

Cours de Mécanique Analytique II

Cours de Mécanique Analytique II

- Nom/Prénom/E-mail

Cours de Mécanique Analytique II

- Nom/Prénom/E-mail

→ jsurdej@ulg.ac.be

Cours de Mécanique Analytique

(J. Surdej, Institut d'Astrophysique et de
Géophysique, ULg, jsurdej@ulg.ac.be)

Cours de Mécanique Analytique

(J. Surdej, Institut d'Astrophysique et de
Géophysique, ULg, jsurdej@ulg.ac.be)

- 3ème Bac. Sc. Math. (2013-2014, 12h + 15h)

Cours de Mécanique Analytique

(J. Surdej, Institut d'Astrophysique et de
Géophysique, ULg, jsurdej@ulg.ac.be)

- 3ème Bac. Sc. Math. (2013-2014, 12h + 15h)
- 3ème Bac. Sc. Phys. (2013-2014, 30h + 30h)

Cours de Mécanique Analytique

(J. Surdej, Institut d'Astrophysique et de
Géophysique, ULg, jsurdej@ulg.ac.be)

- 3ème Bac. Sc. Math. (2013-2014, 12h + 15h)
- 3ème Bac. Sc. Phys. (2013-2014, 30h + 30h)

Cours de Mécanique Analytique

(J. Surdej, Institut d'Astrophysique et de
Géophysique, ULg, jsurdej@ulg.ac.be)

- 3ème Bac. Sc. Math. (2013-2014, 12h + 15h)
- 3ème Bac. Sc. Phys. (2013-2014, 30h + 30h)
- Assistants (B.Hubert@ulg.ac.be;
Sarah.Kosta@student.ulg.ac.be, Département
d'Astrophysique et de Géophysique, ULg)

Cours de Mécanique Analytique

(J. Surdej, Institut d'Astrophysique et de
Géophysique, ULg, jsurdej@ulg.ac.be)

- 3ème Bac. Sc. Math. (2013-2014, 12h + 15h)
- 3ème Bac. Sc. Phys. (2013-2014, 30h + 30h)
- Assistants (B.Hubert@ulg.ac.be;
Sarah.Kosta@student.ulg.ac.be, Département
d'Astrophysique et de Géophysique, ULg)
- Formulations lagrangienne et hamiltonienne de la
mécanique + relativité restreinte

Ouvrages de référence :

Ouvrages de référence :

- R. Simon, Mécanique analytique, Vol. 2 (1988),

Ouvrages de référence :

- R. Simon, Mécanique analytique, Vol. 2 (1988),
Editions Derouaux, Liège

Ouvrages de référence :

- R. Simon, Mécanique analytique, Vol. 2 (1988), Editions Derouaux, Liège
- J.W. Leech, Eléments de mécanique analytique

Ouvrages de référence :

- R. Simon, Mécanique analytique, Vol. 2 (1988), Editions Derouaux, Liège
- J.W. Leech, Eléments de mécanique analytique (1961), Monographies DUNOD

Ouvrages de référence :

- R. Simon, Mécanique analytique, Vol. 2 (1988), Editions Derouaux, Liège
- J.W. Leech, Eléments de mécanique analytique (1961), Monographies DUNOD
- M. Spiegel, Theory and problems of theoretical

Ouvrages de référence :

- R. Simon, Mécanique analytique, Vol. 2 (1988), Editions Derouaux, Liège
- J.W. Leech, Eléments de mécanique analytique (1961), Monographies DUNOD
- M. Spiegel, Theory and problems of theoretical mechanics (1967), Schaum Publishing Co.

Ouvrages de référence :

- R. Simon, Mécanique analytique, Vol. 2 (1988), Editions Derouaux, Liège
- J.W. Leech, Eléments de mécanique analytique (1961), Monographies DUNOD
- M. Spiegel, Theory and problems of theoretical mechanics (1967), Schaum Publishing Co.

Notes de cours :

Ouvrages de référence :

- R. Simon, Mécanique analytique, Vol. 2 (1988), Editions Derouaux, Liège
- J.W. Leech, Eléments de mécanique analytique (1961), Monographies DUNOD
- M. Spiegel, Theory and problems of theoretical mechanics (1967), Schaum Publishing Co.

Notes de cours :

- J. Demaret, R. Simon, J.W. Leech, M. Spiegel

Notes de cours :

Notes de cours :

<http://www.aeos.ulg.ac.be/teaching.php>

<http://www.aeos.ulg.ac.be/upload/Lagrange.pdf>

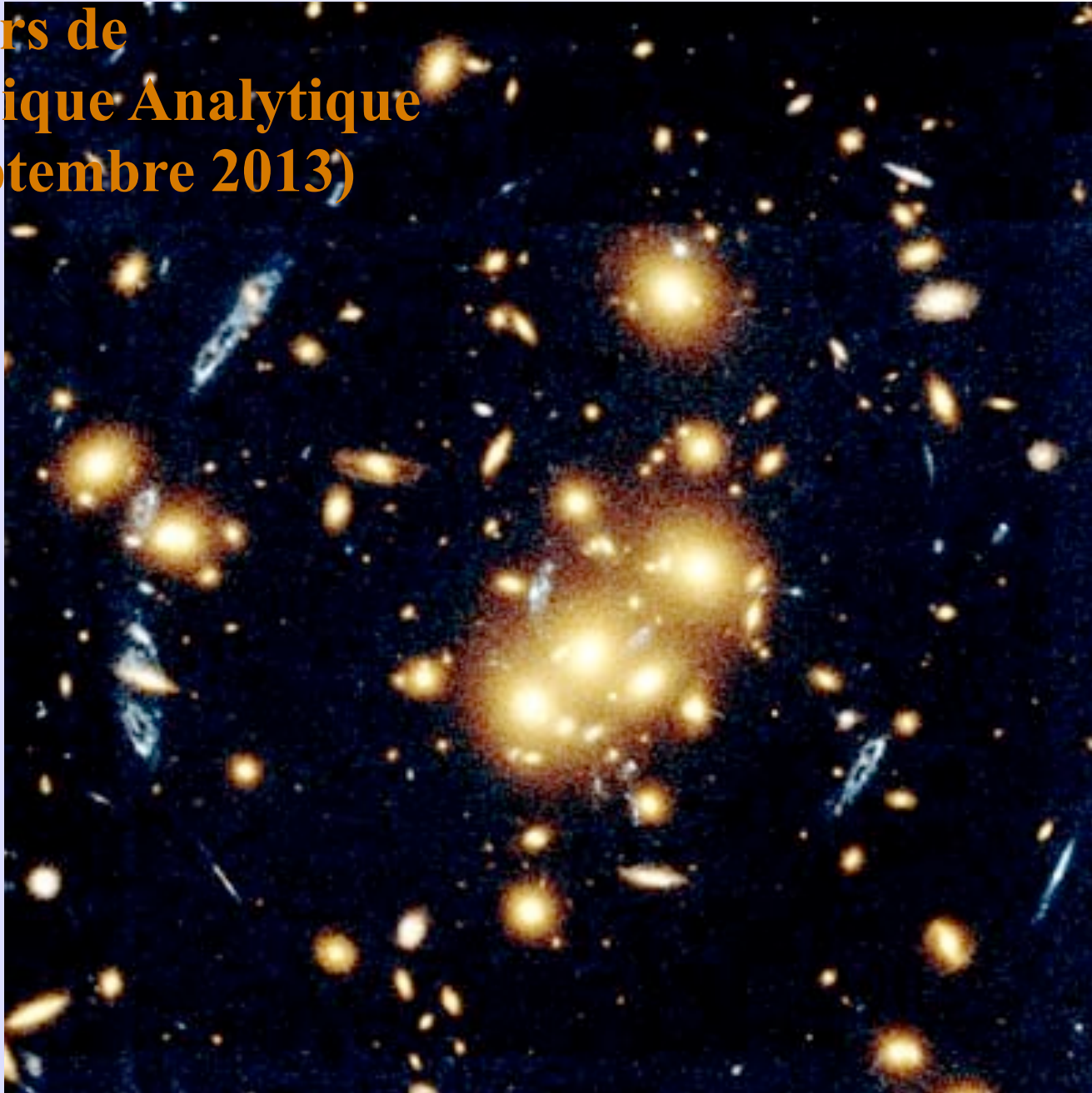
http://www.aeos.ulg.ac.be/upload/Cours_meca_1.pdf

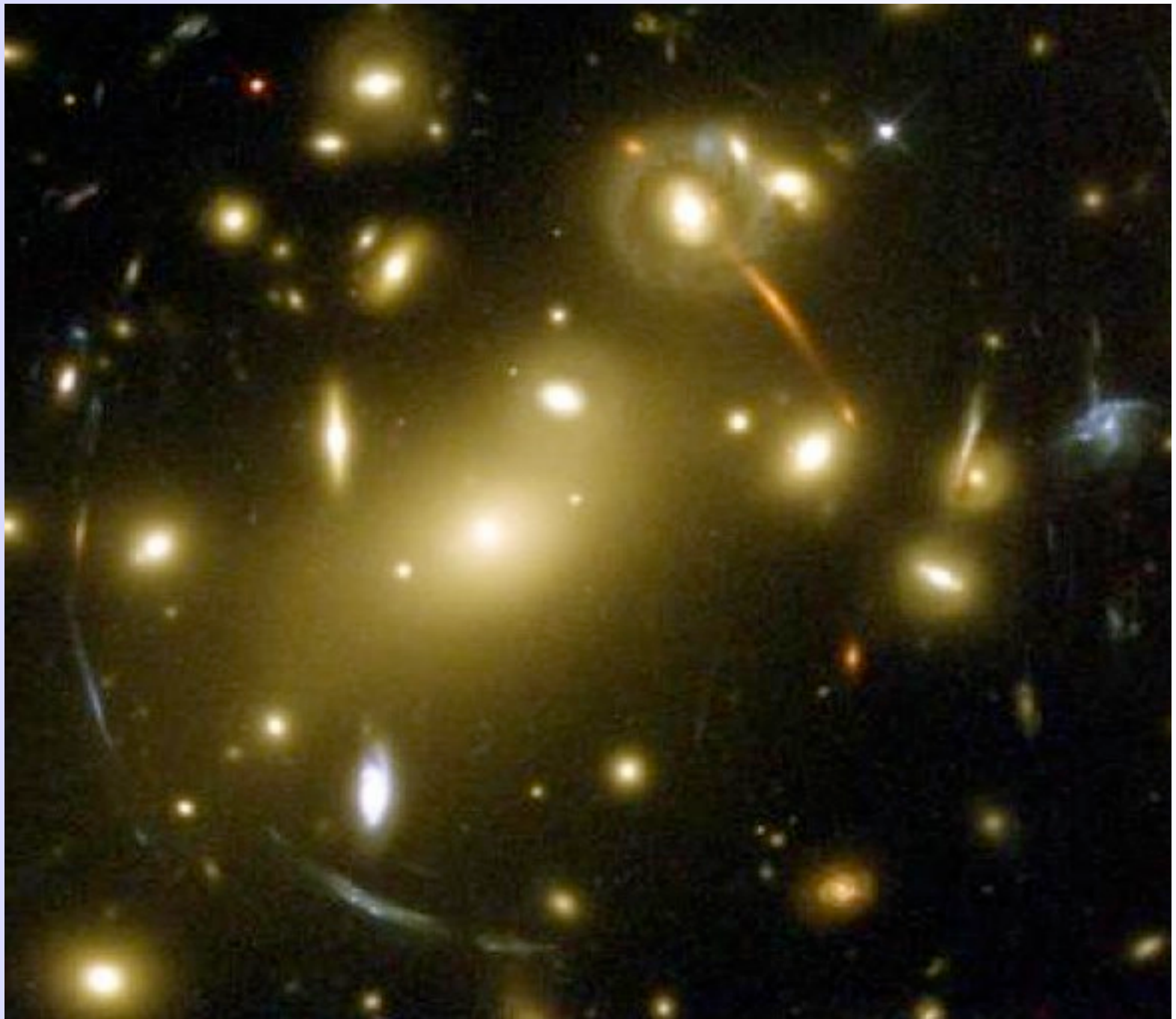
Interro dispensatoire et Examens :

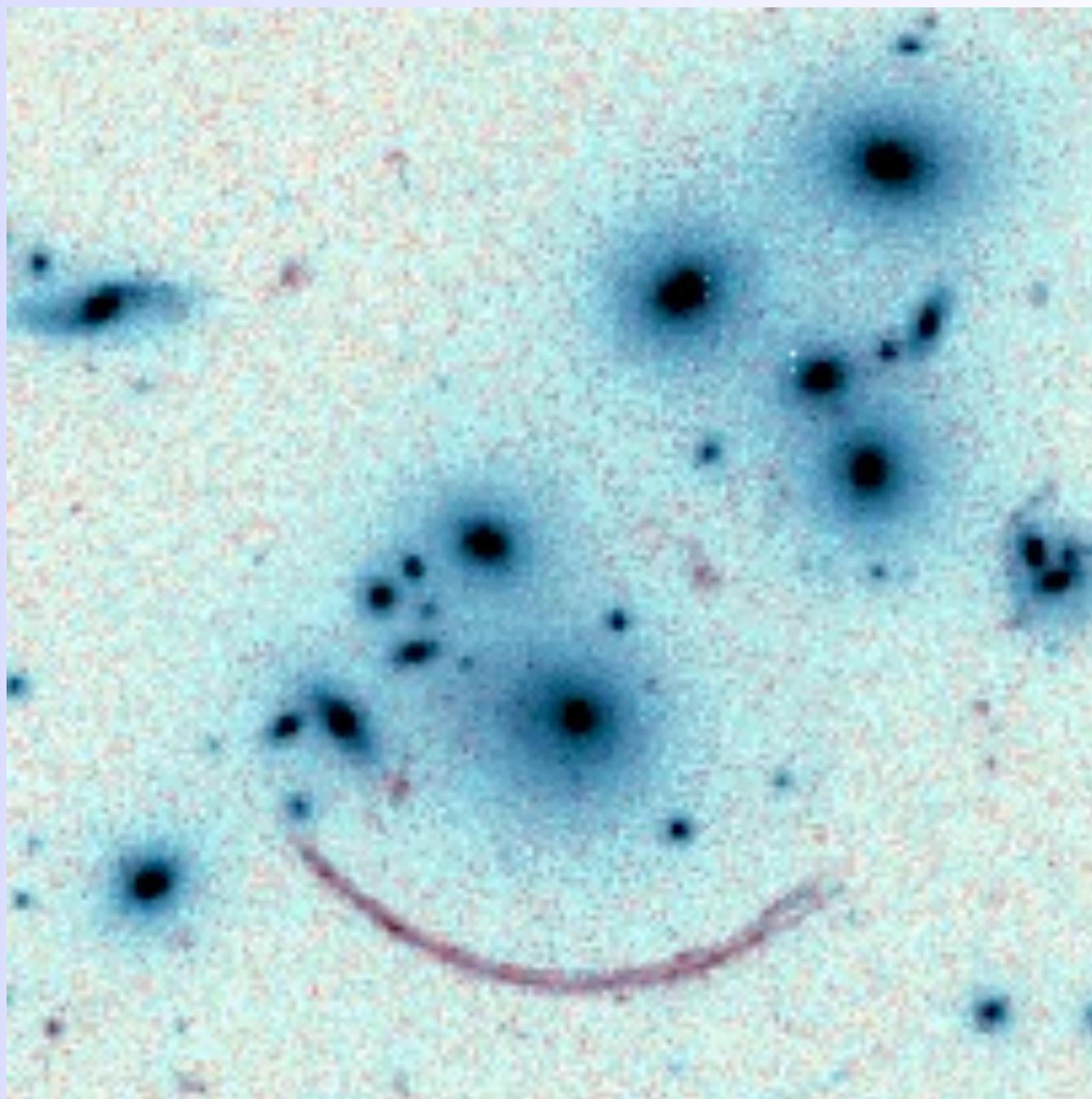
Décembre 2013/2014

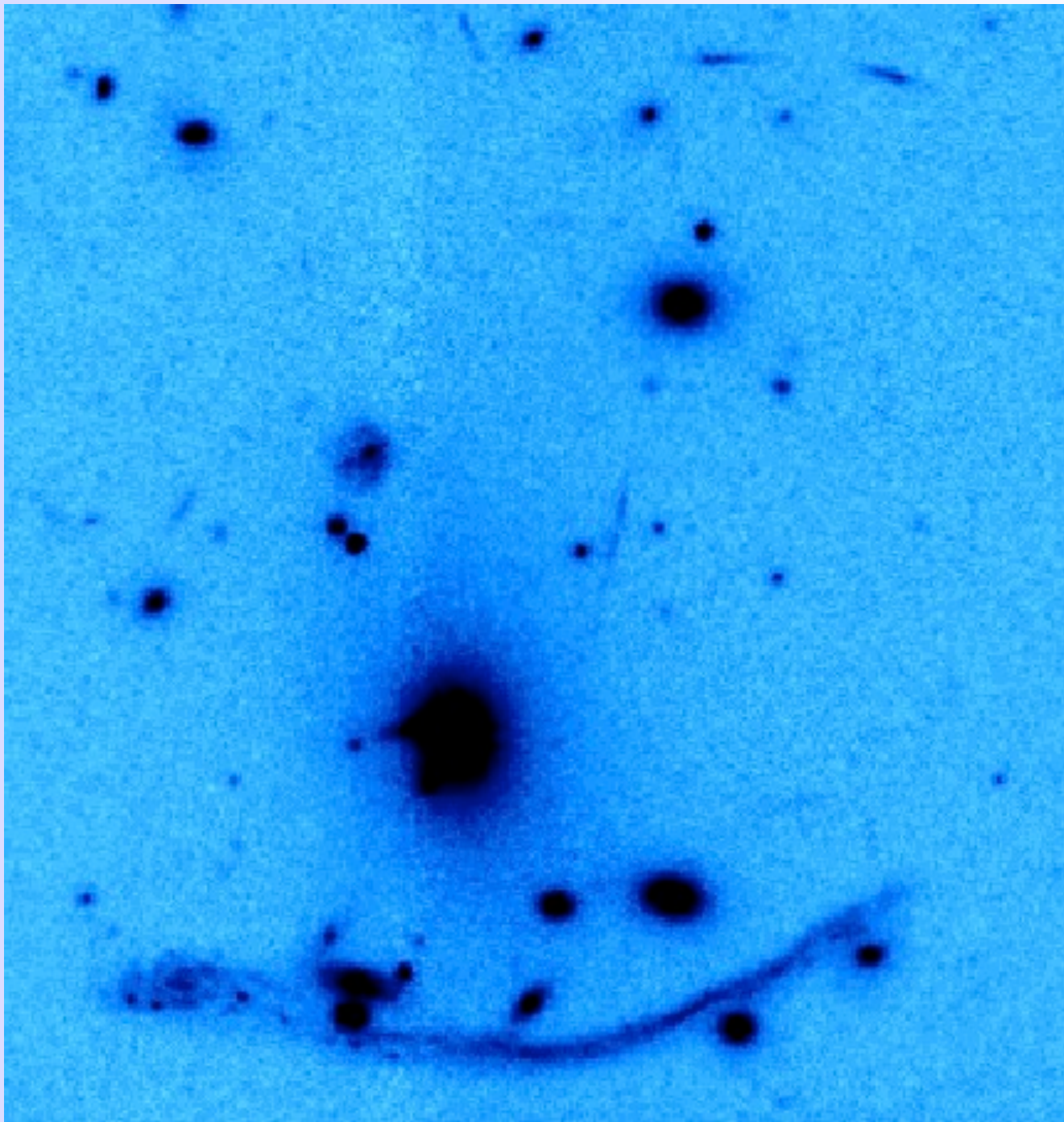
**1^{er} cours de
Mécanique Analytique
(19 septembre 2013)**

**1^{er} cours de
Mécanique Analytique
(19 septembre 2013)**











Introduction

Chapitre 1 : Les équations de Lagrange

- 1.1 Rappel de quelques notions fondamentales
- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels
- 1.3 Liaisons holonomes et coordonnées généralisées
- 1.4 Généralisation du principe des travaux virtuels et le principe de d'Alembert

Introduction

Introduction

- Mécanique classique

Introduction

- Mécanique classique

Introduction

- Mécanique classique
- Lois de Newton: mécanique vectorielle

Introduction

- Mécanique classique
- Lois de Newton: mécanique vectorielle
- Principe variationnel: mécanique analytique

Chapitre 1 : Les équations de Lagrange

Chapitre 1 : Les équations de Lagrange

- 1.1 Rappel de quelques notions fondamentales

Chapitre 1 : Les équations de Lagrange

- 1.1 Rappel de quelques notions fondamentales

$$\alpha = 1, 2, \dots, N$$

Chapitre 1 : Les équations de Lagrange

- 1.1 Rappel de quelques notions fondamentales

$$\alpha = 1, 2, \dots, N$$

$$S \quad P_{\alpha}(t)$$

Chapitre 1 : Les équations de Lagrange

- 1.1 Rappel de quelques notions fondamentales

$$\alpha = 1, 2, \dots, N$$

$$S \quad P_\alpha(t)$$

$$\vec{r}_\alpha = \vec{OP}_\alpha$$

Chapitre 1 : Les équations de Lagrange

- 1.1 Rappel de quelques notions fondamentales

$$\alpha = 1, 2, \dots, N$$

$$S \quad P_\alpha(t)$$

$$\vec{r}_\alpha = \vec{OP}_\alpha$$

$$m_\alpha \frac{d^2 \vec{r}_\alpha}{dt^2} = \vec{F}_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N) \quad (1.1)$$

Chapitre 1 : Les équations de Lagrange

- 1.1 Rappel de quelques notions fondamentales

$$\alpha = 1, 2, \dots, N$$

$$S \quad P_\alpha(t)$$

$$\vec{r}_\alpha = \vec{OP}_\alpha$$

$$m_\alpha \frac{d^2 \vec{r}_\alpha}{dt^2} = \vec{F}_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N) \quad (1.1)$$

$$f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N, t) = \text{constante}$$

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

Historique

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

Historique

Principe des travaux virtuels

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

Historique

Principe des travaux virtuels

Concept vectoriel de moment

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

Historique

Principe des travaux virtuels

Concept vectoriel de moment

$$\vec{F}_\alpha = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N)$$

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

- 1.2.1 Première méthode : la méthode des moments

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

- 1.2.1 Première méthode : la méthode des moments

$$\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^i + \vec{F}_\alpha^e = 0$$

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

1.2.1 Première méthode : la méthode des moments

$$\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^i + \vec{F}_\alpha^e = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha^i = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{OP}_\alpha \wedge \vec{F}_\alpha^i = 0$$

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

1.2.1 Première méthode : la méthode des moments

$$\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^i + \vec{F}_\alpha^e = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha^i = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{OP}_\alpha \wedge \vec{F}_\alpha^i = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha^e = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{OP}_\alpha \wedge \vec{F}_\alpha^e = 0$$

• 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

1.2.1 Première méthode : la méthode des moments

$$\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^i + \vec{F}_\alpha^e = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha^i = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{OP}_\alpha \wedge \vec{F}_\alpha^i = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha^e = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{OP}_\alpha \wedge \vec{F}_\alpha^e = 0$$

$$\boxed{\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha^e = 0}$$

Loi fondamentale
de la statique !

$$\boxed{\sum_{\alpha=1}^N \vec{OP}_\alpha \wedge \vec{F}_\alpha^e = 0}$$

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

- 1.2.1 Première méthode : la méthode des moments

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

- 1.2.1 Première méthode : la méthode des moments

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha}^e$$

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

1.2.1 Première méthode : la méthode des moments

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha}^e$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^N \vec{O}P_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^e$$

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

1.2.1 Première méthode : la méthode des moments

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha}^e$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^N \vec{OP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^e$$

$$\vec{P} = 0, \quad \vec{L} = 0$$

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

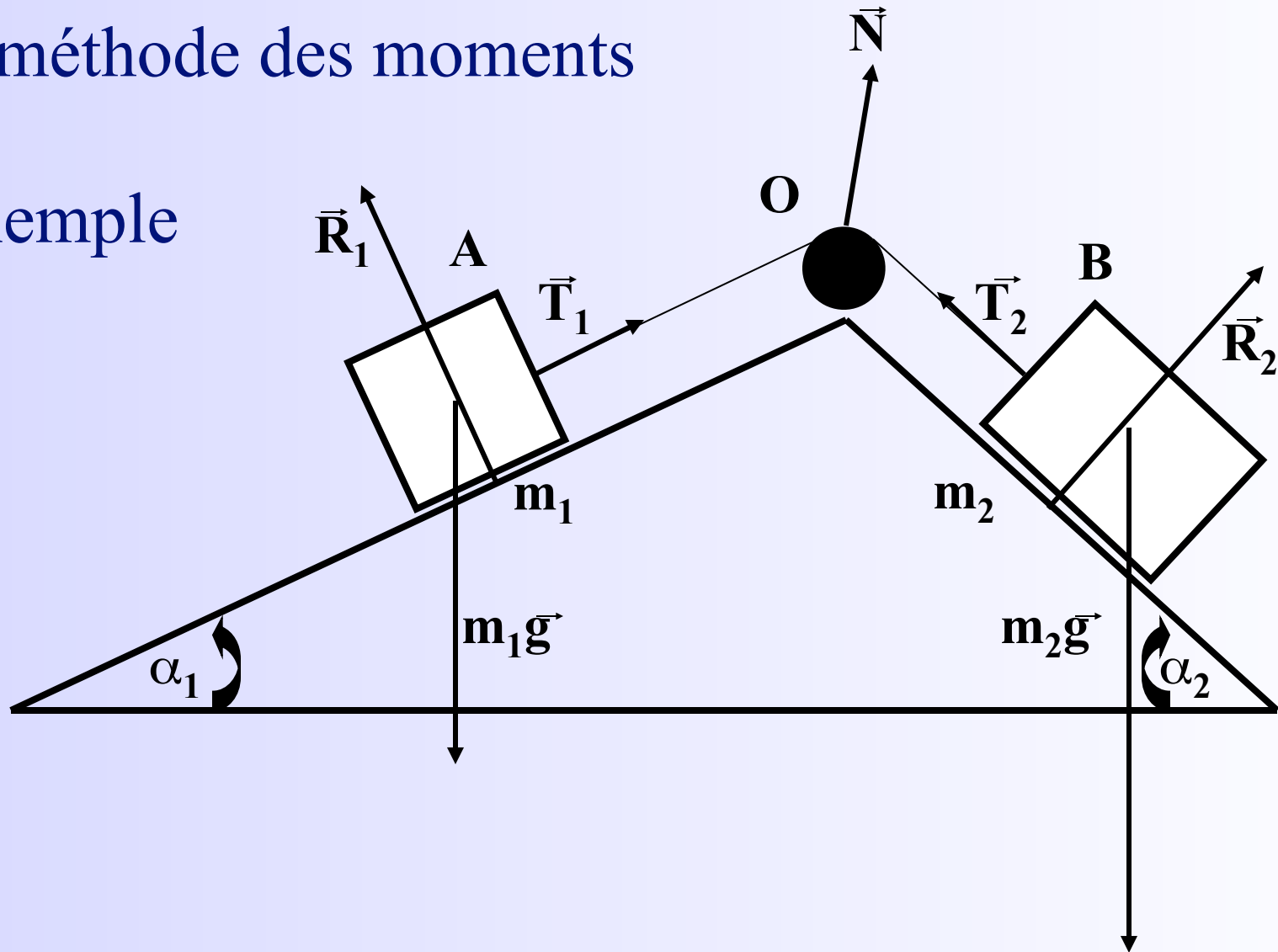
- 1.2.1 Première méthode :
la méthode des moments

- Exemple

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

- 1.2.1 Première méthode :
la méthode des moments

Exemple



- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

- 1.2.1 Première méthode : la méthode des moments

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

- 1.2.1 Première méthode : la méthode des moments

$$R_1 = m_1 g \cos(\alpha_1), \quad R_2 = m_2 g \cos(\alpha_2)$$

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

1.2.1 Première méthode : la méthode des moments

$$R_1 = m_1 g \cos(\alpha_1), \quad R_2 = m_2 g \cos(\alpha_2)$$

$$T_1 = m_1 g \sin(\alpha_1), \quad T_2 = m_2 g \sin(\alpha_2)$$

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

1.2.1 Première méthode : la méthode des moments

$$R_1 = m_1 g \cos(\alpha_1), \quad R_2 = m_2 g \cos(\alpha_2)$$

$$T_1 = m_1 g \sin(\alpha_1), \quad T_2 = m_2 g \sin(\alpha_2)$$

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{m_2}{m_1}$$

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

- 1.2.1 Deuxième méthode : la méthode des travaux virtuels (TV)

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

- 1.2.1 Deuxième méthode : la méthode des travaux virtuels (TV)

$$\vec{F}_\alpha = 0$$

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

1.2.1 Deuxième méthode : la méthode des travaux virtuels (TV)

$$\vec{F}_\alpha = 0$$

$$\delta \vec{r}_\alpha = \delta \vec{OP}_\alpha$$

$$\left| \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0 \right|$$

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

1.2.1 Deuxième méthode : la méthode des travaux virtuels (TV)

$$\delta \vec{r}_\alpha = \delta \vec{OP}_\alpha$$

$$\vec{F}_\alpha = 0$$

$$\left| \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0 \right|$$

$$\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^\ell + \vec{F}_\alpha^a$$

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

1.2.1 Deuxième méthode : la méthode des travaux virtuels (TV)

$$\delta \vec{r}_\alpha = \delta \vec{OP}_\alpha$$

$$\vec{F}_\alpha = 0$$

$$\left| \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0 \right|$$

$$\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^\ell + \vec{F}_\alpha^a$$

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha^\ell \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0$$

• 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

1.2.1 Deuxième méthode : la méthode des travaux virtuels (TV)

$$\delta \vec{r}_\alpha = \delta \vec{O}P_\alpha$$

$$\vec{F}_\alpha = 0$$

$$\left| \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0 \right|$$

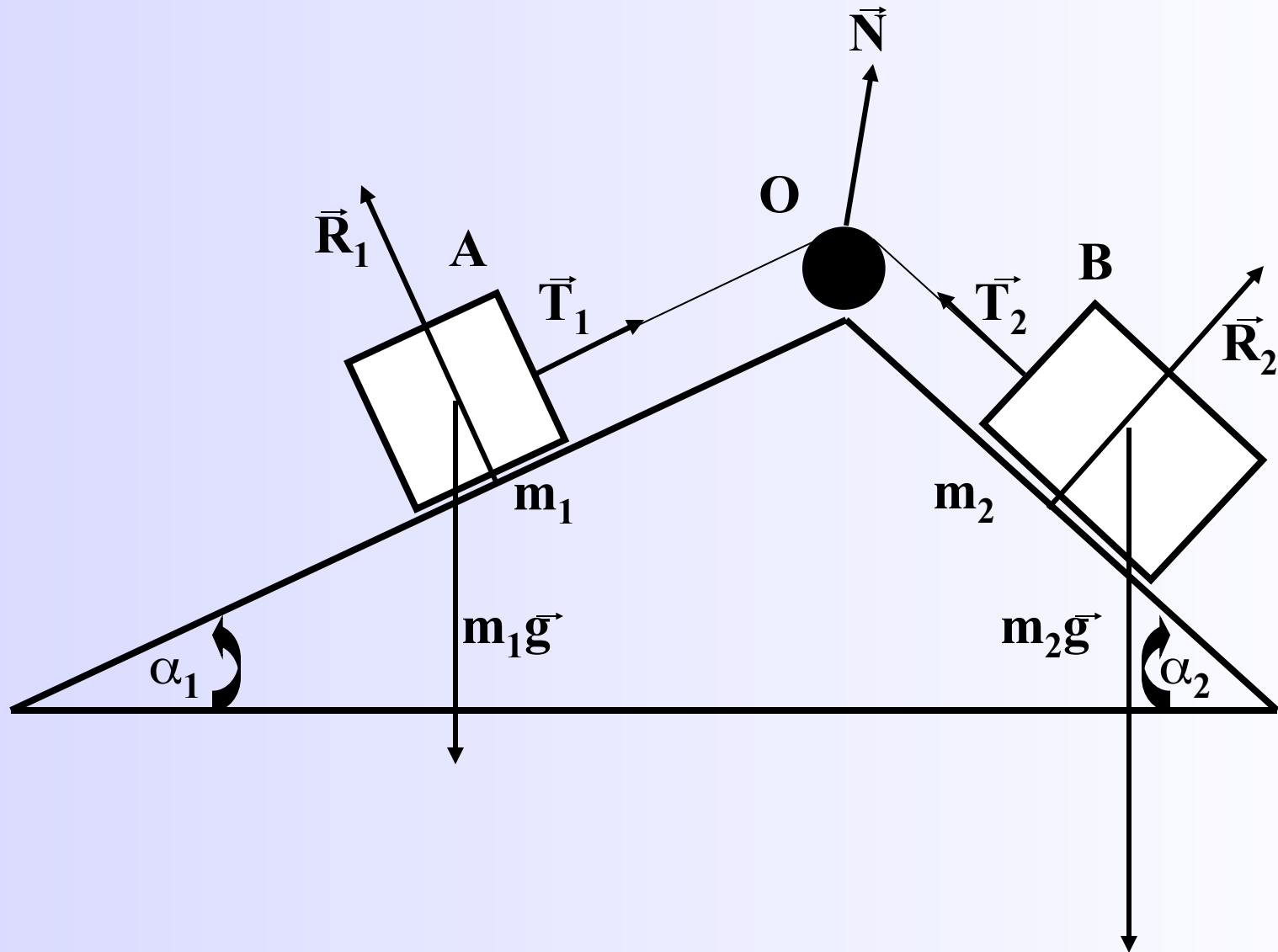
$$\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^\ell + \vec{F}_\alpha^a$$

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha^\ell \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha^a \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0$$

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels



- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

- 1.2.1 Deuxième méthode : la méthode des TV
Exemple

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

1.2.1 Deuxième méthode : la méthode des TV

Exemple

$$\vec{T}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 = T_1 \cdot \delta r_1 = -T_1 \cdot \delta r_2 = -\vec{T}_2 \cdot \delta \vec{r}_2$$

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

1.2.1 Deuxième méthode : la méthode des TV

Exemple

$$\vec{T}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 = T_1 \cdot \delta r_1 = -T_1 \cdot \delta r_2 = -\vec{T}_2 \cdot \delta \vec{r}_2$$

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha}^a \cdot \delta \vec{r}_{\alpha} = m_1 \vec{g} \cdot \delta \vec{r}_1 + m_2 \vec{g} \cdot \delta \vec{r}_2 = m_1 g \sin(\alpha_1) \delta r_1 - m_2 g \sin(\alpha_2) \delta r_1 = 0$$

• 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

1.2.1 Deuxième méthode : la méthode des TV Exemple

$$\vec{T}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 = T_1 \cdot \delta r_1 = -T_1 \cdot \delta r_2 = -\vec{T}_2 \cdot \delta \vec{r}_2$$

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha}^a \cdot \delta \vec{r}_{\alpha} = m_1 \vec{g} \cdot \delta \vec{r}_1 + m_2 \vec{g} \cdot \delta \vec{r}_2 = m_1 g \sin(\alpha_1) \delta r_1 - m_2 g \sin(\alpha_2) \delta r_1 = 0$$

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{m_2}{m_1}$$

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

- 1.2.1 Résumé des deux méthodes (1: MM)

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

1.2.1 Résumé des deux méthodes (1: MM)

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N (\vec{F}_{\alpha}^i + \vec{F}_{\alpha}^e) = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha}^e = 0$$

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

1.2.1 Résumé des deux méthodes (1: MM)

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N (\vec{F}_{\alpha}^i + \vec{F}_{\alpha}^e) = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha}^e = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{OP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N \vec{OP}_{\alpha} \wedge (\vec{F}_{\alpha}^i + \vec{F}_{\alpha}^e) = \sum_{\alpha=1}^N \vec{OP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^e = 0$$

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

1.2.1 Résumé des deux méthodes (1: MM)

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N (\vec{F}_{\alpha}^i + \vec{F}_{\alpha}^e) = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha}^e = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{OP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N \vec{OP}_{\alpha} \wedge (\vec{F}_{\alpha}^i + \vec{F}_{\alpha}^e) = \sum_{\alpha=1}^N \vec{OP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^e = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N (\vec{F}_{\alpha}^i + \vec{F}_{\alpha}^e) = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha}^e = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

• 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

1.2.1 Résumé des deux méthodes (1: MM)

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N (\vec{F}_{\alpha}^i + \vec{F}_{\alpha}^e) = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha}^e = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{OP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N \vec{OP}_{\alpha} \wedge (\vec{F}_{\alpha}^i + \vec{F}_{\alpha}^e) = \sum_{\alpha=1}^N \vec{OP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^e = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N (\vec{F}_{\alpha}^i + \vec{F}_{\alpha}^e) = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha}^e = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{OP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N \vec{OP}_{\alpha} \wedge (\vec{F}_{\alpha}^i + \vec{F}_{\alpha}^e) = \sum_{\alpha=1}^N \vec{OP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^e = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

- 1.2.1 Résumé des deux méthodes (2: MTV)

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

- 1.2.1 Résumé des deux méthodes (2: MTV)

$$\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^\ell + \vec{F}_\alpha^a = 0$$

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

1.2.1 Résumé des deux méthodes (2: MTV)

$$\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^\ell + \vec{F}_\alpha^a = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N (\vec{F}_\alpha^\ell + \vec{F}_\alpha^a) \cdot \delta \vec{r}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha^a \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0$$

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

1.2.1 Résumé des deux méthodes (2: MTV)

$$\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^\ell + \vec{F}_\alpha^a = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N (\vec{F}_\alpha^\ell + \vec{F}_\alpha^a) \cdot \delta \vec{r}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha^a \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0$$

$$\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^\ell + \vec{F}_\alpha^a = m_\alpha \vec{\gamma}_\alpha$$

- 1.2 Statique et principe des travaux virtuels

1.2.1 Résumé des deux méthodes (2: MTV)

$$\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^\ell + \vec{F}_\alpha^a = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N (\vec{F}_\alpha^\ell + \vec{F}_\alpha^a) \cdot \delta \vec{r}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha^a \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0$$

$$\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^\ell + \vec{F}_\alpha^a = m_\alpha \vec{\gamma}_\alpha$$

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N (\vec{F}_\alpha^\ell + \vec{F}_\alpha^a) \cdot \delta \vec{r}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha^a \cdot \delta \vec{r}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{\gamma}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha$$

- 1.3 Liaisons holonomes et coordonnées généralisées

- 1.3 Liaisons holonomes et coordonnées généralisées

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0, \\ \vdots \\ f_\ell(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0 \end{array} \right. \quad (1.2)$$

- 1.3 Liaisons holonomes et coordonnées généralisées

$$\begin{cases} f_1(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0, \\ \vdots \\ f_\ell(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0 \end{cases}$$

(1.2)

Liaisons holonomes!

- 1.3 Liaisons holonomes et coordonnées généralisées

$$\begin{cases} f_1(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0, \\ \vdots \\ f_\ell(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Liaisons holonomes!

$$f = 3N - \ell \quad (1.3)$$

• 1.3 Liaisons holonomes et coordonnées généralisées

$$\begin{cases} f_1(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0, \\ \vdots \\ f_\ell(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Liaisons holonomes!

$$f = 3N - \ell \quad (1.3)$$

Exemples :

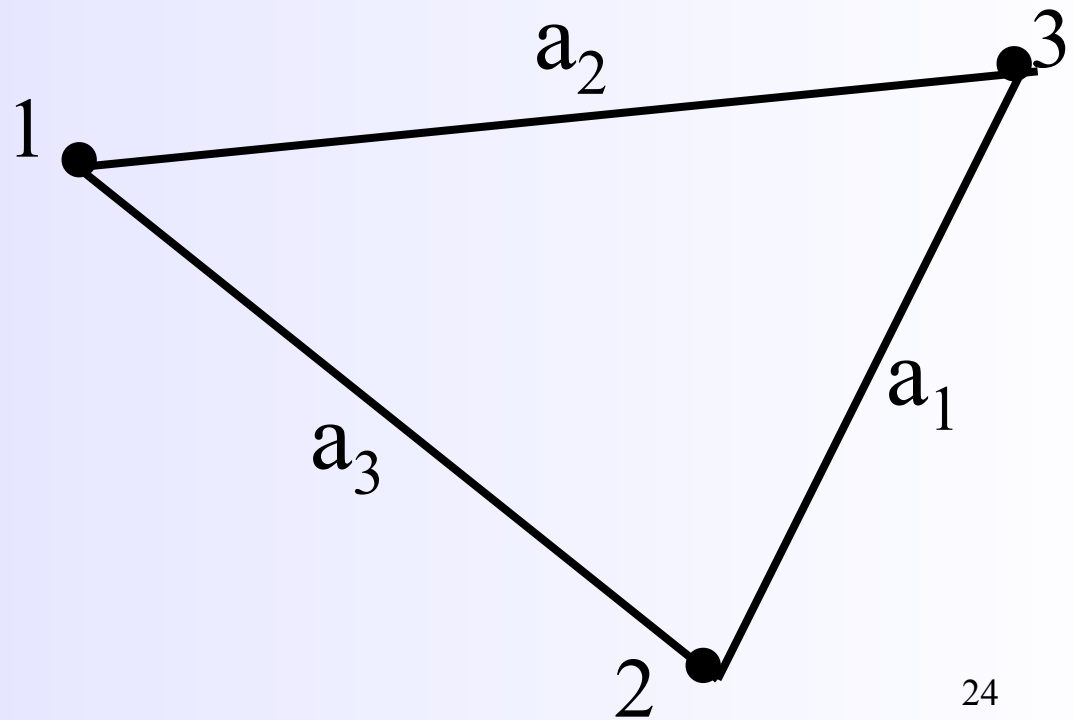
(a) particule sur une surface ($\ell=1$, $f=2$) ou
sur une courbe ($\ell=2$, $f=1$)

- 1.3 Liaisons holonomes et coordonnées généralisées

- 1.3 Liaisons holonomes et coordonnées généralisées
 - (b) système de 3 corps liés

- 1.3 Liaisons holonomes et coordonnées généralisées

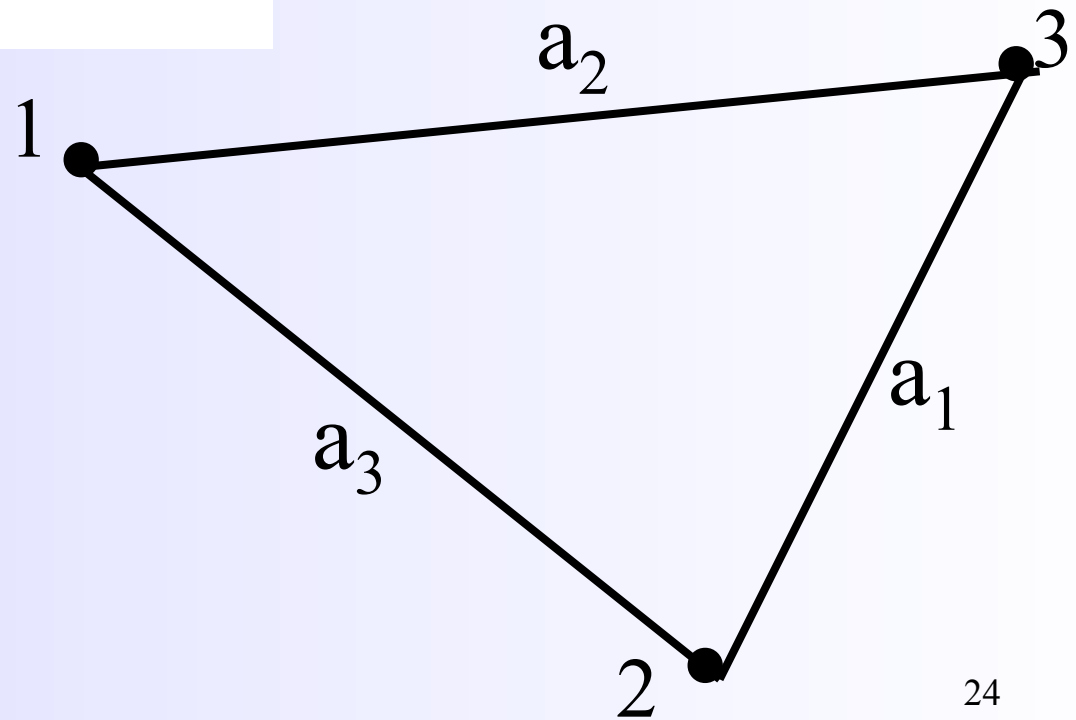
(b) système de 3 corps liés



• 1.3 Liaisons holonomes et coordonnées généralisées

(b) système de 3 corps liés

$$\begin{cases} f_1 = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - a_3 = 0 \\ f_2 = |\vec{r}_2 - \vec{r}_3| - a_1 = 0 \\ f_3 = |\vec{r}_3 - \vec{r}_1| - a_2 = 0 \end{cases}$$

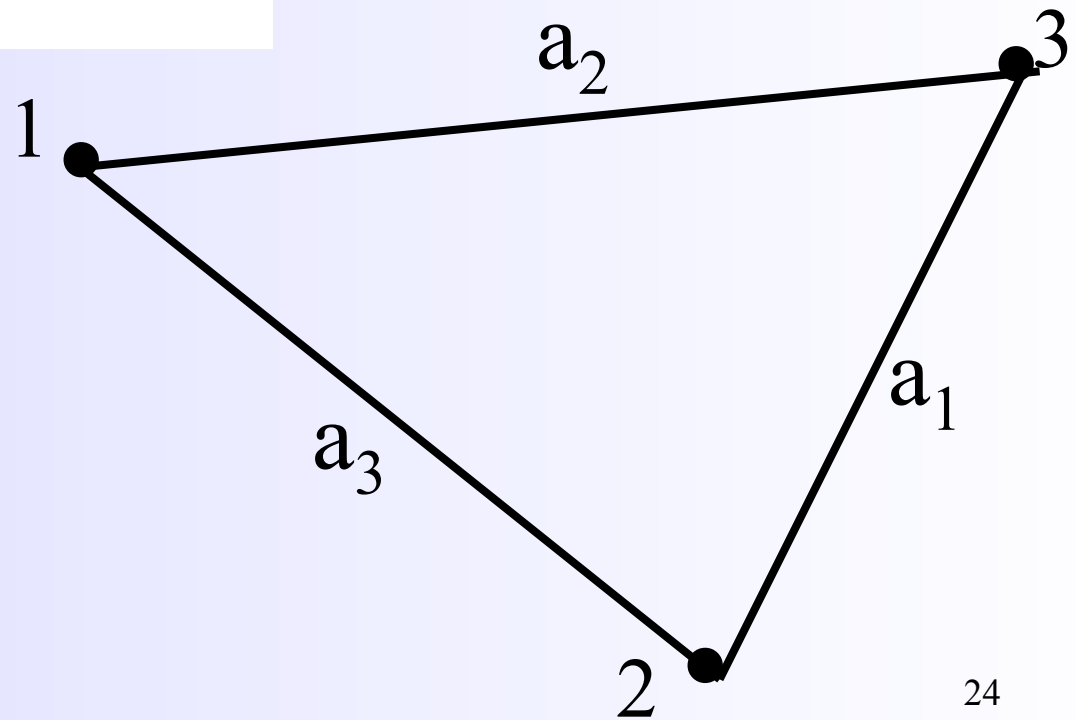


• 1.3 Liaisons holonomes et coordonnées généralisées

(b) système de 3 corps liés

$$\begin{cases} f_1 = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - a_3 = 0 \\ f_2 = |\vec{r}_2 - \vec{r}_3| - a_1 = 0 \\ f_3 = |\vec{r}_3 - \vec{r}_1| - a_2 = 0 \end{cases}$$

(a_1, a_2 et $a_3 = \text{constantes}$)

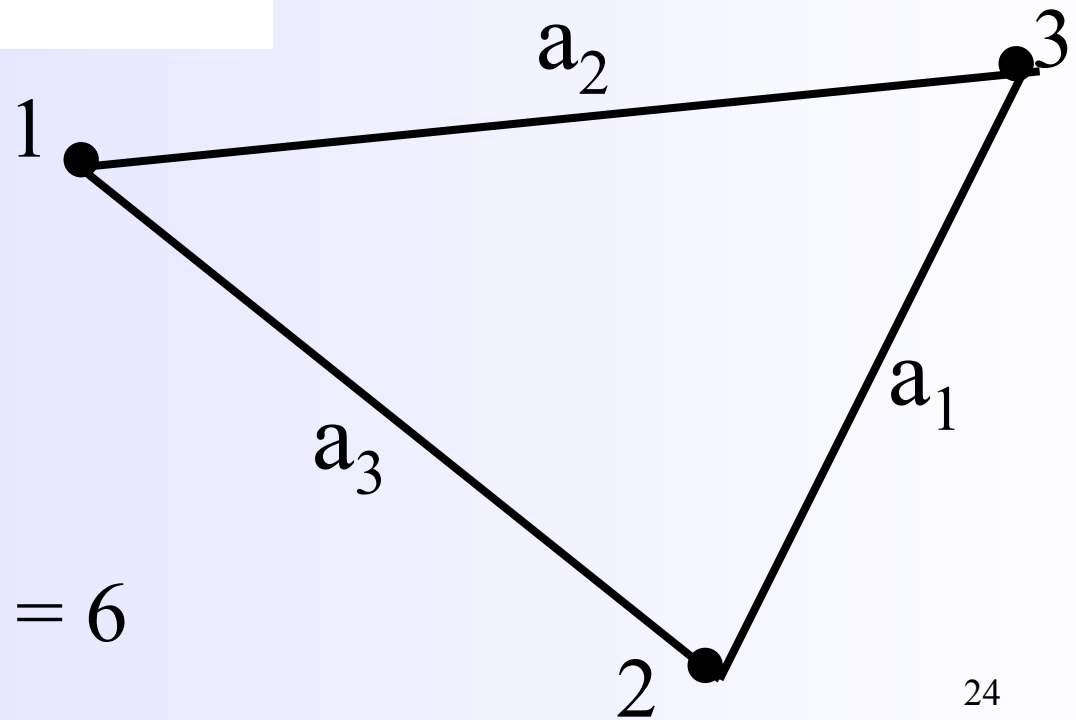


• 1.3 Liaisons holonomes et coordonnées généralisées

(b) système de 3 corps liés

$$\begin{cases} f_1 = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - a_3 = 0 \\ f_2 = |\vec{r}_2 - \vec{r}_3| - a_1 = 0 \\ f_3 = |\vec{r}_3 - \vec{r}_1| - a_2 = 0 \end{cases}$$

(a_1, a_2 et $a_3 = \text{constantes}$)



$$\Rightarrow \ell = 3,$$

$$f = 3N - \ell = 9 - 3 = 6$$

- 1.3 Liaisons holonomes et coordonnées généralisées

- 1.3 Liaisons holonomes et coordonnées généralisées

Système des $3N$ équations de Newton + ℓ équations de liaison = système mi-différentiel, mi-algébrique par rapport aux $3N$ fonctions $x_{i\alpha}(t)$ et ℓ forces de liaison.

- 1.3 Liaisons holonomes et coordonnées généralisées

Système des $3N$ équations de Newton + ℓ équations de liaison = système mi-différentiel, mi-algébrique par rapport aux $3N$ fonctions $x_{i\alpha}(t)$ et ℓ forces de liaison.

Méthode de Lagrange: combiner les $3N$ équations de Newton et les ℓ équations de liaison $\Rightarrow f$ équations différentielles de f fonctions $q_i(t)$, appelées coordonnées généralisées, et indépendantes des forces de liaison.

- 1.3 Liaisons holonomes et coordonnées généralisées

- 1.3 Liaisons holonomes et coordonnées généralisées

Exemples :

(a) particule se déplaçant sur une sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

$$\Rightarrow f = 3N - \ell = 3 - 1 = 2$$

$$x, y, z \Rightarrow q_1 = \theta, q_2 = \phi$$

- 1.3 Liaisons holonomes et coordonnées généralisées

Exemples :

(a) particule se déplaçant sur une sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

$$\Rightarrow f = 3N - \ell = 3 - 1 = 2$$

$$x, y, z \Rightarrow q_1 = \theta, q_2 = \phi$$

(b) pendule circulaire $\Rightarrow q_1 = \theta$

- 1.3 Liaisons holonomes et coordonnées généralisées

Exemples :

(a) particule se déplaçant sur une sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

$$\Rightarrow f = 3N - \ell = 3 - 1 = 2$$

$$x, y, z \Rightarrow q_1 = \theta, q_2 = \phi$$

(b) pendule circulaire $\Rightarrow q_1 = \theta$

(c) solide avec point fixe (cf. toupie)

$$\Rightarrow q_1 = \psi, q_2 = \theta, q_3 = \phi$$

- 1.3 Liaisons holonomes et coordonnées généralisées

- 1.3 Liaisons holonomes et coordonnées généralisées

$$\begin{aligned}x_1 &= x_1(q, t), \\ \vdots \\ x_{3N} &= x_{3N}(q, t),\end{aligned}$$

- 1.3 Liaisons holonomes et coordonnées généralisées

$$\begin{aligned}x_1 &= x_1(q, t), \\ \vdots \\ x_{3N} &= x_{3N}(q, t),\end{aligned}$$

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q, t) \quad (1.4)$$

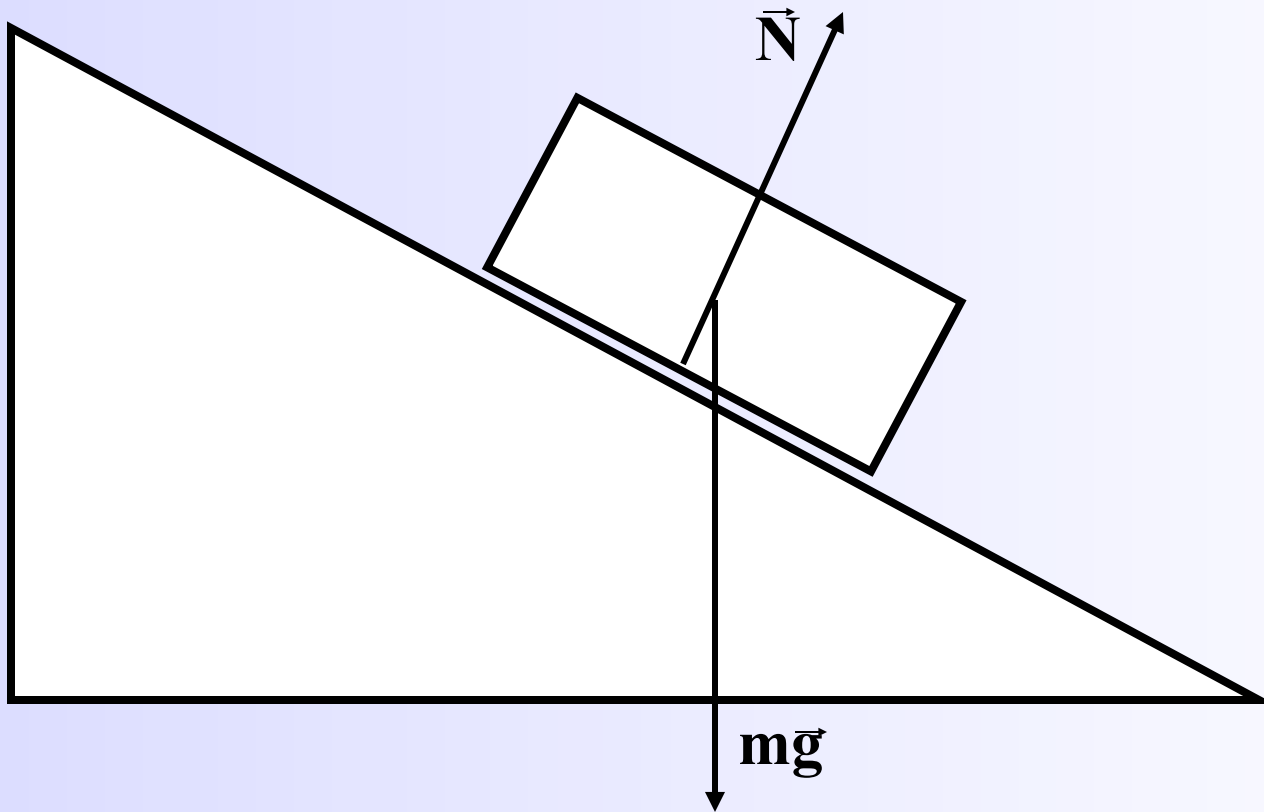
• 1.3 Liaisons holonomes et coordonnées généralisées

$$\begin{aligned}x_1 &= x_1(q, t), \\ \vdots \\ x_{3N} &= x_{3N}(q, t),\end{aligned}$$

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q, \cancel{t}) \quad (1.4)$$

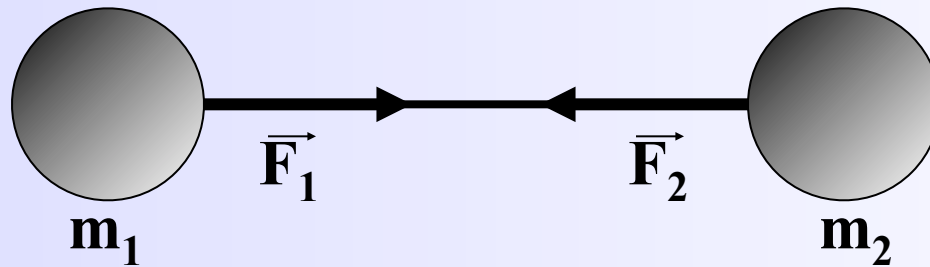
- 1.4 Généralisation du principe des travaux virtuels et le principe de d'Alembert

- 1.4 Généralisation du principe des travaux virtuels et le principe de d'Alembert

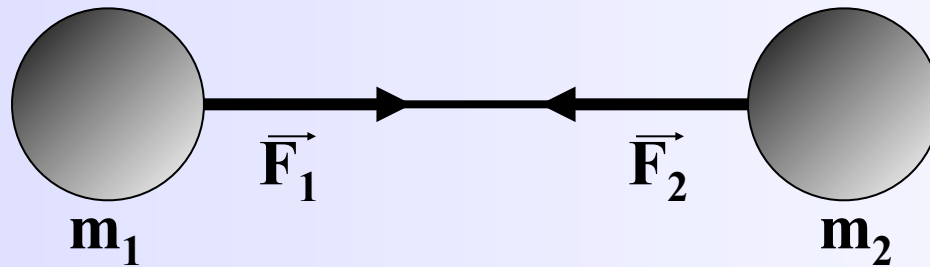


- 1.4 Généralisation du principe des travaux virtuels et le principe de d'Alembert

- 1.4 Généralisation du principe des travaux virtuels et le principe de d'Alembert

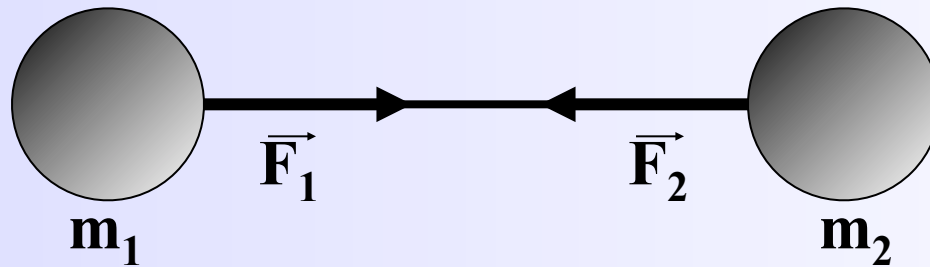


- 1.4 Généralisation du principe des travaux virtuels et le principe de d'Alembert



$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

- 1.4 Généralisation du principe des travaux virtuels et le principe de d'Alembert

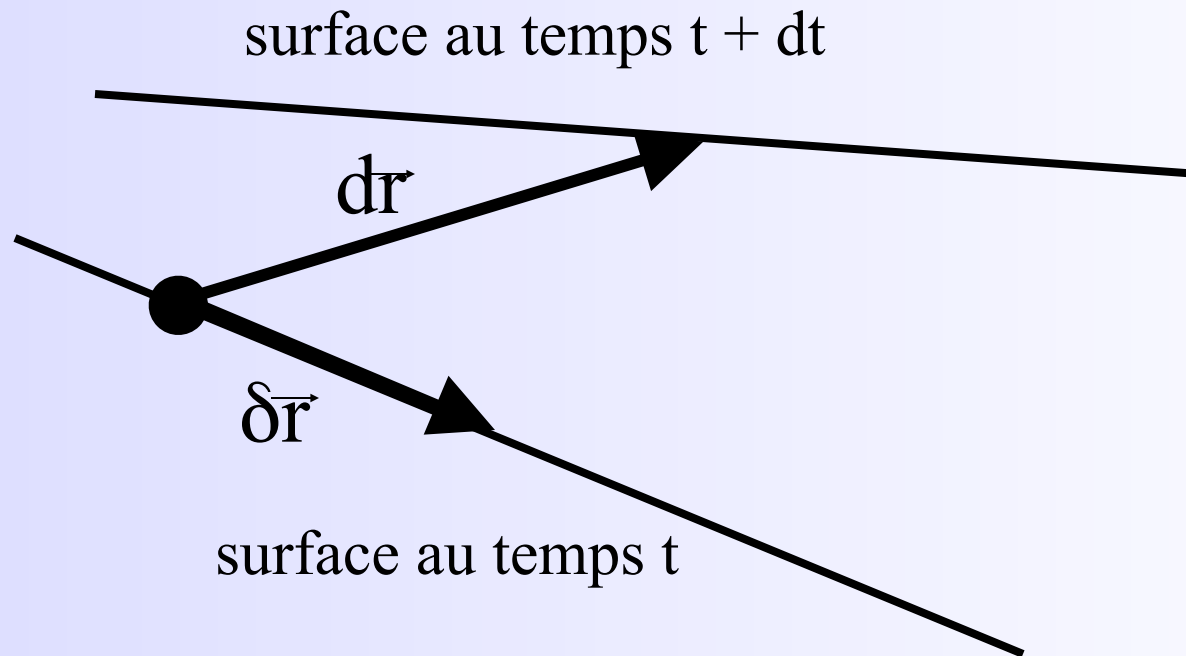


$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

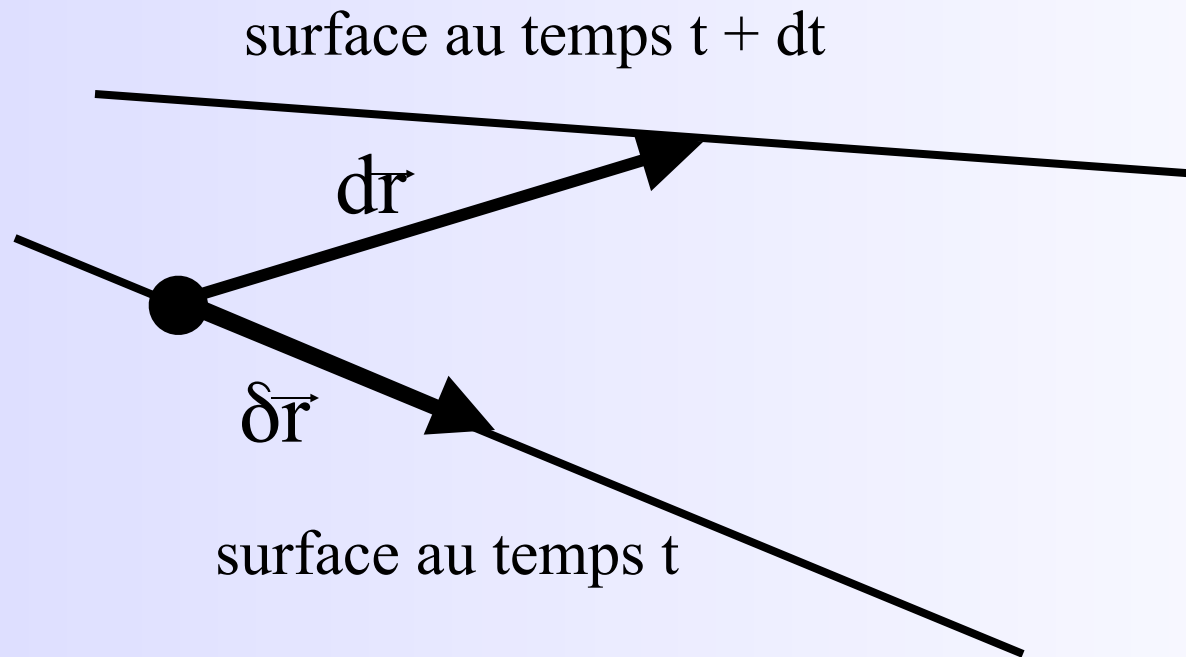
$$\delta W = \vec{F}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \delta \vec{r}_2$$

- 1.4 Généralisation du principe des travaux virtuels et le principe de d'Alembert

- 1.4 Généralisation du principe des travaux virtuels et le principe de d'Alembert



- 1.4 Généralisation du principe des travaux virtuels et le principe de d'Alembert



$$\delta W^{(\ell)} = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha}^{\ell} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha} = 0 \quad (1.5)$$

- 1.4 Généralisation du principe des travaux virtuels et le principe de d'Alembert

- 1.4 Généralisation du principe des travaux virtuels et le principe de d'Alembert

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha}^{\ell} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha} = 0$$

• 1.4 Généralisation du principe des travaux virtuels et le principe de d'Alembert

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha}^{\ell} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha} = 0$$



- 3N équations de Newton
- ℓ équations holonomes
- $f (= 3N - \ell)$ équations pour les forces de liaisons

• 1.4 Généralisation du principe des travaux virtuels et le principe de d'Alembert

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha}^{\ell} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha} = 0$$



- 3N équations de Newton
- ℓ équations holonomes
- $f (= 3N - \ell)$ équations pour les forces de liaisons

Soient 6N équations pour déterminer 6N inconnues (les $x_{\alpha i}$ et les $F_{\alpha i}^{\ell}$)

• 1.4 Généralisation du principe des travaux virtuels et le principe de d'Alembert

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha}^{\ell} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha} = 0$$



- 3N équations de Newton
- ℓ équations holonomes
- $f (= 3N - \ell)$ équations pour les forces de liaisons

Soient 6N équations pour déterminer 6N inconnues (les $x_{\alpha i}$ et les $F_{\alpha i}^{\ell}$)

Très compliqué !!!