Dé-transposition et décalage interdisciplinaire : l'exemple de l'élasticité de la demande

par Valérie HENRY

IREM de Liège-Luxembourg
HEC - Ecole de Gestion de l'Université de Liège
7, Boulevard du Rectorat, B31
B-4000 Liège
E-mail : V.Henry@ulg.ac.be

Résumé

Notion importante en économie et reposant sur des concepts de base en analyse mathématique, l'élasticité se retrouve à la croisée de deux enseignements. Cette dualité peut être à l'origine de nombreuses difficultés rencontrées par les étudiants lors de l'étude de cette notion.

Dans la première partie, nous tenterons de mettre en évidence un phénomène que nous appellons *décalage interdisciplinaire* et qui résulte de la double facette d'une notion à la fois définie théoriquement dans le contexte d'un enseignement de mathématiques et utilisée pragmatiquement dans une autre discipline telle que l'économie ici. Ce phénomène apparaît régulièrement au sein du public que nous considérons, à savoir les étudiants en économie et en gestion.

Après un bref historique, montrant notamment que la notion d'élasticité est en réalité un "savoir économique savant", nous rappelons certaines définitions de base, puis étudions comment l'élasticité-prix est traitée dans la littérature économique.

Ensuite, nous présentons et analysons une séquence didactique visant à mettre en évidence les problèmes liés à ce décalage interdisciplinaire et à y rémédier.

1 Décalage interdisciplinaire et dé-transposition didactique

Les étudiants en économie et en gestion sont régulièrement confrontés à l'assimilation de notions "consommatrices" de mathématiques notamment dans leurs cours d'économie, de gestion, de statistiques ou de physique. Ces savoirs peuvent leur être transmis soit par des enseignants mathématiciens dans le cadre de l'introduction ou de l'illustration de certaines matières enseignées, soit par des enseignants d'une des disciplines citées plus haut dans le contexte cette fois de l'enseignement de la notion proprement dite. Un phénomène de *décalage interdisciplinaire* peut surgir lorsque les bases mathématiques de la notion considérée sont prises en charge aussi bien par l'enseignant de mathématiques que par un enseignant d'une autre discipline. Dans ce contexte, il appartient, d'après nous, à l'enseignant de mathématiques de fournir aux étudiants les outils qui leur permettront de relier les informations reçues de part et d'autre.

Dans un premier temps, l'enseignant mathématicien qui se sera informé des processus d'enseignement mis en oeuvre par les économistes, physiciens,... pourra en tenir compte et se baser sur les acquis des étudiants pour organiser son propre enseignement. Il sera éventuellement amené à compléter ou à corriger certaines conceptions issues d'un enseignement antérieur. L'ensemble de ces prises de conscience, enrichissements et corrections est qualifié de *processus de dé-transposition didactique* par Antibi - Brousseau ([3], [4]).

Dans un deuxième temps et lorsque cela est possible, il appartient à l'enseignant mathématicien d'anticiper les difficultés et d'intervenir avant son collègue d'une autre discipline. De nouveau, une prise de conscience de la méthode et des notions utilisées lui permettra d'adapter son enseignement dans un souci d'adéquation avec les autres disciplines.

Nous envisagerons ici le cas de l'élasticité, savoir qui utilise principalement les notions de variations relatives, de dérivées et de passage d'un modèle discret à un modèle continu.

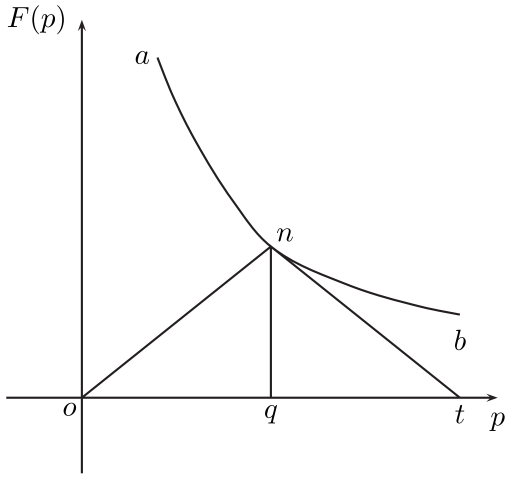
2 La naissance du concept

Les économistes sont souvent amenés à considérer l'influence de la variation d'une grandeur sur une autre.
C'est ainsi qu'ils étudient l'impact d'une hausse du prix d'un bien sur sa consommation annuelle. Il est clair que, généralement, une augmentation de prix entraîne une diminution de la consommation. Cette réaction de la demande pourrait être mesurée par le rapport $\frac{\Delta D}{\Delta p}$, où D, p, ΔD et Δp désignent respectivement la quantité demandée, le prix, la variation de la demande et la variation du prix. Mais ce rapport présente un double inconvénient. D'une part, il dépend clairement des unités dans lesquelles sont exprimées les deux variables D et p. En effet, imaginons qu'une même demande soit exprimée une fois en tonnes et une fois en kilos, le rapport serait alors multiplié par un facteur mille alors même que la situation économique n'a pas été modifiée. D'autre part, un même rapport peut se référer à des situations économiques fort différentes : en guise d'exemple, lorsque le prix p passe de 2 à 3 unités monétaires et que, parallèlement, la demande varie de 16 à 10 ou de 42016 à 42010 (Jurion [13], p. 46), le rapport $\frac{\Delta D}{\Delta p}$ est égal à -6 dans les deux cas, mais la quantité demandée reste pratiquement inchangée dans la seconde situation au contraire de la première.

Pour éviter ces deux problèmes, il est recommandé de travailler non pas avec les variations absolues, mais avec les variations relatives de la demande et du prix.
Cette idée fut déjà développée par A. Cournot qui, le premier, introduisit la notion mathématique de fonction dans l'étude de la demande d'un bien. Dans son livre *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* ([10], 1838), il chercha à maximiser en fonction du prix p la fonction $p \longmapsto p\ F(p)$, où $D = F(p)$ désigne la quantité débitée d'un bien dont le prix est p, le produit $p\ F(p)$ représentant la valeur totale correspondante. Il démontra que le prix p doit vérifier l'égalité

$$F(p) + p\ F'(p) = 0. \tag{1}$$

Il caractérisa tout d'abord géométriquement un tel prix p. A cet effet, il préconisa de tracer *la courbe anb dont les abscisses oq et les ordonnées qn représentent les variables p et D, la racine de l'équation (1) sera l'abscisse du point n pour lequel le triangle ont, formé par la tangente nt et par le rayon on, est isoscèle, de sorte qu'on a $oq = qt$.*



Ensuite, il constata qu'il est

> *impossible de déterminer empiriquement pour chaque denrée la fonction $F(p)$*, mais qu'il *serait facile de savoir, au moins pour toutes les denrées auxquelles on a essayé d'étendre la statistique commerciale, si le prix tombe en-deçà ou au-delà de cette valeur.* (Cournot [10], pp. 40 - 41).

A cet effet, il supposa que le prix p varie de Δp, de sorte que la consommation annuelle passe de D à $D - \Delta D$ [1] : la valeur totale $p\,F(p)$ peut alors varier en sens divers puisqu'elle est le produit de deux facteurs dont l'un augmente pendant que l'autre diminue. Pour mieux cerner ce problème, Cournot compara les variations relatives de la demande et du prix, à savoir $\frac{\Delta D}{D}$ et $\frac{\Delta p}{p}$. Il constata que,

> *selon que l'on aura*
>
> $$\frac{\Delta D}{\Delta p} < \frac{D}{p} \text{ ou } \frac{\Delta D}{\Delta p} > \frac{D}{p},$$
>
> *l'accroissement de prix Δp fera augmenter ou diminuer le produit $p\,F(p)$; et l'on saura conséquemment si les deux valeurs p, $p + \Delta p$ (Δp étant censé une petite fraction de p) tombent en-deçà ou au-delà de la valeur qui porte au maximum le produit en question* (Cournot [10], p. 41).

1. A cette époque, Cournot ne considérait que des valeurs positives des accroissements.

En fait, Cournot avait eu l'intuition de distinguer ce que l'on appelle de nos jours les demandes élastiques et inélastiques (ou rigides) c'est-à-dire les fonctions de demande caractérisées par une élasticité respectivement supérieure ou inférieure à 1 en valeur absolue.

Dans le raisonnement de Cournot, qui fut la première exploitation véritable de l'analyse mathématique en économie, était sous-jacent le concept d'élasticité. Mais, ce n'est qu'à la fin du 19^e siècle que A. Marshall introduisit le terme d'*élasticité* pour désigner

> *le rapport entre les variations relatives des quantités demandées et les variations relatives des prix* (Marshall (1885), cité par Als [1], p. 157) ;

en fait, il recourait comme Cournot aux rapports $\frac{\Delta D}{D}$ et $\frac{\Delta p}{p}$ et considérait tout simplement le quotient du premier par le second. Dans son célèbre ouvrage *Principles of Economics* (1890), il développa quelque peu cette notion en observant que

> *generally, the elasticity (or responsiveness) of demand in a market is great or small according as the amount demanded increases much or little for a given fall in price, and diminishes much or little for a given rise in price* (Marshall [16], p. 86).

Il est à remarquer que Marshall désignait encore l'élasticité par le terme de *responsiveness*, car il était probablement conscient de la différence entre le concept économique étudié et la perception courante qu'en donne la physique : effectivement, l'élasticité traduit bien la façon dont une grandeur réagit sous l'influence de la variation d'une autre, mais, en économie, ne se réfère pas à un retour de cette grandeur à sa situation initiale.

Marshall examina exclusivement l'élasticité-prix de la demande, c'est-à-dire l'élasticité de la demande par rapport au prix. Ses successeurs, tels que Stigler, Triffin, Roy, Houtacker, Wold, Jicks ou Keynes (Als [1], p. 158), ont largement étendu la portée de cette notion en introduisant les élasticités partielles, croisées, du revenu, de substitution,. . . , et en l'appliquant à bien d'autres fonctions que la demande. A l'heure actuelle, la notion d'élasticité est couramment exploitée dans de nombreux problèmes rencontrés dans l'univers économique.

3 Définition des élasticités-prix de la demande

3.1 Elasticité moyenne

Si l'on se réfère à la définition donnée par Marshall, l'élasticité-prix de la demande peut s'écrire :

$$E_{p|\Delta p}D = \frac{\frac{\Delta D}{D}}{\frac{\Delta p}{p}}.$$

Cette élasticité est qualifiée d'élasticité moyenne par les économistes et sa valeur dépend non seulement du prix p mais aussi de la variation du prix Δp.

Néanmoins, dans le cas particulier d'une demande qui suit une loi affine, l'élasticité moyenne ne dépend plus de Δp puisque, si $D = ap + b$, on a

$$\begin{aligned} E_{p|\Delta p}D &= \frac{\frac{a(p+\Delta p)+b-ap-b}{ap+b}}{\frac{\Delta p}{p}} \\ &= \frac{a\Delta p}{ap+b} \cdot \frac{p}{\Delta p} \\ &= \frac{ap}{ap+b} \end{aligned}$$

qui ne dépend plus de Δp.

3.2 Elasticité-point

Comme on l'a vu ci-dessus, en dehors du cas particulier d'une demande affine, pour une valeur p du prix et une fonction D de demande donnés, il existe une infinité d'élasticités moyennes. On se propose alors de considérer des variations infiniment petites du prix p. On observe que les variations correspondantes de l'élasticité moyenne deviennent infinitésimales lorsque Δp est infiniment petit [2] ; on dira que la partie observable des élasticités moyennes sur l'intervalle $[p, p+\Delta p]$ est indépendante de Δp dès que celui-ci est infiniment petit. On obtient ainsi l'*élasticité-point* : elle ne dépend plus que de la demande D et du prix p, et non plus de la variation Δp. Elle n'est définie évidemment que dans le cas continu où il existe une fonction f telle que $D = f(p)$. On a donc, pour tout Δp infiniment petit [3] :

$$\begin{aligned} E_pD &= \mathrm{st}\left(\frac{\frac{\Delta D}{D}}{\frac{\Delta p}{p}}\right) \\ &= \mathrm{st}\left(\frac{\Delta D}{\Delta p}\right)\frac{p}{D} \\ &= f'(p) \cdot \frac{p}{D}. \end{aligned}$$

L'élasticité-point est donc le rapport entre la valeur "marginale" $f'(p)$ et la valeur moyenne $\frac{D}{p}$ ou encore le rapport entre les différentielles du logarithme népérien de D et du logarithme népérien de p :

$$E_pD = \frac{d\ln D}{d\ln p}.$$

Un cas particulier d'élasticité-point est celui des fonctions du type $D = Ap^e$ pour lesquelles l'élasticité-point ne dépend pas de p et est égale à e. En effet, on a

$$\begin{aligned} E_pD &= Aep^{e-1}\frac{p}{Ap^e} \\ &= e. \end{aligned}$$

2. Ces termes, couramment utilisés par les économistes, s'interprètent rigoureusement soit en termes de limites en Analyse Classique, soit à l'aide des nombres hyperréels en Analyse Non Standard [15].

3. On notera $\mathrm{st}(x)$ la partie observable ou partie standard de x.

4 L'élasticité-prix dans la littérature économique

Le concept d'élasticité-prix de la demande est abordé dans tout cours élémentaire d'économie : il s'agit d'un nombre qui permet de savoir *dans quelle mesure la demande d'un bien réagit à des variations de prix* (Samuelson-Nordhaus [18], p. 64). Par ailleurs, cette notion peut également être abordée dans le cadre du cours de mathématiques générales : elle permet en effet classiquement d'illustrer et d'appliquer la notion mathématique de dérivée dans des problèmes économiques : l'élasticité y est alors quelquefois présentée comme étant une fonction (Antibi-Barra [2], p. 181).

Nous avons constaté que les économistes et les mathématiciens présentent le concept d'élasticité-prix de manière assez différente, avec plus ou moins de détails, d'exemples, de sens et de rigueur, les premiers travaillant dans un cadre numérique ou géométrique, au contraire des seconds qui se placent dans un cadre fonctionnel.

Une analyse de la littérature économique sur ce sujet, essentiellement de deux livres de cours utilisés à l'Université de Liège (Jurion [13], Varian [20]) et de quelques références classiques et incontestables dans le monde académique (Samuelson - Nordhaus [18], Stiglitz [19], ...), nous a permis de dégager l'existence d'une certaine polysémie (Duvert [12], APMEP p. 699) dans les termes et dans les symboles utilisés par les économistes. Relevons quelques points essentiels qui, selon nous, seraient potentiellement source d'obstacles à la compréhension des concepts.

– La multiplicité des notations.
  Les symboles utilisés pour représenter le prix, la demande ou une variation peuvent différer d'un auteur à l'autre, ce qui est susceptible de perturber certains étudiants lorsqu'ils sont amenés à confronter ces différentes notations. Le tableau suivant reprend un échantillon des différentes notations rencontrées dans la littérature. On remarquera par exemple, que la lettre D peut désigner, selon les cas, la fonction de demande ou une variation.

Prix	Demande	Variation
p	D	Δ
p ou P	q	D ou d
P	Q	D ou Δ
x	$f(x)$	d

– La notation de l'élasticité.
  L'élasticité est souvent notée simplement e ou E sans précision sur le prix ou la variation de prix considérés, ni sur le type d'élasticité dont il s'agit : élasticité moyenne ou élasticité-point. Ce manque de précision peut engendrer des erreurs chez les étudiants lorsqu'ils rencontrent des exercices où apparaissent des calculs d'élasticité pour des prix ou des variations de prix différents.

– Le repère dans les graphiques.
  Les économistes ont pour habitude de représenter leurs graphiques avec la demande en abscisse et le prix en ordonnées alors que les mathématiciens représentent la variable, ici le prix, en abscisses, et les valeurs de la fonction, ici la demande, en

ordonnées.

– L'utilisation récurrente de demandes affines.

  Les économistes illustrent nombre de leurs propos à l'aide d'exemples. Parmi ceux-ci, beaucoup se réfèrent à des demandes définies par des fonctions affines du prix. Selon Samuelson, *les courbes de demande sont tracées comme des droites dans les exemples à but pédagogique* ([18], p. 66). Mais ils contribuent ainsi à induire la conception, erronée, d'une élasticité indépendante de la variation de prix.

– La distinction entre modèles discrets et modèles continus.

  Un examen des exemples illustratifs fournis dans les manuels concernant la définition de l'élasticité montre que, lors d'une présentation **discrète**, la variation Δp est prise comme la différence entre le prix de référence et le prix immédiatement supérieur dans le tableau, tandis que la variation ΔD est considérée comme la différence entre les quantités correspondantes. Par contre, lorsque l'exemple est un modèle **continu**, le rapport $\frac{\Delta D}{\Delta p}$ semble être égal à la dérivée de la fonction de demande f calculée au prix p considéré. Ainsi, dans le cas discret, le symbole Δ désigne une différence finie, tandis que, dans le cas continu, il est mis à la place du signe d de différentiation. Le passage d'une définition à l'autre n'étant pas explicité, beaucoup d'étudiants créent un "théorème en acte" selon lequel l'élasticité dans le cas discret est le quotient des variations relatives de la demande et du prix tandis que, dans le cas continu, elle vaut le produit de la dérivée par le quotient du prix par la demande.

– Les manipulations de quantités infiniment petites.

  Une application importante et intéressante de l'élasticité-prix consiste à montrer comment cette dernière permet d'expliquer l'impact d'une hausse de prix sur la recette. Observons ce raisonnement tiré de l'ouvrage de Varian [4] (Varian [20], pp. 282-284) :

4. Nous avons respecté les notations de Varian, notamment en ce qui concerne la demande notée ici q.

La définition de la recette R est

$$R = pq.$$

Supposons que le prix et la quantité se modifient et deviennent respectivement $p + \Delta p$ et $q + \Delta q$. Nous avons une nouvelle recette égale à

$$\begin{aligned} R' &= (p + \Delta p)(q + \Delta q) \\ &= pq + q\Delta p + p\Delta q + \Delta p\Delta q. \end{aligned}$$

En soustrayant R de R' nous avons

$$\Delta R = q\Delta p + p\Delta q + \Delta p\Delta q.$$

Pour de petites valeurs de Δp et Δq, nous pouvons sans problème ignorer le dernier terme et ne conserver que l'expression suivante

$$\Delta R = q\Delta p + p\Delta q. \tag{2}$$

Celle-ci indique que la variation de la recette est approximativement égale à la quantité multipliée par la variation du prix plus le prix initial multiplié par la variation de la quantité.

Bien que le texte précise que la dernière égalité n'est qu'*approximative*, le symbole d'égalité utilisé abusivement semble induire une contradiction entre les deux formules dès que Δp n'est pas nul.

Par la suite, l'auteur déduit de l' "égalité" susmentionnée que

$$\frac{\Delta R}{\Delta p} = q + p\frac{\Delta q}{\Delta p}$$

qui peut encore s'écrire en faisant intervenir l'élasticité-prix :

$$\frac{\Delta R}{\Delta p} = q\left(1 + E_{p|\Delta p}q\right).$$

Dès lors, suivant que la valeur absolue de $E_{p|\Delta p}q$ est inférieure ou supérieure à 1, la recette augmente ou diminue. Cette conclusion serait exacte si la formule (2) l'était ; or, cette dernière n'est qu'approximative, de sorte qu'il est possible de rencontrer des situations pour lesquelles $E_{p|\Delta p}q$ est en valeur absolue inférieure (resp. supérieure) à l'unité, alors que la recette diminue (resp. augmente) (Coolen [9], p.16-18). Pour qu'un tel raisonnement soit rigoureux, il conviendrait de travailler avec l'élasticité ponctuelle au lieu de l'élasticité moyenne.

Toutes ces considérations nous ont amené à penser qu'il manquait un lien entre les notions vues au cours d'économie et celles (parfois les mêmes) vues en mathématiques.

5 Une séquence didactique visant à une dé-transposition

Suite à l'analyse de la façon dont l'élasticité est introduite dans les cours d'économie, il nous a semblé pertinent de mettre en place une séquence spécifique pour aider nos étudiants à prendre conscience de la polysémie des mots et des notations employés en économie, ainsi qu'à progresser au niveau de la connaissance, de la rigueur et de la précision dans le raisonnement et dans l'expression aussi bien écrite qu'orale. Plus précisément, nous poursuivions un quadruple objectif :

– rendre compte de ce que les étudiants avaient appris et connaissaient encore sur la question ;
– vérifier notre hypothèse *a priori* selon laquelle les différentes présentations de cette matière pouvaient créer des difficultés auprès des élèves ;
– dé-transposer (Antibi - Brousseau [3]) si nécessaire certains points mal compris ou pouvant engendrer des erreurs ;
– insister sur la rigueur de la pensée et du langage, ce qui reste tout de même un des objectifs essentiels de l'apprentissage des mathématiques (Bkouche-Charlot-Rouche [6], p. 180).

Nous avons eu l'occasion d'expérimenter notre séquence didactique lors des deux derniers cours de l'année civile 2002 ; chacun de ces cours avait une durée de 90 minutes et se donnait devant des étudiants de deuxième candidature en ingénieurs de gestion [5] : ceux-ci avaient reçu un premier enseignement sur la notion d'élasticité dans le cours d'économie politique (Jurion [13]), puis un approfondissement de cette matière lors du cours de microéconomie (Varian [20]) figurant au programme de la deuxième année. Les cours de mathématiques précédant cette séquence avaient été consacrés à un approfondissement de notions classiques
d'analyse enseignées en première année par une approche non standard, notamment celles de tangente et de différentielle.

La séquence proposée se présente comme une succession de cinq exercices à résoudre, chacun de ceux-ci étant suivi d'une phase d'institutionnalisation ou d'un débat oral comportant des énoncés additionnels. On y retrouve ainsi plusieurs types de questions : certaines (dont les exercices de référence) sont posées individuellement par écrit, d'autres sont présentées oralement à tout le groupe. La formulation et les énoncés des exercices proposés sont basés sur ceux rencontrés dans les cours d'économie ; ils sont tirés d'une brochure de l'IREM de Liège - Luxembourg (Coolen [9]).

Nous présentons ci-dessous cette séquence, ainsi que les résultats recueillis lors de notre expérimentation. Le premier cours a été suivi par 39 étudiants : les deux premiers exercices y ont été traités ; 40 élèves ont participé à la seconde séance au cours de laquelle les trois derniers exercices ont été abordés.

5. ce qui correspond à un niveau Bac+2 en France

Exercice 1

Vous savez que la demande individuelle d'un consommateur pour un bien s'exprime, toutes choses restant égales, par la relation donnant, dans des unités adéquates, les quantités demandées, notées Q, en fonction des prix correspondants, notés P [a].
Lorsque le prix du bien vaut 6, calculez la valeur de l'élasticité - prix (c'est-à-dire l'élasticité de la demande pour un bien par rapport à son prix) d'un consommateur pour lequel la loi de demande est donnée par :

1. *le tableau suivant :*

prix P	*1*	*2*	*3*	*6*	*8*	*9*	*12*
quantités Q	*66*	*60*	*54*	*36*	*24*	*18*	*0*

2. *la formule suivante :* $Q = 72 - 6P$.

a. Pour cette séquence, nous avons repris les notations auxquelles les étudiants ont été habitués en première année lors de leur cours d'économie, à savoir P et Q respectivement pour les prix et les quantités ; de même, nous avons utilisé le signe D et non Δ ou d.

Cet énoncé est repris d'un de leurs livres d'exercices d'économie politique. Il n'y est fait aucune allusion au type d'élasticité qui est demandé. La demande étant affine, l'élasticité est indépendante de la variation du prix et les deux notions d'élasticité moyenne et élasticité-point sont confondues. C'est à dessein que nous avions laissé l'énoncé tel quel, de manière à observer les réactions des étudiants mais également, dans un deuxième temps, à les rendre attentifs à ce genre d'omission chez les économistes. La question n'est pas dénuée de sens mais peut conduire à des généralisations abusives de la part d'étudiants non encore familiers des notions. Il est à remarquer que les deux cas correspondent à la même demande, mais que les prix du tableau n'ont pas été donnés en progression arithmétique pour que cette dépendance affine ne soit pas trop facilement reconnue.

Presque tous les 39 étudiants ont trouvé la bonne réponse dans les deux cas, à savoir -1 ; seuls 3 élèves ont fourni une ou des réponses inexactes, car ils ont commis des erreurs de calculs que l'on pourrait qualifier d'*erreurs de distraction* ou encore d'*erreurs qui n'arrivent que dans les écoles* (Rouche [17], 1988, p. 117). Il est toutefois apparu que les deux énoncés ont été traités différemment, sauf par deux personnes qui ont construit dans le premier cas la loi affine de demande et se sont ainsi ramenés au deuxième cas. Toutes les autres personnes interrogées ont, comme l'a écrit l'une d'entre elles, *obtenu des réponses identiques, mais avec un raisonnement différent.* En effet, dans le cas du tableau des données, les étudiants ont pris une variation du prix finie ; par contre, lorsque la loi de demande est explicitement connue analytiquement, ils ont utilisé la dérivée de la fonction de demande. Ce raisonnement est en fait conforme à celui réalisé dans leur livre d'exercices (Jurion - Leclercq [14]).

Ainsi, la définition vue au cours d'économie politique semble bien maîtrisée. Mais, il est apparu lors d'une courte discussion d'institutionnalisation, que la formule du manuel, à savoir (Jurion [13], p. 47)

$$e = \frac{\frac{DQ}{Q}}{\frac{DP}{P}}$$

est appliquée différemment selon que les données sont discrètes ou traduites par une loi continue : dans le premier cas, le D signifie une différence finie de deux valeurs numériques fournies par le tableau, tandis que dans le second cas, il est mis pour le signe d de différentiation. En réalité, les étudiants exploitent assez aveuglément une règle fort pragmatique, qui donne de bons résultats dans tous les cas rencontrés jusqu'alors.

Exercice 2

> *On donne la loi de demande suivante* $Q(P) = 200P^2 - 2400P + 10000$.
> *Calculez l'élasticité moyenne de la demande lorsque le prix* P *augmente de* 4 *à* 5.

Au vu des réponses fournies pour le premier exercice, il n'est pas étonnant que cet énoncé ait perturbé les étudiants ; de fait, d'une part, on leur fournissait explicitement une fonction du second degré en les “invitant” ainsi à dériver cette dernière, mais, d'autre part, on leur imposait une variation finie du prix qui passe de 4 à 5 unités, ce qui correspond à un accroissement fini (et même unitaire) du prix.

Effectivement, les élèves ont visiblement hésité entre la méthode des différences finies (appelée ci-après “modèle discret”) et celle de dérivation (qualifiée de “modèle continu”) : 27 ont opté pour le modèle discret, tandis que 10 autres ont choisi le modèle continu et que les deux derniers ont utilisé les deux méthodes. Notons encore que plusieurs étudiants commencent par calculer la dérivée, presque par réflexe, puis repassent au modèle discret, sans doute parce qu'ils ne parviennent pas à exprimer que P passe de 4 à 5 en utilisant la dérivée. De plus, une autre question pratique s'est posée : quel prix faut-il utiliser dans la formule ? Cette interrogation est d'autant plus pertinente que certaines réponses numériques pouvaient un peu perturber : le cas discret pour un prix de 5 conduit au cas, souvent rencontrés par les praticiens, d'une élasticité unitaire (en valeur absolue), tandis que les modèles discret avec un prix de 4 et continu avec un prix de 5 livrent la même valeur numérique (de -2/3). Toujours est-il que les élèves se sont fort divisés sur ce point : 15 ont choisi un prix de 4, 14 ont choisi un prix de 5, 8 n'ont pas su choisir et ont réalisé leurs calculs dans les deux cas, et enfin deux ont opté pour le prix moyen de $4,5$. Plus précisément, les résultats enregistrés pour cet exercice sont rassemblés dans le tableau suivant :

Prix/Modèle	Modèle discret	Modèle continu	Discret + Continu
$P = 4$	12	3	0
$P = 5$	9	4	1
$P = 4, P = 5$	5	2	1
$P = 4.5$	1	1	0

Une mise au point théorique fut nécessaire à la suite de cet exercice pour montrer que, en dehors du cas d'une demande affine, l'élasticité-prix dépend non seulement de la loi f de demande et du prix P considéré, mais également de l'accroissement ΔP du prix : il s'agit donc d'une élasticité moyenne de la demande sur l'intervalle $[P, P + DP]$ (voir section 3).

Cette phase d'institutionnalisation, au cours de laquelle fut notamment démontré qu'une élasticité moyenne ne dépend pas de la longueur de l'intervalle considéré lorsque la demande est affine, a donné l'occasion d'analyser une pratique fréquente d'économistes qui, trouvant pour cet exercice la réponse finale $e = -0,67$, interprètent leur résultat en affirmant que la demande diminue de $0,67\%$ lorsque le prix augmente de 1%.

Dans le même ordre d'idées, les deux questions suivantes ont été posées :

- *Après avoir calculé l'élasticité - prix lorsque P passe de* 4 *à* $4,04$ *(c'est-à-dire que le prix $P = 4$ augmente de 1 %), certains économistes généralisent en affirmant que si P augmente de 25 %, Q va diminuer de* $25 \times 0,88\% = 22\%$*. Qu'en pensez-vous ?*
- *Sachant que, lorsque P augmente de* 25%*, Q diminue de* $16,7\%$*, pensez-vous que l'on peut en déduire que, lorsque P diminue de* 25%*, Q augmente de* $16,7\%$ *?*

Ces questions ont permis de confirmer les propos précédents, et d'insister sur le fait que le remplacement d'une fonction quelconque par son approximation affine peut entraîner des résultats incorrects ; cette erreur, appelée l'*illusion de la linéarité* (Bkouche - Charlot - Rouche [6], De Bock [11]), est fréquemment commise par les praticiens. Ainsi, 7 élèves sont tout à fait d'accord avec ces affirmations ; ils n'ont pas eu le temps d'effectuer complètement les calculs demandés ; ils trouvent que *le raisonnement est logique* et que cela peut s'expliquer par le fait que *l'on tient compte uniquement des variations proportionnelles*, ces derniers termes figurant précisément dans la définition du cours d'économie. Tous les autres estiment que les deux assertions sont incorrectes ; toutefois, certains indiquent que ces deux propositions leur semblaient correctes à première vue, et qu'ils n'ont été convaincus de l'erreur dans le raisonnement qu'après avoir terminé leurs calculs.

Lors d'un débat, fut ensuite considéré l'exemple de la loi $Q = 8000P^{-1,5}$ pour $P = 4$ avec une augmentation de 25%, puis de 1%, et pour $P = 12$ avec une augmentation de 25%. Il est apparu que, grâce à leurs cours d'économie politique en première année et de microéconomie en deuxième candidature, les étudiants semblent capables de reconnaître les fonctions à élasticité constante : ce sont les fonctions de Cobb-Douglas, c'est-à-dire de la forme $Q = AP^b$ pour des constantes A et b. Comme une telle loi est explicitement connue, ils ont calculé naturellement l'élasticité ponctuelle au moyen de la dérivée de la fonction de demande et ne se sont pas posé la question de savoir si l'élasticité moyenne de ces lois reste constante. Il leur fut prouvé que c'est effectivement le cas à condition de ne considérer que des variations relatives constantes. En effet, soit une fonction de demande de Cobb-Douglas, $Q = AP^b$, on a

$$\begin{aligned} E_{P|\Delta P}Q &= \frac{A(P+\Delta P)^b - AP^b}{AP^b} \cdot \frac{P}{\Delta P} \\ &= \frac{P^b(1+\frac{\Delta P}{P})^b - P^b}{P^b} \cdot \frac{P}{\Delta P} \\ &= (1+\frac{\Delta P}{P})^b \cdot \frac{P}{\Delta P}. \end{aligned}$$

Dans le cas particulier de ce type de fonction, l'élasticité moyenne ne dépend donc que du quotient $\frac{\Delta P}{P}$.

Exercice 3

> *Que pensez-vous du raisonnement suivant ?*
> *La recette étant donnée par la formule suivante : $R = PQ$, on peut écrire*
>
> $$DR = P\ DQ + Q\ DP + DP\ DQ.$$
>
> *Pour DP et DQ très petits, nous pouvons considérer comme négligeable le terme $DP\ DQ$ par rapport aux autres termes de DR, ce qui donne*
>
> $$DR = P\ DQ + Q\ DP. \tag{3}$$
>
> *De la dernière égalité, on tire*
>
> $$\frac{DR}{DP} = Q(e+1).$$
>
> *En conséquence, lorsque la demande est inélastique (resp. élastique ; unitaire) sur l'intervalle $[P, P+DP]$, c'est-à-dire lorsque $e > -1$ (resp. $e < -1$; $e = -1$), la recette augmente (resp. diminue ; reste constante) quand P augmente de DP, et la recette diminue (resp. augmente ; reste inchangée) lorsque P diminue.*
> *Examinez le cas particulier où la loi de demande est donnée par l'égalité suivante : $Q = \frac{1}{P}$, avec $P = 9,5$ et $DP = 0,5$.*

Les réponses à propos du raisonnement sont très partagées. Dix-sept étudiants estiment que le raisonnement est erroné ; parmi eux, 11 disent l'avoir admis puisque, comme l'écrivent certains,

> *nous étions en première candidature et je me suis dit que le prof devait avoir raison*

ou

> *Quand je lis quelque chose comme ça dans un livre, j'ai difficile à l'admettre. Mais si tous les raisonnements suivants se basent sur cette hypothèse, alors je décide de fermer les yeux car c'est la personne qui a émis cette hypothèse qui nous jugera.*

Ces réactions illustrent le phénomène bien connu de *contrat didactique* (Brousseau [7]) : implicitement, les élèves admettent que ce que le professeur dit est correct ; les 6 autres évaluent les ordres de grandeur et se demandent pourquoi, si on peut négliger le dernier terme comme produit de deux infiniment petits, on ne peut pas négliger les deux autres termes qui sont également infiniment petits.
Seize étudiants sont d'accord avec le raisonnement ; la plupart (14) se réfèrent aux ordres de grandeur et affirment que même si tous les termes sont infiniment petits, le dernier est beaucoup plus petit que les autres ; les deux autres utilisent la formule donnant la dérivée d'un produit de deux fonctions : dans ce cas, on a en effet, $\frac{DR}{DP} = Q + P\frac{DQ}{DP}$.
Enfin, 7 étudiants ne sont pas d'accord avec l'égalité au point de vue mathématique ; toutefois, ils affirment que, pour un raisonnement économique, cela fonctionne très bien et que c'est correct dans les applications ; comme l'écrit un élève,

> *dans le cadre du cours d'économie, j'admets généralement ce qui est démontré mathématiquement, même si parfois cela me paraît peu rigoureux. Je me concentre plus sur les raisonnements économiques.*

Lors de l'institutionnalisation, il est préconisé de remplacer le signe d'égalité par le signe $\approx$ dans la formule $\Delta R = P\Delta Q + Q\Delta P$ qui, telle quelle, se révèle approximative.

L'exemple numérique destiné à faire remarquer que le raisonnement théorique présenté est mis en défaut du fait de l'approximation admise dans l'égalité (3) n'a guère donné le résultat escompté : d'une part parce que les élèves ont calculé l'élasticité ponctuelle à l'aide d'une dérivée puisque la loi de demande est donnée par une expression analytique, et d'autre part parce que quelques-uns ont vite remarqué que la recette est visiblement constante dans ce cas, puisque le produit PQ vaut 1.

Exercice 4

> *Pour un produit agricole, la loi de demande est donnée par l'égalité :* $Q(P) = 200 - 2P$*. Comment pensez-vous que variera le revenu des agriculteurs lorsque la récolte passe de* $Q = 120$ *à* $Q = 150$ *? Interprétez économiquement et commentez cette situation.*

Cet exercice fut vite réglé. En effet, les étudiants ne sont visiblement pas surpris par ce type de question qui leur paraît fort simple : ils ont aisément trouvé la bonne valeur numérique. Par ailleurs, ils sont habitués à interpréter économiquement les réponses fournies, de sorte qu'ils n'ont éprouvé aucune peine à reconnaître ici un exemple du classique *paradoxe de King*, d'après lequel une forte augmentation de la récolte peut être redoutée des agriculteurs car elle peut provoquer une diminution de la recette.

Exercice 5

> *Donnez la définition de l'élasticité - prix de la demande dans le cas continu et justifiez le passage entre les deux définitions.*

Les réponses obtenues sont assez surprenantes. Tout d'abord, parce que 10 élèves répondent qu'ils ne connaissent pas la définition, alors qu'ils l'ont presque tous utilisée dans les questions précédentes : il semblerait que le terme "continu" les ait perturbés. Ensuite, 9 étudiants rendent une définition qui n'est pas correcte, un par confusion entre discret et continu, les autres parce qu'ils répondent par une formule pour calculer DR (3 mentions) : ils ont certainement été influencés par les deux questions précédentes qui portent sur la recette.

Parmi les 21 réponses correctes, 7 donnent la définition littéraire de l'élasticité en toute généralité, sans aborder le passage du discret au continu : de nouveau, on dirait que le terme "continu" a été mal compris ; 5 justifient le passage d'une définition à l'autre grâce à des variations infiniment petites du prix ; 5 remplacent les différences finies par des différentielles, 2 utilisent un passage à la limite pour $\Delta P \to 0$ et les deux derniers remplacent simplement Q par $f(P)$, persuadés que si on écrit une fonction, c'est forcément continu.

Conclusion

Les résultats obtenus nous conduisent à penser qu'une telle séquence de dé-transposition est utile ; les réflexions des étudiants tendent à montrer qu'elle leur a été profitable. Néanmoins, il convient de souligner la prégnance de certains automatismes basés sur des conceptions antérieures et qui se manifestent encore après les différentes institutionnalisations proposées. Il pourrait être plus profitable que ce type d'intervention soit programmé plus tôt dans le cursus de manière à réduire autant que possible l'ancrage d'automatismes inappropriés. Il serait également envisageable, comme nous l'avons déjà évoqué, d'anticiper la dé-transposition et d'intervenir auprès des étudiants avant l'enseignement de cette notion par les économistes. Pour s'avérer efficace, ce processus nécessite notamment une bonne connaissance de la façon dont la matière est transmise par l'enseignant économiste.

Références

[1] ALS M.G., *Histoire de l'économie mathématique*, Presses Universitaires de Bruxelles, 1961.

[2] ANTIBI A. - BARRA R., *Transmath Programme 2002 Term ES*, Nathan, 2002.

[3] ANTIBI A. - BROUSSEAU G., La dé-transposition de connaissances scolaires, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 20, n° 1, 2000, pp. 7 - 40.

[4] ANTIBI A. - BROUSSEAU G., Vers l'ingénierie de la dé-transposition, *les dossiers des sciences de l'éducation*, n°8, pp. 45-57, Toulouse, Université du Mirail, 2002.

[5] ARTAUD M., Un nouveau terrain pour la didactique des mathématiques : les mathématiques en économie, dans *Vingt ans de didactique des mathématiques en France, hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*, éditeurs Artigue M., Gras R., Laborde C. et Tavignot P., La Pensée Sauvage éditions, Grenoble, 1994.

[6] BKOUCHE R. - CHARLOT B. - ROUCHE N., *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*, Editions Armand Colin, Paris, 1991.

[7] BROUSSEAU G., Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9/3, 1990, pp. 309-336

[8] CHEVALLARD Y., *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1991.

[9] COOLEN A., *Elasticités moyenne et ponctuelle de la demande par rapport au prix*, brochure de l'IREM de Liège - Luxembourg, 2002.

[10] COURNOT A., *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, Librairie J. Vrin, Paris, 1980.

[11] DE BOCK D., L'illusion de la linéarité. Première partie : circonstances et commentaires, *Mathématique et Pédagogie*, 120, 1998, pp. 39-50.

[12] DUVERT R., La polysémie des mots, *Bulletin de l'A.P.M.E.P.*, n° 443, 2002, pp. 699 - 703.

[13] JURION B., *Economie Politique*, De Boeck Université, Bruxelles, 1996.

[14] JURION B. - LECLERCQ A., *Exercices d'économie politique*, De Boeck Université, Bruxelles, 1997.

[15] KEISLER H.J., *Elementary Calculus*, Prindle, Weber & Schmidt Inc., Boston, 1976.

[16] MARSHALL A., *Principles of Economics, An introductory volume*, eighth edition, MacMillan and Co LTD, 1961.

[17] ROUCHE N., Rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique, *Compte rendu de la 39e rencontre internationale de la CIEAEM*, Les Editions de l'Université de Sherbrooke, 1988, pp. 97-121.

[18] SAMUELSON P.A. - NORDHAUS W.D., *Economie*, 16ème édition, Economica, Paris, 1998.

[19] STIGLITZ J.E., *Principes d'économie moderne*, De Boeck Université, Bruxelles, 2000.

[20] VARIAN, *Introduction à la microéconomie*, De Boeck Université, Bruxelles, 1992.