FIG. 1 – Représentation schématique d'une solution convective de type rouleaux.

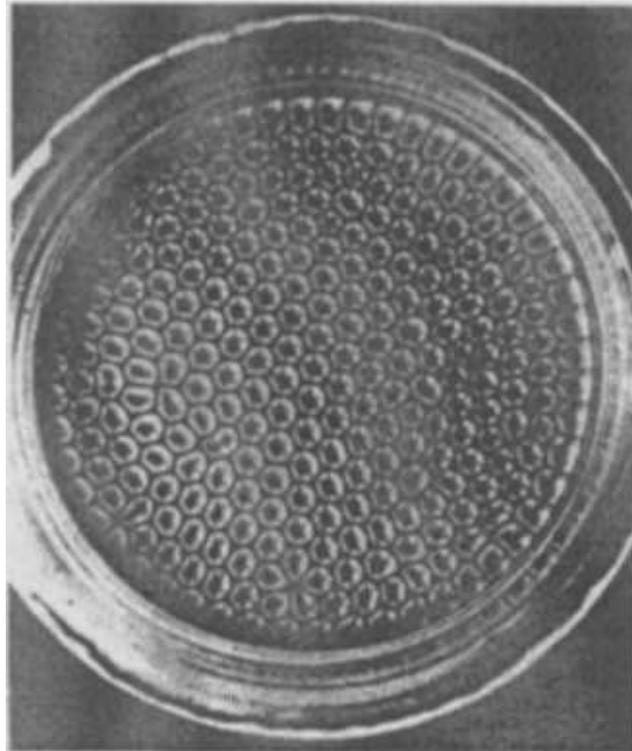


FIG. 2 – Structures convectives hexagonales dans une instabilité de Bénard-Marangoni d'après Koschmieder et Pallas [[Koschmieder and Pallas, 1974](#)].

sentent sous la forme de rouleaux (voir figure 1) caractérisés par une montée de fluide chaud à certains endroits et une descente de fluide froid à d'autres. Si l'on prend aussi en compte les gradients de tension de surface à la frontière supérieure du fluide (instabilité de Bénard-Marangoni), les patterns observés se diversifient et l'on pourra alors trouver des hexagones (figure 2) ou encore des carrés comme le montre la figure 3 qui illustre la transition hexagones-rouleaux obtenue expérimentalement par Eckert *et al.* [[Eckert et al., 1998](#)]. D'autres sortes de patterns comme des spirales par exemple ont été mises en évidence expérimentalement dans des gaz comprimés [[Bodenschatz et al., 2000](#)].

Si les problèmes de convection dans les fluides constituent toujours un sujet d'intense activité scientifique, il en va de même pour la convection naturelle dans les milieux poreux. Les premières contributions sur le sujet remontent au milieu des années 40 avec les travaux de Horton et Rogers [[Horton and Rogers, 1945](#)] et ceux de Lapwood [[Lapwood, 1948](#)]. Ces auteurs ont analysé la stabilité d'un milieu poreux saturé de fluide et chauffé par le bas, ce qui constitue une analogie du problème de Rayleigh. Depuis lors et en raison du nombre croissant d'applications industrielles et géophysiques des

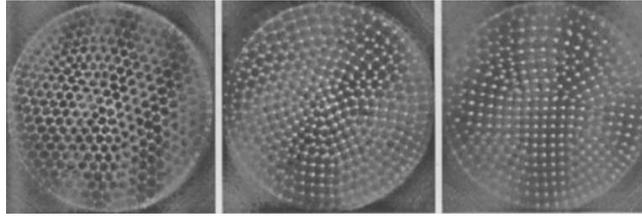


FIG. 3 – *Transition hexagones-carrés dans une instabilité de Bénard-Marangoni d’après les expériences de Eckert et al. [Eckert et al., 1998].*

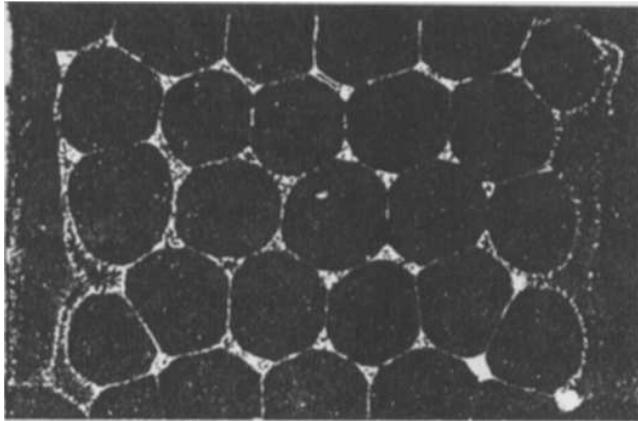


FIG. 4 – *Structures convectives hexagonales dans une instabilité de Rayleigh au sein d’un milieu poreux d’après les expériences de Borjes et Combarrous [Borjes and Combarrous, 1973].*

milieux poreux, les études théoriques, numériques et expérimentales continuent à être publiées au rythme de plus de 100 articles par an [Nield, 1999]. En effet, la volonté d’accroître davantage le rendement des techniques d’extraction pétrolière [Morrow, 1991] notamment motive encore aujourd’hui de nombreuses recherches sur la convection dans les milieux poreux. Borjes et Combarrous [Borjes and Combarrous, 1973] ont étudié expérimentalement le problème de Horton-Rogers-Lapwood et mis en évidence des structures du même type que dans une couche de fluide (figure 4).

L’objet de ce travail est d’étudier les instabilités thermoconvectives dans les milieux poreux dans plusieurs configurations intéressantes tant du point de vue théorique que du point de vue de leurs applications. De plus, nous examinerons certains aspects de dynamique non-linéaire dans les milieux poreux en rotation.

Le chapitre 1 est consacré à un rappel des généralités sur les instabilités thermoconvectives. Nous y décrivons les deux mécanismes (effet Rayleigh et effet Marangoni) responsables de la convection naturelle au sein d’une

couche de fluide soumise à un gradient de température et nous définissons les nombres sans dimension propres à ces types d'instabilités. Après avoir caractérisé un milieu poreux, nous passons en revue (de manière non exhaustive) les travaux antérieurs sur les instabilités thermoconvectives dans les milieux poreux. En particulier, nous concentrons notre attention sur l'instabilité de Rayleigh, celle de Marangoni et l'influence de la rotation. Enfin, nous terminons ce chapitre par une introduction à la ferrohydrodynamique, discipline récente due à l'émergence de fluides magnétiques ou ferrofluides. Il s'agit de suspensions colloïdales synthétisées présentant certaines propriétés remarquables dont la plus importante est de présenter une magnétisation macroscopique lorsqu'elles sont placées dans un champ magnétique.

Le chapitre 2 constitue le prolongement mathématique du chapitre 1. Nous y établissons les équations de bilan régissant la convection dans un milieu poreux. Nous insistons sur les différents modèles possibles et en particulier ceux de Darcy et de Brinkman et nous motivons notre choix du modèle de Brinkman dans les applications des chapitres suivants. Après avoir détaillé l'approximation de Boussinesq, nous réalisons l'étude linéaire de la stabilité du modèle de Horton-Rogers-Lapwood avec une loi de Brinkman; l'objectif essentiel étant de déterminer le gradient de température critique au-delà duquel apparaît la convection. Nous définissons l'état conductif de référence ainsi que les équations adimensionnelles régissant les perturbations. Le problème aux valeurs propres ainsi obtenu est résolu au moyen d'une méthode spectrale qui consiste à décomposer les champs inconnus en séries de polynômes de Chebyshev puis à projeter les équations sur ces mêmes polynômes pondérés de manière adéquate. Enfin, nous comparons les valeurs critiques obtenues avec celle du problème classique de Horton-Rogers-Lapwood avec une loi de Darcy.

Dans le chapitre 3, nous examinons la stabilité d'un système composite constitué d'une couche de liquide surmontant une couche poreuse. Ce système est supposé d'extension infinie et plongé dans le champ de la pesanteur. La surface supérieure du fluide peut être rigide ou libre avec un effet Marangoni alors que le transfert de chaleur y est régi par la loi de refroidissement de Newton. Ces conditions aux limites constituent une généralisation des conditions généralement admises dans la littérature pour ce genre de problème. Avant d'étudier numériquement cette configuration, nous déduisons certains résultats analytiques de ce même système mais délimité par deux parois isolantes. Lorsque le système est délimité par deux parois rigides, nous validons numériquement notre modèle avec les études antérieures et examinons l'influence des différents nombres sans dimension sur les valeurs critiques et la structure de l'écoulement. Nous étudions ensuite l'effet du remplacement de la paroi supérieure rigide par une paroi libre avec effet Marangoni. Ce chapitre se termine par quelques simulations numériques directes du système bicouche à l'aide du code numérique AQUILON.

Nous avons déjà souligné l'importance des phénomènes convectifs dans

de nombreuses applications géophysiques. Il semble donc inévitable d'examiner l'influence de la rotation sur la convection au sein d'un milieu poreux. Ce sujet est abordé au moyen d'une étude linéaire de stabilité dans le chapitre 4. Une couche horizontale de milieu poreux, d'extension infinie est en rotation uniforme autour d'un axe vertical. L'influence de la rotation est limitée à l'accélération de Coriolis et nous en dérivons la forme correspondante des équations de bilan dans un système d'axes en rotation avec le système. Dans ce cas, le principe d'échange de stabilité qui stipule que l'instabilité au seuil de convection est stationnaire n'est plus valide; il devient possible d'observer des instabilités oscillantes. Dans un premier temps, nous utilisons le modèle de Darcy pour calculer analytiquement le gradient de température critique en fonction des paramètres sans dimension du système. Par après, nous analysons en détail le modèle de Brinkman en étudiant l'influence des nombres de Taylor (représentatif de la vitesse de rotation), de Prandtl (représentatif du rapport entre les dissipations thermique et visqueuse), de Darcy (représentatif de la perméabilité du milieu poreux) et de Biot (représentatif du caractère plus ou moins isolant de la frontière supérieure) sur la forme des courbes neutres (c'est-à-dire les courbes du nombre de Rayleigh en fonction du nombre d'onde) et sur la nature du point critique. Nous examinons aussi la situation particulière où les nombres de Rayleigh caractéristiques des convections stationnaire et oscillante sont égaux, on parle alors de point de codimension 2.

Le chapitre 5 constitue le prolongement du chapitre 4 dans le cas où le milieu poreux est maintenant saturé par un ferrofluide, en nous basant sur la similitude entre les mécanismes de convection gravifique et magnétique. Cependant alors que de manière générale la convection gravifique ne se déclenche que pour un chauffage par le bas, la convection magnétique peut survenir indépendamment du sens du gradient de température appliqué. Nous établissons dans un premier temps les équations de bilan en tenant compte de la nature magnétique du fluide saturant la matrice poreuse pour étudier ensuite le problème de stabilité linéaire lorsque le système est chauffé aussi bien par le bas que par le haut.

Les chapitres 3 à 5 sont consacrés à l'analyse de stabilité linéaire de trois configurations différentes. Ces études linéaires permettent de déterminer le seuil de convection mais sont incapables de prédire le type de structure géométrique observée au-delà du seuil. Pour répondre à cette question, il convient de mener une analyse de stabilité non-linéaire. Le chapitre 6 est consacré à cette étude pour le problème traité au chapitre 4, à savoir une couche poreuse horizontale saturée par un fluide et en rotation uniforme autour d'un axe vertical. Nous utilisons une méthode projective qui consiste à exprimer la solution non-linéaire sous forme d'une série infinie des fonctions propres du système linéaire correspondant. En régime faiblement non-linéaire, il est prévisible que seules les fonctions les plus instables linéairement seront nécessaires à la description de l'instabilité. Cette série est alors



FIG. 5 – Exemple de l'instabilité de Küppers-Lortz. Pattern obtenu dans du CO_2 à la pression de 32 bars d'après Hu et al. [Hu et al., 1998].

projetée sur les fonctions propres du problème linéaire adjoint pour être ensuite réduite à un ensemble fini d'équations différentielles ordinaires appelées *équations aux amplitudes*. Nous appliquons ces développements théoriques à la description de l'instabilité dite de *Küppers-Lortz*, celle-ci décrit l'instabilité d'un rouleau vis-à-vis d'une perturbation prenant la forme d'un autre rouleau dévié d'un certain angle α_c par rapport au premier. Cette instabilité a fait l'objet de nombreux travaux dans les fluides purs mais n'avait jamais été étudiée dans les milieux poreux. La nouvelle structure étant déstabilisée elle aussi par une perturbation de type rouleau déviée d'un angle α , l'instabilité de Küppers-Lortz donne inévitablement lieu à un comportement variable dans le temps et constitue un exemple de *chaos spatio-temporel*. La figure 5 montre un exemple de pattern observé expérimentalement au-delà du seuil de l'instabilité de Küppers-Lortz dans un gaz comprimé [Hu et al., 1998]. Dans ce travail nous avons tout d'abord calculé, pour un nombre de Prandtl infini et en fonction du nombre de Darcy, les valeurs minima du nombre de Taylor au delà desquelles apparaît l'instabilité de Küppers-Lortz ainsi que les valeurs correspondantes de l'angle entre les rouleaux. Pour terminer, nous examinons l'évolution spatio-temporelle de l'instabilité de Küppers-Lortz à l'aide du modèle de *Busse-Heikes*, lequel est un modèle simple qui permet de capturer la dynamique non-linéaire complexe de l'instabilité de Küppers-Lortz. Nous calculons les coefficients des différents termes

du modèle de Busse-Heikes pour une valeur du nombre de Taylor inférieure et une autre supérieure à la valeur critique caractéristique de l'apparition de l'instabilité de Küppers-Lortz. Les équations ainsi obtenues sont alors intégrées à l'aide d'une méthode pseudo-spectrale et leur solution représentée pour plusieurs valeurs du temps. Nous pouvons alors observer l'organisation spatio-temporelle de l'instabilité de Küppers-Lortz.

Chapitre 1

Généralités

In five minutes you will say that it is all so absurdly simple.

Sherlock Holmes,
The Adventure of the Dancing Men
Sir Arthur Conan Doyle

1.1 Mécanismes d'instabilité

1.1.1 Instabilité de Rayleigh dans un fluide

Considérons une couche de fluide Newtonien et isotrope, délimitée par deux plaques rigides horizontales. Cette couche de fluide est placée dans le champ de la gravité et chauffée par le bas. Si le gradient de température reste suffisamment faible, le fluide demeure au repos et le profil de température est purement conductif et donc linéaire¹. Examinons de manière générale la stabilité de cet état conductif. Pour cela, nous allons considérer une perturbation infinitésimale telle qu'une particule soit déplacée vers une zone supérieure du fluide où la température est légèrement inférieure (figure 1.1). Cette particule subit alors une poussée verticale due au fait que sa densité est maintenant plus faible que celle de son environnement. En supposant la diffusion moléculaire négligeable, la particule continue son mouvement ascensionnel et la poussée d'Archimède s'amplifie, donnant naissance à un mouvement de convection lorsque l'écart de température dépasse une valeur critique.

A ce phénomène, nous pouvons associer une échelle de temps caractéristique. En effet, une particule située à une hauteur z dans le fluide subit

1. Nous supposons ici que la température obéit à la loi de Fourier.

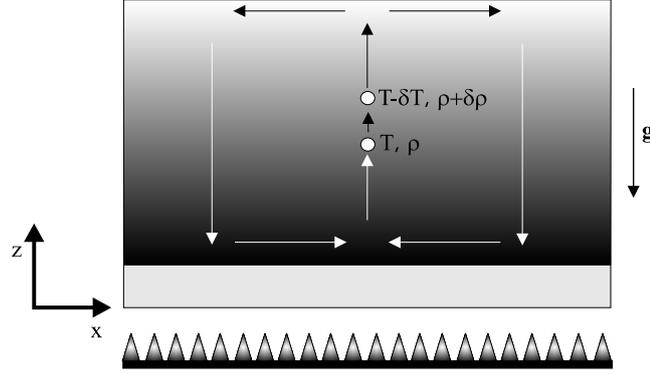


FIG. 1.1 – Mécanisme de l'instabilité de Rayleigh.

une force de poussée² par unité de volume $g\delta\rho = g\alpha_T\rho_0\delta T$, où g est la gravité et δT la différence de température entre la particule et son environnement. Comme le profil de température de l'état de repos est linéaire selon la verticale, la particule est finalement soumise à la force $\alpha_T\rho_0g\Delta Tz/d$, où d est l'épaisseur de la couche et ΔT la différence de température entre les deux plaques horizontales. L'équation du mouvement de la particule admet une solution exponentielle du type $z \sim e^{t/\tau_{grav}}$ avec τ_{grav} l'échelle de temps gravifique [Chandrasekhar, 1961; Colinet et al., 2001]

$$\tau_{grav} = \sqrt{\frac{d}{\alpha_T g \Delta T}}. \quad (1.1)$$

Cependant, le mécanisme d'instabilité ne se déclenche pas instantanément. Il existe en effet deux effets inhibiteurs qui s'opposent à l'apparition de l'instabilité:

- La viscosité dynamique du fluide μ_l freine à la fois l'ascension des particules chaudes et la descente des particules froides. On peut lui associer l'échelle de temps caractéristique

$$\tau_{visc} = \frac{\rho_0 d^2}{\mu_l}. \quad (1.2)$$

- L'échange de chaleur entre particules qui tend à uniformiser la température de la particule avec celle de ses voisines et qui sera d'autant plus rapide que la diffusivité thermique κ_l du fluide sera grande. On peut lui associer l'échelle de temps caractéristique

$$\tau_{therm} = \frac{d^2}{\kappa_l}. \quad (1.3)$$

2. On suppose une variation linéaire de la densité avec la température $\rho_l = \rho_0(1 - \alpha_T(T - T_0))$, où T est la température de la particule, α_T est le coefficient d'expansion volumique, ρ_0 la densité du fluide à la température T_0 .

En comparant les trois échelles de temps caractéristiques (1.1)-(1.3), on peut donc s'attendre à ce que l'instabilité se développe lorsque les effets déstabilisants sont beaucoup plus rapides que les effets stabilisants, donc lorsque $\tau_{grav}^2 \ll \tau_{visc}\tau_{therm}$ ou sous une autre forme

$$Ra = \frac{\rho_0 g \alpha_T \Delta T d^3}{\mu_l \kappa_l} \gg 1. \quad (1.4)$$

Cette relation définit une grandeur sans dimension appelée le *nombre de Rayleigh* qui est une mesure de l'importance relative des effets stabilisants par rapport aux effets déstabilisants. Autrement dit, comme le paramètre que l'expérimentateur contrôle le plus facilement est le gradient de température, l'on va rechercher la valeur critique de ΔT . Pour un ΔT inférieur à cette valeur, les effets inhibiteurs suffiront pour maintenir un état conductif. Au-delà de cette valeur, la poussée d'Archimède dominera les effets stabilisants et un mouvement du liquide pourra être observé. A cette valeur critique du gradient de température, correspondra donc en vertu de (1.4) une valeur critique du nombre de Rayleigh.

Le *nombre de Rayleigh critique* Ra_c est défini comme le nombre de Rayleigh à partir duquel il y a apparition de l'instabilité:

$$Ra < Ra_c \quad \text{Système stable (conduction),} \quad (1.5)$$

$$Ra > Ra_c \quad \text{Système instable (convection).} \quad (1.6)$$

1.1.2 Instabilité de Marangoni à la surface libre d'un fluide

Considérons maintenant une couche de fluide Newtonien et isotrope dont la surface supérieure est libre et dont la tension de surface dépend de la température. Imaginons à nouveau une perturbation telle qu'une particule chaude se retrouve à la surface entourée de particules plus froides (figure 1.2). Cette particule chaude à la surface sera entraînée vers les régions de la surface plus froides caractérisées par une plus grande tension de surface³. La particule chaude subit donc une force le long de la surface qui tend à l'éloigner de sa position de départ. La conservation de la masse impliquera alors un flot en provenance du fluide adjacent vers la surface. Si cet apport de liquide est chaud lui aussi, l'instabilité se renforce. Si, au contraire, du liquide plus froid est amené en surface, l'instabilité s'affaiblit.

Cette instabilité, à laquelle on associe le nom du physico-chimiste italien Marangoni sera donc favorisée par le gradient de température dans la couche et par la variation de la tension de surface avec la température. Dans ce travail, nous supposons que la tension de surface présente une dépendance linéaire avec la température

3. Dans le cas le plus fréquent où la tension superficielle est une fonction décroissante de la température.

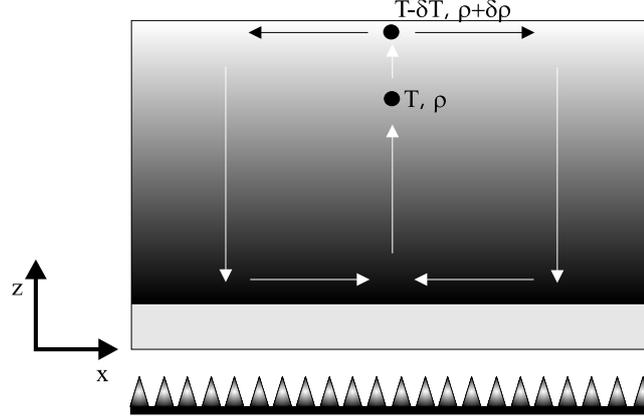


FIG. 1.2 – Mécanisme de l'instabilité de Marangoni.

$$\sigma(T) = \sigma_0 - \gamma(T - T_0), \quad \gamma = \frac{\partial \sigma}{\partial T}. \quad (1.7)$$

σ_0 est la tension de surface à la température T_0 et γ est une quantité positive qui caractérise la chute de tension superficielle avec l'élévation de la température. La restriction à une loi linéaire reliant la température à la tension superficielle résulte des faibles écarts de température mis en jeu ($\approx 10^\circ C$).

Dans ce cas comme pour l'effet Rayleigh, les effets stabilisants sont dus à la viscosité (τ_{visc}) et à la diffusion de chaleur (τ_{therm}). Les effets déstabilisants sont liés à la variation avec la température de la tension superficielle car si un gradient de température $\Delta T/d$ existe, il induira une accélération du fluide $\gamma \Delta T / \rho_l d^2$ le long de la surface libre. Il est donc possible d'en déduire un temps caractéristique des phénomènes capillaires, τ_{cap} défini par

$$\tau_{cap} = \sqrt{\frac{\rho_l d^3}{\gamma \Delta T}}. \quad (1.8)$$

L'instabilité de Marangoni se développera lorsque $\tau_{cap}^2 \ll \tau_{visc} \tau_{therm}$ ou de manière équivalente

$$Ma = \frac{\gamma \Delta T d}{\mu_l \kappa_l} \gg 1. \quad (1.9)$$

ce qui conduit à la définition d'un nombre sans dimension Ma , appelé nombre de Marangoni. On définit le *nombre de Marangoni critique* Ma_c comme le nombre de Marangoni au delà duquel il y a apparition de l'instabilité:

$$Ma < Ma_c \quad \text{Système stable (conduction),} \quad (1.10)$$

$$Ma > Ma_c \quad \text{Système instable (convection).} \quad (1.11)$$

1.2 Instabilités thermoconvectives dans les milieux poreux

1.2.1 Caractérisation d'un milieu poreux

Un milieu poreux est un milieu matériel constitué de composants hétérogènes et dont une des phases au moins n'est pas à l'état solide. Les phases solides forment un réseau interconnecté complexe que l'on appelle la *matrice poreuse*, séparant des cavités appelées *pores* contenant des phases fluides (liquide ou (et) gaz) [Bear, 1988].

L'existence de pores, c'est-à-dire d'espaces vides conduit à définir une grandeur caractéristique essentielle du milieu poreux, la *porosité*

$$\phi = \frac{\text{Volume des pores}}{\text{Volume total}}. \quad (1.12)$$

Il s'agit d'une grandeur macroscopique adimensionnelle que l'on exprime généralement en pourcentage.

Un autre concept important apparaît lors de la description phénoménologique d'un milieu poreux: sa *perméabilité* K . Elle traduit l'influence macroscopique de la matrice poreuse au niveau des pertes de charges. Plus le milieu est perméable, moins il oppose une résistance au passage du fluide. La perméabilité ne dépend que des caractéristiques géométriques du milieu poreux et s'exprime en m^2 . Cette notion sera développée plus longuement lors de l'introduction de la loi de Darcy dans le chapitre suivant (voir paragraphe 2.3.1). Sans entrer dans les détails, cette relation phénoménologique stipule une proportionnalité entre le gradient de pression appliqué et la vitesse du fluide dans le milieu poreux.

1.2.2 Instabilités thermoconvectives

L'étude de la convection dans les milieux poreux est un domaine de recherche très fertile [Nield, 1999]. Le nombre de publications sur le sujet à littéralement explosé suite à l'exploitation massive des nappes de pétrole et aux préoccupations internationales de protection de l'environnement et d'autonomie énergétique. Les problèmes de convection dans les milieux poreux surviennent dans une gamme d'applications très large comme l'isolation des bâtiments, les réservoirs géothermiques ou encore le stockage des déchets nucléaires. De même les applications géophysiques sont très nombreuses et couvrent un large domaine depuis les écoulements souterrains jusqu'aux courants océaniques en passant par la convection au sein du magma terrestre.

1.2.2.1 Instabilité de Rayleigh

Les premiers travaux sur les instabilités thermoconvectives en milieu poreux remontent à Horton et Rogers [Horton and Rogers, 1945] ainsi qu'à

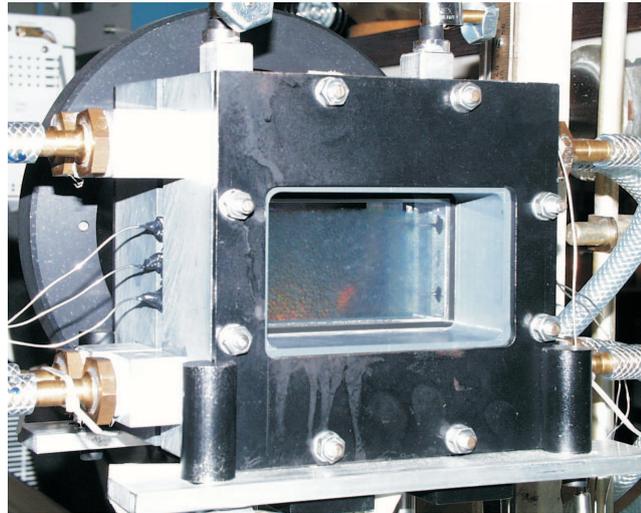


FIG. 1.3 – Cellule expérimentale du MRC [Istasse, 1997].

Lapwood [Lapwood, 1948]. Leur modèle constitue une analogie dans les milieux poreux du problème de Rayleigh. Il sera détaillé dans le chapitre suivant (voir paragraphe 2.6).

A côté des nombreuses études théoriques sur ce problème de Rayleigh dans les milieux poreux, on dénombre aussi des études expérimentales. Au Microgravity Research Centre (MRC) de l'Université Libre de Bruxelles, on a mis au point une cellule de convection (figure 1.3) pour étudier notamment l'influence sur la convection de la présence de fractures dans un milieu poreux [Istasse, 1997]. Nous avons repris sur la figure 1.4 une série de photos réalisées au MRC. Ces images représentent le champ de température dans le milieu poreux pour différentes valeurs de l'écart de température entre les bases inférieure et supérieure. Ce dernier est augmenté progressivement depuis des valeurs inférieures à la différence critique (à gauche) jusqu'à des valeurs supérieures (à droite). On observe ainsi l'apparition progressive des cellules de convection (sous forme de rouleaux) se traduisant par une déformation de plus en plus nette du profil de température.

1.2.2.2 Instabilité de Marangoni

Dans les systèmes fluides, il est bien établi depuis les travaux de Pearson [Pearson, 1958] et de Nield [Nield, 1964] que les gradients de tension de surface jouent un rôle décisif sur l'apparition de la convection. Dans les milieux poreux, cet effet Marangoni a reçu nettement moins d'attention.

Hennenberg *et al.* [Hennenberg *et al.*, 1997] ont examiné en détail l'instabilité de Marangoni dans un milieu poreux. Conscients des hypothèses controversées sur lesquelles reposent leur modèle et de la définition simpli-

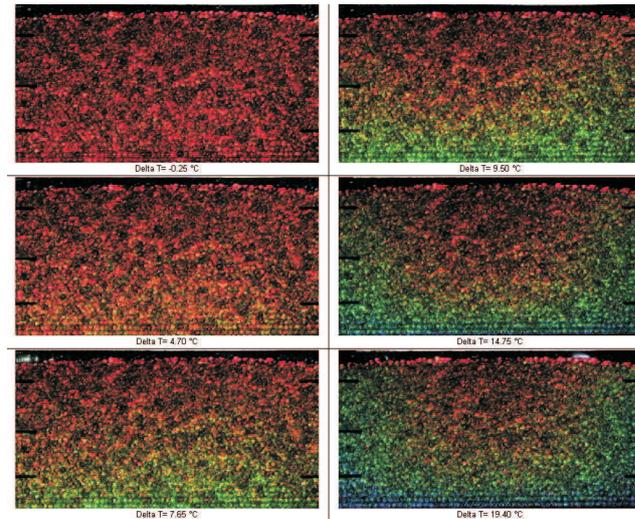


FIG. 1.4 – Résultats expérimentaux pour plusieurs valeurs de la différence de température entre les bases inférieure et supérieure [Istasse, 1997].

fiée qu'ils donnent de la tension de surface, ils ont tout d'abord montré que la loi de Darcy était insuffisante pour décrire un tel phénomène. La raison fondamentale est que cette loi donne un modèle analogue à celui d'un fluide non visqueux d'Euler et qu'il est donc impossible de définir des contraintes de cisaillement au sein du milieu poreux saturé. Le modèle de Brinkman qui comporte un terme visqueux (voir §2.3.2) est plus adapté et donne lieu à une instabilité semblable à celle de Marangoni. Cependant, la valeur du nombre de Marangoni critique est très élevée et ne paraît pas très réaliste pour la plupart des milieux poreux.

Vasseur *et al.* [Vasseur *et al.*, 1989] et Rudraiah *et al.* [Rudraiah and Prasad, 1998] ont étudié l'instabilité de Marangoni dans un système bicouche poreux-liquide dont on trouvera une analyse plus générale [Desaive *et al.*, 2001] dans le chapitre 3. Chen et Chen [Chen and Chen, 1989] ont examiné expérimentalement la stabilité de ce système bicouche sans toutefois prendre en compte un effet Marangoni en surface.

1.2.2.3 Influence de la rotation

Dans le cas d'un fluide ordinaire, l'influence de la rotation sur la convection de Rayleigh a été examinée en détail par Chandrasekhar [Chandrasekhar, 1961]. Ce dernier a notamment montré l'existence de solutions oscillantes à côté des solutions stationnaires classiques du problème de Rayleigh. En l'absence de rotation, l'instabilité de Rayleigh (chauffage par le bas) apparaît en respectant le principe d'échange de stabilité: l'instabilité convective se présente sans oscillation. La rotation, en compliquant le processus de l'insta-

bilité de Rayleigh permet de déclencher l'instabilité sous forme d'ondes. Cependant ces solutions oscillantes apparaissent seulement pour de très faibles valeurs du rapport diffusivité *vs* viscosité (nombre de Prandtl) et sont difficiles à mettre en évidence expérimentalement.

Dans les milieux poreux, l'influence de la rotation sur la convection est importante et a conduit à de nombreuses applications industrielles. En effet, elle est essentielle dans l'industrie alimentaire et dans certains procédés de filtration ainsi qu'en géophysique [Vadasz, 1998b]. Son influence sur la stabilité linéaire de la convection naturelle dans un milieu poreux a été étudiée partiellement par Friedrich [Friedrich, 1983] à l'aide d'un modèle de Brinkman alors que Palm *et al.* [Palm and Tyvand, 1984] ont choisi le modèle de Darcy. Nous reviendrons plus en détail sur ces différents modèles dans le chapitre 2. Vadasz [Vadasz, 1998a] a utilisé un modèle de Darcy contenant un terme temporel afin d'étudier d'éventuelles solutions oscillantes. Il a montré que ces solutions oscillantes n'étaient plus confinées à un intervalle restreint de nombre de Prandtl comme c'est le cas dans un fluide ordinaire. Il a poursuivi son étude par une analyse faiblement non-linéaire et a montré que la rotation pouvait avoir un effet retardateur sur le transfert de chaleur convectif.

1.3 Ferrohydrodynamique

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des liquides Newtoniens classiques, sans rhéologie particulière. Cependant, de plus en plus nombreuses sont les applications industrielles actuelles de mécanique des fluides où les champs électrique et magnétique jouent un rôle déterminant. En effet, dans des domaines aussi variés que la médecine et la fusion nucléaire contrôlée, par exemple, l'étude des interactions entre les fluides porteurs de charges électriques et les champs électromagnétiques s'est révélée très intéressante, tant du point de vue théorique que pratique.

En magnétohydrodynamique (MHD), la principale force agissant sur le fluide est la force de Lorentz. Cette force est présente lorsque des courants électriques circulent dans le fluide et sont soumis à un champ magnétique extérieur. En électrohydrodynamique (EHD), la principale force est la force de Coulomb due à l'effet d'un champ électrique sur des charges libres.

La ferrohydrodynamique (FHD) se distingue de la MHD et de la EHD par le fait qu'il n'y a pas, en général, de courant électrique dans le fluide ni de charge électrique libre. Il s'agit d'une discipline récente due à l'émergence de fluides magnétiques ou *ferrofluides*. Les ferrofluides sont des suspensions colloïdales de fines (3 – 15nm) particules solides magnétiques dans un liquide porteur (souvent du kérosène) (figure 1.5). Ces particules contiennent un seul domaine magnétique (nanoaimants) et sont recouvertes d'une couche moléculaire de surfactant. L'agitation thermique maintient les particules en

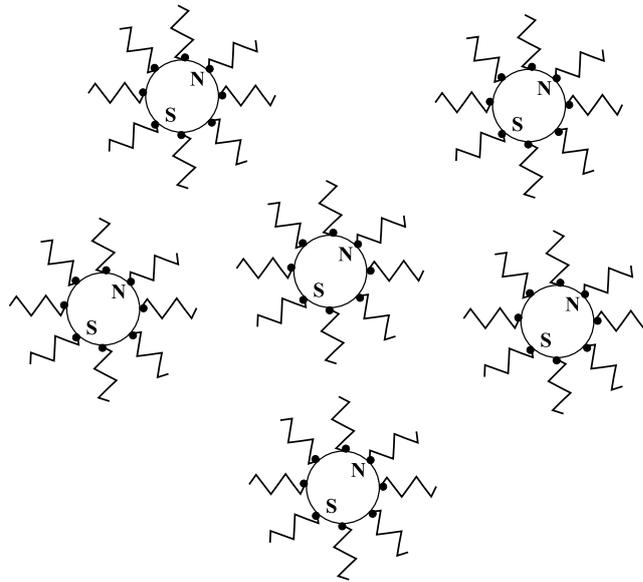


FIG. 1.5 – Représentation schématique d'un ferrofluide.

suspension grâce au mouvement brownien et la couche de surfactant les empêche de s'agglomérer. Ainsi, la nature du surfactant doit être en adéquation avec le fluide conducteur et supplanter les forces de van der Waals ainsi que les forces magnétiques entre les particules. Il est intéressant de noter que ces ferrofluides n'existent pas comme tels dans la nature mais doivent être synthétisés. Typiquement, les ferrofluides contiennent de l'ordre de 10^{23} particules par mètre cube et leurs applications actuelles sont nombreuses. Ainsi, leur utilisation comme lubrifiant les rend beaucoup plus efficaces que les lubrifiants classiques. En effet, les particules magnétiques étant attirées par les surfaces métalliques, on observe une augmentation de la viscosité de la couche limite. On les retrouve aussi dans des imprimantes, des haut-parleurs ou encore en médecine. A l'aide d'un champ magnétique, on peut transporter un médicament vers une région bien précise comme une tumeur par exemple et l'y maintenir aussi longtemps que nécessaire [Alexion et al., 2002]. On augmente par conséquent l'efficacité du médicament et limite son action à la seule zone à traiter. Des informations supplémentaires sur les ferrofluides peuvent être trouvées dans plusieurs ouvrages de référence [Rosenweig, 1985; Berkovski and Bashtovoy, 1998].

Les ferrofluides jouissent d'une propriété fondamentale extrêmement importante. En effet, en l'absence de champ magnétique, les dipôles magnétiques des particules dans le fluide sont orientés de manière aléatoire en raison de l'agitation thermique et le fluide ne présente donc pas de magnétisation macroscopique. En présence d'un champ magnétique extérieur, les dipôles magnétiques s'alignent et une magnétisation du fluide est mainte-

nant observable. Si le champ magnétique ainsi créé présente une variabilité spatiale, la fluide est alors soumis à une densité de force dite force de Kelvin

$$\frac{\mu_0}{\rho_l} M |\nabla H| \quad (1.13)$$

où M et H sont respectivement les normes de la magnétisation et du champ magnétique alors que μ_0 est la perméabilité magnétique du vide et ρ_l la masse spécifique du ferrofluide. Cette force agit dans la direction du champ magnétique croissant. Comme la magnétisation est une fonction décroissante de la température, la présence d'un gradient de température induira une variation de magnétisation. Les fluctuations de température entraîneront le fluide froid vers les régions de champ magnétique plus élevé (ou de magnétisation plus faible) et le fluide chaud vers les régions de champ magnétique faible (ou de magnétisation plus élevée). La force de Kelvin est donc déstabilisante. Cependant les dissipations visqueuse et de chaleur s'opposent à l'apparition de l'instabilité. Cette interprétation nous conduit directement à introduire un nombre de Rayleigh magnétique par analogie avec la poussée d'Archimède responsable de l'effet Rayleigh classique. Cependant la force de Kelvin (1.13) génère une dépendance quadratique en le gradient de température. Sans entrer dans le détail, il suffit de rappeler que les lois de Maxwell relient la magnétisation et le champ magnétique. En prenant une magnétisation proportionnelle au gradient de température, on en déduit alors que la force de Kelvin fait apparaître le carré du gradient de température entre les deux parois. Des différences notables existent cependant avec l'instabilité de Rayleigh puisque c'est le carré du gradient de température qui détermine la stabilité. Il est par conséquent possible d'obtenir des instabilités thermoconvectives quelle que soit le sens du chauffage par rapport à celui de la gravité [Blums et al., 1997].

Dans ce travail, nous nous intéresserons aux instabilités thermoconvectives en milieu poreux saturé par un ferrofluide en présence de la rotation. Le cas d'une couche liquide de ferrofluide en rotation a déjà été étudié par Auernhammer et Brand [Auernhammer and Brand, 2000]. Il nous a semblé intéressant, pour deux raisons, de reprendre leur modèle dans le cas d'un milieu poreux non magnétisable. D'une part, pour étudier les nouvelles possibilités que pourrait introduire le ferrofluide dans la matrice poreuse comme la présence d'instabilités lors d'un chauffage par le haut. D'autre part, nous pensons à des modèles géophysiques où le manteau terrestre serait assimilé à une matrice poreuse saturée par un fluide quelconque (de nombreux ferrofluides utilisent le kérozène, un dérivé du pétrole, comme fluide porteur...). Cette dernière observation nous a mené à étudier d'abord le couplage avec la rotation. Ce n'est que par la suite que nous avons remarqué l'absence dans la littérature d'une étude complète du système sans rotation qui fait l'objet d'une analyse en cours de notre part. Le problème avec rotation a été étudié pour la première fois par Sekar *et al.* [Sekar et al., 1993, 2000] avec un modèle

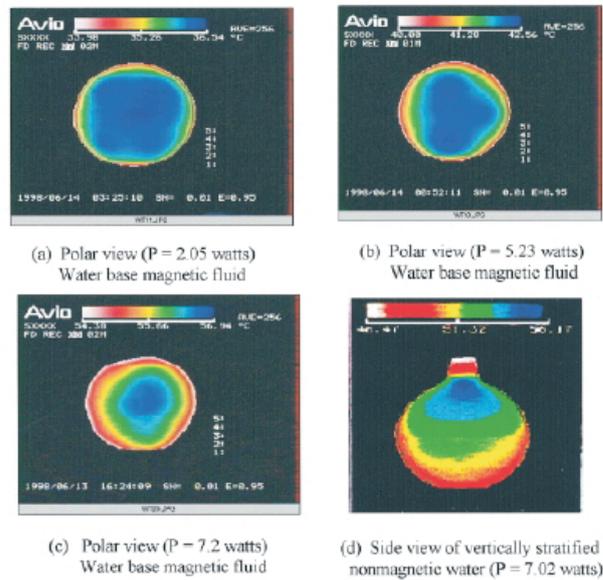


FIG. 1.6 – Résultats expérimentaux obtenus par Rosensweig [Rosensweig *et al.*, 1999].

de Darcy contenant un terme temporel puis avec un modèle de Brinkman [Sekar and Vaidyanathan, 1993] pour des frontières libres et des conditions aux limites sur le potentiel magnétique simplifiées. Cette configuration n'est pas très physique mais présente l'avantage de pouvoir être étudiée analytiquement. Ces auteurs ont analysé le couplage avec le champ magnétique et calculé les seuils d'instabilité linéaire. D'autre part, le choix de leur adimensionalisation ne nous a pas paru très judicieux. En effet, ils ont utilisé celle que Fynlayson [Fynlayson, 1970] a proposée dans ces premiers travaux et qui fait apparaître des termes proportionnels à \sqrt{Ra} . Le nombre de Rayleigh doit donc toujours être positif ce qui élimine la possibilité d'un chauffage par le haut ($\Delta T < 0 \rightarrow Ra < 0$) or il s'agit justement d'une des originalités de ce problème. Enfin, Sekar *et al.* [Sekar *et al.*, 1993; Sekar and Vaidyanathan, 1993] ont choisi des facteurs d'adimensionalisation liés aux caractéristiques du fluide et non du milieu poreux. En raison de ces choix, ils ont conclu que des solutions oscillantes n'étaient observables que pour des nombres de Taylor très élevés. En utilisant des échelles d'adimensionalisation liées au milieu poreux, nous montrerons comme au chapitre 4 que ces solutions s'observent déjà pour des nombres de Taylor poreux de l'ordre de 10.

Nous terminerons cette section en évoquant une application récente des ferrofluides par Rosensweig *et al.* [Rosensweig *et al.*, 1999]. Ces auteurs ont simulé la convection dans le manteau terrestre en étudiant expérimentalement sur terre la convection dans une sphère soumise à un champ de force

centrale. L'utilisation d'un champ magnétique à symétrie sphérique sur une sphère de ferrofluide génère un champ de force centrale qui peut être ajusté afin de produire un effet équivalent à celui de la pesanteur terrestre. La figure 1.6 montre les cellules de convection obtenues par Rosensweig en présence ou non de ferrofluide.

Chapitre 2

Modélisation mathématique de la convection naturelle dans un milieu poreux

Les sciences n'essaient pas d'expliquer; c'est tout juste si elles tentent d'interpréter; elles font essentiellement des modèles. Par modèle, on entend une construction mathématique qui, à l'aide de certaines interprétations verbales, décrit les phénomènes observés. La justification d'une telle construction mathématique réside uniquement et précisément dans le fait qu'elle est censée fonctionner.

John von Neumann

2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit physiquement les mécanismes d'instabilités que nous allons étudier ainsi que leurs applications aux milieux poreux. Il convient maintenant d'établir les équations fondamentales de la convection dans un milieu poreux saturé.

Dans un milieu poreux naturel, la distribution de taille et de forme des pores est irrégulière comme, par exemple pour du sable ou les alvéoles du poumon. A l'échelle du pore, c'est-à-dire au niveau *mésoscopique*, la vitesse,

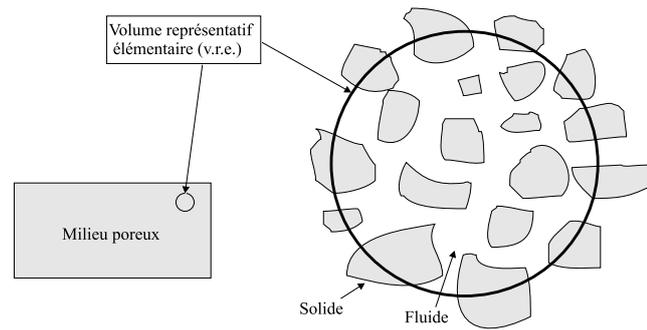


FIG. 2.1 – *Volume représentatif élémentaire (v.r.e.)*.

la pression et les autres grandeurs hydrodynamiques seront donc irrégulières. Cependant, dans les expériences classiques, les grandeurs intéressantes sont mesurées non plus à l'échelle du pore mais sur des surfaces englobant de nombreux pores. L'avantage de telles quantités *macroscopiques* est qu'elles évoluent de manière continue en fonction de l'espace et du temps. On obtient les équations d'évolution des variables macroscopiques en partant des équations classiques d'évolution du fluide et en les moyennant sur des volumes contenant de nombreux pores. Les moyennes peuvent être définies de deux manières: spatiale ou statistique. Dans l'approche spatiale, les variables macroscopiques sont donc définies comme des moyennes sur un volume suffisamment large appelé *volume représentatif élémentaire (v.r.e.)* (figure 2.1). Pour tout volume plus large que le *v.r.e.*, les lois de bilans sont indépendantes de la taille de ce même *v.r.e.*. L'approche statistique consiste quant à elle à effectuer les moyennes sur un ensemble de distributions possibles des pores qui sont macroscopiquement équivalentes.

Il est important de souligner un empirisme certain dans le choix des équations décrivant la convection dans un milieu poreux. Dans le cas d'un fluide pur n'ayant pas de propriétés rhéologiques particulières, les équations de bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie sont admises par tous depuis longtemps; c'est loin d'être le cas pour les milieux poreux comme nous allons le voir par la suite. Le lecteur intéressé peut se référer au livre de Nield et Bejan [Nield, 1999] qui examine de manière détaillée les nombreuses lois possibles ainsi que leurs hypothèses sous-jacentes [Kaviany, 1995; Bear, 1988].

2.2 Équation de continuité

Soit un modèle continu de milieu poreux, basé sur la notion de *v.r.e.*. Le milieu poreux saturé est donc constitué de deux phases: liquide et solide. Il est par conséquent nécessaire de distinguer si les moyennes sont effectuées

sur un volume du milieu poreux V_p comprenant un mélange du fluide et du solide ou bien sur un volume V_l constitué de fluide uniquement. On peut ainsi définir deux vitesses du fluide: \mathbf{U} , la vitesse intrinsèque obtenue par moyenne sur V_l et $\mathbf{u}(u,v,w)$, la vitesse de filtration ou vitesse de Darcy définie par une moyenne sur V_p . Ces deux grandeurs sont reliées par la relation de Dupuit-Forchheimer:

$$\mathbf{u} = \phi \mathbf{U}, \quad (2.1)$$

où ϕ est la porosité. Dans la suite de ce travail, nous n'utiliserons plus que la notion de vitesse de filtration, plus significative à nos yeux de l'évolution globale du fluide dans le milieu poreux. Ceci est d'autant plus logique que les équations de bilan macroscopiques que nous utilisons sont des équations moyennes qui gommement les détails structurels de la matrice poreuse, et ce quelles que soient les moyennes considérées.

En supposant le fluide saturant incompressible, il est alors aisé d'obtenir l'équation de continuité

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.2)$$

2.3 Équation de bilan de la quantité de mouvement

Il existe de nombreuses formes d'équations dépendant de l'expression du tenseur des tensions. Nous nous bornerons cependant aux deux lois les plus souvent utilisées: celles de Darcy et de Brinkman.

2.3.1 Équation de Darcy

Il s'agit du modèle classique le plus ancien, issu des expériences historiques de Darcy [Darcy, 1856] sur les fontaines de Dijon. En l'absence de forces extérieures et de forces inertiales, ce dernier avait constaté une proportionnalité entre le gradient de pression appliqué et la vitesse du fluide dans un milieu poreux, à savoir

$$\nabla p = -\frac{\mu_l}{K} \mathbf{u}, \quad (2.3)$$

où p est la pression, μ_l la viscosité dynamique du fluide et K la perméabilité du milieu poreux introduite au paragraphe 1.2.1. De façon générale, cette grandeur est un tenseur qui se réduit à un scalaire dans l'hypothèse d'un milieu poreux isotrope. Le tableau 2.1 fournit les valeurs de la perméabilité pour quelques matériaux poreux classiques. La détermination de K peut s'effectuer, soit de manière directe à partir de l'expérience en utilisant la loi de Darcy (2.3), soit de manière empirique en supposant valable la formule de *Carman-Kozeny*. Celle-ci donne une idée raisonnable de la perméabilité et s'écrit:

$$K = \frac{D_p^2 \phi^3}{180 (1 - \phi)^2}, \quad (2.4)$$

Matériaux	Perméabilité K [m^2]
Brique	$4.8 \times 10^{-15} - 2.9 \times 10^{-13}$
Cigarette	1.1×10^{-9}
Sable	$2 \times 10^{-11} - 1.8 \times 10^{-10}$
Terre	$2.9 \times 10^{-13} - 1.4 \times 10^{-11}$

TAB. 2.1 – Perméabilité de quelques matériaux poreux classiques.

avec

$$D_{p2} = \frac{\int_0^\infty D_p^3 h(D_p) dD_p}{\int_0^\infty D_p^2 h(D_p) dD_p}, \tag{2.5}$$

où $h(D_p)$ est la fonction de distribution des diamètres D_p des particules constitutives du milieu poreux. La loi de Carman-Kozeny donne de bons résultats lorsque les particules constitutives sont quasi sphériques; quant à la valeur 180, elle a été choisie en recherchant la meilleure corrélation avec les valeurs expérimentales.

La loi de Darcy a été vérifiée par de nombreuses expériences et retrouvée théoriquement par des modèles statistiques et thermodynamiques. Cependant son domaine d'application est limité aux écoulements laminaires caractérisés par un faible nombre de Reynolds [Niield, 1999].

2.3.2 Modèle de Brinkman

Ce modèle fournit une alternative intéressante à la loi de Darcy sous la forme

$$\nabla p = -\frac{\mu_l}{K} \mathbf{u} + \mu_e \nabla^2 \mathbf{u}, \tag{2.6}$$

où μ_e est appelé la viscosité effective, souvent prise égale à la viscosité du fluide saturant μ_l . Ce modèle est donc composé de deux termes visqueux, le terme classique de Darcy ainsi qu'un terme diffusif analogue à celui qui apparaît dans l'équation de Navier-Stokes. Cette approche peut paraître spé- cieuse mais elle a le grand avantage de conserver la structure des équations de la mécanique des fluides Newtoniens et donc de permettre une adapta- tion rapide des modèles numériques issus de la mécanique des fluides aux milieux poreux. L'idée de base est ici que la présence des particules dans le fluide génère une force volumique de traînée dans l'équation de quantité de mouvement, proportionnelle à la vitesse du fluide et à l'inverse d'un facteur identifié à la perméabilité du milieu. Dans ses travaux originaux, Brinkman [Brinkman, 1947] avait supposé que la viscosité effective était égale à celle du fluide ce qui n'est pas vrai en général. Lundgren [Lundgren, 1972] a montré que ce modèle n'était valable que pour des milieux poreux de forte porosité.

Dans la suite de ce travail, nous utiliserons l'équation de Brinkman gé- néralisée [Niield, 1999] en ajoutant à (2.6) les termes inertiels pour obtenir

$$\rho_l [\phi^{-1} \partial_t \mathbf{u} + \phi^{-2} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] = -\nabla p - \frac{\mu_l}{K} \mathbf{u} + \mu_e \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}, \quad (2.7)$$

où ρ_l est la masse spécifique du fluide et \mathbf{F} la résultante des forces extérieures. Les termes inertiels doivent bien évidemment s'exprimer en termes de la vitesse intrinsèque du fluide mais nous les avons écrits en fonction de la vitesse de filtration à l'aide de la relation (2.1).

Dans l'annexe A, nous avons montré que l'équation de Brinkman pouvait se déduire des principes de l'*Extended Irreversible Thermodynamics* (EIT) sous réserve de certaines hypothèses.

2.3.3 Modèle de Darcy vs modèle de Brinkman

Une grande majorité des études de convection dans les milieux poreux utilisent le modèle de Darcy. Nous avons cependant opté dans ce travail pour le modèle de Brinkman qui prend en compte la friction engendrée par un cisaillement macroscopique. Cet effet affecte profondément la structure de l'écoulement, surtout dans les milieux poreux peu denses. Le modèle de Brinkman revient donc à assimiler la matrice poreuse saturée à un fluide particulier de viscosité effective μ_e et soumis en outre à une force extérieure non conservative sous la forme du terme de Darcy. Nous conservons ainsi les ingrédients principaux d'un fluide étant donné que nous conservons la même structure mathématique que celle des équations de la mécanique des fluides Newtoniens. Un autre intérêt du modèle de Brinkman réside dans le fait qu'en variant la valeur de la perméabilité, il nous est loisible de passer d'un milieu poreux de Darcy pur ($K \neq 0$) à un fluide pur ($K = \infty$). Enfin, il est utile de rappeler que le modèle de Brinkman diffère de celui de Darcy par le terme de diffusion visqueuse ce qui signifie que sur une paroi solide, il suppose une *adhérence* du fluide ($\mathbf{u}_{sol} = \mathbf{u}_{liq}$) alors que le modèle de Darcy suppose un *glissement* parfait ($\mathbf{u}_{sol} \cdot \mathbf{e}_n = \mathbf{u}_{liq} \cdot \mathbf{e}_n$, où \mathbf{e}_n est le vecteur unitaire de la normale à la paroi). Ce sera principalement dans les zones proches des frontières entre solide et fluide, là où précisément le modèle de Darcy devient insuffisant [Nield, 1999] que des différences notables se marqueront entre les deux approches.

2.4 Équation de bilan de l'énergie

Examinons la situation simple d'un milieu poreux isotrope pour lequel les transferts radiatifs, la dissipation visqueuse ainsi que le travail dû aux changements de pression sont négligeables. Nous faisons aussi l'hypothèse de l'équilibre local c'est-à-dire que les phases fluide et solide sont à la même température. Enfin, nous supposons que la conduction de chaleur se fait simultanément dans la phase fluide et dans la phase solide afin de ne pas avoir de transfert net de chaleur d'une phase vers l'autre. Nous pouvons

alors utiliser l'équation de Fourier localement et faire des moyennes sur un *v.r.e.* du milieu, ce qui donne pour la phase solide

$$(1 - \phi) (\rho c)_s \partial_t T_s = (1 - \phi) k_s \nabla^2 T_s, \quad (2.8)$$

et pour la phase fluide,

$$\phi (\rho c_P)_l \partial_t T_l + (\rho c_P)_l (\mathbf{u} \cdot \nabla) T_l = \phi k_f \nabla^2 T_l. \quad (2.9)$$

Les indices s et l renvoient respectivement aux phases solide et fluide, c est la chaleur spécifique du solide, c_P est la chaleur spécifique à pression constante du fluide et k est la conductivité thermique (supposée constante).

En tenant compte de l'hypothèse d'équilibre local c'est-à-dire $T_l = T_s$ et en ajoutant (2.8) à (2.9), nous obtenons l'équation de bilan d'énergie [Nield, 1999] sous la forme classique de l'équation de la chaleur

$$(\rho c)_p \partial_t T + (\rho c_P)_l \mathbf{u} \cdot \nabla T = k_p \nabla^2 T, \quad (2.10)$$

où on a défini respectivement $(\rho c)_p$ et k_p , la capacité calorifique totale et la conductivité thermique totale par

$$(\rho c)_p = (1 - \phi) (\rho c)_s + \phi (\rho c_P)_l, \quad (2.11)$$

$$k_p = (1 - \phi) k_s + \phi k_l, \quad (2.12)$$

2.5 Approximation de Boussinesq

Étant donné que nous nous intéressons à des problèmes de convection naturelle, les forces extérieures seront introduites sous forme d'un terme gravifique $\rho_l \mathbf{g}$ de sorte que l'équation (2.7) prend la forme

$$\rho_f [\phi^{-1} \partial_t \mathbf{u} + \phi^{-2} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] = -\nabla p - \frac{\mu_l}{K} \mathbf{u} + \mu_e \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_l \mathbf{g}, \quad (2.13)$$

Dans l'étude de phénomènes de convection pour lesquels les effets de compressibilité du fluide peuvent être négligés, Oberbeck [Oberbeck, 1879] et Boussinesq [Boussinesq, 1903] ont proposé indépendamment l'un de l'autre¹ une série d'hypothèses simplificatrices des équations du mouvement qui considèrent comme constantes toutes les propriétés physiques du milieu à l'exception de la densité dans le terme de poussée de l'équation de la quantité de mouvement donc dans le terme des forces extérieures. Nous allons étendre cette forme des équations de la convection naturelle à un milieu poreux.

De manière générale, l'équation d'état du fluide est de la forme

$$\rho_l = \rho_l(T, p). \quad (2.14)$$

1. Pour cette raison, l'approximation de Boussinesq est parfois appelée approximation d'Oberbeck-Boussinesq.

Nous supposons que cette équation d'état peut être linéarisée dans le domaine des températures et pressions considérées c'est-à-dire que les écarts de température et de pression par rapport à leurs valeurs de référence sont suffisamment petits pour pouvoir écrire

$$\rho_l = \rho_0 [1 - \alpha_T (T - T_0) - \alpha_p (p - p_0)], \quad (2.15)$$

où T_0 et p_0 sont deux grandeurs constantes définissant respectivement la température et la pression de référence alors que α_T est le coefficient d'expansion thermique et α_p est le coefficient de compressibilité². Si de plus nous considérons que les perturbations de masse spécifique dues à des variations de pression sont négligeables devant celles dues aux variations de température, la relation (2.15) devient

$$\rho_l = \rho_0 [1 - \alpha_T (T - T_0)]. \quad (2.16)$$

En tenant compte de l'équation d'état simplifiée (2.16), le modèle de Brinkman (2.13) s'écrit

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p - \frac{\mu_l}{K} \mathbf{u} + \mu_e \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_0 [1 - \alpha_T (T - T_0)] \mathbf{g}. \quad (2.17)$$

où $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ est l'accélération matérielle du fluide saturant le milieu poreux

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = [\phi^{-1} \partial_t \mathbf{u} + \phi^{-2} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]. \quad (2.18)$$

L'équation de bilan de l'énergie garde quant à elle la forme (2.10), c'est-à-dire

$$(\rho c)_p \partial_t T + (\rho c_P)_l \mathbf{u} \cdot \nabla T = k_p \nabla^2 T. \quad (2.19)$$

En résumé, les équations de Boussinesq du modèle de Brinkman sont les suivantes

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \rho_0 [\phi^{-1} \partial_t \mathbf{u} + \phi^{-2} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] &= -\nabla p - \frac{\mu_l}{K} \mathbf{u} + \mu_e \nabla^2 \mathbf{u} \\ &\quad + \rho_0 [1 - \alpha_T (T - T_0)] \mathbf{g}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$(\rho c)_p \partial_t T + (\rho c_P)_l \mathbf{u} \cdot \nabla T = k_p \nabla^2 T, \quad (2.22)$$

2.6 État conductif de référence, adimensionalisation et équations aux perturbations pour le problème de Horton-Rogers-Lapwood

Dans le cadre des études de stabilité linéaire et non-linéaire menées dans les chapitres suivants, il faut établir les équations d'évolution pour les perturbations des champs physiques par rapport à l'état de référence dont on

2. Pour l'eau, $\alpha_T = 2.64 \cdot 10^{-4} K^{-1}$ et $\alpha_p = 5.11 \cdot 10^{-5} \text{ bars}^{-1}$.

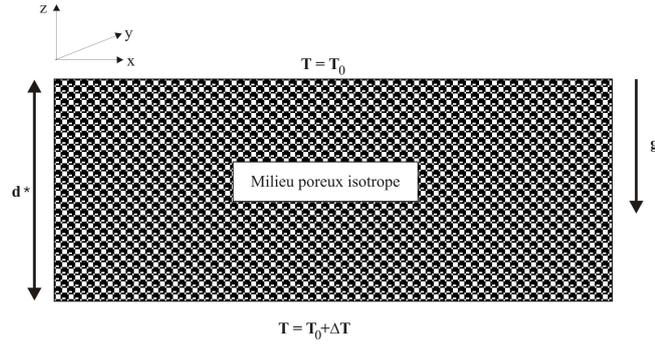


FIG. 2.2 – Configuration du problème de Horton-Rogers-Lapwood.

se propose d'étudier la stabilité. Nous allons examiner en détail cette procédure dans le cas simple du problème de Horton-Rogers-Lapwood (figure 2.2). Il sera alors facile de l'étendre aux situations plus complexes étudiées dans ce travail. Le problème de Horton-Rogers-Lapwood est l'analogie pour les milieux poreux du problème classique de Rayleigh-Bénard; il fût traité tout d'abord par Horton et Rogers [Horton and Rogers, 1945] et indépendamment par Lapwood [Lapwood, 1948]. Ce problème consiste en une couche horizontale infinie d'un milieu poreux isotrope saturé d'un fluide Newtonien et chauffée par le bas. Dans leurs travaux originaux, Horton, Rogers et Lapwood ont utilisé la loi de Darcy; nous nous proposons d'étendre leurs résultats au modèle de Brinkman que nous utiliserons tout au long de ce travail.

2.6.1 État de référence conductif

Cet état de référence est un état de repos ($\mathbf{u}_{ref} = 0$) purement conductif. Dans ces conditions, l'équation de l'énergie (2.22) admet comme solution

$$T_{ref} = T_0 + \Delta T \left(1 - \frac{z}{d^*}\right), \quad (2.23)$$

satisfaisant les conditions aux limites $T = T_0 + \Delta T$ en $z = 0$ (bord inférieur) et $T = T_0$ en $z = d^*$ (bord supérieur). L'équation de Brinkman (2.21) permet d'extraire le profil de pression

$$p_{ref} = p_0 - \rho_0 g \left[z + \frac{1}{2} \alpha_T \Delta T \left(\frac{z^2}{d^*} - 2z \right) \right], \quad (2.24)$$

2.6.2 Équations aux perturbations et adimensionalisation

Les perturbations des champs physiques sont rendues adimensionnelles à l'aide des échelles de mesures intrinsèques suivantes, liées au milieu poreux:

$$\text{longueur :} \quad \text{épaisseur de la couche } d^* \quad (2.25)$$

$$\text{température :} \quad \text{différence de température } \Delta T \quad (2.26)$$

$$\text{vitesse :} \quad \frac{\kappa_p}{d^*} \quad (2.27)$$

$$\text{temps :} \quad \frac{d^{*2}}{\kappa_p S} \quad (2.28)$$

$$\text{pression :} \quad \frac{\mu_l \kappa_p}{K} \quad (2.29)$$

où $\kappa_p = k_p / (\rho c_P)_l$ et $S = \frac{(\rho c_P)_l}{(\rho c)_p}$ est le rapport des capacités calorifiques. Les champs de perturbations sans dimension de vitesse, de pression et de température s'écrivent donc respectivement

$$\mathbf{u}' = \frac{d^*}{\kappa_p} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{ref}}), \quad (2.30)$$

$$p' = \frac{K}{\mu_l \kappa_p} (p - p_{\text{ref}}), \quad (2.31)$$

$$T' = \frac{1}{\Delta T} (T - T_{\text{ref}}), \quad (2.32)$$

En tenant compte de l'approximation de Boussinesq et en introduisant les relations ci-dessus dans les équations d'évolution (2.20), (2.22) et (2.21), on obtient

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (2.33)$$

$$\chi^{-1} [\partial_t \mathbf{u}' + \phi^{-1} (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}'] = -\nabla p' - \mathbf{u}' + \Lambda Da \nabla^2 \mathbf{u}' + Ra_p T' \mathbf{e}_z, \quad (2.34)$$

$$\partial_t T' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) T' - w' = \nabla^2 T'. \quad (2.35)$$

où w' est la composante verticale de la perturbation de vitesse \mathbf{u}' . L'adimensionalisation fait apparaître quatre nombres sans dimension définis par

$$Ra_p = \frac{\rho_0 \alpha_T g \Delta T d^* K}{\mu_l \kappa_p}, \text{ le nombre de Rayleigh poreux,} \quad (2.36)$$

$$\chi = \frac{\phi \mu_l d^{*2}}{\rho_0 \kappa_p K S}, \text{ le nombre de Prandtl de filtration,} \quad (2.37)$$

$$Da = \frac{K}{d^{*2}}, \text{ le nombre de Darcy,} \quad (2.38)$$

$$\Lambda = \frac{\mu_e}{\mu_l}, \text{ le rapport des viscosités dynamiques.} \quad (2.39)$$

Il est intéressant de noter que χ est le rapport du nombre de Prandtl du liquide pur et du nombre de Darcy en tenant compte du fait que le liquide n'occupe que les pores

$$\chi = \frac{\phi Pr}{Da}, \quad (2.40)$$

Pr est le nombre de Prandtl du liquide pur,

$$Pr = \frac{\mu_l}{\rho_0 \kappa_p}. \quad (2.41)$$

De même Ra_p est le produit du nombre de Rayleigh du liquide pur ($Ra_l = \frac{\rho_0 g \alpha_T \Delta T d^* 3}{\mu_l \kappa_l}$) par le nombre de Darcy:

$$Ra_p = Ra_l Da. \quad (2.42)$$

Si nous nous limitons à des perturbations infinitésimales, nous pouvons négliger les termes d'ordre supérieur à un et les relations (2.33)-(2.35) se réduisent à

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (2.43)$$

$$\chi^{-1} \partial_t \mathbf{u}' = -\nabla p' - \mathbf{u}' + \Lambda Da \nabla^2 \mathbf{u}' + Ra_p T' \mathbf{e}_z, \quad (2.44)$$

$$\partial_t T' - w' = \nabla^2 T'. \quad (2.45)$$

La fermeture du système (2.43)-(2.45) s'obtient en lui ajoutant des conditions aux limites appropriées sur les perturbations de vitesse et de température. L'utilisation du modèle de Brinkman en lieu et place de la loi de Darcy implique l'adhérence du fluide à la paroi. Nous avons donc

$$\mathbf{u}' = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } z = 1. \quad (2.46)$$

En supposant les surfaces inférieure et supérieure parfaitement conductrices de chaleur, la température y est constante et les perturbations de température nulles:

$$T' = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } z = 1. \quad (2.47)$$

En $z = 1$, nous utiliserons parfois une condition aux limites thermique plus générale que (2.47) et connue sous le nom de *loi de refroidissement de Newton*. Cette loi exprime que la composante normale du flux de chaleur \mathbf{q} à la surface supérieure du milieu poreux est proportionnelle à la différence de température entre l'interface et le gaz inerte supposé immobile "loin" de cette dernière. Le facteur de proportionnalité h est appelé le *coefficient d'échange de chaleur*. Nous avons donc la relation suivante en variables dimensionnelles non perturbées

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = h (T - T_{gaz}) |_{z=d^*}, \quad (2.48)$$

où $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ est la normale à la surface supérieure. Le flux de chaleur est lié au gradient de température par la loi de Fourier,

$$\mathbf{q} = -k_l \nabla T. \quad (2.49)$$

En combinant les relations (2.48) et (2.49) avec les équations de l'état conductif³, on obtient après adimensionalisation,

$$\partial_z T' + Bi T' = 0, \quad (2.50)$$

où Bi est le nombre de Biot,

$$Bi = \frac{h d}{k_l}. \quad (2.51)$$

Un nombre de Biot nul modélise une surface adiabatique alors qu'un nombre de Biot infini modélise une surface parfaitement conductrice. Il est parfois plus facile de travailler avec un nombre de Biot modifié Bi_m défini sur l'intervalle $[0,1]$ par

$$Bi_m = \frac{Bi}{1 + Bi}. \quad (2.52)$$

Une surface adiabatique sera donc caractérisée par $Bi_m = 0$ et une surface parfaitement conductrice par $Bi_m = 1$.

Le système d'équations linéaires (2.43)-(2.45) associé aux conditions aux limites (2.46) et (2.47) ou (2.50) sera utilisé comme modèle canonique de systèmes plus complexes que nous analyserons par la suite.

Le problème linéaire ci-dessus peut être transformé afin d'obtenir un problème aux valeurs propres pour les perturbations de vitesse verticale et de température. Pour cela, on applique deux fois consécutivement l'opérateur rotationnel à l'expression (2.44) et on projette l'équation obtenue sur \mathbf{e}_z en tenant compte de l'équation de continuité (2.43). Nous obtenons ainsi une équation ne faisant plus intervenir que les champs de température et de vitesse verticale, à savoir

$$\chi^{-1} \partial_t \nabla^2 w' = -\nabla^2 w' + \Lambda Da \nabla^4 w' + Ra_p \nabla_h^2 T', \quad (2.53)$$

où ∇_h^2 est le laplacien horizontal,

$$\nabla_h^2 (\cdot) = \partial_{x^2}^2 (\cdot) + \partial_{y^2}^2 (\cdot). \quad (2.54)$$

2.7 Analyse en modes normaux du problème de Horton-Rogers-Lapwood

On peut montrer [Drazin and Reid, 1981; Dauby, 1994] qu'en toute généralité, la partie temporelle des perturbations est une exponentielle du type

3. Ces équations se généralisent très facilement au cas où une condition de Newton est utilisée en surface.

$e^{s t}$ où s représente la variation temporelle des perturbations et constitue la valeur propre du problème linéaire. Nous pouvons la décomposer suivant ses parties réelle (s_{\Re} , le taux de croissance de la perturbation) et imaginaire (s_{\Im} , la fréquence de la perturbation)

$$s = s_{\Re} + i s_{\Im}, \quad (2.55)$$

où s_{\Re} et s_{\Im} sont deux nombres réels. L'état *marginal* se caractérise par $s_{\Re} = 0$. Il peut être stationnaire ($s_{\Im} = 0$) ou oscillant ($s_{\Im} \neq 0$). Nous parlerons d'*échange de stabilité* lorsque l'annulation de s_{\Re} implique nécessairement l'annulation de s_{\Im} . Nous verrons dans la suite de ce travail que l'hypothèse d'échange de stabilité ne pourra pas être faite dans toutes les configurations étudiées. Ainsi, l'étude d'un milieu poreux en rotation (chapitre 4) fera apparaître des solutions oscillantes.

Montrons maintenant qu'il est possible de résoudre le problème linéaire en appliquant la séparation des variables suivantes;

$$\begin{pmatrix} w' \\ T' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W(z) \\ \Theta(z) \end{pmatrix} f(x,y) e^{s t}, \quad (2.56)$$

où $W(z)$ et $\Theta(z)$ représentent respectivement les dépendances en z de la vitesse verticale et de la température alors que $f(x,y)$ traduit la dépendance spatiale horizontale. En introduisant la séparation des variables suggérées ci-dessus dans l'équations (2.45), on déduit

$$-\frac{\nabla_h^2 f}{f} = \frac{D^2 \Theta}{\Theta} + \frac{W}{\Theta} - s = a^2, \quad (2.57)$$

ou de manière équivalente,

$$\nabla_h^2 f + a^2 f = 0, \quad (2.58)$$

$$D^2 \Theta - a^2 \Theta + W - s \Theta = 0, \quad (2.59)$$

avec $D = \partial_z$, l'opérateur de dérivée selon z . La constante a^2 est nécessairement positive pour que l'équation de Helmholtz (2.58) admette une solution bornée. Sa solution la plus simple est

$$f = e^{i \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}, \quad (2.60)$$

où $\mathbf{x} = (x,y)$ est le vecteur position horizontal bidimensionnel et \mathbf{a} un vecteur bidimensionnel de direction quelconque mais tel que

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y), \quad (2.61)$$

$$a^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_x^2 + a_y^2. \quad (2.62)$$

Nous obtenons ainsi une nouvelle expression de la séparation des variables

$$\begin{pmatrix} w' \\ T' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W(z) \\ \Theta(z) \end{pmatrix} e^{i(a_x x + a_y y) + s t}, \quad (2.63)$$

En introduisant ces relations dans (2.45) et (2.53) ainsi que dans les conditions aux limites (2.46)-(2.47) ou (2.50), nous obtenons la forme finale du problème aux valeurs propres du problème de Horton-Rogers-Lapwood

$$\chi^{-1}s(D^2 - a^2)W = -(D^2 - a^2)W + \Lambda Da(D^2 - a^2)^2W - a^2 Ra_p \Theta, \quad (2.64)$$

$$s\Theta = (D^2 - a^2)\Theta + W, \quad (2.65)$$

avec les six conditions aux limites suivantes

$$W(0) = 0, \quad (2.66)$$

$$DW(0) = 0, \quad (2.67)$$

$$\Theta(0) = 0, \quad (2.68)$$

$$W(1) = 0, \quad (2.69)$$

$$DW(1) = 0, \quad (2.70)$$

$$D\Theta(1) + Bi\Theta(1) = 0. \quad (2.71)$$

2.8 Méthodologie numérique de résolution du problème aux valeurs propres

Le problème aux valeurs propres (2.64)-(2.71) n'admet pas de solution analytique de manière générale; il convient donc d'employer une méthode numérique pour le résoudre. Nous utiliserons dans ce travail une méthode spectrale qui consiste à décomposer les champs inconnus en séries de polynômes de Chebyshev puis à projeter les équations sur ces mêmes polynômes pondérés de manière adéquate. Les projections sur les polynômes de degré le plus élevé sont remplacées par les conditions aux limites discrétisées, on parlera alors de *méthode de Tau-Chebyshev* [Canuto et al., 1987]. Cette méthode nous permet de remplacer le problème aux valeurs propres initial par un problème équivalent de la forme

$$\mathbf{A}x = s\mathbf{B}x, \quad (2.72)$$

où x est le nouveau vecteur des inconnues constitué des coefficients multiplicatifs des polynômes de Chebyshev dans les développements en série des fonctions propres. \mathbf{A} et \mathbf{B} sont des matrices carrées de dimension $3N_{cheb}$ pour le problème de Horton-Rogers-Lapwood⁴. Le problème aux valeurs propres (2.72) est alors résolu par une routine numérique (comme DGEGV de la librairie ESSL par exemple) qui calcule l'ensemble des valeurs propres réelles

4. Afin de simplifier le développement en série de polynômes de Chebyshev, le système d'équations (2.64)-(2.65) est transformé en un système de trois équations du second ordre à trois inconnues. Chaque inconnue étant développée en une série de N_{cheb} polynôme, on obtient bien un système de $3N_{cheb}$ équations à $3N_{cheb}$ inconnues.

$z = 0$	$z = 1$	Ra_p^c	a_c
$W = 0, T = 0$	$W = 0, T = 0$	$4\pi^2 = 39.48$	$\pi = 3.14$
$W = 0, T = 0$	$W = 0, DT = 0$	27.10	2.33
$W = 0, DT = 0$	$W = 0, DT = 0$	12	0
$W = 0, T = 0$	$DW = 0, DT = 0$	9.87	1.57
$W = 0, DT = 0$	$DW = 0, DT = 0$	3	0

TABLE 2.2 – Valeurs critiques du nombre de Rayleigh poreux Ra_p^c et du nombre d'onde correspondant pour le problème de Horton-Rogers-Lapwood avec le modèle de Darcy et pour différentes conditions aux limites.

et complexes conjuguées ainsi que les vecteurs propres correspondants. Afin de s'assurer de la convergence de la valeur propre, le même problème aux valeurs propres est résolu de manière répétée, en augmentant progressivement N_{cheb} jusqu'à atteindre la précision voulue. Rappelons que les valeurs propres sont les taux de croissance des perturbations; nous serons cependant le plus souvent intéressés par le taux de chauffage marginal. Pour obtenir ce taux de chauffage marginal, il convient d'annuler la plus grande partie réelle des valeurs propres, soit s_{\Re}^0 par un simple algorithme de Newton-Raphson. Quant au taux de chauffage critique, il s'obtient facilement en prenant le minimum de la courbe neutre donnant le taux de chauffage marginal en fonction du nombre d'onde.

2.9 Comparaison des modèles de Darcy et de Brinkman pour le problème de Horton-Rogers-Lapwood

Nous avons repris dans le tableau 2.2 les valeurs critiques du nombre de Rayleigh poreux Ra_p^c et du nombre d'onde correspondant a_c pour le problème original de Horton-Rogers-Lapwood (modèle de Darcy) et pour différentes conditions aux limites [Nield, 1999].

Nous allons à présent examiner ce que deviennent certaines de ces valeurs critiques lorsqu'on utilise le modèle de Brinkman en lieu et place du modèle de Darcy dans le problème de Horton-Rogers-Lapwood. Nous avons vu dans les paragraphes précédents que le modèle de Brinkman introduit un terme diffusif proportionnel au nombre de Darcy. Les valeurs critiques que nous obtiendrons seront donc dépendantes du nombre de Darcy et d'autant plus éloignées des valeurs du problème original de Horton-Rogers-Lapwood que ce nombre de Darcy sera élevé. En effet, il est important de remarquer qu'il ne suffit pas de poser $\Lambda = 0$ dans le modèle de Brinkman pour retrouver le modèle de Darcy. Ce dernier n'est pas du même ordre que celui de Brinkman et ne nécessite donc pas le même nombre de conditions aux limites: quatre comparés à six conditions aux limites. Par contre, pour de faibles Da , on

se rapproche du modèle de Darcy. Ces constatations sont confirmées par le tableau 2.3 qui donne les valeurs critiques obtenues par le modèle de Brinkman (avec $\Lambda = 1$) pour un milieu poreux compris entre deux parois rigides et isothermes d'une part, isotherme et adiabatique d'autre part.

Da	Isotherme-isotherme		Isotherme-adiabatique	
	Ra_p^c	a_c	Ra_p^c	a_c
10^{-8}	39.529	3.143	27.164	2.328
10^{-6}	39.56	3.144	27.205	2.329
10^{-4}	40.381	3.170	28.197	2.355
10^{-2}	60.398	3.230	45.258	2.510

TAB. 2.3 – Valeurs critiques du nombre de Rayleigh poreux Ra_p^c et du nombre d'onde correspondant pour le problème de Horton-Rogers-Lapwood avec Brinkman pour un système rigide-rigide et isotherme-isotherme/adiabatique.

Enfin, nous avons représenté sur la figure 2.3 l'évolution du nombre de Rayleigh poreux critique et du nombre de Rayleigh liquide critique (*i.e.* le nombre de Rayleigh défini par la relation (1.4)) pour un milieu poreux délimité par deux parois rigides et isothermes. On voit que pour de faibles valeurs de Da , nous retrouvons le modèle de Darcy et Ra_p^c tend asymptotiquement vers la valeur de 39.58 (voir tableau 2.2). Pour les valeurs élevées de Da , le modèle de Brinkman (avec $\Lambda = 1$ et $\phi = 1$) se ramène à l'équation de Navier-Stokes. En effet, en tenant compte des relations (2.40) et (2.42), l'équation (2.34) s'écrit

$$Pr^{-1} [\partial_t \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}'] = -\nabla p' - \frac{1}{Da} \mathbf{u}' + \nabla^2 \mathbf{u}' + Ra_l T' \mathbf{e}_z, \quad (2.73)$$

où la pression à été divisée par le nombre de Darcy. Par conséquent, en passant à la limite $Da \rightarrow \infty$, on a

$$Pr^{-1} [\partial_t \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}'] = -\nabla p' + \nabla^2 \mathbf{u}' + Ra_l T' \mathbf{e}_z, \quad (2.74)$$

et Ra_l^c tend asymptotiquement vers 1707.76.

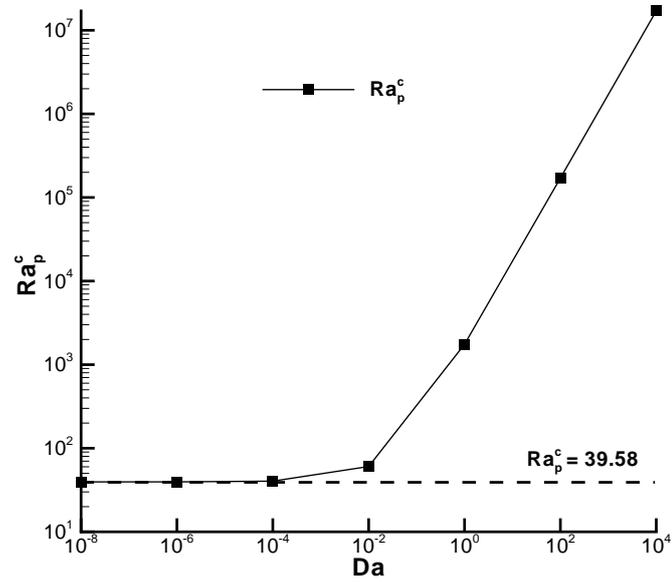
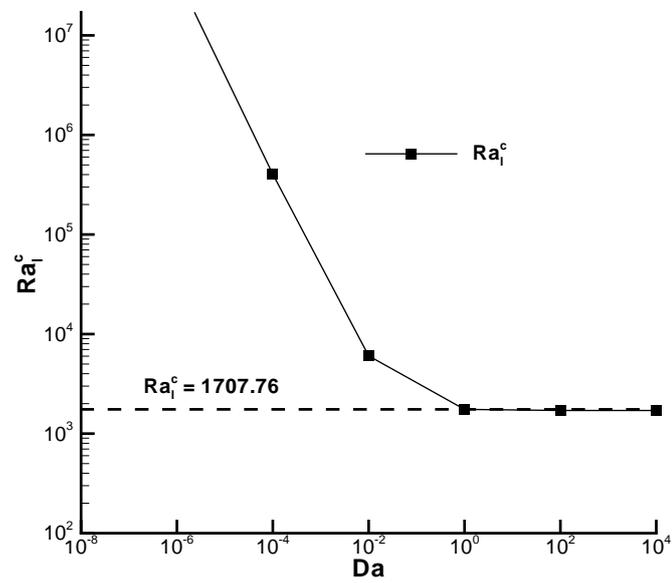
(a) Ra_p^c (b) Ra_l^c

FIG. 2.3 – Valeurs critiques de Ra_p et Ra_l en fonction de Da pour un système rigide-rigide et isotherme-isotherme.

Chapitre 3

Étude d'un système bicouche poreux-liquide

"Si vous prenez une fugue de Bach, elle obéit à des règles, mais il y a aussi des passages inattendus; ce sont des bifurcations. C'est ce mélange de déterminisme et d'imprévisibilité qui en fait la nature, et le charme."

Ilya Prigogine

3.1 Introduction

La convection thermique de fluides dans des milieux poreux a été étudiée de manière intensive depuis les premiers travaux de Horton et Rogers [[Horton and Rogers, 1945](#)] et Lapwood [[Lapwood, 1948](#)]. Le problème d'un système composite constitué d'une couche de liquide surmontant une couche poreuse a reçu une moindre attention. Cette configuration est pourtant présente dans de nombreuses applications comme les réservoirs d'eau, le refroidissement de réacteurs nucléaires suite à un accident [[Somerton and Catton, 1982](#)] ou encore certains types d'échangeurs thermiques. Une bonne revue de la convection et des transferts de chaleur entre fluides et milieux poreux peut être trouvée dans Prasad [[Prasad, 1991](#)]. C'est Nield [[Nield, 1977](#)] qui, le premier, a formulé le problème de la convection thermique dans un fluide superposé à un milieu poreux saturé lorsque le système est limité par deux frontières horizontales isolées adiabatiquement. Il propose une solution analytique du problème linéaire stationnaire en supposant, mais sans le prouver, un nombre d'onde critique nul. Cette dernière hypothèse était un

choix physique basé sur des résultats antérieurs obtenus pour des instabilités thermocapillaires dans les fluides à interfaces déformables ainsi que pour la thermoconvection dans les milieux poreux.

Le problème bicouche poreux-liquide délimité par deux surfaces rigides conductrices a été plus récemment examiné par Chen et Chen [Chen and Chen, 1988]. Ils ont utilisé le modèle de Darcy pour décrire le milieu poreux et la condition classique de glissement de Beavers et Joseph [Beavers and Joseph, 1967] à l'interface poreux-liquide. Leur étude linéaire prédit un nombre d'onde critique non nul. De plus, ces auteurs établissent l'existence d'un rapport d'épaisseurs critique, *i.e.* le rapport entre l'épaisseur du fluide et celle du poreux. Cette valeur critique caractérise le saut d'une circulation dominante dans le milieu poreux à une circulation dominante dans le fluide. Ils n'ont pas pu observer une transition continue de la cellule de convection passant d'un milieu vers l'autre. Lorsque cette cellule est située dans le liquide, elle n'entraîne pas le liquide contenu dans la matrice poreuse. Mais, lorsque le centre de la cellule de convection est situé dans le milieu poreux, Chen et Chen ont montré que les cellules entraînent alors le liquide pur à cause de la perméabilité de l'interface liquide-poreux. Leurs résultats numériques ont été confirmés expérimentalement [Chen and Chen, 1989] tandis qu'une extension au régime non-linéaire peut être trouvée dans [Chen and Chen, 1992]. Poulikakos [Poulikakos, 1986] a employé un modèle non-linéaire de Brinkman-Forchheimer pour étudier numériquement les caractéristiques de l'écoulement et de la température dans une boîte bidimensionnelle. Taslim et Narusawa [Taslim and Narusawa, 1989] ont examiné de manière exhaustive l'influence des nombres sans dimension sur les valeurs critiques dans trois configurations du système poreux-liquide: (a) un milieu poreux compris entre deux couches de fluide, (b) une couche de fluide surmontant un milieu poreux et (c) une couche de fluide comprise entre deux milieux poreux. Ils ont ainsi montré que les valeurs critiques dépendaient fortement du rapport d'épaisseurs et du rapport des conductivités thermiques.

Dans ce chapitre, nous allons développer l'analyse de stabilité linéaire du système bicouche poreux-liquide. Le milieu poreux est décrit par le modèle de Brinkman et nous adopterons des conditions aux limites à la surface supérieure plus générale que celles utilisées dans les études antérieures. Nous étudierons l'influence d'une surface libre avec effet Marangoni sur le seuil de convection et nous analyserons l'effet d'une condition au limite thermique du type loi de refroidissement de Newton avec un nombre de Biot variant de zéro à l'infini.

3.2 Formulation mathématique

Considérons la configuration formée par une couche de liquide incompressible d'épaisseur d_l surmontant une couche poreuse homogène d'épaisseur d_p

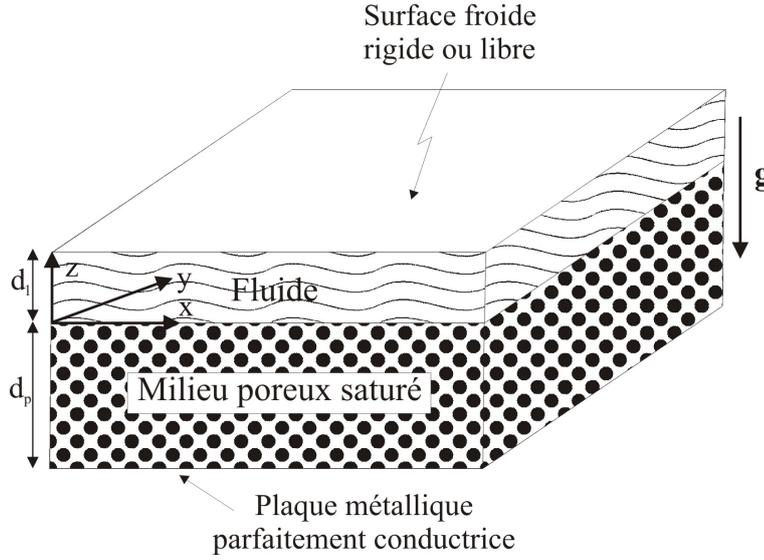


FIG. 3.1 – Configuration géométrique.

saturée par le même liquide (figure 3.1). Ce système est supposé d'extension horizontale infinie et sa masse spécifique est donnée par l'équation d'état

$$\rho_k = \rho_0 [1 - \alpha_T (T_k - T_0)], \quad (3.1)$$

où l'indice k réfère à la couche considérée ($k = l$ pour la couche liquide et $k = p$ pour la couche poreuse), ρ_0 est la densité du liquide à la température T_0 et α_T le coefficient d'expansion volumique. Le système est dans le champ de la pesanteur et chauffé par le bas; sa surface supérieure est soit rigide, soit libre avec une dépendance linéaire de sa tension de surface avec la température:

$$\sigma = \sigma_0 - \gamma (T_l - T_0), \quad (3.2)$$

σ_0 est la tension de surface du fluide à la température T_0 et γ le taux de variation de la tension de surface avec la température, γ est supposé positif. Un système de coordonnées cartésiennes est utilisé avec son origine à l'interface entre le fluide et le milieu poreux, l'axe des z étant orienté positivement vers le haut.

Nous supposons d'une part que l'hypothèse de Boussinesq est valable et d'autre part que le fluide est Newtonien. Les équations de continuité, de bilan de quantité de mouvement et d'énergie de la couche de fluide peuvent alors s'écrire

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_l = 0, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \partial_t \mathbf{u}_l + \rho_0 \mathbf{u}_l \cdot \nabla \mathbf{u}_l &= -\nabla p_l + \mu_l \nabla^2 \mathbf{u}_l \\ &\quad - \rho_0 g [1 - \alpha_T (T_l - T_0)] \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\partial_t T_l + \mathbf{u}_l \cdot \nabla T_l = \kappa_l \nabla^2 T_l, \quad (3.5)$$

où $\mathbf{u}_l (u_l, v_l, w_l)$ désigne le champ de vitesse, p_l la pression, T_l la température, μ_l la viscosité dynamique, k_l la conductivité thermique, c la chaleur spécifique à pression constante and $\kappa_l = k_l/\rho_0 c$ la diffusivité thermique.

Pour décrire le fluide au sein du milieu poreux, nous utilisons le modèle de Brinkman pour les raisons invoquées au chapitre 2. Rappelons que ce modèle consiste à considérer la matrice poreuse saturée comme un fluide particulier caractérisé par une viscosité effective μ_e et soumis à une force extérieure supplémentaire, le terme de Darcy. Les équations de continuité, de quantité de mouvement et de l'énergie de la couche poreuse peuvent se mettre sous la forme suivante

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_p = 0, \quad (3.6)$$

$$\frac{\rho_0}{\phi} \left(\partial_t \mathbf{u}_p + \frac{1}{\phi} \mathbf{u}_p \cdot \nabla \mathbf{u}_p \right) = -\nabla p_p + \mu_e \nabla^2 \mathbf{u}_p - \frac{\mu_l}{K} \mathbf{u}_p - \rho_0 g [1 - \alpha_T (T_p - T_0)] \mathbf{e}_z, \quad (3.7)$$

$$\partial_t T_p + \frac{(\rho c_P)_l}{(\rho c)_p} (\mathbf{u}_p \cdot \nabla T_p) = \frac{k_p}{(\rho c)_p} \nabla^2 T_p, \quad (3.8)$$

où ϕ désigne la porosité, K la perméabilité, $\mathbf{u}_p (u_p, v_p, w_p)$ la vitesse de filtration, p_p la pression, T_p la température, k_p est la conductivité thermique moyenne dans la couche poreuse. Pour n'importe quelle propriété physique, on peut écrire $(\)_p = (1 - \phi) (\)_s + \phi (\)_l$ où l'indice s dénote la propriété correspondante de la matrice solide.

3.3 Équations de bilan pour les petites perturbations et conditions aux limites

Nous restreignons à présent notre analyse à l'évolution de perturbations infinitésimales. Les équations d'évolution pour ces perturbations sont obtenues en linéarisant les relations (3.3)-(3.5) et (3.6)-(3.8) par rapport à l'état de référence, *i.e.* un état de repos purement conductif. Il est important de remarquer que le flux de chaleur non perturbé j traversant l'interface poreux-liquide est continu dans l'état de référence. On peut ainsi écrire

$$k_l \frac{\Delta T_l}{d_l} = k_p \frac{\Delta T_p}{d_p} = k_{tot} \frac{\Delta T_{tot}}{d_{tot}}, \quad (3.9)$$

où $k_{tot} = \frac{d_{tot}}{\frac{d_p}{k_p} + \frac{d_l}{k_l}}$ est la conductivité thermique moyenne tandis que l'indice *tot* fait référence au système "total", couche fluide plus milieu poreux. La figure 3.2 donne une représentation graphique de ΔT_p , ΔT_l and ΔT_{tot} lorsque le liquide et le poreux ont des conductivités thermiques différentes. Les lignes *OP* et *PT* représentent respectivement les profils de température dans le poreux et dans le liquide; leurs pentes sont données respectivement par j/k_p et

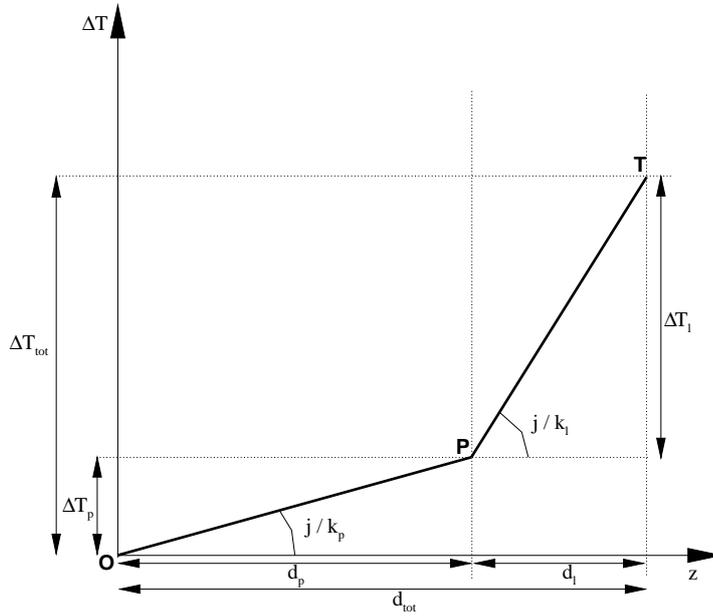


FIG. 3.2 – Schéma de l'état conductif de référence.

j/k_l vu que le flux conductif de référence j est continu entre les deux phases. Tout comme nous l'avons fait pour le problème de Horton-Rogers-Lapwood au chapitre précédent (voir §2.6), nous allons exprimer les variables sous forme adimensionnelle. Nous n'utiliserons qu'un seul ensemble de facteurs d'adimensionalisation lié aux grandeurs "totales"¹ (pour les longueurs et la température) pour le système complet. De cette manière, nous n'accordons pas d'importance prépondérante à aucune des deux couches. Ces facteurs sont les suivants:

$$\text{longueur :} \quad \text{épaisseur totale } d_{tot} = d_l + d_p \quad (3.10)$$

$$\text{température :} \quad \text{différence de température totale } \Delta T_{tot} = \Delta T_l + \Delta T_p \quad (3.11)$$

$$\text{vitesse :} \quad \frac{\kappa_l}{d_{tot}} \quad (3.12)$$

$$\text{temps :} \quad \frac{d_{tot}^2}{\kappa_l} \quad (3.13)$$

Après avoir éliminé les champs de pression, les équations adimensionnelles linéarisées pour les variables perturbées ne contiennent plus que quatre champs inconnus, à savoir les composantes verticales des vitesses dans le fluide pur

1. Ces grandeurs correspondent aux grandeurs directement mesurables par l'expérimentateur.

et dans le poreux ainsi que les champs de température correspondants; ils prennent donc la forme suivante:

$$Pr^{-1}\phi^{-1}\partial_t\nabla^2w_p = Ra\nabla_h^2T_p + \Lambda\nabla^4w_p - Da^{-1}\nabla^2w_p, \quad (3.14)$$

$$S^{-1}\partial_tT_p = \frac{k_{tot}}{k_p}w_p + X^{-1}\nabla^2T_p, \quad (3.15)$$

$$Pr^{-1}\partial_t\nabla^2w_l = \nabla^4w_l + Ra\nabla_h^2T_l, \quad (3.16)$$

$$\partial_tT_l = \nabla^2T_l + \frac{k_{tot}}{k_l}w_l, \quad (3.17)$$

où tous les symboles font maintenant référence aux variables adimensionnelles. Six paramètres sans dimension ont été introduits dans les équations ci-dessus. Certains ont déjà été définis au chapitre 2 et nous en rappelons les définitions

$$Ra = \frac{\rho_0\alpha_Tg\Delta T_{tot}d_{tot}^3}{\mu_l\kappa_l}, \text{ le nombre de Rayleigh}, \quad (3.18)$$

$$Pr = \frac{\mu_l}{\rho_0\kappa_l}, \text{ le nombre de Prandtl}, \quad (3.19)$$

$$Da = \frac{K}{d_{tot}^2}, \text{ le nombre de Darcy}, \quad (3.20)$$

$$\Lambda = \frac{\mu_e}{\mu_l}, \text{ le rapport des viscosités dynamiques}. \quad (3.21)$$

Apparaissent en plus:

$$X = \frac{k_l}{k_p}, \text{ le rapport des conductivités thermiques}, \quad (3.22)$$

$$S = \frac{(\rho c_P)_l}{(\rho c)_p}, \text{ le rapport des capacités calorifiques}. \quad (3.23)$$

A la différence d'autres auteurs [Nield, 1977; Chen and Chen, 1988], nous n'introduisons pas un nombre de Rayleigh poreux ($Ra_p = \alpha_Tg\Delta T_p d_p K / \nu_l \kappa_p$) ni un nombre de Rayleigh liquide ($Ra_l = \alpha_Tg\Delta T_l d_l^3 / \nu_l \kappa_l$). Ceci est dû à notre choix d'un seul ensemble de facteurs d'adimensionalisation en complément du modèle de Brinkman. On peut cependant facilement vérifier qu'il existe les relations suivantes entre Ra , Ra_p et Ra_l :

$$Ra_l = \frac{Ra(1-d)^4}{1-d+dX}, \quad (3.24)$$

$$Ra_p = \frac{Ra d^2 X^2 Da}{1-d+dX}, \quad (3.25)$$

où nous avons défini le rapport d'épaisseurs d :

$$d = d_p/d_{tot}. \quad (3.26)$$

Pour résoudre les équations (3.14)-(3.17), nous avons besoin de douze conditions aux limites qui sont données ci-dessous.

A la frontière inférieure ($z = -d$):

La surface est supposée rigide et parfaitement conductrice de la chaleur, par conséquent

$$w_p = 0, \quad (3.27)$$

$$\partial_z w_p = 0, \quad (3.28)$$

$$T_p = 0. \quad (3.29)$$

A l'interface poreux-liquide ($z = 0$):

Les conditions interfaciales expriment la continuité des vitesses tangentielle et normale, la continuité de la température et du flux de chaleur et finalement la continuité des composantes normale et tangentielle du tenseur des tensions. On obtient ainsi

$$w_p = w_l, \quad (3.30)$$

$$\partial_z w_p = \partial_z w_l, \quad (3.31)$$

$$T_p = T_l, \quad (3.32)$$

$$\partial_z T_p = X \partial_z T_l, \quad (3.33)$$

$$\Lambda (\partial_z^3 w_p + 3 \nabla_h^2 \partial_z w_p) - \frac{1}{Da} \partial_z w_p = \partial_z^3 w_l + 3 \nabla_h^2 \partial_z w_l, \quad (3.34)$$

$$\nabla_h^2 w_l - \partial_z^2 w_l = \Lambda (\nabla_h^2 w_p - \partial_z^2 w_p). \quad (3.35)$$

Il convient de remarquer que les conditions aux limites (3.31) et (3.35) sont nécessaires suite à l'utilisation du modèle de Brinkman. Si nous avions plutôt utilisé le modèle de Darcy, nous aurions dû employer la condition de Beavers-Joseph [Beavers and Joseph, 1967]. Dans l'hypothèse d'un écoulement unidirectionnel selon x , Beavers et Joseph ont suggéré la condition empirique suivante

$$\partial_z u_f = \frac{\alpha_{BJ}}{\sqrt{K}} (u_l - u_p), \quad (3.36)$$

où u_l est la vitesse dans le fluide et u_p la vitesse de filtration dans le milieu poreux (voir figure 3.3). Les grandeurs u_l et $\partial_z u_l$ sont évaluées en $z = 0^+$ alors que u_p est évalué à une courte distance du plan $z = 0$ dans le milieu poreux. La quantité α_{BJ} est un nombre sans dimension, indépendant de la viscosité du fluide mais fonction des caractéristiques physiques du milieu poreux. Une étude comparative des conditions interfaciales entre un fluide et un milieu poreux a été réalisée par Alazmi et Vafai [Alazmi and Vafai, 2001] tandis que Vafai et Kim ont dérivé une solution exacte décrivant l'écoulement au voisinage de l'interface et analysé l'influence du nombre de Darcy

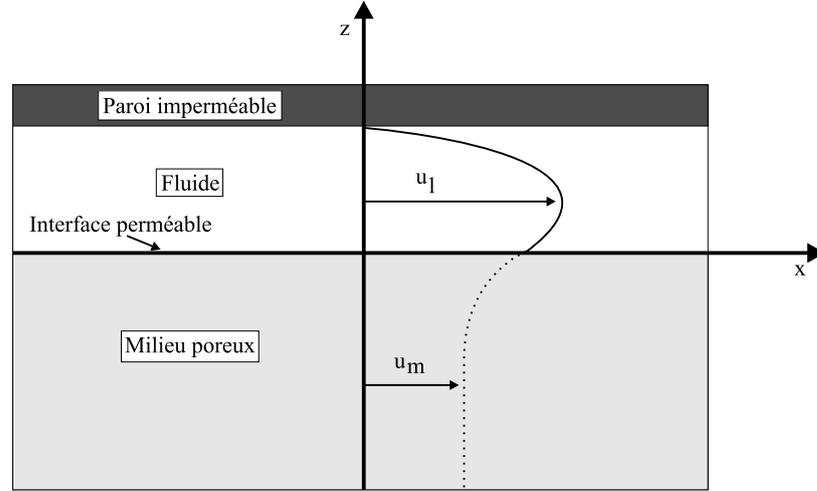


FIG. 3.3 – Profil de vitesse pour un écoulement unidirectionnel dans un fluide limité par une paroi imperméable et un milieu poreux.

[Vafai and Kim, 1990].

A la frontière supérieure ($z = 1 - d$):

Dans l'approche linéaire, la validité de l'approximation de Boussinesq implique que les déformations de surface sont d'ordre supérieur et donc négligeables [Davis and Segel, 1968; Nield, 1964], par conséquent on a, quelque soit le type de conditions aux frontières

$$w_l = 0. \quad (3.37)$$

Le transfert de chaleur est supposé régi par la loi de refroidissement de Newton

$$\partial_z T_l + Bi T_l = 0, \quad (3.38)$$

où Bi est le nombre de Biot. La surface supérieure est soit rigide, ce qui implique que

$$\partial_z w_l = 0, \quad (3.39)$$

ou bien libre avec un effet Marangoni, dans ce cas l'équation (3.39) est remplacée par

$$\partial_z^2 w_l - Ma \nabla_h^2 T_l = 0, \quad (3.40)$$

où

$$Ma = \frac{\gamma \Delta T_{tot} d_{tot}}{\nu_l \kappa_l}, \quad (3.41)$$

est le nombre de Marangoni [Pearson, 1958].

3.4 Décomposition en modes normaux

En accord avec la technique des modes normaux (voir §2.7), nous appliquons la séparation des variables aux champs de vitesse verticale et de température

$$\begin{pmatrix} w_j \\ T_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_j(z) \\ \Theta_j(z) \end{pmatrix} \exp[i(a_x x + a_y y) + st] \quad (3.42)$$

pour chacune des couches j ($j = l, p$). Les amplitudes $W_j(z)$ et $\Theta_j(z)$ représentent la variation suivant z de la vitesse verticale et de la température dans chaque couche, a_x et a_y sont les nombres d'onde adimensionnels selon les directions x et y , respectivement. Enfin, s est le taux de croissance complexe des perturbations.

L'utilisation du modèle de Brinkman associée à notre choix de facteurs d'adimensionalisation nous suggère d'introduire deux nouveaux nombres sans dimension. Ces deux paramètres ont été proposés la première fois par Parmentier *et al.* [Parmentier et al., 1996] et Regnier *et al.* [Regnier et al., 1997] pour étudier les instabilités thermocapillaires dans une couche de fluide. L'extension de leurs définitions à la situation qui nous préoccupe paraît évidente si l'on se rappelle que les équations du modèle de Brinkman sont similaires à celles que nous aurions pour la convection dans une simple couche de fluide. On définit ainsi

$$\lambda = Ra/(Ra)_0 + Ma/(Ma)_0, \quad (3.43)$$

$$\alpha = \frac{Ra/(Ra)_0}{Ra/(Ra)_0 + Ma/(Ma)_0}, \quad (3.44)$$

où $(Ra)_0$ et $(Ma)_0$ sont deux constantes arbitraires. Dans ce travail, $(Ra)_0$ et $(Ma)_0$ seront fixés respectivement au nombre de Rayleigh critique correspondant à l'instabilité de Rayleigh pure ($Ma = 0$) et au nombre de Marangoni critique correspondant à l'instabilité de Marangoni pure ($Ra = 0$) dans une couche de fluide. L'intérêt de ces nouveaux paramètres réside dans le fait que α est une mesure de l'importance relative des effets gravifiques par rapport aux effets capillaires et est indépendant de la différence de température. En effet, l'instabilité de Rayleigh ($Ma = 0$) est caractérisée par une valeur de $\alpha = 1$ alors que l'instabilité de Marangoni ($Ra = 0$) est caractérisée par une valeur de $\alpha = 0$, le coefficient α est appelé *taux de gravité*. La quantité λ est quant à elle proportionnelle à la différence de température totale au travers du système et est appelée *taux de chauffage*. Ces deux nouveaux paramètres sont plus physiques qu'il n'y paraît vu que la différence de température appliquée et l'épaisseur des couches sont les seuls paramètres que l'expérimentateur peut aisément contrôler.

En supposant que le principe d'échange de stabilité est valide (c'est-à-dire que s vaut zéro à la stabilité marginale) et en introduisant les développements

(3.42) ainsi que les définitions (3.43) et (3.44) dans les équations (3.14)-(3.17), nous obtenons:

$$\Lambda (D^2 - a^2)^2 W_p = Da^{-1} (D^2 - a^2) W_p + a^2 (Ra)_0 \alpha \lambda \Theta_p, \quad (3.45)$$

$$(D^2 - a^2) \Theta_p = -X \frac{k_{tot}}{k_p} W_p, \quad (3.46)$$

$$(D^2 - a^2)^2 W_l = a^2 (Ra)_0 \alpha \lambda \Theta_l, \quad (3.47)$$

$$(D^2 - a^2) \Theta_l = -\frac{k_{tot}}{k_l} W_l, \quad (3.48)$$

où D signifie $\frac{d}{dz}$. Les quatre équations ci-dessus donnent donc lieu à un système du douzième ordre auquel il convient d'adjoindre les conditions aux limites suivantes.

En $z = -d$, on a

$$W_p = 0, \quad (3.49)$$

$$DW_p = 0, \quad (3.50)$$

$$\Theta_p = 0. \quad (3.51)$$

En $z = 0$:

$$W_l = W_p, \quad (3.52)$$

$$DW_l = DW_p, \quad (3.53)$$

$$\Theta_l = \Theta_p, \quad (3.54)$$

$$XD\Theta_l = D\Theta_p, \quad (3.55)$$

$$\Lambda (D^3 W_p - 3a^2 DW_p) - \frac{1}{Da} DW_p = D^3 W_l - 3a^2 DW_l, \quad (3.56)$$

$$(D^2 + a^2) W_l = \Lambda (D^2 + a^2) W_p. \quad (3.57)$$

Finalement, en $z = 1 - d$:

$$W_l = 0, \quad (3.58)$$

$$D\Theta_l + Bi\Theta_l = 0, \quad (3.59)$$

$$D^2 W_l + a^2 (Ma)_0 (1 - \alpha) \lambda \Theta_l = 0. \quad (3.60)$$

Il est intéressant de noter que les nombres sans dimension Pr et S ont disparu des équations. Ceci est une conséquence de l'hypothèse $s = 0$ d'échange de stabilité sur la courbe de stabilité marginale.

3.5 Analyse des résultats linéaires

3.5.1 Résultats analytiques pour des frontières isolantes

Nous avons mentionné dans l'introduction de ce chapitre que Nield [Nield, 1977] fût le premier à étudier la stabilité linéaire du système bicouche poreux-liquide délimité par deux frontières isolantes. Ces conditions aux limites permettent de supposer un nombre d'onde critique nul, ce qui permet d'établir analytiquement le critère de stabilité lorsque la frontière inférieure est imperméable et la frontière supérieure libre. La méthode suivie par Nield est la suivante: développer les champs de température et de vitesse verticale ainsi que les nombres de Rayleigh et de Marangoni en série de puissance de a^2 puis résoudre le problème à l'ordre a^0 puis à l'ordre a^2 afin d'obtenir facilement la condition de compatibilité. Nous allons étendre la méthode de Nield à notre système bicouche décrit par le modèle de Brinkman en vue d'obtenir une relation donnant le lieu des nombres de Rayleigh critiques Ra_c et des nombre de Marangoni critiques Ma_c . Cette relation prend la forme canonique suivante

$$\begin{aligned} Ra_c f_1(Da, X, d, \Lambda) + Ma_c f_2(Da, X, d, \Lambda) \\ = f_3(Da, X, d, \Lambda), \end{aligned} \quad (3.61)$$

où f_1 , f_2 et f_3 sont des fonctions compliquées des différents paramètres du système. Dans le cas particulier $X = 1$, Vasseur [Vasseur et al., 1989] a utilisé l'hypothèse d'écoulement parallèle pour obtenir une expression analogue à (3.61). En effet, à un nombre d'onde critique nul correspond une longueur d'onde critique infinie. La cellule occupe donc tout l'intervalle entre les bords latéraux et l'écoulement a lieu uniquement dans le plan horizontal. Il n'y a pas de vitesse verticale et il est donc légitime de supposer un écoulement parallèle. Les méthodes de Nield et de Vasseur donnent les mêmes valeurs de f_1 , f_2 et f_3 pour différents nombres de Darcy et différents rapports d'épaisseurs dans le cas de frontières isolantes. Il nous a paru intéressant de vérifier la relation (3.61) pour d'autres situations particulières.

3.5.1.1 Fluide visqueux compris entre une frontière rigide et une libre.

En passant à la limite pour $d \rightarrow 0$ et $Da \rightarrow 0$, l'équation (3.61) devient

$$\frac{Ra_c}{320} + \frac{Ma_c}{48} = 1, \quad (3.62)$$

soit le résultat obtenu par Nield [Nield, 1964] pour le modèle de Darcy.

3.5.1.2 Milieu poreux avec une surface supérieure libre

Nous passons maintenant à la limite pour $d \rightarrow 1$, $Ma \rightarrow 0$ et $\Lambda \rightarrow 1$. L'équation (3.61) s'écrit alors

$$Ra_p^c = \frac{12 \left[-\cosh\left(\frac{1}{\sqrt{Da}}\right) + \sqrt{Da} \sinh\left(\frac{1}{\sqrt{Da}}\right) \right]}{D_0 + D_{1/2}\sqrt{Da} + 12 Da + D_2 Da^2 + D_{3/2}Da^{\frac{3}{2}}} \quad (3.63)$$

où Ra_p^c est la valeur critique du nombre de Rayleigh poreux défini par la relation (3.24) et où D_0 , $D_{1/2}$, D_2 et $D_{3/2}$ sont des fonctions du nombre de Darcy données par

$$D_0 = -\cosh\left(\frac{1}{\sqrt{Da}}\right), \quad (3.64)$$

$$D_{1/2} = 4 \sinh\left(\frac{1}{\sqrt{Da}}\right), \quad (3.65)$$

$$D_2 = 24 \left[\cosh\left(\frac{1}{\sqrt{Da}}\right) - 1 \right], \quad (3.66)$$

$$D_{3/2} = -24 \sinh\left(\frac{1}{\sqrt{Da}}\right). \quad (3.67)$$

Lorsque Ra_p est fini et que $Da \rightarrow 0$ dans (3.63), nous obtenons

$$Ra_p^c = 12 \quad (3.68)$$

ce qui correspond bien à la valeur critique d'un milieu poreux de Darcy pur² compris entre deux plaques rigides [Nield, 1977]. Nous aurions pu généraliser cette conclusion pour n'importe quelle valeur de X à partir de la relation (3.61).

3.5.2 Validation du code numérique

Dans un premier temps, nous allons vérifier notre code numérique pour le modèle de Darcy en comparant les conditions critiques obtenues avec celles de Chen et Chen [Chen and Chen, 1988]. Dans ce but, nous introduisons un nombre d'onde poreux a_p et un nombre de Rayleigh poreux Ra_p déjà défini dans la relation (3.24). Étant donné que les solutions dans les deux couches doivent obéir aux conditions (3.52)-(3.57) à l'interface, les cellules de convection doivent être continues le long de l'interface. Le nombre d'onde adimensionnel doit donc être identique dans le fluide et dans le milieu poreux.

2. Il peut paraître surprenant de continuer à parler de milieu poreux alors que nous venons de passer à la limite pour $Da \rightarrow 0$. Cependant, ce passage à la limite est effectué partout sauf dans Ra_p qui doit rester fini et traduit bien la nature poreuse du milieu.

d	a_p^c		Ra_p^c	
	Cette étude	Chen & Chen	Cette étude	Chen & Chen
0.909	2.14	2.14	19.12	19.09
0.901	23.4	23.41	14.74	14.80
0.885	20.03	20.05	7.78	7.53
0.752	8.28	8.29	0.21	0.21

TAB. 3.1 – Comparaison des valeurs critiques avec celles de [Chen and Chen, 1988] pour $Da^{Chen} = 4 \cdot 10^{-6}$ et $X = 0.7$.

On peut donc écrire la relation suivante entre le nombre d'onde poreux a_p , le nombre d'onde liquide a_l et le nombre d'onde global a :

$$\frac{a_l}{d_l} = \frac{a_p}{d_p} = \frac{a}{d_{tot}}. \quad (3.69)$$

Dans Chen et Chen [Chen and Chen, 1988], la frontière supérieure du fluide est rigide et parfaitement conductrice de la chaleur, le milieu poreux est décrit par la loi de Darcy et la condition de glissement de Beavers-Joseph est appliquée à l'interface. Pour résoudre le problème aux valeurs propres, nous utilisons une méthode spectrale de type Tau-Chebyshev (voir §2.8) basée sur un développement en série de polynômes de Chebyshev des fonctions propres $W_l(z)$, $W_p(z)$, $\Theta_l(z)$ et $\Theta_p(z)$. Nous avons repris dans le tableau 3.1 la comparaison de nos résultats avec ceux de Chen et Chen [Chen and Chen, 1988] pour $Da^{Chen} = 4 \cdot 10^{-6}$ ($Da^{Chen} = Da/d^2$) et $X = 0.7$.

Les courbes de stabilité marginale montrant l'évolution de λ en fonction du nombre d'onde a en utilisant le modèle de Brinkman (avec $\Lambda = 1$) sont représentées pour différentes valeurs du rapport d'épaisseurs d sur la figure 3.4. Les courbes obtenues sont qualitativement comparables à celles de Chen et Chen [Chen and Chen, 1988] avec le modèle de Darcy. Pour de grandes valeurs du rapport d'épaisseurs supérieures à 0.80, les courbes sont bimodales et présentent deux minima relatifs; la branche de petits nombres d'onde est la plus instable pour de grandes valeurs de d (≥ 0.90). Pour de plus petites valeurs du rapport d'épaisseurs, c'est la branche de grands nombres d'onde qui devient la plus instable. On observe aussi sur la figure 3.4 que l'instabilité de petit nombre d'onde disparaît pour de faibles rapports d'épaisseurs. Il existe donc une valeur critique du rapport d'épaisseurs d_c comprise entre 0.85 et 0.90 où le régime d'instabilité change de nature (voir figure 3.4). Afin de mieux comprendre la cause de ce changement brusque de mode instable, nous avons représenté sur la figure 3.5 la structure des lignes de courant correspondant respectivement au mode de grand nombre d'onde ($d < d_c$) et au mode de petit nombre d'onde ($d > d_c$). On constate que la convection est essentiellement située dans le poreux pour le mode de petit nombre d'onde mais que les cellules s'étendent sur toute la hauteur du système. Dans le cas

du mode de grand nombre d'onde, la convection reste confinée dans la couche de fluide. Le système bicouche se ramène dans ce cas au problème classique de Rayleigh dans un fluide pur. Le milieu poreux se comporte comme une paroi imperméable. Par conséquent, le changement de mode instable provient du basculement d'une circulation centrée sur le poreux à une circulation centrée sur le fluide. L'ensemble de ces résultats confirme que les conclusions de Chen et Chen [Chen and Chen, 1988] demeurent qualitativement valides lorsqu'on substitue le modèle de Brinkman à celui de Darcy.

Il peut paraître surprenant que toute convection soit absente dans la matrice poreuse lorsque $d < d_c$ comme semble le montrer les fonctions de courant de la figure 3.5. En effet, les conditions à l'interface entre le milieu poreux et le fluide impliquent la continuité des composantes tangentielle et normale de la vitesse. Il en résulte que du mouvement dans le fluide entraîne immédiatement du mouvement dans le milieu poreux. Nous avons représenté sur la figure 3.6 les profils de vitesse verticale correspondant aux mêmes valeurs du rapports d'épaisseurs qu'à la figure 3.5. On constate ainsi que pour $d = 0.7$ que la vitesse du fluide au sein de la matrice poreuse est non nulle au voisinage de l'interface (voir zoom dans la figure 3.6) mais tend rapidement vers zéro; le maximum de vitesse se situant dans la couche de fluide. Lorsque $d = 0.9$, la vitesse verticale est finie dans les deux couches et le maximum de vitesse est proche de l'interface mais dans le milieu poreux. Enfin, il existe une différence fondamentale entre le système bicouche poreux-liquide et un système bicouche liquide-liquide. En effet, en l'absence de déformations de l'interface, il convient d'imposer une vitesse verticale nulle à l'interface des deux fluides. Cette condition permet d'observer une superposition de cellule de convection: une cellule dans chacune des couches. Nos conditions à l'interface étant de nature différente (continuité de la vitesse), il en découle que nous n'observerons jamais simultanément de cellule dans le fluide et dans le milieu poreux

3.5.3 Influence de la viscosité effective

Nous avons déjà montré dans le chapitre 2 que le modèle de Brinkman introduisait une viscosité effective μ_e , notée Λ sous forme adimensionnelle. Une grande majorité des travaux utilisant le modèle de Brinkman considère que $\mu_e = \mu_l$ [Lundgren, 1972; Neale and Nader, 1974] ce qui revient à dire que $\Lambda = 1$; mais récemment Givler et Altobelli [Givler and Altobelli, 1994] ont déterminé expérimentalement que $\Lambda = 7.5$ pour un cylindre de mousse de grande porosité et par un calcul d'erreur, ils ont montré que cette valeur était bornée par les limites $5.1 \leq \Lambda \leq 10.9$. Cette différence dans les valeurs possibles de Λ nous a suggéré d'examiner l'influence de ce paramètre sur les valeurs critiques. La figure 3.7 montre les variations de a_c et de λ_c en fonction du paramètre Λ . De manière globale, Λ n'a qu'un effet mineur sur les valeurs du nombre d'onde critique a_c qui vont de 27.6 (pour $\Lambda = 1$) à 28.4 (pour

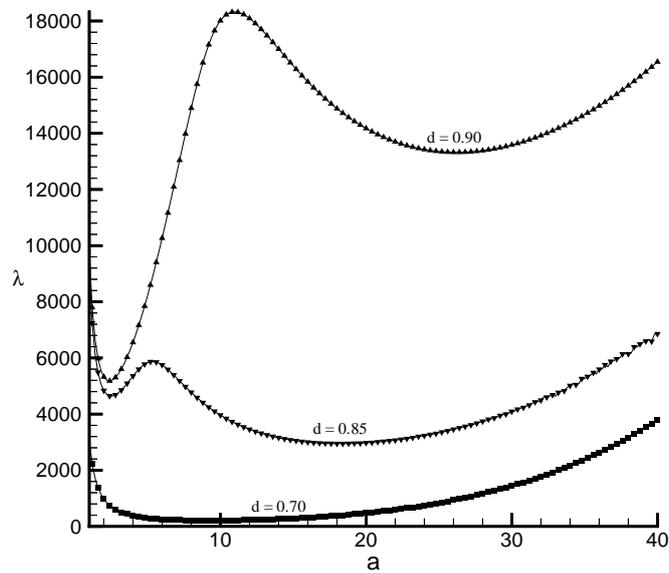


FIG. 3.4 – Courbes de stabilité marginale obtenues par le modèle de Brinkman pour $\Lambda = 1$, $Da = 10^{-5}$, $X = 0.7$ et $Bi = \infty$.

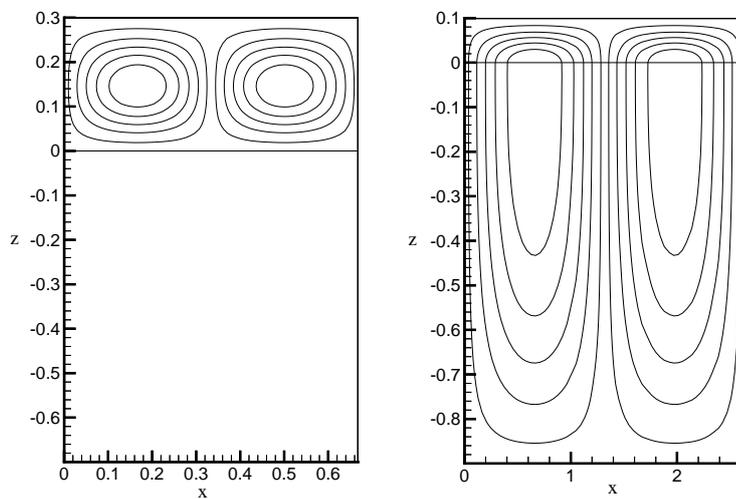


FIG. 3.5 – Structures des lignes de courant pour le modèle de Brinkman. $Da = 10^{-5}$, $X = 0.7$, $Bi = \infty$, $d = 0.7$ (sur la gauche) et $d = 0.9$ (sur la droite).

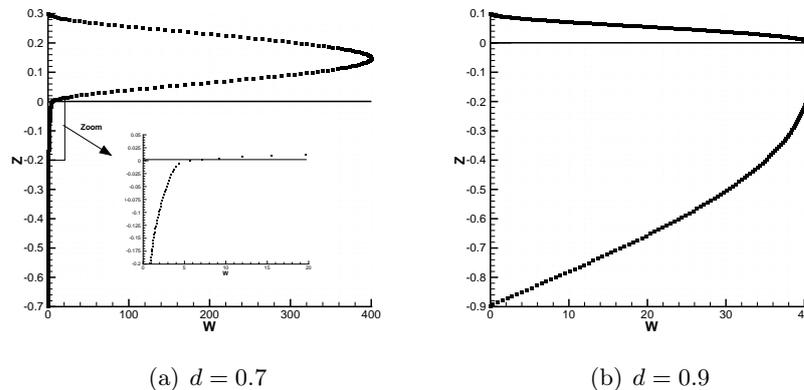


FIG. 3.6 – Profils de vitesse verticale pour $Da = 10^{-5}$, $X = 0.7$ et $Bi = \infty$.

$\Lambda = 20$). Son influence est par contre plus sensible sur λ_c et il est intéressant de noter que les valeurs critiques demeurent approximativement constantes pour $\Lambda > 10$. Par souci de simplicité, nous choisirons cependant $\Lambda = 1$ pour la suite étant donné l'influence relativement faible de ce paramètre sur les valeurs critiques.

3.5.4 Influence du nombre de Darcy

Nous avons mentionné plus haut que les courbes neutres étaient généralement bimodales et qu'un changement de mode était observé si l'on variait le rapport d'épaisseurs. Ce phénomène a été décrit par Chen et Chen [Chen and Chen, 1988] la première fois pour une valeur unique de leur nombre de Darcy, soit $Da^{Chen} = 9 \cdot 10^{-6}$. Afin de compléter leur analyse, nous avons représenté sur la figure 3.8 l'effet du rapport d'épaisseurs sur le nombre d'onde critique pour quatre valeurs du nombre de Darcy. Pour $Da = 10^{-6}$, nous observons un saut brusque du nombre d'onde critique autour de $d = 0.93$ d'un mode de grand nombre d'onde à un mode de petit nombre d'onde; il n'y a cependant aucun saut dans les autres courbes. On remarque aussi que la branche de petit nombre d'onde est absente pour les faibles valeurs de Da correspondant à un milieu poreux peu perméable. De fait, le milieu poreux atténue fortement la pénétration du fluide avec pour conséquence que la circulation reste confinée dans le fluide (mode de grand nombre d'onde). Pour les grandes valeurs de Da , la branche de grand nombre d'onde est absente. Ce résultat était prévisible car le milieu poreux très perméable n'amortit plus le mouvement du fluide et la convection s'étend à toute la cavité. Le système bicouche se comporte alors plus comme un fluide avec un nombre d'onde critique $a_c \simeq 3.1$ qui n'est rien d'autre que la valeur critique obtenue pour un fluide pur délimité par deux plaques rigides isothermes.

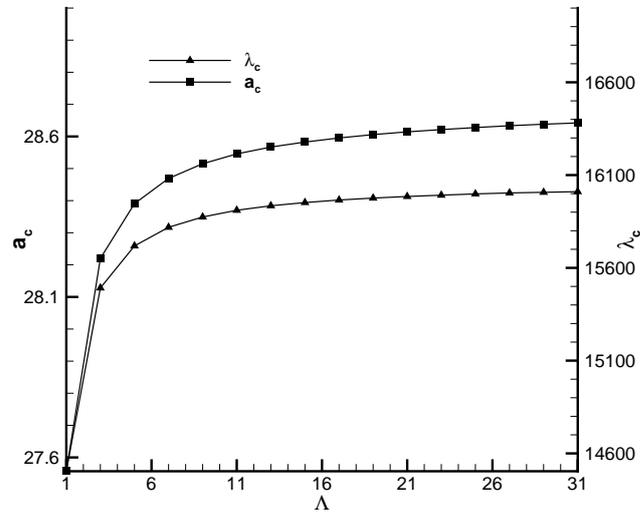


FIG. 3.7 – Effet du rapport de viscosités Λ sur le nombre d'onde critique a_c et sur le taux de chauffage critique λ_c ($Da = 10^{-6}$, $X = 0.7$, $Bi = \infty$ et $d = 0.9$).

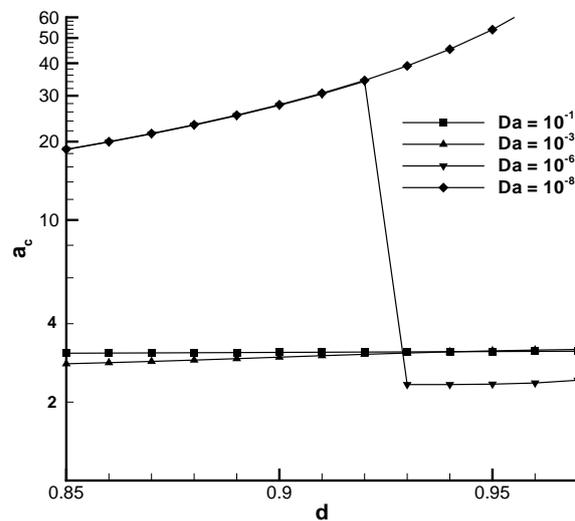


FIG. 3.8 – Effet du nombre de Darcy Da sur les valeurs du nombre d'onde critique en fonction de d ($X = 0.7$ et $Bi = \infty$).

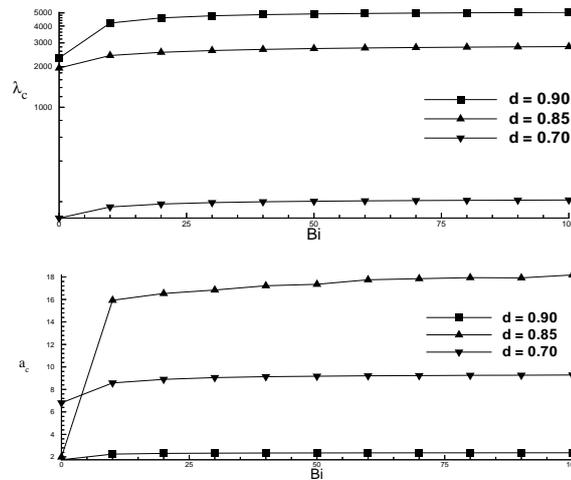


FIG. 3.9 – Effet de Bi sur a_c et λ_c pour une instabilité purement gravifique ($\alpha = 1$, $X = 0.7$ et $Da = 10^{-5}$).

3.5.5 Influence des conditions aux limites supérieures sur les valeurs critiques

Toutes les études antérieures de notre configuration bicouche poreux-liquide se sont limitées à des conditions aux limites rigides isolantes ou rigides et parfaitement conductrices de la chaleur. Nous avons généralisé ces résultats au cas où la frontière supérieure est libre avec un effet Marangoni. De plus, nous utilisons une condition thermique plus générale sous la forme de la loi de refroidissement de Newton (condition de Biot).

L'effet du nombre de Biot sur les valeurs critiques est montré sur la figure 3.9 pour une instabilité purement gravifique ($\alpha = 1$) et pour plusieurs valeurs du rapport d'épaisseurs. Nous voyons ainsi qu'une variation du nombre de Biot de 0 à 10 affecte de manière significative l'ordre de grandeur de a_c et de λ_c ; pour des valeurs plus élevées du nombre de Biot, le rôle de Bi devient minime. Ce comportement n'est pas surprenant car la nature de la frontière change brutalement d'une surface tout à fait isolante à une surface partiellement conductrice. De plus, il est évident que lorsqu'on augmente le nombre de Biot, les perturbations de température croissent plus difficilement avec pour conséquence d'augmenter le gradient de température critique. Lorsque le nombre de Biot devient grand, une quantité toujours croissante d'énergie est nécessaire pour induire le mouvement et il est donc naturel que la longueur critique des cellules convectives diminue. La figure 3.9 nous donne donc une justification *a posteriori* de l'utilisation d'un nombre de Biot infini dans les simulations précédentes étant donné que les valeurs critiques sont presque indépendantes de Bi .

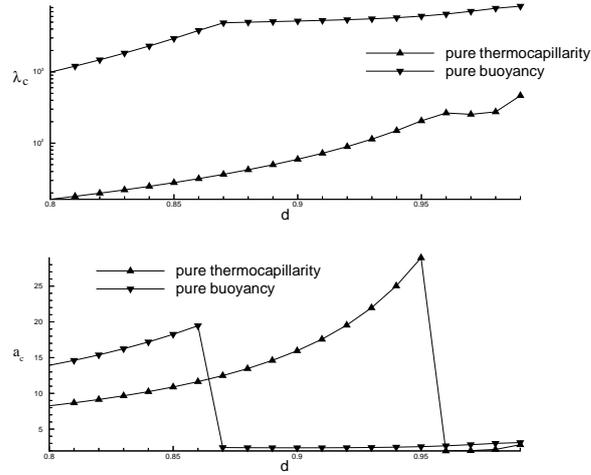


FIG. 3.10 – *Effet de α sur a_c et λ_c ($Da = 10^{-5}$ and $X = 0.7$). $\alpha = 0$: instabilité purement capillaire, $\alpha = 1$: instabilité purement gravifique.*

3.5.6 Influence de la condition de Marangoni

Nous avons représenté sur la figure 3.10, l'évolution avec le rapport d'épaisseurs des valeurs critiques a_c et λ_c pour deux valeurs du taux de gravité α : $\alpha = 1$ correspondant à une instabilité purement gravifique et $\alpha = 0$ correspondant à une instabilité purement capillaire. On observe tout d'abord que les phénomènes capillaires sont plus déstabilisants que les phénomènes gravifiques étant donné que λ_c est plus grand pour $\alpha = 1$ que pour $\alpha = 0$. En effet, pour un même ΔT , $\lambda_c \sim d_{tot}^3$ lorsque $\alpha = 1$ alors que $\lambda_c \sim d_{tot}$ lorsque $\alpha = 0$. D'autre part, le rapport d'épaisseurs critique correspondant à la transition d'une circulation centrée sur le liquide à une circulation centrée sur le poreux est beaucoup plus élevé pour $\alpha = 0$ que pour $\alpha = 1$. Par conséquent, l'apparition de larges cellules s'étendant sur toute la hauteur de la cavité est limitée aux très petites épaisseurs de fluide dans le cas d'une instabilité purement capillaire. Ce résultat est intéressant car il donne un moyen simple d'arrêter toute convection indésirable dans le milieu poreux. Enfin, les cellules de convection sont plus larges pour $\alpha = 0$ que pour $\alpha = 1$ étant donné que le nombre d'onde correspondant est plus petit. Ces différences de tailles des cellules tendent à diminuer pour le mode de grande longueur d'onde, c'est-à-dire pour $a_c \rightarrow 0$.

3.6 Simulations numériques directes du problème non-linéaire

Dans cette section, nous allons présenter quelques simulations numériques directes des équations non-linéaires (3.6)-(3.8). Ces simulations sont réalisées à l'aide du code de calcul AQUILON. AQUILON est un logiciel développé au laboratoire MASTER de l'École Nationale Supérieure de Chimie Physique de Bordeaux³ et qui utilise la méthode des volumes finis pour résoudre les équations de Navier-Stokes, de continuité et de l'énergie notamment dans des configurations très variées qui vont des problèmes de convection naturelle, aux écoulements autour d'obstacles en passant par les problèmes à surface libre et les milieux poreux.

Comme il n'est plus possible de travailler avec un domaine d'extension infinie, nous allons effectuer les simulations dans une boîte rectangulaire de largeur égale à la longueur d'onde critique de l'instabilité. Les surfaces inférieure et supérieure sont rigides et isothermes alors que sur les surfaces latérales, on impose un flux de chaleur normal nul et une condition de symétrie sur la vitesse. Cette condition implique une condition de Neuman sur la vitesse horizontale et une vitesse verticale nulle. Nous allons simuler la convection naturelle dans un milieu poreux fictif caractérisé par les nombres sans dimension

$$Da = 10^{-5}, \quad (3.70)$$

$$X = 1.0, \quad (3.71)$$

$$S = 1.0. \quad (3.72)$$

Il est saturé par de l'eau et nous prenons de plus $\Lambda = 1$.

L'intérêt de l'utilisation d'AQUILON est de pouvoir examiner l'évolution du système bicouche au-delà du seuil de convection linéaire. Nous analyserons ainsi la structure de l'écoulement pour plusieurs valeurs de l'écart au seuil

$$\epsilon = \frac{\Delta T - \Delta T_c}{\Delta T_c}, \quad (3.73)$$

et pour plusieurs valeurs du rapport d'épaisseurs $d = \frac{d_p}{d_{tot}}$.

3.6.1 Surface supérieure rigide

Pour un rapport d'épaisseurs $d = 0.9$, le problème linéaire donne les valeurs critiques suivantes

$$a_c = 2.43, \quad (3.74)$$

$$Ra_c = 2.56 \cdot 10^6, \quad (3.75)$$

3. <http://www.lmaster.u-bordeaux.fr>

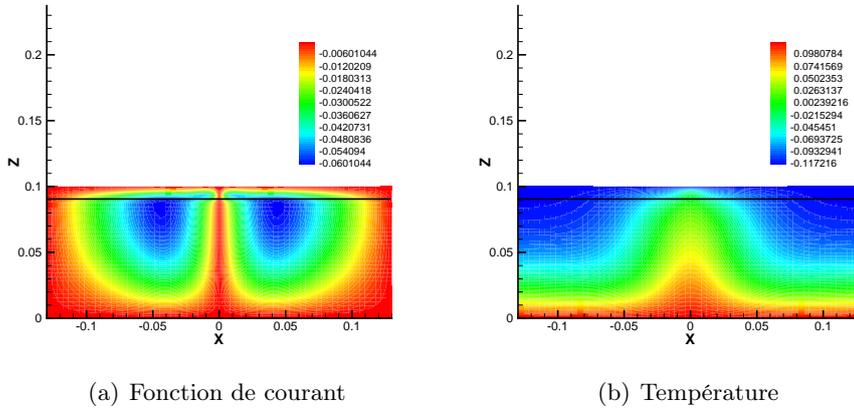


FIG. 3.11 – *Fonction de courant et profil de température pour $d = 0.9$, $\epsilon = 1$ et une surface supérieure rigide.*

ce qui correspond à un écart de température critique $\Delta T_c = 0.123^\circ$ pour une couche d'épaisseur totale $d_{tot} = 10 \text{ cm}$. La théorie linéaire prédit ainsi que le mode instable sera celui de grande longueur d'onde et par conséquent une circulation centrée sur le milieu poreux. Nous avons représenté sur les figures 3.11-3.13 les isothermes et la fonction de courant pour $\epsilon = 1$, $\epsilon = 5$, $\epsilon = 10$. On observe ainsi que la convection est toujours située dans le milieu poreux et que les cellules convectives, qui sont au nombre de deux⁴, s'étendent sur la totalité du bicouche. De plus, on constate qu'en s'éloignant du seuil de convection linéaire, la convection s'intensifie ainsi que les gradients de température. Les résultats linéaires sont donc confirmés par les simulations numériques loin du seuil.

Nous avons reproduit le même schéma de résolution pour $d = 0.8$. Dans ce cas, le mode de petite longueur d'onde est maintenant le plus instable et les valeurs critiques sont

$$a_c = 13.58, \quad (3.76)$$

$$Ra_c = 8.45 \cdot 10^5. \quad (3.77)$$

Les cellules devraient être confinées dans la mince couche de fluide surmontant le milieu poreux. Les figures 3.14-3.16 confirment bien les résultats linéaires. Le milieu poreux se comporte maintenant comme une paroi imperméable dans laquelle le fluide capturé demeure au repos, indépendamment de l'écart au seuil.

Des simulations analogues mais avec une condition de Marangoni ont été réalisées récemment par Saghir [Saghir et al., 2002] et confirment notre étude

4. Rappelons en effet que la largeur du système est égale à une longueur d'onde

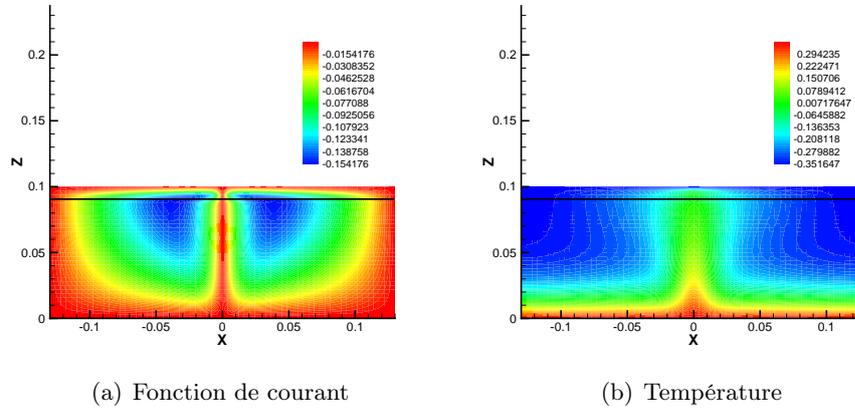


FIG. 3.12 – *Fonction de courant et profil de température pour $d = 0.9$, $\epsilon = 5$ et une surface supérieure rigide.*

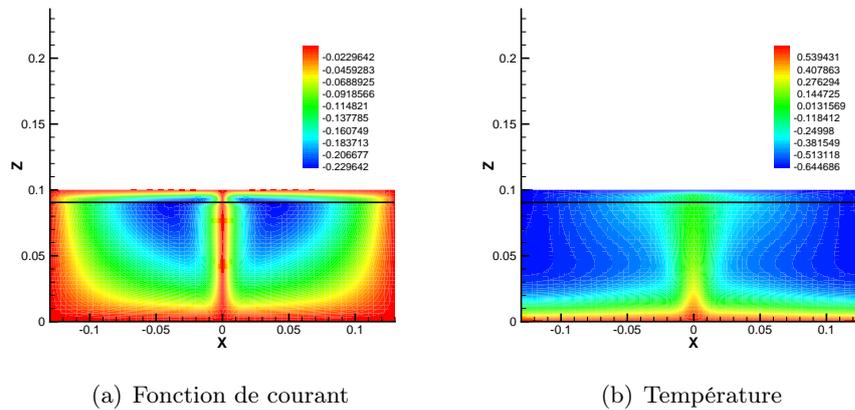


FIG. 3.13 – *Fonction de courant et profil de température pour $d = 0.9$, $\epsilon = 10$ et une surface supérieure rigide.*

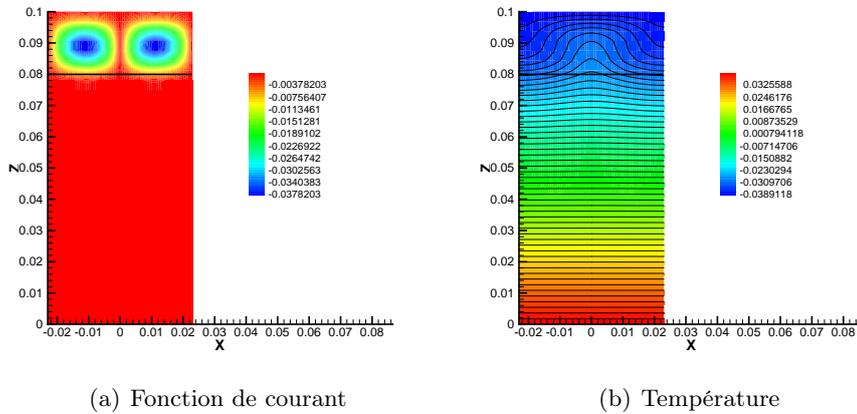


FIG. 3.14 – *Fonction de courant et profil de température pour $d = 0.8$, $\epsilon = 1$ et une surface supérieure rigide.*

linéaire. La convection reste confinée dans la couche de fluide à moins que le rapport d'épaisseurs ne soit très élevé et par conséquent que la matrice poreuse occupe la quasi-totalité du système bicouche.

3.7 Résumé

Au problème classique de Horton-Rogers-Lapwood d'un milieu poreux saturé chauffé par le bas, nous avons superposé une couche de fluide Newtonien dont la surface supérieure est soit rigide, soit libre. La matrice poreuse est décrite par le modèle de Brinkman alors que le fluide est régi par les équations de Navier-Stokes. A l'interface, les composantes normale et tangentielle de la vitesse sont continues, ce qui autorise des cellules de convection s'étendant sur toute la hauteur du bicouche.

Nous avons effectué une étude de stabilité linéaire pour examiner l'influence du remplacement du modèle de Darcy par le modèle de Brinkman. Nous avons pu montrer que les deux modèles donnaient qualitativement les mêmes résultats (*i.e.* la même allure des courbes neutres) et que la viscosité effective introduite dans le modèle de Brinkman n'affectait pas de manière significative les valeurs critiques.

Les courbes neutres sont bimodales (c'est-à-dire qu'elles présentent deux minima locaux) pour les grandes valeurs du rapport d'épaisseurs et l'on observe un saut brusque du nombre d'onde critique lorsque le rapport d'épaisseurs dépasse une valeur critique comme l'avaient déjà suggéré Chen et Chen [Chen and Chen, 1988] en utilisant un modèle de Darcy. Afin d'examiner l'origine de ce rapport d'épaisseurs critique, nous avons représenté les fonctions de courant de part et d'autre du saut. Nous avons montré que l'on assistait

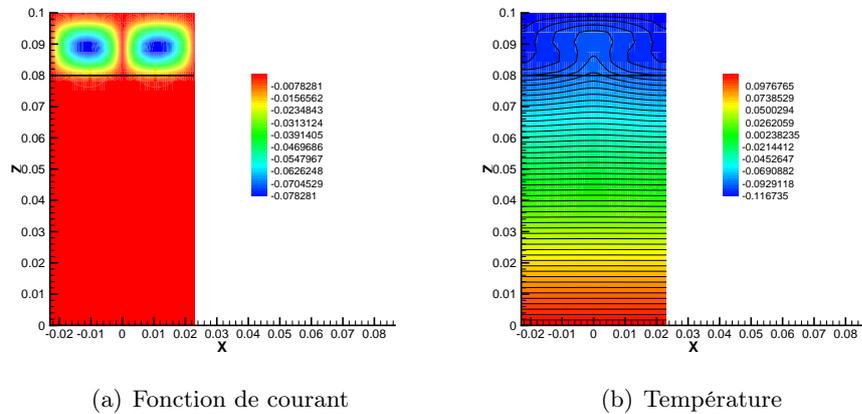


FIG. 3.15 – *Fonction de courant et profil de température pour $d = 0.8$, $\epsilon = 5$ et une surface supérieure rigide.*

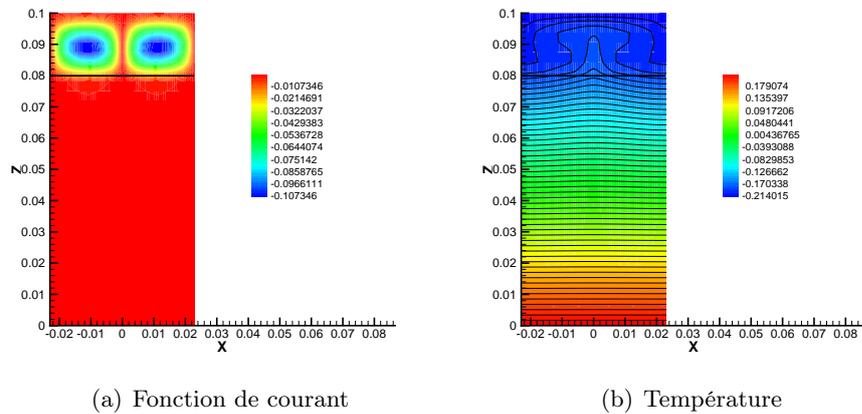


FIG. 3.16 – *Fonction de courant et profil de température pour $d = 0.8$, $\epsilon = 10$ et une surface supérieure rigide.*

au passage d'une circulation centrée sur la couche de fluide à une circulation centrée sur le milieu poreux mais avec des cellules de convection s'étendant sur la totalité du système bicouche.

Nous avons examiné l'influence du nombre de Darcy sur les courbes neutres et nous en avons conclu que le rapport d'épaisseurs critique tendait à disparaître aussi bien pour les très faibles que pour les très grands nombres de Darcy. Ensuite, nous avons étudié l'impact des conditions aux limites à la surface supérieure du fluide. Si cette surface est libre avec un effet Marangoni, nous avons observé que la convection était confinée dans la couche de fluide excepté pour les très petits rapports d'épaisseurs. Ce résultat suggère ainsi un moyen de supprimer presque totalement de la convection indésirable dans le milieu poreux.

Enfin, nous avons utilisé AQUILON pour effectuer des simulations numériques directes du système non linéarisé au-delà du seuil de convection linéaire. Les fonctions de courant obtenues confirment les prédictions de l'analyse linéaire et les isothermes ont tendance à se déformer de plus en plus au fur et à mesure que l'on s'éloigne du seuil.

Chapitre 4

Étude linéaire d'une couche poreuse en rotation

"Eppur, si muove!"

Galileo Galilei

4.1 Équations linéaires pour les perturbations et conditions aux limites

Considérons une configuration géométrique analogue à celle du problème de Horton-Rogers-Lapwood (voir paragraphe 2.6) mais en rotation à vitesse angulaire constante Ω autour d'un axe vertical (figure 4.1). Dans un système d'axes en rotation avec le système, l'équation de Brinkman (2.13) s'écrit maintenant

$$\begin{aligned} \rho_f [\phi^{-1} (\partial_t \mathbf{u} + 2\Omega \wedge \mathbf{u} + \Omega \wedge (\Omega \wedge \mathbf{r})) + \phi^{-2} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] &= -\nabla p - \frac{\mu_l}{K} \mathbf{u} \\ &+ \mu_e \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_l \mathbf{g}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

où \mathbf{r} est le rayon vecteur d'un élément du système et \mathbf{u} représente maintenant la *vitesse de filtration relative* [Dagan, 1989] par rapport au système d'axes en rotation. Les trois premiers termes du membre de gauche de l'équation (4.1) représentent le terme d'inertie dans le référentiel en rotation. On reconnaît l'accélération de Coriolis $2\Omega \wedge \mathbf{u}$ ainsi que l'accélération centrifuge $\Omega \wedge (\Omega \wedge \mathbf{r})$.

Par analogie avec le problème de Horton-Rogers-Lapwood, nous appliquons l'approximation de Boussinesq, selon laquelle la densité du fluide est considérée constante sauf dans les forces extérieures.

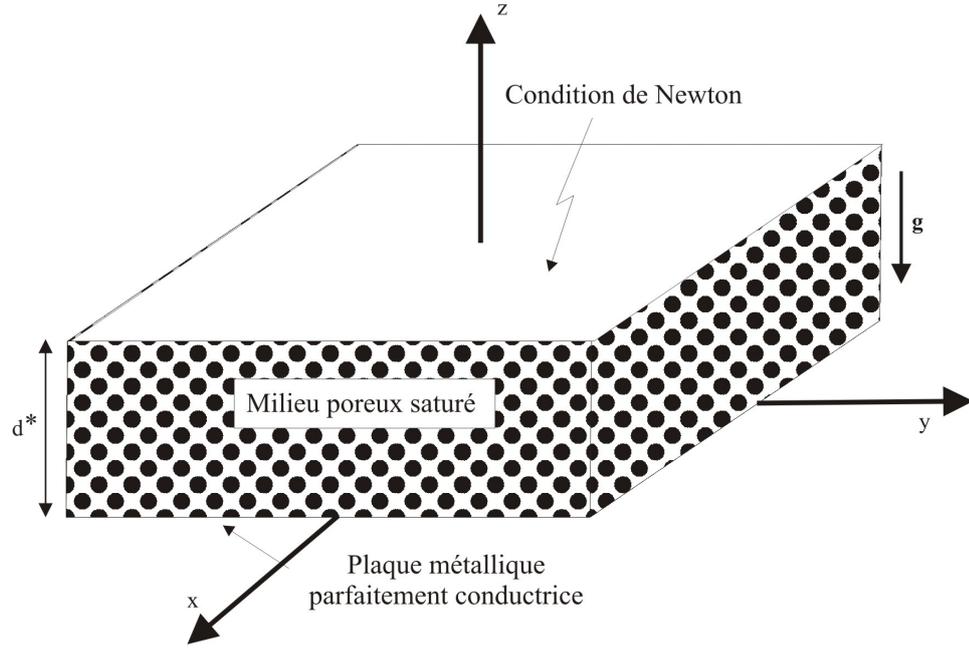


FIG. 4.1 – Configuration géométrique du milieu poreux en rotation.

Il convient d'être prudent dans le cas qui nous préoccupe. En effet, de nombreuses études antérieures [Chandrasekhar, 1961; Küppers and Lortz, 1969] n'ont appliqué l'hypothèse de Boussinesq qu'au seul terme de gravité. Il a pourtant été montré par Greenspan [Greenspan, 1968] qu'une telle approche est incompatible avec un gradient de température vertical dans un état de référence au repos ($\mathbf{u} = 0$). Une approche différente doit être adoptée qui considère les termes de Coriolis et centrifuge comme des forces extérieures fictives auxquelles il est indispensable d'appliquer l'approximation de Boussinesq [Greenspan, 1968; Gershuni and Zhukhovitskii, 1976]. En effet, si nous considérons un état de repos caractérisé par $\mathbf{u} = 0$, le bilan de quantité de mouvement (4.1) devient

$$\nabla p = \rho_l \mathbf{g} - \rho_l \phi^{-1} \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}). \quad (4.2)$$

En prenant le rotationnel de cette expression, nous obtenons l'équation suivante (en coordonnées cylindriques) pour la distribution de densité dans l'état de repos:

$$g \partial_r \rho_l + r \Omega^2 \phi^{-1} \partial_z \rho_l = 0, \quad (4.3)$$

où r et z sont les coordonnées cylindriques respectivement dans la direction horizontale et dans la direction verticale. Cette équation présente la solution générale

$$\rho_l = \rho_l \left(z - \frac{\Omega^2 r^2}{2g\phi} \right). \quad (4.4)$$

La relation (4.2) permet de montrer facilement que la pression est une fonction de $\left(z - \frac{\Omega^2 r^2}{2g\phi}\right)$. Cela étant, l'équation d'état (2.14) implique que la température dans l'état de repos est elle aussi une fonction de $\left(z - \frac{\Omega^2 r^2}{2g\phi}\right)$. Cependant, en l'absence de mouvement, l'équation de conservation de l'énergie (2.10) se réduit à

$$\nabla^2 T = 0, \quad (4.5)$$

relation qui n'admet pas de solution du type $T = T\left(z - \frac{\Omega^2 r^2}{2g\phi}\right)$. Cette contradiction prouve donc que de la convection est nécessaire dans l'état de référence. Il est pourtant possible de mettre en évidence des états d'équilibre quasi-statiques. En effet, nous pouvons écrire

$$T = T\left(\frac{z}{d^*} - \frac{Fr}{2\phi} \frac{r^2}{L^2} \frac{L}{d^*}\right), \quad (4.6)$$

où L est une distance caractéristique horizontale, d^* l'épaisseur de la couche et Fr le nombre de Froude défini par

$$Fr = \frac{\Omega^2 L}{g}. \quad (4.7)$$

En tenant compte du fait que $\frac{r^2}{L^2} \approx O(1)$ et que $\frac{d^*}{L} \ll 1$ vu que notre système est d'extension horizontale infinie, la relation (4.6) devient

$$T = T\left(\frac{z}{d^*}\right) + O(Fr), \quad (4.8)$$

à condition que le nombre de Froude Fr soit très petit, nous retrouvons, à l'ordre zéro, le profil de température linéaire purement conductif. Comme la densité présente la même dépendance vis-à-vis de z que la température, l'équation d'état se réduit bien à la relation (2.16). Introduisons à présent cette équation (2.16) dans le terme de poussée¹ de l'équation (4.1). Dans ces conditions, le système d'équations gouvernant l'évolution linéaire des petites perturbations adimensionnelles de vitesse, pression et température peut s'écrire

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (4.9)$$

$$\chi^{-1} \partial_t \mathbf{u}' = -\nabla p' - \mathbf{u}' + \Lambda Da \nabla^2 \mathbf{u}' - \sqrt{Ta} \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{u}' + Ra_p T' \mathbf{e}_z, \quad (4.10)$$

$$\partial_t T' = \nabla^2 T' + w'. \quad (4.11)$$

où la pression contient maintenant le terme centrifuge et χ est le nombre de Prandtl de filtration défini précédemment par la relation

$$\chi = \frac{\phi \mu_l d^{*2}}{\rho_0 \kappa_p K S} \quad (4.12)$$

1. La densité est supposée constante dans le terme de Coriolis sous peine de générer des termes d'ordre supérieur.

et Ta est le nombre de Taylor poreux donné par

$$Ta = \left(\frac{2\Omega\rho_0 K}{\mu_l \phi} \right)^2. \quad (4.13)$$

En prenant successivement deux fois le rotationnel de (4.10), on peut remplacer le système d'équations (4.9)-(4.11) par le système équivalent

$$\begin{aligned} \chi^{-1} \partial_t \nabla^2 w &= Ra_p \nabla_h^2 T + \Lambda Da \nabla^4 w \\ &\quad - \nabla^2 w - \sqrt{Ta} \partial_z \zeta, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\chi^{-1} \partial_t \zeta = \Lambda Da \nabla^2 \zeta - \zeta + \sqrt{Ta} \partial_z w, \quad (4.15)$$

$$\partial_t T = \nabla^2 T + w, \quad (4.16)$$

qui gouverne l'évolution des perturbations de vitesse verticale w , de température T et de composante verticale de vorticité ζ ($= (\nabla \wedge \mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_z$). Afin d'alléger l'écriture, nous avons omis les primes sur les variables perturbées. L'examen du système (4.14)-(4.16) met en évidence une des spécificités des problèmes de rotation à savoir un couplage des champs de vitesse et de vorticité par l'intermédiaire du nombre de Taylor poreux. La fermeture de ce système implique l'ajout de huit conditions aux limites.

A la surface inférieure ($z = 0$):

La frontière est supposée rigide et parfaitement conductrice, nous avons donc

$$w = 0, \quad (4.17)$$

$$\partial_z w = 0, \quad (4.18)$$

$$\zeta = 0, \quad (4.19)$$

$$T = 0. \quad (4.20)$$

A la surface supérieure ($z = 1$):

La surface supérieure est aussi supposée rigide avec

$$w = 0, \quad (4.21)$$

$$\partial_z w = 0, \quad (4.22)$$

$$\zeta = 0, \quad (4.23)$$

alors que le transfert de chaleur est régi par la loi de refroidissement de Newton

$$\partial_z T + \frac{Bi_m}{1 - Bi_m} T = 0, \quad (4.24)$$

où Bi_m est le nombre de Biot modifié défini par la relation (2.52).

4.2 Décomposition en modes normaux

Nous appliquons une nouvelle fois la technique des modes normaux en recherchant des solutions pour les trois champs inconnus de la forme

$$\begin{pmatrix} w \\ \zeta \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W(z) \\ Z(z) \\ \Theta(z) \end{pmatrix} e^{i(a_x x + a_y y) + s t}, \quad (4.25)$$

où les amplitudes $W(z)$, $Z(z)$ et $\Theta(z)$ décrivent les variations inconnues par rapport à z de la vitesse verticale, de la composante verticale de la vortacité et de la température.

En introduisant l'expression (4.25) dans les équations (4.14)-(4.16), nous obtenons le système suivant

$$\begin{aligned} \chi^{-1} s (D^2 - a^2) W &= \Lambda Da (D^2 - a^2)^2 W - (D^2 - a^2) W - a^2 Ra_p \Theta \\ &\quad - \sqrt{Ta} DZ, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\chi^{-1} s Z = \Lambda Da (D^2 - a^2) Z - Z + \sqrt{Ta} DW, \quad (4.27)$$

$$s \Theta = (D^2 - a^2) \Theta + W, \quad (4.28)$$

où D est une notation simplifiée pour d/dz . Les trois équations ci-dessus forment un système d'équations différentielles du huitième ordre associé aux conditions aux limites suivantes.

En $z = 0$, on a

$$W = 0, \quad (4.29)$$

$$DW = 0, \quad (4.30)$$

$$Z = 0, \quad (4.31)$$

$$\Theta = 0. \quad (4.32)$$

En $z = 1$:

$$W = 0, \quad (4.33)$$

$$DW = 0, \quad (4.34)$$

$$Z = 0, \quad (4.35)$$

$$D\Theta + \frac{Bi_m}{1 - Bi_m} \Theta = 0. \quad (4.36)$$

Dans l'étude de la stabilité linéaire du système bicouche poreux-liquide décrite dans le chapitre 3, nous avons vu que les paramètres Pr et S avaient disparu des équations à ce stade du développement. Cette disparition était due à l'hypothèse d'échange de stabilité. Dans le système qui nous préoccupe,

nous autorisons des solutions oscillantes et l'hypothèse d'échange de stabilité est abandonnée (*i.e.* s n'est pas nécessairement nul à la stabilité marginale). C'est pourquoi le paramètre χ demeure présent dans les équations².

4.3 Résultats analytiques pour le modèle de Darcy

Avant d'étudier le problème de Brinkman, nous allons examiner analytiquement le modèle de Darcy. Négligeons les termes de Brinkman³ ($\Lambda Da (D^2 - a^2)^2 W$ et $\Lambda Da (D^2 - a^2) Z$) dans les équations (4.26) et (4.27), il vient

$$s\chi^{-1} (D^2 - a^2) W = -(D^2 - a^2) W - a^2 Ra_p \Theta - \sqrt{Ta} DZ, \quad (4.37)$$

$$s\chi^{-1} Z = -Z + \sqrt{Ta} DW, \quad (4.38)$$

$$s\Theta = (D^2 - a^2) \Theta + W, \quad (4.39)$$

avec les conditions aux limites $W = \Theta = 0$ en $z = 0$ et $z = 1$. L'avantage du modèle de Darcy est de posséder une solution analytique. En effet, on voit immédiatement que les équations ci-dessus admettent une solution du type

$$W = A_n \sin n \pi z, \quad (4.40)$$

$$Z = A_n \frac{\pi \sqrt{Ta}}{1 + s \chi^{-1}} \cos n \pi z, \quad (4.41)$$

$$\Theta = A_n \frac{1}{\pi^2 + a^2 + s} \sin n \pi z, \quad (4.42)$$

où $n = 1, 2, \dots$. En introduisant ces solutions dans les équations (4.37)-(4.39) et en prenant $n = 1$ ⁴, on obtient l'équation de compatibilité. Étant donné qu'il n'y a pas échange de stabilité, nous distinguerons le cas marginal stationnaire et le cas marginal oscillant.

4.3.1 Cas marginal stationnaire

Dans ce cas, $s = 0$ et l'équation de compatibilité s'écrit

$$Ra_p^{sta} = \frac{\pi^2 + a^2}{a^2} (\pi^2 + a^2 + \pi^2 Ta). \quad (4.43)$$

En dérivant (4.43) par rapport à a , on trouve les valeurs critiques

$$Ra_p^{sta,c} = \pi^2 \left(\sqrt{1 + Ta} + 1 \right)^2, \quad (4.44)$$

$$a_c^{sta} = \pi \sqrt[4]{1 + Ta}. \quad (4.45)$$

2. Le paramètre S n'apparaît plus dans les équations vu le choix des facteurs d'adimensionalisation.

3. Il convient aussi de réduire le nombre de conditions aux limites étant donné que le modèle de Darcy est d'ordre inférieur à celui du modèle de Brinkman. On supprimera les conditions $DW = 0$ et $Z = 0$ en $z = 0$ et $z = 1$.

4. On peut montrer très facilement que $Ra_{p,1} < Ra_{p,n}, \forall n > 1$.

4.3.2 Cas marginal oscillant

Seule la partie réelle de s est nulle maintenant et nous écrivons $s = i \omega$. La condition de compatibilité s'écrit

$$a^2 (1 + i \chi^{-1} \omega) Ra_p^{osc} = (\pi^2 + a^2) (1 + i \chi^{-1} \omega)^2 (\pi^2 + a^2 + i \omega) + \pi^2 Ta (\pi^2 + a^2 + i \omega). \quad (4.46)$$

En tenant compte du fait que Ra_p^{osc} doit être réel, nous déduisons

$$Ra_p^{osc} = \frac{2}{a^2 (\pi^2 + a^2 + \chi)} \left[\pi^2 \chi^2 Ta + (\pi^2 + a^2) (\pi^2 + a^2 + \chi)^2 \right], \quad (4.47)$$

$$\omega^2 = \frac{\chi^2 [\pi^2 Ta (\pi^2 + a^2 - \chi) - (\pi^2 + a^2) (\pi^2 + a^2 + \chi)]}{(\pi^2 + a^2) (\pi^2 + a^2 + \chi)}. \quad (4.48)$$

La relation (4.48) nous permet de voir que $s_i^2 > 0$ lorsque la condition suivante est satisfaite:

$$y_- \leq \pi^2 + a^2 \leq y_+, \quad (4.49)$$

où y_+ et y_- sont définis par

$$y_{\pm} = \frac{\pi^2 Ta - \chi}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\chi^2 - 6 \pi^2 Ta \chi + \pi^4 Ta^2}. \quad (4.50)$$

Une condition supplémentaire est cependant nécessaire pour que les deux racines y_{\pm} soient réelles: le discriminant doit être positif ou nul ce qui implique

$$0 \leq \chi \leq \pi^2 (3 - 2\sqrt{2}) Ta \cup \chi \geq \pi^2 (3 + 2\sqrt{2}) Ta, \quad (4.51)$$

et les racines y_{\pm} seront du signe⁵ de $\pi^2 Ta - \chi$. Il faut donc rejeter les valeurs de $\chi \geq \pi^2 (3 + 2\sqrt{2}) Ta$ car elles correspondent à des valeurs imaginaires du nombre d'onde. Le domaine ainsi défini doit être à nouveau restreint. En effet, nous devons exclure les cas pour lesquels $y_+ < \pi^2$ car l'inéquation (4.49) n'a de sens physique que pour les valeurs positives de a^2 . La courbe correspondant à $y_+ = \pi^2$ est donnée par

$$\chi = \frac{\pi^2 (Ta - 1)}{Ta + 1}. \quad (4.52)$$

Cette courbe est tangente à la droite $\chi = \pi^2 (3 - 2\sqrt{2}) Ta$ au point de coordonnées $Ta = \pi^2 (\sqrt{2} + 1)$, $\chi = \pi^2 (\sqrt{2} - 1)$. La figure 4.2 illustre graphiquement le domaine du plan (Ta, χ) où il est possible d'observer une

5. En effet, le produit des racines y_+ et y_- est positif et vaut $\chi \pi^2 Ta$ alors que leur somme est donnée par $\pi^2 Ta - \chi$.

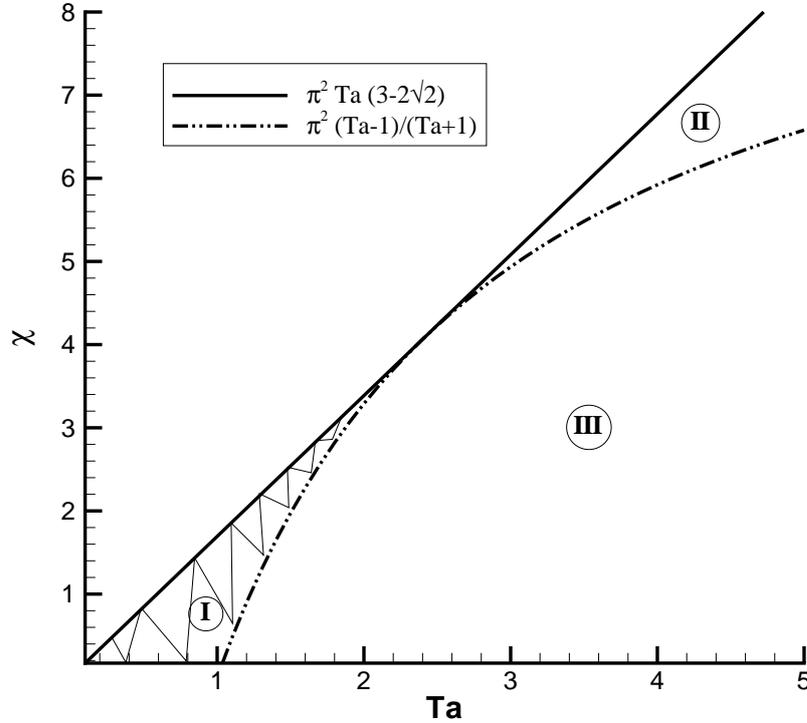


FIG. 4.2 – Régions admissibles II et III de stabilité marginale oscillante dans le plan Ta (nombre de Taylor poreux) - χ (nombre de Prandtl de filtration).

instabilité oscillante. Tout d'abord, il convient de noter que l'instabilité oscillante ne peut être décelée dans la partie du plan située au dessus de la droite, où l'instabilité est de nature purement stationnaire. Examinons à présent ce qui se passe dans chacune des trois régions. La région I est délimitée en bas par $\chi = \frac{\pi^2(Ta-1)}{Ta+1}$ en haut par la droite $\chi = \pi^2 Ta (3 - 2\sqrt{2})$ jusqu'au point de tangence. Sur ce segment de droite, on a $y_+ = y_- = \frac{\pi^2 Ta - \chi}{2}$ avec $0 \leq \chi \leq \pi^2 (\sqrt{2} - 1)$ ce qui correspond à $-1 \leq a^2 \leq 0$; le nombre d'onde est par conséquent imaginaire dans la région I qui est donc à exclure. La région II est analogue à la région I mais au-delà du point de tangence, le nombre d'onde correspondant est réel. Un raisonnement identique nous permet de conclure que la stabilité marginale oscillante est admissible dans la région III (figure 4.2). Ce domaine (régions II et III) est plus limité que celui que trouvait Vadasz [Vadasz, 1998a] lequel ne considérait que la condition (4.51) et négligeait donc la région I.

4.4 Résultats numériques pour le modèle de Brinkman

4.4.1 Courbes neutres

Après avoir analysé certains résultats analytiques pour le modèle de Darcy, nous allons maintenant étudier numériquement le modèle de Brinkman (avec $\Lambda = 1$) défini par les équations (4.26)-(4.28). Nous avons représenté sur la figure 4.3 les courbes de stabilité marginale⁶ exprimant Ra_p en fonction du nombre d'onde a pour deux valeurs du nombre de Taylor, $Ta = 10$ et $Ta = 100$ et pour plusieurs valeurs de χ . La courbe de convection stationnaire en trait plein correspond en fait à $\chi = \infty$ étant donné que dans cette situation, aucune solution oscillante n'est possible. Ces résultats sont qualitativement similaires à ceux obtenus par Vadasz [Vadasz, 1998a]. Ce dernier a utilisé un modèle de Darcy étendu (un modèle de Darcy étendu au terme de dérivée temporelle). Nous constatons que la valeur critique du nombre de Rayleigh poreux augmente lorsque le nombre de Taylor augmente: la rotation a donc un effet stabilisant sur le milieu poreux tout comme Chandrasekhar [Chandrasekhar, 1961] l'avait montré pour un fluide pur. Nous voyons que les courbes neutres comportent un ou deux minima qui peuvent être soit stationnaires, soit oscillants. Il est intéressant de remarquer que lorsque l'on augmente le nombre de Taylor, le nombre d'onde critique oscillant augmente alors que le nombre d'onde critique stationnaire diminue. Par contre le nombre de Rayleigh critique stationnaire constitue toujours une borne supérieure pour les nombres de Rayleigh critiques oscillants. Nous avons aussi tracé l'évolution de la partie imaginaire du taux de croissance s_i en fonction du nombre d'onde a sur la figure 4.4 pour $Ta = 10$ et $Ta = 100$. Rappelons que s_i est la fréquence de la solution oscillante. Elle passe par un maximum avant de retomber à zéro pour les grands nombres d'onde sauf pour les faibles valeurs de χ où s_i décroît continûment vers zéro. Il apparaît donc clairement que les régions où des solutions oscillantes sont possibles dépendent essentiellement des valeurs de Ta et de χ . Nous allons examiner plus en détail l'influence de ces deux paramètres sur les valeurs critiques.

4.4.2 Influence du nombre de Taylor poreux

En l'absence de rotation et pour $Da \ll 1$, le problème se réduit à celui de Horton-Rogers-Lapwood dont les valeurs critiques sont bien connues [Nield, 1999]. Pour un milieu poreux compris entre deux plaques rigides parfaitement

6. Nous représentons les valeurs les plus dangereuses du Ra_p . Ces valeurs peuvent être indifféremment stationnaire ou oscillante ce qui explique que les courbes neutres présentent des discontinuités qui traduisent en fait un changement de nature du point neutre le plus instable.

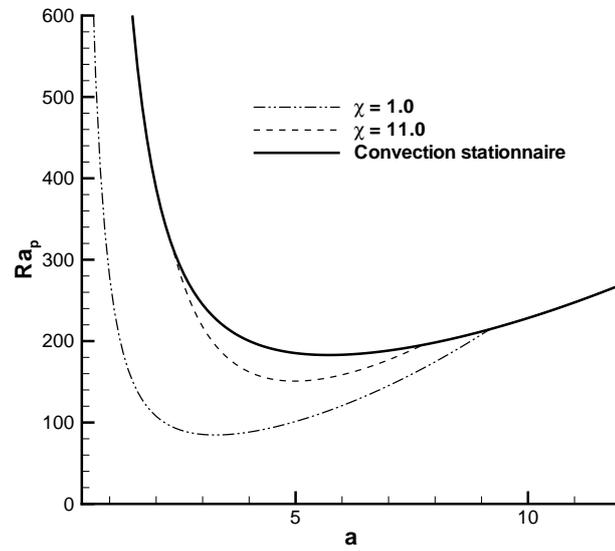
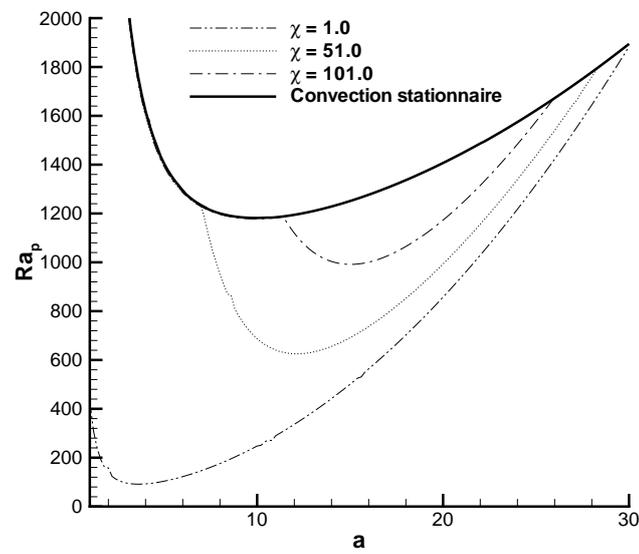
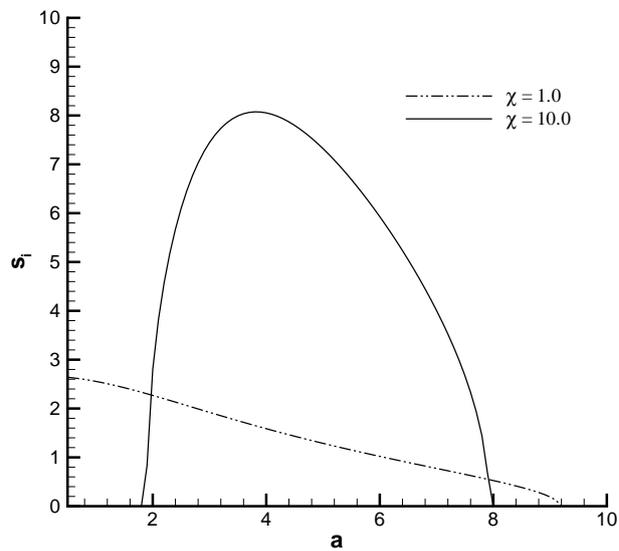
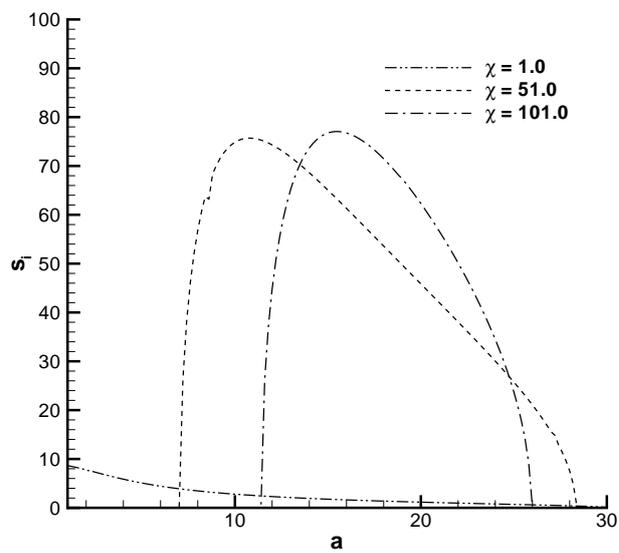
(a) $Ta = 10$ (b) $Ta = 100$

FIG. 4.3 – Courbes de stabilité marginale pour $Da = 10^{-5}$. Les courbes en pointillés représentent la convection oscillante et les courbes pleines la convection stationnaire.

(a) $Ta = 10$ (b) $Ta = 100$ FIG. 4.4 – Fréquence associée au mode oscillant en fonction du nombre d'onde pour $Da = 10^{-5}$.

conductrices, on trouve

$$Ra_p^c = 4\pi^2, \quad (4.53)$$

$$a_c = \pi. \quad (4.54)$$

Ces valeurs, caractéristiques d'une convection stationnaire, sont indépendantes du nombre de Prandtl de filtration. Lorsque le système est en rotation, Ra_p^c et a_c vont dépendre de Ta , caractéristique de la vitesse de rotation et du nombre de Prandtl de filtration χ . La figure 4.5 montre l'influence de Ta sur les valeurs critiques Ra_p^c , a_c et s_i^c . On constate tout d'abord que l'ensemble des valeurs critiques augmente avec Ta , ce qui confirme l'effet stabilisant de la rotation évoqué plus haut. Cependant, lorsque le nombre de Prandtl de filtration est très petit, on voit sur la figure 4.5 que Ra_p^c devient indépendant du nombre de Taylor dès que l'instabilité devient oscillante. Ce résultat confirme celui établi par Vadasz [Vadasz, 1998a] avec le modèle de Darcy. En effet, en passant à la limite pour $\chi \rightarrow 0$ dans la relation analytique (4.47) donnant la valeur critique du nombre de Rayleigh poreux oscillant Ra_p^{osc} , on trouve

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} Ra_p^{osc} = \frac{2(\pi^2 + a^2)^2}{a^2}, \quad (4.55)$$

et en minimisant cette relation par rapport à a , on finalement les valeurs critiques indépendantes de Ta :

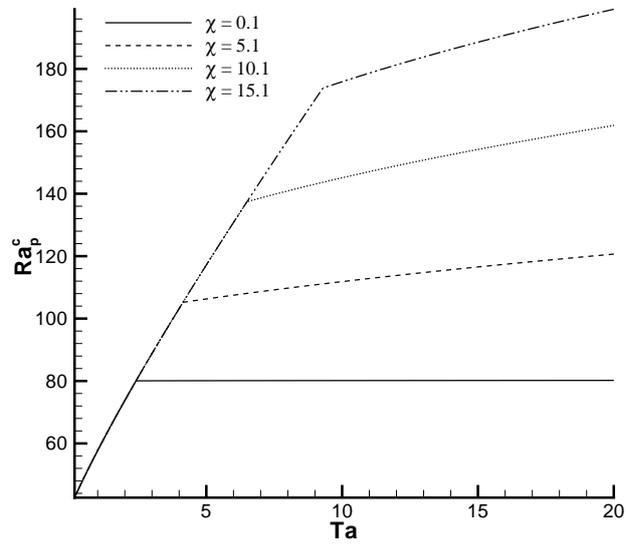
$$Ra_p^{osc,c} = 8\pi^2, \quad (4.56)$$

$$a_c^{osc} = \pi. \quad (4.57)$$

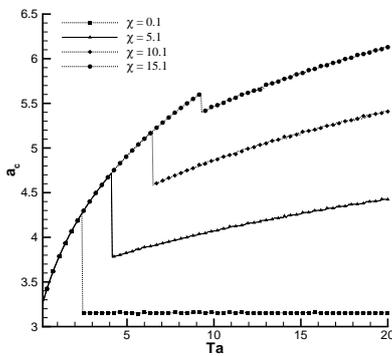
Les courbes donnant le nombre d'onde critique a_c en fonction de χ présentent des discontinuités qui trouvent leur origine dans le passage d'une instabilité stationnaire à une instabilité oscillante de longueur d'onde caractéristique différente. Ceci est confirmé par l'examen de s_i^c qui passe précisément d'une valeur nulle à une valeur non nulle en ces transitions. Ces dernières sont caractérisées par une égalité du nombre de Rayleigh critique stationnaire et du nombre de Rayleigh critique oscillant: on parlera de *point de codimension 2* vu que deux modes de nature différente bifurquent simultanément. Les courbes donnant l'évolution du nombre de Rayleigh présentent tout d'abord une phase de croissance quasi-linéaire rapide. La convection y est stationnaire et l'influence de Ta est très importante. Au-delà du point de codimension 2, la pente des courbes diminuent et nous observons une saturation pour les grands Ta d'autant plus marquée que χ est petit.

4.4.3 Influence du nombre de Prandtl de filtration

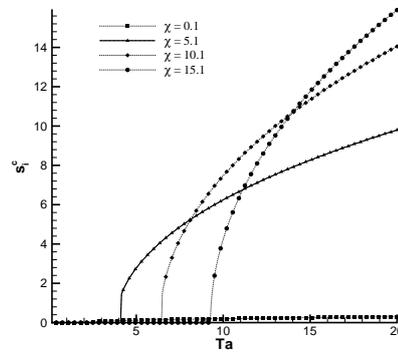
Afin d'examiner l'influence du nombre de Prandtl sur les valeurs critiques, nous avons représenté Ra_p^c , a_c et s_i^c en fonction de χ pour $Ta = 5, 10, 15$, et



(a)



(b)



(c)

FIG. 4.5 – Influence de Ta sur Ra_p^c (a), a_c (b) et s_i^c (c) pour $Da = 10^{-5}$ et plusieurs valeurs de χ . Les brisures de pente dans les courbes correspondent au passage d'une convection stationnaire à une convection oscillante lorsque Ta augmente.

20 sur la figure 4.6. Les courbes d'évolution de Ra_p^c sont oscillantes pour les petites valeurs de χ et deviennent stationnaires lorsque χ augmente. Le nombre de Rayleigh atteint alors une valeur constante, indépendante de χ . Le nombre d'onde présente le même type de discontinuité au passage du point de codimension 2 que dans la figure 4.5. On observe cependant une différence importante avec le cas fluide pur à savoir que le nombre d'onde caractéristique d'une instabilité oscillante n'est pas nécessairement plus grand que celui caractéristique d'une instabilité stationnaire. En effet, on voit bien sur la figure 4.6 que le saut au passage du point de codimension 2 se fait tantôt vers le haut, tantôt vers le bas suivant les valeurs de Ta . Enfin la fréquence critique des oscillations passe par un maximum avant de décroître vers le point de codimension 2.

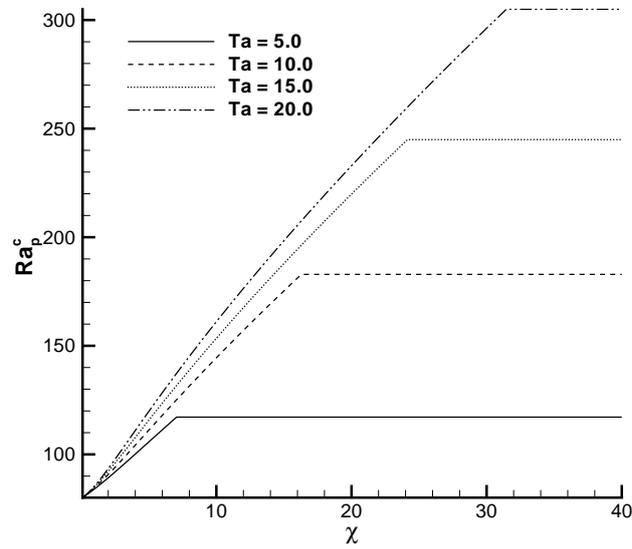
4.4.4 Point de codimension 2

Lorsque les convections stationnaire et oscillante sont présentes pour une même valeur du nombre de Rayleigh, nous sommes dans le cas particulier d'un point de codimension 2. La figure 4.7 montre la division du plan (χ, Ta) en deux zones selon que l'instabilité marginale est stationnaire ou oscillante. La courbe séparant ces deux régions définit les points de codimension 2. Le zoom dans la figure 4.7 montre la région proche de l'origine. Nous y voyons que l'instabilité sera toujours stationnaire pour $Ta \leq 2$ et ce quelles que soient les valeurs de χ . Au-delà de la valeur critique $Ta = 2$, l'instabilité sera oscillante pour les faibles valeurs de χ et stationnaire pour les grandes valeurs.

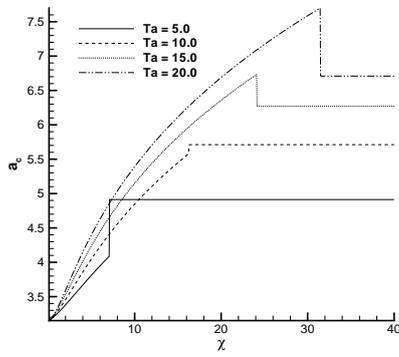
4.4.5 Influence du nombre de Darcy

Examinons à présent l'influence du nombre de Darcy Da sur les courbes neutres. La figure 4.8 représente cet effet pour les couples $Ta = 5$, $\chi = 1$ et $Ta = 100$, $\chi = 120$. Pour de très faibles valeurs de Da , le seuil d'instabilité est indifféremment stationnaire ou oscillant et l'on retrouve les valeurs analytiques obtenues par Vadasz [Vadasz, 1998a] avec un modèle de Darcy et données par les relations (4.43), (4.47) et (4.48). La figure 4.9 nous donne une illustration de l'excellente concordance des résultats analytiques (aussi bien pour le nombre de Rayleigh poreux que pour la fréquence des oscillations) avec nos simulations pour un nombre de Darcy égal à 10^{-8} . Nous retrouvons ici la propriété du modèle de Brinkman de se réduire au modèle de Darcy pour les petites valeurs de Da . En effet, Hennenberg *et al.* ont montré que le modèle de Brinkman se réduisait à celui de Darcy dans tout le milieu sauf dans un mince couche limite le long des bords [Hennenberg *et al.*, 1997].

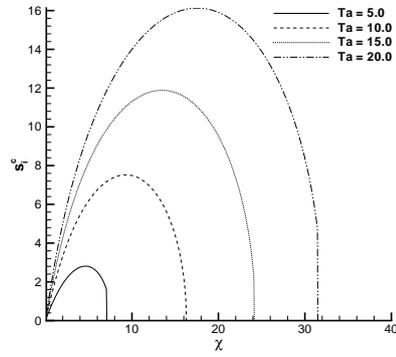
Lorsque Da augmente, nous observons que seule reste possible une instabilité stationnaire. Cette constatation était prévisible car le milieu poreux, devenu très perméable, se comporte presque comme un fluide et Chandrase-



(a)



(b)



(c)

FIG. 4.6 – Influence de χ sur Ra_p^c (a), a_c (b) et s_i^c (c) pour $Da = 10^{-5}$ et plusieurs valeurs de Ta . Les brisures de pente dans les courbes correspondent au passage d'une convection oscillante à une convection stationnaire lorsque χ augmente.

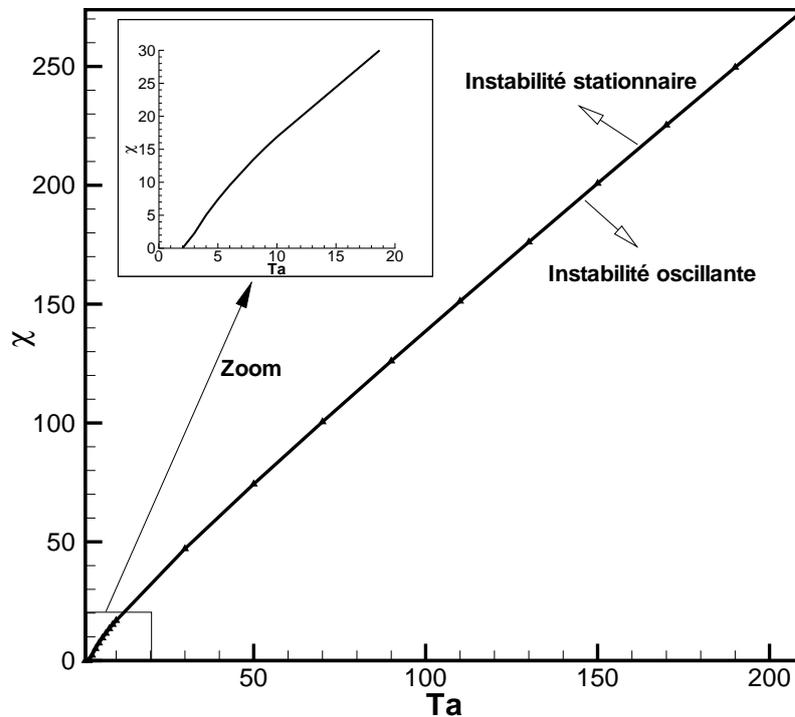


FIG. 4.7 – Division du plan (χ, Ta) en deux zones d'instabilité stationnaire et oscillante.

Chandrasekhar [Chandrasekhar, 1961] a montré que les solutions oscillantes sont confinées aux très petites valeurs du nombre de Prandtl pour un fluide pur en rotation.

4.4.6 Influence du nombre de Biot

Enfin, l'effet du nombre de Biot modifié Bi_m sur les courbes neutres est montré sur les figures 4.10 et 4.11. Il est évident qu'en augmentant Bi_m , les perturbations de température ne croissent pas aussi facilement et le gradient de température critique sera nécessairement plus élevé. Pour les valeurs des paramètres utilisés dans la figure 4.10, cette augmentation est de l'ordre de 50% entre le cas adiabatique ($Bi_m = 0$) et le cas purement conductif ($Bi_m = 1$). Nous avons aussi représenté sur la figure 4.11 l'évolution de la fréquence des oscillations avec le nombre de Biot. Nous voyons que pour les faibles valeurs de Bi_m la fréquence passe par un maximum pour décroître ensuite vers zéro. Pour des valeurs plus élevées de Bi_m , ce maximum disparaît. Enfin,

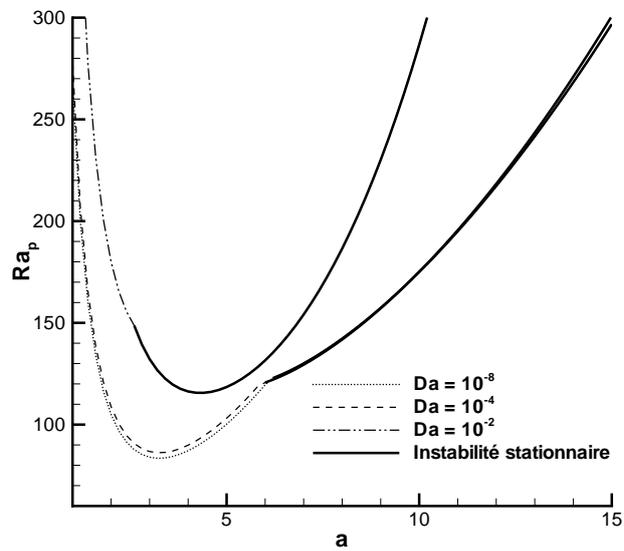
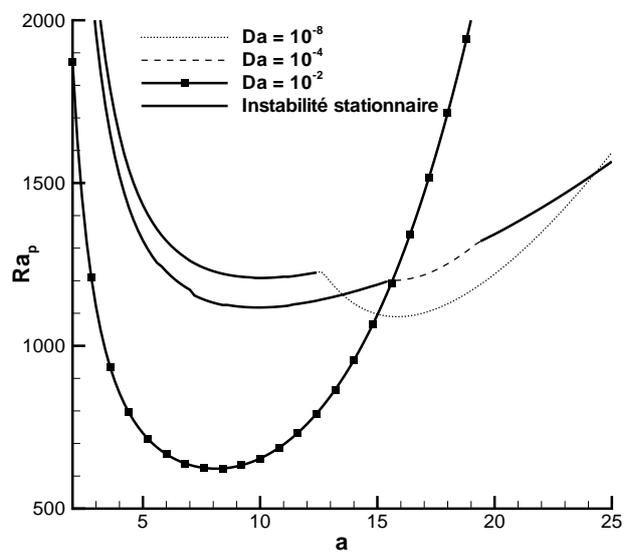
(a) $Ta = 5$ et $\chi = 1$ (b) $Ta = 100$ et $\chi = 120$

FIG. 4.8 – Influence du nombre de Darcy. Les courbes en pointillés représentent la convection oscillante et les courbes pleines la convection stationnaire.

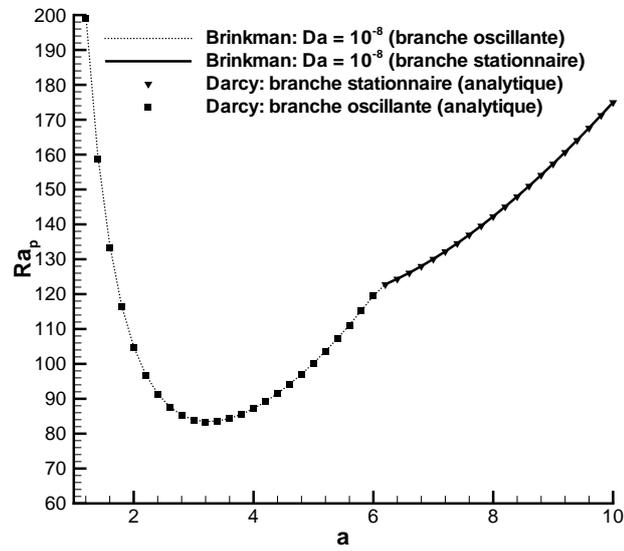
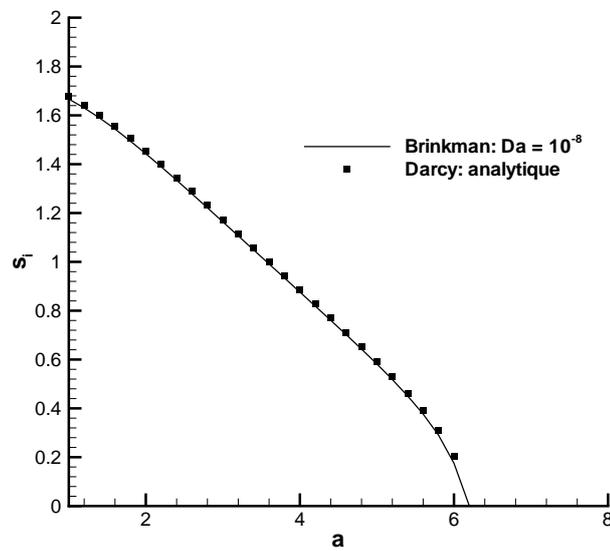
(a) Ra_p (b) s_i

FIG. 4.9 – Comparaison des solutions numériques du modèle de Brinkman avec les solutions analytiques du modèle de Darcy ($Ta = 5$, $\chi = 1$).

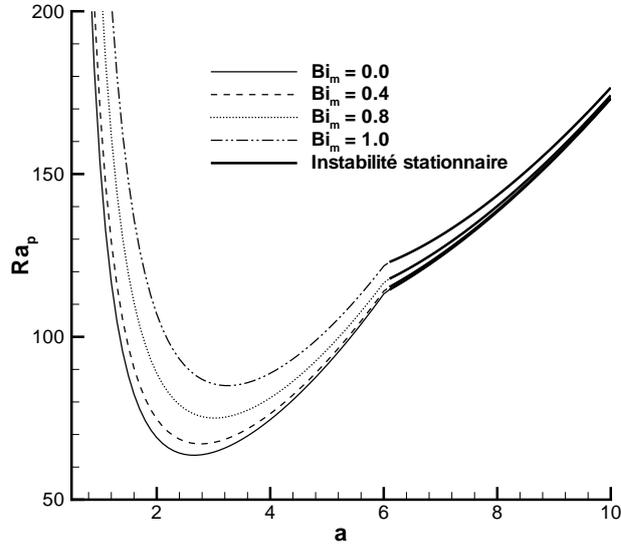


FIG. 4.10 – Influence du nombre de Biot modifié sur Ra_p pour $Ta = 5$, $Da = 10^{-5}$ et $\chi = 1$. Les courbes en pointillés représentent la convection oscillante et les courbes pleines la convection stationnaire.

nous remarquons que la branche oscillante rejoint la branche stationnaire pour une même valeur du nombre d'onde, indépendamment du nombre de Biot.

4.5 Résumé

L'importance de la rotation dans de nombreuses applications industrielles et géophysiques nous a amené à considérer l'ajout d'un terme de Coriolis dans le modèle de Brinkman. La stabilité linéaire de ce système avait été analysée en détail dans une couche de fluide par Clune et Knobloch [Clune and Knobloch, 1993] et dans un milieu poreux avec un modèle de Darcy par Vadasz [Vadasz, 1998a]. Il nous a donc semblé intéressant d'étudier l'influence du modèle de Brinkman sur le milieu poreux en rotation. De manière générale, nous avons pu constater, comme dans le chapitre 3 que le modèle de Brinkman donnait qualitativement les mêmes résultats que le modèle de Darcy. La présence de rotation dans le système, qui se traduit par le nombre sans dimension de Taylor dans les équations, a d'importantes conséquences sur la nature du seuil de convection linéaire. En effet, alors que la convection était exclusivement stationnaire en l'absence de rotation, elle devient tantôt stationnaire, tantôt oscillante en présence de rotation.

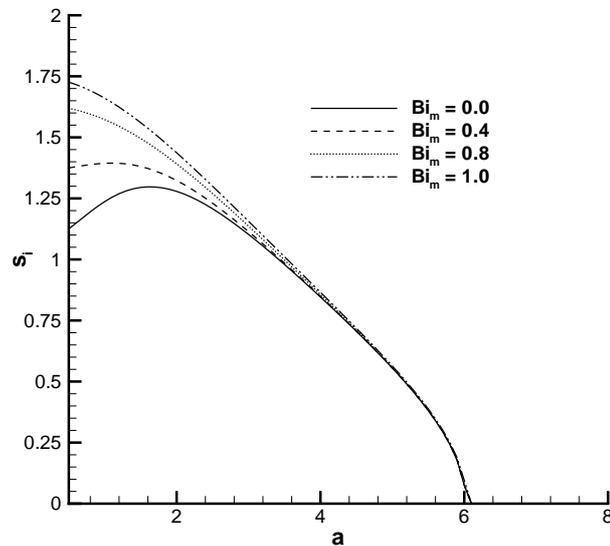


FIG. 4.11 – Influence du nombre de Biot modifié sur s_i pour $Ta = 5$, $Da = 10^{-5}$ et $\chi = 1$.

Nous avons montré que les valeurs du seuil de convection augmentaient avec le nombre de Taylor poreux, que le seuil soit stationnaire ou oscillant. Cependant lorsque le nombre de Prandtl de filtration est proche de zéro, les valeurs critiques de la convection oscillante deviennent indépendantes du nombre de Taylor poreux. Quelle que soit la valeur de χ , la convection tend à être oscillante lorsque Ta augmente.

L'examen de l'influence du nombre de Prandtl de filtration sur les valeurs critiques nous a permis de montrer que le seuil de convection était oscillant pour les faibles valeurs de χ et stationnaire pour les grandes valeurs de χ . Dans ce dernier cas, le nombre de Rayleigh poreux critique atteint alors une valeur constante, indépendante de χ . De plus, nous avons constaté que le nombre d'onde d'une instabilité oscillante n'était pas nécessairement plus grand que celui caractéristique d'une instabilité stationnaire comme c'est le cas dans un fluide pur [Clune and Knobloch, 1993].

Lorsque les convections stationnaire et oscillante sont présentes pour une même valeur du nombre de Rayleigh, on parle de point de codimension 2. Nous avons représenté la séparation dans le plan (χ, Ta) des instabilités oscillante et stationnaire. Cette limite correspondant aux points de codimension 2 est telle que l'instabilité sera toujours stationnaire pour $Ta < 2$. Au-delà de $Ta = 2$, l'instabilité sera oscillante pour les faibles valeurs de χ et stationnaire pour les grandes valeurs.

Nous avons terminé notre étude linéaire en examinant l'influence des nombre de Darcy et de Biot. Pour de faibles valeurs de Da , le seuil de convection est indifféremment stationnaire ou oscillant et nous retrouvons les résultats de Vadasz [Vadasz, 1998a]. Lorsque Da augmente, le milieu poreux devient très perméable et se comporte comme un fluide; la convection est donc stationnaire, en accord avec Chandrasekhar [Chandrasekhar, 1961] qui avait montré que les solutions oscillantes étaient confinées aux très petites valeurs du nombre de Prandtl. Enfin, en augmentant le nombre de Biot, nous freinons la croissance des perturbations de température ce qui a pour conséquence d'élever la valeur de la température critique correspondante.

Chapitre 5

Étude linéaire d'une couche poreuse saturée par un ferrofluide en rotation

"Il y faudra du courage, car à la sortie de tout labyrinthe, l'homme ne trouvera jamais que d'autres labyrinthes."

Jacques Attali
Chemins de Sagesse

5.1 Équations de bilan

Nous considérons maintenant une extension du problème traité au chapitre 4 au cas où le fluide saturant la matrice poreuse est un ferrofluide. Ce système, d'épaisseur d^* , est sous l'influence d'un champ magnétique extérieur uniforme $\mathbf{H}_e = H_e \mathbf{e}_z$, dirigé suivant la verticale (figure 5.1). De plus, nous supposons que les propriétés physiques du ferrofluide sont indépendantes du champ magnétique appliqué. Cette hypothèse n'est pas trop restrictive dans les conditions expérimentales que nous supposons vérifiées [Rosensweig, 1985].

5.1.1 Bilan de quantité de mouvement

La présence d'un ferrofluide soumis à un champ magnétique au sein de la matrice poreuse supposée non magnétisable introduit certaines nouveautés.

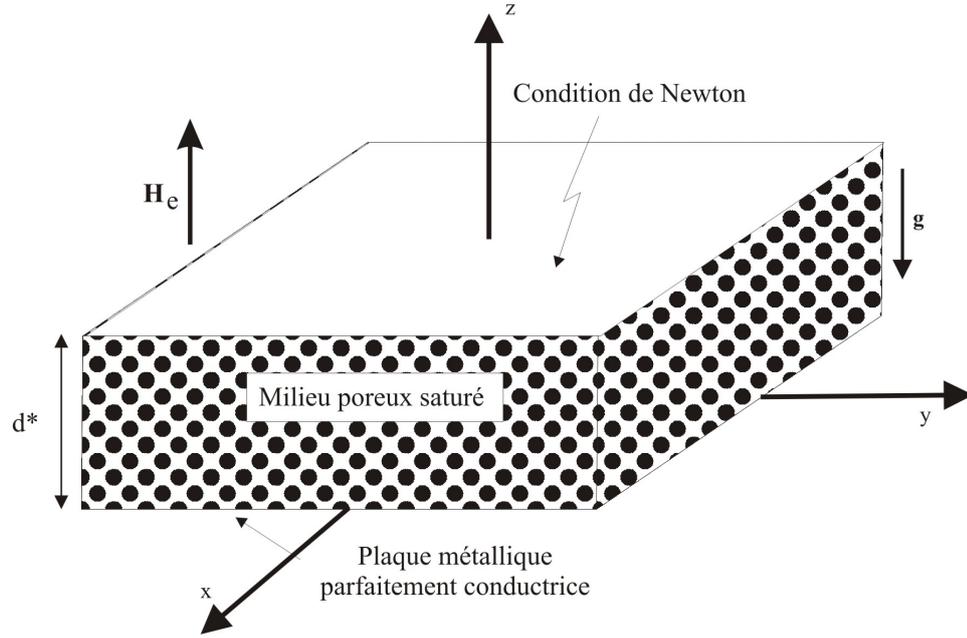


FIG. 5.1 – Matrice poreuse saturée par un ferrofluide, plongée dans un champ magnétique et en rotation.

Il devient nécessaire d'ajouter une partie magnétique au tenseur des tensions visqueuses intervenant dans le modèle de Brinkman.

Nous représenterons cette contribution par le tenseur des tensions magnétique proposé par Rosensweig [Rosenweig, 1985]

$$\mathbf{T}_m = \left[\mu_0 \int_0^H \left(\frac{\partial (M \rho_l^{-1})}{\partial \rho_l^{-1}} \right)_{T,H} dH + \frac{\mu_0}{2} H^2 \right] \mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{H}, \quad (5.1)$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$), M la magnétisation du ferrofluide, \mathbf{I} le tenseur unité, \mathbf{H} le vecteur champ magnétique et \mathbf{B} le vecteur induction magnétique. La magnétisation, le champ magnétique et l'induction magnétique vérifient la relation

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{M} + \mathbf{H}), \quad (5.2)$$

Nous adoptons le point de vue classique de considérer la magnétisation \mathbf{M} alignée avec le champ magnétique \mathbf{H} et nous supposons qu'elle est une fonction de la température, de la masse spécifique et de l'intensité du champ magnétique. La théorie de Langevin [Rosenweig, 1985] appliquée à un ferrofluide donne l'expression suivante de la magnétisation

$$\frac{M}{M_s} = \coth \left(\frac{m H}{k T} \right) - \frac{k_B T}{m H}, \quad (5.3)$$

où m est le moment magnétique d'une particule constituant le ferrofluide, k_B la constante de Boltzmann, T la température absolue et M_s la magnétisation de saturation donnée par

$$M_s = \frac{1}{\mu_0} n m, \quad (5.4)$$

avec n le nombre de particules magnétiques en suspension dans le ferrofluide. La figure 5.2 montre l'allure de la magnétisation en fonction de H/T . Nous allons nous intéresser à la situation (correspondant à un grand nombre de cas expérimentaux) pour laquelle le champ magnétique appliqué est suffisamment élevé (hypothèse de champ fort) et où la magnétisation devient indépendante du champ magnétique (le ferrofluide est saturé) [Stiles and Kagan, 1989; Berkovski and Bashtovoy, 1998]. Nous pouvons écrire

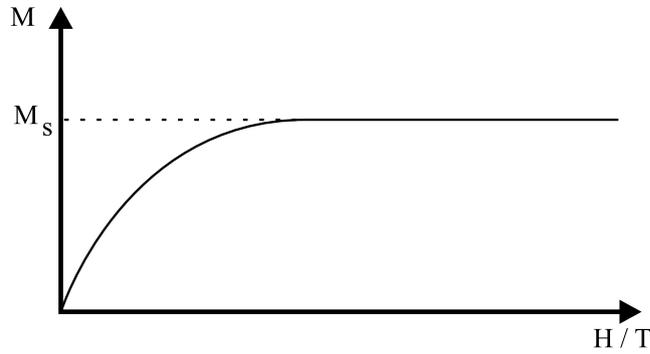


FIG. 5.2 – Allure de la courbe de magnétisation en fonction de H/T .

$$\mathbf{M} = \left[M_0 + \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_{\rho_l} (T - T_0) + \left(\frac{\partial M}{\partial \rho_l} \right)_T (\rho_l - \rho_0) \right] \frac{\mathbf{H}}{H}, \quad (5.5)$$

où $\left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_{\rho_l}$ et $\left(\frac{\partial M}{\partial \rho_l} \right)_T$ sont respectivement le coefficient pyromagnétique à volume constant et le coefficient de variation volumique de la magnétisation à température constante.

L'équation (5.5) nous permet d'écrire

$$\frac{dM}{dT} = \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_{\rho_l} + \left(\frac{\partial M}{\partial \rho_l} \right)_T \left(\frac{\partial \rho_l}{\partial T} \right). \quad (5.6)$$

Si la magnétisation ne répond aux changements de température que par l'intermédiaire de variation de densité, le coefficient pyromagnétique à volume constant s'annule et nous avons

$$\left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_{\rho_l} = 0. \quad (5.7)$$

De plus, pour de faibles écarts de température, le coefficient pyromagnétique $\frac{dM}{dT}$ peut être considéré constant et nous le noterons $-\alpha_{pm}$. En substituant (5.7) dans (5.6) et en tenant compte de l'équation d'état $\rho_l = \rho_0(1 - \alpha_T(T - T_0))$, on trouve finalement

$$\frac{dM}{dT} = -\alpha_T \rho_0 \left(\frac{\partial M}{\partial \rho_l} \right)_T, \quad (5.8)$$

$$= -\alpha_{pm}, \quad (5.9)$$

La magnétisation loin de la transition de Curie (*i.e.* température au-delà de laquelle un matériau ferromagnétique perd toutes ses propriétés magnétiques) adopte la forme linéaire suivante [Stiles and Kagan, 1989; Blennerhasset et al., 1991]

$$\mathbf{M} = \left(M_0 - \alpha_{pm}(T - T_0) \right) \frac{\mathbf{H}}{H}, \quad (5.10)$$

Pour des valeurs plus faibles du champ magnétique extérieur, on ne peut plus négliger les variations de la magnétisation avec le champ magnétique et l'on écrit [Fynlayson, 1970]

$$\mathbf{M} = \left(M_0 + \alpha_{sm}(H - H_0) - \alpha_{pm}(T - T_0) \right) \frac{\mathbf{H}}{H}, \quad (5.11)$$

où α_{sm} est la susceptibilité magnétique et α_{pm} le coefficient pyromagnétique défini plus haut alors que M_0 est la magnétisation à la température T_0 pour un champ magnétique H_0 .

L'équation (5.10) est formellement identique à l'équation d'état (5.11) pour $\alpha_{sm} = 0$. Cependant, physiquement, les approches diffèrent vu que dans (5.10) $M_0 = M(T_0, \rho_0)$ est la magnétisation à la saturation, indépendante de la susceptibilité magnétique [Blennerhasset et al., 1991]. Remarquons que les deux équations d'état de la magnétisation (5.10) et (5.11) peuvent être déduites (en introduisant les hypothèses correspondantes) de l'équation de Langevin (5.3) [Berkovski and Bashtovoy, 1998] ce qui légitime leur utilisation dans la littérature.

Dans le cas où la magnétisation est donnée par (5.10), le tenseur des tensions magnétique se simplifie considérablement et son gradient se réduit à la force magnétique de Kelvin

$$\mathbf{F}_m = \mu_0 M \nabla H, \quad (5.12)$$

plus un terme de type pression.

Le bilan de quantité de mouvement est donc donné par l'équation (4.1) à laquelle nous ajoutons l'effet du champ magnétique sur le ferrofluide sous la forme de la force de Kelvin [Rosensweig, 1985]:

$$\begin{aligned} \rho_l \left[\phi^{-1} (\partial_t \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r})) + \phi^{-2} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] \\ = -\nabla \tilde{p} - \frac{\mu_l}{K} \mathbf{u} + \mu_e \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_l \mathbf{g} + \mu_0 M \nabla H, \end{aligned} \quad (5.13)$$

Masse spécifique ρ_l $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	1.24 10 ³
Viscosité cinématique à 27°C ν $\left[\frac{m^2}{s}\right]$	12 10 ⁻⁶
Diffusivité thermique κ_l $\left[\frac{m^2}{s}\right]$	8 10 ⁻⁸
Chaleur spécifique c_p $\left[\frac{J}{kgK}\right]$	1.47 10 ³
Coefficient d'expansion volumique α $\left[\frac{1}{K}\right]$	8.6 10 ⁻⁴
Coefficient pyromagnétique α_{pm} à $H = 50 kA/m$ $\left[\frac{A}{Km}\right]$	110
Diamètre moyen des particules $[nm]$	10.2

TAB. 5.1 – *Propriétés physiques du ferrofluide EMG 905 produit par Ferrofluidics.*

où \tilde{p} est une pression modifiée qui, outre la pression hydrostatique, contient l'ensemble des termes d'origine magnétique pouvant se mettre sous la forme d'un gradient [Rosensweig, 1985].

5.1.2 Bilan d'énergie

Fynlayson [Neuringer and Rosensweig, 1964; Fynlayson, 1970] a établi le bilan d'énergie pour un ferrofluide à partir des principes de la thermodynamique et de l'hypothèse d'équilibre local. L'hypothèse de champ fort effectuée plus haut permet de simplifier ce bilan en négligeant les termes d'origine magnétique [Stiles and Kagan, 1989; Blennerhasset et al., 1991] et d'obtenir ainsi une équation formellement identique à celle obtenue dans les chapitres précédents, à savoir

$$(\rho c)_p \partial_t T + (\rho c_P)_f \mathbf{u} \cdot \nabla T = k_p \nabla^2 T. \quad (5.14)$$

Nombres d'études se satisfont de cette relation à condition d'être loin de la température de Curie.

Le tableau 5.1 donne les caractéristiques d'un ferrofluide produit par Ferrofluidics¹[Auernhammer and Brand, 2000].

5.2 Équations du problème de stabilité linéaire

Avant de déterminer les équations de base, il convient d'étendre les conclusions du paragraphe 4.1 sur la compatibilité des accélérations de Coriolis et centrifuge au problème étudié dans ce chapitre. En effet, il a été montré à de nombreuses reprises [Berkovski and Bashtovoy, 1998; Fynlayson, 1970; Rosensweig, 1985] que le problème de ferroconvection pouvait se ramener à un problème de Rayleigh à condition de remplacer la gravité g par le paramètre

1. <http://www.ferrotec.com>

g_m défini par

$$g_m = g + \frac{\mu_0 \alpha_{pm}}{\alpha_T d^* \rho_0} \Delta T. \quad (5.15)$$

Ce parallélisme nous permet d'utiliser systématiquement les résultats de l'instabilité de Rayleigh. En particulier, nous pouvons remplacer la relation (4.7) par

$$\frac{\Omega^2 L}{|g_m|} \ll 1, \quad (5.16)$$

afin de conserver un profil de température de référence linéaire dans l'état de repos.

5.2.1 État de référence

L'état de référence est un état de repos purement conductif, homogène horizontalement, caractérisé par une vitesse nulle et un profil de température linéaire. Il doit, de plus, vérifier les équations de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5.17)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = 0. \quad (5.18)$$

L'équation (5.18) implique

$$\mathbf{H}_{ref} = H(z) \mathbf{e}_z. \quad (5.19)$$

En introduisant ensuite le profil de température de référence $T_{ref} = T_0 - \frac{\Delta T}{d^*} z$ dans l'équation (5.10), nous obtenons l'expression de la magnétisation de référence

$$\mathbf{M}_{ref} = \left(M_0 + \alpha_{pm} \frac{\Delta T}{d^*} z \right) \mathbf{e}_z. \quad (5.20)$$

Enfin, l'équation (5.17) impose

$$H_e = M_0 + H_0. \quad (5.21)$$

En résumé, l'état de référence est défini par

$$T_{ref} = T_0 - \frac{\Delta T}{d^*} z, \quad (5.22)$$

$$\mathbf{u}_{ref} = 0, \quad (5.23)$$

$$\mathbf{M}_{ref} = \left(M_0 + \alpha_{pm} \frac{\Delta T}{d^*} z \right) \mathbf{e}_z, \quad (5.24)$$

$$\mathbf{H}_{ref} = \left(H_0 - \alpha_{pm} \frac{\Delta T}{d^*} z \right) \mathbf{e}_z. \quad (5.25)$$

Avant d'écrire les équations linéaires régissant l'évolution des perturbations, nous allons expliciter les différences fondamentales entre les mécanismes de convection gravifique et magnétique au sein d'un ferrofluide. Nous

avons montré au paragraphe 1.1.1 qu'une particule de fluide déplacée d'une distance Δz subissait une force de poussée

$$\mathbf{F}_{grav} \sim \frac{\Delta T}{d^*} \Delta z \mathbf{e}_z. \quad (5.26)$$

Dans un ferrofluide, les particules sont également soumises à la force de Kelvin $\mu_0 M \nabla H$. L'expression de la force de Kelvin et des profils de référence M_{ref} et H_{ref} nous permet de déduire qu'un déplacement Δz implique une poussée

$$\mathbf{F}_m \sim \left(\frac{\Delta T}{d^*} \right)^2 \Delta z \mathbf{e}_z. \quad (5.27)$$

Le système sera instable si la force de poussée est dirigée dans le sens du déplacement Δz . Nous voyons que les comportements de F_{grav} et F_m sont fondamentalement différents. En effet, alors que F_{grav} n'est déstabilisante que lorsque le ferrofluide est chauffé par le bas ($\Delta T > 0$), F_m est toujours déstabilisante quel que soit le signe du gradient de température appliqué.

5.2.2 Équations linéarisées pour les perturbations

Perturbons l'état de référence décrit ci-dessus. Les champs inconnus s'écrivent:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}', \quad (5.28)$$

$$T = T_{ref} + T', \quad (5.29)$$

$$p = p_{ref} + p', \quad (5.30)$$

$$\mathbf{M} = (M_{ref} - \alpha_{pm} T') \mathbf{e}_z + \mathbf{M}', \quad (5.31)$$

$$\mathbf{H} = H_{ref} \mathbf{e}_z + \mathbf{H}', \quad (5.32)$$

Nous introduisons ces décompositions dans les équations de bilan et nous linéarisons les équations ainsi obtenues, ce qui conduit à

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \phi^{-1} (\partial_t \mathbf{u}' + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u}') &= -\nabla p' - \frac{\mu_l}{K} \mathbf{u}' + \mu_e \nabla^2 \mathbf{u}' + \rho_0 \alpha_T g T' \\ &\quad + \rho_0 \mu_0 \alpha_{pm} \frac{\Delta T}{d^*} (\alpha_{pm} T' - \partial_z \varphi') \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$(\rho c)_p \partial_t T' - (\rho c)_f \frac{\Delta T}{d^*} w' = k_p \nabla^2 T', \quad (5.35)$$

$$\nabla^2 \varphi' - \alpha_{pm} \partial_z T' = 0, \quad (5.36)$$

où $\mathbf{u}' = (u', v', w')$, p' et T' sont respectivement les perturbations des champs de vitesse, de pression et de température. L'équation (5.36) provient du fait que les équations de Maxwell doivent toujours être satisfaites et φ' est la perturbation du potentiel magnétique définie par

$$\mathbf{H}' = \nabla \varphi'. \quad (5.37)$$

Cette définition est une conséquence directe de la loi de Maxwell (5.18)

Afin de mettre ces équations d'évolution des perturbations sous forme adimensionnelle, nous utilisons les mêmes facteurs d'échelle qu'au chapitre 4, auxquels nous ajoutons le facteur d'échelle suivant pour le potentiel magnétique

$$[\varphi'] = \alpha_{pm} \Delta T d^*. \quad (5.38)$$

Les équations (5.33)-(5.36) s'écrivent finalement

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (5.39)$$

$$\chi^{-1} \partial_t \mathbf{u} + 2\sqrt{Ta} \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{u} = -\nabla p - \mathbf{u} + \Lambda Da \nabla^2 \mathbf{u} + Ra_p T \mathbf{e}_z + N (T - \partial_z \varphi) \mathbf{e}_z, \quad (5.40)$$

$$\partial_t T - w = \nabla^2 T, \quad (5.41)$$

$$\nabla^2 \varphi - \partial_z T = 0, \quad (5.42)$$

où N est le nombre de Kelvin poreux défini par la relation suivante

$$N = \frac{\mu_0 (\alpha_{pm} \Delta T)^2 K}{\mu_l \kappa_p}. \quad (5.43)$$

où K est la perméabilité du milieu poreux. N est le produit du nombre de Kelvin classique ($N_{cl} = \frac{\mu_0 (\alpha_{pm} \Delta T d^*)^2}{\mu_l \kappa_p}$) et du nombre de Darcy.

En appliquant successivement deux fois l'opérateur rotationnel à l'équation (5.40) et en projetant les équations obtenues sur \mathbf{e}_z , nous obtenons deux équations d'évolution pour la vitesse verticale w et pour la composante verticale de la vorticité χ :

$$\chi^{-1} \partial_t \nabla^2 w = (Ra_p + N) \nabla_h^2 T + \Lambda Da \nabla^4 w - \nabla^2 w - \sqrt{Ta} \partial_z \zeta - N \nabla_h^2 \partial_z \varphi, \quad (5.44)$$

$$\chi^{-1} \partial_t \zeta = \Lambda Da \nabla^2 \zeta - \zeta + \sqrt{Ta} \partial_z w. \quad (5.45)$$

Nous effectuons ensuite la décomposition en modes normaux

$$\begin{pmatrix} w \\ \zeta \\ T \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W(z) \\ Z(z) \\ \Theta(z) \\ \Phi(z) \end{pmatrix} e^{i(a_x x + a_y y) + st} \quad (5.46)$$

où les amplitudes $W(z)$, $Z(z)$, $\Theta(z)$ et $\Phi(z)$ décrivent les variations inconnues par rapport à z de la vitesse verticale, de la composante verticale de la vorticité, de la température et du potentiel magnétique. Les équations

(5.44), (5.45), (5.41) et (5.42) s'écrivent maintenant

$$\begin{aligned} \chi^{-1} s (D^2 - a^2) W &= \Lambda Da (D^2 - a^2)^2 W - (D^2 - a^2) W - \sqrt{Ta} DZ \\ &\quad + N a^2 D\Phi - a^2 (Ra_p + N) \Theta, \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\chi^{-1} s Z = \Lambda Da (D^2 - a^2) Z - Z + \sqrt{Ta} DW, \quad (5.48)$$

$$s \Theta = (D^2 - a^2) \Theta + W, \quad (5.49)$$

$$(D^2 - a^2) \Phi - D\Theta = 0. \quad (5.50)$$

Les quatre équations (5.47) à (5.50) constituent un système d'équations différentielles ordinaires du dixième ordre dont la fermeture est assurée par l'imposition de conditions aux limites adéquates. Les parois sont supposées rigides et imperméables. La frontière inférieure est parfaitement conductrice de la chaleur alors que nous imposons une condition de Biot à la frontière supérieure.

Les conditions aux limites sur le potentiel magnétique ne sont pas triviales et méritent d'être étudiées en détail [Fynlayson, 1970; Stiles and Kagan, 1989]. Nous considérons la décomposition en modes normaux suivante pour le potentiel magnétique à l'extérieur de la couche de ferrofluide φ_e

$$\varphi_e(x, y, z) = \Phi_e(z) e^{i(a_x x + a_y y) + st}. \quad (5.51)$$

L'application du théorème de Stokes à l'équation de Maxwell (5.18) sur le contour $ABCD$ entourant la frontière (figure 5.3) implique que la composante horizontale du champ magnétique est continue au travers des frontières $z = 0$ et $z = 1$. En effet, étant donné que les côtés BC et AD ont une longueur proche de zéro, ils n'apportent aucune contribution à l'intégrale et on a

$$\oint_{ABCD} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (H_1^t - H_2^t) dl = 0, \quad (5.52)$$

où l'indice t dénote la composante tangentielle. En exprimant la relation (5.52) sur les frontières inférieure et supérieure en fonction des potentiels magnétiques, on obtient

$$\Phi|_{z=0} = \Phi_e|_{z=0}, \quad (5.53)$$

$$\Phi|_{z=1} = \Phi_e|_{z=1}. \quad (5.54)$$

Le théorème de la divergence appliqué à l'équation de Maxwell (5.17) sur le petit cylindre entourant la frontière (figure 5.3) impose quant à lui que la composante verticale de l'induction magnétique soit continue au travers des frontières $z = 0$ et $z = 1$. En effet, la surface latérale du cylindre étant de surface très petite, elle n'apporte pas de contribution à l'intégrale et on a

$$\oint_{cyl} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = (B_1^n - B_2^n) dS = 0, \quad (5.55)$$

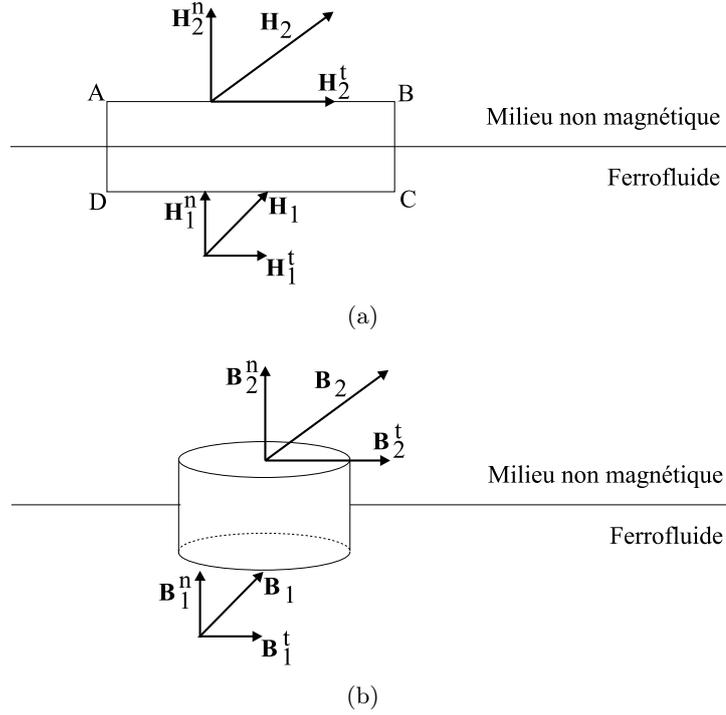


FIG. 5.3 – Continuité de la composante tangentielle de \mathbf{H} (a) et de la composante normale de \mathbf{B} (b) aux frontières horizontales délimitant le ferrofluide.

où l'indice n dénote la composante normale. La dépendance linéaire de la magnétisation avec la température donnée par l'équation (5.10) permet d'écrire

$$M'_z = -\alpha_{pm} T'. \quad (5.56)$$

Cette relation exprime que la perturbation verticale de magnétisation M'_z est uniquement due aux perturbations de température T' . En tenant compte de (5.56), la relation (5.55) s'écrit maintenant

$$D\Phi|_{z=0} - \Theta|_{z=0} = D\Phi_e|_{z=0}, \quad (5.57)$$

$$D\Phi|_{z=1} - \Theta|_{z=1} = D\Phi_e|_{z=1}. \quad (5.58)$$

En tenant compte des conditions aux limites thermiques sur les deux frontières, (5.57) et (5.58) deviennent

$$D\Phi|_{z=0} = D\Phi_e|_{z=0}, \quad (5.59)$$

$$D\Phi|_{z=1} + \frac{1}{Bi} D\Theta|_{z=1} = D\Phi_e|_{z=1}. \quad (5.60)$$

De plus, si nous supposons qu'à l'extérieur du ferrofluide il n'y a pas de magnétisation, l'équation de Maxwell (5.17) prend la forme harmonique suivante

$$\nabla^2 \varphi_e(x, y, z) = 0, \quad (5.61)$$

qui, vu la forme des perturbations (5.51), se réduit à

$$(D^2 - a^2) \Phi_e = 0. \quad (5.62)$$

Cette équation présente une solution du type

$$\Phi_e(z) = C_1 e^{az} + C_2 e^{-az}. \quad (5.63)$$

Pour $z > 0$, le potentiel magnétique doit rester fini lorsque $z \rightarrow \infty$, on a donc nécessairement $C_1 = 0$. De plus la condition (5.54) permet de déterminer C_2 :

$$C_2 = \Phi|_{z=1} e^a, \quad (5.64)$$

l'expression (5.60) s'écrit finalement

$$D\Phi|_{z=1} + a\Phi|_{z=1} + \frac{1}{Bi} D\Theta|_{z=1} = 0. \quad (5.65)$$

Le même raisonnement appliqué à la frontière inférieure donne

$$D\Phi|_{z=0} - a\Phi|_{z=0} = 0. \quad (5.66)$$

Les conditions aux limites pour le potentiel magnétique que nous venons de déterminer supposent que les surfaces horizontales délimitant la matrice poreuse ne présentent pas de magnétisation. Il est pourtant possible que le système soit borné par deux plaques ferromagnétiques, nous aurions alors [Gotoh and Yamada, 1982; Venkatasubramanian and Kaloni, 1994]:

$$\Phi(z=0) = 0, \quad (5.67)$$

$$\Phi(z=1) = 0. \quad (5.68)$$

Les équations du problème linéaire se résument de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \chi^{-1} s (D^2 - a^2) W &= \Lambda Da (D^2 - a^2)^2 W - (D^2 - a^2) W - \sqrt{Ta} DZ \\ &\quad + N a^2 D\Phi - a^2 (Ra_p + N) \Theta, \end{aligned} \quad (5.69)$$

$$\chi^{-1} s Z = \Lambda Da (D^2 - a^2) Z - Z + \sqrt{Ta} DW, \quad (5.70)$$

$$s \Theta = (D^2 - a^2) \Theta + W, \quad (5.71)$$

$$0 = (D^2 - a^2) \Phi - D\Theta, \quad (5.72)$$

avec les conditions aux limites:

$$W = DW = Z = \Theta = D\Phi - a\Phi = 0, \text{ en } z = 0, \quad (5.73)$$

$$W = DW = Z = D\Theta + Bi\Theta = D\Phi + a\Phi + \frac{1}{Bi} D\Theta = 0, \text{ en } z = 1. \quad (5.74)$$

Avant d'analyser les solutions du problème linéaire, il est intéressant de faire certaines remarques. Tout d'abord, lorsque Fynlayson [Fynlayson, 1970]

a étudié ce couplage des effets magnétique et gravifique sur un ferrofluide (en l'absence de rotation), il a mis en évidence la relation suivante entre les nombres de Rayleigh et de Kelvin

$$\frac{Ra_c}{Ra_0} + \frac{N_{cl}^c}{N_{cl_0}} = 1, \quad (5.75)$$

où Ra_0 et N_{cl_0} sont deux constantes. Cette relation n'est vérifiée exactement que pour des frontières libres mais on peut montrer qu'elle constitue une excellente approximation dans le cas de frontières rigides. Ce couplage étroit provient du fait que les deux mécanismes convectifs ont des nombres d'onde identiques; il ressemble formellement à celui mis en évidence par Nield [Nield, 1964] lors de l'étude combinée des effets gravifique et capillaire.

Fynlayson [Fynlayson, 1970] n'a jamais considéré que des fluides chauffés par le bas et n'a jamais envisagé d'autres possibilités. Berkovski et Bashtovoy [Bashtovoy et al., 1988] ont longuement discuté les nouvelles possibilités introduites par le champ magnétique et montré que c'est l'influence combinée des effets gravifique et magnétique qui détermine la stabilité du système. En effet, nous savons que de manière générale l'instabilité de Rayleigh pour un fluide Newtonien usuel ne se produit que lorsque le fluide est chauffé par le bas [Chandrasekhar, 1961]; la force de poussée résultant du déplacement d'une particule dans le fluide est dirigée dans le sens du déplacement. Dans le cas d'un ferrofluide soumis à l'action d'un champ magnétique, cette force de poussée est proportionnelle au carré du gradient de température dans la couche. Par conséquent, cette force sera toujours déstabilisante que le fluide soit chauffé par le bas ou par le haut. La présence de ces effets magnétiques autorisera donc l'apparition d'une instabilité même lorsque le fluide est chauffé par le haut à condition cependant que

$$\frac{N}{Ra_p} < -1, \quad Ra_p < 0. \quad (5.76)$$

On peut définir un nouveau nombre sans dimension

$$\mathcal{M} = \frac{N}{Ra_p} = \frac{\mu_0 \alpha_{pm}^2 \Delta T}{\rho_0 \alpha_T g d^*}, \quad (5.77)$$

que nous appellerons *taux de magnétisation* mesurant la force relative des effets magnétiques par rapport aux effets gravifiques. Lorsque $\mathcal{M} \rightarrow 0$, nous retrouvons une instabilité purement gravifique et lorsque $\mathcal{M} \rightarrow \pm\infty$ (selon que le fluide est chauffé par le bas ou par le haut), l'instabilité est purement magnétique. Ce nombre est proportionnel au gradient de température dans la couche.

En utilisant la définition de \mathcal{M} , les équations du problème linéaire peuvent

se récrire sous la forme

$$\begin{aligned} \chi^{-1}s(D^2 - a^2)W &= \Lambda Da (D^2 - a^2)^2 W - (D^2 - a^2)W - \sqrt{Ta} DZ \\ &\quad + Ra_p \mathcal{M} a^2 D\Phi - a^2 Ra_p (1 + \mathcal{M}) \Theta, \end{aligned} \quad (5.78)$$

$$\chi^{-1}sZ = \Lambda Da (D^2 - a^2)Z - Z + \sqrt{Ta} DW, \quad (5.79)$$

$$s\Theta = (D^2 - a^2)\Theta + W, \quad (5.80)$$

$$0 = (D^2 - a^2)\Phi - D\Theta, \quad (5.81)$$

alors que les conditions aux limites restent inchangées:

$$W = DW = Z = \Theta = D\Phi - a\Phi = 0, \text{ en } z = 0, \quad (5.82)$$

$$W = DW = Z = D\Theta + Bi\Theta = D\Phi + a\Phi + \frac{1}{Bi}D\Theta = 0, \text{ en } z = 1. \quad (5.83)$$

5.3 Courbes neutres pour un chauffage par le bas

5.3.1 Frontières horizontales libres

Dans le chapitre 1 nous avons évoqué le fait que les études antérieures [Sekar et al., 1993; Sekar and Vaidyanathan, 1993] n'avaient pas abordé le problème du chauffage par le haut. Ceci est dû au choix du facteur d'échelle de température

$$\text{Échelle de température: } \frac{\kappa_l a \sqrt{Ra}}{\mu_l \Delta T}. \quad (5.84)$$

Ce facteur d'échelle fait apparaître la racine carrée du nombre de Rayleigh et doit par conséquent être positif ce qui limite l'analyse au seul cas du chauffage par le bas. Nous avons contourné cette difficulté en choisissant une adimensionalisation différente comme suggéré par Stiles et Kagan [Stiles and Kagan, 1989] pour l'étude d'un ferrofluide en rotation. D'autre part, l'adimensionalisation de Sekar *et al.* est liée aux grandeurs caractéristiques du ferrofluide. Ceci a d'importantes conséquences. En effet, ces auteurs observent une solution oscillante en chauffant par le bas et ce, uniquement pour des nombres de Taylor très grands. Notre choix d'adimensionalisation rend mieux compte de la physique du système étant donné qu'il est basé sur des facteurs d'échelle associés au milieu poreux saturé.

Nous avons mentionné dans le chapitre 1 que les études de l'influence de la rotation sur un milieu poreux saturé par un ferrofluide avaient toutes été réalisées dans une configuration libre-libre [Sekar et al., 1993; Sekar and Vaidyanathan, 1993]. Les conditions aux limites correspondantes s'écrivent

$$W = D^2W = DZ = \Theta = D\Phi = 0, \text{ en } z = 0, \quad (5.85)$$

$$W = D^2W = DZ = \Theta = D\Phi = 0, \text{ en } z = 1. \quad (5.86)$$

Da	χ	Ta_l	Ta	Ce travail			Sekar	
				Ra_p^c	a_c	s_i^c	Ra_p^c	a_c
10^{-1}	10^{-1}	10	10^{-1}	85.8	2.7	0	86.9	2.5
		10^3	10	133.5	3.6	0	133.8	3.5
		10^8	10^6	861.8	6.1	45.5	862.7	6.0
10^{-3}	10	10	10^{-5}	29.7	3.5	0	29.7	3.5
		10^3	10^{-3}	29.7	3.5	0	29.7	3.5
		10^8	10^2	152.1	7.1	32.1	152.3	7.0

TAB. 5.2 – Comparaison des valeurs critiques obtenues dans ce travail avec celles de Sekar [Sekar and Vaidyanathan, 1993]

Afin de valider notre méthode de Tau-Chebyshev, nous allons tout d'abord utiliser ces conditions pour résoudre le problème linéaire (5.78)-(5.81) et comparer les valeurs critiques avec celles, obtenues analytiquement, par Sekar [Sekar and Vaidyanathan, 1993] avec un modèle de Brinkman.

Nous allons comparer les valeurs critiques obtenues par Sekar [Sekar and Vaidyanathan, 1993] dans la limite de champ fort² avec celles que donne notre méthode Tau-Chebyshev. Le tableau 5.2 présente ces valeurs critiques pour un nombre de Prandtl et un taux de magnétisation donné par

$$Pr = 0.01, \quad (5.87)$$

$$\mathcal{M} = 0.67794, \quad (5.88)$$

pour plusieurs valeurs du nombre de Darcy et plusieurs valeurs du nombre de Taylor liquide ($Ta_l = \frac{4\Omega^2}{d^*4\nu^2}$). Nous avons aussi ajouté dans ce tableau les valeurs correspondantes du nombre de Prandtl de filtration et du nombre de Taylor poreux. On observe tout d'abord un excellent accord entre les valeurs que nous obtenons numériquement et les valeurs analytiques de Sekar. Lorsque la convection est oscillante, nous avons ajouté la valeur de la fréquence d'oscillation alors que Sekar n'en donne pas les valeurs. Le tableau 5.2 nous donne l'occasion de commenter les nombres sans dimension choisis par Sekar. En effet, si nous savons que le modèle de Brinkman est particulièrement adapté aux milieux poreux très perméables, des valeurs de Da l'ordre de 10^{-1} sont cependant très élevées et peu représentatives de milieux poreux classiques. D'autre part, on observe très facilement que les nombres de Taylor liquide très élevés invoqués par Sekar correspondent à des valeurs plus que raisonnables du nombre de Taylor poreux. Enfin, Sekar justifie le choix d'un nombre de Prandtl de 10^{-2} par le fait que la condition $Pr < 1$ doit être satisfaite pour pouvoir observer des solutions oscillantes. Cette re-

2. Sekar [Sekar and Vaidyanathan, 1993] n'a pas fait cette hypothèse de champ fort. Il considère en effet que la magnétisation du ferrofluide est non seulement une fonction de la température mais aussi du champ magnétique. Il présente cependant dans ses résultats le cas où la magnétisation n'est plus fonction que de la température.

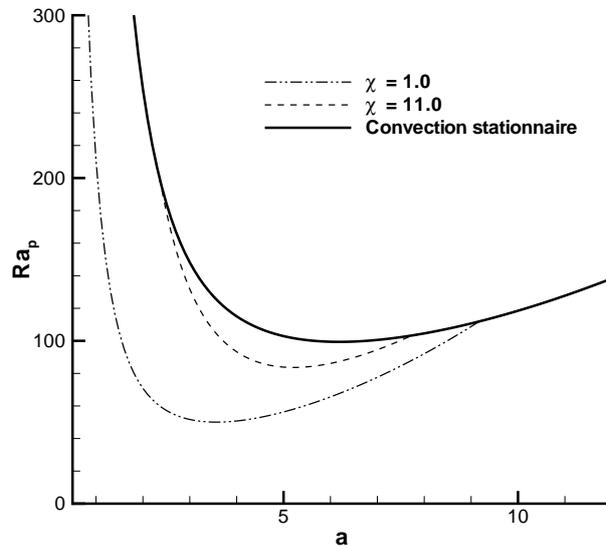


FIG. 5.4 – Courbes de stabilité marginale pour $Da = 10^{-5}$, $Ta = 10$ et $\mathcal{M} = 1$. Les courbes en pointillés représentent la convection oscillante et les courbes pleines la convection stationnaire.

marque est pertinente dans le cas d'un fluide pur [Chandrasekhar, 1961] mais devient caduque dans le cas d'un milieu poreux comme nous l'avons montré au chapitre 4 et comme l'avait déjà suggéré Vadasz [Vadasz, 1998a].

5.3.2 Frontières horizontales rigides

Nous allons maintenant nous intéresser à la situation plus physique où le ferrofluide est délimité par deux surfaces rigides. Ce problème a été étudié par Venkatasubramanian [Venkatasubramanian and Kaloni, 1994] dans le cas d'un ferrofluide en rotation mais le problème analogue dans une matrice poreuse n'a pas été analysé.

En examinant les équations (5.78)-(5.81), on voit facilement que l'étude de la convection dans un milieu poreux saturé par un ferrofluide constitue une généralisation du problème analysé dans le chapitre 4. En effet, il suffit de changer la valeur du taux de magnétisation pour modifier l'influence relative des effets gravifique et magnétique. Il est intéressant de comparer les courbes neutres obtenues pour plusieurs valeurs de \mathcal{M} avec celles du §4.4.1. Nous reprenons ainsi $Da = 10^{-5}$, $Bi = \infty$ et $\Lambda = 1$. Les figures 5.4 et 5.5 montrent les courbes neutres correspondant à $\mathcal{M} = 1$ pour $Ta = 10$ et $Ta = 100$. Les effets gravifiques et magnétiques sont d'amplitudes comparables et nous voyons que les courbes conservent l'allure générale qu'elles

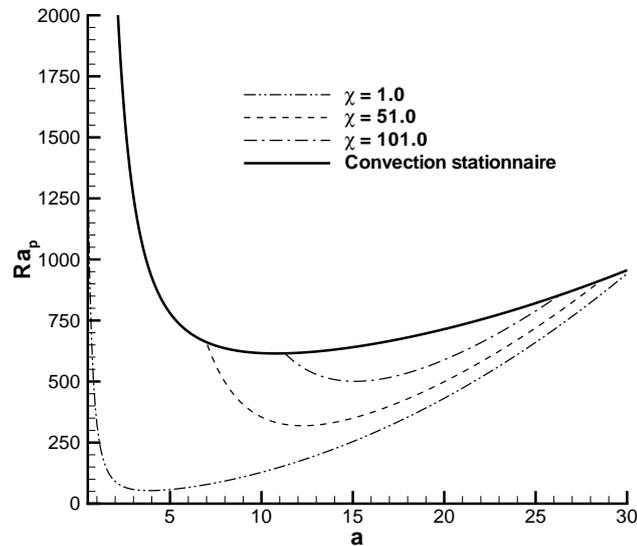


FIG. 5.5 – Courbes de stabilité marginale pour $Da = 10^{-5}$, $Ta = 100$ et $\mathcal{M} = 1$. Les courbes en pointillés représentent la convection oscillante et les courbes pleines la convection stationnaire.

avaient en l'absence de magnétisation (voir figure 4.3). L'état marginal est tantôt stationnaire, tantôt oscillant selon les valeurs du nombre de Prandtl de filtration χ . Le système étant chauffé par le bas, les effets gravifique et magnétique sont simultanément déstabilisants et l'on peut donc s'attendre à une apparition plus rapide de phénomènes convectifs. La figures 5.4 et 5.5 confirment cette attente et nous voyons de plus que le nombre d'onde critique demeure pratiquement inchangé par rapport au cas du milieu poreux saturé par un fluide pur. Les figures 5.6 et 5.7 donnent l'évolution de la fréquence correspondante associée aux modes oscillants. On observe que ces fréquences sont pratiquement indépendantes de la présence d'un ferrofluide dans la matrice poreuse (voir figure 4.4).

Si nous augmentons la valeur de \mathcal{M} (figures 5.8 et 5.9), nous renforçons encore les effets magnétiques et le seuil de convection diminue avec pour conséquence un gradient de température critique beaucoup plus faible. Si par contre nous diminuons le taux de magnétisation (figures 5.10 et 5.11), les effets magnétiques demeurent actifs mais leur amplitude est très faible et les courbes neutres sont pratiquement identiques à celles obtenues en l'absence de ferroconvection.

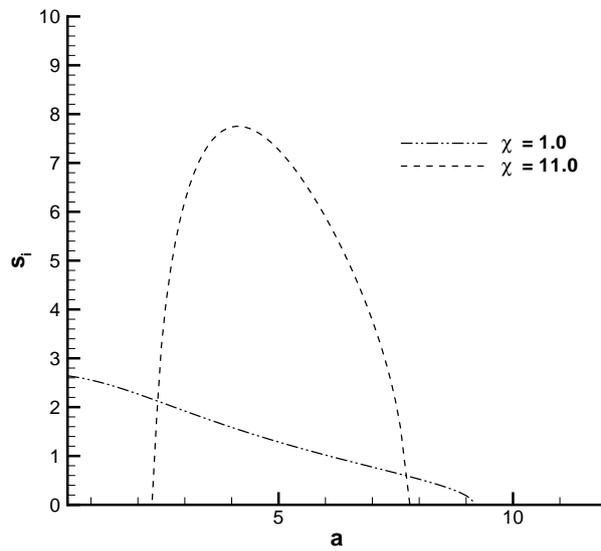


FIG. 5.6 – Fréquence associée au mode oscillant en fonction du nombre d'onde pour $Da = 10^{-5}$, $Ta = 10$ et $\mathcal{M} = 1$.

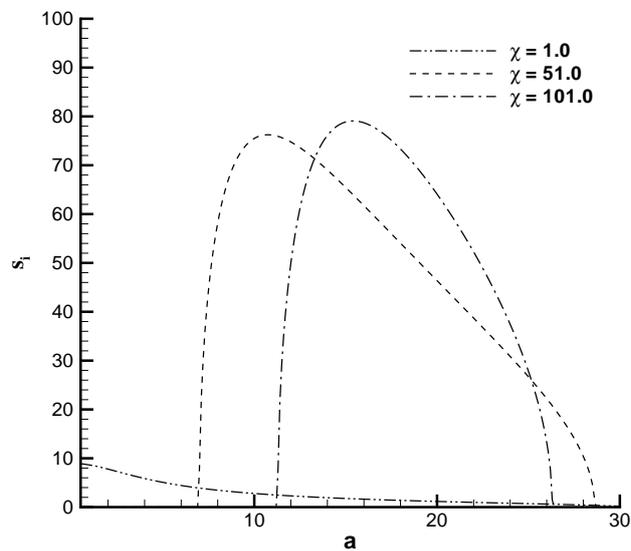


FIG. 5.7 – Fréquence associée au mode oscillant en fonction du nombre d'onde pour $Da = 10^{-5}$, $Ta = 100$ et $\mathcal{M} = 1$.

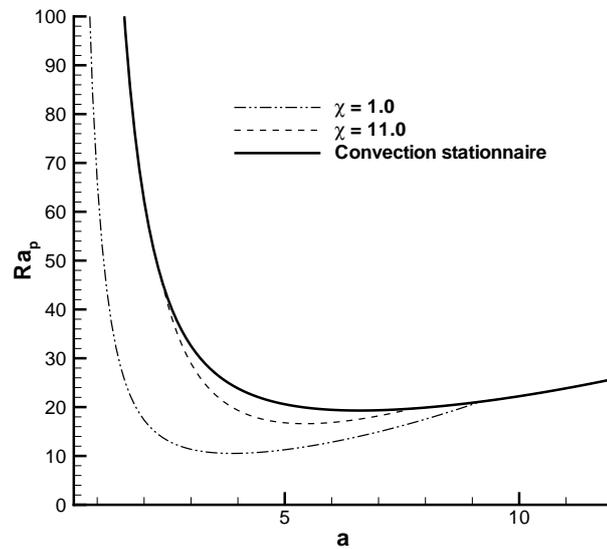


FIG. 5.8 – Courbes de stabilité marginale pour $Da = 10^{-5}$, $Ta = 10$ et $\mathcal{M} = 10$. Les courbes en pointillés représentent la convection oscillante et les courbes pleines la convection stationnaire.

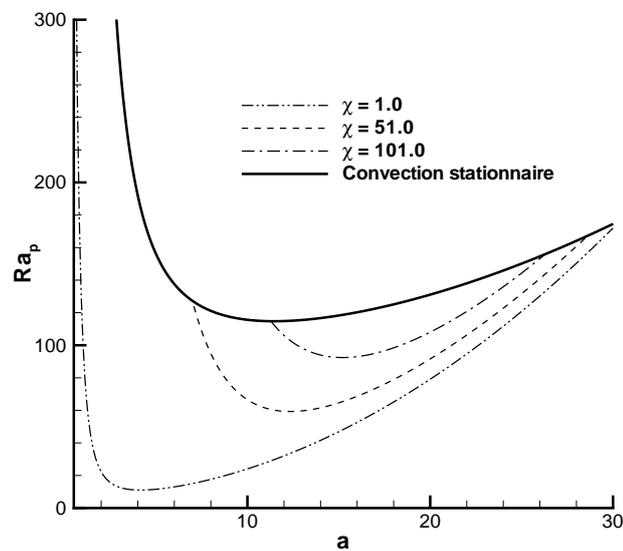


FIG. 5.9 – Courbes de stabilité marginale pour $Da = 10^{-5}$, $Ta = 100$ et $\mathcal{M} = 10$. Les courbes en pointillés représentent la convection oscillante et les courbes pleines la convection stationnaire.

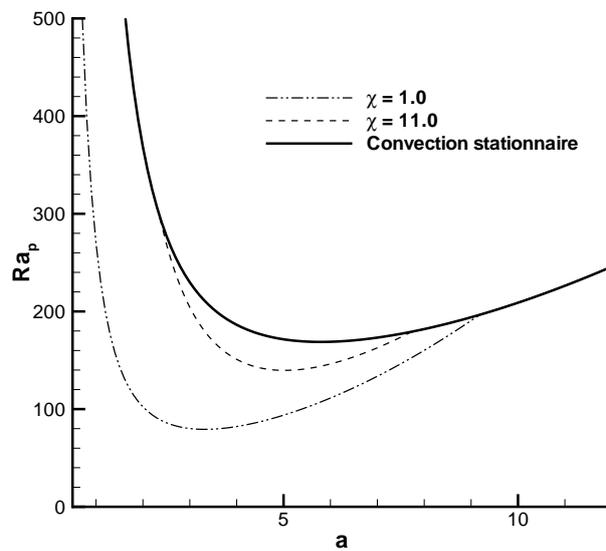


FIG. 5.10 – Courbes de stabilité marginale pour $Da = 10^{-5}$, $Ta = 10$ et $\mathcal{M} = 0.1$. Les courbes en pointillés représentent la convection oscillante et les courbes pleines la convection stationnaire.

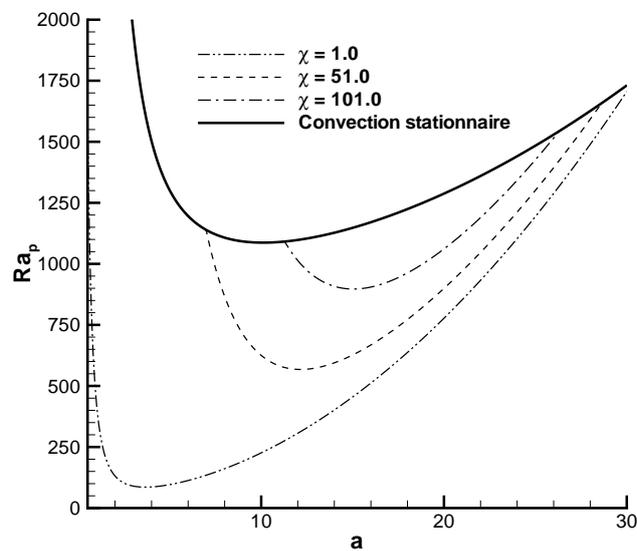


FIG. 5.11 – Courbes de stabilité marginale pour $Da = 10^{-5}$, $Ta = 100$ et $\mathcal{M} = 0.1$. Les courbes en pointillés représentent la convection oscillante et les courbes pleines la convection stationnaire.

5.4 Ferroconvection pour un chauffage par le haut

5.4.1 Courbes neutres

Nous considérons maintenant le cas où le système est chauffé par le haut. Comme nous l'avons déjà mentionné précédemment, le nombre de Rayleigh poreux Ra_p qui est proportionnel à ΔT devient négatif alors que le nombre de Kelvin poreux N reste positif vu qu'il est proportionnel à $(\Delta T)^2$. Par conséquent, le taux de magnétisation \mathcal{M} est lui aussi négatif. Pour simplifier les notations, nous allons poser

$$R_p = -Ra_p, \quad (5.89)$$

qui représente une grandeur positive lors d'un chauffage par le haut. Nous exprimerons l'ensemble des résultats de cette section au moyen de ce nouveau paramètre.

Avant d'examiner les courbes neutres, nous avons représenté la plus grande valeur de la partie réelle du taux de croissance des perturbations sur la figure 5.12 pour $Da = 10^{-5}$, $Ta = 10$, $\chi = \infty$ et $\mathcal{M} = -2$ et pour plusieurs valeurs de R_p . On voit d'une part que la partie réelle du taux de croissance présente un maximum pour une certaine valeur du nombre d'onde et d'autre part que l'instabilité est possible ($\Re(s) > 0$) pour un certain intervalle de nombre d'onde dès lors que $R_p > 3209.8$.

La figure 5.13 montre l'évolution de R_p en fonction du nombre d'onde pour $Ta = 10$ et $Ta = 100$. On observe sur ces courbes de nombreuses discontinuités ainsi que plusieurs minima locaux aussi bien oscillants que stationnaires. Ces discontinuités proviennent du fait que nous avons représenté les états de stabilité marginale c'est-à-dire les plus petites valeurs de R_p donnant lieu à une instabilité. Le problème aux valeurs propres générant un nombre infini de valeurs propres par nombre d'onde, il se peut que pour deux nombres d'ondes voisins, ce ne soit pas la même valeur propre qui bifurque la première. En d'autres mots, nous observerons une structuration verticale différente suivant la valeur du nombre d'onde. La figure 5.15 montre l'allure d'une courbe stationnaire. La courbe en trait plein représente la stabilité marginale: elle est constituée de trois portions correspondant à des nombres d'onde verticaux différents, c'est-à-dire à un nombre de cellules de convection différent selon la verticale. Certaines portions des courbes sont en pointillés pour montrer que dans ce cas, il existe une autre structuration verticale plus stable. Afin d'éclairer notre propos, nous avons tracé sur la figure 5.16 la courbe de stabilité marginale stationnaire correspondant à $Da = 10^{-5}$, $\mathcal{M} = -2$ et $Ta = 10$. Pour trois valeurs du nombre d'onde a , nous avons représenté la fonction de courant. On voit ainsi que lorsque $a = 1$, la structuration verticale la plus stable correspond à une seule cellule. Lorsque $a = 3$, la structuration verticale la plus stable comporte maintenant deux cellules et puis trois pour $a = 6$. Le raisonnement que nous venons de

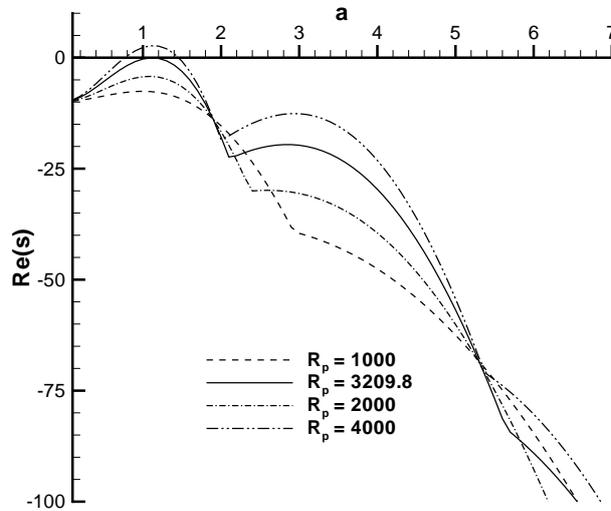


FIG. 5.12 – Valeur propre la plus dangereuse en fonction du nombre d'onde pour $Da = 10^{-5}$, $\mathcal{M} = -2$, $Ta = 10$ et $\chi = 10$.

tenir pour justifier les discontinuités dans les courbes neutres reste valable pour expliquer les discontinuités présentes dans les courbes d'évolution de la fréquence des solutions oscillantes (figure 5.14).

La figure 5.13 montre également qu'il existe certaines valeurs particulières du nombre de Prandtl de filtration pour lesquelles le minimum stationnaire serait identique à un minimum oscillant. Pour ces valeurs particulières, un mode stationnaire de nombre d'onde vertical égal à 1 est en compétition avec un mode oscillant de nombre d'onde vertical égal à n . Une perspective très intéressante de ce travail consisterait, par conséquent, à étudier au moyen d'une analyse faiblement non-linéaire la résonance entre le mode 1 et le mode n .

Cette explication de l'allure générale des courbes neutres pour le chauffage par le haut nous permet de déduire quelques conclusions intéressantes de la figure 5.13. Dans le cas de la convection stationnaire, la structuration verticale la plus stable correspond à une seule cellule comme dans le cas du chauffage par le bas et dans la plupart des problèmes de convection classiques [Colinet et al., 2001]. La situation est fondamentalement différente pour la convection oscillante. Si nous prenons le cas $\chi = 11$ et $Ta = 10$, le nombre d'onde critique est de l'ordre de 3 et l'on s'attend à deux cellules suivant la verticale comme le confirme la fonction de courant représentée sur la figure 5.17. Pour $\chi = 51$ et $Ta = 100$, la différence est encore plus marquée étant

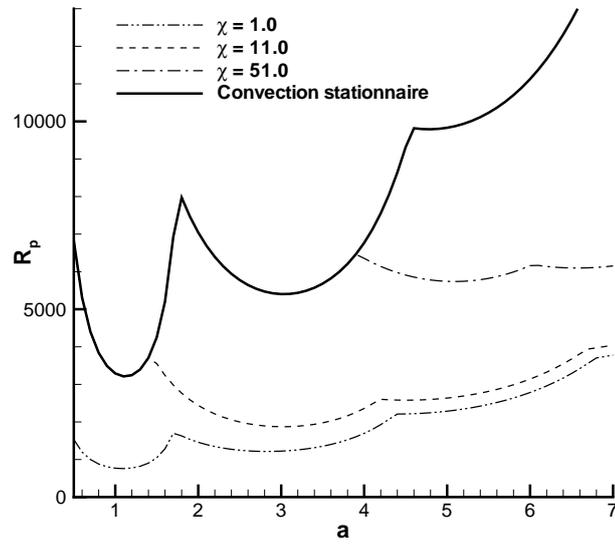
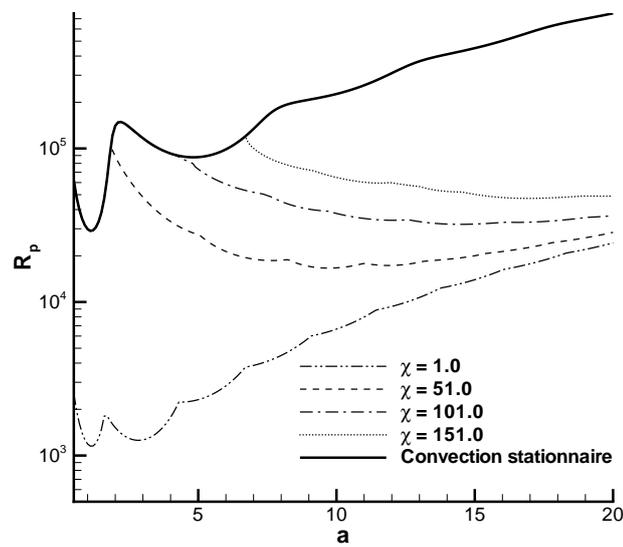
(a) $Ta = 10$ (b) $Ta = 100$

FIG. 5.13 – Courbes de stabilité marginale pour $Da = 10^{-5}$ et $\mathcal{M} = -2.0$. Les courbes en pointillés représentent la convection oscillante et les courbes pleines la convection stationnaire.

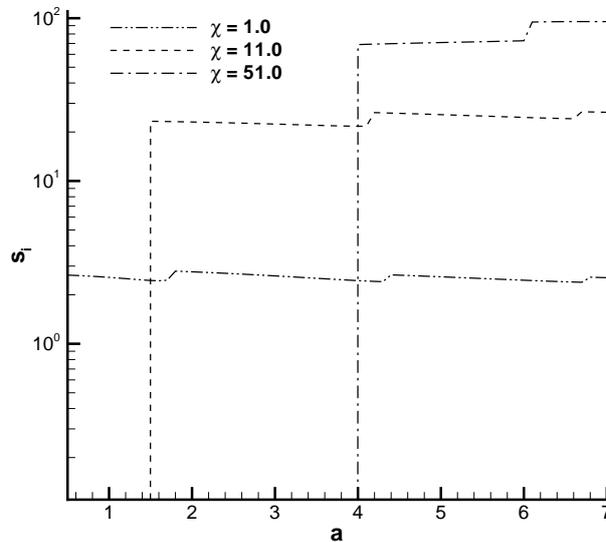


FIG. 5.14 – Fréquence associée au mode oscillant en fonction du nombre d'onde pour $Da = 10^{-5}$, $\mathcal{M} = -2$ et $Ta = 10$.

\mathcal{M}	Ra_p^c	a_c	s_i^c
2	55.62	5.18	7.10
-2	-1783.14	3.00	20.89
5	28.86	5.27	6.97
-5	-5532.27	1.55	21.94

TAB. 5.3 – Comparaison des valeurs critiques pour $Da = 10^{-5}$, $Ta = 10$, $\chi = 1$ et pour plusieurs valeurs de \mathcal{M} .

donné que l'on observe cinq cellules suivant la verticale.

Comme nous pouvions nous y attendre, les valeurs du seuil de convection sont beaucoup plus élevées que dans le cas du chauffage par le bas. En effet, seuls les effets magnétiques tendent à déstabiliser le système alors que les effets gravifiques le stabilisent; il faudra fournir une beaucoup plus grande quantité d'énergie pour que les effets déstabilisants l'emportent et que l'instabilité apparaisse. Le tableau 5.3 reprend les valeurs critiques correspondant à $Da = 10^{-5}$, $Ta = 10$, $\chi = 1$ pour $\mathcal{M} = \pm 2$ et $\mathcal{M} = \pm 5$. La gravité et la magnétisation du ferrofluide ont une importance relative identique mais des signes opposés. On voit dans ce tableau que les nombres de Rayleigh critiques correspondant respectivement à $\mathcal{M} = -2$ et $\mathcal{M} = 2$ sont dans un rapport de l'ordre de 30. Ce rapport grimpe presque à 200 pour $\mathcal{M} = -5$ et $\mathcal{M} = 5$. Le tableau 5.3 montre aussi que le nombre d'onde critique est plus

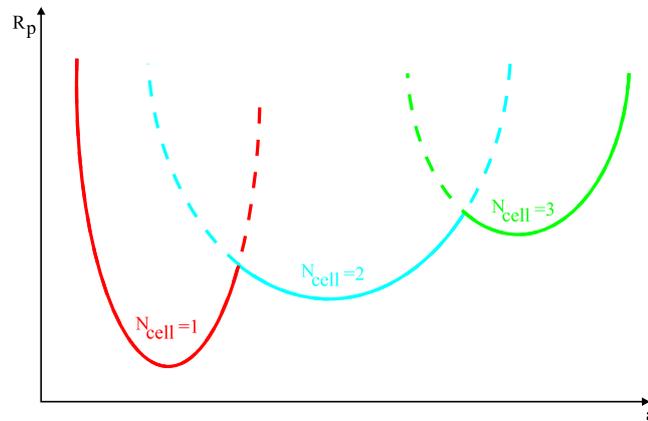


FIG. 5.15 – Représentation schématique d'une courbe neutre stationnaire présentant une structuration verticale fonction du nombre d'onde. Les courbes en trait plein caractérisent la stabilité marginale. Les courbes en pointillés sont les parties des courbes neutres pour lesquelles il existe une structuration verticale plus stable.

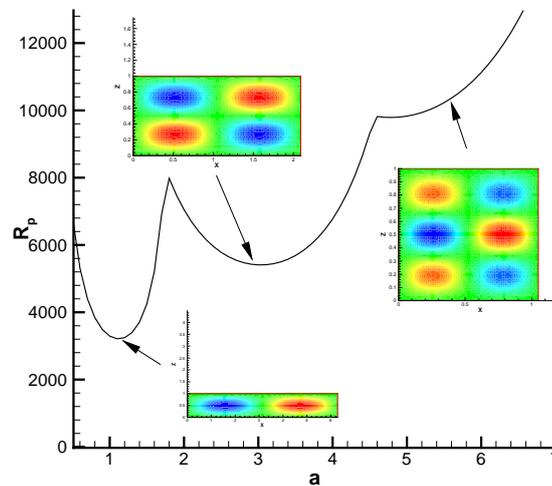


FIG. 5.16 – Allure de la fonction de courant en plusieurs points de la courbes neutre stationnaire correspondant à $Da = 10^{-5}$, $\mathcal{M} = -2.0$ et $Ta = 10$.

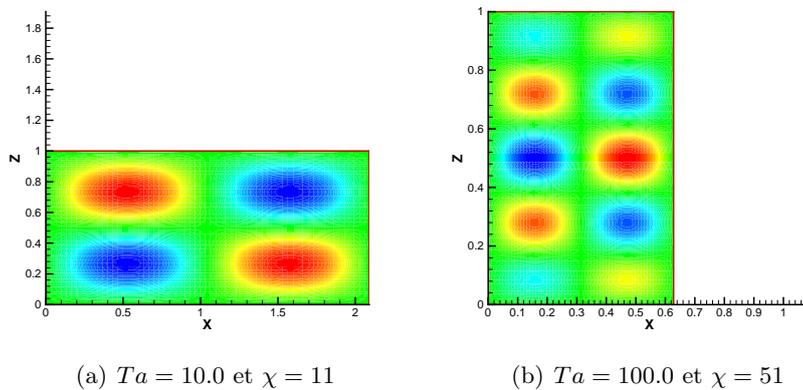


FIG. 5.17 – *Fonctions de courant au voisinage du point critique pour $Da = 10^{-5}$, $\mathcal{M} = -2.0$.*

élevé pour un chauffage par le bas que pour un chauffage par le haut tandis que la fréquence critique répond au comportement inverse.

5.4.2 Influence du nombre de Darcy

La figure 5.18 montre l'influence de Da sur les courbes neutres pour $Ta = 10$, $\chi = 10$ et $\mathcal{M} = -2$. Lorsque Da est petit, la convection est oscillante alors qu'elle devient progressivement stationnaire pour des nombres de Darcy plus grands. Ces conclusions confirment les résultats du §4.4.5 pour un milieu poreux en rotation et chauffé par le bas.

5.5 Résumé

Dans ce chapitre, nous avons étendu les concepts introduits au chapitre 4 au cas où la matrice poreuse est saturée par un ferrofluide. Nous avons établi les équations d'évolution des perturbations de vitesse verticale, de température et de la composante verticale de la vorticité. Ces équations mettent en évidence deux mécanismes distincts de convection: l'un gravifique et l'autre magnétique. Le premier de nature déstabilisante lorsque le système est chauffé par le bas alors que le second est déstabilisant quelle que soit le sens du gradient thermique.

Dans un premier temps, nous avons validé notre modèle de Brinkman étendu en comparant nos résultats avec ceux d'études antérieures [Sekar et al., 1993; Sekar and Vaidyanathan, 1993] pour le problème académique d'un milieu poreux en rotation, saturé par un ferrofluide et délimité par deux surfaces libres. Les valeurs critiques obtenues sont en très bon accord.

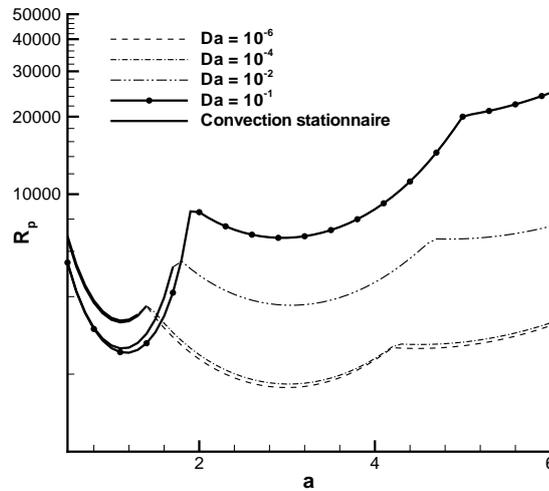


FIG. 5.18 – Influence du nombre de Darcy sur les courbes neutres pour $Ta = 10$, $\chi = 10$ et $M = -2$. Les courbes en pointillés traduisent une convection oscillante.

Ensuite, nous avons examiné la situation plus physique où le milieu poreux est délimité par deux surfaces rigides. Cette configuration n'avait pas encore fait l'objet d'une étude approfondie et constituait un prolongement naturel du modèle développé au chapitre 4. Lorsque le système est chauffé par le bas, les effets magnétique et gravifique sont simultanément déstabilisants et l'on s'attend par conséquent à un nombre de Rayleigh critique plus faible, c'est-à-dire un système instable plus rapidement comme le confirme l'examen des courbes neutres. L'allure générale des courbes neutres aussi bien stationnaires qu'oscillantes est identique à celle que nous avons obtenue au chapitre 4 lorsque la matrice poreuse était saturée par un fluide Newtonien. L'influence du nombre de Taylor et du nombre de Prandtl est elle aussi semblable. Cette similitude provient du fait que, lors d'un chauffage par le bas, les effets gravifique et magnétique s'additionnent pour donner lieu à une instabilité de Rayleigh plus intense. Enfin, nous avons aussi examiné l'influence du nombre de Darcy sur les courbes neutres pour montrer que la convection devenait progressivement stationnaire lorsque le nombre de Darcy augmentait.

Nous avons terminé notre analyse du ferrofluide en rotation par l'étude du chauffage par le haut qui n'avait jamais été envisagé auparavant dans un milieu poreux. Nous avons montré que les courbes neutres avaient une allure très différente de celle des courbes obtenues pour le chauffage par le bas. Les courbes neutres, qu'elles soient stationnaires ou oscillantes présentent une

succession de minima secondaires dont l'origine a été élucidée par le tracé des fonctions de courant correspondantes. Nous avons ainsi montré que ces différents minima étaient caractéristiques d'une structuration verticale (*i.e.* un nombre d'onde vertical) différente. Dans le cas des courbes stationnaires, la valeur critique (*i.e.* le minimum absolu) correspond toujours à un nombre d'onde vertical égal à un comme lors du chauffage par le bas. La situation est différente pour les courbes oscillantes où le point critique peut se caractériser par un nombre d'onde vertical supérieur à un.

Chapitre 6

Analyse non-linéaire d'une couche poreuse en rotation

La science d'aujourd'hui nous montre que la nature est impitoyablement *non* linéaire. Ainsi, je ne sais pas quelle est l'occupation de Dieu, mais celle-ci ne peut pas concerner des formules explicites.

Ian Stewart
Dieu joue-t-il aux dés?

6.1 Introduction

Nous avons vu au cours des chapitres précédents que l'étude des équations linéarisées autour de l'état conducteur de repos permettait de déterminer le seuil d'instabilité de cet état, c'est-à-dire le gradient de température critique au-delà duquel l'état conducteur est instable. De plus, cette analyse linéaire donne des informations sur le caractère stationnaire ou oscillant du seuil de convection et permet dans ce dernier cas de déterminer la fréquence d'oscillation. Enfin, l'analyse linéaire permet de calculer la dépendance suivant z de la perturbation critique. Dans l'hypothèse d'un système d'extension horizontale infinie, la forme de la perturbation critique est horizontalement indéterminée. L'analyse linéaire s'avère donc insuffisante pour la détermination de la forme de l'écoulement, même lorsque l'écart au seuil est infinitésimal. Cet écart au seuil ϵ est la distance relative au seuil définie par

$$\epsilon = \frac{\Delta T - \Delta T_c}{\Delta T_c}. \quad (6.1)$$

L'analyse non-linéaire que nous allons développer dans ce chapitre va tenter de combler les lacunes inhérentes à l'analyse linéaire. Étant donné que la solution non-linéaire sera décomposée en une série finie de fonctions, on comprend que la validité des résultats dépendra très largement du choix judicieux de la base de fonctions de décomposition et du nombre de fonctions effectivement utilisées pour les résolutions numériques. Dans ce travail, nous nous limiterons à l'étude d'écoulement en régime faiblement non-linéaire c'est-à-dire lorsque l'écart au seuil ϵ est petit¹ afin de limiter le nombre de fonctions d'essai nécessaires.

6.2 Écriture du problème non-linéaire

Soit un milieu poreux en rotation autour d'un axe vertical comme au chapitre 4. Les équations qui gouvernent l'évolution non-linéaire des perturbations de vitesse verticale, de la composante verticale de la vorticité et de température s'écrivent

$$\chi^{-1} (\partial_t \nabla^2 w + \phi^{-1} [\nabla_h^2 N(w) - \partial_{xz}^2 N(u) - \partial_{yz}^2 N(v)]) = Ra_p \nabla_h^2 T + \Lambda Da \nabla^4 w - \nabla^2 w - \sqrt{Ta} \partial_z \zeta, \quad (6.2)$$

$$\chi^{-1} \partial_t \zeta + \chi^{-1} \phi^{-1} [\partial_x N(v) - \partial_y N(u)] = \Lambda Da \nabla^2 \zeta - \zeta + \sqrt{Ta} \partial_z w, \quad (6.3)$$

$$\partial_t T + N(T) = \nabla^2 T + w, \quad (6.4)$$

où $N(*) = (\mathbf{u} \cdot \nabla)(*)$. De manière plus compacte, ces équations peuvent se mettre sous la forme

$$\mathcal{L}_c \mathbf{f} + \mathcal{L}_{\Delta_c} \mathbf{f} = \mathcal{L}_t \partial_t \mathbf{f} + \mathcal{N} \mathcal{L}(\mathbf{f}, \mathbf{f}), \quad (6.5)$$

où \mathbf{f} est le vecteur des inconnues

$$\mathbf{f} = [w, \zeta, T]^T. \quad (6.6)$$

\mathcal{L}_c , \mathcal{L}_{Δ_c} et \mathcal{L}_t sont des opérateurs différentiels linéaires:

$$\mathcal{L}_c = \begin{bmatrix} \Lambda Da \nabla^4 - \nabla^2 & -\sqrt{Ta} \partial_z & Ra_p^c \nabla_h^2 \\ \sqrt{Ta} \partial_z & -1 + \Lambda Da \nabla^2 & \cdot \\ 1 & \cdot & \nabla^2 \end{bmatrix}, \quad (6.7)$$

1. Le terme "petit" est volontairement vague. Les développements analytiques sont justifiés pour $\epsilon \lesssim 0.1$ mais les comparaisons de certains résultats avec des expériences [Regnier et al., 1997; Nitschke and Thess, 1995; Dauby et al., 2001] indiquent que ces résultats demeurent qualitativement valables, relativement loin du seuil ($\epsilon \simeq 1 - 3$).

$$\mathcal{L}_{\Delta_c} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & (Ra_p - Ra_p^c) \nabla_h^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad (6.8)$$

$$\mathcal{L}_t = \begin{bmatrix} \chi^{-1} \nabla^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \chi^{-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

où Ra_p^c est le nombre de Rayleigh poreux évalué au seuil de convection linéaire. \mathcal{L}_c et \mathcal{L}_{Δ_c} sont respectivement l'opérateur linéaire calculé au seuil et l'opérateur linéaire représentant l'écart au seuil de convection. Nous avons donc choisi de résoudre le problème aux valeurs propres linéaire au seuil de stabilité linéaire. Les équations aux amplitudes sont ainsi établies pour un intervalle de valeurs de Ra_p ce qui permet d'étudier les différents régimes correspondants sans devoir recalculer les coefficients des équations. En effet, un choix plus raisonnable serait de prendre comme valeur particulière de Ra_p à laquelle nous allons résoudre le problème aux valeurs propres linéaire la valeur pour laquelle nous désirons obtenir la solution non-linéaire [Bestehorn, 1993]. Ce choix présente cependant l'inconvénient majeur de fournir des équations aux amplitudes valables pour une et une seule valeur de Ra_p . Cependant, pour des écoulements faiblement non-linéaires, l'écart au seuil ϵ reste faible et par conséquent $Ra_p \simeq Ra_p^c$ et les deux approches seront donc sensiblement identiques. Pour des raisons d'économie de calculs numériques, notre choix se portera sur la première méthode. En tenant compte de la définition de l'écart au seuil ϵ , \mathcal{L}_{Δ_c} s'écrit

$$\mathcal{L}_{\Delta_c} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \epsilon Ra_p^c \nabla_h^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad (6.10)$$

Enfin, $\mathcal{NL}(\mathbf{f}, \mathbf{f})$ est l'opérateur reprenant les termes non-linéaires des équations, à savoir

$$\mathcal{NL}(\mathbf{f}, \mathbf{f}) = \begin{bmatrix} \chi^{-1} \phi^{-1} [\nabla_h^2 N(w) - \partial_{xz}^2 N(u) - \partial_{yz}^2 N(v)] \\ \chi^{-1} \phi^{-1} [\partial_x N(v) - \partial_y N(u)] \\ N(T) \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

Le problème défini par la relation compacte (6.5) est complété par les condi-

tions aux limites suivantes

$$\text{en } z = 0, \quad w = 0, \quad (6.12)$$

$$\partial_z w = 0, \quad (6.13)$$

$$\zeta = 0, \quad (6.14)$$

$$T = 0 ; \quad (6.15)$$

$$\text{en } z = 1, \quad w = 0, \quad (6.16)$$

$$\partial_z w = 0, \quad (6.17)$$

$$\zeta = 0, \quad (6.18)$$

$$\partial_z T + \frac{Bi_m}{1 - Bi_m} T = 0. \quad (6.19)$$

6.3 Problème linéaire direct aux valeurs propres

La méthode d'analyse du problème non-linéaire est basée sur un développement des champs inconnus en série. Il est donc important de définir judicieusement la base de fonctions qui serviront à ce développement. Ces fonctions sont choisies comme les fonctions propres du problème linéaire suivant

$$\mathcal{L}_c \mathbf{f} - \mathcal{L}_t \mathbf{f} = 0, \quad (6.20)$$

associé aux conditions aux limites (6.12)-(6.19). Comme nous l'avons remarqué dans le paragraphe 2.7, les solutions de ce problème peuvent s'écrire sous la forme

$$\mathbf{f}_p = \sum_{\mathbf{a}} \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}}(z) e^{s_{p,\mathbf{a}} t} e^{i\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}, \quad p = 0, 1, 2 \dots \quad (6.21)$$

la somme portant sur l'ensemble des vecteurs d'onde $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ alors que $\mathbf{r} = (x, y)$ est le vecteur position horizontal. De plus, $s_{p,\mathbf{a}}$ et $\mathbf{F}_{p,\mathbf{a}}(z)$ sont respectivement les valeurs propres et vecteurs propres du problème aux valeurs propres suivant

$$L_c \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}} = s_{p,\mathbf{a}} L_t \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}} \quad (6.22)$$

Les valeurs propres sont classées par ordre décroissant de leur partie réelle,

$$\Re(s_{0,\mathbf{a}}) > \Re(s_{1,\mathbf{a}}) > \Re(s_{2,\mathbf{a}}) > \dots \quad (6.23)$$

Les opérateurs L_c et L_t sont les opérateurs \mathcal{L}_c et \mathcal{L}_t dans lesquels nous avons effectué les substitutions

$$\nabla^2 \implies D^2 - a^2, \quad (6.24)$$

$$\nabla_h^2 \implies -a^2, \quad (6.25)$$

$$\partial_t \implies 1. \quad (6.26)$$

Nous pouvons dès lors exprimer la solution générale \mathbf{f} du problème non-linéaire (6.5) en fonction des fonctions propres du problème linéaire calculé au seuil:

$$\mathbf{f} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2} A_{p,\mathbf{a}}(t) \mathbf{f}_{p,\mathbf{a}}(x,y,z), \quad (6.27)$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2} A_{p,\mathbf{a}}(t) \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}}(z) e^{i\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}, \quad (6.28)$$

$A_{p,\mathbf{a}}$ sont appelées les amplitudes des modes $\mathbf{f}_{p,\mathbf{a}}$. Afin que le vecteur \mathbf{f} des champs physiques soit réel, les relations suivantes doivent être vérifiées

$$A_{p,-\mathbf{a}} = \overline{A_{p,\mathbf{a}}}, \quad (6.29)$$

$$\mathbf{f}_{p,-\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{f}_{p,\mathbf{a}}}, \quad (6.30)$$

où les grandeurs surlignées dénotent des grandeurs conjuguées.

6.4 Problème linéaire adjoint aux valeurs propres et relations de biorthogonalité

6.4.1 Problème adjoint

Le problème adjoint est défini par le système suivant

$$\mathcal{L}_c^* \mathbf{f}^* - \mathcal{L}_t^* \mathbf{f}^* = 0, \quad (6.31)$$

$$\mathcal{B}^* \mathbf{f}^* = 0, \quad (6.32)$$

où \mathcal{B}^* est l'adjoint de l'opérateur \mathcal{B} qui regroupe l'ensemble des conditions aux limites (6.12)-(6.19). Par définition, les opérateurs \mathcal{L}_c^* et \mathcal{L}_t^* doivent vérifier les relations

$$\langle\langle \mathbf{f}^*, \mathcal{L}_c \mathbf{f} \rangle\rangle = \langle\langle \mathcal{L}_c^* \mathbf{f}^*, \mathbf{f} \rangle\rangle, \quad (6.33)$$

$$\langle\langle \mathbf{f}^*, \mathcal{L}_t \mathbf{f} \rangle\rangle = \langle\langle \mathcal{L}_t^* \mathbf{f}^*, \mathbf{f} \rangle\rangle. \quad (6.34)$$

Les doubles parenthèses angulaires représentent un produit scalaire de la forme

$$\langle\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle\rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{4L^2} \int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} \int_0^1 \overline{\mathbf{a}} \mathbf{b} \, dx \, dy \, dz \quad (6.35)$$

Par analogie avec le problème direct, le problème adjoint admet des solutions du type

$$\mathbf{f}_q^* = \sum_{\mathbf{a}} \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^*(z) e^{s_{q,\mathbf{a}}^* t} e^{i\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}, \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad (6.36)$$

où $s_{q,\mathbf{a}}^*$ ² et $\mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^*(z)$ sont respectivement les valeurs propres et vecteurs propres du problème aux valeurs propres suivant

$$L_c^* \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^* = s_{q,\mathbf{a}}^* L_t^* \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^*, \quad (6.37)$$

$$\mathcal{B}^* \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^* = 0, \quad (6.38)$$

L_c^* et L_t^* sont les opérateurs \mathcal{L}_c^* et \mathcal{L}_t^* où l'on a appliqué les règles (6.24)-(6.26). Enfin, on voit aisément que les relations (6.33)-(6.34) se transforment de la manière suivante

$$\langle \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^*, L_c \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}} \rangle = \langle L_c^* \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^*, \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}} \rangle, \quad (6.39)$$

$$\langle \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^*, L_t \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}} \rangle = \langle L_t^* \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^*, \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}} \rangle. \quad (6.40)$$

où la simple parenthèse angulaire désigne maintenant

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \int_0^1 \bar{\mathbf{a}} \mathbf{b} dz \quad (6.41)$$

Il est alors aisé de calculer les opérateurs de ce problème adjoint. On trouve ainsi

$$\mathcal{L}_c^* = \begin{bmatrix} \Lambda Da \nabla^4 - \nabla^2 & \sqrt{Ta} \partial_z & 1 \\ \sqrt{Ta} \partial_z & -1 + \Lambda Da \nabla^2 & \cdot \\ Ra_p^c \nabla_h^2 & \cdot & \nabla^2 \end{bmatrix}, \quad (6.42)$$

$$\mathcal{L}_{\Delta_c}^* = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \epsilon Ra_p^c \nabla_h^2 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad (6.43)$$

$$\mathcal{L}_t^* = \begin{bmatrix} \chi^{-1} \nabla^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \chi^{-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.44)$$

Les conditions aux limites du problème adjoint sont identiques à celles du problème direct et sont données par les relations (6.12)-(6.19). L_c^* , $L_{\Delta_c}^*$ et L_t^* s'écrivent alors

$$L_c^* = \begin{bmatrix} \Lambda Da (D^2 - a^2)^2 - (D^2 - a^2) & \sqrt{Ta} D & 1 \\ \sqrt{Ta} D & -1 + \Lambda Da (D^2 - a^2) & \cdot \\ Ra_p^c a^2 & \cdot & (D^2 - a^2) \end{bmatrix}, \quad (6.45)$$

2. On montre aisément que les valeurs propres des problèmes direct et adjoint sont complexes conjuguées [Morse and Feshbach, 1953].

$$L_{\Delta_c}^* = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \epsilon R a_p^c & a^2 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad (6.46)$$

$$L_t^* = \begin{bmatrix} \chi^{-1} (D^2 - a^2) & \cdot & \cdot \\ \cdot & \chi^{-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.47)$$

Nous voyons donc que dans la configuration qui nous préoccupe, le problème linéaire aux valeurs propres est *autoadjoint* ou plutôt "*quasi-autoadjoint*". En effet, tel que nous l'avons formulé, le problème n'est pas autoadjoint au sens strict vu que les opérateurs adjoints ne sont pas identiques aux opérateurs directs. Il suffit cependant d'effectuer le changement de variable

$$\tilde{T} = \frac{T}{a^2 R a_p}, \quad (6.48)$$

pour retrouver l'égalité des opérateurs directs et adjoints³.

6.4.2 Relations de biorthogonalités

Le principal intérêt de l'utilisation des fonctions propres du problème adjoint comme base de projection vient du fait de l'existence de relations de biorthogonalité entre ces fonctions et les fonctions propres du problème direct. En effet, on peut facilement montrer que la relation suivante est vérifiée:

$$(s_{p,\mathbf{a}} - \overline{s_{p,\mathbf{a}}^*}) \langle \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^*(z), L_t \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}}(z) \rangle = 0, \quad \forall p, q \quad (6.49)$$

En effet, on a successivement

$$\begin{aligned} (s_{p,\mathbf{a}} - \overline{s_{q,\mathbf{a}}^*}) \langle \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^*, L_t \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}} \rangle &= s_{p,\mathbf{a}} \langle \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^*, L_t \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}} \rangle - \overline{s_{q,\mathbf{a}}^*} \langle \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^*, L_t \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}} \rangle, \\ &= s_{p,\mathbf{a}} \langle \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^*, L_t \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}} \rangle - \overline{s_{q,\mathbf{a}}^*} \langle L_t^* \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^*, \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}} \rangle, \\ &= \langle \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^*, s_{p,\mathbf{a}} L_t \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}} \rangle - \langle s_{q,\mathbf{a}}^* L_t^* \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^*, \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}} \rangle, \\ &= \langle \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^*, L_c \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}} \rangle - \langle L_c^* \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^*, \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}} \rangle, \\ &= 0. \end{aligned} \quad (6.50)$$

La dernière égalité s'obtient simplement par définition du problème adjoint. La relation (6.49) est appelée *relation de biorthogonalité*. Elle exprime que les fonctions propres du problème direct sont orthogonales aux fonctions propres du problème adjoint avec l'opérateur de pondération \mathcal{L}_t . Nous verrons lors de la projection des équations sur les modes adjoints que ces relations permettent de simplifier grandement les résultats obtenus.

3. Il suffirait de redéfinir le produit scalaire (6.35) pour trouver immédiatement l'égalité des opérateurs directs et adjoints.

6.5 Détermination des équations aux amplitudes

La méthode de détermination des équations aux amplitudes s'apparente à une méthode de Galerkin et a été introduite par Eckhaus [Eckhaus, 1965]. Elle a été utilisée très fréquemment pour l'étude de différents problèmes de convection. Ainsi, Cross [Cross, 1980] l'a appliquée à l'étude de l'instabilité gravifique, Dauby *et al.* [Dauby and Lebon, 1996] à l'analyse de l'influence des parois latérales dans l'instabilité de Marangoni, Parmentier *et al.* [Parmentier et al., 1996] et Regnier *et al.* [Regnier et al., 1997] à l'analyse du couplage gravifique-capillaire dans un fluide pur. Cette méthode a aussi été utilisée pour des fluides viscoélastiques [Parmentier, 1997] et pour des interfaces déformables [Regnier, 1998]. Cette méthode a été récemment étendue à des problèmes fortement non-linéaires [Dauby et al., 2001] mais nous ne connaissons pas d'utilisation de la méthode des amplitudes pour un milieu poreux.

Le système non-linéaire (6.5) calculé au seuil où \mathbf{f} est de la forme (6.27), soit

$$\mathbf{f} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2} A_{p,\mathbf{a}}(t) \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}}(z) e^{i\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}, \quad (6.51)$$

est projeté sur l'ensemble des fonctions propres du problème adjoint. Nous obtenons ainsi

$$\langle\langle (\mathcal{L}_c + \mathcal{L}_{\Delta_c}) \mathbf{f}, \mathbf{f}_{p,\mathbf{a}}^* \rangle\rangle = \langle\langle \mathcal{L}_t \partial_t \mathbf{f} + \mathcal{N} \mathcal{L}(\mathbf{f}, \mathbf{f}), \mathbf{f}_{p,\mathbf{a}}^* \rangle\rangle, \quad p = 0, 1, \dots, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2. \quad (6.52)$$

La relation (6.52) définit un ensemble infini d'équations différentielles ordinaires pour les amplitudes $A_{p,\mathbf{a}}$. Après avoir développé l'équation (6.52), nous montrerons comment réduire la dynamique à un petit nombre de modes choisis de manière pertinente.

6.5.1 Projection de la partie linéaire

6.5.1.1 Projection de \mathcal{L}_c

La projection de $\mathcal{L}_c \mathbf{f}$ sur le mode adjoint $\mathbf{f}_{q,\mathbf{a}}^*$ (calculé au seuil) s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{q,\mathbf{a}}^{\mathcal{L}_c} &= \langle\langle \mathbf{f}_{q,\mathbf{a}}^*, \mathcal{L}_c \mathbf{f} \rangle\rangle, \\ &= \langle\langle \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^* e^{i\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}, \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{a}' \in \mathbb{R}^2} A_{p,\mathbf{a}'} \mathcal{L}_c \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}'} e^{i\mathbf{a}'\cdot\mathbf{r}} \rangle\rangle, \\ &= \langle\langle \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^*, \sum_{p=0}^{\infty} A_{p,\mathbf{a}'} \mathcal{L}_c \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}'} \rangle\rangle \delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}'), \end{aligned} \quad (6.53)$$

où $\delta(i - j)$ est le symbole de Kronecker. Cette projection peut encore se simplifier en tenant compte de la relation de biorthogonalité (6.49). On obtient

ainsi

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{q,\mathbf{a}}^{\mathcal{L}_c} &= \sum_{p=0}^{\infty} \langle \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^*, A_{p,\mathbf{a}} L_c \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}} \rangle, \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} A_{p,\mathbf{a}} \langle \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^*, s_{p,\mathbf{a}} L_t \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}} \rangle, \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} A_{p,\mathbf{a}} s_{p,\mathbf{a}} \langle \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^*, L_t \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}} \rangle, \\
&= A_{q,\mathbf{a}} s_{q,\mathbf{a}} C_t(q,\mathbf{a}), \tag{6.54}
\end{aligned}$$

où le coefficient $C_t(q,\mathbf{a})$ est défini par la relation

$$\begin{aligned}
C_t(q,\mathbf{a}) &= \langle \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^*, L_t \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}} \rangle, \\
&= \int_0^1 \left(\chi^{-1} W_{p,\mathbf{a}}^* (D^2 - a^2) W_{p,\mathbf{a}} + \chi^{-1} Z_{p,\mathbf{a}}^* Z_{p,\mathbf{a}} + \Theta_{p,\mathbf{a}}^* \Theta_{p,\mathbf{a}} \right) dz. \tag{6.55}
\end{aligned}$$

6.5.1.2 Projection de \mathcal{L}_{Δ_c}

La projection de $\mathcal{L}_{\Delta_c} \mathbf{f}$ sur le mode adjoint $\mathbf{f}_{q,\mathbf{a}}^*$ donne

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{q,\mathbf{a}}^{\mathcal{L}_{\Delta_c}} &= \langle \langle \mathbf{f}_{q,\mathbf{a}}^*, \mathcal{L}_{\Delta_c} \mathbf{f} \rangle \rangle, \\
&= \langle \langle \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^* e^{i\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}, \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{a}' \in \mathbb{R}^2} A_{p,\mathbf{a}'} L_{\Delta_c} \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}'} e^{i\mathbf{a}'\cdot\mathbf{r}} \rangle \rangle, \\
&= \langle \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^*, \sum_{p=0}^{\infty} A_{p,\mathbf{a}'} L_{\Delta_c} \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}'} \rangle \delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}'), \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \langle \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^*, A_{p,\mathbf{a}} L_{\Delta_c} \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}} \rangle, \\
&= \epsilon \sum_{p=0}^{\infty} A_{p,\mathbf{a}} C_\epsilon(q,p,\mathbf{a}). \tag{6.56}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
C_\epsilon(q,p,\mathbf{a}) &= \langle \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^*, L_{\Delta_c} \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}} \rangle, \\
&= Ra_c \int_0^1 W_{q,\mathbf{a}}^* (D^2 - a^2) \Theta_{p,\mathbf{a}} dz, \tag{6.57}
\end{aligned}$$

où nous avons omis l'indice p du nombre de Rayleigh poreux afin d'éviter toute confusion avec l'indice sommatoire.

6.5.1.3 Projection du terme temporel

La projection du terme $\mathcal{L}_t \partial_t \mathbf{f}$ sur le mode adjoint $\mathbf{f}_{q,\mathbf{a}}^*$ conduit à

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{q,\mathbf{a}}^{\mathcal{L}_t} &= \langle \langle \mathbf{f}_{q,\mathbf{a}}^*, \mathcal{L}_t \partial_t \mathbf{f} \rangle \rangle, \\
&= \langle \langle \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^* e^{i\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}, \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{a}' \in \mathbb{R}^2} \frac{dA_{p,\mathbf{a}'}}{dt} L_t \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}'} e^{i\mathbf{a}'\cdot\mathbf{r}} \rangle \rangle, \\
&= \langle \langle \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^*, \sum_{p=0}^{\infty} \frac{dA_{p,\mathbf{a}'}}{dt} L_t \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}'} \rangle \rangle \delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}'), \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{dA_{p,\mathbf{a}}}{dt} \langle \langle \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^*, L_t \mathbf{F}_{p,\mathbf{a}} \rangle \rangle, \\
&= \frac{dA_{q,\mathbf{a}}}{dt} C_t(q, \mathbf{a}).
\end{aligned} \tag{6.58}$$

où le coefficient $C_t(p, \mathbf{a})$ a déjà été défini par la relation (6.55).

6.5.2 Projection de la partie non-linéaire

Il reste à projeter le terme non-linéaire $\mathcal{NL}(\mathbf{f}, \mathbf{f})$ sur le mode adjoint $\mathbf{f}_{q,\mathbf{a}}^*$, on obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{q,\mathbf{a}}^{\mathcal{NL}} &= \langle \langle \mathbf{f}_{q,\mathbf{a}}^*, \mathcal{NL}(\mathbf{f}, \mathbf{f}) \rangle \rangle, \\
&= \langle \langle \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^* e^{i\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}, \sum_{p,p'=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{a}', \mathbf{a}'' \in \mathbb{R}^2} A_{p,\mathbf{a}'} A_{p',\mathbf{a}''} NL(\mathbf{F}_{p,\mathbf{a}'}, \mathbf{F}_{p',\mathbf{a}''}) e^{i(\mathbf{a}'+\mathbf{a}'')\cdot\mathbf{r}} \rangle \rangle, \\
&= \sum_{p,p'=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{a}', \mathbf{a}'' \in \mathbb{R}^2} A_{p,\mathbf{a}'} A_{p',\mathbf{a}''} C_N(q, p, p', \mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{a}'') \delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}' - \mathbf{a}''),
\end{aligned} \tag{6.59}$$

avec

$$C_N(q, p, p', \mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{a}'') = \langle \langle \mathbf{F}_{q,\mathbf{a}}^*, NL(\mathbf{F}_{p,\mathbf{a}'}, \mathbf{F}_{p',\mathbf{a}''}) \rangle \rangle, \tag{6.60}$$

où l'opérateur NL est défini par la relation:

$$\mathcal{NL}(\mathbf{F}_{p,\mathbf{a}'} e^{i\mathbf{a}'\cdot\mathbf{r}}, \mathbf{F}_{p',\mathbf{a}''} e^{i\mathbf{a}''\cdot\mathbf{r}}) = NL(\mathbf{F}_{p,\mathbf{a}'}, \mathbf{F}_{p',\mathbf{a}''}) e^{i(\mathbf{a}'+\mathbf{a}'')\cdot\mathbf{r}} \tag{6.61}$$

En tenant compte de l'expression de l'opérateur non-linéaire donnée par la relation (6.11), le coefficient $C_N(q, p, p', \mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{a}'')$ devient

$$\begin{aligned} C_N(q, p, p', \mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{a}'') = & \\ & \int_0^1 \left(W_{q, \mathbf{a}}^* \chi^{-1} \phi^{-1} \left[-a'^2 \mathbb{N}(W_{p', \mathbf{a}''}) - ia'_x D \mathbb{N}(U_{p', \mathbf{a}''}) - ia'_y D \mathbb{N}(V_{p', \mathbf{a}''}) \right] \right) dz \\ & + \int_0^1 \left(Z_{q, \mathbf{a}}^* \chi^{-1} \phi^{-1} \left[ia'_x \mathbb{N}(V_{p', \mathbf{a}''}) - ia'_y \mathbb{N}(U_{p', \mathbf{a}''}) \right] \right) dz \\ & + \int_0^1 \left(\Theta_{q, \mathbf{a}}^* \mathbb{N}(\Theta_{p', \mathbf{a}''}) \right) dz. \end{aligned} \quad (6.62)$$

L'opérateur \mathbb{N} introduit dans la projection ci-dessus est défini par

$$\mathbb{N}(\cdot) = (i a'_x U_{p, \mathbf{a}'} + i a'_y V_{p, \mathbf{a}'} + W_{p, \mathbf{a}'} D)(\cdot), \quad (6.63)$$

où U , V et W sont les trois composantes des fonctions propres selon la verticale de la vitesse. Nous avons ainsi:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} U(z) \\ V(z) \\ W(z) \end{pmatrix} e^{[i(a_x x + a_y y)]}. \quad (6.64)$$

Il est intéressant de noter qu'il est aisé d'exprimer les composantes horizontales de la vitesse en fonction de sa composante verticale et de la composante verticale de la vorticité, en effet

$$U = \frac{i}{a^2} (a_x DW + a_y Z), \quad (6.65)$$

$$V = \frac{i}{a^2} (a_y DW - a_x Z). \quad (6.66)$$

6.5.3 Résumé des équations projetées

En regroupant les termes obtenus ci-dessus, les équations aux amplitudes (6.52) prennent la forme

$$\begin{aligned} & \frac{dA_{q, \mathbf{a}}}{dt} C_t(q, \mathbf{a}) - A_{q, \mathbf{a}} s_{q, \mathbf{a}} C_t(q, \mathbf{a}) - \epsilon \sum_{p=0}^{\infty} A_{p, \mathbf{a}} C_\epsilon(q, p, \mathbf{a}) \\ & = \sum_{p, p'=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{a}', \mathbf{a}'' \in \mathbb{R}^2} A_{p, \mathbf{a}'} A_{p', \mathbf{a}''} C_N(q, p, p', \mathbf{a}', \mathbf{a}'') \delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}' - \mathbf{a}''). \end{aligned} \quad (6.67)$$

avec

$$q, p, p' = 0, 1, 2, \dots, \infty, \quad (6.68)$$

$$\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{a}'' \in \mathbb{R}^2, \quad (6.69)$$

d'où il résulte que les équations aux dérivées partielles initiales ont été remplacées par un système infini d'équations différentielles ordinaires.

6.6 Réduction de la dynamique non-linéaire: élimination adiabatique des modes esclaves

Après avoir obtenu la forme générale des équations aux amplitudes, nous allons maintenant montrer comment réduire la dynamique. Dans un premier temps, l'ensemble infini de modes peut être divisé en deux sous-ensembles K_s et K_c , d'intersection vide. K_c contient l'ensemble des modes critiques ou *actifs* c'est-à-dire ceux dont le taux de croissance linéaire $s_{q,\mathbf{a}}$ est le plus grand (*i.e.* le plus proche de zéro). En régime faiblement non-linéaire, l'ensemble K_c peut être défini par

$$K_c = \{\mathbf{f}_{0,\mathbf{a}}\} \text{ avec } \begin{cases} \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2, & \text{tel que } |\mathbf{a}| = a_c. \\ \Re(s_{0,a_c}) = 0. \end{cases} \quad (6.70)$$

Cette définition de K_c peut et doit même être élargie si nous nous éloignons du seuil. En effet, dans ce cas, plus nombreux seront les modes qui pourront devenir instables.

L'ensemble K_s contient tous les autres modes, appelés *passifs* ou *esclaves*. Ces modes sont fortement amortis en raison de leurs taux de croissance très négatifs. Il est donc raisonnable de ne pas considérer ceux pour lesquels:

$$\Re(s_{0,a_c}) \ll -1. \quad (6.71)$$

L'ensemble K_s prend la forme suivante:

$$K_s = \{\mathbf{f}_{0,\mathbf{a}}\} \cup \{\mathbf{f}_{p,\mathbf{a}'}\} \text{ avec } \begin{cases} p > 0, \\ \mathbf{a}' \in \mathbb{R}^2, \\ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2, & \text{tel que } |\mathbf{a}| \neq a_c. \end{cases} \quad (6.72)$$

Nous appellerons K l'union de K_c et K_s :

$$K = K_c \cup K_s. \quad (6.73)$$

L'élimination adiabatique [Haken, 1983; Manneville, 1990] consiste à supposer, d'une part, que les amplitudes des modes passifs se relaxent rapidement et d'autre part que leurs amplitudes sont faibles devant celles des modes actifs (la dynamique du système reste alors confinée à une variété appelée *variété centrale*). En effet, la partie réelle du taux de croissance des modes passifs étant très négative, ces derniers seront rapidement amortis avec pour conséquence de négliger le terme temporel dans l'équation (6.67). Comme les amplitudes des modes passifs sont supposées petites vis-à-vis de celles des modes actifs, on est amené à ne considérer que les seuls termes non-linéaires résultant des interactions quadratiques de modes actifs. Enfin, le terme linéaire proportionnel à l'écart au seuil est négligé lui aussi vu que cet écart est

supposé petit, en valeur absolue par rapport au taux de croissance. L'amplitude des modes passifs s'exprime donc en fonction de celles des modes actifs au moyen de la relation

$$A_{q,\mathbf{a}} = \frac{1}{s_{q,\mathbf{a}} C_t(q,\mathbf{a})} \sum_{\mathbf{a}' \in K_c, \mathbf{a}'' \in K_c} A_{0,\mathbf{a}'} A_{0,\mathbf{a}''} C_N(q,0,0,\mathbf{a},\mathbf{a}',\mathbf{a}'') \delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}' - \mathbf{a}''). \quad (6.74)$$

Les équations d'évolution des amplitudes des modes actifs que nous appellerons par la suite *équations aux amplitudes* s'obtiennent à partir de l'équation (6.67). En nous limitant aux termes cubiques, c'est-à-dire en négligeant les interactions quadratiques de modes passifs qui donneraient des termes d'ordre quatre, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dA_{0,\mathbf{a}}}{dt} C_t(0,\mathbf{a}) &= \epsilon A_{0,\mathbf{a}} C_\epsilon(0,0,\mathbf{a}_c) + \sum_{\mathbf{a}', \mathbf{a}'' \in K_c} A_{0,\mathbf{a}'} A_{0,\mathbf{a}''} C_N^{A,A} \delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}' - \mathbf{a}'') \\ &+ \sum_{p=1}^{N_p-1} \sum_{\mathbf{a}' \in K_c, \mathbf{a}'' \in K_s} A_{0,\mathbf{a}'} A_{p,\mathbf{a}''} \left(C_N^{A,P} + C_N^{P,A} \right) \delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}' - \mathbf{a}''), \end{aligned} \quad (6.75)$$

avec

$$C_N^{A,A} = C_N(0,0,0,\mathbf{a},\mathbf{a}',\mathbf{a}''), \quad (6.76)$$

$$C_N^{A,P} = C_N(0,0,p,\mathbf{a},\mathbf{a}',\mathbf{a}''), \quad (6.77)$$

$$C_N^{P,A} = C_N(0,p,0,\mathbf{a},\mathbf{a}'',\mathbf{a}'), \quad (6.78)$$

respectivement les coefficients d'interaction actif-actif, actif-passif et passif-actif. En tenant compte de la relation (6.74) entre modes passifs et modes actifs, les équations aux amplitudes peuvent finalement s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{dA_{\mathbf{a}}}{dt} C_t &= \epsilon C_\epsilon A_{\mathbf{a}} + \sum_{\mathbf{a}', \mathbf{a}''} A_{\mathbf{a}'} A_{\mathbf{a}''} C_{N^2} \delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}' - \mathbf{a}'') \\ &+ \sum_{\mathbf{a}, \mathbf{a}'', \mathbf{a}'''} A_{\mathbf{a}'} A_{\mathbf{a}''} A_{\mathbf{a}'''} C_{N^3} \delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}' - \mathbf{a}'' - \mathbf{a}'''). \end{aligned} \quad (6.79)$$

$\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{a}'', \mathbf{a}''' \in K_c.$

Les coefficients C_t et C_ϵ sont des notations simplifiées de $C_t(0,\mathbf{a})$ et $C_\epsilon(0,0,\mathbf{a})$ alors que C_{N^2} , C_{N^3} sont respectivement les coefficients des termes quadra-

tiques et cubiques donnés par

$$C_{N^2} = C_N(0,0,0,\mathbf{a},\mathbf{a}',\mathbf{a}''), \quad (6.80)$$

$$C_{N^3} = \sum_{p=1}^{N_p-1} A_{\mathbf{a}'} A_{\mathbf{a}''} A_{\mathbf{a}'''} \frac{C_N(p,0,0,\mathbf{a}'' + \mathbf{a}''',\mathbf{a}'',\mathbf{a}''')}{s_{p,\mathbf{a}'' + \mathbf{a}'''}} C_t(p,\mathbf{a}'' + \mathbf{a}''') \left(C_N(0,p,0,\mathbf{a},\mathbf{a}'' + \mathbf{a}''',\mathbf{a}') + C_N(0,0,p,\mathbf{a},\mathbf{a}',\mathbf{a}'' + \mathbf{a}''') \right). \quad (6.81)$$

Les équations aux amplitudes (6.79) ainsi obtenues sont utilisées pour étudier la stabilité de structures composées de modes dont le vecteur d'onde est sur le cercle critique $a = a_c$. Les principales structures observées expérimentalement sont des *rouleaux*, des *hexagones* et des *carrés*. Enfin, rappelons que les sommes infinies sur l'indice p ont été tronquées à une valeur finie N_p . Cette troncature trouve sa justification dans le fait, qu'en pratique, on observe une convergence rapide des coefficients avec p [Parmentier et al., 1996].

6.7 Instabilité de Küppers-Lortz

La présence de rotation dans notre système conduit à l'existence de nouvelles instabilités dont les structures sont beaucoup plus complexes qu'en l'absence de rotation. Un exemple de telles instabilités est l'instabilité de Küppers-Lortz découverte en 1969 dans les fluides purs [Küppers and Lortz, 1969]. Cet effet provient de l'instabilité d'un rouleau vis-à-vis d'un autre rouleau dévié d'un angle α par rapport au premier. Étant donné que la nouvelle structure ainsi établie est elle aussi déstabilisée par le même mécanisme, l'instabilité donne inévitablement lieu à un comportement variable dans le temps. On parle alors de *chaos spatio-temporel*. Les patterns observés au-delà du seuil consiste en une juxtaposition de plusieurs domaines correspondant à des rouleaux d'orientations différentes (voir figure 6.1) Küppers et Lortz ont montré que, pour des vitesses de rotation suffisamment élevées, cette instabilité apparaît immédiatement au seuil de convection. De nombreuses études, aussi bien numériques que théoriques, de l'instabilité de Küppers-Lortz dans les fluides ont été réalisées ces dernières années [Fantz et al., 1992; Clune and Knobloch, 1993; Hu et al., 1998; Bajaj et al., 1998, 2002; Cox and Matthews, 2000] et une revue très complète peut être trouvée dans [Knobloch, 1998]. Il n'existe cependant aucun travail équivalent dans les milieux poreux. C'est pourquoi cette section sera consacrée à l'étude de l'influence de la présence d'une matrice poreuse sur l'apparition de l'instabilité de Küppers-Lortz [Desaive et al., 2002].

Étant donné que nous sommes intéressés par la stabilité de rouleaux à des perturbations obliques de types rouleaux elles aussi, nous allons formuler notre problème non-linéaire sur une grille rhombique dont l'angle α doit être



FIG. 6.1 – Exemple de l'instabilité de Küppers-Lortz. Pattern obtenu dans du CO_2 à la pression de 32 bars d'après Hu et al. [Hu et al., 1998].

spécifié. Cette grille est définie par deux vecteurs d'onde \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 (ainsi que leurs opposés) de norme a_c et vérifiant la relation

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = a_c^2 \cos \alpha. \quad (6.82)$$

et sont représentés sur la figure 6.2.

Nous allons maintenant particulariser la détermination des équations aux amplitudes à la grille ainsi définie. Tout d'abord l'ensemble K_c des modes actifs est constitué de quatre modes propres

$$K_c = \{\mathbf{f}_{0,\mathbf{a}_1}, \mathbf{f}_{0,\mathbf{a}_2}, \mathbf{f}_{0,-\mathbf{a}_1}, \mathbf{f}_{0,-\mathbf{a}_2}\}, \quad (6.83)$$

L'ensemble K_s des modes passifs se déduit de l'ensemble K_c selon la procédure décrite dans la section 6.6; nous trouvons ainsi

$$K_s = \{\mathbf{f}_{p,0}, \mathbf{f}_{p,\pm 2\mathbf{a}_1}, \mathbf{f}_{p,\pm 2\mathbf{a}_2}, \mathbf{f}_{p,\pm(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)}, \mathbf{f}_{p,\pm(\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2)}\}, \quad p = 0, \dots, N_p - 1. \quad (6.84)$$

En tenant compte du caractère réel de la solution, le système se réduit finalement à un système de deux équations pour les amplitudes, notées de manière simplifiées A et B , des modes critiques $\mathbf{f}_{0,\mathbf{a}_1}$ et $\mathbf{f}_{0,\mathbf{a}_2}$:

$$\tau \frac{dA}{dt} = \epsilon A - (\Psi|A|^2 + \Xi_A|B|^2) A, \quad (6.85)$$

$$\tau \frac{dB}{dt} = \epsilon B - (\Psi|B|^2 + \Xi_B|A|^2) B, \quad (6.86)$$

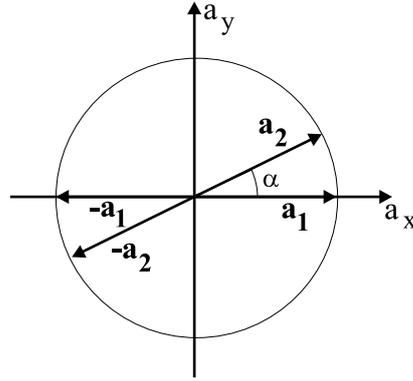


FIG. 6.2 – Vecteurs d'onde \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 dans le plan (a_x, a_y) .

où les coefficients τ , Ψ , Ξ_A et Ξ_B sont réels et se déduisent des définitions données dans la section précédente. Il est important de remarquer que la présence de rotation dans notre système nous oblige à distinguer les rotations dans le sens des aiguilles d'une montre et dans le sens opposé. Par conséquent les propriétés de stabilité de rouleaux dans la direction \mathbf{a}_1 vis-à-vis de perturbations dans la direction \mathbf{a}_2 ne seront pas nécessairement identiques à celles de rouleaux dans la direction \mathbf{a}_2 vis-à-vis de perturbations dans la direction \mathbf{a}_1 . Mathématiquement ceci se traduit par une brisure de la symétrie $A \longleftrightarrow B$ caractéristique des systèmes sans rotation. Les coefficients Ξ_A et Ξ_B ne sont donc plus nécessairement égaux permettant l'apparition de l'instabilité de Küppers-Lortz.

Afin d'examiner plus en détail les équations (6.85) et (6.86), nous allons décomposer les amplitudes A et B en leurs parties réelles et imaginaires à l'aide des relations

$$A = \rho_A e^{i\theta_A}, \quad (6.87)$$

$$B = \rho_B e^{i\theta_B}, \quad (6.88)$$

où ρ_A , ρ_B , θ_A et θ_B sont des nombres réels. Les équations (6.85) et (6.86) conduisent à

$$\frac{d\rho_A}{dt} = \epsilon\rho_A - (\Psi\rho_A^2 + \Xi_A\rho_B^2)\rho_A, \quad (6.89)$$

$$\frac{d\rho_B}{dt} = \epsilon\rho_B - (\Psi\rho_B^2 + \Xi_B\rho_A^2)\rho_B, \quad (6.90)$$

ainsi qu'à deux équations triviales découplées pour les phases,

$$\frac{d\theta_A}{dt} = \frac{d\theta_B}{dt} = 0. \quad (6.91)$$

En annulant les membres de gauche des équations (6.89) et (6.90), on

trouve les points fixes du système:

$$\text{Trivial: } \rho_A = \rho_B = 0, \quad (6.92)$$

$$\text{Rouleaux A: } \rho_B = 0, \quad \rho_A^2 = \frac{\epsilon}{\Psi}, \quad (6.93)$$

$$\text{Rouleaux B: } \rho_A = 0, \quad \rho_B^2 = \frac{\epsilon}{\Psi}, \quad (6.94)$$

$$\text{Bimodale: } \rho_A^2 = \frac{\epsilon(\Psi - \Xi_A)}{\Psi^2 - \Xi_A \Xi_B}, \quad \rho_B^2 = \frac{\epsilon(\Psi - \Xi_B)}{\Psi^2 - \Xi_A \Xi_B}, \quad (6.95)$$

La stabilité de ces points fixes s'obtient à partir du signe des valeurs propres de la matrice jacobienne

$$J = \begin{bmatrix} \epsilon - (3\Psi\rho_A^2 + \Xi_A\rho_B^2) & -2\Xi_A\rho_A\rho_B \\ -2\Xi_B\rho_A\rho_B & \epsilon - (3\Psi\rho_B^2 + \Xi_B\rho_A^2) \end{bmatrix} \quad (6.96)$$

évaluées en chacun des points fixes.

Lorsqu'on augmente la valeur du nombre de Taylor Ta depuis zéro, les coefficients Ξ_A et Ξ_B prennent des valeurs différentes. En effet, comme rappelé plus haut, nous perdons alors la symétrie de réflexion. Il existe donc une valeur critique de Ta notée Ta_c pour laquelle $\Xi_B - \Psi = 0$. Cette valeur est importante parce qu'en ce point, la solution bimodale disparaît au profit des rouleaux A. La dynamique de ce phénomène est représentée sur la figure 6.3. Nous y voyons successivement le plan de phase (A, B) en l'absence de rotation, en présence de rotation mais en l'absence de l'instabilité de Küppers-Lortz et finalement au seuil de l'instabilité de Küppers-Lortz. En l'absence de rotation, les coefficients Ξ_A et Ξ_B sont égaux; la solution bimodale (un point de selle⁴) est donc équidistante des deux solutions rouleaux. Lorsque Ta prend des valeurs non nulles, la solution bimodale se rapproche progressivement des rouleaux A pour se confondre avec ces derniers au seuil de l'instabilité. En ce point, nous observons la formation d'une connection hétérocline entre la variété instable des rouleaux A et la variété stable des rouleaux B. Il s'agit donc du mécanisme par lequel les rouleaux A deviennent instables vis-à-vis des rouleaux B. L'angle α séparant rouleaux A et B pour lequel on observe pour la première fois l'instabilité de Küppers-Lortz est noté α_c . Le critère suivant définit donc le seuil d'instabilité [Clune and Knobloch, 1993]

$$\min_{\alpha \in [0, \Pi]} [\Psi(\chi, Ta) - \Xi_B(\chi, Ta)] = 0. \quad (6.97)$$

Nous obtenons ainsi α_c et Ta_c en fonction du nombre de Prandtl de filtration χ . Nous avons montré dans le chapitre 4 que, dans un milieu poreux, la stabilité oscillante n'était pas limitée à un domaine restreint de nombre de

4. L'analyse des valeurs propres de la matrice jacobienne (6.96) montre facilement que les deux solutions rouleaux sont stables (toutes leurs valeurs propres sont négatives) alors que la solution bimodale est un point de selle (ses valeurs propres sont de signes opposés).

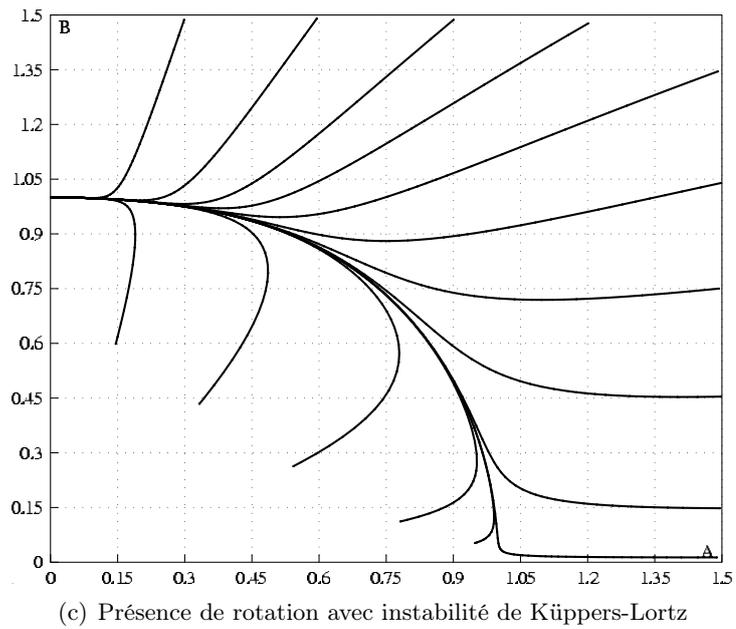
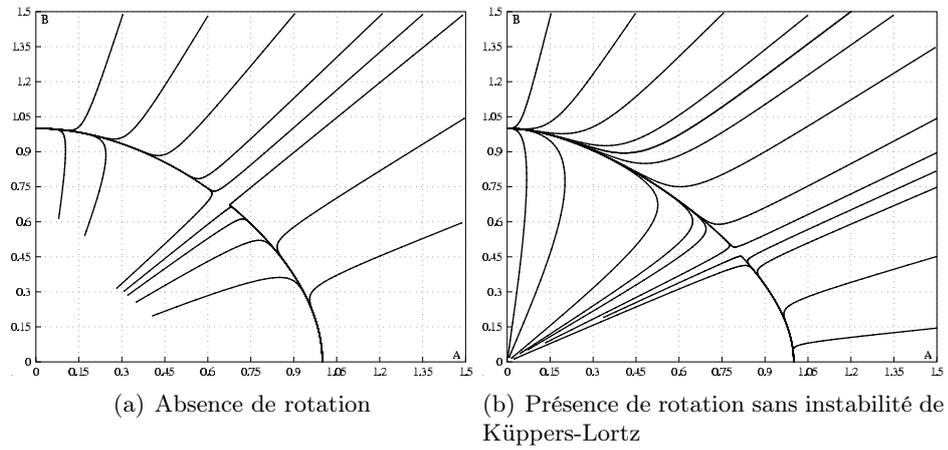


FIG. 6.3 – Plans de phase ($A - B$) montrant le mécanisme de l'instabilité de Küppers-Lortz.

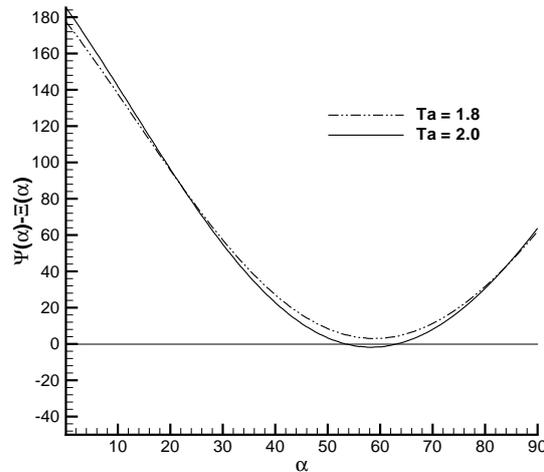


FIG. 6.4 – $(\Psi - \Xi_B)$ en fonction de α pour $Ta = 1.8$ et $Ta = 2$.

Prandtl. Par conséquent, nous allons considérer le cas limite de $\chi \rightarrow \infty$ afin d'être certains que le seuil de convection sera stationnaire⁵. Le tableau 6.1 donne α_c et Ta_c en fonction de Da . Nous voyons que ces résultats sont peu sensibles aux faibles valeurs de Da avec un angle critique de l'ordre de 59° et un nombre de Taylor critique proche de 2. Lorsque Da devient beaucoup plus grand que 1, les résultats coïncident alors avec les valeurs critiques d'un fluide pur, soit $\alpha_c = 59^\circ.7$ et $Ta_c^{fluide} = Ta_c Da^{-2} = 3003$ [Clune and Knobloch, 1993]. Sur la figure 6.4, nous avons représenté $\Psi - \Xi_B$ en fonction de α pour des nombres de Taylor très légèrement en dessous et au dessus du seuil d'instabilité de Küppers-Lortz. Cette différence passe donc d'une valeur positive à une valeur négative de part et d'autre du seuil.

Il n'est pas intéressant de donner les valeurs des coefficients des équations aux amplitudes étant donné qu'ils dépendent de la normalisation choisie. On peut cependant remarquer que le coefficient Ψ est toujours positif. La bifurcation survenant au seuil de convection stationnaire sera par conséquent toujours supercritique. Ce résultat confirme celui de Vadasz [Vadasz, 1998b] obtenu avec un modèle de Darcy étendu.

5. Knobloch [Knobloch, 1998] a identifié des instabilités similaires à celle de Küppers-Lortz pour la convection oscillante mais nous nous limiterons à la convection stationnaire dans ce travail.

TAB. 6.1 – Seuil de l'instabilité de Küppers-Lortz en fonction de Da pour $\chi = \infty$.

Da	α_c	Ta_c
10^{-8}	$58^\circ.6$	1.9
10^{-3}	$58^\circ.8$	2.0
10^2	$59^\circ.7$	$3 \cdot 10^7$

6.8 Modèle de Busse-Heikes

6.8.1 Analyse théorique

Küppers et Lortz [Küppers and Lortz, 1969] ont montré que, lorsque $Ta > Ta_c$, une structure stable de rouleaux devenait instable vis-à-vis d'autres rouleaux inclinés d'un angle $\alpha_c \simeq 60^\circ$ par rapport aux premiers. Ces nouveaux rouleaux étant eux aussi soumis à cette même instabilité, on peut s'attendre à observer un comportement variable dans le temps appelé *chaos spatio-temporel*. Basé sur le fait que α_c est proche de 60° , Busse et Heikes [Busse and Heikes, 1980] ont proposé pour analyser cette dynamique complexe un modèle simple constitué de trois modes A_i , ($i = 1, 2, 3$) représentant les amplitudes de trois rouleaux avec une orientation relative de 60° l'un par rapport à l'autre.

$$\tau \partial_t A_1 = A_1 [\epsilon - |A_1|^2 - g_+ |A_2|^2 - g_- |A_3|^2], \quad (6.98)$$

$$\tau \partial_t A_2 = A_2 [\epsilon - |A_2|^2 - g_+ |A_3|^2 - g_- |A_1|^2], \quad (6.99)$$

$$\tau \partial_t A_3 = A_3 [\epsilon - |A_3|^2 - g_+ |A_1|^2 - g_- |A_2|^2], \quad (6.100)$$

où les coefficients g_+ et g_- sont liés aux propriétés physiques du fluide. La brisure de *symétrie chirale* (*i.e.* symétrie de réflexion) due à la rotation implique

$$g_+ \neq g_-. \quad (6.101)$$

Le système ainsi défini admet plusieurs solutions stationnaires dont notamment trois solutions rouleaux d'amplitude

$$A_R = \sqrt{\epsilon}. \quad (6.102)$$

dont la stabilité linéaire s'étudie en examinant le signe des valeurs propres de la matrice jacobienne

$$J = \begin{bmatrix} \epsilon - 3A_1^2 - g_+ A_2^2 - g_- A_3^2 & -2g_+ A_1 A_2 & -2g_- A_1 A_3 \\ -2g_- A_1 A_2 & \epsilon - 3A_2^2 - g_+ A_3^2 - g_- A_1^2 & -2g_+ A_2 A_3 \\ -2g_+ A_1 A_3 & -2g_- A_2 A_3 & \epsilon - 3A_3^2 - g_+ A_1^2 - g_- A_2^2 \end{bmatrix} \quad (6.103)$$

avec

$$A_1 = A_R = \sqrt{\epsilon}, \quad (6.104)$$

$$A_2 = 0, \quad (6.105)$$

$$A_3 = 0. \quad (6.106)$$

On obtient les valeurs propres

$$\lambda_1 = -2\epsilon, \quad (6.107)$$

$$\lambda_2 = \epsilon(1 - g_-), \quad (6.108)$$

$$\lambda_3 = \epsilon(1 - g_+). \quad (6.109)$$

L'examen du signe des valeurs propres λ_i permet de conclure à la stabilité ou à l'instabilité de la solution rouleau. On voit que la solution rouleau sera stable si toutes les valeurs propres sont négatives c'est-à-dire si

$$\epsilon > 0 \quad (6.110)$$

$$g_- > 1, \quad (6.111)$$

$$g_+ > 1. \quad (6.112)$$

La condition (6.110) implique qu'une valeur propre est toujours négative au dessus du seuil alors que les autres conditions concernent les coefficients g_+ et g_- . L'instabilité de Küppers-Lortz correspond à

$$g_+ > 1, \quad (6.113)$$

$$g_- < 1, \quad (6.114)$$

où, par convention, nous avons choisi $g_+ > g_-$. La valeur critique de la vitesse de rotation est donnée par

$$g_- = 1. \quad (6.115)$$

Dans la région $g_- < 1$, on voit en effet qu'aucune solution rouleau n'est stable et que la dynamique du modèle de Busse-Heikes est contrôlée par l'orbite hétérocline connectant les trois points fixes instables $(\sqrt{\epsilon}, 0, 0)$, $(0, \sqrt{\epsilon}, 0)$ et $(0, 0, \sqrt{\epsilon})$, où (A_1, A_2, A_3) est le vecteur des amplitudes (figure 6.5).

Le modèle à trois modes que nous venons de décrire présente cependant un inconvénient majeur. En effet, pour des valeurs des paramètres dans la région de l'instabilité de Küppers-Lortz, le système va passer un temps de plus en plus long au voisinage de chaque point fixe avant de passer brusquement dans le voisinage du point fixe suivant. Cependant, les observations expérimentales montrent une période approximativement constante entre chaque saut de point fixe. Busse et Heikes [Busse and Heikes, 1980] avaient déjà remarqué cette lacune et suggéraient d'y remédier en ajoutant du bruit au système. La nature physique de ce bruit n'est pourtant pas évidente. Doit-on l'attribuer à des fluctuations thermiques ou à un bruit expérimental?

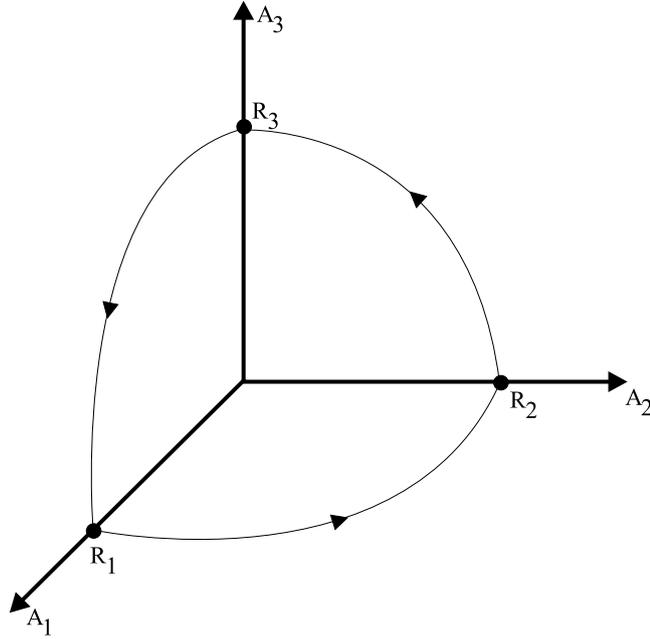


FIG. 6.5 – Représentation schématique de la boucle hétérocline du modèle de Busse-Heikes.

Une alternative à l'ajout de bruit dans le modèle a été proposée par Tu et Cross [Tu and Cross, 1992]. Ils ont suggéré d'ajouter dans le modèle de Busse-Heikes une variation spatiale des amplitudes. Leur modèle prédit ainsi des temps de passage finis entre chaque point fixe et des structures spatiales en bon accord avec l'expérience. La dépendance spatiale est introduite en ajoutant aux équations (6.98)-(6.99) un terme du type Newell-Whitehead-Segel [Newell and Whitehead, 1969; Segel, 1969]. On a ainsi

$$\tau \partial_t A_1 = \xi^2 (\mathbf{a}_1 \cdot \nabla) A_1 + A_1 [\epsilon - |A_1|^2 - g_+ |A_2|^2 - g_- |A_3|^2], \quad (6.116)$$

$$\tau \partial_t A_2 = \xi^2 (\mathbf{a}_2 \cdot \nabla) A_2 + A_2 [\epsilon - |A_2|^2 - g_+ |A_3|^2 - g_- |A_1|^2], \quad (6.117)$$

$$\tau \partial_t A_3 = \xi^2 (\mathbf{a}_3 \cdot \nabla) A_3 + A_3 [\epsilon - |A_3|^2 - g_+ |A_1|^2 - g_- |A_2|^2], \quad (6.118)$$

où \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 et \mathbf{a}_3 sont les trois modes orientés à 60° l'un par rapport à l'autre alors que ξ^2 est une longueur caractéristique appelée *longueur de cohérence*. Ce nouveau modèle favorise cependant certaines directions et brise ainsi l'isotropie du système. Cross *et al.* [Cross *et al.*, 1994] ont alors suggéré d'utiliser un modèle de Swift-Hohenberg [Swift and Hohenberg, 1977] généralisé en ajoutant les termes non-linéaires adéquats pour briser la symétrie chirale.

Nous n'envisagerons pas cette dernière situation dans ce travail et nous limiterons à l'analyse du système (6.116)-(6.118).

L'ajout des termes de Newell-Whitehead-Segel dans les équations (6.116)-(6.118) peut sembler difficile à justifier. Cependant, ces termes trouvent leur origine dans la prise en compte d'une dépendance spatiale des amplitudes $A(x,t)$ et le développement de la relation de dispersion en terme du nombre d'onde et de l'écart au seuil [Cross, 1980; Manneville, 1990]. Par ailleurs, on peut montrer que la longueur de cohérence est reliée à la courbure de la courbe neutre au point critique [Echebarria and Pérez-García, 2001]:

$$\xi^2 = \frac{1}{2 Ra_p^c} \left. \frac{d^2 Ra_p}{da^2} \right|_{a=a_c}. \quad (6.119)$$

6.8.2 Application aux milieux poreux

Dans la section précédente nous avons montré que α_c avait une valeur proche de 60° quelle que soit la valeur de Da . Nous pouvons donc appliquer le modèle de Busse-Heikes étendu aux termes spatiaux pour étudier l'instabilité de Küppers-Lortz dans un milieu poreux en rotation. Les équations aux amplitudes telles que nous les avons formulées dans le paragraphe 6.6 ne se présentent pas sous la forme normalisée (6.116)-(6.118). Nous allons élaborer une variante du modèle de Busse-Heikes en ajoutant le terme de Newell-Whitehead-Segel aux trois équations aux amplitudes (correspondant à trois modes séparés de 60°) obtenues par la méthode décrite précédemment:

$$\partial_t A_1 = \xi^2 (\mathbf{a}_1 \cdot \nabla) A_1 + A_1 [\epsilon - g |A_1|^2 - g_+ |A_2|^2 - g_- |A_3|^2], \quad (6.120)$$

$$\partial_t A_2 = \xi^2 (\mathbf{a}_2 \cdot \nabla) A_2 + A_2 [\epsilon - g |A_2|^2 - g_+ |A_3|^2 - g_- |A_1|^2], \quad (6.121)$$

$$\partial_t A_3 = \xi^2 (\mathbf{a}_3 \cdot \nabla) A_3 + A_3 [\epsilon - g |A_3|^2 - g_+ |A_1|^2 - g_- |A_2|^2], \quad (6.122)$$

où le temps a été renormalisé⁶ à l'aide la relation

$$t \rightarrow \frac{t}{\tau}. \quad (6.123)$$

Les équations (6.120)-(6.122) sont résolues numériquement à partir d'une solution aléatoire à l'aide d'une méthode pseudo-spectrale [Bestehorn, 1993]. Aux frontières latérales du domaine, nous imposons une condition de périodicité sur les amplitudes pour simuler l'extension infinie du système. Nous

6. Le coefficient τ étant très petit, la renormalisation (6.123) nous permet d'utiliser des pas d'intégration temporelle plus grands.

a_c	3.75
Ra_p^c	60.24
Ta_c	2
g	12.49
g_+	23.64
g_-	14.23
ξ^2	0.07

TAB. 6.2 – Coefficients du modèle de Busse-Heikes pour $\chi = \infty$, $Da = 10^{-3}$ et $Ta = 1$.

a_c	4.26
Ra_p^c	82.27
Ta_c	2
g	14.21
g_+	28.91
g_-	13.48
ξ^2	0.05

TAB. 6.3 – Coefficients du modèle de Busse-Heikes pour $\chi = \infty$, $Da = 10^{-3}$ et $Ta = 2.5$.

pouvons ensuite reconstruire le champ de température

$$T(x, y, t) \propto \sum_{j=1}^3 A_j e^{i(a_x x + a_y y)} + c.c. \quad (6.124)$$

Dans un premier temps, nous allons calculer les coefficients des équations (6.120)-(6.122) pour une valeur de $Ta < Ta_c$. Le tableau 6.2 donne ces coefficients pour $Da = 10^{-3}$ et $Ta = 1$ (dans ce cas, $Ta_c = 2$, voir tableau 6.1). Nous avons représenté sur la figure 6.6 l'évolution temporelle du champ horizontal de température juste en dessous du seuil d'instabilité de Küppers-Lortz ($Ta = 1$), pour $\epsilon = 0.05$ et ce pour plusieurs valeurs du temps. On observe que la solution aléatoire du départ fait progressivement place à des rouleaux d'orientation variable. Après un temps suffisamment long, une orientation de rouleau l'emporte et finit par occuper la totalité du système.

Nous allons examiner ce que deviennent ces conclusions lorsque $Ta = 2.5 > Ta_c$. Le tableau 6.3 reprend les valeurs correspondantes des coefficients des équations aux amplitudes. La figure 6.7 donne l'évolution temporelle du champ horizontal de température pour $\epsilon = 0.05$. On observe des régions où dominant des rouleaux de chacune des trois directions. Ces régions changent de taille et d'orientation relative avec le temps. Le pattern n'est plus stationnaire, il évolue constamment dans le temps; nous sommes en présence du chaos spatio-temporel caractéristique de l'instabilité de Küppers-Lortz.

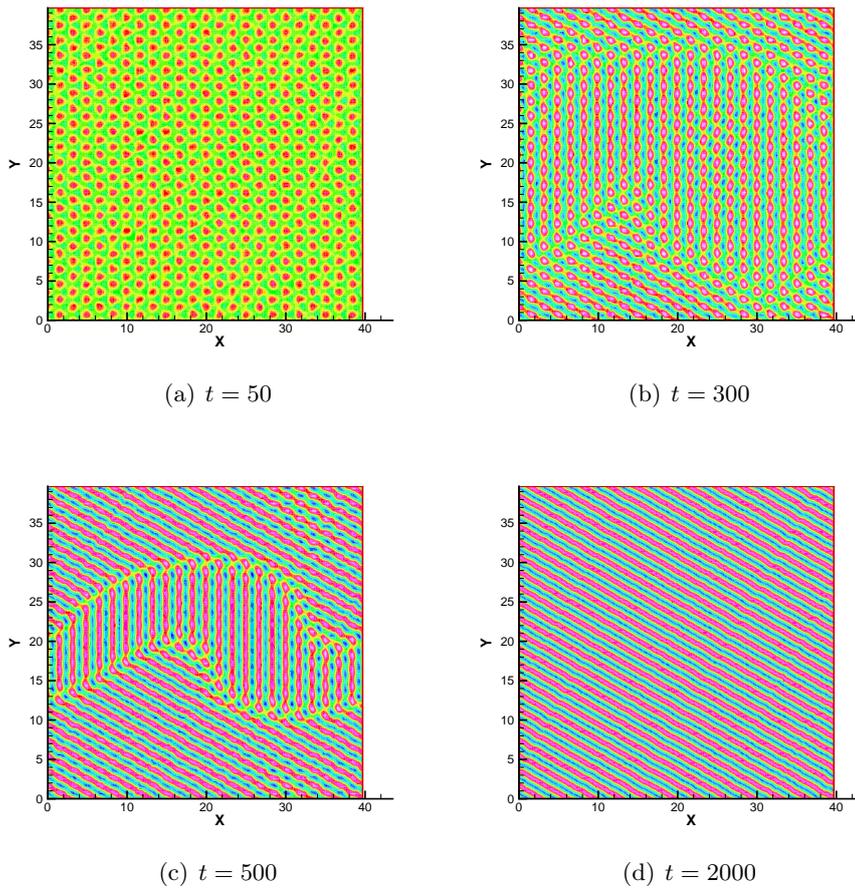


FIG. 6.6 – Evolution temporelle du champ horizontal de température pour $\chi = \infty$, $Da = 10^{-3}$ et $Ta = 1$.

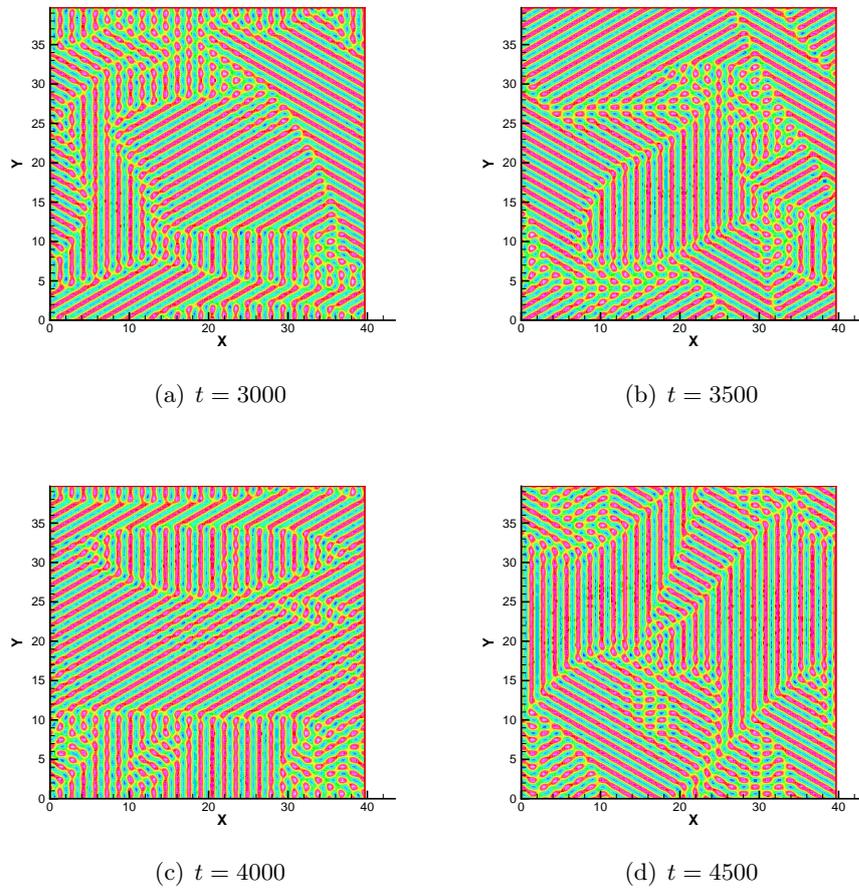


FIG. 6.7 – Evolution temporelle du champ horizontal de température pour $\chi = \infty$, $Da = 10^{-3}$ et $Ta = 2.5$.

Les rouleaux changent de direction par nucléation-agrégation ou encore par propagation de défauts comme des dislocations par exemple.

6.9 Résumé

Dans ce chapitre, nous avons proposé une analyse faiblement non-linéaire de la convection dans une couche poreuse en rotation. Dans un premier temps, nous avons exposé de manière générale la méthode de résolution choisie. Il s'agit d'une méthode projective basé sur un développement de la solution non-linéaire en série de fonctions propres du problème linéaire. Après projection des équations sur les fonctions propres du problème linéaire adjoint, nous avons obtenu un ensemble infini d'équations différentielles ordinaires. Nous avons réduit la dynamique à un nombre fini de modes par

élimination adiabatique des modes esclaves et obtenu ainsi les *équations aux amplitudes*.

Nous avons alors particularisé les équations aux amplitudes au cas particulier de *l'instabilité de Küppers-Lortz*. Nous avons montré qu'au-delà d'une certaine valeur du nombre de Taylor Ta_c , une solution rouleau était déstabilisée par une autre solution rouleau mais décalée d'un certain angle par rapport à la première. Comme la nouvelle structure est déstabilisée par le même mécanisme, on peut s'attendre à un comportement variable dans le temps ou *chaos spatio-temporel*. Cette instabilité avait déjà été l'objet de nombreuses études dans les fluides purs mais n'avait jamais été analysée dans les milieux poreux. Nous avons calculé en fonction du nombre de Darcy le nombre de Taylor critique ainsi que la valeur correspondante de l'angle entre les rouleaux. Ce nombre de Taylor est proche de 2 alors que l'angle est proche de 60° comme dans le cas d'un fluide pur.

Nous avons terminé ce chapitre en examinant le modèle de Busse-Heikes. Il s'agit d'un modèle simple constitué de trois modes à 60° comportant l'essentiel de la dynamique de l'instabilité de Küppers-Lortz. Nous avons examiné ses points fixes et leur stabilité en toute généralité. Pour $Ta > Ta_c$, le modèle ne possède plus de point fixe stable et la dynamique s'effectue sur une orbite hétérocline connectant les trois points fixes instables. Afin de représenter l'évolution spatio-temporelle de ce modèle, nous lui avons adjoint un terme du type Newell-Whitehead-Segel. Nous avons intégré les équations par une méthode pseudo-spectrale et représenté l'évolution temporelle du champ horizontal de température pour deux valeurs du nombre de Taylor: une en dessous et l'autre au dessus du nombre de Taylor critique. Ces simulations montrent, dans le premier cas, que le pattern évolue vers une solution rouleau remplissant tout le domaine alors que dans le deuxième cas, le pattern est constitué de plusieurs zones évoluant dans le temps. Ces zones sont caractéristiques de solutions rouleaux de directions différentes et dont les orientations relatives changent continûment sans jamais parvenir à une solution stationnaire.

Conclusions et perspectives

Quite simple, my dear Watson.

Sherlock Holmes,
The Adventure of the Retired
Colourman

Sir Arthur Conan Doyle

Conclusions

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la stabilité thermoconvective de trois systèmes comprenant un milieu poreux:

- un bicouche poreux-liquide,
- une couche poreuse en rotation,
- une couche poreuse saturée par un ferrofluide en rotation.

Dans chacune de ces trois configurations, nous avons modélisé le milieu poreux par la loi de Brinkman. Cette loi constitue une alternative au modèle classique de Darcy et l'une des conclusions essentielles de ce travail est d'avoir montré que les deux modèles donnaient des résultats qualitatifs identiques (*i.e.* même allure des courbes neutres).

Avant d'examiner les trois systèmes décrits ci-dessus, nous avons consacré le chapitre 2 au problème de la modélisation mathématique de la convection naturelle dans un milieu poreux. Cette approche nous a permis de mettre en évidence les différences fondamentales existant entre le modèle de Darcy et celui de Brinkman. Nous avons opté pour ce dernier, arguant du fait qu'il nous permet de retrouver comme cas limites le modèle de Darcy d'une part et les équations de Navier-Stokes d'autre part. Nous avons montré l'influence du modèle de Brinkman sur les valeurs critiques du problème de Horton-Rogers-Lapwood (couche poreuse saturée et chauffée par le bas).

Le chapitre 3 analyse la stabilité linéaire d'une couche de fluide Newtonien superposée à un milieu poreux saturé. Les courbes neutres sont bimodales (c'est-à-dire qu'elles présentent deux minima locaux) pour les grandes valeurs du rapport d'épaisseurs et l'on observe un saut brusque du nombre d'onde critique lorsque le rapport d'épaisseurs dépasse une valeur critique. En représentant les fonctions de courant de part et d'autre du saut, nous avons montré que l'on assistait au passage d'une circulation centrée sur la couche de fluide à une circulation centrée sur le milieu poreux mais avec des cellules de convection s'étendant sur la totalité du système bicouche. L'analyse de l'influence des différents nombres sans dimension nous a permis de formuler les conclusions suivantes:

- la viscosité effective introduite dans le modèle de Brinkman n'affecte pas de manière significative les valeurs critiques,
- le rapport d'épaisseurs critique tend à disparaître aussi bien pour les très faibles que pour les très grands nombres de Darcy.

Ensuite, nous avons regardé l'impact des conditions aux limites à la surface supérieure du fluide. Si cette surface est libre avec un effet Marangoni, nous avons observé que la convection restait confinée dans la couche de fluide excepté pour les très petits rapports d'épaisseurs. Ce résultat suggère un moyen de supprimer presque totalement la convection indésirable dans le milieu poreux.

Enfin, quelques simulations numériques directes 2D du système non linéarisé ont été réalisées en utilisant le code numérique AQUILON. Elles nous ont permis d'examiner la structure de l'écoulement et le profil de température au-delà du seuil de convection linéaire et de confirmer les prédictions de l'analyse linéaire.

Dans le chapitre 4, nous avons examiné l'influence de la rotation sur la convection dans une couche de milieu poreux en ajoutant un terme de Coriolis dans le modèle de Brinkman. La présence de rotation dans le système, qui se traduit par le nombre sans dimension de Taylor dans les équations, a d'importantes conséquences sur la nature du seuil de convection linéaire. En effet, alors que la convection était exclusivement stationnaire en l'absence de rotation, elle peut devenir oscillante en présence de rotation. Nous avons montré que, de manière générale, les valeurs du seuil de convection augmentaient avec le nombre de Taylor poreux Ta et que le seuil était stationnaire ou oscillant. Quelle que soit la valeur du nombre de Prandtl de filtration, la convection tend à être oscillante lorsque le nombre de Taylor poreux augmente.

L'examen de l'influence du nombre de Prandtl de filtration χ sur les valeurs critiques nous a permis de montrer que le seuil de convection était oscillant pour les faibles valeurs de χ et stationnaire pour les grandes valeurs de χ . Dans ce dernier cas, le nombre de Rayleigh poreux critique atteint alors une valeur constante, indépendante de χ . De plus, nous avons constaté que

le nombre d'onde d'une instabilité oscillante n'était pas nécessairement plus grand que celui caractéristique d'une instabilité stationnaire, comme c'est le cas dans un fluide pur.

Lorsque les convections stationnaire et oscillante sont présentes pour une même valeur du nombre de Rayleigh, on parle de point de codimension 2. Nous avons représenté la séparation dans le plan (χ, Ta) des instabilités oscillante et stationnaire. Cette limite correspondant aux points de codimension 2 est telle que l'instabilité sera toujours stationnaire pour $Ta < 2$. Au-delà de $Ta = 2$, l'instabilité sera oscillante pour les faibles valeurs de χ et stationnaire pour les grandes valeurs.

Enfin, pour de faibles valeurs du nombre de Darcy Da , le seuil de convection est indifféremment stationnaire ou oscillant. Lorsque Da augmente, le milieu poreux devient très perméable et se comporte comme un fluide; la convection est donc stationnaire et l'on retrouve le fait que les solutions oscillantes sont confinées aux très petites valeurs du nombre de Prandtl pour un fluide pur. Enfin, en augmentant le nombre de Biot, nous freinons la croissance des perturbations de température ce qui a pour conséquence d'élever la valeur de la température critique correspondante.

Le chapitre 5 étend les concepts introduits au chapitre 4 au cas où la matrice poreuse est saturée par un ferrofluide. Cette configuration n'avait pas encore fait l'objet d'une étude approfondie et constituait un prolongement naturel du modèle développé au chapitre 4. Les équations d'évolution des perturbations de vitesse verticale, de température et de la composante verticale de la vorticité mettent en évidence deux mécanismes distincts de convection: l'un gravifique et l'autre magnétique. Le premier de nature déstabilisante lorsque le système est chauffé par le bas alors que le second est déstabilisant quel que soit le sens du gradient thermique. Lorsque le système est chauffé par le bas, on s'attend par conséquent à ce que le système soit déstabilisé plus rapidement comme le confirme l'examen des courbes neutres. L'influence du nombre de Taylor et du nombre de Prandtl est semblable à celle observée au chapitre 4. Cette similitude provient du fait que les effets gravifique et magnétique s'additionnent pour donner lieu à une instabilité de Rayleigh plus intense. Enfin, nous avons montré que la convection devenait progressivement stationnaire lorsque le nombre de Darcy augmentait.

Nous avons terminé notre analyse du ferrofluide en rotation par l'étude du chauffage par le haut qui n'avait jamais été envisagé dans un milieu poreux. Nous avons montré que les courbes neutres avaient une allure très différente de celle des courbes obtenues pour le chauffage par le bas. Qu'elles soient stationnaires ou oscillantes, elles présentent une succession de minima secondaires dont l'origine a été élucidée par le tracé des fonctions de courant correspondantes. Nous avons montré que ces différents minima se caractérisaient par une structuration verticale différente (*i.e.* un nombre d'onde vertical diff  rent). Dans le cas des courbes stationnaires, la valeur critique (*i.e.* le minimum absolu) correspond toujours à un nombre d'onde vertical

égal à 1 comme lors du chauffage par le bas. La situation est différente pour les courbes oscillantes où le point critique peut se caractériser par un nombre d'onde vertical $n > 1$.

Le chapitre 6 envisage l'analyse faiblement non-linéaire de la convection dans une couche poreuse en rotation. Dans un premier temps, nous avons exposé de manière générale la méthode de résolution choisie qui permet de réduire les équations aux dérivées partielles caractérisant l'évolution des champs inconnus à un nombre fini d'équations différentielles ordinaires, les *équations aux amplitudes*. Dans un second temps, nous avons particularisé ces équations aux amplitudes à l'*instabilité de Küppers-Lortz*. Nous avons montré qu'au-delà d'une certaine valeur du nombre de Taylor Ta_c , une solution rouleau était déstabilisée par une autre solution rouleau mais décalée d'un certain angle par rapport à la première. Cette instabilité avait déjà fait l'objet de nombreuses études dans les fluides purs mais n'avait jamais été analysée dans les milieux poreux. Nous avons calculé en fonction du nombre de Darcy le nombre de Taylor critique ainsi que la valeur correspondante de l'angle entre les rouleaux. Ce nombre de Taylor est proche de 2 alors que l'angle est proche de 60° comme dans le cas d'un fluide pur.

Nous avons terminé ce travail en examinant le modèle de Busse-Heikes. Il s'agit d'un modèle simple constitué de trois modes à 60° comportant l'essentiel de la dynamique de l'instabilité de Küppers-Lortz. Nous avons examiné ses points fixes et leur stabilité en toute généralité. Pour $Ta > Ta_c$, le modèle ne possède plus de point fixe stable et la dynamique s'effectue sur une orbite hétérocline connectant les trois points fixes instables. Afin de représenter l'évolution spatio-temporelle de ce modèle, nous lui avons adjoint un terme du type Newell-Whitehead-Segel et nous avons intégré les équations par une méthode pseudo-spectrale. Nous nous sommes intéressés à l'évolution temporelle du champ horizontal de température pour deux valeurs du nombre de Taylor de part et d'autre du nombre de Taylor critique. Dans le premier cas, ces simulations montrent que le pattern évolue rapidement vers une solution rouleaux remplissant tout le domaine. Dans le deuxième cas, le pattern est constitué de plusieurs zones (caractéristiques de solutions rouleaux de directions différentes) évoluant dans le temps, sans jamais parvenir à une solution stationnaire.

Perspectives

A l'issue de cette étude, les perspectives de recherches apparaissent nombreuses. Tout d'abord, ce travail a mis en évidence le manque de données expérimentales sur les systèmes étudiés. Il serait par conséquent essentiel de réaliser des expériences de thermoconvection dans chacune des configurations proposées afin de mettre en évidence les caractéristiques des écoulements ainsi que le type de structures observées au-delà du seuil de convection.

Ce travail est consacré à des problèmes de convection dans des couches poreuses d'extension horizontale infinie. Un prolongement naturel de cette étude serait de considérer des géométries finies, plus représentatives des nombreuses applications géophysiques et industrielles des milieux poreux. Par exemple, il serait utile d'examiner le problème du milieu poreux en rotation du chapitre 4 dans une configuration sphérique. Nous aurions ainsi un modèle plus réaliste de la convection dans le manteau terrestre.

Dans l'étude du milieu poreux en rotation saturé par un ferrofluide, nous avons signalé que, paradoxalement, il manquait une analyse rigoureuse de ce système en l'absence de rotation. Cette étude est l'objet d'une publication en cours actuellement. Le chauffage par le haut a mis en évidence des courbes neutres particulières suggérant des investigations ultérieures. En effet, ces courbes présentent des points où sont simultanément stables un mode caractérisé par un nombre d'onde vertical égal à 1 et un mode caractérisé par un mode de nombre d'onde vertical égal à n . Une analyse faiblement non-linéaire permettrait d'étudier la résonance entre le mode 1 et le mode n . Enfin, nous n'avons pas réalisé d'étude non-linéaire du ferrofluide en rotation; ce problème n'étant pas auto-adjoint, il devrait donner lieu à une compétition entre les rouleaux, les hexagones et les carrés dont il serait intéressant d'examiner la stabilité relative en fonction des différents paramètres du problème.

Annexe A

Détermination de l'équation de Brinkman à partir de l'EIT

A.1 Rappel

L'idée de base de la thermodynamique irréversible "étendue" (en anglais, Extended Irreversible Thermodynamics EIT) [Lebon et al., 1980; Jou et al., 2001, 1999] consiste à élever les flux thermodynamiques (flux de masse, de quantité de mouvement, d'énergie) au niveau de variables indépendantes au même titre que les variables classiques comme la masse, la quantité de mouvement et l'énergie.

Un des objectifs de l'EIT est d'éliminer la paradoxe de la propagation des signaux à vitesse infinie, caractéristique des équations de Fick, Fourier et Newton prédites par la théorie classique des phénomènes irréversibles (voir les travaux de Prigogine [Prigogine, 1961] et de De Groot et Mazur [De Groot and Mazur, 1962]). Cette particularité est liée au fait que les équations d'évolution appartiennent à la classe des équations différentielles paraboliques. En EIT, les équations d'évolution sont au contraire de nature hyperbolique, ce qui a pour conséquence de conduire à des signaux se propageant à vitesse finie.

Dans un souci de simplification, nous admettrons comme acquise l'équation de l'énergie (c'est-à-dire le champ thermique). Nous nous limiterons en outre au régime linéaire en considérant comme négligeables les termes de flux d'ordre deux et supérieurs. La procédure se déroule en six étapes.

A.2 Étape n°1: détermination de l'ensemble des variables d'état

On assimile le milieu poreux à un mélange binaire [Lebon et al., 2003; Depireux and Lebon, 2001; Lebon and Cloot, 1983] constitué d'un fluide et

d'un solide tous deux en mouvement. Si la température est fixée ou connue, un choix naturel de variables est:

$$\rho_f, \rho_s, \mathbf{U}_s, \mathbf{U}_f \quad (\text{A.1})$$

où ρ_f, ρ_s désignent les masses spécifiques du fluide et du solide alors que \mathbf{U}_s et \mathbf{U}_f sont les vitesses correspondantes.

Un choix plus judicieux que A.1 est le suivant

$$\rho, c_f, \mathbf{U}, \mathbf{J}_f \quad (\text{A.2})$$

car il fait apparaître le flux de masse du fluide \mathbf{J}_f , les quantités figurant dans (A.2) sont définies comme suit:

$$\rho = \rho_s + \rho_f \quad (\text{masse spécifique totale}), \quad (\text{A.3})$$

$$c_f = \frac{\rho_f}{\rho} \quad (\text{concentration massique du fluide}), \quad (\text{A.4})$$

$$\rho \mathbf{U} = \rho_s \mathbf{U}_s + \rho_f \mathbf{U}_f \quad (\mathbf{U} = \text{vitesse barycentrique}), \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{J}_f = \rho_f (\mathbf{U}_f - \mathbf{U}) \quad (\text{flux de masse liquide}). \quad (\text{A.6})$$

On vérifie aisément que

$$\mathbf{J}_f = \frac{\rho_f \rho_s}{\rho} (\mathbf{U}_f - \mathbf{U}_s). \quad (\text{A.7})$$

et que

$$\mathbf{J}_f + \mathbf{J}_s = 0. \quad (\text{A.8})$$

avec

$$\mathbf{J}_s = \rho_s (\mathbf{U}_s - \mathbf{U}). \quad (\text{A.9})$$

A.3 Étape n°2: détermination des équations d'évolution des variables

Les équations d'évolution de ρ, c_f et \mathbf{U} sont les équations classiques de bilan [Jou et al., 2001, 1999; Prigogine, 1961; De Groot and Mazur, 1962].

$$\dot{\rho} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{U}, \quad (\text{A.10})$$

$$\rho \dot{c}_f = -\nabla \cdot \mathbf{J}_f, \quad (\text{A.11})$$

$$\rho \dot{\mathbf{U}} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^v + \rho \mathbf{F}, \quad (\text{A.12})$$

où $\dot{} = \partial_t + \mathbf{U} \cdot \nabla$, $\boldsymbol{\tau}^v$ est le tenseur des tensions visqueux, \mathbf{F} la résultante des forces extérieures par unité de masse, par exemple \mathbf{g} . Le problème essentiel est d'écrire une équation d'évolution pour la variable non-classique, c'est-à-dire \mathbf{J}_f .

En toute généralité, écrivons

$$\rho \dot{\mathbf{J}}_f = -\nabla \cdot \mathcal{J}^f + \sigma^f, \quad (\text{A.13})$$

où \mathcal{J}^f désigne un terme de flux (\mathcal{J}^f est un tenseur d'ordre deux) et σ^f un terme de source (un vecteur). \mathcal{J}^f et σ^f sont des inconnues à ce stade de l'analyse et doivent être donnés par des *équations constitutives*. Dans l'approximation linéaire, nous écrirons

$$\sigma^f = -a(\rho, c_f) \mathbf{J}_f + \mathcal{O}(2), \quad (\text{A.14})$$

$$\mathcal{J}^f = A(\rho, c_f) \mathbf{I} + \mathcal{O}(2), \quad (\text{A.15})$$

où \mathbf{I} est le tenseur identité, les scalaires a et A sont des inconnues fonction de ρ et c_f . Substituant (A.14) et (A.15) dans (A.39), il vient

$$\rho \dot{\mathbf{J}} = -\nabla A - a \mathbf{J}, \quad (\text{A.16})$$

où pour la simplicité, nous avons laissé tomber l'indice f de \mathbf{J}_f .

A.4 Étape n° 3: inégalité d'entropie

La thermodynamique introduit une variable d'état supplémentaire, l'entropie s , laquelle vérifie l'équation de bilan

$$\rho \dot{s} + \nabla \cdot \mathbf{J}^s = \sigma^s, \quad (\text{A.17})$$

$$\sigma^s \geq 0, \quad (\text{A.18})$$

où \mathbf{J}^s est le flux d'entropie et σ^s la production d'entropie, définie positive en vertu du second principe de la thermodynamique. L'entropie est bien entendu fonction de l'ensemble des variables thermodynamiques:

$$s = s(\rho, c_f, \mathbf{J}), \quad (\text{A.19})$$

tandis que \mathbf{J}^s est donné par une équation constitutive, qui dans l'approximation linéaire en les flux s'écrit:

$$\mathbf{J}^s = \gamma(\rho, c_f) \mathbf{J}, \quad (\text{A.20})$$

où $\gamma(\rho, c_f)$ est un coefficient à déterminer. Le second principe de la thermodynamique implique que l'inégalité suivante soit vérifiée:

$$\rho \left(\frac{\partial s}{\partial \rho} \dot{\rho} + \frac{\partial s}{\partial c_f} \dot{c}_f + \frac{\partial s}{\partial \mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{J}} \right) + \nabla \cdot (\gamma \mathbf{J}) \geq 0. \quad (\text{A.21})$$

Cette inégalité n'est cependant pas vérifiée pour n'importe quelle valeur des variables mais seulement pour les variables vérifiant les équations de bilan (A.10)-(A.12) et (A.16). Une manière élégante de tenir compte de ces

contraintes est de les faire intervenir dans l'inégalité (A.21) via des multiplicateurs de Lagrange [Liu, 1972], il s'ensuit que (A.21) prend la forme

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial s}{\partial \rho} \dot{\rho} + \frac{\partial s}{\partial c_f} \dot{c}_f + \frac{\partial s}{\partial \mathbf{J}} \dot{\mathbf{J}} \right) + \gamma \nabla \cdot \mathbf{J} + (\nabla \gamma) \cdot \mathbf{J} + \Lambda_1 (\dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \mathbf{U}) \\ & + \Lambda_2 (\rho \dot{c}_f + \nabla \cdot \mathbf{J}) + \Lambda_3 \cdot (\rho \dot{\mathbf{U}} + \nabla p - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^v - \rho \mathbf{F}) \\ & + \Lambda_4 \cdot (\rho \dot{\mathbf{J}} + \nabla A + a \mathbf{J}) \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

où Λ_i ($i = 1, \dots, 4$) sont les multiplicateurs de Lagrange, fonctions de l'ensemble des variables et par conséquent également des inconnues du problème.

A.5 Étape n°4: exploitation de l'inégalité d'entropie

A présent, toutes les variables figurant dans (A.22) peuvent prendre des valeurs arbitraires. On constate que (A.22) est linéaire en toute une série de variables comme $\dot{\rho}$, \dot{c}_f , $\dot{\mathbf{J}}$, $\dot{\mathbf{U}}$, $\nabla \rho$, \dots . Si on veut assurer que (A.22) reste positif, il faut que les coefficients de ces termes linéaires s'annulent. Il est commode de récrire (A.22) sous la forme

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial s}{\partial \rho} + \Lambda_1 \right) \dot{\rho} + \rho \left(\frac{\partial s}{\partial c_f} + \Lambda_2 \right) \dot{c}_f + \rho \left(\frac{\partial s}{\partial \mathbf{J}} + \Lambda_4 \right) \cdot \dot{\mathbf{J}} \\ & + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \rho} \mathbf{J} + \Lambda_4 \frac{\partial A}{\partial \rho} \right) \cdot \nabla \rho + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial c_f} \mathbf{J} + \Lambda_4 \frac{\partial A}{\partial c_f} \right) \cdot \nabla c_f + a \Lambda_4 \cdot \mathbf{J} \\ & + \Lambda_3 \cdot (\rho \dot{\mathbf{U}} + \nabla p - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^v - \rho \mathbf{F}) + \nabla \cdot \mathbf{J} (\gamma + \Lambda_2) \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Cette relation est linéaire en $\dot{\rho}$, \dot{c}_f , $\dot{\mathbf{J}}$, $\dot{\mathbf{U}}$, $\nabla \rho$ et ∇c_f . L'annulation de leurs coefficients conduit à

$$\Lambda_1 = -\rho \frac{\partial s}{\partial \rho} \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{p}{\rho T}, \quad (\text{A.24})$$

$$\Lambda_2 = -\frac{\partial s}{\partial c_f} \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{\mu_c}{T}, \quad (\text{A.25})$$

où μ_c désigne le potentiel chimique du fluide.

$$\Lambda_3 = 0, \quad (\text{A.26})$$

$$\Lambda_4 = -\frac{\partial s}{\partial \mathbf{J}} \stackrel{\text{déf.}}{=} \alpha \mathbf{J}, \quad (\text{A.27})$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \rho} \mathbf{J} + \Lambda_4 \frac{\partial A}{\partial \rho} = 0, \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial c_f} \mathbf{J} + \Lambda_4 \frac{\partial A}{\partial c_f} = 0, \quad (\text{A.29})$$

$$\gamma = -\Lambda_2. \quad (\text{A.30})$$

De (A.24)-(A.27), on déduit l'équation de Gibbs généralisée, une relation importante en EIT; ici on a

$$ds = -\frac{p}{\rho^2 T} d\rho - \frac{\mu_c}{T} dc - \alpha \mathbf{J} \cdot d\mathbf{J}. \quad (\text{A.31})$$

Les deux premiers termes du membre de droite sont classiques et représentent l'entropie d'équilibre local [Prigogine, 1961; De Groot and Mazur, 1962], le dernier est typique de l'EIT [Jou et al., 2001]. Comme s est maximum à l'équilibre, on tire directement de (A.31), après intégration que

$$s = s_{\text{éq}} - \frac{\alpha}{2} J^2, \quad (\text{A.32})$$

de sorte que

$$\alpha > 0. \quad (\text{A.33})$$

De la combinaison de (A.28) et (A.29), il vient compte tenu de (A.27):

$$\nabla \gamma + \alpha \nabla A = 0, \quad (\text{A.34})$$

où, en vertu de (A.25) et (A.30), γ est donné par

$$\gamma = -\frac{\mu_c}{T}. \quad (\text{A.35})$$

Substituant (A.35) dans l'expression (A.20) du flux d'entropie \mathbf{J}^s , on retrouve le résultat classique

$$\mathbf{J}^s = -\frac{\mu_c}{T} \mathbf{J}. \quad (\text{A.36})$$

Compte tenu des résultats établis plus haut, l'inégalité d'entropie (A.23) se réduit à

$$a \alpha J^2 \geq 0. \quad (\text{A.37})$$

Étant donné que $\alpha > 0$ d'après (A.33), on en déduit que

$$a > 0. \quad (\text{A.38})$$

A.6 Étape n°5: formulation finale de l'équation du flux de matière

Compte tenu de (A.34) et (A.35), l'équation (A.16) d'évolution de \mathbf{J} s'écrit

$$\dot{\mathbf{J}} = -\frac{1}{\alpha \rho} \nabla \left(\frac{\mu_c}{T} \right) - \frac{1}{\tau} \mathbf{J}, \quad (\text{A.39})$$

où on a introduit le temps de relaxation τ via la définition $a = \frac{\rho}{\tau}$, τ est clairement une quantité positive d'après (A.38). A l'état stationnaire, (A.39) se réduit à

$$\mathbf{J} = -D \nabla \left(\frac{\mu_c}{T} \right), \quad (\text{A.40})$$

où le coefficient de diffusion D est défini par

$$D = \frac{\tau}{\alpha \rho} \quad (> 0) \quad (\text{A.41})$$

On reconnaît dans l'expression (A.40) la loi de Fick classique. Le résultat (A.41) est intéressant car il permet d'exprimer le coefficient α de l'équation de Gibbs (A.31) en fonction de grandeurs mesurables comme D et τ , puisque

$$\alpha = \frac{\tau}{\rho D} \quad (\text{A.42})$$

A.7 Étape n°6: Bilan de quantité de mouvement pour la vitesse du fluide

Combinant l'équation de bilan de quantité de mouvement (A.12) avec celle pour \mathbf{J} c'est-à-dire (A.39), on obtient

$$\dot{\rho}_f (\mathbf{U}_f - \mathbf{U}) + \rho_f \dot{\mathbf{U}}_f - \frac{\rho_f}{\rho} (-\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^v + \rho \mathbf{F}) = -\frac{D}{\tau} \nabla \left(\frac{\mu_c}{T} \right) - \frac{\rho_f}{\tau} (\mathbf{U}_f - \mathbf{U}), \quad (\text{A.43})$$

où on a tenu compte de la définition (A.6) de \mathbf{J} et de celle (A.42) de α . Annulant la vitesse du solide ($\mathbf{U}_s = 0$), il vient

$$\mathbf{U} = \frac{\rho_f}{\rho} \mathbf{U}_f \quad \text{et} \quad \mathbf{U}_f - \mathbf{U} = \frac{\rho_s}{\rho} \mathbf{U}_f, \quad (\text{A.44})$$

de sorte que (A.43) se met sous la forme suivante, dans l'hypothèse où les termes d'ordre U^2 sont négligés et où $\boldsymbol{\tau}^v$ est donné par la loi de Newton:

$$\rho_f \dot{\mathbf{U}}_f = -\frac{\rho_f}{\rho} \nabla p - \frac{\rho_f}{\rho} \mu_l \nabla^2 \mathbf{U} + \rho_f \mathbf{F} - \frac{D}{\tau} \nabla \left(\frac{\mu_c}{T} \right) - \frac{\rho_f \rho_s}{\tau \rho} \mathbf{U}_f, \quad (\text{A.45})$$

μ_l est la viscosité dynamique du fluide. Le coefficient de diffusion D étant généralement négligeable, on omettra le terme en $\nabla \left(\frac{\mu_c}{T} \right)$.

Définissons à présent la perméabilité K du milieu poreux par la relation

$$K = \frac{\tau \phi \mu_l}{\rho_s}, \quad (\text{A.46})$$

où ϕ est la porosité et la viscosité effective μ_e par

$$\mu_e = \frac{\rho_f \mu_l}{\rho \phi}, \quad (\text{A.47})$$

Sous ces conditions, (A.45) prend la forme

$$\rho_f \dot{\mathbf{U}}_f = -\frac{\rho_f}{\rho} \left(\nabla p + \frac{\mu_l}{K} \mathbf{u} \right) - \mu_e \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_f \mathbf{F}, \quad (\text{A.48})$$

où $\mathbf{u} = \phi \mathbf{U}_f$ est la vitesse de filtration.

Dans l'hypothèse où $\rho_s \ll \rho_f$ (c'est-à-dire $\frac{\rho_f}{\rho} = 1$), on obtient la forme finale

$$\rho_f \dot{\mathbf{U}}_f = -\nabla p + \frac{\mu_l}{K} \mathbf{u} - \mu_e \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_f \mathbf{F}. \quad (\text{A.49})$$

En l'absence de forces extérieures et pour un écoulement stationnaire, (A.49) s'écrit

$$-\nabla p + \frac{\mu_l}{K} \mathbf{u} - \mu_e \nabla^2 \mathbf{u} = 0, \quad (\text{A.50})$$

c'est-à-dire la loi de Brinkman, dont on peut donc dire qu'elle a été établie à partir de l'EIT sur des bases thermodynamiques. Elle apparaît clairement comme une version simplifiée de la loi d'évolution du flux de matière liquide. Remarquons enfin que dans (A.46), τ mesure l'inverse de la fréquence de collision des particules fluides entre elles et est de l'ordre de 10^{-8} à 10^{-13} s. L'identification (A.46) indique que la perméabilité K est du même ordre de grandeur, conformément aux données expérimentales

Bibliographie

- Alazmi, B. and Vafai, K. (2001). Analysis of fluid flow and heat transfer interfacial conditions between a porous medium and a fluid layer. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 44:1735–1749.
- Alexion, C., Schmid, R., Jurgons, R., Bergemann, C., Arnold, W., and Parak, F. G. (2002). Targeted tumor therapy with magnetic drug targeting. Therapeutic efficacy of ferrofluid bound mitoxantrone. In Odenbach, S., editor, *Ferrofluids*, volume 504 of *Lecture Notes in Physics*, pages 233–251. Springer-Verlag.
- Auernhammer, G. K. and Brand, H. R. (2000). Thermal convection in a rotating layer of magnetic fluid. *Eur. Phys. J. B*, 16:157–168.
- Bajaj, K. M. S., Ahlers, G., and Pesch, W. (2002). Rayleigh-Bénard convection with rotation at small Prandtl numbers. *Phys. Rev. Lett.*, 81:806–809.
- Bajaj, K. M. S., Liu, J., Naberhuis, B., and Ahlers, G. (1998). Square patterns in Rayleigh-Bénard convection with rotation about a vertical axis. *Phys. Rev. Lett.*, 81:806–809.
- Bashtovoy, B., Berkovski, Y., and Vislovich, A. N., editors (1988). *Introduction to Thermomechanics of Magnetic Fluids*. Hemisphere Publishing Corporation.
- Bear, Y. (1988). *Dynamics of Fluids in Porous Media*. Dover, New York.
- Beavers, G. S. and Joseph, D. J. (1967). Boundary conditions at a naturally permeable wall. *J. Fluid Mech.*, 30:197–207.
- Bénard, H. (1900). Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportent de la chaleur par convection en régime permanent. *Ann. Chim. Phys.*, 7:23–62.
- Berkovski, Y. and Bashtovoy, B., editors (1998). *Magnetic Fluids and Applications Handbook*. Begell House, New York.
- Bestehorn, M. (1993). Phase and amplitude instabilities for Bénard-Marangoni convection in fluid layers with large aspect ratio. *Phys. Rev. E*, 48:3622–3634.
- Blennerhasset, P. J., Lin, F., and Stiles, P. J. (1991). Heat transfer through strongly magnetized ferrofluids. *Proc. R. Soc. London A*, 433:165–177.
- Blums, E., Cebers, A., and Maiorov, M. M., editors (1997). *Magnetic Fluids*. Walter de Gruyter, Berlin, New York.

- Bodenschatz, E., Pesch, W., and Ahlers, G. (2000). Recent developments in Rayleigh-Bénard convection. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 32:709.
- Bories, S. A. and Combarrous, M. A. (1973). Natural convection in a sloping porous layer. *J. Fluid Mech.*, 57:63–79.
- Boussinesq, J. (1903). *Théorie Analytique de la Chaleur*, volume 2. Gauthiers-Villars, Paris.
- Brinkman, H. C. (1947). A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particules. *Appl. Sci. Res. A*, 1:27–34.
- Busse, F. H. (1978). Non-linear properties of thermal convection. *Rep. Prog. Phys.*, 41:1929–1967.
- Busse, F. H. (1989). Fundamentals of Thermal Convection. In Peltier, W. R., editor, *Mantle Convection: Plate Tectonics and Global Dynamics*, pages 23–95. Gordon and Breach, Montreux.
- Busse, F. H. and Heikes, K. E. (1980). Convection in rotating layer: a simple case of turbulence. *Science*, 208:173–175.
- Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A., and Zang, T. A. (1987). *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag.
- Chandrasekhar, S. (1961). *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. The Clarendon Press, Oxford.
- Chen, F. and Chen, C. F. (1988). Onset of finger convection in a horizontal porous layer underlying a fluid layer. *ASME J. Heat Transfer*, 110:403–409.
- Chen, F. and Chen, C. F. (1989). Experimental investigation of convective stability in a superposed fluid and porous layer when heated from below. *J. Fluid Mech.*, 207:311–321.
- Chen, F. and Chen, C. F. (1992). Convection in superposed fluid and porous layers. *J. Fluid Mech.*, 234:97–119.
- Clune, T. and Knobloch, E. (1993). Pattern selection in rotating convection with experimental boundary conditions. *Phys. Rev. E*, 47:2536–2550.
- Colinet, P., Legros, J. C., and Velarde, M. G. (2001). *Nonlinear Dynamics of Surface Tension Driven Instabilities*. Wiley-VCH.
- Cox, S. M. and Matthews, P. C. (2000). Instability of rotating convection. *J. Fluid Mech.*, 403:153–172.
- Cross, M. C. (1980). Derivation of amplitude equation at the Rayleigh-Bénard instability. *Phys. Fluids*, 23:1727–1731.
- Cross, M. C., Meiron, D., and Tu, Y. (1994). Chaotic domains: a numerical investigation. *Chaos*, 4(4):607–619.
- Dagan, G. (1989). *Flows and Transport in Porous Formations*. Springer-Verlag, Berlin.
- Darcy, H. P. G. (1856). *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*. Victor Dalmont, Paris.

- Dauby, P. C. (1994). *Instabilités thermocapillaires et effet de confinement*. PhD thesis, Université de Liège.
- Dauby, P. C., Desaive, T., Bragard, J., and Cerisier, P. (2001). Amplitude equations for Rayleigh-Bénard convective rolls far from threshold. *Phys. Rev. E*, 64:066301.
- Dauby, P. C. and Lebon, G. (1996). Bénard-Marangoni instability in rigid rectangular containers. *J. Fluid Mech.*, 329:25–64.
- Davis, S. H. and Segel, L. A. (1968). Effects of surface curvature and property variations on cellular convection. *Phys. Fluids*, 11:470–478.
- De Groot, S. R. and Mazur, P. (1962). *Non-Equilibrium Thermodynamics*. North Holland, Amsterdam.
- Depireux, N. and Lebon, G. (2001). An extended thermodynamic modelling of non-fickian diffusion. *J. Non-Newt Fluid Mech.*, 96:105–117.
- Desaive, T., Hennenberg, M., and Lebon, G. (2002). Thermal instability of a rotating saturated porous medium heated from below and submitted to rotation. *Eur. Phys. J. B*, 29:641–647.
- Desaive, T., Lebon, G., and Hennenberg, M. (2001). Coupled capillary and gravity-driven instability in a liquid film overlying a porous layer. *Phys. Rev. E*, 64:066304.
- Drazin, P. G. and Reid, W. H. (1981). *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press.
- Echebarria, B. and Pérez-García, C. (2001). Stability of hexagonal patterns in Bénard-Marangoni convection. *Phys. Rev. E*, 63:066307.
- Eckert, K., Bestehorn, M., and Thess, A. (1998). Square cells in surface-tension driven Bénard convection: experiment and theory. *J. Fluid Mech.*, 356:155–197.
- Eckhaus, W. (1965). *Studies in Non-Linear Stability Theory*. Springer-Verlag, New York.
- Fantz, M., Friedrich, R., Bestehorn, M., and Haken, H. (1992). Pattern formation in rotating Bénard convection. *Physica D*, 61:147–154.
- Friedrich, R. (1983). Einfluss der Prandtl-Zahl auf die Zellularkonvektion in einem rotierenden mit Fluid gesättigten porösen Medium. *Z. Angew. Math. Mech.*, 63:T246–T249.
- Fynlayson, B. A. (1970). Convective instability of ferromagnetic fluids. *J. Fluid Mech.*, 40:753.
- Gershuni, G. Z. and Zhukhovitskii, E. M. (1976). *Convective Stability of Incompressible Fluids*. Keterpress Enterprises, Jerusalem.
- Getling, A. V. (1998). *Rayleigh-Bénard Convection*. World Scientific, Singapore.
- Givler, R. C. and Altobelli, S. A. (1994). A determination of the effective viscosity for the Brinkman-Forchheimer flow model. *J. Fluid Mech.*, 258:355–370.

- Gotoh, K. and Yamada, M. (1982). Thermal convection in a horizontal layer of magnetic fluids. *J. Phys. Soc. Japan*, 51(9):3042–3048.
- Greenspan, H. P. (1968). *The Theory of Rotating Fluids*. Cambridge University Press, UK.
- Haken, H. (1983). *Advance Synergetics*. Springer-Verlag, Berlin.
- Hennenberg, M., Saghir, M. Z., Rednikov, A., and Legros, J. C. (1997). Porous media and the Bénard-Marangoni problem. *Transport in Porous Media*, 27:327–355.
- Horton, C. W. and Rogers, G. T. (1945). Convection currents in a porous medium. *J. Appl. Phys.*, 16:367–370.
- Hu, Y., Pesch, W., Ahlers, G., and Ecke, R. E. (1998). Convection under rotation for Prandtl number near 1: Küppers-Lortz instability. *Phys. Rev. E*, 58:5821–5833.
- Istasse, E. (1997). Étude des instabilités de Rayleigh-Bénard dans un milieu poreux fracturé. Travail de fin d'étude, Université Libre de Bruxelles.
- Jou, D., Casas-Vazquez, J., and G., L. (1999). Extended Irreversible Thermodynamics Revisited (1988-1998). *Rep. Progress in Physics*, 62:1005–1142.
- Jou, D., Casas-Vazquez, J., and Lebon, G. (2001). *Extended Irreversible Thermodynamics*. Springer-Verlag, Berlin.
- Kaviany, M. (1995). *Principles of Heat Transfer in Porous Media*. Springer-Verlag, New York.
- Knobloch, E. (1998). Rotating convection: recent developments. *Int. J. Eng. Science*, 36:1421–1450.
- Koschmieder, E. L. and Pallas, S. G. (1974). Heat transfer through a shallow, horizontal convecting fluid layer. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 17:991–1002.
- Küppers, G. and Lortz, D. (1969). Transition from laminar convection to thermal turbulence in a rotating fluid layer. *J. Fluid Mech.*, 35:609–620.
- Lapwood, E. R. (1948). Convection of a fluid in a porous medium. *Proc. Camb. Philos. Soc.*, 44:508–521.
- Lebon, G. and Cloot, A. (1983). A thermodynamical modelling of fluid flows through porous media: application to natural convection. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 29:381–390.
- Lebon, G., Grmela, M., and Lhuillier, D. (2003). A comparative study of the coupling of flow with non-Fickian thermodiffusion. Part I: Extended Irreversible Thermodynamics. *J. Non-Equil. Thermo*. Accepted pour publication.
- Lebon, G., Jou, D., and Casas-Vazquez, J. (1980). An extension of the local equilibrium hypothesis. *J. Phys. A*, 13:275–290.
- Liu, I.-S. (1972). Method of Lagrange multipliers for exploiting the entropy principle. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 46:131–148.
- Lundgren, T. S. (1972). Slow flow through stationary random beds and suspensions of spheres. *J. Fluid Mech.*, 51:273–299.

- Manneville, P. (1990). *Dissipative Structures and Weak Turbulence*. Perspectives in Physics, Academic Press.
- Morrow, N. R., editor (1991). *Interfacial Phenomena in Petroleum Recovery*, volume 36 of *Surfactant Science Series*. Marcel Dekker.
- Morse, P. M. and Feshbach, H. (1953). *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill, New York.
- Neale, G. and Nader, W. (1974). Practical significance of Brinkman's extension of Darcy's law: Coupled parallel flows within a channel and a bounding porous medium. *Canad. J. Chem. Engng.*, 52:475–478.
- Neuringer, J. L. and Rosensweig, R. E. (1964). Ferrohydrodynamics. *Phys. Fluids*, 7(12):1927–1937.
- Newell, A. C. and Whitehead, J. A. (1969). Finite Bandwidth, finite amplitude convection. *J. Fluid Mech.*, 38:279–303.
- Nield, D. A. (1964). Surface tension and buoyancy effects in cellular convection. *J. Fluid Mech.*, 9:341–352.
- Nield, D. A. (1977). Onset of convection in a fluid layer overlying a layer of porous medium. *J. Fluid Mech.*, 81:513–522.
- Nield, D. A. (1999). *Convection in Porous Media, Second Edition*. Springer-Verlag.
- Nitschke, K. and Thess, A. (1995). Secondary instability in surface-tension-driven Bénard convection. *Phys. Rev. E*, 52:5772–5775.
- Oberbeck, A. (1879). Ueber die Wärmeleitung der Flüssigkeiten bei Berücksichtigung der Strömungen infolge von Temperaturdifferenzen. *Ann. Phys. Chem.*, 7:271–292.
- Palm, E. and Tyvand, P. A. (1984). Thermal convection in a rotating porous layer. *Z. Angew. Math. Phys.*, 35:122–123.
- Parmentier, P. (1997). *Etude théorique des instabilités d'origines capillaire et gravifique dans les fluides viscoélastiques*. PhD thesis, Université de Liège.
- Parmentier, P. M., Regnier, V. C., Lebon, G., and Legros, J. C. (1996). A nonlinear analysis of coupled gravitational and capillary thermoconvection in thin fluid layers. *Phys. Rev. E*, 54:411–423.
- Pearson, J. R. A. (1958). On convection cells induced by surface tension. *J. Fluid Mech.*, 4:489–500.
- Poulikakos, D. (1986). Buoyancy-driven convection in a horizontal fluid layer extending over a porous substrate. *Phys. Fluids*, 29:3949–3957.
- Prasad, V. (1991). Convective flow interaction and heat transfer between fluid and porous layers. In Kakaç, S., Kilkis, B., Kulacki, F. A., and Arinç, F., editors, *Convective Heat and Mass Transfer in Porous Media*, pages 563–615. Kluwer Academic.
- Prigogine, I. (1961). *Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes*. Interscience, New York.

- Regnier, V. (1998). *Instabilités thermoconvectives dans les fluides à interfaces déformables*. PhD thesis, Université de Liège.
- Regnier, V. C., Dauby, P. C., Parmentier, P. M., and Lebon, G. (1997). Square cells in gravitational and capillary thermoconvection. *Phys. Rev. E*, 55:6860–6865.
- Rosensweig, R. E. (1985). *Ferrohydrodynamics*. Cambridge University Press.
- Rosensweig, R. E., Browaeys, J., Bacri, J.-C., Zebib, A., and Perzynski, R. (1999). Laboratory study of spherical convection in simulated central gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 83(23):4904–4907.
- Rudraiah, N. and Prasad, V. (1998). Effect of Brinkman boundary layer on the onset of Marangoni convection in a fluid-saturated porous layer. *Acta Mech.*, 127:235–246.
- Saghir, M. Z., Comi, P., and Mehrvar, M. (2002). Effects of interaction between Rayleigh and Marangoni convection in superposed fluid and porous layers. *Int. J. Therm. Sci.*, 41:207–215.
- Segel, L. A. (1969). Distant side-walls cause slow amplitude modulation of cellular convection. *J. Fluid Mech.*, 38:203–224.
- Sekar, R. and Vaidyanathan, G. (1993). Convective instability of a magnetized ferrofluid in a rotating porous medium. *Int. J. Engng Sc.*, 31(8):1139–1150.
- Sekar, R., Vaidyanathan, G., and Ramanathan, A. (1993). The ferroconvection in fluids saturating a rotating densely packed porous medium. *Int. J. Engng Sc.*, 31(2):241–250.
- Sekar, R., Vaidyanathan, G., and Ramanathan, A. (2000). Effect of rotation on thermohaline convection. *J. Magnetism Magnetic Mater.*, 218:266–272.
- Somerton, C. W. and Catton, I. (1982). On the thermal instability of superimposed porous and fluid layers. *ASME J. Heat Transfer*, 104:160–165.
- Stiles, P. J. and Kagan, M. (1989). Thermoconvective instability of a ferrofluid in a strong magnetic field. *J. of Colloid and Inter. Sci.*, 134:435–448.
- Swift, J. and Hohenberg, P. C. (1977). Hydrodynamic fluctuations at the convective instability. *Phys Rev A*, 15:319–328.
- Taslim, M. E. and Narusawa, U. (1989). Thermal stability of horizontally superposed porous and fluid layers. *ASME J. Heat Transfer*, 111:357–362.
- Tu, Y. and Cross, M. C. (1992). Chaotic domain structure in rotating convection. *Phys. Rev. Lett.*, 69(17):2515–2518.
- Vadasz, P. (1998a). Coriolis effect on gravity-driven convection in a rotating porous layer heated from below. *J. Fluid Mech.*, 376:351–375.
- Vadasz, P. (1998b). Free convection in rotating porous media. In Ingham, D. B. and Pop, I., editors, *Transport Phenomena in Porous Media*, pages 285–312. Elsevier, Oxford.
- Vafai, K. and Kim, S. J. (1990). Fluid mechanics of the interface region

- between a porous medium and a fluid layer - an exact solution. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 11(3):254–256.
- Vasseur, P., Wang, C. H., and Sen, M. (1989). Thermal instability and natural convection in a fluid layer over a porous substrate. *Wärme Stoffübertrag.*, 24:337–347.
- Venkatasubramanian, S. and Kaloni, P. N. (1994). Effects of rotation on the thermoconvective instability of a horizontal layer of ferrofluids. *Int. J. Engng Sci.*, 32(2):237–256.