Université de Liège

Physique expérimentale préparatoire aux sciences biomédicales
y compris l'introduction mathématique aux sciences expérimentales

M. Hoebeke, chargée de cours

Travaux dirigés

1e Cand. Sc. Med. et Sc. Dent.

N. D. Nguyen (nd.nguyen@ulg.ac.be)

Collectif de l'Enseignement de la Physique en Première Candidature

Année académique 2002-2003

Avertissement

L'efficacité des séances de travaux dirigés (répétitions) dépend du niveau de préparation de chacun. Du point de vue de l'étudiant, cela consiste notamment en une relecture préalable des concepts abordés au cours théorique. Ce fascicule comprend une introduction des outils mathématiques utiles à la résolution des exercices et des problèmes. A titre de rappel, un résumé succinct de la théorie est donnée au début de chaque sujet (section). Il est demandé aux étudiants d'apporter leur exemplaire de l'ouvrage de référence (*Physique*, J. Kane et M. Sternheim, Dunod 1999) au cours des séances de travaux dirigés, certaines figures n'étant pas reproduites dans ce recueil.

Table des matières

1 Introduction mathématique

1.1 Algèbre

Equation du premier degré

La forme générale d'une *équation du premier degré* a pour expression

$$ax + b = 0$$

où x est l'*inconnue* ; a, le *coefficient*, est un nombre réel différent de zéro et b, appelé le *terme indépendant*, est un nombre réel quelconque. Résoudre cette équation consiste à déterminer par des méthodes précises l'ensemble des valeurs de x qui vérifie cette équation.

Ex. 1 *Résoudre les équations suivantes :*

$$\frac{t+1}{2} - \frac{6t+7}{8} = \frac{4-3t}{5} - \frac{1}{8}$$
$$\frac{2u}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{4}u - 4\right) = u + \frac{27}{5}$$
$$\frac{3y-5}{2} - \frac{4y+1}{3} = 2 - \frac{3y+1}{4}$$
$$\frac{4}{3}(2t-3) + \frac{3}{4}\left(\frac{t}{2}+1\right) = \frac{1}{2}$$

Inéquation du premier degré

Une *inéquation du premier degré* prend la forme générale suivante

$$ax + b \leqslant 0$$

où le symbole d'inégalité peut également être : $<$, $>$, ou $\geqslant$. Les méthodes de résolution des équations du premier degré peuvent s'appliquer aux inéquations du premier degré. Il reste à noter que lors de la multiplication des deux membres d'une inégalité par un nombre réel λ, le signe d'inégalité reste inchangé si λ est positif. Si λ est négatif, le signe d'inégalité est renversé.

Ex. 2 *Résoudre les inéquations suivantes :*

$$10 - \frac{2t-6}{2} > \frac{2t}{5} - \frac{2t-17}{3}$$
$$\frac{3x-1}{5} - \frac{x+1}{2} < 1 - \frac{x}{7}$$

Equation du second degré

La forme générale d'une *équation du second degré* est

$$ax^2 + bx + c = 0$$

où le coefficient a est un nombre réel différent de zéro et où b et c sont des nombres réels quelconques. Pour résoudre une équation du second degré, il faut calculer le *réalisant* (ou discriminant) de l'équation. Celui-ci est donné par

$$\rho = b^2 - 4ac$$

Le réalisant permet en outre de déterminer le nombre de solutions. Les différents cas possibles suivant le signe de ρ sont discutés dans la Tab. 1.

$\rho < 0$	Pas de solution	-
$\rho = 0$	Une solution double	$x = -\frac{b}{2a}$
$\rho > 0$	Deux solutions	$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\rho}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\rho}}{2a}$

Tab. 1 Solutions d'une équation du second degré

Ex. 3 *Résoudre les équations suivantes :*

$$(x+1)(x+2) = 2$$
$$t^2 - (t+3) = 4$$
$$(5v-3)(v-5) = (2v+5)^2 + 90$$
$$5w^2 = 4w + 2$$
$$4y^2 - 9y - 9 = 0$$

1.2 Analyse

Fonctions du premier et du second degré

La forme générale d'une *fonction du premier degré* est donnée par

$$f(x) = ax + b$$

où a est un nombre réel différent de zéro et b est un nombre réel quelconque. Le graphique des fonctions du premier degré est toujours une droite. Le coefficient a représente la *pente* de la droite et b est l'*ordonnée à l'origine.*

Si $b = 0$, alors la droite passe par l'origine $(0, 0)$. Sinon, la droite passe par le point $(0, b)$. Si a est positif, alors la droite est croissante (elle "monte"). Dans le cas où a est négatif, elle est décroissante (elle "descend"). La Fig. 1 donne quelques exemples de représentation graphique d'une fonction du premier degré.

La pente d'une droite peut être obtenue à l'aide de la formule

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

où les couples $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ sont les coordonnées de deux points quelconques de la droite.

La forme générale d'une *fonction du second degré* est donnée par

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a est un nombre réel différent de zéro, b et c étant des nombres réels quelconques. Le graphique n'est plus une droite mais prend la forme d'une *parabole.* Le sens de la concavité est donnée par le signe de a. Si a est positif, la concavité est orientée vers le haut ($\smile$). Si a est négatif, la concavité est orientée vers le bas ($\frown$). La Fig. 2 donne quelques exemples de représentation graphique d'une fonction du second degré.

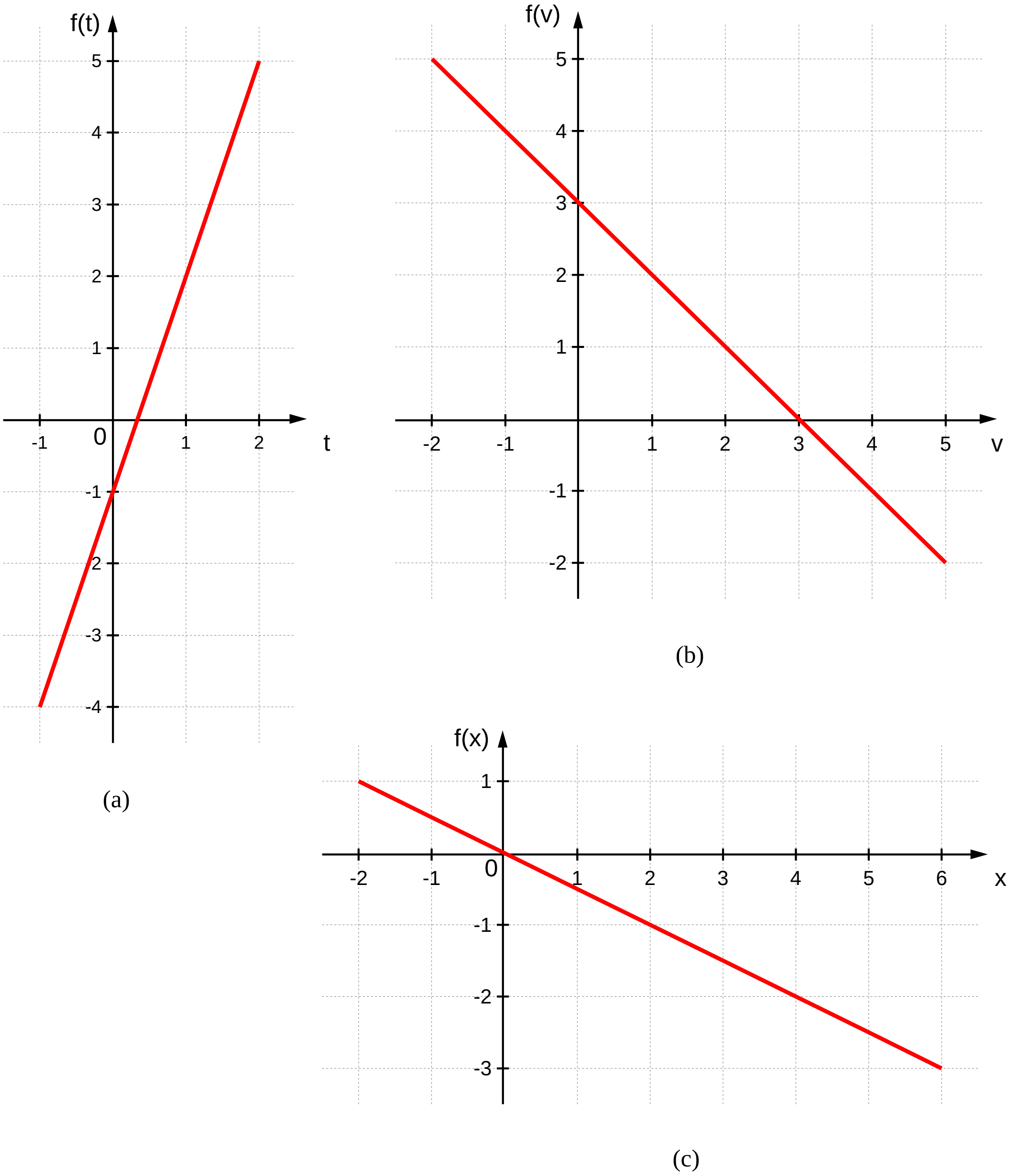
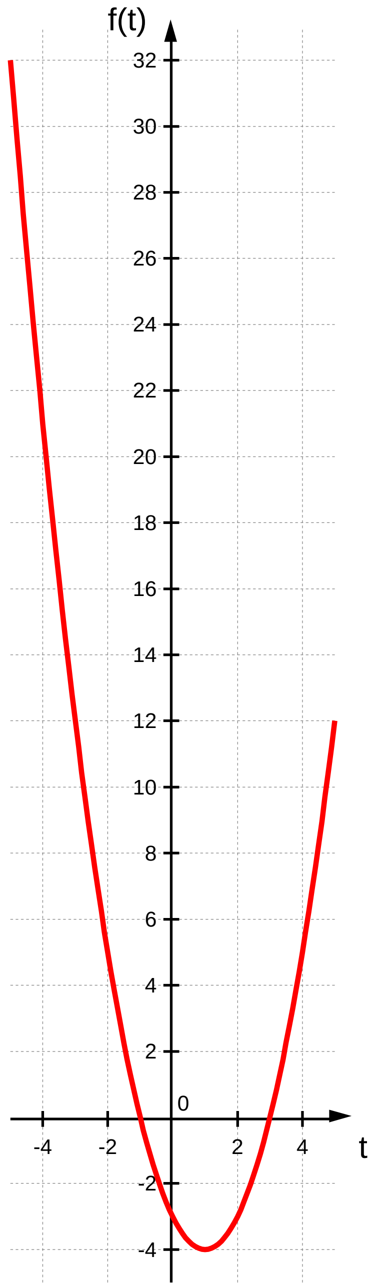
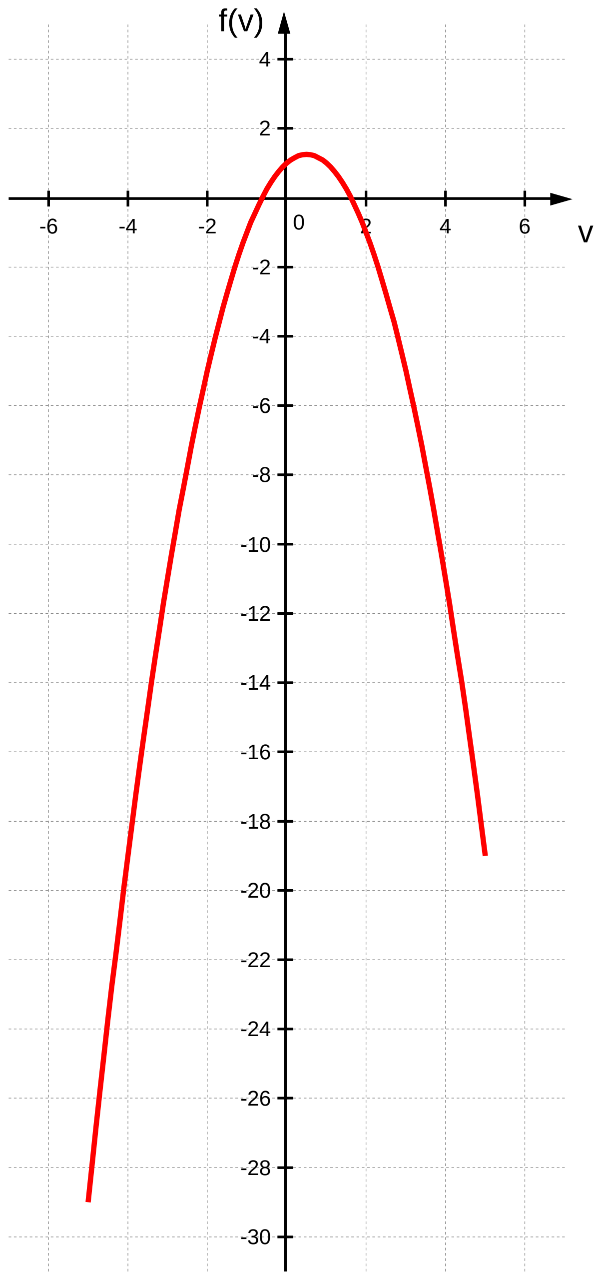


Fig. 1 Exemples de fonctions du premier degré : (a) $f(t) = 3t - 1$, (b) $f(v) = -v + 3$, (c) $f(x) = -\frac{1}{2}x$.



(a)



(b)

FIG. 2 Exemples de fonctions du second degré : (a) $f(t) = t^2 - 2t - 3$, (b) $f(v) = -v^2 + v + 1$.

Notion de dérivée d'une fonction

On appelle le *nombre dérivé* de $f(x)$ en a, s'il existe, le nombre réel

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si la fonction $f(x)$ possède un nombre dérivé fini en a, on dit alors qu'elle est *dérivable* en a. La fonction dérivée ou *dérivée*, notée $f'(x)$, est la fonction qui associe à un point x son nombre dérivé $f'(x)$.

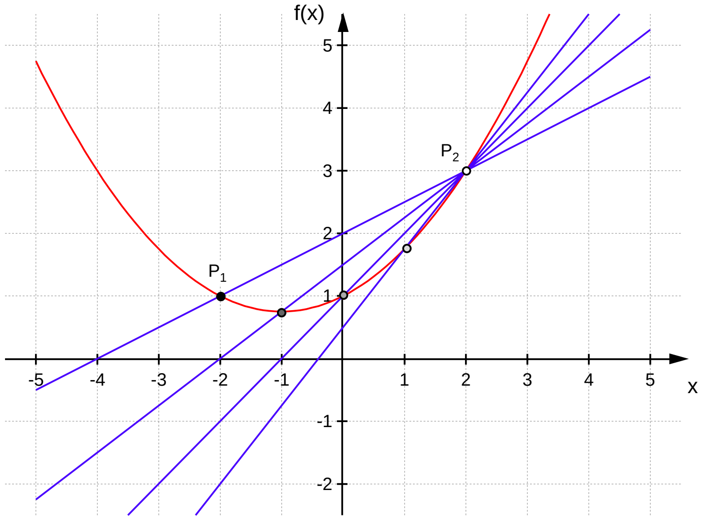


FIG. 3 Interprétation géométrique de la dérivée d'une fonction en un point.

L'interprétation géométrique de la dérivée est donnée à la Fig. 3. Considérons la fonction $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 1$. Cette fonction est dérivable en $x = 2$ (à admettre). Si on considère les deux points P_1 de coordonnées $(-2, 1)$ et P_2 de coordonnées $(2, 3)$, ils appartiennent au graphe de la fonction et la droite qui passe par ces deux points possède une pente donnée par

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{1 - 3}{-2 - 2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Si maintenant on fait varier le point P_1 le long de la courbe pour l'amener sur le point P_2, on constate que lorsque le point P_1 prend successivement pour coordonnées $(-1, \frac{3}{4})$, $(0, 1)$, et $(1, \frac{7}{4})$, les droites P_1P_2 tendent vers la tangente à la courbe au point P_2. Donc, à la limite, la droite P_1P_2 devient la tangente à la courbe en P_2. La pente de cette tangente peut s'exprimer par

$$\lim_{x_1 \to x_2} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(x_2)$$

où x_1 et x_2 désignent les abscisses de P_1 et P_2 respectivement. Le nombre dérivé $f'(x_2)$ apparaît dès lors comme la pente de la tangente à la courbe au point d'abscisse x_2. C'est l'interprétation géométrique de la dérivée en ce point.

Développement en série de Taylor

Le *développement en série de Taylor* de la fonction f au voisinage de x_0 est donné par

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x)\Big|_{x=x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2}\, f''(x)\Big|_{x=x_0} \\ &\quad + \frac{(x-x_0)^3}{6}\, f'''(x)\Big|_{x=x_0} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!}\, f^{(n)}(x)\Big|_{x=x_0} \end{aligned}$$

où $f^{(n)}(x)\Big|_{x=x_0}$ représente la dérivée d'ordre n de $f(x)$ en $x = x_0$, et $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ (*factorielle* de n).

Ex. 4 *Développer en série de Taylor, au voisinage de $t = 0$, $(1+t)^m$ et $\frac{1}{(1+t)^m}$.*

1.3 Trigonométrie

Angle orienté

Deux demi-droites $[sa$ et $[sb$ de même origine s définissent l'*angle orienté* $\widehat{asb}$ (Fig. 4). Le point s est appelé le *sommet* de l'angle, tandis que $[sa$ est la *demi-droite origine* et $[sb$ la *demi-droite extrémité.*

L'*amplitude* d'un angle est donnée par sa mesure en degré ou radian. L'angle droit a une amplitude de 90° ou $\frac{\pi}{2}$ [rad]. Le passage d'un système d'unité à l'autre s'effectue suivant les formules de la Tab. 2. Dans la Fig. 4, l'angle orienté $\widehat{asb}$ a pour mesure α.

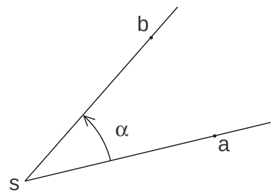


FIG. 4 Angle orienté

$$\begin{array}{ccc} \alpha\ [^\circ] & \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180^\circ}} & \alpha\ [\text{rad}] \\ \alpha\ [\text{rad}] & \xrightarrow{\times \frac{180^\circ}{\pi}} & \alpha\ [^\circ] \end{array}$$

TAB. 2 Conversion des unités de mesure d'angle.

Cercle et nombres trigonométriques

Le *cercle trigonométrique* (Fig. 5) est un cercle centré en l'origine d'un repère orthonormé. Son rayon est unitaire. Le demi-axe horizontal de droite (abscisses positives) est choisi comme demi-droite origine de tous les angles. L'orientation des angles rapportés au cercle trigonométrique est dans le sens anti-horloger ou sens trigonométrique. On y définit quatre quadrants notés I, II, III et IV. Un angle orienté $\widehat{\alpha}$ rapporté au cercle trigonométrique possède une infinité de mesures dont l'expression générale en radian s'écrit

$$\alpha + k\,(2\pi) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

La *mesure principale* d'un angle $\widehat{\alpha}$ est la mesure qui appartient à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

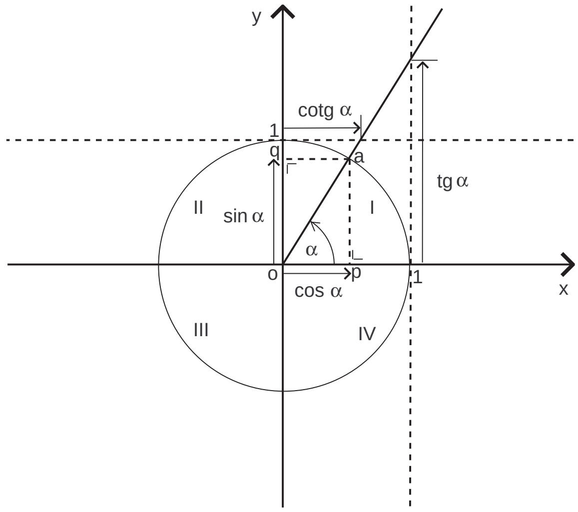


FIG. 5 Le cercle trigonométrique et les nombres trigonométriques.

L'abscisse et l'ordonnée du point d'intersection a de la demi-droite extrémité de l'angle de mesure α avec le cercle trigonométrique (Fig. 5) définissent respectivement le sinus ($\sin\alpha$) et le cosinus ($\cos\alpha$) de l'angle orienté $\widehat{\alpha}$. On définit également les nombres trigonométriques : $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ et $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

L'interprétation géométrique de $\operatorname{tg}\alpha$ et $\operatorname{cotg}\alpha$ est donnée à la Fig. 5 : $\operatorname{tg}\alpha$ est l'ordonnée du point d'intersection de la demi-droite extrémité de l'angle orienté $\widehat{\alpha}$ avec la droite verticale $x = 1$ tangente au cercle trigonométrique, et $\operatorname{cotg}\alpha$ est l'abscisse du point d'intersection de la demi-droite extrémité de l'angle orienté $\widehat{\alpha}$ avec la droite horizontale $y = 1$ tangente au cercle trigonométrique.

La relation fondamentale

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

peut être démontrée à l'aide du théorème de Pythagore dans le triangle *aop*.

Nombres trigonométriques des angles remarquables

La Tab. 3 donne les valeurs des nombres trigonométriques de quelques angles remarquables.

Angles associés

Les nombres trigonométriques des angles associés à l'angle $\widehat{\alpha}$ exprimés en fonction des nombres trigonométriques de $\widehat{\alpha}$ sont donnés à la Tab. 4.

Exercices

Ex. 5 *Placer sur le cercle trigonométrique les images des angles dont les mesures sont :* $\frac{95\pi}{6}$, $\frac{-93\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Ex. 6 *Exprimer en fonction de* $\cos x$ *ou* $\sin x$ *:* $\cos(25\pi - x)$, $\sin(-11\pi + x)$, $\sin(\frac{13\pi}{2} + x)$.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$	α
0°	0	1	0	$+\infty$	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{6}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\frac{\pi}{4}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$
90°	1	0	$+\infty$	0	$\frac{\pi}{2}$
180°	0	-1	0	$-\infty$	π
270°	-1	0	$-\infty$	0	$\frac{3\pi}{2}$

Tab. 3 Angles remarquables.

Ex. 7 *Donner les valeurs exactes de* $\cos\frac{40\pi}{3}$, $\sin\frac{-41\pi}{6}$.

Ex. 8 *On donne* $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, *calculer :* $\cos\frac{4\pi}{5}$, $\cos\frac{6\pi}{5}$, $\cos\frac{9\pi}{5}$.

1.4 Vecteurs

Notion de vecteur

Le *vecteur* est une entité mathématique caractérisée par une grandeur et une direction. Par contraste, un *scalaire* ne possède que la caractéristique de grandeur représentée par un nombre réel ordinaire. On désigne un vecteur par une lettre en caractère gras, comme **A** ou **b**, ou par une lettre surmontée d'une flèche, comme $\vec{s}$.

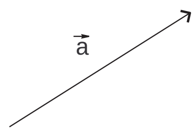


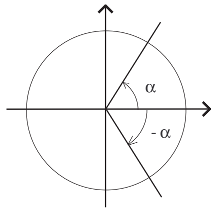
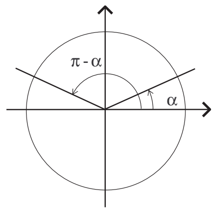
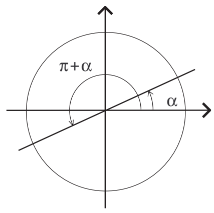
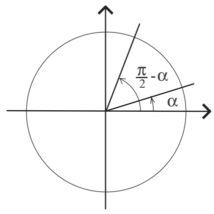
Fig. 6

Schématiquement, un vecteur est représenté par une flèche dont la longueur est proportionnelle à la grandeur du vecteur et dont l'orientation donne la direction du vecteur (Fig. 6). La grandeur du vecteur $\vec{a}$, appelée le *module* de $\vec{a}$, est désignée soit par la même lettre en caractères normaux (a) soit par $|\vec{a}|$ ou $|\mathbf{a}|$.

Addition vectorielle

L'addition vectorielle est illustrée à la Fig. 7. Pour additionner deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ (Fig. 7(1)), on reporte l'origine du vecteur $\vec{b}$ à l'extrémité du vecteur $\vec{a}$ (Fig. 7(2)). Une translation ne modifie pas la grandeur d'un vecteur. La somme $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ est représentée par le vecteur ayant pour origine celle du vecteur $\vec{a}$ et pour extrémité celle du vecteur $\vec{b}$ (Fig. 7(3)). L'addition vectorielle est commutative : elle peut s'effectuer dans un ordre quelconque ($\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$).

La soustraction vectorielle se ramène à une addition vectorielle. En effet, soustraire le vecteur $\vec{b}$ du vecteur $\vec{a}$ équivaut à ajouter à $\vec{a}$ l'opposé de $\vec{b}$: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. L'opposé

Angles opposés : leur somme vaut 0	$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$ $\mathrm{cotg}(-\alpha) = -\mathrm{cotg}\,\alpha$	
Angles supplémentaires : leur somme vaut π	$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$ $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$ $\mathrm{tg}(\pi-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$ $\mathrm{cotg}(\pi-\alpha) = -\mathrm{cotg}\,\alpha$	
Angles anti-supplémentaires : leur différence vaut π	$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$ $\mathrm{tg}(\pi+\alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$ $\mathrm{cotg}(\pi+\alpha) = \mathrm{cotg}\,\alpha$	
Angles complémentaires : leur somme vaut $\frac{\pi}{2}$	$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos\alpha$ $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha$ $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \mathrm{cotg}\,\alpha$ $\mathrm{cotg}(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$	

Tab. 4 Angles associés.

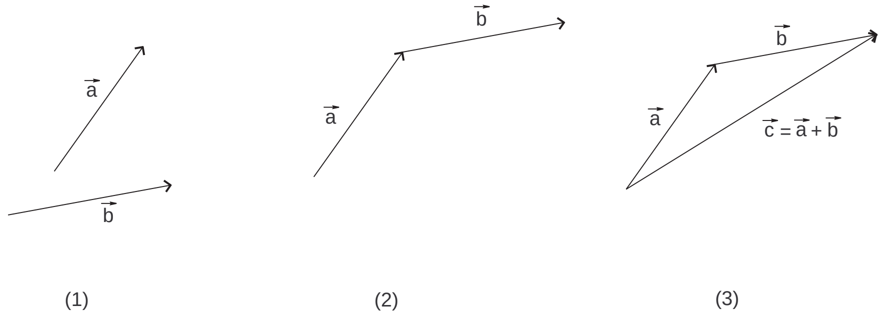


FIG. 7 Principe de l'addition vectorielle.

du vecteur $\vec{b}$, noté $-\vec{b}$, est le vecteur de même grandeur que $\vec{b}$, de même direction, mais de sens opposé.

Multiplication par un scalaire

Pour multiplier un vecteur $\vec{a}$ par un scalaire λ (nombre réel), il suffit de multiplier la grandeur de $\vec{a}$ par λ. La direction est conservée, mais le sens est inversé si $\lambda < 0$.

Composantes d'un vecteur

Un vecteur peut être également caractérisé par ses *composantes* dans un repère orthogonal donné. Après avoir déplacé l'origine du vecteur $\vec{a}$ vers l'origine du système d'axes x et y perpendiculaires du repère, les composantes de $\vec{a}$, notées a_x et a_y, s'obtiennent en projetant le vecteur $\vec{a}$ perpendiculairement à l'axe x et l'axe y, respectivement (Fig. 8).

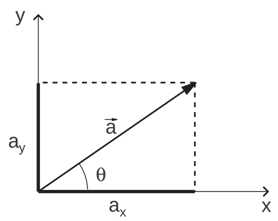


FIG. 8

Les relations entre les composantes de $\vec{a}$ d'une part et le module et l'angle θ que fait le vecteur avec l'axe x d'autre part peuvent être obtenues par application des propriétés des triangles rectangles (voir appendice) :

$$\begin{cases} a_x = a\,\cos\theta \\ a_y = a\,\sin\theta \end{cases}$$

Si les valeurs des composantes du vecteur sont données, il est possible de déterminer la grandeur et la direction. En effet, d'une part, par application du théorème de Pythagore, on a $a_x^2 + a_y^2 = a^2$, c'est-à-dire

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

D'autre part, parmi les relations dans un triangle rectangle, l'une permet d'écrire

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a_y}{a_x} \quad \Rightarrow \quad \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{a_y}{a_x}\right)$$

L'inspection du signe de a_x permet de déterminer de manière univoque l'angle θ. Les composantes a_x et a_y sont des nombres réels. Lorsque le vecteur $\vec{a}$ est dirigé vers les valeurs croissantes de x, a_x est positif. Lorsqu'il est dirigé vers les valeurs décroissantes, a_x est négatif. La composante a_y est positive lorsque $\vec{a}$ est dirigé vers les valeurs croissantes de y et négative quand $\vec{a}$ est dirigé vers les valeurs décroissantes de y.

La somme de deux ou plusieurs vecteurs peut s'exprimer en fonction des composantes. Pour cela, on définit un *vecteur unitaire* $\vec{e_x}$ de longueur égale à 1 et dirigé suivant les valeurs croissantes de x. De la même manière, on définit un vecteur unitaire $\vec{e_y}$, dirigé suivant les valeurs croissantes de y. Tout vecteur $\vec{a}$ peut s'écrire, dans le repère orthogonal muni de ces vecteurs unitaires, sous la forme

$$\vec{a} = a_x\,\vec{e_x} + a_y\,\vec{e_y}$$

Si le vecteur $\vec{b}$ s'écrit $\vec{b} = b_x\,\vec{e_x} + b_y\,\vec{e_y}$, alors le vecteur $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ s'écrit :

$$\vec{c} = \underbrace{(a_x + b_x)}_{\equiv c_x}\,\vec{e_x} + \underbrace{(a_y + b_y)}_{\equiv c_y}\,\vec{e_y}$$

Les composantes du vecteur $\vec{c}$ sont donc les sommes des composantes des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Exercices

Ex. 9 (K&S 2-3) *Un vecteur a une composante suivant l'axe des x qui vaut $a_x = -10$ et une composante suivant l'axe des y qui vaut $a_y = +3$. (a) Dessiner un système d'axes et positionner le vecteur $\vec{a}$; (b) calculer la grandeur et la direction de ce vecteur.*

Ex. 10 (K&S 2-2) *Dans la Fig. 2.18, quelle doit être la valeur de l'angle θ pour que le vecteur $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ ait (a) une grandeur minimum ; (b) une grandeur maximum ? (c) Que vaut $|\vec{C}|$ lorsque $\theta = 90°$?*

Ex. 11 (K&S 2-12) *Dans le cas des vecteurs de la figure 2.22, évaluer la grandeur et la direction de (a) $\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$; (b) $\mathbf{E} = \mathbf{A} - \mathbf{B} - \mathbf{C}$.*

Ex. 12 *Déterminez les composantes du vecteur $\vec{F}$ dans les système de coordonnées $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ et $(\vec{e'}_x, \vec{e'}_y)$ (Fig. 9). On donne $F = 5$, $\theta = 60°$ et $\phi = 40°$.*

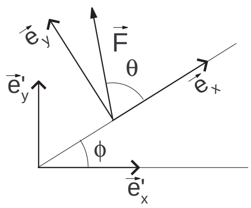


Fig. 9

2 Cinématique du point matériel

2.1 Formulaire

Accélération *moyenne* :

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Accélération *instantanée* :

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

Vitesse *moyenne* :

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Vitesse *instantanée* :

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Relation accélération-position :

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

Mouvement rectiligne uniforme (MRU) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a & = & 0 \\ v & = & v_0 \text{ (constante)} \\ x & = & x_0 + v_0\ (t - t_0) \end{array} \right.$$

Mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a & = & \text{constante} \\ v & = & v_0 + a\ (t - t_0) \\ x & = & x_0 + v_0\ (t - t_0) + \frac{1}{2}\ a\ (t - t_0)^2 \end{array} \right.$$

Unités MKSA :

Accélération	a	m/s^2
Vitesse	v	m/s
Position	x	m
Temps	t	s

2.2 Remarques

La résolution d'un problème de cinématique nécessite la détermination de la *loi du mouvement* dans un système de référence choisi, c'est-à-dire l'expression mathématique reliant l'espace (x, à une dimension) au temps (t). Si les conditions initiales (position et vitesse initiales), ainsi que le type de mouvement (MRU ou MRUA) sont connus, le mouvement du point matériel est complètement déterminé.

Dans l'étude des problèmes à deux dimensions (soient x et y, les coordonnées du point matériel dans un système de référence donné), le type de mouvement peut être différent pour chaque coordonnée : le point matériel peut, par exemple, être soumis à un MRU suivant la direction de x et à un MRUA suivant la direction de y. C'est le cas pour l'étude des projectiles. Par ailleurs, l'*équation de la trajectoire* s'obtient en éliminant[1] le temps t entre les lois du mouvements pour x et pour y.

La position, la vitesse et l'accélération sont des quantités *vectorielles*. Cette précision est particulièrement importante dans les problèmes à deux dimensions, où la connaissance des bases du calcul vectoriel est nécessaire. Dans les problèmes à une dimension, il est courant de ne pas mentionner la nature vectorielle de ces grandeurs. Par ailleurs, dans la résolution des problèmes à deux dimensions, la méthode de décomposition suivant les axes de coordonnées permet de se retrouver avec des équations purement scalaires.

2.3 Problèmes

Prob. 1 (K&S 1-21) *A partir du graphe de la figure 1.11 donnant la position d'un objet en fonction du temps, évaluer la vitesse moyenne entre $t = 0$ s et (a) $t = 10$ s ; (b) $t = 20$ s ; (c) $t = 40$.*

Prob. 2 (K&S 1-46) *Un obus anti-aérien est tiré à la verticale avec une vitesse initiale de 500 m/s. (a) Calculer la hauteur maximum de l'obus. (b) Quel temps lui faut-il pour atteindre cette hauteur ? (c) A quel moment l'obus atteindra-t-il une hauteur de 1000 m ?*

Prob. 3 (K&S 1-48) *Une pierre tombe d'une falaise de 60 m. (a) Trouver la vitesse moyenne pendant les 3 premières secondes de la chute. (b) A quel moment la vitesse instantanée sera-t-elle égale à la vitesse moyenne évaluée en (a) ? (c) Quel temps faut-il à la pierre pour atteindre le sol ?*

Prob. 4 (K&S Exemple 1.15) *A partir des données de la Tab. 5, trouver (a) la vitesse v_t d'un sauteur au moment où il quitte le sol (vitesse d'échappement), (b) l'accélération a_t à ce même moment. Utiliser, après l'avoir démontrée, la relation $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$.*

	Distance d'accélération (d)	Hauteur verticale (h)
Homme	0,5	1,0

Tab. 5 Extrait de la table 1.4 (en mètres)

[1] Cela consiste, par exemple, à isoler le temps t dans la loi du mouvement pour la coordonnée x et procéder à sa substitution dans la loi du mouvement pour la coordonnée y, dont l'expression mathématique ne renfermera plus que les variables d'espace x et y.

Prob. 5 (K&S 1-71) *Dans le feuilleton télévisé* L'homme qui valait six millions de dollars, *le colonel Austin a les capacités d'un surhomme. Au cours d'un épisode, il tente d'attraper un homme qui s'enfuit dans une voiture de sport. La distance entre eux est de 100 m au moment où la voiture commence son accélération. Cette accélération est constante et vaut 5 m/s^2. Le colonel Austin court à la vitesse de 30 m/s. Montrer qu'il ne parviendra pas à rattraper la voiture. Déterminer la distance minimale qui le séparera de la voiture. (Question subsidiaire) A quelle vitesse minimale devrait courir Austin pour rattraper la voiture ?*

Prob. 6 *Des secouristes veulent larguer des provisions à des alpinistes isolés sur la crête d'une montagne, 200 m plus bas (cfr. Fig. 10). Si l'avion se déplace horizontalement à une vitesse de 250 km/h (69 m/s),*

(a) A quelle distance horizontale en avant des alpinistes doivent-ils lancer les provisions ?

(b) Si l'avion larguait les provisions à une distance de 400 m en avant du point visé, quelle vitesse verticale supplémentaire devrait-on leur imprimer (vers le haut ou vers le bas ?) pour qu'elles tombent précisément à l'endroit souhaité ?

(c) Dans la situation décrite en (b), à quelle vitesse vont-elles toucher le sol ?

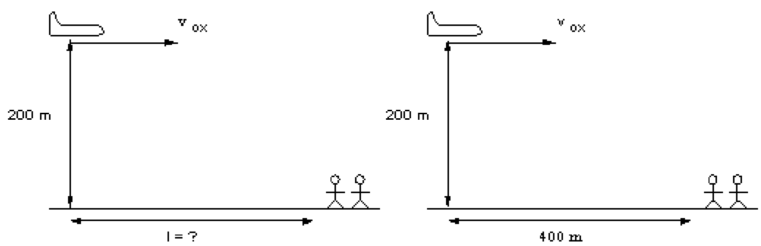


FIG. 10

Prob. 7 *On frappe une balle de tennis à partir de la ligne de fond (située en $x_0 = 0$) et $y_0 = 1$ m au-dessus du sol dans une direction faisant un angle $\theta = 9°$ avec l'horizontale.*

(a) Calculer la portée du tir (abscisse x_i du point d'impact). La balle est-elle in *ou* out *? La longueur du terrain vaut $x_T = 23,77$ m. Négliger la résistance de l'air.*

(b) A quelle distance Δy la balle passe-t-elle au-desus du filet ? Le filet se trouve à une distance $x_F = 11,89$ m et sa hauteur vaut 0,915 m.

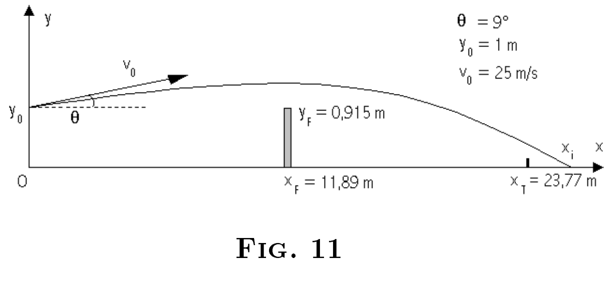


FIG. 11

3 Dynamique

3.1 Introduction

La dynamique est l'étude de la relation entre le mouvement d'un corps et les causes qui le produisent.

Une *force* est représentée par un vecteur. Elle est caractérisée par une grandeur (intensité), une direction et un sens.

3.2 Enoncés des lois de Newton pour la dynamique

1. Si aucune force résultante n'agit sur un objet :
   - Un objet au repos reste au repos
   - Un objet en mouvement continue à se mouvoir avec une vitesse constante en grandeur et direction
2. La force $\vec{F}$ nécessaire pour fournir une accélération $\vec{a}$ à un objet de masse m est donnée par
$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$
3. Si un objet exerce une force $\vec{F}$ sur un second objet, le second exerce, sur le premier une force égale en grandeur mais opposée $-\vec{F}$.

3.3 Le poids et le poids effectif

Le poids d'un objet représente la force gravitationnelle qui agit sur cet objet. Pour un objet situé au voisinage de la surface terrestre, cette force est essentiellement due à l'attraction de la terre. Sous l'hypothèse que les masses d'inertie (intervenant dans la deuxième loi de Newton) et gravitationnelle (intervenant dans la loi de la gravitation universelle) sont égales, l'accélération $\vec{g}$ qui résulte de la force gravitationnelle exercée par la terre sur l'objet est indépendante de la masse de cet objet.

Bien que la valeur du poids d'une personne ne varie pas suivant que celle-ci subit ou non une accélération supplémentaire $\vec{a}$, la perception qu'elle a de son propre poids est déterminée par les forces exercées par le sol ou tout autre support. Or, ces forces ne sont pas égales au poids lorsque la personne est en accélération.

Le *poids effectif* d'une personne ou d'un objet, noté $\vec{w}^{\mathrm{e}}$, est défini comme étant la force totale que cette personne ou cet objet exerce sur une balance. Cette force est égale et opposée à la force $\vec{S}$ exercée par la balance sur la personne ou sur l'objet. De façon générale, le poids effectif d'un corps de masse m en accélération $\vec{a}$ est donné par

$$\vec{w}^{\mathrm{e}} = m\vec{g} - m\vec{a}$$

3.4 Le frottement

Lorsqu'une force est appliquée à un objet au repos sur une surface et que cette force dépasse la force de frottement statique maximum, $\vec{f_s}(\mathrm{max})$, il commence à se mouvoir. Expérimentalement, on montre que $\vec{f_s}$ est indépendante de l'aire de contact entre l'objet et la surface qui le supporte. Sa grandeur est proportionnelle à celle de la force normale $\vec{N}$, la constante de proportionnalité μ_s étant appelé le *coefficient de frottement statique* (en règle générale, $\mu_s < 1$) :

$$f_s(\max) = \mu_s\ N$$

La force de glissement, ou force de frottement cinétique, $\vec{f_c}$ est inférieure en grandeur à $f_s(\max)$. Elle est aussi indépendante de l'aire de contact et proportionnelle à la force normale N :

$$f_c = \mu_c\ N$$

où μ_c est le *coefficient de frottement cinétique* ($\mu_c < \mu_s$). Il est pratiquement indépendant de la vitesse de l'objet.

3.5 Problèmes

Prob. 8 (K&S 3-50) *Au cours d'une collision, une automobile, dont la masse est de 1000 kg, passe d'une vitesse initiale de 20 m/s, à une vitesse nulle, sur une distance de 2 m, avec une décélération constante. (a) Que vaut la décélération de la voiture ? (b) Quelle est la force résultante qui agit sur la voiture durant la collision ?*

Prob. 9 (K&S 3-89) *Une fillette, dont la masse est de 40 kg, descend à ski une pente qui forme un angle de 37 ° avec l'horizontale (négliger la résistance de l'air). Si le coefficient de frottement cinétique entre ses skis et la neige vaut 0,1, que vaut son accélération ?*

Prob. 10 (K&S 3-91) *Dans la figure 3.25, les ficelles et les poulies ont des masses négligeables et le coefficient de frottement cinétique entre le bloc et la surface horizontale vaut 0,1. Evaluer (a) la tension dans les ficelles ; (b) l'accélération du système.*

Prob. 11 *Le système représenté à la Fig. 12 est composé de deux masses identiques et est initialement au repos. Les angles des plans inclinés valent respectivement 55° et 30°. Quelle est la valeur minimale du coefficient de frottement qui permet de conserver l'état de repos ? Les masses de la corde et de la poulie sont négligeables.*

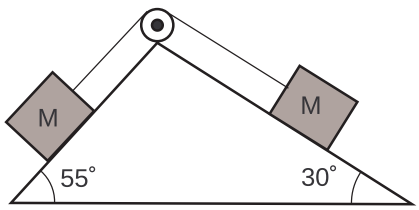


Fig. 12

Prob. 12 *Un bloc de 10 kg est relié à un autre bloc au moyen d'une corde et d'une poulie de masses négligeables. Le coefficient de frottement cinétique entre le bloc et le plan est de 0,2. Le bloc de 10 kg monte sur un plan incliné à 37 ° pendant que le bloc de 5 kg descend verticalement.*

(a) Evaluer la force normale exercée par le plan sur le bloc de 10 kg.
(b) Quelle est l'accélération du système ?
(c) Que vaut la tension dans la corde ?
(d) Si le système part du repos, où sera le bloc après 0,5 s ?

4 Statique

La *statique* est l'étude des forces qui s'exercent sur un corps en *équilibre* et au *repos*.

4.1 Les conditions d'équilibre

Le corps étudié est soit un point matériel ou un solide rigide (un objet idéal dont le volume, la forme et les dimensions ne varient pas lorsqu'il est soumis à une force.)

- Dans le cas du *point matériel*, la condition d'équilibre est que la résultante des forces doit être nulle ($\vec{F} = 0$).

- Dans le cas du *solide*, les conditions d'équilibre sont :
  1. La résultante des forces agissant sur le solide doit être nulle : $\vec{F} = 0$.
  2. Le moment résultant des forces appliquées au solide, calculé par rapport à un point quelconque, doit être également nul ($\vec{\tau} = 0$).

4.2 Le moment d'une force

Le moment d'une force $\vec{F}$, appliquée au point A, par rapport à un point quelconque O (Fig. 13), est un vecteur $\vec{\tau}$ donné par :

$$\vec{\tau} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$$

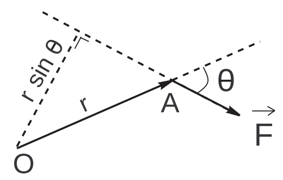


Fig. 13

Le moment de force $\vec{\tau}$ est le produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{F}$. Il s'agit donc d'un vecteur qui est

- perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{F}$.

- sa grandeur est donnée par
  $$\tau = r\ F\ \sin\theta$$
  où $r = |\overrightarrow{OA}|$ et θ désigne l'angle compris entre $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{F}$. La distance $r\ \sin\theta$ est la distance $r_\perp$ du point O à sa projection orthogonale sur la droite qui porte le vecteur force $\vec{F}$. Dès lors, on peut aussi exprimer la grandeur du moment de force par
  $$\tau = r_\perp F$$

- son sens est obtenu en utilisant la règle des doigts de la main droite.

4.3 Les leviers : avantage mécanique

L'*avantge mécanique* (A. M.) d'un levier s'exprime par le rapport de la force résistante $\vec{F}_R$ par la force appliquée $\vec{F}_A$:

$$\text{A. M.} = \frac{F_R}{F_A}$$

Si les forces sont à angle droit par rapport au levier, on a A. M. $= \frac{x_R}{x_A}$.

4.4 Problèmes

Prob. 13 (K&S 4-12) *La Fig. 4.34 montre l'avant-bras considéré dans l'exemple 4.4. La personne tient en main un poids de 12 N ($\vec{w}_1$). (Le poids de l'avant-bras est représenté par $\vec{w}$.) (a) Evaluer la force $\vec{T}$ exercée par le biceps et la force $\vec{E}$ exercée par l'articulation du coude. (b) Dans l'exemple 4.4, on a trouvé que lorsque $w_1 = 0$ N, $T = 36$ N et $E = 24$ N. Pourquoi les forces sont-elles plus que doublées dans ce cas-ci ?*

Prob. 14 (K&S 4-45) *Le muscle deltoïde détermine l'élévation de la partie supérieure du bras (Fig. 4.51). (a) Trouver la tension T exercée par le muscle et les composantes R_x et R_y de la force exercée par l'articulation de l'épaule. (b) Quel est l'avantage mécanique du muscle pour soulever le bras ?*

Prob. 15 (K&S 4-49) *Dans la Fig. 4.53, le poids de la partie supérieure du corps vaut $w = 490$ N. Evaluer la force T exercée par les muscles du dos et les composantes R_x et R_y de la force R exercée par le sacrum si le poids w_1 vaut (a) 0 ; (b) 175 N.*

Prob. 16 (K&S 4-51) *Un serpent exerce une force musculaire $M = 5$ N (Fig. 4.54a). M agit à une distance de 0,03 m de l'articulation et la force de morsure vaut 2 N. Trouver (a) la distance entre l'articulation et la ligne d'action de la force de morsure ; (b) la force exercée par l'articulation de la mâchoire.*

Prob. 17 *Dans le dispositif statique de la Fig. 14, les poulies et les cordes sont de poids négligeables. Si le poids 1 est de 15 N et le poids 2 est de 31 N et les deux angles sont $\theta = 45\,°$ et $\phi = 20\,°$, déterminer la valeur du poids 3. Vérifier que le système est en équilibre.*

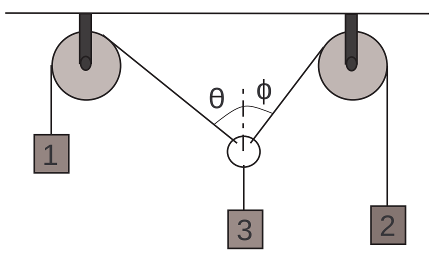


Fig. 14

Prob. 18 (K&S 4-40) *L'homme de la Fig. 4.49 a une masse de 100 kg. Ses bras sont tendus latéralement et il tient dans une main une masse M. (a) Trouver les positions horizontale et verticale du centre de gravité de l'homme lorsqu'il tient la masse M. (Choisir comme origine le point milieu entre les pieds). (b) Quelle masse maximum l'homme peut-il tenir sans basculer ?*

Prob. 19 (K&S 4-37) *La tension T vaut 20 N à chaque extrémité de la chaîne représentée dans la Fig. 4.46. Quel est le poids de la chaîne ?*

Prob. 20 *L'enseigne d'un magasin est suspendue à une barre de longueur $L = 1,2$ m, selon le schéma de la Fig. 15. La barre est elle-même fixée au mur par un pivot et maintenue par un câble. Si la masse de l'enseigne est $M = 20$ kg et celle de la barre est $m = 10$ kg, calculer (a) la tension dans le câble et (b) la force au niveau du pivot.*

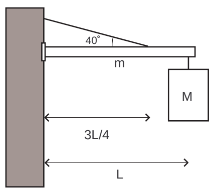


Fig. 15

Prob. 21 *Une personne de masse $m = 50$ kg est debout sur ses 2 pieds au bord d'une marche d'escalier (Fig. 16(a)). Le pied subit la réaction normale du sol $\vec{N}$, la réaction du tibia $\vec{R}$ et la tension du tendon d'Achille $\vec{T}$.*

1. *Dans le cas où la plante des pieds est horizontale, déterminer les valeurs de R et T. Les trois forces sont supposées verticales, comme représenté dans le schéma de la Fig. 16(b).*
2. *Dans le cas où la plante des pieds fait un angle de 30 ° avec l'horizontale, déterminer R et T. Les trois forces sont encore supposées verticales, comme représenté dans le schéma de la Fig. 16(c). Y a-t-il, oui ou non, une différence par rapport à la situation du point 1 ? Expliquez pourquoi.*

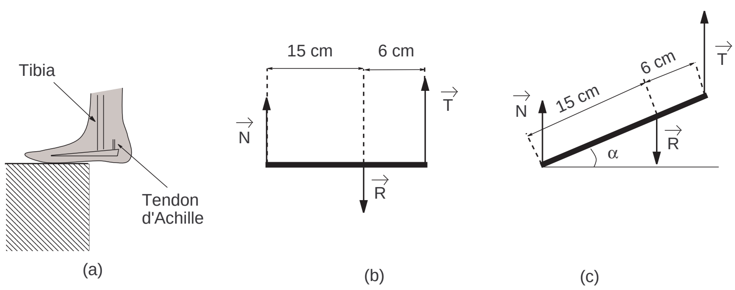


Fig. 16

5 Le mouvement circulaire

5.1 Les variables angulaires

La position angulaire θ

$$\theta = \frac{l}{r}$$

où l est la longueur de l'arc de cercle délimité par l'angle θ est r le rayon du cercle.

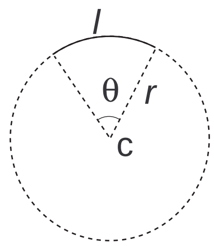


Fig. 17

La vitesse angulaire moyenne

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

La vitesse angulaire instantanée

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

La vitesse angulaire est une grandeur vectorielle $\vec{\omega}$ dont la direction est celle de l'axe de rotation et le sens est déterminé par la règle de la main droite.

L'accélération angulaire instantanée

$$\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$$

Unités :

Position angulaire	θ	rad
Vitesse angulaire	ω	rad/s
Accélération angulaire	α	rad/s^2

5.2 Relations entre les coordonnées angulaires et linéaires

$$l = r\ \theta$$

$$v = r\ \omega$$

$$a_T = r\ \alpha$$

où a_T désigne l'accélération tangentielle (voir ci-dessous)

5.3 Le mouvement circulaire uniforme (MCU)

La vitesse angulaire $\vec{\omega}$ est constante en grandeur et direction. La vitesse linéaire $\vec{v}$ est constante en grandeur, mais pas en direction. Il existe une accélération $\vec{a}_c$ dite *centripète* ou *normale*, dirigée vers le centre de la trajectoire circulaire et qui vaut en grandeur

$$a_c = \omega^2 r$$

Un corps de masse m décrivant un MCU est soumis à la *force centripète* $\vec{F} = m\vec{a}_c$, dirigée selon l'accélération et dont le module vaut

$$F = m\frac{v^2}{r}$$

Caractéristiques du MCU :

$$\begin{cases} \alpha & = & 0 \\ \omega & = & \text{constante} \\ \theta & = & \theta_0 + \omega\ (t - t_0) \\ v & = & \omega\ r \quad (\text{constante}) \\ a_c & = & \omega^2 r = \frac{v^2}{r} \end{cases}$$

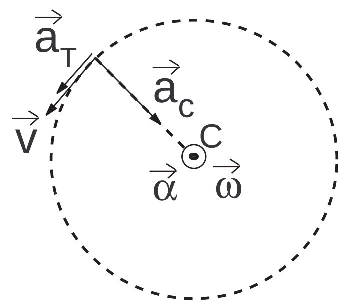


Fig. 18

5.4 Le mouvement circulaire uniformément accéléré (MCUA)

L'accélération angulaire α est constante. En plus de l'accélération centripète, on a une accélération tangentielle, dirigée le long de la tangente à la trajectoire et de grandeur

$$a_T = \alpha\ r$$

Caractéristiques du MCUA :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\alpha & = & \text{constante}\\ \omega & = & \omega_0 + \alpha\ (t - t_0)\\ \theta & = & \theta_0 + \omega_0\ (t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha\ (t - t_0)^2\\ v & = & \omega\ r\ \ \text{(non constante)}\\ a_c & = & \omega^2\ r = \frac{v^2}{r}\ \ \text{(non constante)}\\ a_T & = & \alpha\ r\end{array}\right.$$

5.5 La dynamique des mouvements de rotation autour d'un axe fixe

Un solide de moment d'inertie I soumis à un moment de force $\vec{\tau}$ subit une accélération angulaire $\vec{\alpha}$ selon la loi de la dynamique :

$$\vec{\tau} = I\ \vec{\alpha}$$

Il s'agit de la loi de Newton pour les mouvements de rotation, homologue à $\vec{F} = m\vec{a}$, valable pour les mouvements de translation.

Pour un point matériel de masse m situé à une distance r de l'axe de rotation, le moment d'inertie par rapport à cet axe a pour expression

$$I = m\ r^2$$

Les moments d'inertie de quelques solides de forme géométrique définie sont donnés dans le tableau 5.3 (K&S p. 106).

Pour un corps solide de masse et de forme quelconque, le moment d'inertie a pour expression

$$I = m\ k^2$$

où k désigne le *rayon de giration*.

5.6 Problèmes

Prob. 22 (K&S 5-30) *(a) Trouver l'accélération radiale au bord d'un disque de phonographe de 0,15 m de rayon qui effectue 78 tours par minute. (b) Le disque s'arrête en 2 s avec une décélération angulaire uniforme. Trouver la décélération tangentielle au bord du disque et la décélération angulaire.*

Prob. 23 (K&S 5-35) *Une voiture en accélération uniforme part du repos et atteint la vitesse de 20 m/s en 15 secondes. Les roues ont un rayon de 0,3 m. (a) Que vaut la vitesse angulaire finale des roues ? (b) Que vaut l'accélération angulaire des roues ? (c) Que vaut le déplacement angulaire pendant l'intervalle de temps de 15 secondes ?*

Prob. 24 (K&S 5-58) *Une pierre de 2 kg est attachée à une corde d'un mètre de long. On fait tourner la pierre dans un plan horizontal. La corde forme un angle de 30 ° avec l'horizontale. (a) Que vaut la tension dans la corde ? (b) Que vaut la vitesse de la pierre ?*

Prob. 25 (K&S 5-66) *Un bloc dont la masse est de 10 kg est placé sur une surface horizontale. Le coefficient de frottement cinétique vaut 0,1. Une ficelle de masse négligeable est attachée au bloc et passe sans frottement dans la gorge d'une poulie. On suspend à l'autre extrémité de la ficelle un bloc dont la masse est de 20 kg. Lorsque le système est libéré, il se déplace de 2 m en 1 seconde. Que vaut la masse de la poulie s'il s'agit d'un cylindre solide ?*

Prob. 26 (K&S 5-67) *Deux blocs dont les masses valent respectivement 10 et 30 kg sont suspendus de part et d'autre d'une poulie par une ficelle de masse négligeable. La poulie a une masse de 3 kg, un rayon de 0,1 m et un rayon de giration de 0,08 m. Si le système possède une accélération de 3 m/s^2, quel est le moment des forces de frottement dans le roulement de la poulie ?*

6 Travail, Energie, Puissance

6.1 Définitions et principe de conservation

- Le travail élémentaire dW qu'effectue une force $\vec{F}$ en déplaçant son point d'application d'une distance ds vaut :

  $$\mathrm{d}W = F_s\ \mathrm{d}s = F\ \cos\theta\ \mathrm{d}s$$

  où F_s désigne la projection de $\vec{F}$ sur le vecteur déplacement et θ est l'angle compris entre la force $\vec{F}$ et le vecteur déplacement. Le travail W (unité : le Joule [J]) est l'intégrale de dW calculée de la position de départ A à la postion d'arrivée B :

  $$W = \int_A^B F_s\ \mathrm{d}s = \int_A^B \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

  Cas particulier important où la force est constante et le déplacement linéaire :

  $$W = F\ \cos\theta\ s = F_s\ s = \vec{F}\cdot\vec{s}$$

  Remarque : Le travail est une quantité *scalaire.*

- La puissance moyenne $\bar{P}$ est le rapport du travail ΔW effectué au cours de l'intervalle de temps Δt :

  $$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

  La puissance instantanée :

  $$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$$

  La puissance s'exprime en Joule par seconde, définissant le Watt [W]. La puissance développée par une force déplaçant son point d'application à une vitesse v :

  $$P = F_s\ v$$

- L'énergie cinétique K (unité : [J]) d'un objet de masse m mesure le travail que cet objet amené à une vitesse v peut effectuer grâce à son mouvement. Elle a pour expression :

  $$K = \frac{1}{2}\ m\ v^2$$

  La variation d'énergie cinétique ΔK d'un objet est le travail W effectué sur cet objet par toutes les forces qui agissent sur lui :

  $$\Delta K = W$$

– Le travail effectué par une *force conservative* agissant sur un objet lors du déplacement de sa position initiale à sa position finale est égal, mais de signe contraire, à la variation d'*énergie potentielle* de l'objet :

$$W = -\Delta U = -(U_f - U_i)$$

L'énergie potentielle d'un objet ne dépend que de sa position. Le travail accompli par une force conservative ne dépend pas du chemin parcouru entre deux points donnés, mais uniquement des positions initiale et finale de l'objet déplacé.

Exemples : la force gravitationnelle, la force de rappel d'un ressort.

Le travail effectué par une *force dissipative* dépend du chemin parcouru. C'est le cas des forces de frottement.

– Lors d'un mouvement où les forces dissipatives ne fournissent pas de travail, la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie mécanique (qui est l'*énergie mécanique totale*) reste constante (principe de *conservation de l'énergie mécanique totale*) :

$$K + U = K_0 + U_0 = E \quad \text{(constante)}$$

En présence d'un travail effectué par les forces de frottement :

$$K + U = K_0 + U_0 + W_a$$

où

$$W_a = -\mu_c \, N \, s$$

6.2 Problèmes

Prob. 27 (K&S p.145) *Le saut en hauteur.*

Prob. 28 (K&S 6-25) *Une balle de base-ball, lancée à la verticale, atteint une hauteur de 50 m. Quelle était sa vitesse initiale ? (Négliger la résistance de l'air)*

Prob. 29 (K&S 6-31) *Une boîte qui a une vitesse initiale de 3 m/s glisse sur le sol et s'immobilise sur une distance 0,5 m. Que vaut le coefficient de frottement cinétique ?*

Prob. 30 (K&S 6-66) *Un homme et une bicyclette ont une masse totale de 100 kg. Si l'homme gravit à la vitesse constante de 8 m/s une côte formant un angle de 4° avec l'horizontale, quelle puissance dépense-t-il contre les forces gravitationnelles ?*

Prob. 31 *Après avoir lâché le filin qui le reliait au bateau qui le tractait, un homme de 80 kg faisant du ski nautique aborde en A le tremplin de la figure 1 ($L = 1$ m) avec un vitesse de 55 km/h (Fig. 19). (a) Si l'on observe que le skieur atteint la hauteur $H = 1,30$ m au sommet de sa trajectoire, que doit valoir le coefficient de frottement cinétique μ_c entre les skis et le tremplin ? (b) Quelle est la portée d du saut qu'il va effectuer ? Considérer le skieur comme un solide indéformable. Négligez les frottements dus à l'air.*

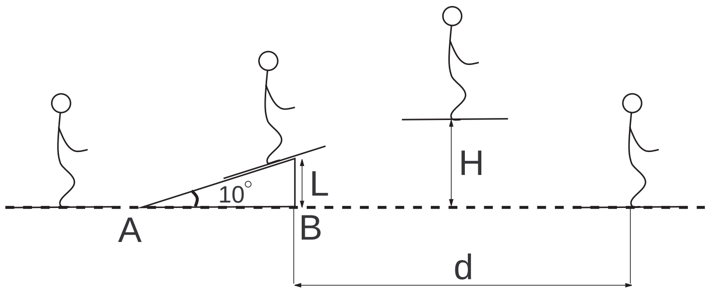


Fig. 19

Prob. 32 *Un projectile de masse $m = 10$ g est tiré horizontalement dans un bloc de masse $M = 0.5$ kg qui repose sur une table (Fig. 20). Le projectile s'incruste dans le bloc qui, sous l'impact, recule de 10 cm avant de s'immobiliser.*

(a) Sachant que le coefficient de frottement entre le bloc et la table est de 0.3, déterminer la vitesse initiale du projectile

(b) Quelle partie de l'énergie initale du projectile s'est dissipée lors de la collision ?

On néglige l'effet de la pesanteur sur la trajectoire du projectile ainsi que les frottements avec l'air.

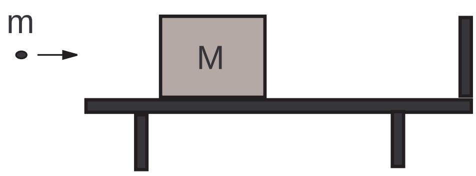


Fig. 20

7 Quantité de mouvement, moment cinétique, lois de conservation

7.1 Définitions et lois de conservation

- La *quantité de mouvement* (quantité vectorielle, unité : [kg m s^{-1}]) d'un corps de m et de vitesse $\vec{v}$ est définie par :

$$\vec{p} = m\,\vec{v}$$

- Relation entre force et quantité de mouvement :

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

Si la masse de l'objet ne varie pas au cours du temps, on retrouve la deuxième loi de Newton :

$$\vec{F} = m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\,\vec{a}$$

- *Loi de conservation de la quantité de mouvement d'un système* :

> **Si la résultante de toutes les forces externes agissant sur le système est nulle, la quantité de mouvement du système reste constante.**

Les forces externes sont les forces dont l'origine est extérieure au système. Les forces internes sont des forces dont l'origine se trouve dans le système et qui sont dues aux interactions mutuelles (action et réaction) des éléments du système.
Soit un système de masse totale M. La deuxième loi de Newton appliquée au système s'écrit :

$$M\,\vec{a}_{\text{centre de masse}} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

où $\vec{F}_{\text{ext}}$ est la résultante des forces extérieures. Le centre de masse du système se déplace donc comme une particulaire imaginaire dont la masse est la masse totale du système, sous l'action des forces extérieures.

- Le *moment cinétique* (grandeur vectorielle, unité : [kg m^2 s^{-1}]) d'une particule de quantité de mouvement $\vec{p} = m\,\vec{v}$ et de vecteur position $\vec{r}$ est défini par :

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

Le moment cinétique est un vecteur perpendiculaire au plan formé par $\vec{r}$ et $\vec{p}$. Sa grandeur vaut $L = r\ p\ \sin\phi$, où ϕ est l'angle entre $\vec{r}$ et $\vec{p}$.
Le moment cinétique $\vec{L}$ d'un corps de moment d'inertie I et de vitesse angulaire $\vec{\omega}$

$$\vec{L} = I\,\vec{\omega}$$

– Relation entre moment de force et moment cinétique :

$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

Si le moment d'inertie de l'objet ne varie pas au cours du temps, on retrouve la deuxième loi de Newton pour les mouvements de rotation :

$$\vec{\tau} = I\,\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = I\,\vec{\alpha}$$

– *Loi de conservation du moment cinétique d'un système* :

Si le moment résultant des forces externes agissant sur le système est nul, le moment cinétique du système reste constant.

7.2 Problèmes

Prob. 33 (K&S 7-15) *Lorsque le ventricule gauche du coeur se contracte, il y a un déplacement du sang vers la tête. Supposons qu'une personne immobile soit allongée sur une table qui se déplace sans frottement. Lors d'une contraction cardiaque qui dure 0,2 s, 0,8 kg de sang est pompé sur une distance de 0,1 m ; si la masse totale de la personne et de la table est de 80 kg, quelle sera leur vitesse à la fin de contraction ?*

Prob. 34 *Une plongeuse peut réduire son moment d'inertie d'un facteur 4 lorsqu'elle passe de la position allongée à une position groupée. Durant les 12 mètres de chute du tremplin jusqu'à l'eau, elle effectue 3 rotations en position groupée et se place en position allongée pour pénétrer dans l'eau. Quelle est à ce moment sa vitesse angulaire ?*

8 Mécanique des fluides non visqueux

8.1 Principe d'Archimède

Lorsqu'un objet un plongé dans un fluide, celui-ci exerce sur l'objet une poussée égale au poids du fluide déplacé :

$$B = \rho\ g\ V_{\text{immergé}}$$

où B est la poussée d'Archimède, ρ la masse volumique du fluide et $V_{\text{immergé}}$ le volume de la partie immergée de l'objet.

8.2 Equation de continuité

Le débit Q d'un fluide à travers une canalisation est défini comme étant le volume de fluide qui la traverse par unité de temps. Il est égal au produit de la vitesse v du fluide par la section A du conduit :

$$Q = A\ v$$

Si le fluide est incompressible, le débit est constant.

8.3 Théorème de Bernoulli

Dans les conditions suivantes :
- Le fluide est *incompressible* (sa masse volumique reste constante)
- Le fluide est *non visqueux* (pas de dissipation d'énergie due aux frottements)
- L'écoulement est *laminaire* (*non turbulent*)
- L'écoulement est en régime *stationnaire* (la vitesse du fluide en un point quelconque ne change pas au cours du temps),

La somme de la pression et de l'énergie mécanique par unité de volume est constante tout le long d'un *tube de courant* :

$$P + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = \mathrm{C^{te}}$$

8.4 Problèmes

Prob. 35 *Un ours polaire de masse 226,7 kg et de hauteur 183 cm (lorsqu'il est debout) monte sur une plaque flottante de glace d'épaisseur 0,305 m. Que doit être l'aire de cette plaque si elle affleure à la surface, en portant l'ours ? (Prendre* $\rho_{\text{mer, 15°C}} = 1025$ *kg/m*^{3} *et* $\rho_{\text{glace, -5°C}} = 917$ *kg/m*^{3}*)*

Prob. 36 (K&S 13-31) *Un morceau de chêne pèse 90 N dans l'air. Un bloc de plomb pèse 130 N quand il est immergé dans l'eau. Attachés l'un à l'autre, ils pèsent 100 N dans l'eau. Quelle est la masse volumique du bois ? (Utiliser éventuellement* $\rho_{\text{plomb}} = 11300$ *kg/m*^{3}*)*

Prob. 37 (K&S 13-19) *Le cerveau d'un être humain en position debout se trouve à 0,5 m au-dessus du coeur. Si une personne se penche de façon que son cerveau soit à 0,4 m au-dessous du coeur, quel est le changement de la pression du sang dans le cerveau ?*

Prob. 38 (K&S 13-24) *(a) Une personne se trouve dans un ascenseur qui accélère vers le haut à raison de 9,8 m/s^2. Quelle est la pression moyenne du sang dans le cerveau et dans les pieds en supposant que la personne est en position debout ? (b) Si l'ascenseur descend avec une accélération de 9,8 m/s^2, quelle est la pression moyenne du sang dans le cerveau et dans les pieds ? La pression sanguine au niveau du coeur (1,4 m au-dessus des pieds et 0,4 m en-dessous de la tête) vaut 13300 Pa.*

Prob. 39 (K&S 13-8) *Un vaisseau sanguin de rayon r se ramifie en quatre vaisseaux, chacun de rayon $r/3$. Si la vitesse moyenne dans le vaisseau le plus large est égale à v, trouver la vitesse moyenne dans chacun des petits vaisseaux.*

Prob. 40 *Un réservoir cylindrique de large section est équipé d'un système qui maintient constant le niveau d'eau à une hauteur $H = 60$ cm (Fig. 21). Ce réservoir est percé latéralement de deux trous : l'un est situé à une hauteur $h = 10$ cm par rapport au fond du réservoir et l'autre à une hauteur y inconnue. (a) Calculer la vitesse de l'eau qui s'échappe de l'orifice inférieur. (b) A quelle distance D du récipient le jet d'eau inférieur touchera-t-il le plan horizontal passant par le fond du réservoir ? (c) A quelle hauteur y est percé le second trou si on observe que les deux jets touchent le sol à la même distance D ?*

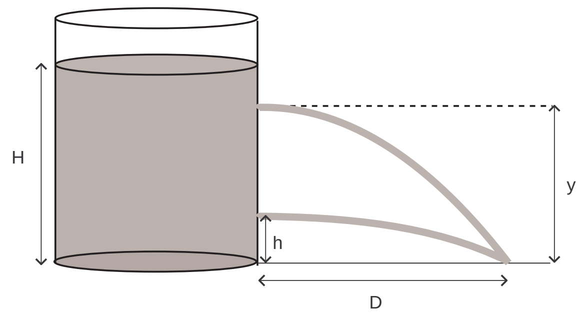


Fig. 21

Prob. 41 *Un bateau sur un lac subit un choc avec un rocher immergé, qui fait un trou de 40 cm^2 dans sa coque à 1 m au-dessous de la ligne de flottaison. Si le bateau peut recevoir 10 m^3 d'eau avant d'avoir sa cargaison trempée, estimer le temps qu'il reste à l'équipage pour faire quelque chose d'intelligent.*

9 Mécanique des fluides visqueux

9.1 Ecoulement laminaire dans un tube

Débit

A cause des forces de frottements existant entre les couches d'un fluide visqueux, la vitesse n'est pas constante le long d'une section donnée d'un tube de courant. On définit alors le débit Q à l'aide de la vitesse moyenne $\bar{v}$ sur la section d'aire A :

$$Q = A\bar{v}$$

où la vitesse moyenne $\bar{v}$ vaut la moitié de la vitesse maximale $v_{\max}$, qui a lieu au centre de la section droite du tube : $\bar{v} = \frac{1}{2}\, v_{\max}$.

Perte de charge

Pour entretenir l'écoulement en régime permanent d'un fluide visqueux, il faut dépenser un travail pour vaincre les forces de viscosité. La chute de pression $\Delta P = P_1 - P_2$, appelée *perte de charge*, le long d'un tube horizontal de section constante est proportionnelle aux forces visqueuses. Si la section droite varie, ou si le tube n'est pas horizontal, il se produit des variations de pression supplémentaires en accord avec le théorème de Bernoulli. La *loi de Poiseuille* énonce la relation entre le débit Q, d'un fluide de viscosité η [Pa s], nécessaire pour entrenir une perte de charge ΔP sur une longueur l d'un tube de rayon R :

$$Q = \frac{\Delta P\ \pi R^4}{8\eta l}$$

La vitesse moyenne $\bar{v} = Q/(\pi R^2)$ a pour expression $\bar{v} = \frac{\Delta P\ R^2}{8\eta l}$.

La résistance à l'écoulement, appelée aussi *résistance vasculaire* [Pa s m^{-3}], est définie par $\mathfrak{R} = \Delta P/\Delta Q$. Dans un écoulement laminaire :

$$\mathfrak{R} = \frac{8\eta l}{\pi R^4}$$

La résistance vasculaire équivalente $\mathfrak{R}$ d'un système de n conduites mises en série vaut :

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \cdots + \mathfrak{R}_n$$

où $\mathfrak{R}_1$, $\cdots$, $\mathfrak{R}_n$ sont les résistances vasculaires des n conduites. La résistance vasculaire équivalente $\mathfrak{R}$ d'un système de n conduites mises en parallèle vaut :

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{1}{\mathfrak{R}_1} + \cdots + \frac{1}{\mathfrak{R}_n}$$

9.2 Forces de résistance visqueuse

Un objet en mouvement au sein d'un fluide visqueux est soumis à des forces de résistance de la part de ce fluide. La force de résistance visqueuse F_R exercée par un fluide de viscosité η sur une *sphère* de rayon R se déplaçant avec une vitesse v dans le fluide est donnée par la *loi de Stokes* :

$$F_R = 6\pi R\ \eta\ v$$

qui est valable lorsque la vitesse de l'objet est faible. Cette condition s'exprime par une limite supérieure du nombre de Reynolds pour une sphère de rayon R :

$$N_R = \frac{\rho v R}{\eta} < 1$$

où ρ est la masse volumique du fluide.

9.3 Tension superficielle

La hauteur d'ascension h d'un liquide de masse volumique ρ dans un tube capillaire de rayon r vaut

$$h = \frac{2\gamma \cos\theta}{\rho g r}$$

où γ est la tension superficielle [N m^{-1}] du liquide et θ est l'angle de contact à l'interface du liquide avec le tube. Ce dernier dépend de la nature du liquide et du matériau solide dont est fait le tube.

9.4 Problèmes

Prob. 42 (K&S 14-20) *Le débit moyen du sang à travers l'aorte est de $4,20 \times 10^{-6}$ m^3/s. Le rayon de l'aorte est de $1,3 \times 10^{-2}$ m. (a) Quelle est la vitesse moyenne du sang dans l'aorte ? (b) Quelle est la perte de charge sur une longueur de 0,1 m de l'aorte ? (c) Quelle est la puissance nécessaire au pompage du sang à travers cette partie de l'aorte ?*

Prob. 43 (K&S 14-33) *(a) Calculer la résistance à l'écoulement d'un capillaire humain typique. Le rayon est de 2×10^{-6} m et la longueur vaut 1 mm. (b) Estimer le nombre de capillaires dans le corps humain, étant donné que le débit à travers l'aorte est de $9,7 \times 10^{-5}$ m^3/s et que la différence de pression entre le système artériel et le système veineux est de 11,6 kPa. Supposer que tous les capillaires sont en parallèle et que la perte de charge dans les capillaires correspond à 9 % de la perte de charge totale.*

Prob. 44 *Une aiguille hypodermique est longue de 4 cm (Fig. 22). Son rayon intérieur vaut 0,5 mm. De l'eau dont la viscosité est égale à 10^{-3} Pa s est forcée à travers l'aiguille.*

(a) Quel est le débit maximum pour que l'écoulement reste laminaire dans l'aiguille ? (suggestion : écoulement laminaire si $N_R < 2000$)

(b) Quelle est la perte de charge (ΔP) nécessaire pour avoir un tel débit ?

(c) Si l'extrémité libre de l'aiguille est soumise à une pression de 1 atm, dans les conditions de débit laminaire maximum obtenues au point (a), quelle est la force à exercer sur la surface S du piston de la Fig. 1. Cette surface est supposée circulaire et de rayon $R = 5$ mm.

Prob. 45 *Considérons une bifurcation (Fig. 23) constituée d'un tuyau cylindrique de rayon r_1 et de longueur l_1, et de deux tuyaux également rigides de rayons r_2 et r_3, et de longueur l_2 et l_3. Un débit constant Q passe dans le tuyau de rayon r_1 (Q=10^{-5} m^3/s). L'écoulement est laminaire. La viscosité du fluide vaut $\eta = 10^{-5}$ Pa s. Valeurs numériques : $l_1 = 5$ cm, $l_2 = 5$ cm, $l_3 = 5$ cm, $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 1,5$ cm, $r_3 = 1$ cm.*

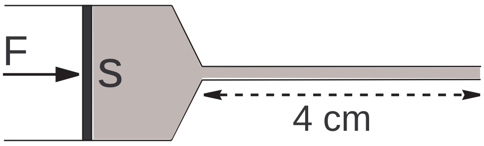


Fig. 22

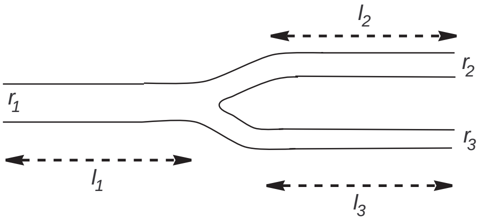


Fig. 23

(a) *Quelle est la résistance à l'écoulement du tuyau 1, du tuyau 2 et du tuyau 3 ?*

(b) *Quelle est la résistance à l'écoulement totale opposée par les tuyaux 2 et 3 ?*

(c) *Quel débit de fluide passe dans le tuyau 3 ? Quelle est la vitesse du fluide dans le tuyau 3 ?*

(d) *Supposons qu'une sténose se forme dans le tuyau 3 (Fig. 24). Cette sténose sera schématisée par un rétrécissement de rayon $r = 0,2$ cm et de longueur $l = 2$ cm. Quelle est alors la résistance du tuyau 3 ? Quelle est le nouveau débit dans le tuyau 3 ? Quelle est la vitesse du fluide dans la sténose ?*

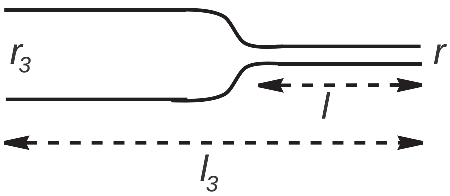


Fig. 24

Prob. 46 (K&S 14-37) *La vitesse limite d'une goutelette d'huile de forme sphérique, lors de sa chute dans de l'air à 20° C, est de 2×10^{-7} m/s. Quel est le rayon de cette goutelette, si sa masse volumique est de 930 kg/m^3 ?*

Prob. 47 *Quand un tube en verre est plongé dans de l'eau à 20° C, l'eau monte jusqu'à une hauteur de 0,2 m. Quand le tube est plongé dans un liquide d'une masse volumique de 700 kg/m^3, la hauteur d'ascension est de 0,15 m et l'angle de contact est nul. Quelle est la tension superficielle de ce liquide ? (La masse volumique de l'eau à 20° C est de 990 kg/m^3).*

10 Electrostatique

10.1 Définitions

Force électrique

La force électrique [N] entre deux charges électriques q et q' [C] est proportionnelle au produit des charges et inversement proportionnelle au carré de leur distance (*Loi de Coulomb*). La force exercée par q' sur q est donnée par

$$\vec{F} = k\frac{qq'}{r^2}\,\vec{r}_0$$

où r est la distance entre q' et q, $\vec{r}_0$ est le vecteur unitaire d'origine q' et d'extrémité q, et $k = 9.0 \times 10^9$ Nm^{2}C^{-2}. La force est attractive si q et q' sont de signes opposés et répulsive si q et q' sont de même signe.

Champ électrique

Un ensemble de charges électriques produisent un *champ électrique* $\vec{E}$ [N/C]. La force électrique exercée par cet ensemble de charge sur une charge q donnée est proportionnelle au champ électrique et à la valeur de la charge q elle-même :

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Le champ électrique produit par une charge Q s'exprime par :

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\frac{Q}{r^2}\,\vec{r}_0$$

Potentiel électrique

Le potentiel électrique V [V] est l'énergie potentielle U [J] par unité de charge q : $V = U/q$. Il permet de caractériser les effets d'une ou de plusieurs charges sans spécifier l'importance ou le signe de la charge sur laquelle ces effets se manifestent.

Quand on déplace une charge positive d'une distance l dans le sens opposé à un champ constant d'intensité E, on augmente son énergie potentielle U. La différence de potentiel (ddp) correspondante vaut $\Delta V = El$.

Remarques :
- Lorsque plusieurs charges agissent simultanément, le potentiel résultant en un point est la somme algébrique des potentiels développés par chacune d'elles
- Autre unité pour le champ électrique : [V/m]
- Autre unité d'énergie potentielle électrique : [eV] (1 eV = 1.60×10^{-19} J)

Exemple : Potentiel dû à une charge Q ponctuelle

$$V(r) = k\frac{Q}{r}$$

Capacité et condensateur plan

Deux conducteurs séparés par le vide ou par un isolant forment un condensateur. Si les deux conducteurs ont des charges égales et opposées $\pm Q$, la capacité du condensateur se définit comme

$$C = \frac{Q}{V}$$

où V est la ddp entre les deux conducteurs. Dans le cas de lames parallèles, d'aire A, dans le vide : $C = \varepsilon_0 A/l$ avec $\varepsilon_0 = 1/(4\pi k)$.

L'énergie électrique stockée dans un condensateur de capacité C sous une ddp de V est $U = QV/2 = CV^2/2$.

Dipôle électrique

Une paire de charges égales et opposées $+q$ et $-q$ séparées par une distance l forment un dipôle électrique, caractérisé par un moment dipolaire électrique $\vec{p}$ [Cm] défini par

$$\vec{p} = q\vec{l}$$

où $\vec{l}$ est le vecteur distance, de norme l, d'origine $-q$ et d'extrémité $+q$.

La force résultante sur un dipôle électrique dans un champ électrique uniforme est nulle.

Le moment résultant sur un dipôle électrique dans un champ électrique uniforme $\vec{E}$ est $\vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E}$.

L'énergie potentielle $\mathcal{U}$ d'un dipôle $\vec{p}$ dans un champ $\vec{E}$, avec lequel il fait un angle θ, vaut $\mathcal{U} = -pE\cos\theta$.

10.2 Problèmes

Prob. 48 *Deux charges ponctuelles $q_1 = +10$ nC et $q_2 = -20$ nC se trouvent sur l'axe des x aux points de coordonnées $x = 0$ et $x = +10$ m, respectivement. (a) Que vaut la force électrique exercée par la charge q_1 sur la charge q_2 ? (b) Calculer le champ électrique au point d'abscisse $x = 4$ m. (c) Trouver, s'il existe, le point où le champ électrique est nul.*

Prob. 49 (K&S 16-16) *Sur la Fig. 25, que vaut le potentiel (a) à l'origine, (b) en $x = 3a$, $y = 0$?*

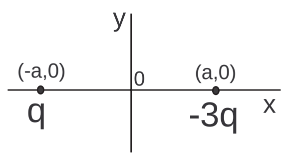


Fig. 25

Prob. 50 (K&S 16-20) *Une particule α est un noyau d'hélium avec une charge de $2e$ et une masse de $6,64 \times 10^{-27}$ kg. Supposons qu'une particule α soit accélérée du repos jusqu'à une vitesse de 10^7 m/s par des forces électriques dans le premier tronçon d'un accélérateur de particules. Quelle différence de potentiel faut-il pour obtenir cette accélération ?*

Prob. 51 (K&S 16-24) *Un dipôle électrique est constitué de charges $\pm e$ distantes de 10^{-10} m. Il est placé dans un champ de 10^6 N/C. Que vaut le moment du couple sur le dipôle quand celui-ci est (a) parallèle au champ, (b) à angle droit avec le champ, (c) dans le sens opposé au champ ?*

Prob. 52 (K&S 16-24) *Un condensateur à lames parallèles a une capacité de 2 μF quand les lames sont séparées par le vide. Les lames sont à 10^{-3} m l'une de l'autre et sont connectées à une pile qui maintient une différence de potentiel de 50 V entre elles. (a) Quelle est la charge des lames ? (b) Que vaut le champ électrique entre les lames ? (c) Si une feuille d'isolant, de constante diélectrique égale à 5, est insérée entre les lames, quelle est la nouvelle charge ? (d) Quel est le champ électrique avec la feuille isolante en place ?*

Prob. 53 (K&S 16-45) *Un électron est introduit avec une vitesse v_0 dans un champ électrique uniforme (Fig. 26). (Négliger la force de pesanteur sur l'électron.) (a) Trouver la direction et le module de son accélération (b) Combien de temps restera-t-il dans le champ ? (c) Quelle est l'importance de la déviation verticale lorsqu'il sort du champ ? (d) Trouver l'angle entre la vitesse à la sortie et la direction initiale.*

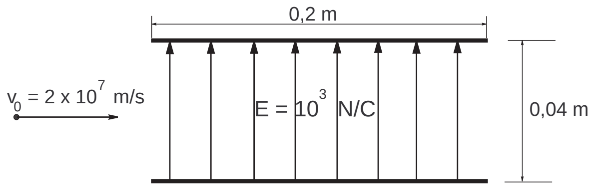


FIG. 26

Prob. 54 (K&S 16-51) *La Fig. 27 montre un modèle de molécule d'eau. Chaque atome d'hydrogène a une charge résultante positive q et l'atome d'oxygène a une charge résultante $-2q$. La distance l est 9.65×10^{-11} m. La charge positive sur un atome d'hydrogène et la moitié de la charge négative sur l'atome d'oxygène forment un dipôle. Le moment dipolaire électrique total $\vec{p}$ de la molécule est la somme vectorielle des deux moments dipolaires H-O. (a) Quelle est la direction de $\vec{p}$? (b) Si $p = 6.0 \times 10^{-30}$ Cm, quelle est la charge q en multiples de la charge e du proton ?*

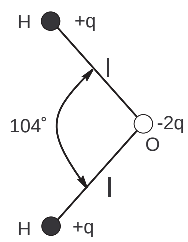


FIG. 27

11 Courants continus

11.1 Définitions et lois

Loi d'Ohm

Le courant électrique moyen dans un fil conducteur est la charge ΔQ qui traverse une section droite du fil par unité de temps : $I = \Delta Q/\Delta t$ [A]. Le courant instantané est

$$i = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

Le sens du courant conventionnel est celui d'un flux de charges positives.

Les conducteurs ohmiques obéissent à la *loi d'Ohm*

$$V = RI$$

où V est la différence de potentiel [V] aux bornes du conducteur, I [A] est le courant qui le parcourt et R [Ω] est la résistance de ce conducteur.

Loi de Pouillet

La *loi de Pouillet* donne la résistance R d'un conducteur de conductivité $\sigma = 1/\rho$ [S], où ρ est sa résistivité [Ωm], en fonction de sa longueur l [m] et de l'aire de sa section droite A [m^2] :

$$R = \rho l/A$$

Source de force électromotrice

Une source d'énergie, appelée *force électromotrice* (FEM), est nécessaire pour maintenir un courant continu dans un circuit. La FEM $\mathcal{E}$ d'un générateur est le travail effectué par unité de charge, par les forces non électriques à l'intérieur de ce générateur.

Puissance

La puissance P [W] fournie ou dissipée par un élément dans un circuit électrique est le produit de la différence de potentiel à ses bornes et du courant qui le parcourt :

$$P = VI$$

Pour une FEM, $P = \mathcal{E}I$. Pour une résistance ohmique, $P = RI^2$ (*Effet Joule*).

Lois de Kirchhoff

Les *lois de Kirchhoff* gouvernent la circulation des courants dans les circuits électriques :
- *Loi des noeuds* : La somme des courants qui entrent en tout point d'un circuit est égale à la somme des courants qui en sortent.
- *Loi des mailles* : La somme des différences de potentiel le long de tout chemin fermé est nulle.

Charge et décharge d'un condensateur

Dans un circuit contenant un condensateur de capacité C, une résistance R et une FEM $\mathcal{E}$, on peut observer le phénomène de charge et décharge du condensateur. La charge q dans le condensateur et le courant i dans le circuit varient dans le temps selon des lois exponentielles décroissantes. La constante de temps $\tau = RC$ est le temps caractéristique de ces régimes transitoires.

Lors de la charge du condensateur (Fig. 28), initiée en $t = 0$, la charge q et le courant i varient en fonction du temps t selon les lois (Fig. 29)

$$q(t) = q_f\,(1 - e^{-t/\tau})$$
$$i(t) = i_0\,e^{-t/\tau}$$

où q_f est la charge finale atteinte par le condensateur lorsque le temps tend vers l'infini et i_0 est le courant initial dans le circuit : $i_0 = E/R$. En $t = \tau$, la charge du condensateur vaut $q(t=\tau) = q_f\,(1 - e^{-1}) = q_f\,(1 - \frac{1}{e}) \approx 0,63\,q_f$, tandis que le courant vaut $i(t=\tau) = i_0\,e^{-1} = i_0\,\frac{1}{e} \approx 0,37\,i_0$.

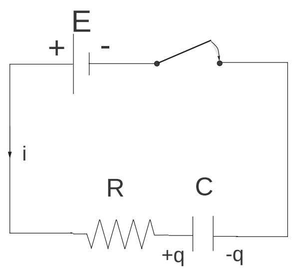


FIG. 28 Charge d'un condensateur

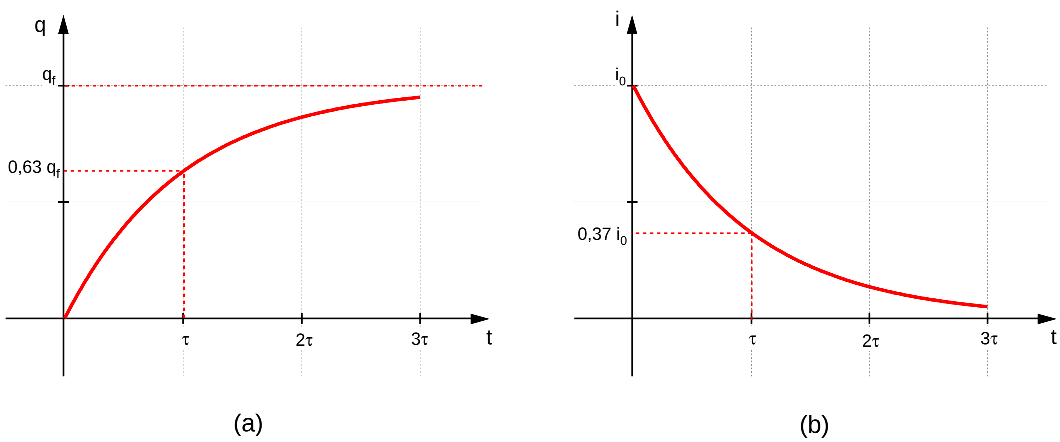


FIG. 29 Charge d'un condensateur. (a) Graphe de variation de la charge q en fonction du temps t, (b) graphe de variation du courant i en fonction du temps t.

Lors de la décharge de ce condensateur (Fig. 30), initiée en $t = 0$, la charge q et le courant i varient en fonction du temps t selon les lois (Fig. 31)

$$q(t) = q_0 \, e^{-t/\tau}$$
$$i(t) = i_0 \, e^{-t/\tau}$$

où q_0 est la charge initiale stockée dans le condensateur.

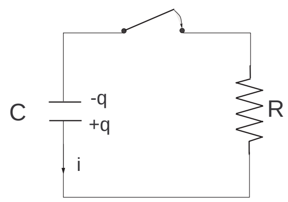


Fig. 30 Décharge d'un condensateur

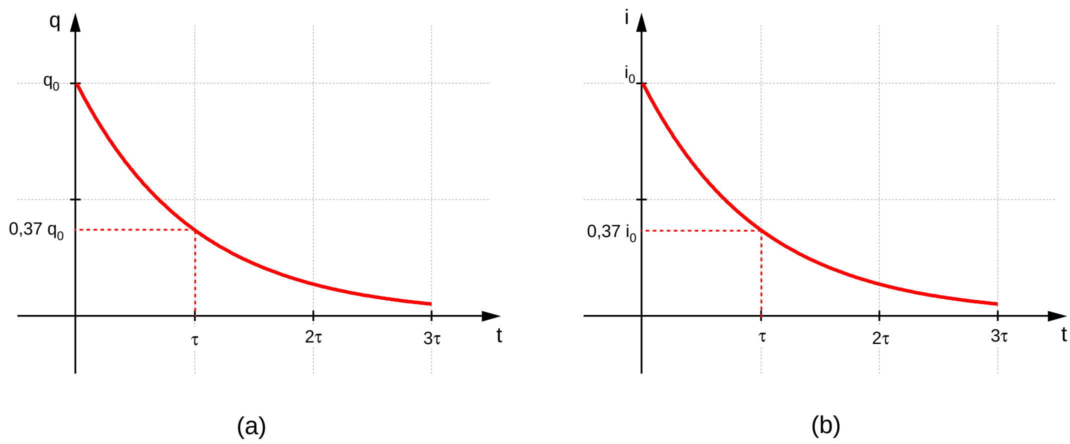


Fig. 31 Décharge d'un condensateur. (a) Graphe de variation de la charge q en fonction du temps t, (b) graphe de variation du courant i en fonction du temps t.

11.2 Problèmes

Prob. 55 (K&S 17-13) *Le courant dans l'élément chauffant d'un chauffe-eau est de 20 A quand on le connecte à un secteur de 230 V. Que vaut sa résistance ?*

Prob. 56 (K&S 17-23) *(a) Quelle est la résistance d'une ampoule de 100 W conçue pour fonctionner sur 120 V ? (b) Que vaut le courant qu'elle consomme ?*

Prob. 57 (K&S 17-23) *Dans le cas du circuit de la Fig. 32, trouver (a) le courant dans la résistance de 2 Ω ; (b) la différence de potentiel entre les extrémités de la résistance de 3 Ω ; (c) le courant dans la résistance de 3 Ω.*

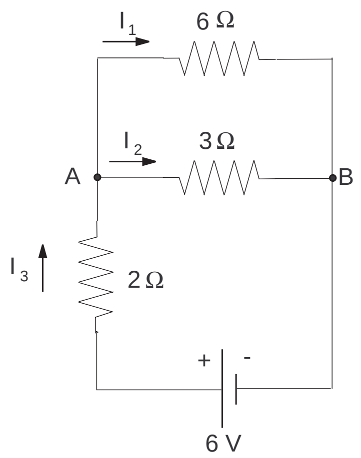


FIG. 32

Prob. 58 (K&S 17-63) *Le condensateur d'un flash électronique a une capacité de 100 μF et est chargé sous 1000 V. (a) Que vaut la charge sur les lames du condensateur ? (b) Le condensateur se décharge dans la lampe flash et 0.001 seconde après que l'on a fermé l'interrupteur, la charge restante vaut 0.37 fois la charge initiale. Que vaut la résistance du circuit ? (c) Que vaut le courant après 0.001 seconde ?*

Prob. 59 (K&S 17-22) *Un grille-pain consomme 1500 W quand on le branche sur du 120 V. Il faut 1 minute pour griller une tranche de pain. Si l'énergie électrique coûte 16 eurocents au kilowatt-heure, quel est le coût de cette opération ?*

Prob. 60 (K&S 17-25) *Pour le circuit de la Fig. 33, trouver (a) le courant, (b) la puissance fournie par chaque pile et (c) la puissance dissipée dans chaque résistance.*

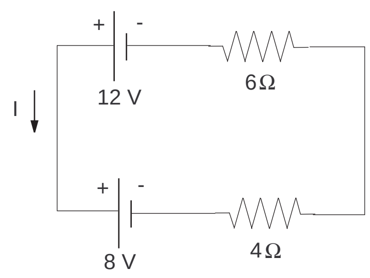


FIG. 33

Prob. 61 (K&S 17-53) *(a) Que vaut la résistance, à température ambiante, d'un fil d'aluminium de 1 m de long et 0,002 m de rayon ? (b) Que vaut le rayon d'un fil de cuivre de 1 m de long ayant la même résistance ? (c) Comparer les masses des deux fils (la masse volumique du cuivre est de 8900 kg/m^3 et celle de l'aluminium est de 2700 kg/m^3).*

12 Optique géométrique

12.1 Les lentilles minces

Une lentille est une pièce taillée dans un matériau transparent conformée pour focaliser les rayons lumineux de manière à créer une image.

Une *lentille mince sphérique* est limitée par deux surfaces sphériques ou une surface sphérique et une surface plane telle que son épaisseur est faible par rapport aux rayons de courbure de ses faces. Par convention, une surface convexe a un rayon de courbure positif, une surface concave a un rayon de courbure négatif et une surface plane a un rayon de courbure infini. L'axe optique d'une lentille est la droite passant par les deux centres de courbure de ses faces.

La distance focale d'une lentille d'indice n utilisée dans un milieu d'indice 1 est donnée par la *formule des opticiens* :

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Une lentille *convergente* dévie les rayons lumineux tombant sous une incidence parallèle à l'axe, de telle manière qu'ils se rencontrent au foyer image situé de l'autre côté de la lentille. Une lentille *divergente* les écarte de l'axe, de sorte qu'ils paraissent avoir été émis par une source ponctuelle située au foyer du côté d'incidence.

12.2 La formation de l'image

Une image *réelle* se forme au point de rencontre de rayons lumineux réels. Une image *virtuelle* se forme au point de rencontre des prolongements des rayons lumineux.

Si on pose par convention que la lumière se propage de gauche à droite, les objets réels seront situés à gauche de la lentille et les images réelles à sa droite. Les images virtuelles seront situées à gauche de la lentille et les objets virtuels à sa droite.

Soit s la distance de l'objet à la lentille et s' la distance de l'image à la lentille. Par convention :

1. s est positif pour un objet réel et négatif pour un objet virtuel
2. s' est positif pour une image réelle et négatif pour une image virtuelle
3. La *hauteur de l'objet* h est positive s'il pointe au-dessus de l'axe de la lentille et négative s'il pointe en-dessous.
4. La *hauteur de l'image* h' est positive si celle-ci pointe au-dessus de l'axe de la lentille et négative si elle pointe en-dessous.

On définit le *grandissement linéaire* m

$$m = \frac{h'}{h}$$

qui est positif si l'image est droite et négative si l'image est renversée.

La formation de l'image d'un objet par une lentille de distance focale f est donnée par la *formule des lentilles minces* :

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

La puissance d'une lentille de distance focale f est définie par $P = \frac{1}{f}$. La puissance d'une lentille s'exprime en *dioptries* (1 dioptrie = 1 m^{-1}). La puissance totale d'un ensemble de deux lentilles minces accolées est la somme des puissances de ses éléments : $P = P_1 + P_2$.

12.3 L'oeil

La majeure partie de la réfraction des rayons lumineux se produit au niveau de la cornée. Le rôle du *cristallin* est d'apporter le complément de convergence nécessaire, pour faire la mise au point sur des objets situés à différences distances. L'ajustement de la distance focale du cristallin pour produire une image nette des objets situés à différentes distances est l'*accomodation*.

Lorsque le cristallin est relâché (pas d'effort d'accomodation), la distance x_f des objets perçus avec netteté définit le *punctum remotum*. Pour une personne présentant une vision normale, ce point est situé à l'infini. Le *punctum optimum* est le point le plus proche où l'oeil peut accomoder longuement sans fatigue. Chez un jeune adulte, ce point est normalement situé à une distance x_n égale à 0,25 m. Le *pouvoir d'accomodation* est défini par $A = P_n - P_f$ où P_f est la puissance de l'oeil sans accomodation et P_n est la puissance de l'oeil lors de l'accomodation maximale sans fatigue.

Une personne atteinte de *myopie* ne peut pas distinguer nettement des objets situés au-delà du punctum remotum qui n'est plus à distance infinie. On corrige ce défaut à l'aide d'une lentille divergente. L'*hypermétropie* est l'inverse de la myopie. Elle est corrigée par une lentille convergente. La *presbytie* est la diminution du pouvoir d'accomodation et se produit avec l'âge. Elle peut être corrigée par des verre convergents.

12.4 Les instruments d'optique

La *loupe* est une lentille convergente qui permet de rapprocher considérablement l'objet de l'oeil tout en conservant une vision nette. L'objet est alors vu sous un angle plus grand et des détails plus fins peuvent ainsi être observés. Le *grossissement* G d'une loupe de distance focale f est donné par la relation $G = x_n/f$ où x_n est le punctum optimum de l'observateur. Si ce dernier est doté d'une vision normale, $G = 0,25/f$ où la distance focale f est exprimée en mètres.

Un *microscope optique* est essentiellement composé d'un *objectif* et d'un *oculaire*. Tous deux sont des lentilles convergentes. L'objet à étudier est placé légèrement au-delà du foyer de l'objectif. L'image rendue par l'objectif est réelle, renversée, et se trouve très agrandie par rapport à l'objet. Cette image sert d'objet à l'oculaire, qui fonctionne comme une loupe pour produire une image virtuelle à une distance qui en permette une observation confortable.

12.5 Problèmes

Prob. 62 (K&S 24-4) *Un verre de lunettes présente une surface concave de 0,5 m de rayon et une surface convexe de 0,7 m de rayon de courbure. Si l'indice de réfraction du matériau dans lequel il est taillé est 1,6, quelle est sa distance focale ?*

Prob. 63 (K&S 24-10) *Une lentille présente une distance focale de 0,2 m. Un objet réel est placé à 0,08 m de cette lentille. (a) Localiser cette image par une méthode graphique. (b) Déterminer par le calcul la position de l'image. (c) Quel est le facteur d'agrandissement ?*

Prob. 64 (K&S 24-11) *Un objet est placé à 1 m d'une lentille dont la distance focale est de -0,5 m. Localiser l'image (a) par une méthode graphique ; (b) par le calcul.*

Prob. 65 *Deux lentilles convergentes de 32 cm de distance focale sont distantes de 21,5 cm. Un objet est placé à 55 cm de la première lentille. (a) Faire un schéma qualitatif du trajet des rayons lumineux depuis l'objet jusqu'à son image finale. Calculer (b) la position finale de l'image ; (c) les caractéristiques de cette image ; (d) le grandissement linéaire total correspondant.*

Prob. 66 *Un microsope d'observation est muni d'un objectif de 3 mm de distance focale et d'un oculaire de 40 mm de distance focale. Les deux lentilles sont séparées par 0,2 m et l'image finale est produite à 0,4 m de l'oculaire. (a) Où se forme l'image créée par l'objectif ? (b) Où se trouve l'objet par rapport à l'objectif ?*

Prob. 67 (K&S 24-46) *Un objectif de projecteur de diapositive est placé à 3 m d'un écran et présente une distance focale de 0,08 m. (a) Où se trouve la diapositive lorsque l'image est nette sur l'écran ? (b) Un enfant est reproduit sur l'écran sur une hauteur de 10 cm. Quelle est la taille de son image sur la diapositive ? (c) Si nous voulons doubler la taille de l'image sur l'écran, où doit-on placer le projecteur ? (d) Si nous souhaitons doubler la taille de l'image sur l'écran sans déplacer le projecteur, quelle distance focale d'objectif faut-il utiliser ?*

Prob. 68 *Une lentille mince, convergente, L_1, de distance focale $f_1 = 30$ cm est placée contre une autre lentille mince, L_2, biconvexe et symétrique, de rayon de courbure $R_2 = 10$ cm, de manière à ce que leurs axes optiques coïncident. L'ensemble de ces deux lentilles donne d'un objet réel situé à 10 cm de celles-ci, une image réelle située à 30 cm des lentilles. Si on place L_2 seule dans un liquide d'indice inconnu, elle donne d'un objet réel distant de 30 cm, une image réelle située à 60 cm de la lentille. Quel est l'indice de réfraction de ce liquide ?*

Prob. 69 *Un système optique est formé par trois lentilles coaxiales de distances focales +10 cm, +20 cm et +5 cm. Le seconde est distante de la première de 30 cm, et la troisième de la seconde de 5 cm. Si un faisceau de lumière parallèle tombe sur la première, à quelle distance de la troisième converge-t-il après avoir traversé les trois lentilles ?*

Prob. 70 (K&S 24-58) *Une personne a un punctum remotum à 0,25 m. (a) Si elle doit regarder des objets lointains, quels verres correcteurs doit-elle porter ? (b) Si son pouvoir d'accomodation est de 4 dioptries, où se trouvera son punctum optimum en l'absence de toute correction optique ? (c) Où se trouvera son punctum optimum lorsqu'elle portera ses verres ?*

Prob. 71 (K&S 24-59) *Une personne atteinte d'hypermétropie montre un pouvoir d'accomodation de 3 dioptries et un punctum optimum à 2 m. (a) Quelle puissance de verres correcteurs permettrait de rapprocher ce punctum optimum à 0,25 m des yeux ? (b) Où se trouve le punctum remotum avec ces verres ?*

13 Appendice

Relations dans un triangle rectangle

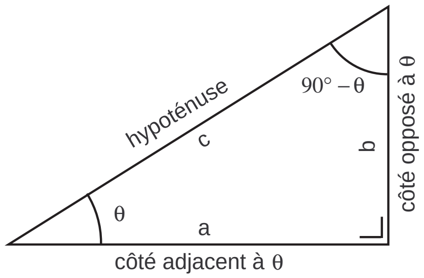


FIG. 34 Triangle rectangle

Théorème de Pythagore :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Relations trigonométriques :

$$\sin\theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{a}{c}$$
$$\sin\theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{b}{c}$$
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{a}{b}$$

Identités remarquables

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$