# Application des barycentres en logique floue

V. HENRY, *Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences Sociales, Université de Liège*

## 1. Notion de barycentre

Dans un espace vectoriel réel $E$, considérons $n$ points $P_1, \dots, P_n$, à partir desquels nous construisons les points pondérés $(P_1, \lambda_1), (P_2, \lambda_2), \dots, (P_n, \lambda_n)$ de l'espace-produit $E \times \mathbb{R}$, les poids de pondération $\lambda_j$ étant des réels non-négatifs tels que

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \neq 0.$$

Nous appelons barycentre des points pondérés $(P_1, \lambda_1), (P_2, \lambda_2), \dots, (P_n, \lambda_n)$ le point $G$ de $E$ défini par

$$G = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j.$$

Si, de plus, tous les poids de pondération sont égaux, le barycentre coïncide avec le point

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} P_j$$

et porte alors le nom d'isobarycentre ou de centre de gravité du polytope $P$ défini comme l'enveloppe convexe des points $P_1, \dots, P_n$. Il est d'ailleurs évident qu'un point de $E$ appartient au polytope $P$ si et seulement s'il existe des poids $\lambda_j$ adéquats tels que le point soit le barycentre des points pondérés $(P_j, \lambda_j)$ pour $j = 1, \dots, n$; de plus, les poids de pondération $\lambda_j$ sont univoquement déterminés dès que les $n$ points $P_j$ sont affinement indépendants.

Adresse de l'auteur: Valérie Henry, Boulevard du Rectorat, 7, B31, 4000 - Liège
e-mail : V.Henry@ulg.ac.be

Le barycentre de points pondérés $(P_j, \lambda_j)_{j=1,\ldots,n}$ avec $n > 2$ peut être construit de proche en proche par associativité ; de fait, si $\lambda_1 + \lambda_2$ n'est pas nul, il est clair que $G$ coïncide avec le barycentre des points

$$(G_1, \lambda_1 + \lambda_2), (P_3, \lambda_3), \ldots, (P_n, \lambda_n)$$

avec

$$G_1 = \frac{\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

le barycentre des points $(P_1, \lambda_1), (P_2, \lambda_2)$. Or il est aisé de construire le barycentre de deux points pondérés $(P_1, a)$ et $(P_2, b)$ ; en effet, $G$ se trouve sur le segment de droite $[P_1, P_2]$ et sa distance au point $P_1$ (respectivement au point $P_2$) vaut $\frac{b}{a+b}$ (respectivement $\frac{a}{a+b}$) puisque

$$G - P_1 = \frac{b}{a+b}(P_2 - P_1)$$

et

$$G - P_2 = \frac{a}{a+b}(P_1 - P_2).$$

Une construction particulièrement simple permet de dessiner le barycentre $G$ de 2 points dans un espace vectoriel de dimension au moins égale à 2. Du point $P_1$ comme extrémité, on trace un segment de droite $[P_1, P_1']$ de longueur égale ou proportionnelle à $b$. Ensuite du point $P_2$, on trace un segment de droite $[P_2, P_2']$ dont le support est parallèle à $[P_1, P_1']$, de longueur égale ou proportionnelle à $a$ en respectant la proportion utilisée pour construire $P_1'$ et de sens opposé à $[P_1, P_1']$. L'intersection des droites $P_1P_2$ et $P_1'P_2'$ donne le barycentre $G$ cherché. En guise d'exemple, la figure 1 livre le barycentre de deux points et de quatre points.

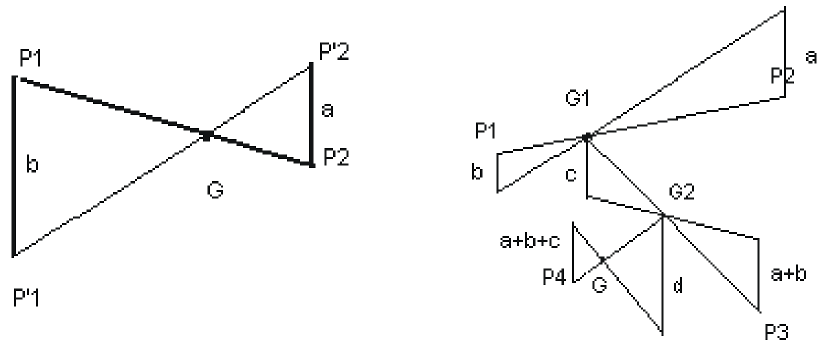


Fig. 1 : Barycentre de deux points et de quatre points

# 2. Application des barycentres au contrôle flou

## 2.1. Introduction à la logique floue

Dans la logique classique, le système binaire employé impose à toute proposition d'être toujours soit vraie soit fausse, les valeurs de vérité appartenant exclusivement à l'ensemble $\{0, 1\}$. Dans la réalité, les choses ne sont pas toujours aussi simples et nous sommes souvent amenés à moduler la réponse à une question du type : « M. Dupont est-il petit ou grand ? » ou encore « Fait-il chaud ou froid ce matin ? » ...

En étendant l'ensemble $\{0, 1\}$ des valeurs de vérité à l'intervalle $[0, 1]$ tout entier, la logique floue permet de tenir compte de cette richesse de raisonnement. Ainsi, pour répondre à la première question, la logique classique impose une division rigide de l'ensemble des tailles en deux classes : les petits et les grands. Une division classique consiste à mettre la limite à 1,70m. Dans ce cas, un individu mesurant 1,69m appartiendra au groupe des petits tandis que son voisin de 1,71m sera considéré comme grand ! Dans la logique floue, par contre, on peut très bien appartenir aux deux ensembles simultanément, tout comme une proposition peut être à la fois vraie et fausse, tout cela avec des « degrés de certitude » différents. (Pour une introduction plus détaillée à la logique floue, consulter [1] et [2])

## 2.2. Sous-ensembles, quantités, intervalles et nombres flous

Soit $X$ l'univers de référence de la variable $x$. Soit $A$ un sous-ensemble de $X$. On définit $\mu_A(x) : X \mapsto [0, 1]$ la fonction qui à $x$ associe le degré de certitude avec lequel l'élément $x$ appartient au sous-ensemble $A$.

- Le sous-ensemble $A$ muni de la fonction d'appartenance $\mu_A$, ce que l'on note $\widetilde{A} = (A, \mu_A)$, est appelé sous-ensemble flou.
- Lorsque l'univers $X$ de référence est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, le sous-ensemble flou $\widetilde{A} = (A, \mu_A)$ est appelé quantité floue.
- Un élément $m$ du noyau de $\widetilde{A}$, c'est-à-dire de l'ensemble de tous les éléments pour lesquels la fonction d'appartenance de $A$ vaut 1, est appelé une valeur modale de $\widetilde{A}$ qui est alors souvent noté $\widetilde{m}$.
- Un intervalle flou $I$ est une quantité floue convexe. Il correspond concrètement à un intervalle de $\mathbb{R}$ dont les limites sont imprécises.

- Un nombre flou N est un intervalle flou de fonction d'appartenance semi-continue supérieurement, de support compact et admettant une unique valeur modale *n*. Dans pareil cas, le nombre *n* représente une valeur « la plus crédible », ou encore « valeur moyenne » du nombre flou $\tilde{n}$.

Revenons à notre exemple des tailles. PETIT et GRAND sont deux sous-ensembles de l'ensembles des tailles. A ces ensembles, on peut associer les fonctions d'appartenance $\mu_p$ et $\mu_g$ représentées sur la figure 2.

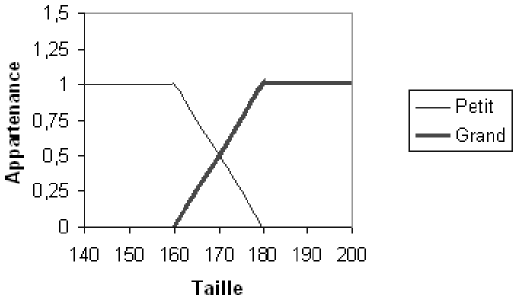


Fig. 2 : Fonctions d'appartenance pour la taille

Ainsi un individu mesurant 1,70 m sera petit avec un degré de certitude de 0,5 et grand avec un degré de certitude de 0,5 également ce que nous traduisons dans le langage courant par une expression du type « Il a une taille moyenne. » ou « Il n'est ni très grand ni très petit. » Par contre, 1,80 m est une grande taille avec la certitude maximale ce qui correspond bien à l'intuition.

## 2.3. Contrôle flou de production

Dans de nombreux contextes économiques, le gestionnaire est amené à régler la production d'un output en fonction de phénomènes extérieurs. Dans ces contextes, la logique floue intervient de manière significative. En effet, en règle générale, la réalisation de ces phénomènes extérieurs ou prémisses ainsi que la détermination de la quantité d'output à produire sont souvent plus facilement traduisibles en terme de nombres flous car ils ne sont connus qu'avec un certain degré de certitude. Nous parlerons, dans ce cas, de contrôle flou de production, le gestionnaire étant amené à suivre des règles d'implication floue du type : si la prémisse est caractérisée par le nombre flou $\widetilde{m}$, alors la quantité d'output doit être caractérisée par le nombre flou $\widetilde{p}$.

Illustrons la méthode utilisée pour déterminer la quantité d'output en fonction des causes extérieures. Prenons l'exemple d'un producteur de crème glacée dont la production excédentaire (c'est-à-dire en surplus d'une production constante au cours de l'année) dépend du climat local. Naturellement, il augmente peu sa production si le temps est frais tandis qu'il augmente de plus en plus son output au fur et à mesure que le climat se réchauffe. Introduisons quelques notations :

- $B$ est le sous-ensemble des températures basses, $C$ est le sous-ensemble des températures chaudes.
- $\widetilde{\Theta}_1 = (B, \mu_B)$ est le nombre flou associé à la température basse,
  $\widetilde{\Theta}_2 = (C, \mu_C)$ est le nombre flou associé à la température chaude.

Les fonctions d'appartenance $\mu_B$ et $\mu_C$ sont représentées sur la figure 3.

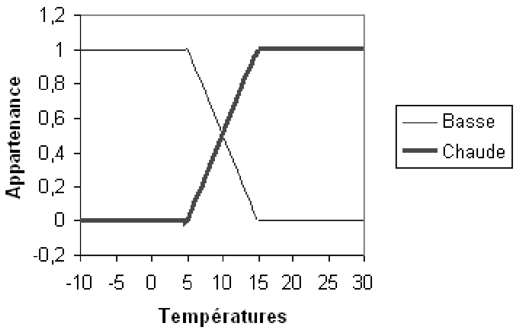


Fig. 3 : Fonctions d'appartenance pour la température

Notons encore $\widetilde{p_1}$ et $\widetilde{p_2}$ les nombres flous associés à une production excédentaire faible et forte respectivement dont les fonctions d'appartenance $\mu_f$ et $\mu_F$ peuvent être représentées comme suit dans la figure 4.

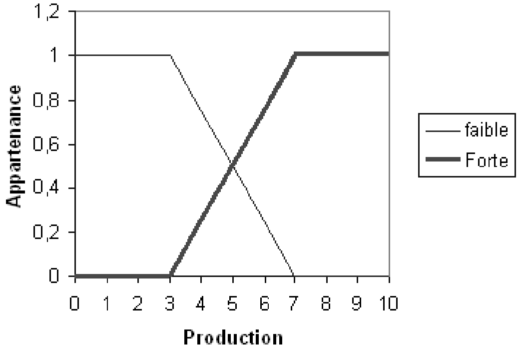


Fig. 4 : Fonctions d'appartenance pour la production

Supposons maintenant avoir une température ambiante de 13°C. Quelle est la quantité d'output que doit produire le glacier ?

D'après la figure 3,

$$\mu_B(13) = 0,2 \text{ et } \mu_C(13) = 0,8$$

Il est dès lors naturel de modifier les fonctions d'appartenance de la production : $\mu_f$ doit être réduite à 20% de sa hauteur tandis que $\mu_F$ doit être réduite à 80% de sa hauteur. Nous obtenons le graphique de la figure 5.

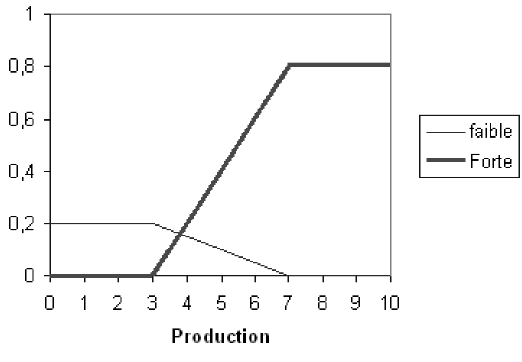


Fig. 5 : Production « ajustée »

La production globale est alors caractérisée par la quantité floue

$$\left([0,10], \sup[0,2\mu_f, 0,8\mu_F]\right)$$

représenté sur la figure 6 par le polytope $P$. Nous arrivons alors au terme de la première étape appelée « étape de fuzzification » : nous pouvons donner une réponse floue à notre question.

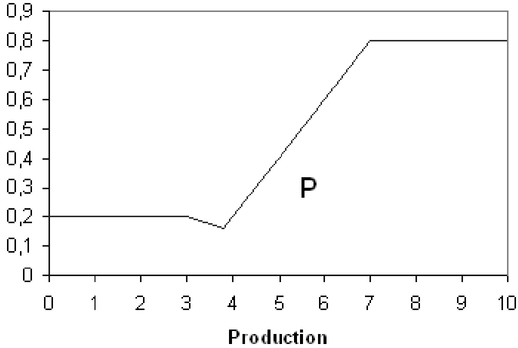


Fig. 6 : Représentation du polytope $P$

Malheureusement, en pratique, le glacier n'est pas satisfait, le polytope $P$ ne le renseigne pas suffisamment sur la manière dont il doit augmenter sa production. Il convient alors de procéder à la « défuzzification du problème » et de recourir au barycentre de la région $P$ qui renseignera alors utilement le glacier sur l'output à produire. Comment dès lors calcule-t-on le barycentre de la région $P$ ? Commençons par rechercher les coordonnées du point $I$ intersection des deux droites non-parallèles aux axes parmi les droites délimitant la région $P$. Le point $I$ est solution du système

$$\begin{cases} y = -0,05(x-7) \\ y = 0,2(x-3) \end{cases}$$

ce qui nous permet de trouver ses coordonnées à savoir

$$I = (3,8; 0,16).$$

Divisons alors la région $P$ en deux sous-régions $P_1$ et $P_2$ comme représenté sur la figure 7 et recherchons les centres de gravité respectifs $G_1$ et $G_2$ de ces sous-régions. Par la définition du barycentre, nous obtenons que

$$G_1 = (2,12; 0,112) \text{ et } G_2 = (6,92; 0,352).$$

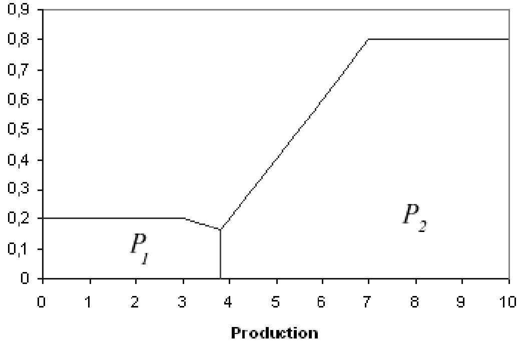


Fig. 7 : Deux sous-régions $P_1$ et $P_2$

Le barycentre de la région $P$ est alors le barycentre des points pondérés $(G_1, A_1)$ et $(G_2, A_2)$ où $A_1$ et $A_2$ sont les aires respectives de $P_1$ et $P_2$. On trouve $A_1 = 0,744$, $A_2 = 3,936$ et

$$G = \frac{A_1 G_1 + A_2 G_2}{A_1 + A_2} = (6,157; 0,314)$$

ce qui nous permet de conseiller au glacier de produire, à la température de 13°C, une quantité de 6,157 unités en plus de sa production habituelle.

## Bibliographie


[1] BAJART A., Sous-ensembles flous, logique floue et applications dans Mathématique et Pédagogie n°117, 1-18, 1998

[2] BOUCHON-MEUNIER B., *La logique floue*, édition PUF, collection Que sais-je, 1999

[3] YOKOGAWA, *Introduction to Fuzzy Control*, 2nd edition sep.1992