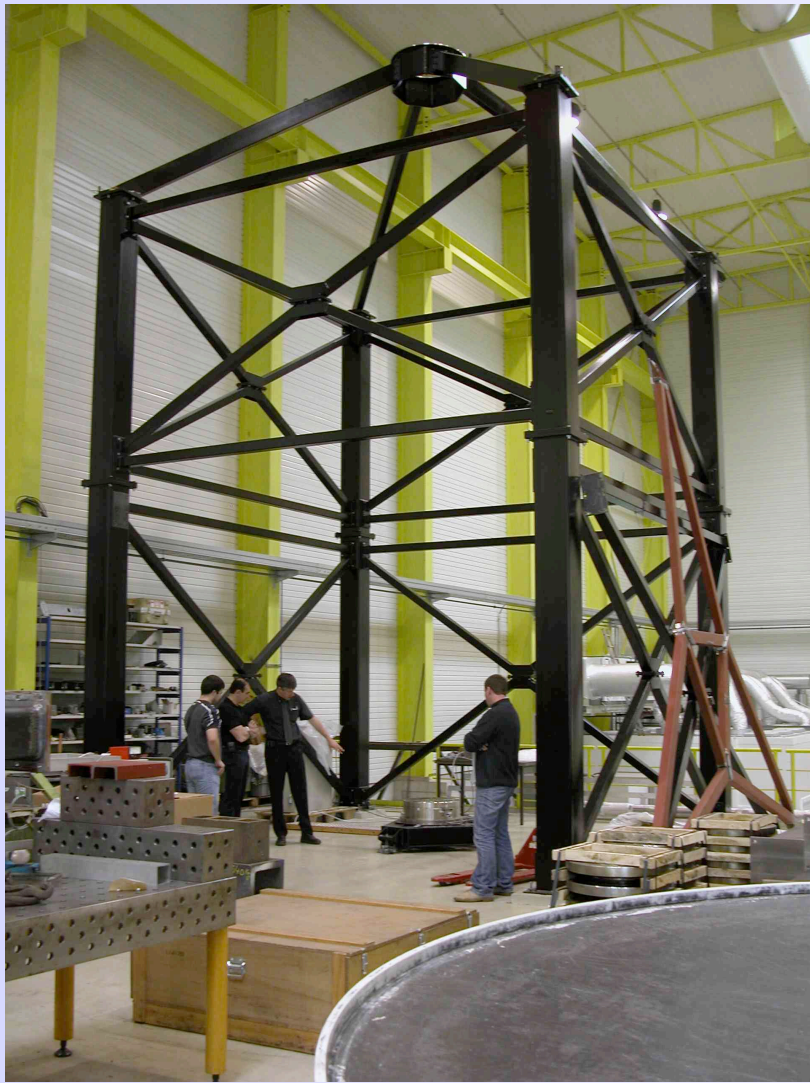


3^{ème} cours de Mécanique Analytique (22 Septembre 2011)



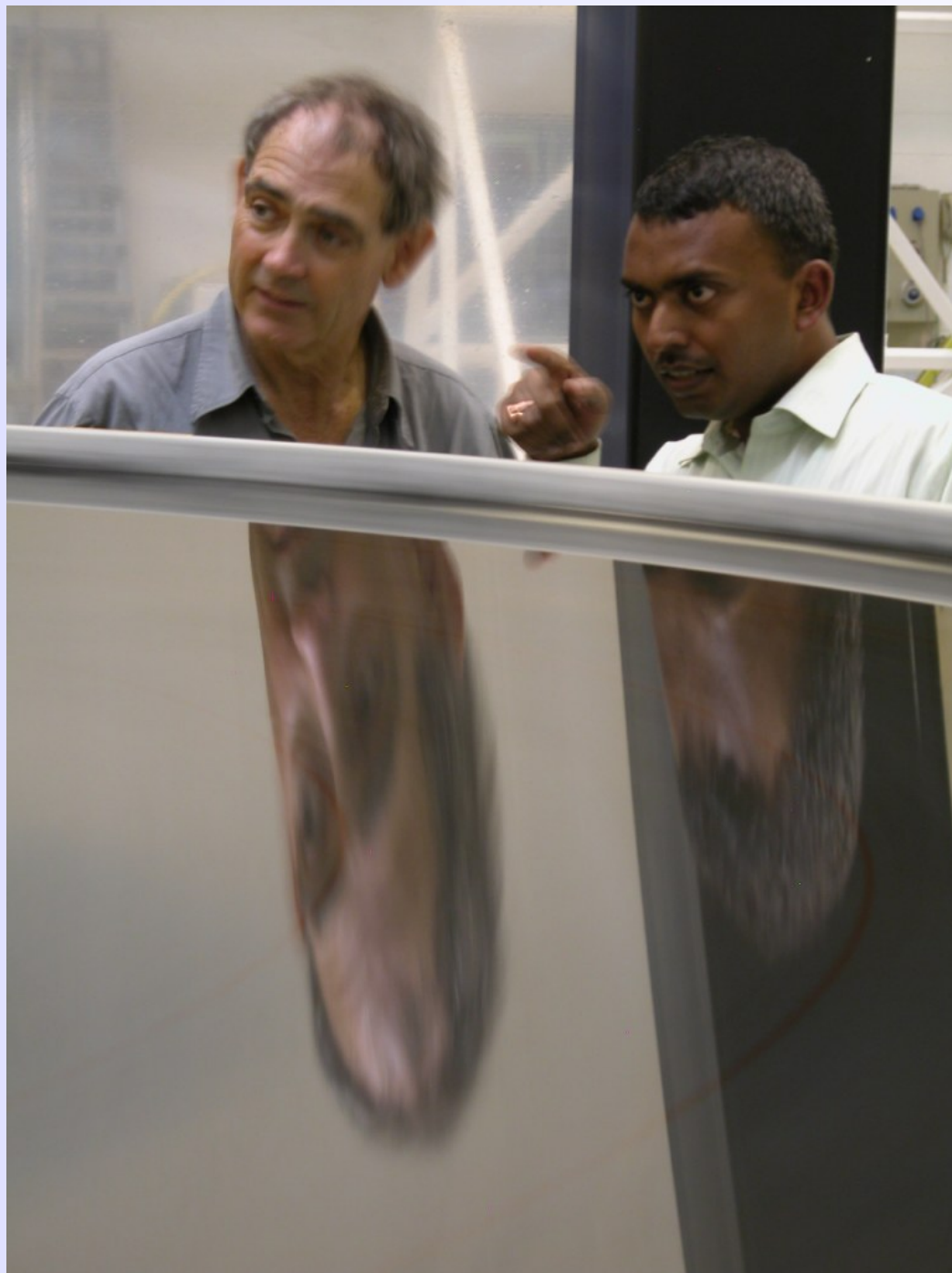












Leçon précédente ...

Chapitre 1 : Les équations de Lagrange

- 1.4 Généralisation du principe des travaux virtuels et le principe de d'Alembert
- 1.5 Les équations de Lagrange
- 1.6 Exemples d'utilisation des équations de Lagrange

Aujourd'hui ...

Chapitre 1 : Les équations de Lagrange

- 1.6 Exemples d'utilisation des équations de Lagrange
 - Exemple 1 : le pendule plan
 - Exemple 2 : la cuvette sphérique
 - Exemple 3 : la fronde en contraction
 - Exemple 4 : problème de Lagrange-Poisson

• 1.5 Les équations de Lagrange

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] = Q_i \quad (1.19)$$

$$Q_i = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \quad (1.20)$$

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right] = 0 \quad (1.28)$$

$$[L = T - V] \quad (1.29)$$

• 1.6 Exemples d'utilisation des équations de Lagrange

- Choisir un ensemble de f coordonnées généralisées $(q_1, q_2, \dots, q_f)$
- Exprimer T , Q_i et V en fonction des q_i , $\dot{q}_i$ et t
- Calculer $L = T - V$
- Ecrire les équations de Lagrange

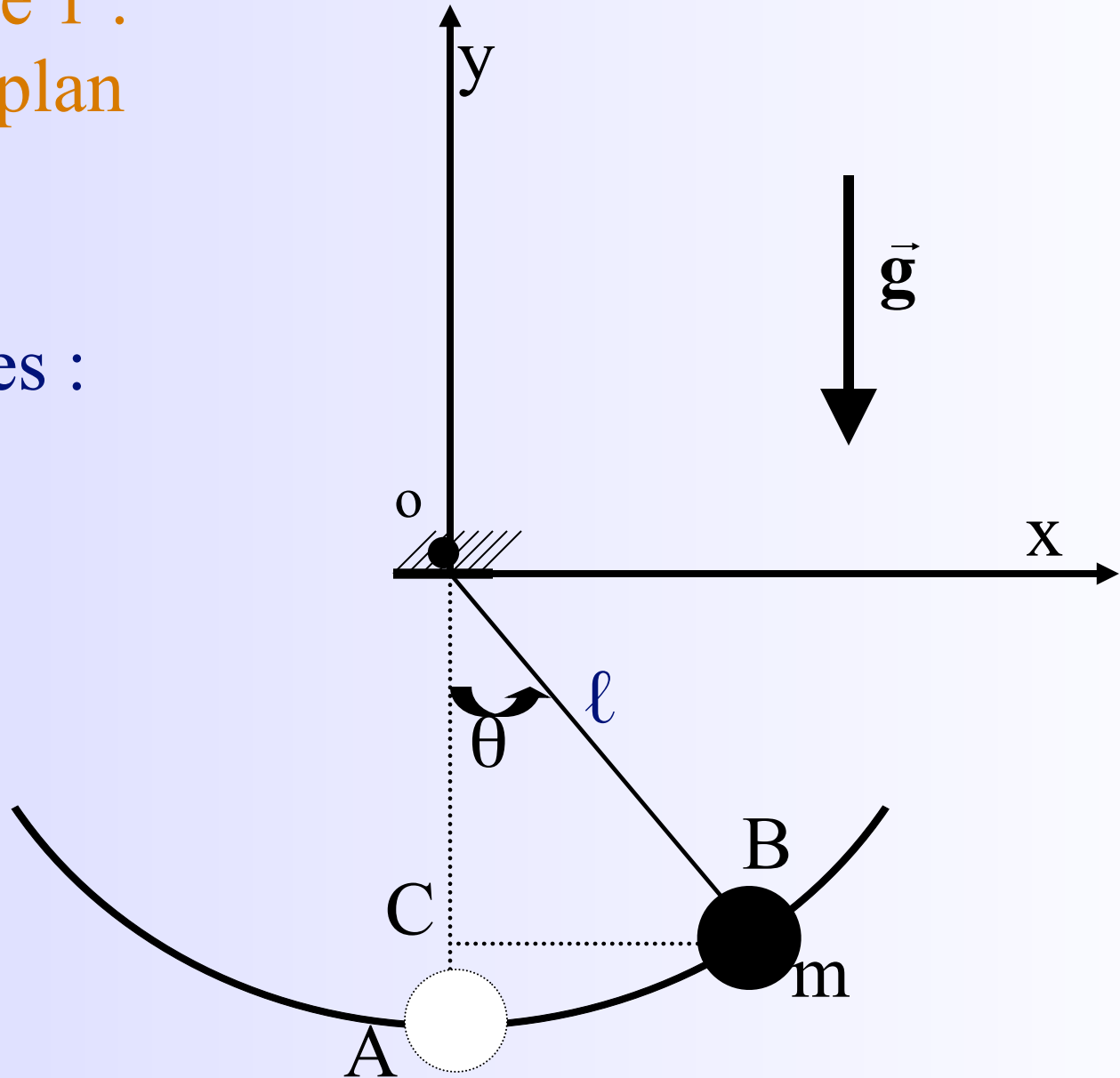
- 1.6 Exemple 1 :
le pendule plan

2 contraintes :

$$x^2 + y^2 = \ell^2,$$

$$z = 0$$

$$q = \theta$$



- 1.6 Exemple 1 : le pendule plan

$$x = \ell \sin \theta, \quad y = -\ell \cos \theta$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

$$F_y^a = -mg$$

$$V = mgy = -mg\ell \cos \theta$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell \cos \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg\ell \sin \theta, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{d}{dt}(m\ell^2\dot{\theta}) = m\ell^2\ddot{\theta}$$

- 1.6 Exemple 1 : le pendule plan

$$m\ell^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$

$$x = \ell \sin(\theta)$$

$$m\ddot{x} = -\frac{mx\dot{x}^2}{\ell^2 - x^2} - \frac{mgx}{\ell^2} \sqrt{\ell^2 - x^2}$$

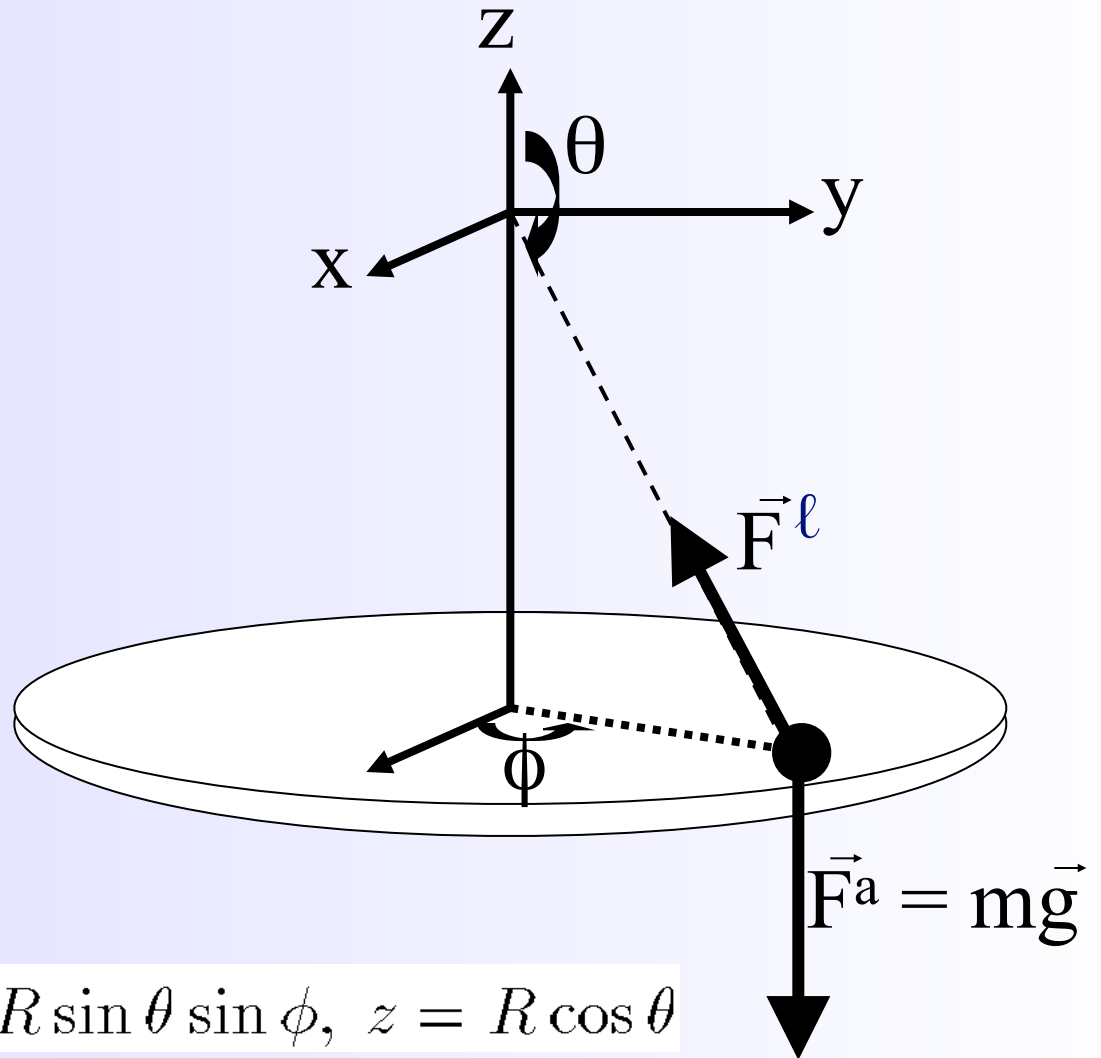
- 1.6 Exemple 2 : la cuvette sphérique

$$\vec{F}^a = (0, 0, -mg)$$

$$|\vec{r}| = R$$

$$q_1 = \theta \text{ et } q_2 = \phi$$

$$x = R \sin \theta \cos \phi, \quad y = R \sin \theta \sin \phi, \quad z = R \cos \theta$$



- 1.6 Exemple 2 : la cuvette sphérique

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 = \vec{F}^a \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = F_z^a \frac{\partial z}{\partial \theta} = mgR \sin \theta = mgR \sin q_1 \\ Q_2 = \vec{F}^a \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = 0 \end{array} \right.$$

$$Q_1 = -\frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad Q_2 = -\frac{\partial V}{\partial q_2},$$

$$V(q_1, q_2) = mgR (1 + \cos q_1)$$

$$V(q_1 = \pi, q_2) = 0$$

- 1.6 Exemple 2 : la cuvette sphérique

$$T = \frac{1}{2}m \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (i = 1, 2)$$

$$= \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \right) \dot{q}_1^2 + 2 \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \right) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \right) \dot{q}_2^2 \right]$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (R \cos q_1 \cos q_2, R \cos q_1 \sin q_2, -R \sin q_1) \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = (-R \sin q_1 \sin q_2, R \sin q_1 \cos q_2, 0) \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}mR^2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \sin^2 q_1)$$

- 1.6 Exemple 2 : la cuvette sphérique

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &\text{ par } R \cos q_1 \cos q_2 \dot{q}_1 - R \sin q_1 \sin q_2 \dot{q}_2 \\ \dot{y} &\text{ par } R \cos q_1 \sin q_2 \dot{q}_1 + R \sin q_1 \cos q_2 \dot{q}_2 \\ \text{et } \dot{z} &\text{ par } -R \sin q_1 \dot{q}_1 \end{aligned}$$

$$L = \frac{1}{2}mR^2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \sin^2 q_1) - mgR(1 + \cos q_1)$$

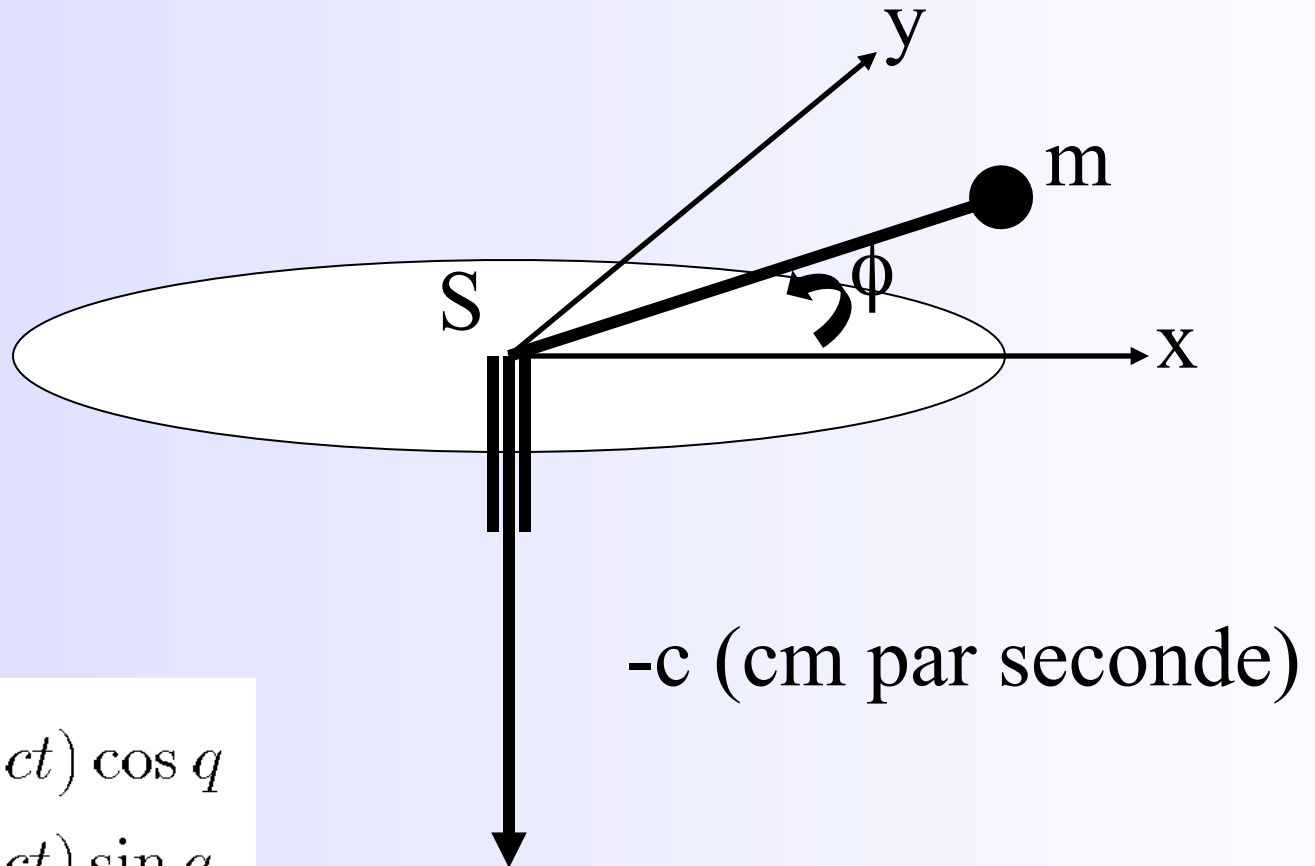
• 1.6 Exemple 2 : la cuvette sphérique

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial q_1} = mR^2 \dot{q}_2^2 \sin q_1 \cos q_1 + mgR \sin q_1, & \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = mR^2 \dot{q}_1, & \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = mR^2 \dot{q}_2 \sin^2 q_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 - \left(\dot{q}_2^2 \cos q_1 + \frac{g}{R} \right) \sin q_1 = 0 \\ mR^2 \frac{d}{dt} (\dot{q}_2 \sin^2 q_1) = 0 \end{cases}$$

- 1.6 Exemple 3 : la fronde en contraction

$$q = \phi$$



$$\begin{cases} x = (R_0 - ct) \cos q \\ y = (R_0 - ct) \sin q \end{cases}$$

- 1.6 Exemple 3 : la fronde en contraction

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} [\dot{q}^2 (R_0 - ct)^2 + c^2]$$

$$\frac{d}{dt} [m\dot{q} (R_0 - ct)^2] = 0, \text{ qui implique : } m\dot{q} (R_0 - ct)^2 = \text{constante}$$

- Exercice proposé :

Si $\underline{q} = \underline{q}(q,t)$ et donc aussi $q = q(\underline{q},t)$, montrer au moyen de ces transformations de coordonnées généralisées que la forme des équations de Lagrange est invariante, et aussi que l'existence d'un potentiel généralisé V ou d'un lagrangien L sont des propriétés intrinsèques du système mécanique considéré, et sont donc indépendants du choix des coordonnées généralisées.

Montrer donc que si :

$$\left| \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \right| \quad \text{et/ou} \quad \left| Q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|$$

$$\left| \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \right|$$

Alors

$$\left| \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\underline{q}}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \underline{q}_i} = \underline{Q}_i \right| \quad \text{et/ou} \quad \left| \underline{Q}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{\underline{q}}_i} \right) - \frac{\partial V}{\partial \underline{q}_i} \right|$$

$$\left| \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \underline{q}_i} = 0 \right|$$

• 1.6 Exemple 4 : problème de Lagrange-Poisson

Rappels :

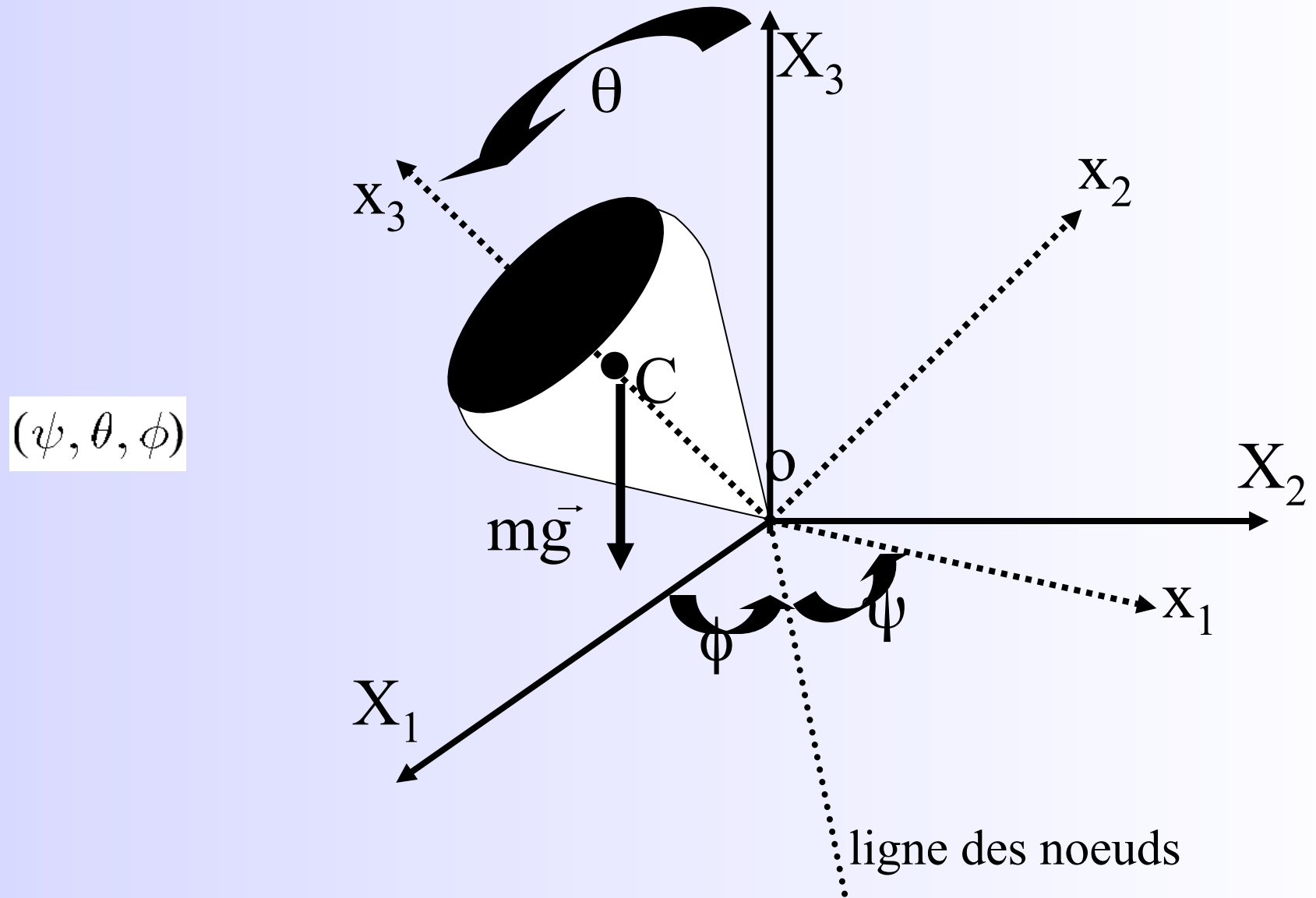
1. Pour le cas d'un solide soumis à des forces extérieures qui découlent d'un potentiel $V(\vec{r}_\alpha, t)$, on peut facilement établir l'équation de conservation d'énergie $T + V = \text{Cte}$ (cf. cours de mécanique analytique de 2^{ème} Bac.).

2. Pour le cas d'un solide en rotation autour d'un point fixe O, on a : $L_i = I_{ij} \omega_j$, $T = I_{ij} \omega_i \omega_j / 2$.

Si $I_{ij} = \delta_{ij} \{I_i\}$, alors $L_i = \delta_{ij} \{I_i\} \omega_j = \{I_i\} \omega_i$

$$T = \{I_i\} \omega_i \omega_i / 2.$$

- 1.6 Exemple 4 : problème de Lagrange-Poisson



- 1.6 Exemple 4 : problème de Lagrange-Poisson

$$\vec{L} = I_1 \omega_1 \vec{e}_1 + I_2 \omega_2 \vec{e}_2 + I_3 \omega_3 \vec{e}_3$$

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2)$$

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3$$

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{e}_3 + \dot{\theta} \vec{e} + \dot{\phi} \vec{E}_3$$

$$\vec{e} = \cos \psi \vec{e}_1 - \sin \psi \vec{e}_2$$

$$\vec{E}_3 = \sin \theta \sin \psi \vec{e}_1 + \sin \theta \cos \psi \vec{e}_2 + \cos \theta \vec{e}_3$$

- 1.6 Exemple 4 : problème de Lagrange-Poisson

$$\omega_1 = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi$$

$$\omega_2 = -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi$$

$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$$

$$T = \frac{1}{2} \left[I_1 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) + I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right)^2 \right]$$

- 1.6 Exemple 4 : problème de Lagrange-Poisson

$$T = \frac{1}{2} \left[I_1 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) + I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right)^2 \right]$$

$$Q_\psi = m\vec{g} \frac{\partial \vec{OC}}{\partial \psi} = 0$$

$$Q_\phi = m\vec{g} \frac{\partial \vec{OC}}{\partial \phi} = 0$$

$$Q_\theta = m\vec{g} \frac{\partial \vec{OC}}{\partial \theta} = -mg \frac{\partial X_{3C}}{\partial \theta} = mgl \sin \theta = -\frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{\partial mgl(\cos \theta + 1)}{\partial \theta}$$

$$X_{3C} = l \cos \theta$$

$$l = |OC|$$

$$V = mgl(\cos \theta + 1)$$

- 1.6 Exemple 4 : problème de Lagrange-Poisson

$$L = \frac{1}{2} \left[I_1 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) + I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right)^2 \right] - mgl (\cos \theta + 1)$$

$$p_{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I_1 \dot{\theta}$$

$$p_{\phi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3 \cos \theta \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right)$$

$$p_{\psi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right)$$