

Université de Liège



Faculté des Sciences Appliquées

Analyse des effets mécaniques et hydrauliques induits dans le bras par un brassard de mesure de pression artérielle

Membres du Jury

Serge CESCOTTO

Docteur Luc ERPICUM

Michel PIROTTON

Jean-Philippe PONTHOT

Pilotage

Sébastien ERPICUM

Vincent LIBERTIAUX

Travail de fin d'études

réalisé en vue de l'obtention du grade

d'Ingénieur Civil des Constructions

PAULUS Raphaël

3^{ème} technique Ingénieur Civil des Constructions

Année académique 2006-2007

Analyse des effets mécaniques et hydrauliques induits dans le bras par un brassard de mesure de pression artérielle

• Objectif du travail

Les méthodes actuelles de mesure de la pression artérielle, par induction d'une pression au sein d'un brassard placé autour du bras, amènent quelques erreurs de mesure, de par une mauvaise calibration de la longueur et de la circonférence du brassard.

Le présent travail se propose d'analyser mécaniquement la manière dont les efforts amenés par le brassard affectent la circulation du sang, afin d'amener des pistes permettant d'introduire des facteurs de correction – fonctions de divers paramètres géométriques et physiologiques – à apporter aux chiffres lus lors de la prise de pression.

• Cheminement du travail

Dans un premier temps, une recherche bibliographique médicale sera effectuée, de manière à se familiariser avec les termes médicaux, à comprendre le phénomène et à insister sur l'importance de recherches approfondies dans ce domaine.

Ensuite, nous travaillerons successivement et conjointement sur la partie musculaire entourant l'artère et sur le sang circulant dans cette même artère, utilisant pour cela les matières de la « Mécanique du Solide » et de la « Mécanique du Fluide ».

La partie Matériaux consistera en la détermination des variations de section de l'artère en fonction des pressions externe (brassard) et interne (pression artérielle). La partie Fluides se proposera ensuite d'étudier la modification du signal de pression artérielle entre l'amont et l'aval du brassard, sous la contrainte de celui-ci.

Enfin, une fois les études mécaniques réalisées, nous pourrons tirer des conclusions qualitatives, et éventuellement quantitatives, sur les erreurs introduites par l'utilisation d'un brassard non adéquat.

Analysis of the mechanical and hydraulic effects induced by a blood pressure meter

- Aim of the work**

The actual methods for the measurement of the arterial pressure; by induction of a pressure through an armband, introduce some mistakes. Those are caused by a bad fitting of the band's dimensions, either the length or the circumference.

The present work relates the research of how the armband mechanically affects the circulation of the blood, with the final goal to reach some correcting factors which could help to know the true arterial pressure of the patient.

- Methods**

First of all, we will present some medical facts and, in this manner, we will speak about the anatomy and the physiology of the cardiovascular web. Thus we should have a better understanding of the phenomenon. Moreover, we will collect some facts which will support our research by showing their necessity.

Afterwards, we will work successively and jointly on the brachia muscle, the brachia artery and the blood which floods in this artery, using in this way the subjects' matter of "Material mechanics" and "Fluid mechanics".

The material part will study the response of the arterial section under external pressures (arterial pressure inside, and armband's pressure outside). The fluid part will then study the flow of the blood inside a deformable pipe. Then, finally, we should get the way the pressure signal is affected by the external forces.

Once all these mechanical studies will be done, we could draw up qualitative, and possibly quantitative, conclusions about the margin of error introduced by the use of an inadequate armband

AVANT-PROPOS

*Je tiens tout d'abord à remercier vivement
Messieurs Serge Cescotto et Michel Pirotton,
les deux promoteurs de ce travail de fin d'études, pour le travail proposé,
mais également pour les conseils et remarques qu'ils m'ont apportés.*

*Mes remerciements les plus sincères vont à
Messieurs Sébastien Erpicum et Vincent Libertiaux,
qui ont suivi mon travail dans son intégralité.
Merci pour leurs conseils, leurs remarques, leur expérience et surtout leur disponibilité.*

*Je souhaite également témoigner ma reconnaissance à
Messieurs Luc Erpicum et Jean-Philippe Ponthot,
les membres extérieurs du jury de mon travail.*

*Je remercie enfin toutes les personnes des services de Messieurs Cescotto et Pirotton qui ont,
à un moment ou un autre, pris de leur temps pour m'apporter leur aide précieuse.*

*Ensuite, j'adresse tous mes remerciements aux personnes du domaine paramédical,
Monsieur Nicolas Frusch et Mesdemoiselles Cathy et Mélanie Paulus,
qui m'ont apporté leur connaissance et leurs remarques au cours des recherches
bibliographiques qui ont accompagné la rédaction de la première partie de ce travail*

Je remercie Mademoiselle Julie Frusch pour sa relecture attentive du travail.

*Enfin, je désire faire part de ma gratitude à
mes parents, ma famille, mes amis, ainsi que toutes les personnes qui,
de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail de fin d'études.*

PLAN

INTRODUCTION GÉNÉRALE

PREMIÈRE PARTIE, PRÉREQUIS MÉDICAUX

INTRODUCTION

- 1. QUELQUES NOTIONS D'ANATOMIE ET DE PHYSIOLOGIE**
- 2. LA PRESSION ARTÉRIELLE**
- 3. POURQUOI ÉTUDIER LA PRESSION ARTÉRIELLE**
- 4. COMMENT ÉTUDIER LA PRESSION ARTÉRIELLE**

CONCLUSIONS

INTERMÈDE

DEUXIÈME PARTIE, MÉCANIQUE DU MUSCLE ET DE L'ARTÈRE

INTRODUCTION

- 1. ANALYSE ELASTIQUE LINÉAIRE**
- 2. ANALYSE ELASTIQUE NON LINÉAIRE**
- 3. RÉFLEXIONS SUR L'ÉTAT PLAN**
- 4. PARAMÈTRES DU PROBLÈME**

CONCLUSIONS

TROISIÈME PARTIE, HÉMODYNAMIQUE

INTRODUCTION

- 1. ECOULEMENT DU SANG DANS LES ARTÈRES...**

2. MÉTHODE DE RÉSOLUTION

3. DÉVELOPPEMENT DE LA MÉTHODE

4. INFLUENCE DES DIFFÉRENTS PARAMÈTRES

CONCLUSIONS

CONCLUSIONS

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La pression artérielle est un paramètre essentiel lorsqu'il s'agit de vérifier le bon fonctionnement physiologique de notre système cardiovasculaire.

Les valeurs de mesure moyennes constituent un indice de référence d'une personne en bonne santé, et la mesure de valeurs trop éloignées des moyennes peut traduire des problèmes conséquents au niveau cardiovasculaire.

Connaître la pression artérielle avec précision est de ce fait plus que désirable, et les recherches allant dans ce sens trouvent à l'heure actuelle une place relativement importante dans le vaste domaine qu'est la recherche scientifique.

Le travail présenté dans ce rapport se propose d'aborder le problème en observant celui-ci avec un regard d'ingénieur des constructions, en usant pour se faire des différents domaines scientifiques d'études qui nous sont familiers. En ce faisant, nous pourrions ainsi apporter aux recherches existantes une dimension mécanique supplémentaire.

Nous allons dès lors être amenés à travailler d'une part avec des notions connues, telles la mécanique ou la physique d'un problème ; mais également avec des notions plus abstraites en ce qui nous concerne, telles l'anatomie ou la physiologie. Nous devrons donc situer les études et recherches réalisées par rapport à la médecine, en prenant soin d'introduire et de comprendre clairement les notions anatomophysiologiques qui gouvernent les phénomènes étudiés.

Les recherches effectuées autour du sujet ont ainsi été articulées autour de deux axes principaux, et le rapport qui sert de support à ce travail est construit en trois sections principales.

Les deux axes du travail sont d'une part la compréhension apportée aux prérequis médicaux nécessaires à la bonne compréhension du phénomène, et d'autre part les études mécaniques réalisées pour mener à bien ce travail.

Le premier axe de ce travail de fin d'études, correspondant à la première partie du rapport, aura ainsi pour objectif de donner à l'ensemble du travail une fondation à orientation médicale. Nous aborderons non seulement l'ensemble des aspects anatomiques et physiologiques du système relatif à notre étude, mais nous développerons également en détails le mode opératoire de la prise de pression artérielle à l'aide d'un brassard de mesure de pression, soit un sphygmomanomètre. Enfin, nous terminerons cette première partie en insistant sur les risques encourus par une pression artérielle trop élevée (ou trop basse), par rapport aux moyennes observées. De plus, nous introduirons les problématiques de cette

méthode de mesure, problématiques se situant au niveau de la géométrie du brassard essentiellement, provenant d'une possible mauvaise adéquation des caractéristiques du brassard avec celles du sujet.

Le but ultime de ce second axe sera d'étudier les effets hydrauliques et mécaniques induits dans le bras par un brassard de mesure de la pression artérielle.

Pour parvenir à étudier ces effets, nous analyserons la manière dont la pression au sein du brassard affecte l'écoulement du sang au sein de l'artère. Ces études et recherches seront réalisées à partir de théories essentielles de la science de l'ingénieur des constructions, à savoir la mécanique du matériau et la mécanique du fluide. Dans ce but, ce second axe sera découpé en deux sections, correspondant successivement aux études mécaniques et hydrauliques opérées, nous permettant ainsi de structurer au mieux les démarches effectuées.

Enfin, une fois les différentes théories mécaniques introduites, nous pourrons retirer des conclusions sur le travail accompli, non seulement en analysant et discutant les différents résultats obtenus, mais également en revenant sur les multiples enseignements théoriques, conceptuels, mais également personnels retirés de l'ensemble de ce travail de fin d'études.

Bonne lecture...

PREMIÈRE PARTIE,
PRÉREQUIS MÉDICAUX

INTRODUCTION

Ce travail de fin d'études a pour objectif d'étudier la pression sanguine. Il apparaît donc essentiel de s'intéresser un temps soit peu aux différents principes qui régissent la circulation sanguine dans l'organisme.

C'est ainsi que, dans cette première partie du travail, nous allons aborder les aspects anatomophysiologiques du système circulatoire.

Les différentes informations présentes ont fait l'objet de multiples recherches bibliographiques, ainsi que de multiples discussions avec différents spécialistes.

Dans un premier temps, il paraît important de situer quelques notions d'anatomie¹ et de physiologie² qui nous seront utiles pour notre recherche. Le premier chapitre de cette section aura ainsi pour objectif de nous familiariser avec le système cardio-vasculaire.

Enfin, les chapitres suivants seront consacrés entièrement à la pression artérielle.

Ainsi, on parlera successivement de pression artérielle en toute généralité, avant d'axer la fin de cette première partie autour de deux questions essentielles quant au reste du travail, à savoir « Pourquoi étudier la pression artérielle ? », et, surtout, « Comment étudier cette pression ? ».

Au final, en regard de ces deux questions principales, il sera temps de conclure à la nécessité de recherches physiques et mathématiques que ce rapport se veut fournir.

¹ Anatomie (du grec *ἀνατομία*, *anatomia*) : science qui a pour objet l'étude de la forme, de la structure, des rapports et de la fonction des différents éléments constitutifs du corps humain (Larousse Médical 2006).

² Physiologie (du grec *φύση*, phusè, la nature ; et *λόγος*, logos, l'étude, la science) : Etude des fonctions et du fonctionnement normal des organismes humains. La physiologie s'intéresse aux processus physiques et chimiques à l'œuvre dans les cellules, les tissus, les organes et les systèmes d'êtres vivants sains (Larousse Médical 2006).

1. QUELQUES NOTIONS D'ANATOMIE ET DE PHYSIOLOGIE

La circulation sanguine à travers l'organisme est un phénomène qui peut paraître simple (de par ses caractéristiques cycliques), mais les différentes étapes nécessaires à son bon fonctionnement la rendent assez complexe.

Tout au long de ce travail, nous allons nous intéresser au système cardiovasculaire, c'est-à-dire le système composé du cœur, du sang et des vaisseaux sanguins (artères et veines).

Notre système cardio-vasculaire travaille comme un immense réservoir dans lequel circule le sang. Celui-ci est propulsé dans les vaisseaux sanguins par le cœur, qui effectue le travail d'une pompe.

Dans ce premier chapitre, nous allons approcher avec plus ou moins de détails les trois éléments du système cardiovasculaire, soit le cœur, le sang et les vaisseaux sanguins.

En parallèle, nous allons parcourir le trajet effectué par le sang, insistant sur les moyens de mise en œuvre de cette circulation à travers l'ensemble du corps humain.

1.1 LE SANG, LA CIRCULATION SANGUINE

Après quelques informations générales sur les caractéristiques du sang, nous détaillerons succinctement l'anatomie et la physiologie de l'appareil cardiovasculaire.

• Le sang : plasma et éléments figurés

Le sang est composé d'une portion liquide et d'une portion cellulaire. La portion liquide est composée de plasma et de liquide interstitiel, tandis que la partie cellulaire est composée des globules rouges (érythrocytes), des globules blancs (leucocytes) et des plaquettes. Les trois composantes de la partie cellulaire sont habituellement reprises sous le terme d'éléments figurés. Le rapport entre portion liquide et portion cellulaire est d'environ 1,2 :1. Notons que dans la portion cellulaire, la proportion de plaquettes et de leucocytes est très faible par rapport aux érythrocytes (de l'ordre du pourcent).

• Caractéristiques

Etant donné que le but de cette section est plutôt introductif, il semble plus intéressant de situer les caractéristiques plutôt que de les quantifier. Si certaines données sont nécessaires, il est évident que nous y reviendrons par la suite en plus de détails.

Le sang est ainsi plus visqueux et plus dense que l'eau. Sa température est légèrement plus élevée que celle du corps.

Le volume total de sang contenu dans le corps est de 5 à 6L, ce qui représente environ 8% du

poids du corps³.

• Fonction principale

La fonction principale du sang est d'assurer l'homéostasie⁴ du corps humain.

Pour ce faire, il remplit deux fonctions,

- Apporter aux cellules l'oxygène, les glucides, les lipides et les hormones que leur métabolisme nécessite ;
- Transporter les déchets du métabolisme cellulaire (urée, lactate,...) vers les organes de détoxication que sont le foie et les reins.

Le sang occupe également d'autres fonctions, sur lesquelles nous reviendrons dans un chapitre ultérieur.

• Circulation sanguine

Nous n'allons détailler qu'un seul cycle circulatoire, considérant pour point de départ (et d'arrivée) le cœur, ou, en fait, pour point de départ le ventricule droit, et pour point d'arrivée l'oreillette droite.

La circulation réelle est bien entendu continue, le cœur fonctionnant, à l'état physiologique, sans arrêt, et le sang s'écoulant de manière continue.

Comme introduit dans la dernière section, le sang parcourt le corps essentiellement pour approvisionner celui-ci en oxygène et le nettoyer des différents déchets.

Dans un premier temps, le sang quitte le cœur, par le ventricule droit, via l'artère pulmonaire puis les alvéoles pulmonaires dans les poumons, où il capte de l'oxygène – provenant de la respiration –, et se libère du gaz carbonique – éjecté par l'expiration.

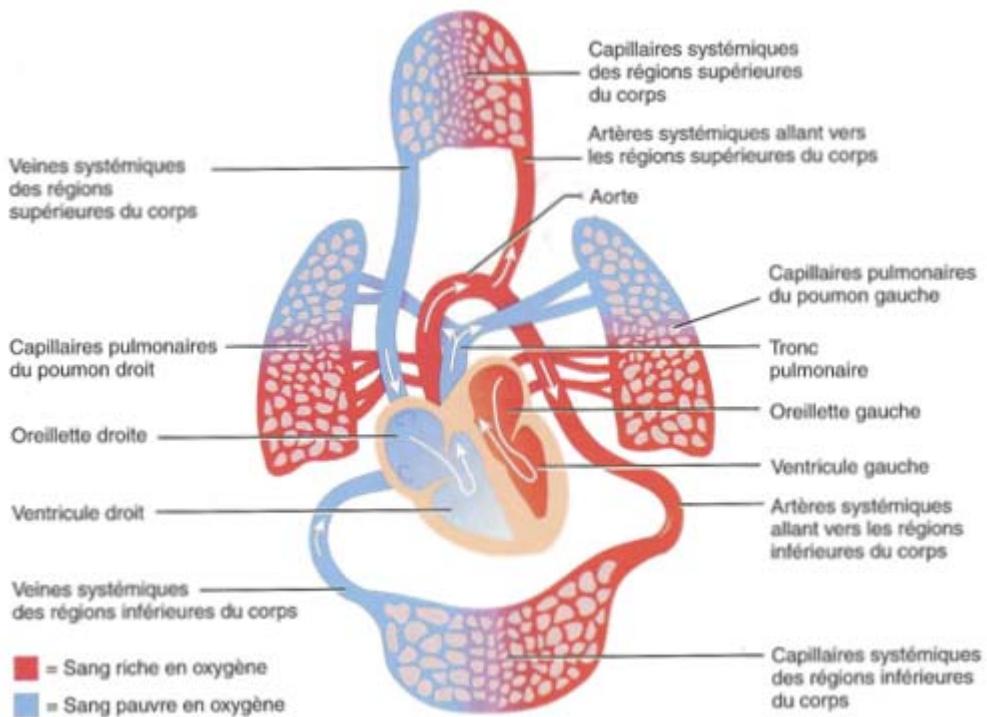
Le sang est alors reconduit, via les veines pulmonaires, vers le cœur, ou plus précisément vers l'oreillette gauche puis vers le ventricule gauche (les différents mécanismes de pompes relatifs au cœur ainsi que les différentes parties de celui-ci seront explicités plus tard, dans un chapitre spécifique au cœur) qui va alors l'envoyer, par l'intermédiaire de l'aorte et de ses différentes artères, vers les différents organes. Les artères se ramifient sans cesse, devenant

³ Notons que, pour la facilité de la lecture, toutes les données ainsi citées le sont pour un homme adulte de corpulence normale. S'il s'avérait que des données concernant d'autres individus étaient nécessaires et ainsi introduites, cela serait bien entendu précisé dans le texte.

⁴Homéostasie : processus de régulation par lequel l'organisme maintient les différentes constantes du milieu intérieur (ensemble des liquides de l'organisme) entre les limites des valeurs normales (Larousse Médical 2006).

des artéries puis des capillaires. C'est au niveau des lits capillaires qu'ont lieu les échanges entre le sang et les tissus. Ensuite, les capillaires se rejoignent pour former de petites veines (veinules), qui se regroupent en veines, qui vont reconduire le sang faiblement oxygéné vers l'oreillette droite, via les veines caves (supérieure et inférieure), avant d'être à nouveau envoyé vers le ventricule droit.

La figure suivante présente schématiquement le mécanisme de circulation décrit ci-dessus.



5

Figure 1 : Circulation schématique du sang à travers le corps

• Remarques et autres données

Ce dernier paragraphe se veut d'introduire des informations que l'on pourrait qualifier de moins importantes pour l'étude qui nous concerne, mais n'étant pas pour autant sans intérêt.

En plus des fonctions principales introduites plus haut, le sang sert également de régulateur, maintenant le pH par effet tampon ($\text{pH} \in [7,35; 7,45]$), la température et la teneur en eau des cellules. De plus, il sert également de protecteur vis-à-vis des blessures (possibilités de coagulation empêchant la perte trop importante de sang) et des maladies (contenu et apport de protéines).

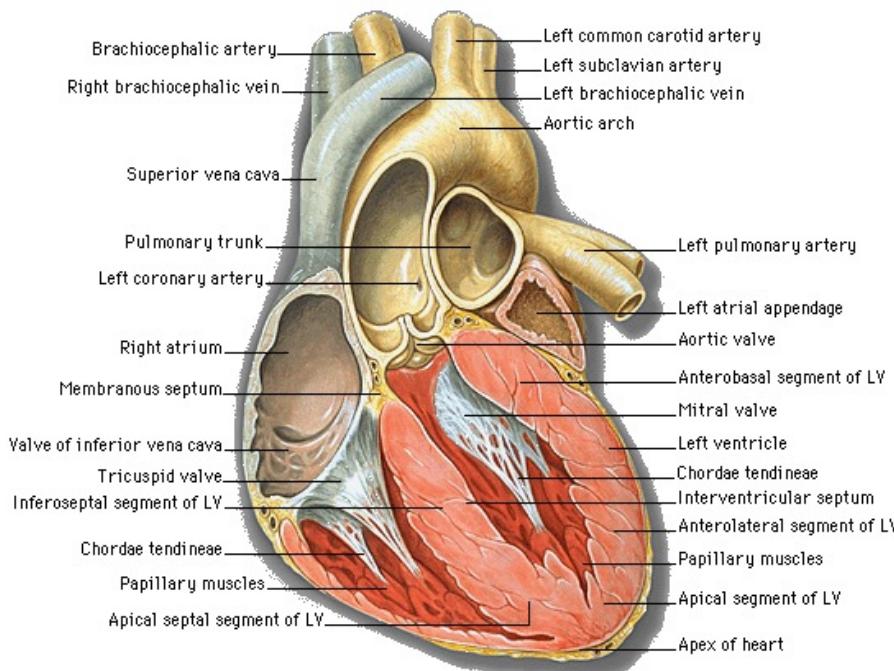
Enfin, pour clôturer ce chapitre, il est amusant de relever quelques chiffres, histoire de se

⁵ Image provenant du livre ‘Principes d’Anatomie et de Physiologie’, par Tortora & Grabowski

rendre compte au mieux de l'importance du système étudié. Le réseau sanguin mesure quelques 100000km, ce qui représente plus de deux fois le tour de la terre. En considérant qu'une personne peut marcher quelques 25-30km par jour, il lui faudrait ainsi une dizaine d'année pour en faire le tour. De même, en une journée de repos, le cœur pompe plus de 14000L, et quelques 10 millions de litres en un an.

1.2 LE CŒUR, POMPE DU SYSTÈME

Comme il a été dit précédemment, le cœur est l'organe qui propulse le sang à travers le réseau sanguin, il effectue de ce fait un travail équivalent à celui d'une pompe.



6

Figure 2 : Représentation complète du cœur

Rappelons que le cœur envoie du sang vers les poumons, où il est recyclé, pour ensuite le recevoir de ces mêmes poumons, l'envoyer – via les artères – vers les cellules du corps et, finalement, le récolter – via les veines – afin de recommencer le cycle.

1.2.1 ANATOMIE DU COEUR

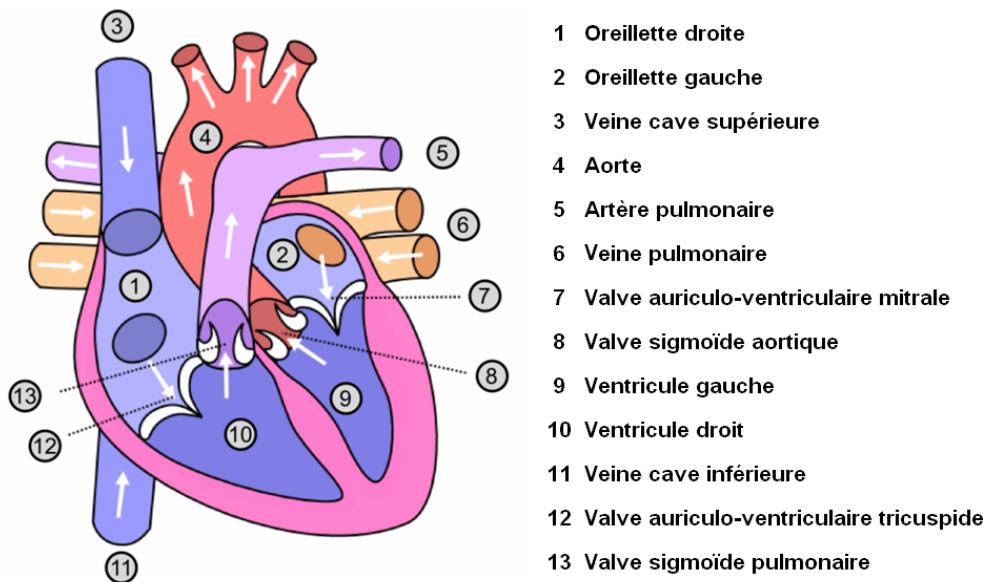
Avant d'en venir au but précis de cette section, soit les différentes phases de la révolution cardiaque au cours d'un cycle, il est intéressant de s'attarder un temps soit peu à l'anatomie cardiaque et à la relation du cœur avec les poumons d'une part, et avec le reste du corps d'autre part.

⁶ Image empruntée sur <http://www.poirpom.com>

Avant toute chose, notons que le cœur se situe sur la gauche du sternum, entre les poumons, et qu'il est protégé par la cage thoracique.

Le cœur est un organe un peu plus volumineux qu'un poing fermé. Il est une double pompe musculaire dont les deux parties fonctionnent à l'unisson, propulsant le sang dans tous les organes du corps. On peut schématiquement le diviser en une partie gauche et une partie droite⁷, chacune de ces parties comprenant une oreillette et un ventricule, les oreillettes étant postérieures aux ventricules. La séparation entre les ventricules droit et gauche est faite par une paroi musculaire épaisse appelée septum.

Avant de rentrer dans les détails, il paraît nécessaire d'utiliser un schéma du cœur, afin de maîtriser les termes utiles à une description plus complète du mécanisme de circulation sanguine.



8

Figure 3 : Vocabulaire relatif au cœur

L'oreillette droite forme le bord droit du cœur et reçoit le sang veineux des veines caves et du sinus coronaire. Lors de la contraction de l'oreillette droite, le sang franchit la valve tricuspidale et atteint le ventricule droit.

Le ventricule droit entre dans la constitution de la majeure partie de la face antérieure du cœur, d'une partie de sa face diaphragmatique et de la presque totalité de son bord inférieur. Lors de la contraction ventriculaire droite, le sang – en franchissant la valve pulmonaire – se

⁷ Notons que ces orientations sont à faire par rapport à l'individu, et pas par rapport à l'observateur.

⁸ Image empruntée sur Wikipédia

retrouve dans l'artère pulmonaire et se dirige vers les alvéoles pulmonaires, où il sera enrichi en O₂ et appauvri en CO₂. Il regagnera alors l'oreillette gauche via les veines pulmonaires.

L'oreillette gauche occupe la majeure partie de la base du cœur. Elle reçoit le sang oxygéné qu'elle propulse à travers la valve mitrale dans le ventricule gauche.

Le ventricule gauche forme l'apex et la presque entière partie de la face gauche du cœur, ainsi qu'une partie de la face diaphragmatique. Le ventricule, lors de sa contraction, propulse le sang, à travers la valve aortique, vers l'aorte et ses différentes branches.

Notons que le cœur est vascularisé par les artères coronaires.

La partie de la pompe « oreillette et ventricule droit » assure la circulation dite pulmonaire, c'est-à-dire le passage du sang vers les poumons. La partie « oreillette et ventricule gauche » assure, elle, la circulation dite systémique, propulsant le sang oxygéné vers tous les organes du corps.

Les différentes valves occupent un rôle plus ou moins semblable aux valves que l'on peut trouver en plomberie ou dans n'importe quel appareil hydraulique, c'est-à-dire qu'elles permettent au liquide le passage dans un sens uniquement, empêchant tout reflux non désiré. Les ouvertures et fermetures des différentes valves se font par les différences de pression entre les cavités ; soit oreillette et ventricule pour les valves auriculo-ventriculaires ou ventricule et artère pour les valves sigmoïdes.

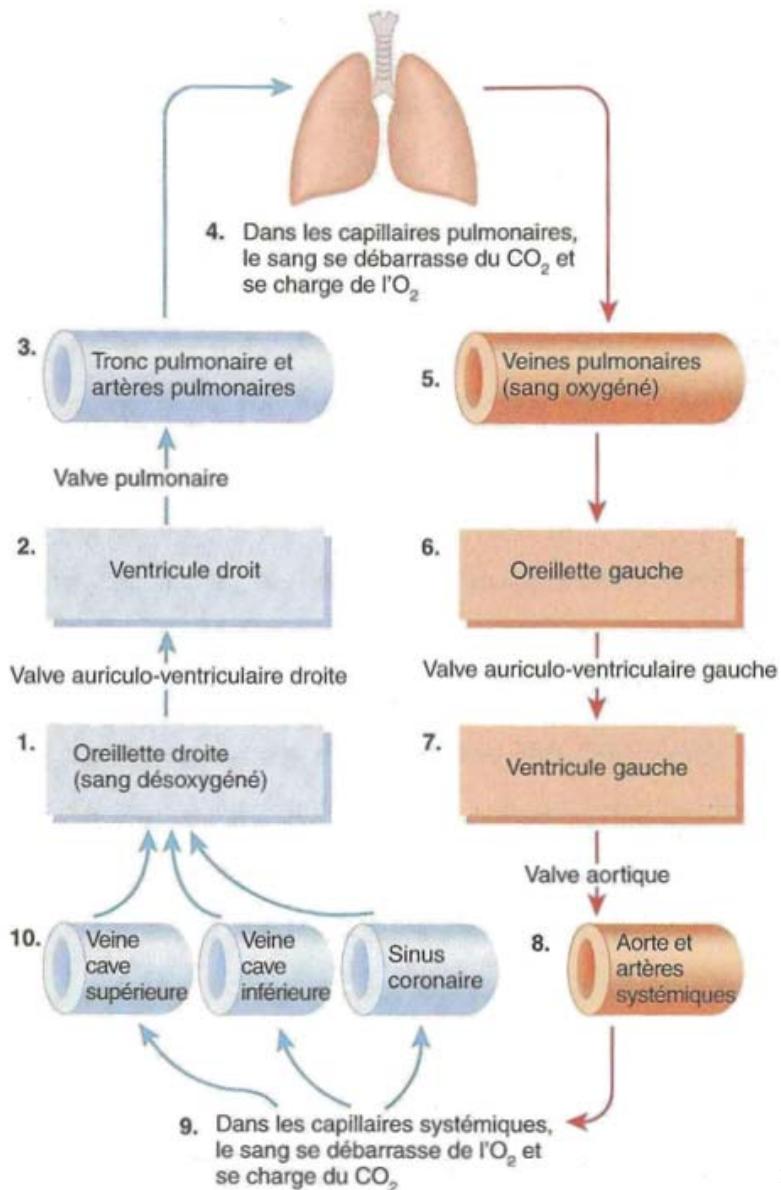
1.2.2 MÉCANISME DE POMPE

Nous pouvons maintenant en venir au sujet qui nous intéresse dans cette section, soit la manière dont le cœur fonctionne effectivement.

La révolution cardiaque peut être divisée en 3 parties, successivement appelées « Fin de la diastole⁹ », « Systole¹⁰ » et « Début de la diastole ventriculaire ».

⁹ Du grec *διαστολή*, qui signifie expansion. Il s'agit donc du relâchement de la cavité.

¹⁰ Du grec *συστολή*, qui signifie contraction. Il s'agit donc de la contraction de la cavité.



11

Figure 4 : Circulation schématique du sang à travers le cœur (et le corps)

• Première phase, fin de la diastole

- Les valves auriculo-ventriculaires sont ouvertes, de par la différence de pression entre l'oreillette et le ventricule (la pression est plus faible dans le ventricule que dans l'oreillette) ;
- Les valves sigmoïdes sont fermées (pression ventriculaire trop faible que pour les ouvrir) ;
- Le ventricule reçoit du sang provenant de l'oreillette, par différence de pression ;
- Par excitation, la pompe est mise en marche. Cette excitation est nerveuse et totalement

¹¹ Image provenant du livre ‘Principes d’Anatomie et de Physiologie’, par Tortora & Grabowski

indépendante, elle est provoquée par ce qu'on appelle un nœud de *Keith-Flack* ;

- **Deuxième phase, la systole**

- Systole ventriculaire, la pression dans le ventricule augmente, ce qui provoque la fermeture des valves auriculo-ventriculaires et l'ouverture des valves sigmoïdes, le sang est ainsi chassé vers l'artère, à nouveau par différence de pression, entre l'artère et le ventricule cette fois.

- **Dernière phase, début de la diastole ventriculaire**

- La pression ventriculaire diminue, pour finalement devenir inférieure à la pression dans l'artère, ce qui a pour effet de fermer les valves sigmoïdes ;
- Pendant la période de systole ventriculaire préalable (période pendant laquelle le sang se trouvait dans le ventricule), l'oreillette s'est remplie de sang (mouvement continu), la pression auriculaire a donc augmenté. En diminuant, la pression ventriculaire devient donc également inférieure à la pression auriculaire, ce qui permet de rouvrir les valves auriculo-ventriculaires et le début d'un nouveau remplissage ventriculaire.

1.2.3 DÉBIT ET AUTRES INFORMATIONS ANNEXES

Le débit est défini comme étant le volume de sang éjecté du ventricule gauche vers l'aorte, ou du ventricule droit vers le tronc pulmonaire, par minute, il est ainsi fonction de la fréquence cardiaque et du volume de sang éjecté par contraction.

On conçoit qu'il est difficilement mesurable en tant que tel, c'est pourquoi il faut avoir recours aux mesures différentes de la fréquence cardiaque (*FS*) et du volume éjecté à chaque contraction (*VS*). Le débit cardiaque (*DC*) est fonction du produit de ses deux données, soit en fait

$$DC = VS \cdot FC$$

Pour un homme adulte au repos, on a un débit d'environ 5L par minutes,

$$\begin{aligned} DC &= 70 \text{ ml/batt} \cdot 75 \text{ batt/min} \\ &= 5,25 \text{ L/min} \end{aligned}$$

On peut noter que cela correspond à peu de choses près au volume total de sang contenu dans le corps. On en conclut ainsi que la totalité du sang dans le corps est recyclée toutes les minutes.

Lors d'activités physiques modérées, le débit peut monter jusqu'à quelques 10L/min et même atteindre près de 20L/min lors d'efforts intenses.

On parle également de réserve cardiaque. La réserve cardiaque caractérise la potentialité d'un

individu à pouvoir fournir un effort, chiffrant en quelques sortes la réserve d'activité pour le cœur. Elle se calcule selon la formule suivante

$$RC = DC_{\max} - DC_{\text{repos}}$$

Il s'agit donc de la différence entre le débit cardiaque maximal mesuré – c'est-à-dire en effort intense – et le débit cardiaque au repos. En général, le débit cardiaque est plus ou moins quatre fois plus important lors d'efforts physiques, mais, pour les grands sportifs, il peut devenir jusqu'à huit fois plus important, ce qui nous donne une réserve cardiaque fort importante.

1.3 LES VAISSEAUX SANGUINS

Malgré le fait que ceux-ci aient déjà été mentionnés à plusieurs reprises dans les paragraphes précédents, il semble intéressant de s'attarder de manière plus précise sur les voies qui constituent le parcours de la circulation sanguine, à savoir les vaisseaux sanguins.

En effet, premièrement, nous nous sommes jusqu'à présent limité à citer ceux-ci ; ensuite, le travail central de ce rapport consiste en l'étude de la pression au sein même de ses vaisseaux, il semble dès lors plutôt nécessaire de les étudier plus précisément.

Nous allons ici nous limiter à la classification des vaisseaux sanguins en artères, veines et capillaires. Si le lecteur désire plus de précisions quant aux répartitions des artères et veines à travers le corps, il pourra se référer à l'annexe 1 de ce travail. De plus, un schéma plus précis de la partie du corps nous concernant, à savoir le bras, y est présenté également.

Les vaisseaux sanguins sont de trois types, à savoir les artères, les veines et les capillaires. La distinction entre ces différents types se marque au niveau de leur positionnement propre par rapport au cœur. Les artères sont en fait les vaisseaux qui quittent le cœur, tandis que les veines sont ceux qui reviennent au cœur.

De manière à situer au mieux les différentes voies de circulation, il est intéressant de retourner à la figure 1.

• Les artères

Les artères sont les vaisseaux qui quittent le cœur. Si l'on met de côté l'artère pulmonaire, qui quitte le cœur au niveau du ventricule droit – et amène donc le sang désoxygéné vers les poumons afin de le réoxygénier –, les artères contiennent du sang oxygéné, et transportent celui-ci du cœur au réseau capillaire.

L'artère principale bien connue est l'aorte, et est en fait l'artère qui quitte le cœur. Au fur et à mesure que les artères s'éloignent du cœur, elles se ramifient en différents branchements et

deviennent de plus en plus petites.

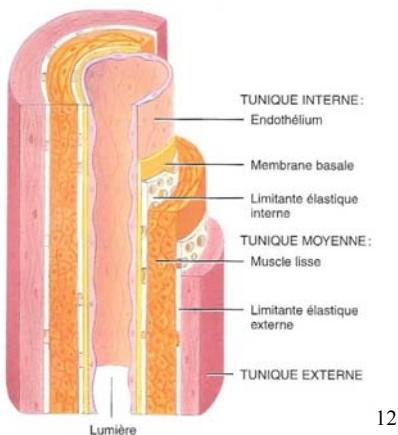


Figure 5 : Coupe dans une artère

• Les capillaires

Les capillaires sont très petits, et sont en fait des vaisseaux aux parois très fines qui connectent les artères et les veines au sein des organes nécessitant de l'oxygène.

Leurs parois minces permettent les échanges au sein des organes, échanges d'oxygène, de gaz carbonique ou encore de nutriments.

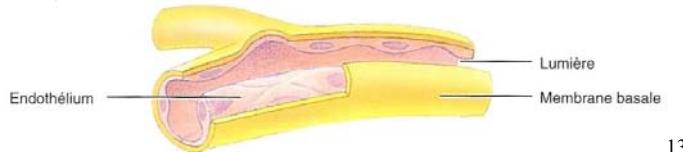


Figure 6 : Coupe dans un capillaire

• Les veines

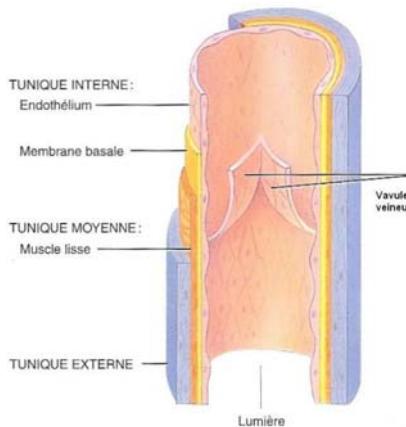
Finalement, les veines sont donc les vaisseaux qui reviennent vers le cœur et donc, si l'on met de côté la veine pulmonaire – qui revient des poumons vers l'oreillette gauche avec du sang oxygéné –, il s'agit de vaisseaux qui ramènent du sang désoxygéné – et contenant des déchets – vers le cœur.

Contrairement aux artères, les veines deviennent de plus en plus grandes et se rassemblent au fur et à mesure qu'elles se rapprochent du cœur.

Les deux veines principales, qui ramènent le sang au cœur (en quelque sorte l'équivalent de l'aorte), sont la veine cave supérieure et la veine cave inférieure.

¹² Image provenant du livre ‘Principes d’Anatomie et de Physiologie’, par Tortora & Grabowski

¹³ Image provenant du livre ‘Principes d’Anatomie et de Physiologie’, par Tortora & Grabowski



14

Figure 7 : Coupe dans une veine

• Remarques

Il est intéressant d'ajouter quelques remarques aux diverses notions qui viennent d'être introduites concernant les vaisseaux sanguins.

A plusieurs reprises, nous avons mentionné le fait que les artères se ramifiaient, pour, de fil en aiguille, arriver aux capillaires, qui sont très petits et très fins. Dans ces deux affirmations, deux mots ont une signification relativement importante, et qu'il est nécessaire de préciser, il s'agit de « ramifier » et « petits ».

L'importance de la ramification est telle que, pour l'étude de celle-ci, la géométrie classique atteint ses limites, et l'on doit avoir recourt à la géométrie des fractales.



15

Figure 8 : Coupe micro-angiographique RX d'un cœur

On situe également sur cette figure combien les dimensions des capillaires sont petites.

Enfin, tandis que les capillaires sont très fins, ils forment un lit de section transversale

¹⁴ Image provenant du livre 'Principes d'Anatomie et de Physiologie', par Tortora & Grabowski

¹⁵ Image empruntée sur <http://imagerie-cv.univ-lyon1.fr/>

relativement élevée par rapport aux sections artérielles et veineuses, de telle sorte que la vitesse de l'écoulement, dans ces capillaires, est extrêmement faible, facilitant de la sorte les échanges.

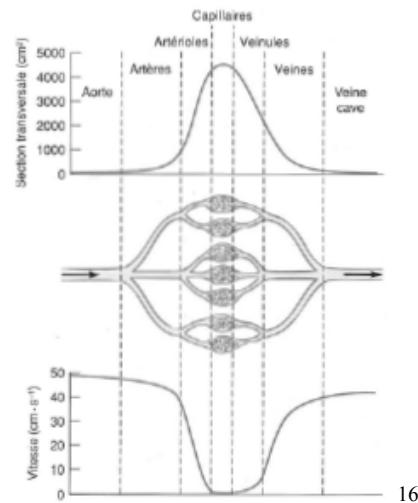


Figure 9 : Section transversale et vitesse de l'écoulement sanguin

¹⁶ Image empruntée sur <http://neurosciences.univ-fcomte.fr>

2. LA PRESSION ARTÉRIELLE¹⁷

Comme son nom l'indique, la pression est en fait la pression hydrostatique exercée par le sang sur les parois des vaisseaux sanguins.

Cette pression est, comme introduit précédemment, produite par la contraction du ventricule, qui éjecte le sang dans l'aorte, avant d'être distribué à travers l'ensemble du corps humain.

Cette pression est fonction principalement de deux phénomènes, soit la pression au niveau du cœur – c'est-à-dire la force avec laquelle le cœur envoie le sang dans l'aorte –, mais également l'élasticité des parois artérielles. Une analogie électrique permet d'illustrer la phrase précédente de meilleure manière. La différence de potentiel de part et d'autre d'un circuit s'exprime par la formule suivante

$$V = R \cdot i$$

avec

- V , la différence de potentiel aux bornes du circuit, analogue à la différence de pression aux bornes du réseau ;
- R , la résistance du circuit au passage du courant, analogue à la résistance des vaisseaux sanguins face à l'écoulement du sang ;
- i , le courant qui traverse le réseau, analogue au débit sanguin.

Notons également que la pression est fonction du volume total de sang dans le corps et que, pour toute diminution (ou augmentation) conséquente (de l'ordre de 10%) de celui-ci, on observera une diminution (ou augmentation) relative de la pression dans le corps.

Dans un premier temps, nous allons faire abstraction du terme de résistance, et nous concentrer ainsi uniquement sur la pression en elle-même, ses caractéristiques générales et ses particularités.

Ensuite, nous en viendrons aux différents effets secondaires – soit les phénomènes de résistance des vaisseaux sanguins face à l'écoulement du sang en leur sein – qui influencent la pression.

¹⁷ On parle indifféremment de pression ou tension artérielle. La première expression est plus stricte, suivant la définition faite physiquement de la pression. La seconde expression fait elle référence au fait que la pression amène une tension des parois des vaisseaux sanguins.

Enfin, pour finir ce premier chapitre sur la pression, nous passerons en revue quelques phénomènes intéressant de régulation dynamique.

2.1 NOTIONS DE PRESSION

Comme toute pression, l'unité de mesure est le Pascal, cependant, pour des raisons de commodité et d'habitude, celle-ci est exprimée en millimètres de mercure, soit mmHg.

La pression artérielle n'est pas constante. On le comprend très bien si on se remémore le mécanisme de propagation du sang à travers le corps. Les successions de contraction et de relaxation des ventricules produisent bien entendu des fluctuations de pression. On parle ainsi de pression systolique lors de la contraction du ventricule et de pression diastolique lors de la relaxation, les termes systolique et diastolique ayant bien entendu les mêmes significations que précédemment.

La pression systolique correspond en fait à la force de contraction du ventricule, alors que la pression diastolique nous renseigne sur la pression minimale au sein des vaisseaux, et nous donne ainsi, elle, des informations sur la résistance périphérique exercée par ces vaisseaux.

La pression moyenne peut être évaluée mathématiquement selon la formule suivante¹⁸

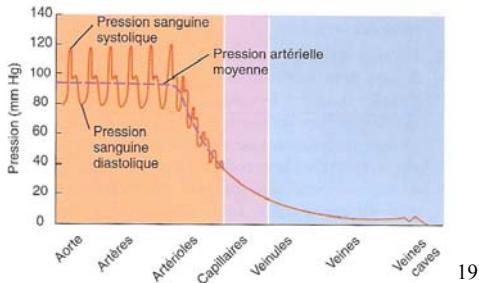
$$PAM = \frac{1}{3} \cdot (P_{systolique} + 2 \cdot P_{diastolique})$$

La pression sera cependant toujours exprimée par deux nombres, soit les deux pressions relevées. La pression artérielle moyenne est alors facilement évaluable. Une pression dite normale sera une pression de 120/80, ce qui nous donne une PAM d'environ 93mmHg. Notons, encore une fois, que cette pression est fictive, la pression réelle fluctuant entre les valeurs extrêmes des pressions systolique et diastolique.

Au fur et à mesure de son voyage à travers le corps, le sang exerce une pression décroissante sur les parois des différents types de vaisseaux sanguins, partant d'une valeur maximale au niveau du ventricule gauche, pour revenir au cœur – au niveau de l'oreillette droite – avec une

¹⁸ La formule est établie de manière telle qu'elle prend implicitement en compte la durée des différentes phases de la révolution cardiaque. Ces durées n'ont pas été introduites précédemment, mais on peut facilement se rendre compte de la différence de durée entre les deux phases en écoutant les battements du cœur, qui sont une succession – à intervalles constants si on considère que le corps reste dans le même domaine d'activité – de deux battements distincts et successifs. Les deux sons de ces battements correspondent en fait aux bruits de fermeture des différentes valves internes au cœur, le premier son correspondant à la fermeture des valves auriculo-ventriculaires lors de la systole, et le second à la fermeture des valves sigmoïdes lors de la diastole ventriculaire.

pression presque nulle. L'écoulement se fait ainsi sous un gradient de pression. Sans ce gradient de pression, il est bien évident qu'il n'y aurait aucun écoulement.



19

Figure 9 : Pression dans les différents types de vaisseaux sanguins

On voit ci-dessus que la pression artérielle moyenne (PAM) part d'une valeur proche de 90mmHg au niveau du ventricule gauche et de l'aorte, pour diminuer fortement lors du passage dans les vaisseaux plus étroits (artéries et capillaires). Dans les veines, elle se stabilise à une valeur proche de 10mmHg, pour finalement devenir pratiquement nulle lors de son entrée dans l'oreillette droite.

On voit également très clairement la manière dont la pression réelle varie autour de la valeur moyenne, ainsi que les successions de pression systolique et diastolique.

2.2 EFFETS DISSIPATIFS

Il existe, comme dans tout système d'écoulement de fluide, des forces qui ont un effet dissipatif, et qui s'oppose donc au débit sanguin. On a en fait

$$DC = \frac{PAM}{R}$$

Pour rappel, DC est le débit cardiaque et R est la résistance caractérisant l'effet dissipatif. On remarque bien entendu l'analogie avec la formule de résistance électrique introduite précédemment.

Comme dans une conduite ou un canal, cette résistance est fonction de la section mouillée – par l'intermédiaire du rayon –, de la viscosité du fluide en présence – ici le sang –, et bien entendu de la longueur totale des voies de circulation, soit les vaisseaux sanguins.

L'ensemble des résistances effectuées par les vaisseaux est repris sous le terme de résistance périphérique.

En quelques mots, les différentes contributions sont les suivantes

¹⁹ Image provenant du livre ‘Principes d’Anatomie et de Physiologie’, par Tortora & Grabowski

- La résistance est inversement proportionnelle au rayon des vaisseaux, $R \propto \frac{1}{r^4}$, les vaisseaux les plus petits étant donc ceux offrant le plus de résistance, alors que l'aorte et les veines caves n'en offrent presque pas, la proportion de sang rentrant en contact avec les parois étant faible ;
- La viscosité²⁰ du sang augmente bien entendu la résistance à l'avancement du fluide, et donc la pression à exercer ;
- La longueur totale des vaisseaux sanguins augmente, elle aussi, la résistance à l'avancement.

2.3 CONTRÔLE ET RÉGULATION

Nous n'allons pas ici rentrer dans les détails, il semble juste intéressant de noter que les mécanismes de régulation de la pression artérielle sont très fins.

Il faut entendre par là qu'à plusieurs niveaux et de plusieurs manières, des mécanismes d'autorégulation sont mis en place, contrôlant ainsi la pression artérielle et le débit cardiaque au sein des vaisseaux sanguins. Ces différents mécanismes agissent tantôt de manière lente, tantôt de manière subite et presque instantanée, suivant les besoins.

Les moyens utilisés pour la régulation sont, principalement,

- Le système nerveux, via les informations données par les barorécepteurs²¹ et les chimiorécepteurs²², régissant la pression via des boucles de rétro-inhibition ;
- Les hormones (rénine,adrénaline,hormone antidiurétique,...), produites quand il est nécessaire, de manière à modifier tel ou tel composant de la chaîne pression, entendu par là, par exemple, la possibilité de contracter les vaisseaux²³ ou encore d'augmenter la masse sanguine.

²⁰ La viscosité du sang est proportionnelle à la fraction interne de globules rouges par rapport au volume plasmatique, et à la concentration de protéines dans le plasma.

²¹ Surveillent la pression sanguine.

²² Surveillent la composition chimique du sang.

²³ On parle en fait de vasoconstriction ou encore de vasodilatation suivant le cas de figure.

3. POURQUOI ÉTUDIER LA PRESSION ARTÉRIELLE

INTRODUCTION

Comme introduit dans le paragraphe précédent, la pression est la force exercée par le sang sur les parois des vaisseaux sanguins. Nous avons également vu qu'une pression artérielle physiologique se situait dans la zone 120/80mmHg, où les deux nombres correspondent respectivement à la pression systolique et à la pression diastolique.

Les valeurs possibles de la pression se situent sur un ensemble continu, et il n'y a pas clairement de valeurs limites précises. Cependant, si la valeur mesurée s'éloigne de manière trop importante de la valeur standard, le sujet peut présenter des symptômes inconfortables qui peuvent devenir relativement conséquents. Dans le cas d'une augmentation de la pression, on parlera d'hypertension ; tandis que dans le cas d'une diminution de la pression, on parlera d'hypotension. Si l'hypertension est à éviter absolument, pour de multiples raisons que nous découvrirons plus bas, le second phénomène – à savoir donc celui de l'hypotension –, est moins critique, ou, s'il l'est, il amène alors des problèmes plus momentanés, et engendre rarement des problèmes chroniques.

Dans ce chapitre, nous allons successivement évoquer les deux phénomènes critiques, en s'attardant cependant un peu plus sur celui de haute pression, étant donné les conséquences plus néfastes et dangereuses de celui-ci.

Pour ce qui est de la basse tension, nous nous contenterons d'introduire globalement le phénomène, ses manifestations et enfin les causes et solutions relatives envisageables.

Enfin, pour ce qui est de la tension surélevée, nous nous attarderons un peu plus sur les dangers concrets. L'hypertension étant en fait d'une part plus dangereuse, et d'autre part plus répandue. Etant donné l'effectif danger de l'hypertension, un chapitre particulier y sera d'ailleurs consacré.

Notons que nous ne présentons ces phénomènes que succinctement dans le rapport. Si le lecteur veut en savoir plus sur les sources et les solutions relatives aux deux problèmes de tensions développés dans ces pages, il est invité à consulter l'annexe 2.

3.1 L'HYPOTENSION ARTÉRIELLE

Nous venons de dire que les problèmes liés à la basse tension sont nettement moins importants, entendu par là qu'ils posent moins de problèmes sur le long terme. Sous certaines limites d'écart par rapport à la normale, celle-ci est même souhaitable, il faut cependant que

cette pression reste suffisante que pour le gradient de pression nécessaire à la circulation du sang à travers l'entièreté du corps soit effectivement présent. On parle de basse tension, ou encore d'hypotension, uniquement lorsque celle-ci peut causer des complications. Si l'on ne détecte pas de symptômes ou de problèmes, l'hypotension n'est pas considérée comme dangereuse pour la santé. Ces symptômes ont déjà été expérimentés par la plupart d'entre nous, par exemple lorsque nous quittons, de manière brusque, une position de repos pour une position debout²⁴. Les symptômes sont en fait un sentiment de vertige et peuvent se manifester par un léger évanouissement, allant parfois jusqu'à la syncope.

Dans la plupart des cas, le corps est capable de réagir rapidement à cette baisse de tension subite, de réguler la circulation du sang et de reprendre son fonctionnement normal. Si le phénomène est chronique, il convient d'effectuer des tests²⁵ et d'envisager un traitement.

3.2 L'HYPERTENSION

Comme dit précédemment, l'hypertension est clairement dangereuse, c'est pourquoi, après un bref aperçu du phénomène, nous nous attarderons quelque peu sur ces dangers.

3.2.1 LE PHÉNOMÈNE

L'hypertension est l'existence d'une pression trop importante dans les artères. L'augmentation de la tension peut être provoquée par de nombreuses choses, du simple choc émotionnel ou du stress, jusqu'aux raisons physiologiques plus conséquentes.

Comme cité précédemment, il est difficile de situer une barrière précise au-delà de laquelle on parlerait d'hypertension, on procède en fait plus par marges. On parle ainsi de tension normale si on se situe dans les environs d'une pression 120/80mmHg, de pré-hypertension jusqu'à 139/89mmHg et d'hypertension au-delà. Des analyses statistiques montrent qu'à partir d'une tension 115/75mmHg, les risques cardiovasculaires doublent pour chaque incrément de la pression de 20/10mmHg.

Enfin, on parle de pression pulsatoire (*PP*), comme étant la valeur additionnelle de pression

²⁴ La mise en position debout a pour effet d'augmenter la pression dans les zones basses du corps, pas effets de gravité. De la même manière, la pression dans les parties hautes du corps a tendance à diminuer brusquement. Si la pression était déjà basse par la condition de repos du sujet, elle peut de ce fait devenir inférieure à une certaine valeur critique, provoquant dès lors les dérangements cités.

²⁵ Ces tests (Multiples... Mesure électrolyte du sang, niveau de cortisol, électrocardiogramme...) servent principalement à trouver l'explication juste au phénomène observé.

due à la systole, elle s'évalue donc simplement en prenant la différence entre la pression systolique et la pression diastolique, soit

$$PP = P_{\text{systolique}} - P_{\text{diastolique}}$$

3.2.2 DANGERS DE L'HYPERTENSION

L'hypertension est donc la manifestation d'une pression trop importante du sang, et donc d'un travail trop important du cœur pour fournir cette pression. Grâce à cette simple phrase, on peut aisément conclure des principaux dangers²⁶ de l'hypertension, ceci en reformulant plus schématiquement la précédente affirmation :

- Augmentation du travail cardiaque, avec hypertrophie concentrique de celui-ci ;
- Force exercée sur les parois trop importante.

De là, on en arrive à une série de problèmes relativement graves générés par l'hypertension. La liste ci-dessous n'est pas exhaustive, mais elle reprend les plus graves possibilités de problèmes de santé engendrés.

- Hypertrophie concentrique du muscle cardiaque, pouvant aller jusqu'à la décompensation cardiaque ;
- Insuffisance rénale chronique ;
- Dommages oculaires ;
- Ruptures et chocs cérébraux ;
- ...

Enfin, on peut noter la dramatique présence des personnes sujettes à de l'hypertension. Aux Etats-Unis, un quart de la population adulte souffre de pression sanguine trop élevée. En Belgique, 12% de la population en est atteinte, alors que des chiffres européens parlent de quelques 20% en moyenne dans les pays industrialisés. Les risques d'hypertension augmentent avec l'âge, et les pourcentages atteignent quelques 60% chez les personnes âgées (En fait, la PP augmente, de par une diminution de la pression diastolique, et amène ainsi des problèmes comparables aux problèmes de résistance à la fatigue).

De plus, des observations montreraient que près d'un cas sur deux des sujets atteints est asymptomatique. De même, les prémisses des problèmes se font de manière très silencieuse, il

²⁶ Il ne s'agit pas à proprement parler des dangers, mais plus des principales conséquences physiologiques des deux manifestations précédemment citées.

est donc souvent fort tard quand on remarque le phénomène. Cependant, certains symptômes sont parfois observables, comme les maux de tête répétés, les vertiges fréquents, une respiration difficile et courte, des troubles de la vision...

Il est alors à espérer que la première visite chez un docteur sera effectuée à temps²⁷, sous faute de quoi la pression amènera presque irrémédiablement aux problèmes cités plus haut. En effet, l'hypertension chronique conduit à une augmentation de la rigidité des artères périphériques, ce qui conduit le cœur à travailler beaucoup plus pour un même travail effectif. De fil en aiguille, les problèmes sérieux sont rapidement engendrés et cumulés, que ce soit par élargissement du cœur, par travail excessif ou par problèmes artériels dus à des forces internes de plus en plus importantes.

Les problèmes cérébraux sont eux engendrés par des hémorragies²⁸ ou des thromboses²⁹. Les dommages observés peuvent être paralytiques, sensitifs (aphasie³⁰, troubles de la vision) ou encore conduire à la démence.

²⁷ C'est-à-dire avant l'attaque critique et alors détectable d'un organe, comme par exemple une rupture cardiaque ou rénale, ou encore des dommages cérébraux.

²⁸ Perte de sang.

²⁹ Pathologie générée par la présence de caillots de sang dans les veines, caillots empêchant la bonne circulation du sang.

³⁰ Troubles du langage.

4. COMMENT ÉTUDIER LA PRESSION ARTÉRIELLE

4.1 MÉTHODES ACTUELLES DE MESURE

L'appareil utilisé pour la mesure de la pression artérielle s'appelle un sphygmomanomètre³¹. Celui-ci est composé de plusieurs éléments, dont chacun a bien évidemment son importance, soit

- Un brassard, en caoutchouc, qui est placé autour du bras³² de manière à exercer une pression sur les vaisseaux du bras ;
- Une pompe en forme de poire, qui sert à gonfler et dégonfler le brassard ;
- Une valve, reliée à la pompe, qui sert à vérifier les vitesses d'exécution ;
- Un manomètre, soit à mercure, soit anéroïde ;
- Un stéthoscope, appareil servant à amplifier les sons, que l'on place sur le bras pour détecter le passage du sang.

Nous allons maintenant en venir au mode opératoire. Chaque point de l'opération est à respecter scrupuleusement et avec attention, de manière à obtenir les mesures les plus précises possibles. Pour plus de clarté, nous avons ici décomposé l'opération en quelques étapes.

• Mise en condition

Le sujet doit être au calme et en position de repos, c'est-à-dire assis, bras tendu et relaxé. Notons qu'il faut bien évidemment que le sujet évite toute consommation de produits provoquant des élévations (ou diminutions) temporaires de pression, le but étant de prendre la pression considérée comme étant la pression habituelle du sujet. C'est ainsi qu'il faut éviter de manger, de fumer ou de boire du café dans l'heure précédent les mesures. Enfin, tout effort physique est à proscrire, on veillera donc à ce que le patient observe quelques 10 minutes d'inactivités avant l'opération.

Un point important est ici à noter, il s'agit d'un effet que l'on appelle « Effet de la veste blanche ». Il est en effet prouvé que les mesures en milieu hospitalier peuvent être tronquées par le stress du patient dans ce genre de situations, le médecin doit donc veiller à un plus

³¹ L'appareil est présenté à l'annexe 13 de ce travail.

³² Nous reviendrons plus tard sur le positionnement de l'appareillage ainsi que sur les méthodes de mise en place et de manipulation.

grand calme possible de son patient. Il est cependant à noter que si le patient est sujet à ce genre d'augmentation rapide de la pression en cas de stress, il faut quand même être attentif à sa santé.

- **Première phase, mise en place des instruments**

Une fois le sujet en conditions, on peut commencer le mode opératoire.

La toute première chose à faire est de placer le brassard autour du bras, au niveau de l'artère brachiale, c'est-à-dire quelques centimètres au dessus du coude. On place également le stéthoscope au niveau de l'artère humérale, c'est-à-dire sur la partie inférieure du tiers inférieur du bras³³.

- **Deuxième phase, mise en pression**

Le brassard va en fait servir à bloquer le passage du sang vers l'avant-bras. Il faut donc gonfler, au moyen de la poire, le brassard. On gonfle celui-ci rapidement jusqu'à ce que la pression induite soit supérieure à la pression artérielle, et donc à ce qu'aucun écoulement ne se fasse dans l'avant-bras. On peut vérifier l'absence d'écoulement en prenant le pouls au niveau de la main et en remarquant l'absence de celui-ci. En pratique, il suffit de monter la pression d'un niveau plus élevé que la pression habituelle du patient.

- **Troisième phase, décompression**

On va maintenant laisser le brassard se décomprimer lentement en écoutant, au moyen du stéthoscope, les sons au niveau de l'artère. La pression diminue donc et, au final, sera telle que le sang pourra à nouveau s'écouler dans le bras.

Lorsque la pression devient légèrement inférieure à la pression systolique – pression la plus élevée dans le sang, correspondant à la systole –, un premier son est entendu, correspondant en quelques sortes à l'onde de choc accompagnant la libération du sang sous pression. On note alors la pression systolique.

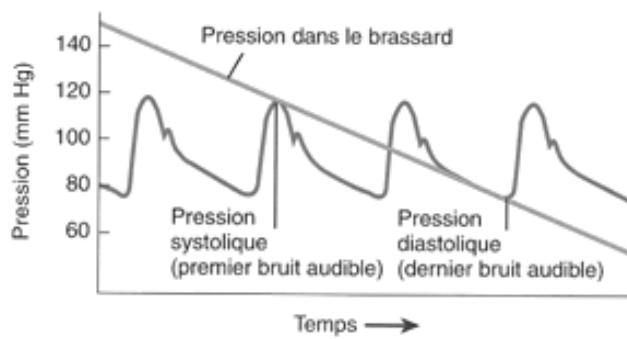
³³ Pour trouver pratiquement l'endroit de pose du stéthoscope, il est habituel de prélever le pouls juste avant la pose de celui-ci, pour être sûr de placer le stéthoscope à l'endroit de passage du sang, c'est-à-dire juste au niveau de l'artère. En résumé, le stéthoscope se place à l'endroit de mesure du pouls au niveau du coude.

En quelques mots, notons que le pouls correspond à l'onde de pression dans les artères, et qu'il peut se mesurer à différents endroits du corps, toujours au niveau des artères (la pression diminuant des artères jusqu'au veines, on se rend bien compte que l'onde de pression sera plus facile à détecter au niveau des artères). Enfin, les artères « de mesure » sont trouvables à plusieurs endroits, par exemple le cou, la main, le coude ou encore au niveau de la cheville.

La pression continue à diminuer, et avec elle les sons continuent à diminuer, les turbulences étant de plus en plus amorties (le brassard n'exerce plus assez de pression que pour provoquer des fluctuations importantes). Lorsque le son devient absent, la pression est inférieure à la pression diastolique, on note en fait la pression diastolique au moment du dernier son.

On a ainsi les deux mesures nécessaires pour exprimer la pression du patient.

La figure ci-dessous montre clairement le phénomène décrit ci-dessus.



34

Figure 10 : Variation simultanée des pressions dans le brassard et dans l'artère

Les sons entendus sont appelés bruits de Korotkoff.

4.2 PROBLÉMATIQUE DES MÉTHODES ACTUELLES

Lors de la prise de tension chez un patient, on se rend compte que le type de brassard est forcément important, que ce soit sa circonférence ou même sa longueur, étant donné que la pression induite ne sera pas la même si ces différents paramètres venaient à varier.

Bien que différents standards de brassard existent, de manière à tenir compte des variations musculaires et autres des différents individus, les erreurs introduites par l'utilisation d'un brassard non adéquat ne sont pas clairement connues.

On en arrive à la conclusion que, pour plusieurs personnes qui sortent des normes – soit par leur jeune âge, soit par leur corpulence trop élevée ou leur musculature trop développée –, les valeurs de pression obtenues sont erronées, ce qui peut être relativement conséquent, au vu des dangers d'une possible mauvaise estimation de la pression.

³⁴ Image provenant du livre ‘Principes d’Anatomie et de Physiologie’, par Tortora & Grabowski

CONCLUSIONS

Au vu des erreurs possibles dues à la mauvaise connaissance des interactions entre dimensions du brassard et corpulence du sujet, il est clair que nous sommes face à un problème.

En effet, nous avons pu constater, au cours des différents chapitres de cette introduction médicale, que la tension artérielle est un paramètre important de la santé des personnes. Il est même, à ce stade, clairement évident que celle-ci devrait être estimée avec précision, ce qui n'est malheureusement pas le cas.

De plus, on conçoit fort bien que les possibles erreurs de mesure sont présentes chez les personnes ne possédant pas un métabolisme standard. Or, nous avons également vu précédemment que c'est souvent chez ces mêmes personnes que les problèmes d'hypertension sont les plus importants et les plus graves.

Les remarques précédentes nous amènent donc à la conclusion que des recherches plus approfondies sur les réels effets du brassard sont à mettre en œuvre, de manière à déterminer avec le plus de précision possible les erreurs introduites par l'utilisation d'un matériel non adéquat.

INTERMÈDE

Après cette introduction dite médicale, basée sur diverses recherches bibliographiques, il est temps maintenant d'en venir aux points plus mathématiques et mécaniques de notre recherche. Cette section du travail sert donc en fait de parenthèse entre les deux parties principales du travail, soit la recherche bibliographique d'une part et les recherches techniques d'autre part.

En effet, si ces études mécaniques, physiques ou encore mathématiques diffèrent plus ou moins fortement de par le domaine étudié, il est quand même intéressant d'introduire l'ensemble de celles-ci d'un seul trait, tant de nombreuses hypothèses nécessaires, des liens directs entre les futures parties ou encore les desideratas réels que nous avons avant de nous lancer au cœur du sujet, demandent une vue d'ensemble du phénomène.

Pourquoi, dès lors, ne pas étudier toutes ces branches scientifiques en une seule et unique partie, qui correspondrait ainsi à l'axe dit mécanique de ce travail. La réponse est en fait à chercher du côté de la structure nécessaire à la bonne compréhension de l'ensemble. En effet, il apparaît plus ou moins clairement que la compréhension des différents problèmes sera meilleure si nous prenons la peine et le temps de nous y attarder successivement et précisément. De plus, les deux promoteurs de ce travail se rattachant respectivement, et de manière quasiment intégrale, aux deux branches abordées, la structure employée semblait presque suggérée.

Cet intermède va donc, en résumé, nous permettre de passer en gros sur les deux vues mécaniques du problème, citant ainsi leurs interactions d'une part et leurs études propres d'autre part. Enfin, nous introduirons globalement les hypothèses communes à la suite des recherches, hypothèses essentiellement géométriques.

• Domaines scientifiques abordés lors de l'étude

Les deux matières présentes dans la suite du travail se trouvent plus ou moins rapidement lorsque l'on réfléchit plus précisément à l'objet du travail. Nous avons à étudier les effets mécaniques et hydrauliques induits par le brassard de mesure de pression artérielle. Le titre du travail nous suggère donc directement les domaines abordés...

- La mécanique du matériau, appliquée au muscle et à l'artère;
- La mécanique du fluide, appliquée au sang, soit l'hémodynamique.

En effet, nous avons à étudier la manière dont le brassard – et plus précisément la pression qu'il engendre – influence la circulation du sang au sein de l'artère.

Il nous faut donc, dans un premier temps, étudier le cheminement des efforts engendrés par le brassard à travers les matériaux – soit la masse musculaire et l'artère – de manière à obtenir

au final la pression résultante sur les parois artérielles, ou plus précisément sur le fluide qui s'y écoule, soit le sang. Cette partie de l'étude sera traitée dans la 2^{ème} partie du travail.

Ensuite, nous pourrons travailler, dans la 3^{ème} partie du travail, sur l'écoulement du sang au sein de la conduite soumise à pression qu'est l'artère.

• Hypothèses générales

Nous appelons ici « Hypothèses générales » les hypothèses chevauchant les deux champs d'études introduits précédemment. De ce fait, les hypothèses dont il est question sont essentiellement géométriques.

La coupe d'un bras au niveau de l'artère brachiale se présente comme sur la figure ci-dessous

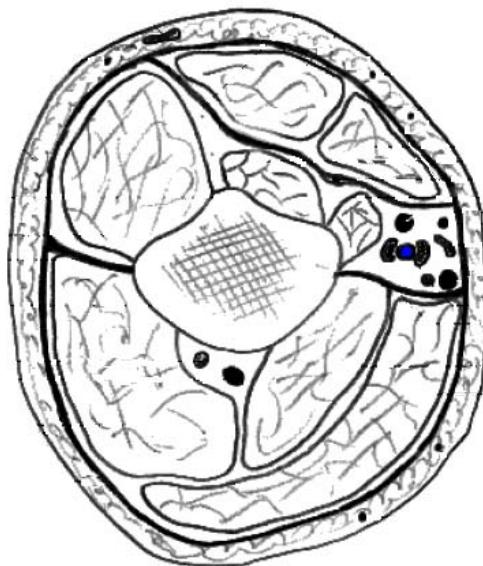


Figure 10 : Section transversale du bras

On constate bien évidemment, au vu de la section du bras, que celui-ci est loin d'être homogène et que l'artère brachiale (point bleu sur la figure) n'est pas à une position qui faciliterait son étude. De par ces observations principales, on conclut que quelques approximations sont nécessaires si l'on veut modéliser les différents matériaux et la géométrie de manière relativement simple (en regard de la complexité de la réalité). C'est ainsi qu'on supposera l'artère située au centre du bras, le bras parfaitement circulaire et le muscle homogène (en négligeant la présence des os et en considérant la présence des tendons dans les différents modules caractérisant le matériau muscle).

De plus, au niveau conceptuel, on fera l'hypothèse de contacts idéalisés entre les différents matériaux, soit les contacts brassard-bras ou encore muscle-artère. C'est ainsi qu'on négligera les éventuels frottements dans les zones de contact, ou encore qu'on supposera que les

pressions extérieures (du brassard et du muscle) au niveau de ces zones de contact sont reportées uniformément sur les matériaux sous-jacents (respectivement le muscle et l'artère).

Les autres hypothèses nécessaires et relatives à un des deux domaines uniquement, ou encore à des cas particuliers d'études, seront introduites en temps voulu.

Il est plus ou moins clair que ces hypothèses ne sont pas totalement licites, mais la méthodologie utilisée pour résoudre le problème aurait, à peu de choses près, été la même en considérant le problème réel. Les différences auraient été observées dans la complexification des équations en jeu, des modélisations ou encore des paramètres à introduire (et à rechercher), ... soit au final de nombreux problèmes qui auraient demandé un temps de travail beaucoup plus important, mais aussi et surtout l'utilisation de programmes spécifiques (afin de travailler cette section complexe, hétérogène ou encore non symétrique), ou encore des recherches ou tests scientifiques poussés pour déterminer les comportements réels des différents matériaux ainsi que leurs interactions ; ce qui nous aurait au final empêché de présenter, pour la plupart des problèmes, des solutions analytiques générales. Or, afin d'utiliser les résultats de la mécanique des matériaux dans nos développements de mécanique des fluides, il nous faut en effet des expressions analytiques de comportement, sous peine de quoi nous devrions concevoir des programmes dans lesquels les deux matières se chevaucheraient et interagiraient, ce qui rendrait la conception de tels programmes relativement ardue et complexe, et demanderait également un temps de réalisation quelque peu élevé.

DEUXIÈME PARTIE,
MÉCANIQUE DU MUSCLE ET DE L'ARTÈRE

INTRODUCTION

Dans cette deuxième partie de ce travail de fin d'études, nous allons, comme il a été introduit précédemment dans l'intermède, étudier les matériaux constituant le bras dans la zone de mesure de la pression, c'est-à-dire le muscle et l'artère du bras.

Dans cet intermède, nous avons dit qu'il nous fallait déterminer la manière dont les efforts transitaient à travers le muscle et l'artère, afin d'en retirer les contraintes subies par le fluide qui circulent au sein de ces 2 matériaux.

De manière plus précise, l'artère est en fait soumise à des pressions internes (la pression artérielle) et externes (la pression introduite par le brassard, et transmise à l'artère par l'intermédiaire du muscle), qui ont pour effet de modifier sa section. Nous avons donc à considérer l'artère comme un cylindre sous pression, et à utiliser la mécanique du matériau pour déterminer les déplacements radiaux engendrés³⁵.

Les matériaux en place sont relativement bien connus pour ce qui est de leur constitution, de leurs dimensions, ou encore de leur comportement mécanique. Cependant, lorsque l'on parle ici de comportement mécanique, il faut l'entendre au sens qualitatif, et non au sens quantitatif, nous ne possédons pas en fait de modèles prédéterminés dont tous les paramètres seraient connus avec précision, mais nous pouvons trouver des notions quant au comportement global sous certaines sollicitations. C'est ainsi qu'on sait les matériaux élastiques, et qu'on sait également qu'ils sont soumis à de grandes déformations.

L'analyse élastique non linéaire devrait donc s'imposer, mais nous nous attarderons quand même sur l'analyse élastique linéaire, ceci pour quelques raisons... Premièrement, il est plus facile de travailler sur l'analyse linéaire, que ce soit pour comprendre le phénomène, pour poser les bases de la résolution ou encore pour raisonner. Deuxièmement, comme il est plutôt commun de travailler dans un premier temps en élasticité linéaire, il sera de ce fait plus aisé de déterminer les différents paramètres mécaniques des matériaux, ceci par simple recherche bibliographique.

Avant de se lancer dans les calculs et les équations, nous allons finir cette introduction en précisant quelque peu le cheminement de l'étude de cette partie du travail.

³⁵ Nous aurons ainsi une expression de la section fonction des pressions artérielle et extérieure, et, dans la troisième partie, il nous restera à étudier l'écoulement du sang à travers une conduite à section variable.

Comme il vient d'être sous entendu, nous allons développer successivement les solutions du problème en élasticité linéaire et en élasticité non linéaire. Hormis l'élasticité des matériaux, une seconde hypothèse sera utilisée dans les deux cas, à savoir l'isotropie des deux matériaux (ceci constituant une hypothèse acceptable en regard de la constitution propre des deux matériaux, hypothèse qui est néanmoins discutée dans l'annexe 3). Enfin, au cours des développements, aucune hypothèse ne sera faite sur l'état plan, les résultats seront donc présentés de manière générale.

Une fois ceux-ci obtenus, nous discuterons alors les solutions, en accordant une réflexion toute particulière à l'état plan qu'il nous faudrait considérer pour être le plus proche de la réalité.

Finalement, un dernier chapitre sera consacré aux recherches et développements nécessaires à la détermination des différents paramètres physiques, géométriques ou mécaniques que nous aurons introduits dans nos calculs.

1. ANALYSE ELASTIQUE LINÉAIRE

Une première approche consiste en l'approximation des matériaux en présence (soit le muscle et la paroi artérielle) comme étant élastiques linéaires.

Les matériaux élastiques linéaires ont pour propriété de retourner à leur état initial après déformation. De plus, il existe pour ces matériaux une relation linéaire entre contraintes et déformations³⁶.

Nous n'allons pas ici faire un rappel théorique des caractéristiques complètes, particularités ou autres détails de cette méthode, plutôt bien connue du milieu scientifique nous concernant, laissant toutefois au lecteur la possibilité de se référer à l'annexe correspondante (Annexe 4, théorie de l'analyse élastique linéaire) pour de plus amples informations.

1.1 CHEMINEMENT DE LA RÉSOLUTION

La finalité de l'étude est, comme il a déjà été dit précédemment, d'obtenir une loi analytique de la variation sectionnelle de l'artère. Pour ce faire, il nous faut tout d'abord établir un schéma simplifié de la section du bras, afin de situer les différents matériaux.

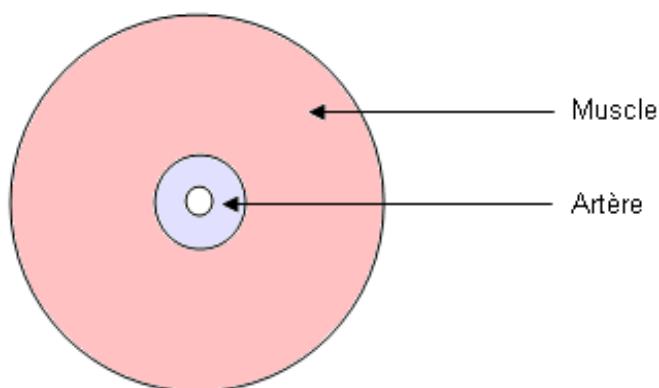


Figure 11 : Coupe transversale simplifiée du bras

L'étude va être décomposée en deux étapes distinctes, la première consistant en la recherche d'une expression analytique de la pression de contact entre les matériaux muscle et artère, expression qui nous permettra, au cours de la seconde étape, d'établir une relation analytique du déplacement radial au niveau de l'artère, et finalement de la variation de section artérielle.

³⁶ Relation connue sous le nom de loi de Hooke

De manière à visualiser au mieux le paragraphe précédent, on peut réaliser un schéma grossis au niveau de la zone de contact, reprenant également les pressions en jeu, soit p_e la pression extérieure appliquée au bras par le brassard, p_i la pression intérieure appliquée à l'artère par le sang, et p_c la pression de contact établie à l'interface muscle/artère.

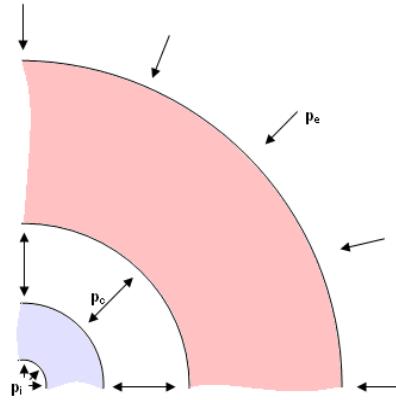


Figure 12 : Zoom sur la zone de contact à l'interface muscle-artère

La première étape va donc consister en l'établissement de l'expression du déplacement radial, tantôt pour la zone extérieure (ensemble muscle/zone de contact), tantôt pour la zone intérieure (ensemble zone de contact/artère). Ensuite, en exprimant l'égalité des déplacements radiaux (relatifs aux deux matériaux) au niveau de l'interface, on devrait obtenir une expression analytique de la pression de contact.

Enfin, il restera à exprimer le déplacement radial au niveau de l'artère (par ailleurs déjà formulé précédemment) en fonction de la pression de contact (dont l'expression sera alors connue).

Dans un premier temps, nous allons nous placer en état plan de contraintes. Une fois tous les calculs effectués pour l'état plan de contraintes, une simple transposition effectuée sur les caractéristiques mécaniques des matériaux nous donnera l'expression équivalente en état plan de déformations.

1.2 DÉPLACEMENTS RADIAUX

Nous allons ici successivement évaluer les déplacements radiaux pour les deux matériaux en présence, considérant à chaque fois les interfaces relatives avec la zone de contact.

- **Déplacement au niveau de l'artère**

On se place donc au niveau de l'artère. On peut schématiser l'état de contraintes de celle-ci,

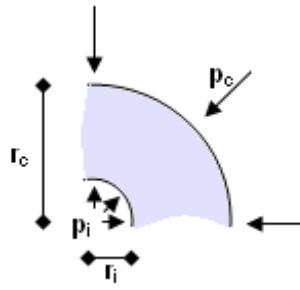


Figure 13 : Etat de contraintes au niveau de l'artère

Avec les différentes formules de l'élasticité linéaire, on peut exprimer les contraintes en coordonnées cylindriques, ceci en fonction des paramètres E_I et ν_I , soit respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau artère.

Les formules suivantes sont obtenues à partir des équations indéfinies d'équilibre en terme de déplacements, et en considérant les pressions s'appliquant aux bornes du matériau considéré. Les développements nécessaires pour arriver à ces équations se trouvent dans l'annexe concernant la théorie de l'analyse élastique linéaire. On a au final les équations suivantes pour les contraintes :

$$\sigma_r = \frac{r_i^2 p_i - r_c^2 p_c}{r_c^2 - r_i^2} - \frac{p_i - p_c}{\frac{r^2}{r_i^2} - \frac{r^2}{r_c^2}}$$

$$\sigma_\theta = \frac{r_i^2 p_i - r_c^2 p_c}{r_c^2 - r_i^2} + \frac{p_i - p_c}{\frac{r^2}{r_i^2} - \frac{r^2}{r_c^2}}$$

$$\sigma_z = 0 = \tau_{r\theta} = \tau_{rz} = \tau_{\theta z}$$

La loi de Hooke nous donne ensuite les déformations correspondantes. Nous nous intéressons ici uniquement au déplacement radial, nous ne nous attarderons donc pas sur les expressions des déformations dans les autres directions.

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_1} \left(\frac{r_i^2 p_i - r_c^2 p_c}{r_c^2 - r_i^2} - \frac{p_i - p_c}{\frac{r^2}{r_i^2} - \frac{r^2}{r_c^2}} - \nu_1 \left(\frac{r_i^2 p_i - r_c^2 p_c}{r_c^2 - r_i^2} + \frac{p_i - p_c}{\frac{r^2}{r_i^2} - \frac{r^2}{r_c^2}} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{E_1} \left(\frac{r_i^2 p_i - r_c^2 p_c}{r_c^2 - r_i^2} (1 - \nu_1) - \frac{p_i - p_c}{\frac{r^2}{r_i^2} - \frac{r^2}{r_c^2}} (1 + \nu_1) \right)$$

$$= \frac{1}{E_1} \left(\frac{r_i^2 p_i - r_c^2 p_c}{r_c^2 - r_i^2} (1 - \nu_1) - (p_i - p_c) \frac{1}{r^2} \frac{r_i^2 r_c^2}{r_c^2 - r_i^2} (1 + \nu_1) \right)$$

En intégrant par rapport au rayon de l'artère, ayant en effet la relation

$$u_r = u_r(r) = \int \varepsilon(r) dr$$

on trouve enfin

$$u_r(r) = \frac{1}{E_1} \left(\frac{r_i^2 p_i - r_c^2 p_c}{r_c^2 - r_i^2} (1 - \nu_1) r + (p_i - p_c) \frac{r_i^2 r_c^2}{r_c^2 - r_i^2} (1 + \nu_1) \frac{1}{r} \right)$$

On peut encore, de manière à respecter le formalisme de formulation des déformations par utilisation du module de Coulomb, poser

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Pour alors obtenir au final

$$u_r(r)_{\text{Matériau 1}} = \frac{1}{2} \frac{1}{G_1(1 + \nu_1)} \left(\frac{1}{r^2 - r_i^2} \right) \left((1 - \nu_1)(r_i^2 p_i - r_c^2 p_c) r + (1 + \nu_1)(p_i - p_c) r_i^2 r_c^2 \frac{1}{r} \right)$$

• Déplacement au niveau du muscle

On se place à présent au niveau du muscle, on a ainsi

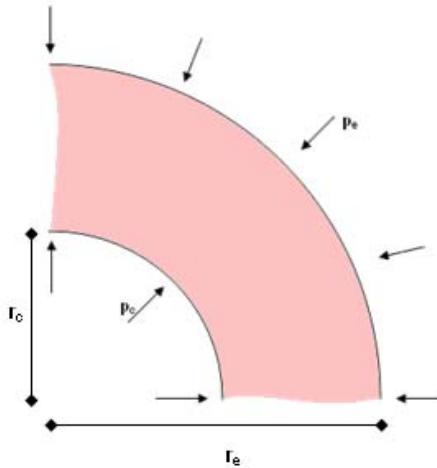


Figure 14 : Etat de contraintes au niveau du muscle

De la même manière qu'auparavant, on peut exprimer successivement les contraintes, les déformations et enfin le déplacement radial, ceci en fonction des paramètres E_2 et ν_2 , soit respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau muscle.

$$\sigma_r = \frac{r_c^2 p_c - r_e^2 p_e}{r_e^2 - r_c^2} - \frac{p_c - p_e}{\frac{r^2}{r_c^2} - \frac{r^2}{r_e^2}}$$

$$\sigma_\theta = \frac{r_c^2 p_c - r_e^2 p_e}{r_e^2 - r_c^2} + \frac{p_c - p_e}{\frac{r_c^2}{r_c^2} - \frac{r_e^2}{r_e^2}}$$

$$\sigma_z = 0 = \tau_{r\theta} = \tau_{rz} = \tau_{\theta z}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E_2} \left(\frac{\frac{r_c^2 p_c - r_e^2 p_e}{r_e^2 - r_c^2} - \frac{p_c - p_e}{\frac{r_c^2}{r_c^2} - \frac{r_e^2}{r_e^2}} - \nu_2 \left(\frac{\frac{r_c^2 p_c - r_e^2 p_e}{r_e^2 - r_c^2} + \frac{p_c - p_e}{\frac{r_c^2}{r_c^2} - \frac{r_e^2}{r_e^2}}}{\frac{r_c^2}{r_c^2} - \frac{r_e^2}{r_e^2}} \right)}{\frac{r_c^2}{r_c^2} - \frac{r_e^2}{r_e^2}} \right) \\ &= \frac{1}{E_2} \left(\frac{\frac{r_i^2 p_i - r_c^2 p_c}{r_c^2 - r_i^2} (1 - \nu_2) - \frac{p_c - p_e}{\frac{r_c^2}{r_c^2} - \frac{r_e^2}{r_e^2}} (1 + \nu_2)}{\frac{r_c^2}{r_c^2} - \frac{r_e^2}{r_e^2}} \right) \\ &= \frac{1}{E_2} \left(\frac{\frac{r_c^2 p_c - r_e^2 p_e}{r_e^2 - r_c^2} (1 - \nu_2) - (p_c - p_e) \frac{1}{r^2} \frac{r_c^2 r_e^2}{r_e^2 - r_c^2} (1 + \nu_2)}{\frac{r_c^2}{r_c^2} - \frac{r_e^2}{r_e^2}} \right)\end{aligned}$$

$$u_r(r)|_{\text{Matériau 2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{G_2(1 + \nu_2)} \left(\frac{1}{r_e^2 - r_c^2} \right) \left((1 - \nu_2)(r_c^2 p_c - r_e^2 p_e) r + (1 + \nu_2)(p_c - p_e) r_c^2 r_e^2 \frac{1}{r} \right)$$

1.3 PRESSION À L'INTERFACE

En résumé, nous avons obtenu au point précédent les expressions analytiques des déplacements pour les matériaux muscle et artère, soit

$$\begin{cases} u_r(r)|_{\text{Matériau 1}} = \frac{1}{2} \frac{1}{G_1(1 + \nu_1)} \left(\frac{1}{r_c^2 - r_i^2} \right) \left((1 - \nu_1)(r_i^2 p_i - r_c^2 p_c) r + (1 + \nu_1)(p_i - p_c) r_i^2 r_c^2 \frac{1}{r} \right) \\ u_r(r)|_{\text{Matériau 2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{G_2(1 + \nu_2)} \left(\frac{1}{r_e^2 - r_c^2} \right) \left((1 - \nu_2)(r_c^2 p_c - r_e^2 p_e) r + (1 + \nu_2)(p_c - p_e) r_c^2 r_e^2 \frac{1}{r} \right) \end{cases}$$

On peut maintenant se placer au niveau de la zone de contact en posant, dans les deux équations,

$$r = r_c$$

On obtient ainsi d'une part, pour l'artère,

$$u_r(r = r_c) \Big|_{\text{Matériau 1}} = \frac{1}{2} \frac{1}{G_1(1 + \nu_1)} \left(\frac{1}{r_c^2 - r_i^2} \right) \left((1 - \nu_1)(r_i^2 p_i - r_c^2 p_c) r_c + (1 + \nu_1)(p_i - p_c) r_i^2 r_c^2 \frac{1}{r_c} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{G_1(1 + \nu_1)} \left(\frac{1}{r_c^2 - r_i^2} \right) \left((1 - \nu_1)(r_i^2 r_c p_i - r_c^3 p_c) + (1 + \nu_1)(p_i - p_c) r_i^2 r_c \right)$$

Et d'autre part, pour le muscle

$$u_r(r = r_c) \Big|_{\text{Matériau 2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{G_2(1 + \nu_2)} \left(\frac{1}{r_e^2 - r_c^2} \right) \left((1 - \nu_2)(r_c^2 p_c - r_e^2 p_e) r_c + (1 + \nu_2)(p_c - p_e) r_c^2 r_e^2 \frac{1}{r_c} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{G_2(1 + \nu_2)} \left(\frac{1}{r_e^2 - r_c^2} \right) \left((1 - \nu_2)(r_c^3 p_c - r_e^2 r_c p_e) + (1 + \nu_2)(p_c - p_e) r_c r_e^2 \right)$$

On peut maintenant évaluer la pression de contact à l'interface muscle/artère. En effet, la compatibilité des déplacements impose que les déplacements radiaux à l'interface soient identiques, quel que soit le côté où l'on se situe. La pression de contact étant la seule inconnue à ce niveau, il nous sera possible, en exprimant la compatibilité des déplacements, de lui trouver une expression analytique.

On a donc successivement

$$u_r(r = r_c) \Big|_{\text{Matériau 1}} = u_r(r = r_c) \Big|_{\text{Matériau 2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{G_1(1 + \nu_1)} \left(\frac{1}{r_c^2 - r_i^2} \right) \left((1 - \nu_1)(r_i^2 r_c p_i - r_c^3 p_c) + (1 + \nu_1)(p_i - p_c) r_i^2 r_c \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{G_2(1 + \nu_2)} \left(\frac{1}{r_e^2 - r_c^2} \right) \left((1 - \nu_2)(r_c^3 p_c - r_e^2 r_c p_e) + (1 + \nu_2)(p_c - p_e) r_c r_e^2 \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{G_1(1 + \nu_1)} \left(\frac{1}{r_c^2 - r_i^2} \right) \left((1 - \nu_1)(-r_c^3 p_c) + (1 + \nu_1)(-p_c) r_i^2 r_c + (1 - \nu_1) r_i^2 r_c p_i + (1 + \nu_1) p_i r_i^2 r_c \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{G_2(1 + \nu_2)} \left(\frac{1}{r_e^2 - r_c^2} \right) \left((1 - \nu_2)r_c^3 p_c + (1 + \nu_2)p_c r_c r_e^2 + (1 - \nu_2)(-r_e^2 r_c p_e) + (1 + \nu_2)(-p_e) r_c r_e^2 \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{G_1(1 + \nu_1)} \left(\frac{1}{r_c^2 - r_i^2} \right) \left(p_c ((1 - \nu_1)(-r_c^3) - (1 + \nu_1)r_i^2 r_c) + 2r_i^2 r_c p_i \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{G_2(1 + \nu_2)} \left(\frac{1}{r_e^2 - r_c^2} \right) \left(p_c ((1 - \nu_2)r_c^3 + (1 + \nu_2)r_c r_e^2) - 2r_e^2 r_c p_e \right)$$

$$\Leftrightarrow p_c \left[\begin{aligned} & \left((1-\nu_1)r_c^2 + (1+\nu_1)r_i^2 \right) \frac{1}{2} \frac{1}{G_1(1+\nu_1)} \left(\frac{1}{r_c^2 - r_i^2} \right) \\ & + \left((1-\nu_2)r_c^2 + (1+\nu_2)r_e^2 \right) \frac{1}{2} \frac{1}{G_2(1+\nu_2)} \left(\frac{1}{r_e^2 - r_c^2} \right) \end{aligned} \right] \\ = & r_i^2 p_i \frac{1}{G_1(1+\nu_1)} \left(\frac{1}{r_c^2 - r_i^2} \right) + r_e^2 p_e \frac{1}{G_2(1+\nu_2)} \left(\frac{1}{r_e^2 - r_c^2} \right) \end{math>$$

Et on a finalement

$$\begin{aligned} p_c = & \frac{2r_i^2 p_i \frac{1}{G_1(1+\nu_1)} \left(\frac{1}{r_c^2 - r_i^2} \right) + 2r_e^2 p_e \frac{1}{G_2(1+\nu_2)} \left(\frac{1}{r_e^2 - r_c^2} \right)}{\left((1-\nu_1)r_c^2 + (1+\nu_1)r_i^2 \right) \frac{1}{G_1(1+\nu_1)} \left(\frac{1}{r_c^2 - r_i^2} \right) + \left((1-\nu_2)r_c^2 + (1+\nu_2)r_e^2 \right) \frac{1}{G_2(1+\nu_2)} \left(\frac{1}{r_e^2 - r_c^2} \right)} \\ = & 2 \frac{r_i^2 p_i A_1 + r_e^2 p_e A_2}{\left((1-\nu_1)r_c^2 + (1+\nu_1)r_i^2 \right) A_1 + \left((1-\nu_2)r_c^2 + (1+\nu_2)r_e^2 \right) A_2} \\ = & p_c^x \end{aligned}$$

Ayant posé, pour la lisibilité de l'expression et les futures manipulations calculoïdes,

$$A_k = \frac{1}{G_k(1+\nu_k)} \left(\frac{1}{r_{ek}^2 - r_{ik}^2} \right)$$

1.4 VARIATION SECTIONNELLE DE L'ARTÈRE

On peut enfin exprimer la déformation de l'artère, en introduisant l'expression de la pression de contact dans l'expression du déplacement radial relatif au matériau 1. On a ainsi

$$\begin{aligned} u_r(r=r_i) = & \frac{1}{2} \frac{1}{G_1(1+\nu_1)} \left(\frac{1}{r_c^2 - r_i^2} \right) \left((1-\nu_1)(r_i^3 p_i - r_c^2 r_i p_c^x) + (1+\nu_1)(p_i - p_c^x) r_i r_c^2 \right) \\ u_r(r=r_i) = & \frac{1}{2} A_1 \left[(1-\nu_1) \left(r_i^3 p_i - r_c^2 r_i \frac{2r_i^2 p_i A_1 + 2r_e^2 p_e A_2}{\left((1-\nu_1)r_c^2 + (1+\nu_1)r_i^2 \right) A_1 + \left((1-\nu_2)r_c^2 + (1+\nu_2)r_e^2 \right) A_2} \right) \right. \\ & \left. + (1+\nu_1) \left(p_i - \frac{2r_i^2 p_i A_1 + 2r_e^2 p_e A_2}{\left((1-\nu_1)r_c^2 + (1+\nu_1)r_i^2 \right) A_1 + \left((1-\nu_2)r_c^2 + (1+\nu_2)r_e^2 \right) A_2} \right) r_i r_c^2 \right] \end{aligned}$$

Et, finalement, on peut évaluer la nouvelle section par

$$\Omega = \pi (r_i + u_r(r=r_i))^2$$

1.5 TRANSPOSITION EN ÉTAT PLAN DE DÉFORMATIONS

Si l'on se place en état plan de déformations, une simple substitution des paramètres mécaniques appliquée aux expressions des déplacements suffit. En effet, ces substitutions ne modifient pas les contraintes, qui sont indépendantes des constantes élastiques.

On a en fait à effectuer les substitutions suivantes

$$E = E' \frac{1+2\nu'}{(1+\nu')^2}$$

$$\nu = \frac{\nu'}{1+\nu'}$$

$$G' = G$$

Ces substitutions reviennent à poser, dans les équations des déplacements

$$1+\nu = \frac{1-\nu'}{1-2\nu'}$$

Les différentes étapes nécessaires à l'obtention de l'expression finale de la pression de contact sont exactement les mêmes que pour l'étude en état plan de contraintes, leur place dans ces pages n'est donc pas réellement nécessaire, et l'on se contentera du résultat final. Le cheminement de la résolution est présenté dans l'annexe relative à la théorie de l'analyse élastique linéaire. On obtient finalement pour la pression de contact

$$\begin{aligned} p_c &= 2 \frac{B_1 r_i^2 p_i (1-\nu_1) + B_2 r_e^2 p_e (1-\nu_2)}{B_1 (r_i^2 + (1-2\nu_1)r_c^2) + B_2 (r_e^2 + (1-2\nu_2)r_c^2)} \\ &= p_c^x \end{aligned}$$

Ayant posé, de manière parallèle à ce qui avait été effectué pour le premier cas d'étude,

$$B_k = \frac{1}{G_k (r_{ek}^2 - r_{ik}^2)}$$

On peut enfin évaluer le déplacement radial et la nouvelle section correspondante en posant l'expression de la pression de contact dans celle du déplacement radial du matériau artère au niveau du rayon interne,

$$u_r(r=r_i) = \frac{1}{2} \frac{1}{G_1} \left(\frac{1}{r_c^2 - r_i^2} \right) \left[(1-2\nu_1)(r_i^3 p_i - r_c^2 r_i p_c^x) + (p_i - p_c^x) r_i r_c^2 \right]$$

$$u_r(r = r_i) = \frac{1}{2} B_1 \left[(1 - 2\nu_1) \left(r_i^3 p_i - r_c^2 r_i 2 \frac{B_1 r_i^2 p_i (1 - \nu_1) + B_2 r_e^2 p_e (1 - \nu_2)}{B_1 (r_i^2 + (1 - 2\nu_1) r_c^2) + B_2 (r_e^2 + (1 - 2\nu_2) r_c^2)} \right) + \left(p_i - 2 \frac{B_1 r_i^2 p_i (1 - \nu_1) + B_2 r_e^2 p_e (1 - \nu_2)}{B_1 (r_i^2 + (1 - 2\nu_1) r_c^2) + B_2 (r_e^2 + (1 - 2\nu_2) r_c^2)} \right) r_i r_c^2 \right]$$

Et on a finalement l'expression de la nouvelle section

$$\Omega = \pi (r_i + u_r(r = r_i))^2$$

SYNTHESE

On a donc au final les expressions suivantes pour les déplacements radiaux

- En état plan de contraintes

$$u_r(r = r_i) = \frac{1}{2} A_1 \left[(1 - \nu_1) \left(r_i^3 p_i - r_c^2 r_i \frac{2r_i^2 p_i A_1 + 2r_e^2 p_e A_2}{((1 - \nu_1) r_c^2 + (1 + \nu_1) r_i^2) A_1 + ((1 - \nu_2) r_c^2 + (1 + \nu_2) r_e^2) A_2} \right) + (1 + \nu_1) \left(p_i - \frac{2r_i^2 p_i A_1 + 2r_e^2 p_e A_2}{((1 - \nu_1) r_c^2 + (1 + \nu_1) r_i^2) A_1 + ((1 - \nu_2) r_c^2 + (1 + \nu_2) r_e^2) A_2} \right) r_i r_c^2 \right]$$

$$A_k = \frac{1}{G_k (1 + \nu_k)} \left(\frac{1}{r_{ek}^2 - r_{ik}^2} \right)$$

- En état plan de déformations

$$u_r(r = r_i) = \frac{1}{2} B_1 \left[(1 - 2\nu_1) \left(r_i^3 p_i - r_c^2 r_i 2 \frac{B_1 r_i^2 p_i (1 - \nu_1) + B_2 r_e^2 p_e (1 - \nu_2)}{B_1 (r_i^2 + (1 - 2\nu_1) r_c^2) + B_2 (r_e^2 + (1 - 2\nu_2) r_c^2)} \right) + \left(p_i - 2 \frac{B_1 r_i^2 p_i (1 - \nu_1) + B_2 r_e^2 p_e (1 - \nu_2)}{B_1 (r_i^2 + (1 - 2\nu_1) r_c^2) + B_2 (r_e^2 + (1 - 2\nu_2) r_c^2)} \right) r_i r_c^2 \right]$$

$$B_k = \frac{1}{G_k (r_{ek}^2 - r_{ik}^2)}$$

Le but de ce chapitre étant de trouver les expressions analytiques des variations sectionnelles de l'artère en considérant des matériaux élastiques linéaires, nous pourrions nous arrêter ici.

Cependant, il paraît intéressant de soumettre ces équations – avant de continuer plus loin et de devoir les utiliser pour la modélisation hydraulique – à quelques tests, permettant, de ce fait, une visualisation meilleure du phénomène.

Nous proposons donc au lecteur intéressé de se rendre en annexe 5 s'il veut se faire une représentation graphique des équations introduites précédemment.

2. ANALYSE ELASTIQUE NON LINÉAIRE

Une approche plus précise que l'analyse élastique linéaire consiste en l'analyse élastique non linéaire. En quelques mots, la seconde diffère de la première du fait qu'elle ne fait pas l'hypothèse de déplacements très petits, et est donc plus précise pour le type de matériaux que nous étudions, étant donné les déformations radiales relativement importantes dont l'artère et le muscle sont sujets.

Il semble nécessaire de faire un rappel relativement conséquent de la théorie correspondante, les études non linéaires ne nous étant pas particulièrement familières. L'intégralité des notions nécessaires, des développements théoriques, et des expressions obtenues se trouve à la disposition du lecteur dans l'annexe 6, « Théorie de l'élasticité non linéaire ». Nous nous limiterons ainsi dans ces pages à présenter les résultats et réflexions principaux nécessaires à la recherche des déplacements radiaux.

2.1 RECHERCHE DU DÉPLACEMENT RADIAL

Comme dans l'analyse linéaire, il nous faut en fait considérer un élément cylindrique, ses contraintes et ses déformations, reliées entre elles par un certain type de loi, pour ensuite en déduire les déplacements radiaux. Les raisonnements présentés ci-dessous font pour le moment abstraction de la présence de deux matériaux dans le bras, c'est-à-dire qu'ils ont été développés en considérant un cylindre épais homogène soumis à pression. Nous reviendrons plus tard sur la manière de considérer la présence des deux matériaux.

• Détermination des contraintes

La recherche des contraintes, développée largement dans l'annexe 6, nous amène à considérer les contraintes de Cauchy suivantes

$$\sigma_r = \frac{R^2 [2C_1(1+k) + 2C_2 + 2C_2(1+k)^3 + p(1+k)^2] + 2C_2C(1+k) + pC(1+k)^3}{(1+k)^2(R^2 + C(1+k))}$$
$$\sigma_\theta = \frac{R^2 [2C_1(1+k) + 2C_2 + 2C_2(1+k)^3 + p(1+k)^2] + 2C_1C(1+k)^2 + 2C_2C(1+k)^4}{(1+k)^2 R^2}$$
$$\sigma_z = (1+k)^2 \left[2C_1 + \frac{2C_2C}{R^2} - \frac{2C_2C}{(R^2 + C(1+k))} + \frac{4C_2(1+k) + p}{(1+k)^2} \right]$$

où

- C_1 et C_2 sont des paramètres caractérisant les matériaux ;

- C est une constante d'intégration relative à l'incompressibilité du matériau (exprimée afin d'amener une relation entre r et R) $r = \sqrt{\frac{R^2 + C(1+k)}{1+k}}$;
- p est fonction du modèle choisi pour le matériau, ainsi que des déformations observées ;
- k exprime le déplacement longitudinal, par $z = u_z + Z = (k+1)Z$.

• **Utilisation des contraintes pour trouver les déplacements**

Nous connaissons maintenant les contraintes de Cauchy pour le cylindre considéré. Il nous faut dans un premier temps déterminer le paramètre p , en considérant les équations indéfinies d'équilibre volumique en translation, soit, pour rappel

$$D_j \sigma_{ij} + F_i = 0$$

L'intégration de cette expression, réexprimée entre temps en coordonnées cylindriques, nous donne une valeur analytique de p , soit

$$p(R) = A + \frac{[C_1 + C_2(1+k)^2]}{1+k} \left\{ \frac{C(1+k)}{R^2 + C(1+k)} + 2 \ln R - \ln(R^2 + C(1+k)) \right\}$$

On voit apparaître une nouvelle constante d'intégration, A .

On a ainsi deux constantes d'intégrations, mais on a également deux valeurs limites, données par les équations d'équilibre en surface, soit les pressions aux bornes du matériau.

Il nous suffit alors d'insérer l'expression analytique de p dans celles des contraintes, et, en exprimant la contrainte radiale aux surfaces limitantes, on peut trouver les constantes d'intégrations.

Connaissant alors à ce stade A et C , nous avons, par la condition d'incompressibilité du matériau, une relation entre r et R ,

$$r = \sqrt{\frac{R^2 + C(1+k)}{1+k}}$$

et nous pouvons donc facilement exprimer les déplacements radiaux en tout point, par la relation

$$u_r = u = r - R$$

Et on peut également exprimer presque directement la section en configuration déformée en utilisant la formule de calcul de surfaces cylindriques

$$\Omega = \pi(r)^2$$

• Détermination des constantes d'intégrations

Comme nous venons de le voir, il s'agit en fait de déterminer A et C en utilisant les équations d'équilibre de translation en surface.

On a en fait l'équation des contraintes en surface extérieure, qui nous permet de trouver A en fonction des contraintes radiales à l'extérieur du cylindre considéré. On obtient ainsi une valeur numérique pour A , que l'on notera A^x pour la suite, soit,

$$A = -q_B - \frac{R_B^2 \left[2C_1(1+k) + 2C_2 + 2C_2(1+k)^3 + \right.}{(1+k)^2(R_B^2 + C(1+k))} \left[C_1 + C_2(1+k)^2 \right] (1+k) \left\{ \frac{C(1+k)}{R_B^2 + C(1+k)} + 2 \ln R_B - \ln(R_B^2 + C(1+k)) \right\}$$

$$+ \frac{2C_2 C(1+k) + C(1+k)^2 \left(C_1 + C_2(1+k)^2 \right) \left\{ \frac{C(1+k)}{R_B^2 + C(1+k)} + 2 \ln R_B - \ln(R_B^2 + C(1+k)) \right\}}{(1+k)^2(R_B^2 + C(1+k))}$$

...

$$= A^x$$

Et il nous reste à utiliser cette valeur particulière A^x , obtenue ci-dessus, dans l'expression de l'équilibre en translation pour la surface intérieure du cylindre considéré, soit

$$\sigma_r(R = R_A) = -q_A$$

$$= -\frac{R_A^2 \left[2C_1(1+k) + 2C_2 + 2C_2(1+k)^3 + \right.}{(1+k)^2(R_A^2 + C(1+k))} \left[A^x + \frac{\left[C_1 + C_2(1+k)^2 \right]}{1+k} \left\{ \frac{C(1+k)}{R_A^2 + C(1+k)} + 2 \ln R_A - \ln(R_A^2 + C(1+k)) \right\} \right] (1+k)^2$$

$$+ \frac{2C_2 C(1+k) + \left(A^x + \frac{\left[C_1 + C_2(1+k)^2 \right]}{1+k} \left\{ \frac{C(1+k)}{R_A^2 + C(1+k)} + 2 \ln R_A - \ln(R_A^2 + C(1+k)) \right\} \right) C(1+k)^3}{(1+k)^2(R_A^2 + C(1+k))}$$

...

Enfin, avant de résoudre l'équation et d'exprimer les déplacements, il nous faut choisir si nous nous trouvons en état plan de contraintes ou en état plan de déformations, soit en fait à déterminer le paramètre k selon le cas de figure.

Dans le premier cas, k devra être déterminé en résolvant l'équation suivante

$$0 = 2\pi \int_{r_A}^{r_B} \sigma_z r dr$$

Tandis que dans le second cas, on aura simplement à prendre

$$k = 0$$

Il restera alors, une fois k connu, à résoudre l'équation en q_A et C ci-dessus, pour trouver C et ainsi connaître les déplacements radiaux en tout point du cylindre considéré.

• Prise en compte de la présence de deux matériaux

Comme nous l'avons fait pour l'élasticité linéaire, il nous suffit de considérer les déplacements dans la zone de contact, pour enfin trouver des valeurs de la pression de contact telles que ces déplacements soient compatibles.

Nous aurons alors au final à évaluer les déplacements radiaux de l'artère, qui sera soumise intérieurement à la pression artérielle et extérieurement à la pression de contact.

2.2 PRINCIPE DE RÉSOLUTION

Dans un premier temps, il semble utile de se rappeler que nous cherchons en fait à déterminer le rayon dans la configuration déformée à partir de celui dans la configuration initiale.

Cependant, comme nous le voyons très vite en observant quelque peu les formules obtenues ci-dessus, il nous est impossible d'obtenir des relations analytiques du type

$$r = f(R)$$

Il faudrait en effet, pour cela, pouvoir extraire le paramètre C de l'expression de la contrainte radiale, ce qui n'est pas possible analytiquement.

Nous devrons donc, pour résoudre ces équations, faire appel à des méthodes numériques qui vont nous permettre, par approximations, de trouver des valeurs de r en fonction des divers paramètres variables du problème.

Nous pouvons ici faire la même remarque que pour l'analyse élastique linéaire, à savoir que ce qui nous intéresse dans le cadre de ce travail est l'obtention d'expressions analytiques pour trouver la section en fonction des pressions artérielle et extérieure. De ce fait, nous n'allons pas ici nous étendre sur la manière de résoudre les équations trouvées dans ce chapitre, mais nous invitons le lecteur à consulter l'annexe correspondante, soit l'annexe 7, s'il désire avoir un aperçu de la méthode de résolution et des résultats.

3. RÉFLEXIONS SUR L'ÉTAT PLAN

Nous avons, au cours des chapitres précédents, introduit de nombreuses expressions visant à évaluer les variations de section d'une pièce cylindrique à paroi épaisse sous pression. Que ce soit pour l'analyse linéaire ou encore pour l'analyse non linéaire, nous avons introduit ces équations sans hypothèse quant à l'état plan ; c'est ainsi que nous avons, pour chaque cas, proposé les expressions concernant et l'état plan de déformations, et l'état plan de contraintes.

Si les résultats généraux obtenus sont utiles d'un point de vue théorique, il faut cependant noter que l'applicabilité de ceux-ci est à voir au cas par cas.

Pour effectuer le choix le plus correct, entendu par là celui fournissant les résultats les plus proches de la réalité, il nous faut dans un premier temps mettre sur papier non seulement l'ensemble des caractéristiques du phénomène étudié, mais également les propriétés physiques et mécaniques des matériaux en présence. Le premier point nous permettra de connaître les rapports de dimensions entre les différentes directions, ce qui devrait orienter considérablement notre choix. Cependant, il nous faut aussi considérer la manière dont les matériaux travaillent dans chaque direction, et de là l'utilité du second point cité.

Nous allons dans ce chapitre exploiter au mieux possible notre connaissance du phénomène et des matériaux, pour tenter de donner à notre réflexion assez de données que pour que celle-ci soit des plus complètes.

3.1 GÉNÉRALITÉS

Tout d'abord, il semble utile de se rappeler exactement en quoi consistent les deux options de notre choix.

L'état plan de déformations s'applique lorsqu'un solide prismatique très long est sollicité par des forces perpendiculaires à ses génératrices. Les forces appliquées sont supposées constantes le long des génératrices, toute portion du solide située à une distance suffisante de ses extrémités se déforme uniquement dans un plan perpendiculaire aux génératrices, et l'on peut considérer que les déformations dans le sens des génératrices sont nulles.

L'état plan de contraintes s'applique lui dans le cas d'éléments de faible épaisseur sollicités dans leur plan³⁷.

³⁷ Ces définitions sont extraites du cours d' « Eléments de mécanique du solide déformable » de S. Cescotto.

Enfin, notons que ces deux états représentent les comportements extrêmes des matériaux. Les phénomènes réels sont rarement décrits parfaitement par l'un ou l'autre des états. Il convient de chercher l'état se rapprochant le plus de la réalité, tout en gardant à l'esprit que les résultats trouvés ne sont qu'une représentation idéalisée de la réalité.

Pour déterminer les déformations et les contraintes en toute rigueur, il conviendrait de ne faire aucune hypothèse quant à l'état plan, et donc à étudier les matériaux en état tridimensionnel, avec des déformations et des contraintes permises dans toutes les directions. Pour ce faire, il faudrait cependant connaître non seulement la manière dont les matériaux travaillent dans toutes les directions (ou tout du moins dans les directions longitudinales et transversales, étant donné la propriété d'isotropie transversale dont les matériaux en question font l'objet), mais également les efforts ou déformations dans la direction longitudinale, ce qui n'est à priori pas accessible. En effet, si les déformations et contraintes dans le plan perpendiculaire aux génératrices sont mesurables (par mesure de la pression ou des déplacements), on voit mal comment obtenir les contraintes ou même les déplacements longitudinaux de l'artère ou du muscle.

Enfin, il serait possible, afin de représenter au mieux le phénomène sans devoir passer par les mesures submentionnées, de modéliser le comportement longitudinal en faisant usage de théories type Winkler, où l'on modéliserait la présence de matériau longitudinalement par l'utilisation de ressorts, dont la raideur serait déterminée par différents tests de comportement sur modèles réels

3.2 COMPORTEMENT DE L'ARTÈRE

L'artère brachiale, que l'on étudie dans ce travail, est relativement longue en comparaison des dimensions de sa section. La dimension principale est donc clairement celle des génératrices du solide prismatique qu'est l'artère.

Point de vue comportement, on sait que les artères se déforment très peu longitudinalement, et qu'elles sont en outre soumises à des contraintes axiales relativement importantes ; nous remarquerions en effet, en sectionnant une artère, que celle-ci se rétrécirait automatiquement.

Ces différentes affirmations vont dans le sens d'un état plan de déformations.

3.3 COMPORTEMENT DU MUSCLE

Contrairement aux artères, les dimensions du muscle brachial sont également très importantes dans la direction axiale, mais, alors que les dimensions radiales étaient d'un ordre de grandeur nettement inférieur pour l'artère, les dimensions radiales au niveau du muscle ne peuvent être

considérées comme très petites en regard des dimensions longitudinales. Si l'hypothèse d'un état plan de déformations est toutefois plus correcte que celle d'un état plan de contraintes, on se situe cette fois-ci en réalité plus en état tridimensionnel.

Point de vue comportement, on notera que déformations et tensions longitudinales peuvent être observées au niveau du muscle, ceci corroborant l'affirmation antérieure d'un état tridimensionnel.

3.4 CONCLUSION

Pour les deux matériaux étudiés, l'état plan le plus représentatif du phénomène est l'état plan de déformations. Si celui-ci nous donnera des résultats très fidèles pour les déformations artérielles, il nous faut garder à l'esprit que les résultats concernant le muscle ne seront pas totalement exacts. A fortiori, les résultats obtenus au final seront eux aussi légèrement erronés, étant donné l'influence du muscle sur la déformation artérielle évaluée par notre méthode.

Cependant, comme nous l'avons mentionné plus tôt dans ce chapitre, une modélisation plus précise du comportement demanderait des recherches très importantes, de plus que des résultats de tests réels, résultats n'étant malheureusement pas à disposition.

Pour clôturer ce chapitre, nous pouvons anticiper quelque peu sur les futures exploitations des expressions des sections, expressions obtenues par l'analyse élastique et qui dépendent du choix d'état plan effectué. Les programmes qui nous permettront d'observer les phénomènes de l'hémodynamique, et qui utiliseront les expressions déterminées dans cette partie du travail, laisseront à l'utilisateur la possibilité de modifier ces expressions. En effet, les sections seront évaluées sur des feuilles annexes, et il suffira donc de modifier dans ces feuilles annexes la manière dont les sections seront évaluées pour obtenir une étude plus précise.

4. PARAMÈTRES DU PROBLÈME

Dans la continuité du chapitre précédent, où nous avons fait choix des modèles que nous utiliserons pour la suite du travail, il nous faut maintenant orienter nos réflexions et nos recherches vers les paramètres des différentes expressions, pour pouvoir au final tirer de celles-ci des valeurs numériques.

Dans un premier temps, ceci par soucis de clarté, nous pouvons, en observant les expressions analytiques des paragraphes précédents, lister les paramètres dont il est question, soit

- r_i , le rayon interne de l'artère brachiale ;
- r_c , le rayon externe de l'artère brachiale ;
- r_e , le rayon du bras au niveau de l'artère brachiale ;
- p_i , la pression interne, régnant au sein de l'artère brachiale ;
- p_e , la pression externe, exercée par le brassard.
- E_1 , le module de Young du matériau artère, idéalisé comme étant élastique linéaire ;
- E_2 , le module de Young du matériau muscle, idéalisé comme étant élastique linéaire ;
- ν_1 , le coefficient de Poisson du matériau artère, idéalisé comme étant élastique linéaire ;
- ν_2 , le coefficient de Poisson du matériau muscle, idéalisé comme étant élastique linéaire ;
- $C_{1,muscle}$, paramètre du modèle de Mooney-Rivlin pour le muscle ;
- $C_{2,muscle}$, paramètre du modèle de Mooney-Rivlin pour le muscle ;
- $C_{1,artère}$, paramètre du modèle de Mooney-Rivlin pour l'artère ;
- $C_{2,artère}$, paramètre du modèle de Mooney-Rivlin pour l'artère.

Si certains termes sont relativement facilement trouvables, comme par exemple les pressions exercées ou les dimensions du bras, il en est certains nécessitant des recherches plus approfondies, de même que quelques suppositions ou hypothèses.

La suite de ce paragraphe va consister en différentes sections reprenant l'ensemble des paramètres mentionnés. Dans chaque section, nous reviendrons sur les éléments qui nous ont permis de trouver les valeurs numériques recherchées.

4.1 PARAMÈTRES GÉOMÉTRIQUES

Les données géométriques sont relativement différentes d'un individu à l'autre, ce que l'on conçoit fort bien. Nous allons donc ici nous limiter à retranscrire les valeurs moyennes trouvées dans la littérature.

Pour l'artère, nous trouvons les chiffres suivants

$$\begin{aligned}\phi_{\text{homme}} &= 3,90 \pm 0,79 \text{ mm}_{38} \\ \phi_{\text{femme}} &= 3,52 \pm 0,59 \text{ mm}\end{aligned}$$

$$e \approx 1 \text{ mm}^{39}$$

Pour la circonference du bras à l'endroit de mesure, nous trouvons les données suivantes

$$c_{\text{adulte}} \in [20,28] \text{ cm}$$

$$c_{\text{obèse}} \in [32,42] \text{ cm}$$

$$c_{\text{enfant}} \in [13,20] \text{ cm}^{40}$$

4.2 PRESSIONS À CONSIDÉRER

Les pressions à considérer dans les expressions précédentes sont respectivement la pression engendrée par le brassard et la pression artérielle. Celles-ci ont déjà toutes deux été approchées dans la première partie de ce travail, lorsque nous avons introduit la notion de pression artérielle. Les valeurs communes sont exprimées en mmHg, mais devront être converties en Pa pour obtenir des expressions dimensionnellement correctes⁴¹. Nous aurons donc

$$\begin{cases} p_i \in [80,120] \text{ mmHg}_{42} \\ p_e \in [60,150] \text{ mmHg} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_i \in [10667,16000] \text{ Pa} \\ p_e \in [8000,20000] \text{ Pa} \end{cases}$$

³⁸ Données trouvées sur le site <http://www.medscape.com>.

³⁹ Epaisseur moyenne des parois des artères. Valeur trouvée dans le cours d'hémodynamique de M. Pirotton.

⁴⁰ Il s'agit là des valeurs standard des circonférences des brassards.

⁴¹ Pour convertir la pression mesurée en mmHg vers une pression en Pa, nous devons multiplier la première par 133,34.

⁴² La pression extérieure, soit celle engendrée par le brassard, est prise de manière telle à englober la pression interne. Ceci est logique si l'on se remémore la procédure visant à mesurer la pression artérielle au moyen d'un brassard, et ainsi le fait que le brassard débute à une pression supérieure à la pression systolique – empêchant ainsi tout passage du sang –, pour terminer à une pression inférieure à la pression diastolique – laissant ainsi le passage du sang libre.

Le schéma de variation des pressions a déjà été présenté à de multiples reprises (dans la section d'introduction sur les prérequis médicaux, mais aussi dans l'annexe 5 sur les tests de l'analyse élastique linéaire), il est donc peu utile de le présenter une nouvelle fois.

4.3 PARAMÈTRES MÉCANIQUES DE L'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

Les paramètres mécaniques de l'élasticité linéaire peuvent se trouver en effectuant des recherches bibliographiques approfondies. En effet, comme nous l'avons déjà dit dans l'introduction de cette partie du travail, les modèles élastiques linéaires sont très souvent utilisés en première approche lorsque l'on aborde un nouveau problème. De ce fait, les paramètres mécaniques de ces modèles sont fréquemment cités dans la littérature.

Cependant, si les données géométriques ont pu être citées sans précision – étant donné le potentiel représentatif inhérent à leur fonction –, et les variations de pression introduites directement – ayant déjà fait l'objet de multiples citations au cours des chapitres précédents et dans les annexes –, il nous faut pour les paramètres mécaniques résigner ceux-ci selon leurs sources, c'est pourquoi ces différentes sources font l'objet d'une annexe, soit l'annexe 8. Nous citerons ici uniquement les valeurs retenues pour la suite des recherches.

- **Modules de Young**

On trouve les modules de Young suivant

$$E_{\text{artère}} = 1,7 \text{ MPa}$$

$$E_{\text{muscle}} = 2,757 \text{ kPa}$$

- **Coefficients de Poisson**

Les deux matériaux en présence sont considérés comme étant incompressible. Les valeurs des coefficients de Poisson sont alors immédiates, et nous avons

$$\nu_{\text{artère}} = \nu_{\text{muscle}} = 0,5$$

4.4 PARAMÈTRES MÉCANIQUES DE L'ÉLASTICITÉ NON LINÉAIRE

Si les paramètres de l'élasticité linéaire pouvaient être trouvés relativement facilement dans la littérature, ceci n'est pas généralisé aux paramètres de l'élasticité non linéaire⁴³.

Pour trouver les paramètres à utiliser, nous devons donc calibrer notre modèle de Mooney-Rivlin, ceci en regard des résultats obtenus pour l'analyse élastique linéaire. Il s'agit dès lors

⁴³ Cela peut s'expliquer du fait de l'importante diversité de modèles pour le potentiel de déformation W .

de tester le programme à diverses reprises, en comparant pour chaque test les valeurs de l'analyse élastique linéaire et celle de l'élastique non linéaire.

Au final, nous obtenons les paramètres suivants

$$C_{1,artère} = 0,159 \text{ MPa}$$

$$C_{2,artère} = 0,116 \text{ MPa}$$

$$C_{1,muscle} = 0,015 \text{ MPa}$$

$$C_{2,muscle} = 0,007 \text{ MPa}$$

Valeurs qui nous donne les graphes suivants pour les déplacements radiaux et la section artérielle

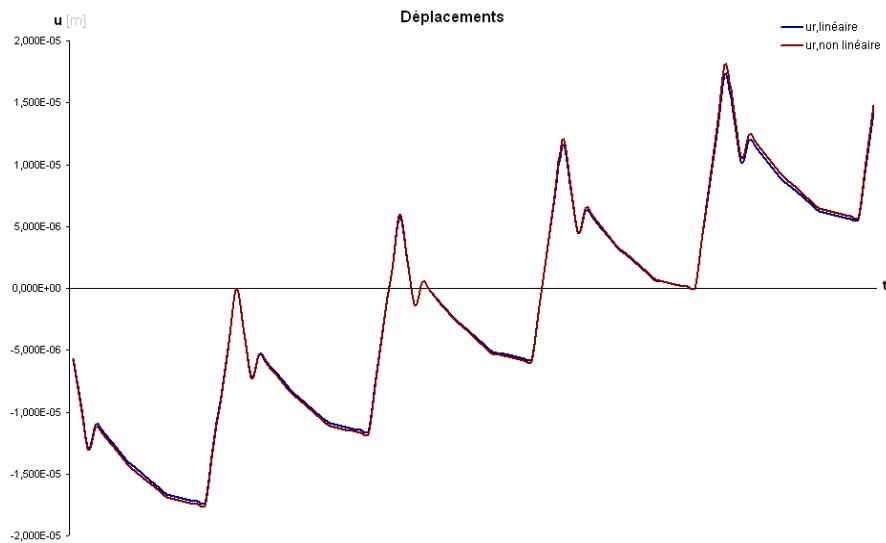


Figure 15 : Comparaison des modèles élastique linéaire et élastique non linéaire pour les déplacements radiaux, en état plan de déformations

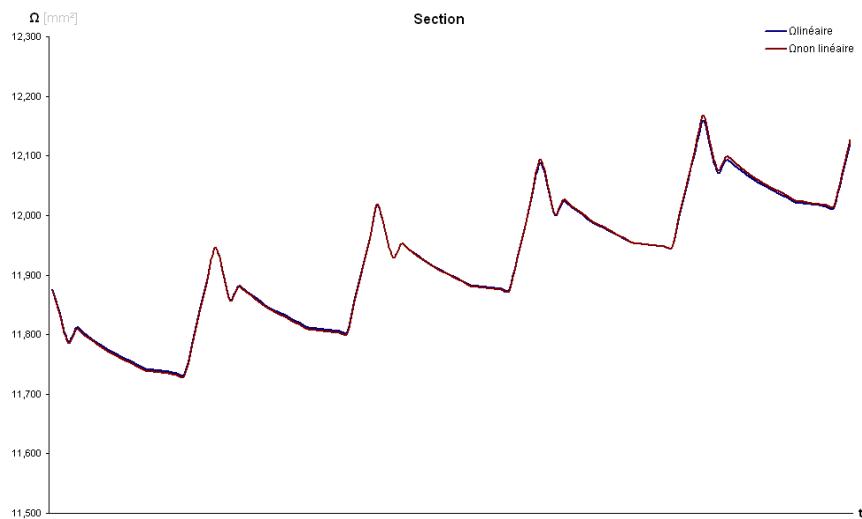


Figure 16 : Comparaison des modèles élastique linéaire et élastique non linéaire pour la section artérielle, en état plan de déformations

CONCLUSIONS

Au cours de cette partie de notre travail, nous avons cherché à exprimer la manière dont l'artère, et plus précisément la section de celle-ci, réagissait aux pressions qui lui étaient transmises par le brassard d'une part, et par le sang d'autre part.

Nous avons pour ce faire étudié le comportement d'un solide cylindrique épais – solide constitué dans notre cas de deux matériaux, soit le muscle et l'artère – sous pression.

Après avoir introduit quelques hypothèses quant au comportement mécanique des matériaux et quant à la géométrie du problème, nous avons développé des expressions analytiques des déplacements radiaux au niveau de l'artère pour les contraintes en présence, expressions qui nous ont permis, au final, d'examiner comment l'artère se comportait tout au long de la durée de la mesure de pression artérielle par utilisation d'un brassard.

Nous possédons donc à ce stade du travail des expressions analytiques de la section artérielle en fonction des pressions appliquées, et ce pour deux modèles de comportement, soit les modèles élastique linéaire et élastique non linéaire. Ces expressions vont nous permettre, dans la partie suivante du travail, d'étudier l'écoulement du sang à travers une conduite (l'artère) à parois déformables.

**TROISIÈME PARTIE,
HÉMODYNAMIQUE**

INTRODUCTION

Cette deuxième partie des études mécaniques de notre travail de fin d'études s'axe autour de l'écoulement du sang au sein de l'artère brachiale.

Cette artère, comme nous venons de le voir pendant l'étude mécanique des matériaux présentée dans la partie précédente, se déforme en fonction des pressions exercées par le brassard et par le sang sur ses parois. Les lois de comportement de la section artérielle en fonction de ces pressions sont maintenant connues, et il nous reste ainsi à étudier l'écoulement du sang au sein de cette artère déformable.

Les règles et lois de l'hydraulique classique s'appliquent directement à ce cas d'étude, les équations étant sujettes à quelques modifications afin d'amener celles-ci à décrire un écoulement caractéristique 1D dans une conduite que l'on sait déformable.

Le premier chapitre de cette partie aura pour objectif de présenter les équations régissant le phénomène, d'introduire et de discuter les différentes hypothèses nécessaires, ainsi que d'analyser ces équations en les comparant aux quelques résultats expérimentaux disponibles. Ces analyses auront pour objectif principal de déterminer le modèle de matériaux à utiliser. Nous essayerons en effet, dans la mesure du possible, de choisir un modèle représentatif des connaissances expérimentales en notre possession.

Ensuite, il nous faudra chercher une méthode de résolution applicable au système d'équations présenté dans le premier chapitre. La méthode des volumes finis est celle qui s'applique le mieux à ce type d'équations. Nous introduirons quelque peu la méthode, et nous développerons ensuite les différentes étapes nécessaires à son application.

Une fois cette méthode développée et le programme réalisé, nous présenterons et testerons ce programme pour un sujet présentant des caractéristiques physionomiques et anatomiques représentatives de la majorité des gens. Il nous faudra pour cela développer, parallèlement au premier programme de résolution, un programme nous permettant de gérer l'importante base de données correspondant aux solutions du système d'équation de l'hémodynamique vasculaire.

Finalement, nous pourrons utiliser cette solution, dite de référence, pour tester l'influence de la circonférence de certains paramètres sur la pression artérielle.

1. ECOULEMENT DU SANG DANS LES ARTÈRES...

1.1 GÉNÉRALITÉS ET PARTICULARITÉS DE L'ÉCOULEMENT

L'écoulement du sang dans les artères consiste en fait en un écoulement sous pression d'un fluide au sein d'une canalisation à parois déformables.

Les lois habituelles de l'hydraulique s'appliquent donc directement au phénomène.

Les équations de base d'un écoulement fluide sont, en toute généralité,

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \\ \frac{d(\rho \vec{U})}{dt} = -\nabla p + \rho \vec{f} + \mu \nabla^2 \vec{U} \end{cases}$$

Soit respectivement l'équation de la continuité, qui traduit la conservation de la masse ; et les équations de Navier-Stokes, qui traduisent elles la conservation de la quantité de mouvement.

En considérant le fluide comme incompressible, nous obtenons directement

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\vec{U}) = 0 \\ \frac{d(\vec{U})}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f} + \nu \nabla^2 \vec{U} \end{cases}$$

Ceci constitue donc le système d'équations général pour un écoulement de fluide incompressible en conduite. Nous faisons, en plus de l'incompressibilité du fluide, une série d'autres hypothèses ; sur le fluide, l'écoulement ou encore la géométrie.

• Homogénéité du fluide

L'homogénéité du fluide est une hypothèse classique lorsque l'on travaille avec des fluides comme l'eau, mais est relativement moins judicieuse lorsqu'il s'agit du sang. En effet, nous avons vu dans la première partie de ce travail que le sang était un fluide composé de plusieurs phases, ce qui en fait un fluide non homogène. Cependant, à l'échelle du problème étudié, on peut considérer que les différentes propriétés physiques et mécaniques du sang sont telles que l'on peut considérer le fluide comme homogène.

• Ecoulement laminaire

L'écoulement est supposé laminaire. Cette hypothèse est, au vu des vitesses en jeu, tout à fait acceptable. On peut en effet évaluer le nombre de Reynolds de l'écoulement. Celui-ci est donné par

$$\text{Re} \approx \frac{U\Phi}{\nu}$$

Où

- U est la vitesse moyenne du fluide (exprimée en m/s) ;
- Φ est le diamètre interne de l'artère (exprimé en m) ;
- ν est la viscosité cinématique (exprimée en m^2/s), $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, avec μ la viscosité dynamique (exprimée en Poiseuille, soit en Pa.s)

En recherchant les données correspondant à l'écoulement du sang dans l'artère brachiale, on trouve la valeur suivante pour le nombre de Reynolds :

$$\text{Re} \approx \frac{(0,15 \text{ m/s})(1,95 \cdot 10^{-3} \text{ m})}{\left(\frac{15 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}}{1050 \text{ kg/m}^3} \right)} = 20,475$$

Dans un écoulement en conduite, on considère le fluide comme laminaire pour des valeurs du nombre de Reynolds inférieures à 2300, et turbulent pour des valeurs excédant 4000. Dans le cas présent, on est donc clairement en écoulement laminaire.

Enfin, puisque l'on suppose l'écoulement laminaire, on peut supposer les vitesses radiales comme faibles vis-à-vis des vitesses longitudinales.

• Comportement rhéologique de la paroi

Le comportement rhéologique de la paroi est supposé suivre une loi liant la section, l'abscisse et la pression uniquement.

• Autres hypothèses

Finalement, notons encore deux hypothèses essentielles pour la suite des développements. Premièrement, nous allons négliger les pertes locales. Ensuite, les possibles décollements à la paroi seront négligés. La première hypothèse se justifie du fait que nous considérons une section d'artère relativement rectiligne, les pertes locales dues à des changements brusques de géométrie seront donc absentes. De la même manière, les irrégularités dans la géométrie étant supposées faibles, les décollements du fluide à la paroi devraient être évités.

1.2 EQUATIONS DE L'ÉCOULEMENT

Après de multiples opérations dont l'intérêt dans ce rapport est relativement limité, nous obtenons les équations fondamentales de notre modèle. Ces équations sont tirées du cours

d'hémodynamique vasculaire de Monsieur Pirotton, et les différents résultats intermédiaires sont présentés dans l'annexe 9.

Les équations de notre modèle sont, au final,

$$\begin{cases} \frac{\Omega}{\rho c^2} \left(U \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \Omega \frac{\partial U}{\partial z} + U \frac{\partial \Omega}{\partial z} \Big|_p = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\rho c^2} U (1 - \varphi) \frac{\partial p}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} (U \varphi) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g \frac{\partial h}{\partial z} = \tau \end{cases}$$

Avec

- U la vitesse longitudinale du fluide au sein de l'artère (exprimée en m/s) ;
- Ω la section de l'artère, fonction des pressions exercées (exprimée en m^2) ;
- ρ la masse volumique du fluide (exprimée en kg/m^3) ;
- p la pression artérielle (exprimée en Pa) ;
- g la constante de gravité (exprimée en m/s^2) ;
- h l'altitude des points caractéristiques (exprimée en m) ;
- φ un paramètre d'inégale répartition des vitesses (sans dimension) ;
- $\tau = \frac{\tau^x}{\rho \Omega}$, avec τ^x le frottement à la paroi dans le sens longitudinal (exprimé en m/s^2) ;
- z la coordonnée longitudinale (exprimée en m) ;
- t le temps (exprimée en s).

Si nous nous remémorons les principes de mesure de la pression artérielle, et surtout les conditions opératoires, on remarque que l'on peut négliger les effets de la gravité, et on a alors

$$\begin{cases} \frac{\Omega}{\rho c^2} \left(U \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \Omega \frac{\partial U}{\partial z} + U \frac{\partial \Omega}{\partial z} \Big|_p = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\rho c^2} U (1 - \varphi) \frac{\partial p}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} (U \varphi) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \tau \end{cases}$$

Nous avons déjà cité une première fois les différents paramètres intervenant dans ces deux équations, cependant, il est relativement intéressant de situer maintenant ceux-ci selon qu'ils sont connus, inconnus ou variables.

• Inconnues du problème

La première inconnue du phénomène observé est la pression p , pression qui est constante sur la section Ω , et qui varie en temps et en position. La seconde est la vitesse longitudinale U , vitesse moyenne sur la section Ω , qui varie également en temps et en position.

• Variables du problème

Les variables du problème sont le temps t et la position selon l'axe longitudinal de l'artère, z . Ces variables sont indépendantes.

• Paramètres connus

Le reste des paramètres est connu. Notons qu'il s'agit soit de données considérées constantes dans le temps et l'espace, soit de paramètres variables, mais dont les lois de comportement sont connues.

Les paramètres considérés comme constants pour la durée du phénomène sont la masse volumique ρ et le frottement à la paroi τ^x . L'hypothèse sur la masse volumique est plutôt classique et justifiée. Par contre, l'hypothèse sur le frottement à la paroi est moins licite. Le frottement à la paroi sera en effet fonction des vitesses de déplacement du fluide, il nous faudrait donc considérer une loi de comportement en fonction de la vitesse. Cependant, comme nous l'avons par ailleurs déjà mentionné plus tôt, la loi de comportement du frottement à la paroi prendra uniquement en compte la pression, l'abscisse et la section.

Il reste un paramètre que nous avons considéré constant, soit le paramètre d'inégale répartition des vitesses. Comme cela est expliqué en détails dans l'annexe 9, ce paramètre ne dépend pas de l'amplitude des vitesses, mais uniquement de la forme du profil de vitesse et de la forme de la section. Dans notre cas, nous nous situons dans une conduite que l'on peut considérer comme rectiligne et les seules discontinuités de cette conduite sont amenées par les variations de pression, selon les variations sectionnelles déterminées dans la partie matériau de ce travail. La forme de la section reste donc la même, les discontinuités amenées par la pression présentent des profils relativement continus, et la gamme de vitesse est telle que l'on se situe en régime laminaire tout au long de l'observation du phénomène. En conclusion, le diagramme des vitesses présentera dès lors une forme constante dans le temps et en position.

Enfin, les paramètres variables dans le temps sont en fait tous fonction de la section, donc des pressions exercées à l'intérieur de l'artère et à l'extérieur du bras. Connaissant la loi de comportement de la section en fonction des pressions (et donc indirectement du temps, les variations de pressions en fonction du temps étant connues), nous pouvons déterminer ces paramètres à tout instant et pour toutes les positions. Il nous suffit juste de faire choix d'une expression analytique pour le calcul des sections.

1.3 EXAMEN DE LA CÉLÉRITÉ

La célérité des ondes peut être approchée par la formule suivante

$$c^2 = \frac{\Omega}{\rho \frac{\partial p}{\partial z}}$$

Nous savons, par observations expérimentales, que la propagation des ondes est croissante avec la pression artérielle, comme le montre la figure suivante

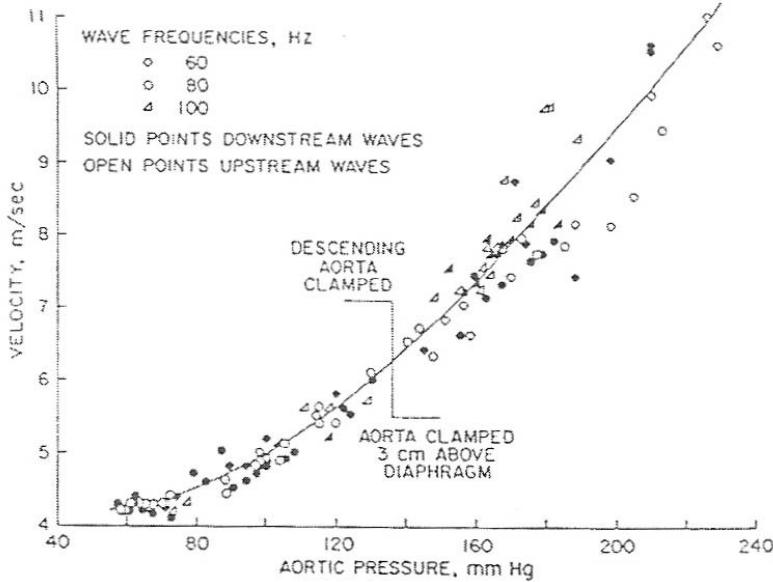


Figure 17 : Evolution de la vitesse de propagation des ondes avec la pression artérielle

Notre choix de modèle pour Ω doit donc passer par une vérification des observations précédentes.

Pour l'analyse élastique linéaire, nous avions, en état plan de déformations,

$$u_r(r = r_i) = \frac{1}{2} B_1 \left[\left(1 - 2\nu_1 \right) \left(r_i^3 p_i - r_c^2 r_i 2 \frac{B_1 r_i^2 p_i (1 - \nu_1) + B_2 r_e^2 p_e (1 - \nu_2)}{B_1 (r_i^2 + (1 - 2\nu_1) r_c^2) + B_2 (r_e^2 + (1 - 2\nu_2) r_c^2)} \right) + \left(p_i - 2 \frac{B_1 r_i^2 p_i (1 - \nu_1) + B_2 r_e^2 p_e (1 - \nu_2)}{B_1 (r_i^2 + (1 - 2\nu_1) r_c^2) + B_2 (r_e^2 + (1 - 2\nu_2) r_c^2)} \right) r_i r_c^2 \right]$$

Et l'expression de la section nous est donnée par

$$\Omega = \pi (r_i + u_r(r = r_i))^2$$

Ou encore, en injectant la valeur du déplacement dans la formule de la section,

$$\Omega = \pi \left(r_i + \frac{1}{2} B_1 \left[\left(1 - 2\nu_1 \right) \left(r_i^3 p_i - r_c^2 r_i 2 \frac{B_1 r_i^2 p_i (1 - \nu_1) + B_2 r_e^2 p_e (1 - \nu_2)}{B_1 (r_i^2 + (1 - 2\nu_1) r_c^2) + B_2 (r_e^2 + (1 - 2\nu_2) r_c^2)} \right) + \left(p_i - 2 \frac{B_1 r_i^2 p_i (1 - \nu_1) + B_2 r_e^2 p_e (1 - \nu_2)}{B_1 (r_i^2 + (1 - 2\nu_1) r_c^2) + B_2 (r_e^2 + (1 - 2\nu_2) r_c^2)} \right) r_i r_c^2 \right] \right)^2$$

On peut simplifier l'expression précédente en se souvenant que nous traitons des matériaux incompressibles, ce qui revient à supposer $\nu = 0,5$.

$$\Omega = \pi \left(r_i + \frac{1}{2} B_1 \left(p_i - \frac{B_1 r_i^2 p_i + B_2 r_e^2 p_e}{B_1(r_i^2) + B_2(r_e^2)} \right) r_i r_c^2 \right)^2$$

On a ainsi, en dérivant cette expression par rapport à la pression artérielle, soit par p si l'on pose $p = p_i$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial p} &= \pi \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \left(r_i + \frac{1}{2} B_1 \left(p - \frac{B_1 r_i^2 p + B_2 r_e^2 p_e}{B_1(r_i^2) + B_2(r_e^2)} \right) r_i r_c^2 \right)^2 \right\} \\ &= 2\pi \left(r_i + \frac{1}{2} B_1 \left(p - \frac{B_1 r_i^2 p + B_2 r_e^2 p_e}{B_1(r_i^2) + B_2(r_e^2)} \right) r_i r_c^2 \right) \left(\frac{1}{2} B_1 r_i r_c^2 \left(1 - \frac{B_1 r_i^2}{B_1(r_i^2) + B_2(r_e^2)} \right) \right) \end{aligned}$$

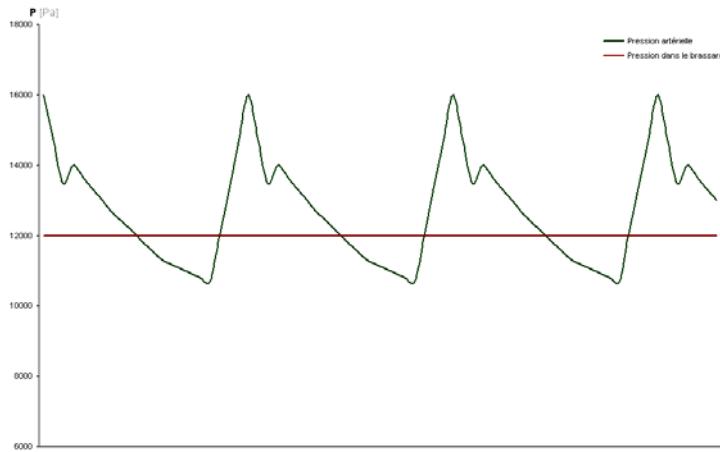
Et enfin,

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{\pi \left(r_i + \frac{1}{2} B_1 \left(p - \frac{B_1 r_i^2 p + B_2 r_e^2 p_e}{B_1(r_i^2) + B_2(r_e^2)} \right) r_i r_c^2 \right)^2}{\rho 2\pi \left(r_i + \frac{1}{2} B_1 \left(p - \frac{B_1 r_i^2 p + B_2 r_e^2 p_e}{B_1(r_i^2) + B_2(r_e^2)} \right) r_i r_c^2 \right) \left(\frac{1}{2} B_1 r_i r_c^2 \left(1 - \frac{B_1 r_i^2}{B_1(r_i^2) + B_2(r_e^2)} \right) \right)} \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\left(1 + \frac{1}{2} B_1 r_c^2 \left(p - \frac{B_1 r_i^2 p + B_2 r_e^2 p_e}{B_1(r_i^2) + B_2(r_e^2)} \right) \right)}{\left(B_1 r_c^2 \left(1 - \frac{B_1 r_i^2}{B_1(r_i^2) + B_2(r_e^2)} \right) \right)} \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\left(1 + \frac{1}{2} B_1 r_c^2 \left(p \left(1 - \frac{B_1 r_i^2}{B_1(r_i^2) + B_2(r_e^2)} \right) + \frac{B_2 r_e^2 p_e}{B_1(r_i^2) + B_2(r_e^2)} \right) \right)}{\left(B_1 r_c^2 \left(1 - \frac{B_1 r_i^2}{B_1(r_i^2) + B_2(r_e^2)} \right) \right)} \end{aligned}$$

Nous constatons donc que l'expression correspondant à l'analyse élastique linéaire vérifie le phénomène observé, toute augmentation de la pression conduira en effet à une augmentation de la célérité.

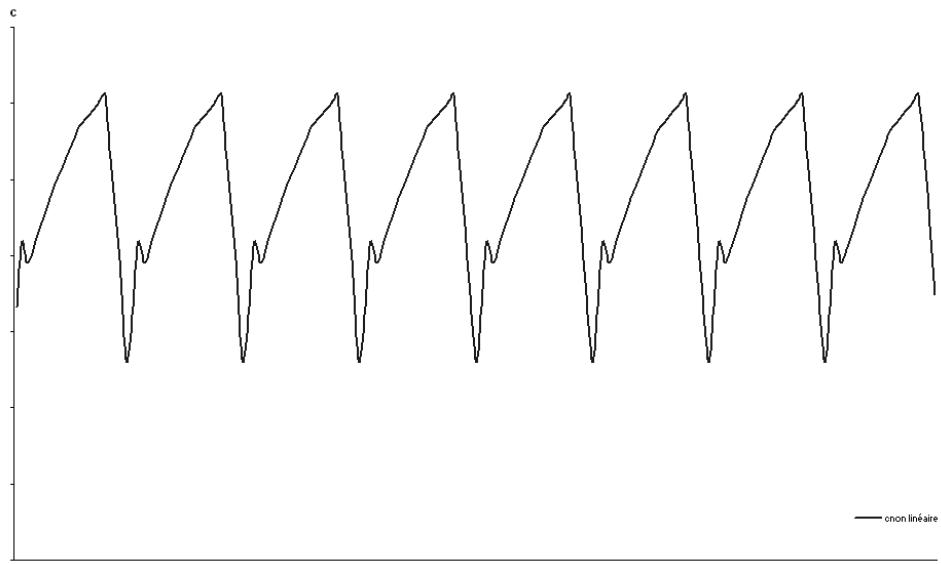
Pour l'analyse non linéaire, on doit procéder par différences finies, n'ayant pas en nos mains d'expression analytique de la section. Nous pouvons assez aisément, ayant auparavant déjà traité les différentes expressions sous Excel, utiliser ces mêmes fichiers pour évaluer la célérité. Nous en profitons en même temps pour tester parallèlement l'élasticité linéaire, de manière à comparer directement les résultats obtenus.

Le schéma de pression utilisé pour les tests est le suivant



Il s'agit donc de la variation réelle de la pression artérielle, mais nous avons supposé la pression du brassard constante, afin de ne pas perturber le phénomène avec des contraintes extérieures.

Nous obtenons ainsi les variations de la célérité en fonction de la pression pour le modèle élastique non linéaire.



Alors que nous aurions, avec le même signal de pression, pour le modèle élastique linéaire

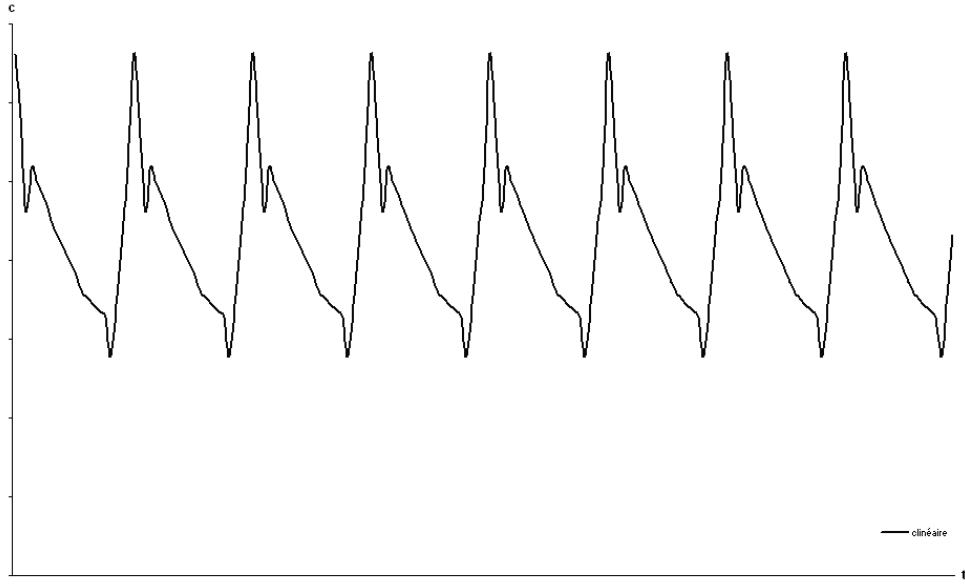


Figure 20 : Variation de la célérité en fonction d'un certain signal de pression pour le modèle élastique linéaire

On voit donc, comme nous l'avions déjà remarqué précédemment, que, pour l'analyse linéaire, la variation de pression entraîne une variation de célérité allant dans le même sens. Par contre, pour l'analyse non linéaire, le phénomène est inversé. Une diminution de la pression entraînera une augmentation de la célérité, tandis qu'une augmentation de la pression engendrera elle une diminution de la célérité. Malgré la calibration des modèles de manière à ce qu'ils présentent des résultats extrêmement proches, ceux-ci n'amènent pas aux mêmes observations physiques.

Les sections étant globalement presque exactement les mêmes en fonction de la pression – la calibration ayant été travaillée dans cet objectif – la différence de comportement est à rechercher dans la variation de section par rapport à la pression, la célérité, pour rappel, étant en effet exprimée par

$$c^2 = \frac{\Omega}{\rho \frac{\partial \Omega}{\partial p_z}}$$

Afin d'examiner ce qui entraîne ce comportement opposé de nos deux modèles, on peut dresser les graphes de la variation de la section en fonction de la pression et ainsi comparer les résultats relatifs au modèle élastique linéaire et au modèle élastique non linéaire, pour essayer de mieux comprendre le phénomène observé.

Nous avons ainsi les graphiques suivants :

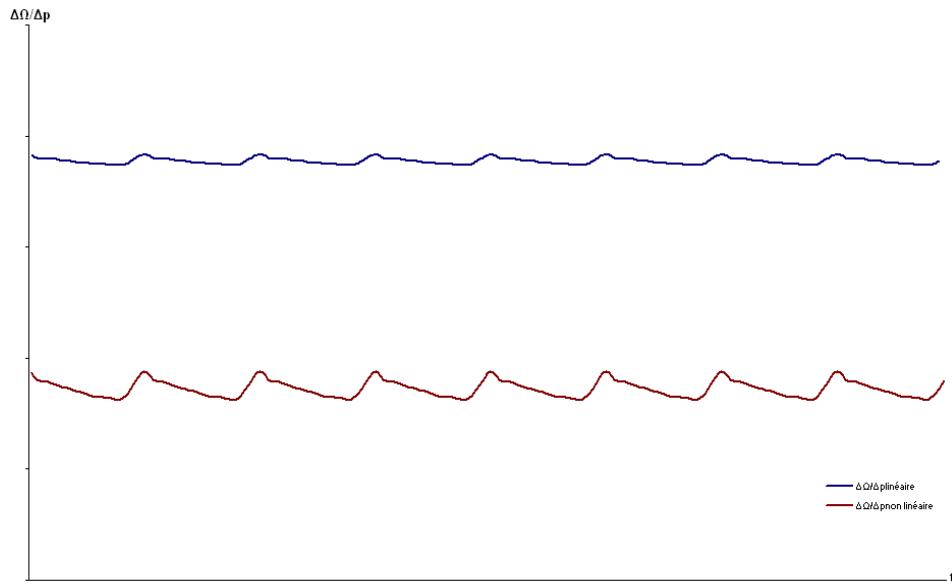


Figure 21 : Variation de la section en fonction de la pression pour les modèles élastique linéaire et élastique non linéaire

Les comportements observés à ce stade sont donc fort différents, on constate en effet que les variations concernant le modèle non linéaire sont non seulement beaucoup plus marquées, mais également plus petites. Au final, on comprend que les comportements des célerités soient eux aussi différents, et même opposés en l'occurrence.

REMARQUES

On peut conclure ce premier chapitre de cette partie du travail en rappelant les enseignements principaux qu'elle nous a apportés. D'une part, nous avons introduit les équations de l'écoulement, équations qui vont, au cours des paragraphes suivants, être modélisées afin de représenter le phénomène. Enfin, elle nous a permis de faire un choix quant au modèle à utiliser en ce qui concerne le calcul de la section en fonction des pressions exercées, modèle qui sera celui de l'analyse élastique linéaire, celui-ci présentant un comportement physique en accord avec les observations expérimentales, quand les applications hydraulique du modèle élastique non linéaire présentent elles un comportement non représentatif de la réalité.

Il ne faut cependant pas conclure au mauvais comportement général de l'élasticité non linéaire. D'autres modèles que celui de Mooney-Rivlin peuvent en effet être introduits, et amener à des résultats physiquement corrects, qui conviendraient alors certainement mieux que le modèle élastique linéaire que nous nous apprêtons à utiliser. Il faudrait, afin de trouver le meilleur modèle, avoir une connaissance meilleure des matériaux et de leur manière de travailler, afin de trouver le modèle optimal de comportement.

2. MÉTHODE DE RÉSOLUTION

Pour résoudre les équations introduites dans le chapitre précédent, nous devons avoir recours à des méthodes numériques, telles par exemple la méthode des volumes finis ou encore celle des caractéristiques. La manière la plus simple et la plus complète de résoudre le type d'écoulement dont il est question dans ce travail est la méthode des volumes finis. Les principes généraux de celle-ci sont brièvement rappelés dans l'annexe 10.

Comme nous venons de le voir dans le chapitre précédent, le système d'équations de notre modèle est le suivant

$$\begin{cases} \frac{\Omega}{\rho c^2} \left(U \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \Omega \frac{\partial U}{\partial z} + U \frac{\partial \Omega}{\partial z} \Big|_p = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\rho c^2} U (1 - \varphi) \frac{\partial p}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} (U \varphi) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \tau \end{cases}$$

Ou encore, de manière à exprimer ces équations sous forme conservatrice,

$$\begin{cases} \frac{\Omega}{\rho c^2} \left(U \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{\partial(\Omega U)}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\rho c^2} U (1 - \varphi) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(U^2 \varphi)}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \tau \end{cases}$$

Les inconnues de ce système sont p et W , tandis que les variables indépendantes sont z et t .

2.1 MÉTHODE DES VOLUMES FINIS

Il nous faut en fait arriver à un système d'expressions de la forme, le but étant de créer un système d'équations nous permettant d'obtenir les dérivées temporelles des inconnues.

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + A \frac{\partial f_a}{\partial z} = W_s \\ \frac{\partial p}{\partial t} + B \frac{\partial f_b}{\partial z} = p_s \end{cases}$$

Il nous faut pour cela réécrire quelque peu les équations, de manière à faire apparaître plus clairement les inconnues.

Pour la continuité, on a

$$\frac{\Omega}{\rho c^2} \left(U \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{\partial(\Omega U)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\Omega}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\Omega U}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial(\Omega U)}{\partial z} = 0$$

Pour l'équation dynamique, on a

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\rho c^2} U(1-\varphi) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(U^2 \varphi)}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \tau$$

Et, finalement, étant donné que nous avons considéré φ comme constant, et dans le temps, et en position, nous obtenons

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\rho c^2} U(1-\varphi) \frac{\partial p}{\partial t} + \varphi \frac{1}{2} \frac{\partial(U^2)}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \tau$$

On a donc maintenant le système (équivalent au premier mais réécrit)

$$\begin{cases} \frac{\Omega}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\Omega U}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial(\Omega U)}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\rho c^2} U(1-\varphi) \frac{\partial p}{\partial t} + \varphi \frac{1}{2} \frac{\partial(U^2)}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \tau \end{cases}$$

De la première équation, on peut tirer une valeur de la variation temporelle de p , de manière à obtenir un système d'équation où les dérivées temporelles n'apparaissent pas conjointement dans la même équation

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{\rho c^2}{\Omega} \left(-\frac{\Omega U}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial(\Omega U)}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\rho c^2}{\Omega} \frac{\Omega U}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho c^2}{\Omega} \frac{\partial(\Omega U)}{\partial z} \\ &= -U \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho c^2}{\Omega} \frac{\partial(\Omega U)}{\partial z} \end{aligned}$$

Et on a ainsi le système final

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} = -U \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho c^2}{\Omega} \frac{\partial(\Omega U)}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{1}{\rho c^2} U(1-\varphi) \left(U \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\rho c^2}{\Omega} \frac{\partial(\Omega U)}{\partial z} \right) + \varphi \frac{1}{2} \frac{\partial(U^2)}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \tau \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -U \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho c^2}{\Omega} \frac{\partial(\Omega U)}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \left(-\frac{1}{\rho c^2} U^2 (1-\varphi) + \frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{\Omega} U(1-\varphi) \frac{\partial(\Omega U)}{\partial z} + \varphi \frac{1}{2} \frac{\partial(U^2)}{\partial z} = \tau \end{cases}$$

En première approximation, et ceci sans amener d'erreurs importantes par rapport à la réalité, nous pouvons considérer φ comme unitaire, ce qui nous donne le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} = -U \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho c^2}{\Omega} \frac{\partial(\Omega U)}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial(U^2)}{\partial z} = \tau \end{cases}$$

Nous allons devoir résoudre ce système d'équations par la méthode des volumes finis.

Comme nous l'avons vu dans l'annexe 10, nous avons à évaluer dans un premier temps les différents flux, qui nous permettront d'évaluer les dérivées spatiales. Ensuite, il nous restera à évaluer les dérivées temporelles, qui nous amèneront au final à évaluer deux sous pas pour les inconnues p et U , un premier prédicteur, et un second correcteur, construits de la même manière, avant de reconstruire les valeurs de U et p .

Les flux relatifs à notre problème sont, au vu des équations en jeu,

$$\begin{cases} flux_1 = p \\ flux_2 = \Omega U \\ flux_3 = U^2 \end{cases}$$

On a ainsi le système à résoudre

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} = -U \frac{(flux_1(j+1) - flux_1(j))}{\Delta z} - \frac{\rho c^2}{\Omega} \frac{(flux_2(j+1) - flux_2(j))}{\Delta z} \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{(flux_1(j+1) - flux_1(j))}{\Delta z} + \frac{1}{2} \frac{(flux_3(j+1) - flux_3(j))}{\Delta z} - \tau = 0 \end{cases}$$

Les valeurs de U , τ et $\frac{\rho c^2}{\Omega}$ doivent être évaluées en faisant la moyenne des valeurs aux bornes, on a en fait

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}(U(j+1) + U(j)) \\ \tau &= \frac{1}{2}(\tau(j+1) + \tau(j)) \\ \frac{\rho c^2}{\Omega} &= \rho \frac{c^2(j+1) + c^2(j)}{\Omega(j+1) + \Omega(j)} \end{aligned}$$

On peut alors construire les solutions de p et U grâce aux expressions suivantes

$$\begin{cases} p_j^x = p_j^t + \Delta t \left(-U \frac{(flux_1(j+1) - flux_1(j))}{\Delta z} - \frac{\rho c^2}{\Omega} \frac{(flux_2(j+1) - flux_2(j))}{\Delta z} \right) \\ U_j^x = U_j^t - \Delta t \left(+ \frac{1}{\rho} \frac{(flux_1(j+1) - flux_1(j))}{\Delta z} + \frac{1}{2} \frac{(flux_3(j+1) - flux_3(j))}{\Delta z} - \tau \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{j+1}^{xx} = p_{j+1}^t + \Delta t \left(-U \frac{(flux_1(j+1) - flux_1(j))}{\Delta z} - \frac{\rho c^2}{\Omega} \frac{(flux_2(j+1) - flux_2(j))}{\Delta z} \right)^x \\ U_{j+1}^{xx} = U_{j+1}^t - \Delta t \left(+ \frac{1}{\rho} \frac{(flux_1(j+1) - flux_1(j))}{\Delta z} + \frac{1}{2} \frac{(flux_3(j+1) - flux_3(j))}{\Delta z} - \tau \right)^x \end{cases}$$

$$\begin{cases} p^{t+1} = \frac{p^x + p^{xx}}{2} \\ U^{t+1} = \frac{U^x + U^{xx}}{2} \end{cases}$$

2.2 AUTRES INFORMATIONS NÉCESSAIRE À L'ÉLABORATION DE LA ROUTINE

Nous avons à ce stade établi l'intégralité des équations qui seront utilisées dans notre routine pour la résolution en volumes finis. Il nous reste à rechercher les conditions aux bords et le nombre de Courant. Nous aurons alors toutes les données nécessaires à l'utilisation du programme.

2.2.1 CONDITIONS AUX BORDS

Les conditions à imposer doivent se situer au niveau des pressions et des vitesses, soit à l'amont, soit à l'aval.

Pour trouver les conditions représentatives de la réalité, il nous faut repenser au mode opératoire de la prise de pression à l'aide d'un brassard, mode opératoire introduit dans la première partie de ce travail. De plus, il nous faut considérer les données auxquelles nous pouvons avoir accès.

Le mode opératoire de mesure de la pression consiste en fait à introduire, via un brassard, une pression telle que le passage du fluide est altéré, en empêchant le passage du sang lorsque la pression exercée par le brassard est supérieure à la pression artérielle, et en le permettant progressivement au fur et à mesure que la pression dans le brassard décroît.

Cette considération sur le mode opératoire bien en tête, nous pouvons maintenant réfléchir à l'accessibilité des différents paramètres, et conclure que les conditions amont paraissent être les seules convenant pour notre modélisation.

La pression en amont est en effet une des rares donnée observable dans la réalité, étant donné que c'est elle que l'on mesure par la pose du brassard.

Pour les mêmes raisons, la seule condition accessible sur la vitesse se situe à l'amont du brassard, la vitesse étant à certains moments permises, et à d'autre bloquée par la présence du brassard.

Pour déterminer numériquement les valeurs de ces conditions, nous avons eu recours à des recherches dans la littérature. Le signal de pression à l'amont du brassard a déjà été présenté à de multiples reprises, entre autres lorsque nous avons effectué les tests sur les formules des différents modèles élastiques. Nous avons en fait un signal de pression qui présente l'allure suivante



Figure 22 : Signal de pressions à l'amont du brassard

Pour la vitesse, nous avons également trouvé des valeurs du débit dans l'artère brachiale, valeurs exprimées en fonction du signal de pression. Ces valeurs de débit ont été traduites en terme de vitesse, en utilisant pour cela les valeurs de sections évaluées en fonction de ce même signal de pression. Les détails de ce calcul sont présentés en annexe 11. Au final, nous avons le profil de vitesses suivant

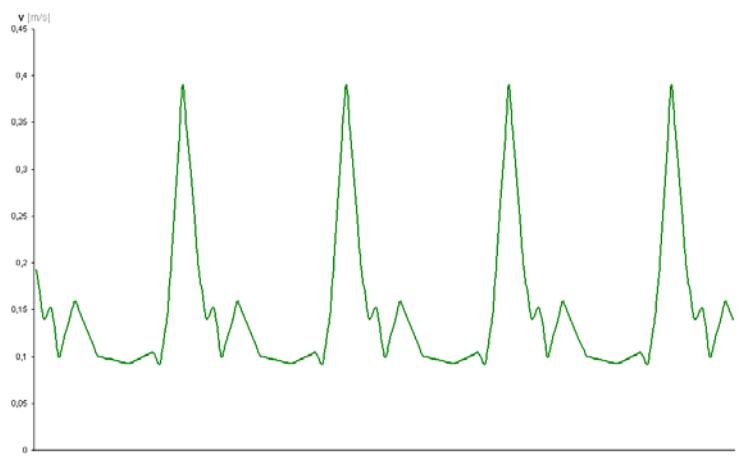


Figure 23 : Signal de vitesses à l'amont du brassard

Les vitesses étant empêchées lorsque la pression du brassard est supérieure à la pression artérielle, nous devrons insérer une condition amont qui bloquera effectivement la vitesse dans certaines conditions.

2.2.2 NOMBRE DE COURANT

Afin d'assurer la stabilité du schéma numérique, il nous faut utiliser des pas de temps et spatiaux reliés entre eux par la condition de Courant–Friedrichs–Lowy, qui majore le rapport $\frac{dt}{dx}$. Après avoir effectué les différents calculs nécessaires à l'obtention de ce nombre, présentés dans l'annexe 12, nous obtenons une condition majorative sur le pas de temps, soit

$$dt < \frac{N_c dx}{\max(|U + c|, |U - c|)}$$

Où N_c est le nombre de Courant, et doit être strictement inférieur à 1.

3. DÉVELOPPEMENT DE LA MÉTHODE

Les deux chapitres précédents nous permettent de construire intégralement la routine en VisualBasic qui va être utilisée pour la résolution du problème. Le code de calcul consiste simplement en la traduction algorithmique des différentes équations introduites précédemment, tout en respectant les différentes règles de la programmation en VBA. Le code de calcul est présenté à l'annexe 14. Dans le chapitre présent, nous allons uniquement introduire les derniers paramètres du problème, présenter l'interface du programme, expliquer brièvement sa méthode d'utilisation, et enfin tester celui-ci, ayant auparavant déterminé une méthode de traitement des données obtenues lors de l'exécution du programme principal.

3.1 PARAMÈTRES DU PROBLÈME

Il nous reste quelques paramètres à déterminer, soit la masse volumique et le frottement à la paroi, mais également une donnée à connaître, soit la longueur du brassard.

- **Masse volumique ρ**

Nous trouvons dans la littérature des valeurs de la masse volumique plus ou moins réparties autour des 1050 kg/m^3 ⁴⁴. Pour l'utilisation du programme, nous avons fait choix d'une valeur de 1043 kg/m^3 .

- **Frottement à la paroi, τ^***

Nous pouvons trouver, toujours dans la littérature, des valeurs du frottement à la paroi, souvent données par mètre courant. Les valeurs sont données par la loi de Casson,

$$\tau = \tau_c + \mu_\infty \gamma + k \gamma^n$$

On trouve les paramètres suivants, paramètres relatifs au taux d'hématocrite, soit,

Modèles He	t	Casson généralisé			
		τ_c	μ_∞	k	n
	30%	6.98	2.48	1.60	0.81
	50%	44.2	4.81	2.31	0.53

45

Figure 24 : Paramètres du modèle de Casson

⁴⁴ Valeurs trouvées sur le net, et entre autres sur le site <http://spiral.univ-lyon1.fr>.

⁴⁵ Tableau extrait d'une publication de l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumedienne.

Après avoir effectué les différents calculs, on trouve des valeurs de la contrainte de frottement comprises entre 250 et 350 Pa. Nous prenons, pour l'exécution du programme, une valeur de 350 Pa pour un mètre courant. La valeur à utiliser dans le programme dépendra dès lors du pas de temps.

• Longueur du brassard

Nous choisissons pour l'exécution du programme une longueur de brassard de 12 cm. Les différentes caractéristiques des brassards que l'on trouve sur le marché sont présentées dans l'annexe 13.

3.2 PRÉSENTATION DU PROGRAMME RÉALISÉ

Une interface d'utilisation de la routine a été réalisée afin de rendre la tâche de l'utilisateur plus aisée.

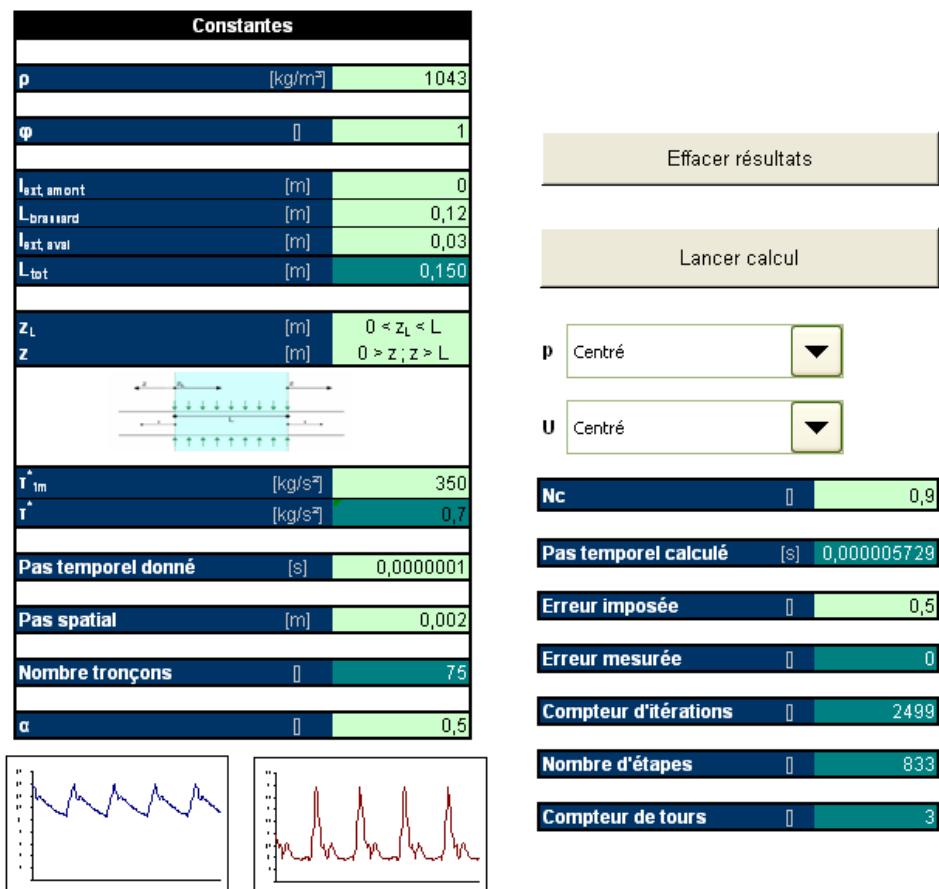


Figure 25 : Aperçu de l'interface du programme, paramètres constants

Etape	Aumont		Brassard		Vitesse aumont	
	p(t) [Pa]	U(t) [m/s]	p(t) [Pa]	U(t) [m/s]		
1	15998,4	0,1924			0,19237	
2	15365,1	0,1664			0,16645	
3	14731,9	0,1405			0,14052	
4	14098,6	0,1464			0,14638	
5	13465,3	0,1522			0,15224	
6	13732,0	0,1255			0,12547	
7	13998,6	0,0987			0,09870	
8	13832,0	0,1138			0,11376	
9	13665,3	0,1288			0,12882	
10	13498,7	0,1439			0,14388	
11	13332,0	0,1589			0,15894	
12	13165,4	0,1492			0,14918	
13	12998,7	0,1394			0,13942	
14	12832,1	0,1297			0,12966	
15	12665,4	0,1199			0,11990	
16	12532,1	0,1101			0,11015	
17	12398,8	0,1004			0,10039	
18	12265,4	0,0993			0,09934	
19	12132,1	0,0983			0,09830	
20	11998,8	0,0973			0,09725	
21	11865,5	0,0962			0,09621	
22	11732,2	0,0952			0,09516	
23	11598,8	0,0941			0,09412	
24	11465,5	0,0931			0,09307	
25	11332,2	0,0920			0,09203	

Figure 26 : Aperçu de l'interface du programme, paramètres aux bornes et pression dans le brassard

L'utilisateur du programme a en fait à rentrer des données dans les cases vertes claires, les données apparaissant dans les cases vertes foncées étant évaluées au cours de l'exécution du programme. Une fois toutes les données rentrées, il reste à lancer le calcul. A la fin de l'exécution, nous pouvons enfin obtenir l'ensemble des données concernant l'évolution de la pression et de la vitesse et tout point du tronçon de bras modélisé.

3.3 TEST SUR UN CAS PARTICULIER

Nous pouvons enfin tester le programme présenté ci-dessus.

Pour ce faire, nous allons utiliser les différentes données présentées tout au long du travail, données concernant les matériaux, le fluide, mais aussi le brassard. Les paramètres utilisés seront ceux correspondant à un sujet dit physiologiquement normal, c'est-à-dire un sujet dont les caractéristiques anatomiques et physiologiques correspondent aux moyennes observées sur l'ensemble de la population. Ce test nous servira donc également de référence lorsque nous testerons l'influence des différents paramètres sur les pressions mesurées. En effet, il s'agira alors de comparer les valeurs obtenues pour le nouveau sujet (sujet dont les caractéristiques anatomiques présenteront des écarts par rapport aux valeurs moyennes) aux valeurs de ce sujet de référence.

Les paramètres relatifs aux différents sujets seront présentés lorsque nous effectuerons les tests de comparaison nécessaires. Pour l'instant, nous nous limiterons à présenter les résultats obtenus lors de ce premier essai.

Les graphiques présentés ne seront peut-être pas très expressifs, mais nous introduirons dans le chapitre suivant de ce travail la manière dont nous traiterons les données obtenues, il s'agit dès lors dans ce chapitre uniquement d'observer les tendances générales des résultats.

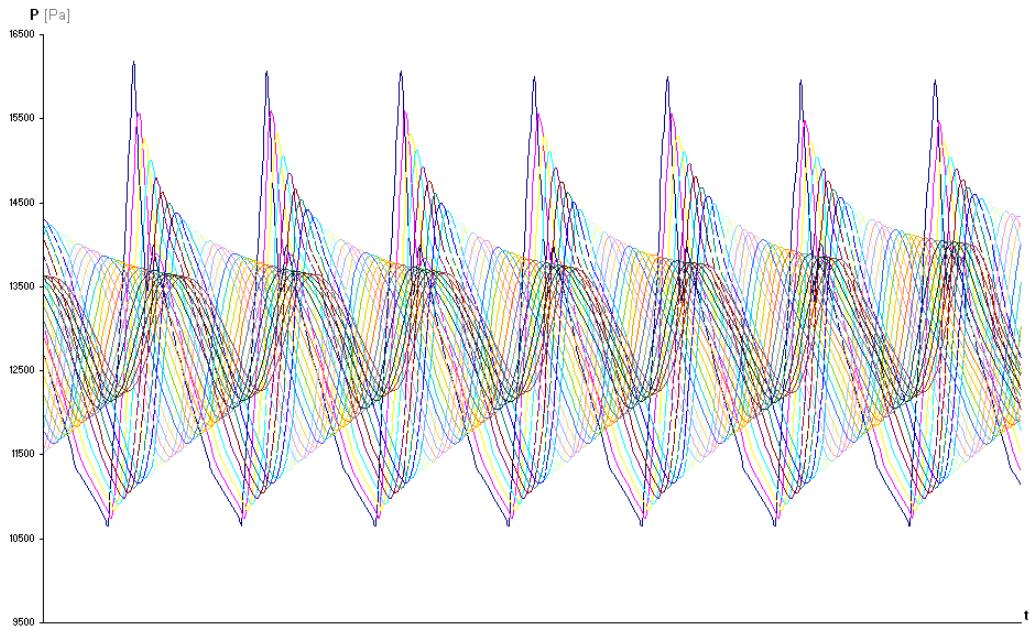


Figure 27 : Pression artérielle en fonction du temps, à différents pas spatiaux

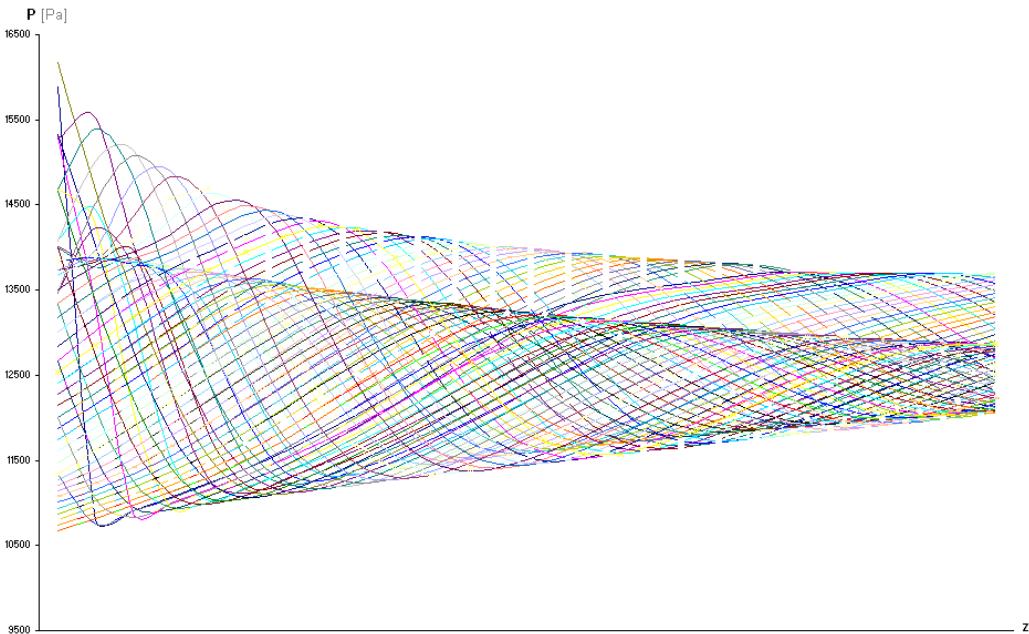


Figure 28 : Pression artérielle en fonction de la position, à différents pas de temps

3.4 TRAITEMENT DES DONNÉES

Comme nous venons de l'évoquer, le programme nous fournit une base de données comprenant des valeurs de la pression et de la vitesse en fonction du temps, pour tous les points du tronçon étudié. Il nous reste à analyser les résultats obtenus, afin de pouvoir, au final, tirer des observations précises quant au comportement généraux observés, et surtout quant aux erreurs introduites lors de l'utilisation d'un brassard non adéquat.

Pour cela, il nous faut en fait reproduire, au sein de notre base de données, le mode opératoire de mesure de la pression artérielle. Nous allons en fait faire diminuer la pression dans le brassard, ou plutôt les valeurs numériques représentant la pression au sein du brassard, jusqu'à ce que nous interceptions la courbe de pression artérielle au point amont du brassard, et nous obtiendrons ainsi la pression systolique. Ensuite, nous continuerons à faire diminuer la pression du brassard jusqu'à la dernière interception avec la pression artérielle, pour obtenir alors la pression diastolique (en pratique, nous partirons de la valeur la plus basse de la pression dans le brassard, que nous ferons augmenter jusqu'à la première intersection avec la pression artérielle, cette manière de procéder étant plus rapide au vu de l'importante base de données à notre disposition).

Nous avons, pour ce faire, réaliser une dernière macro, qui reproduit fidèlement le mode opératoire décrit ci-dessus, et qui trie pour nous les valeurs de pressions systolique, diastolique, ainsi que les pressions – toujours aux moments de la systole et de la diastole – aux points remarquables que sont la sortie du brassard et l'aval du brassard.

La routine réalisée à cet effet est présentée en annexe 15.

4. INFLUENCE DES DIFFÉRENTS PARAMÈTRES

Différents paramètres peuvent influencer la pression mesurée. Le paramètre principal que nous allons tester est bien entendu la circonférence du brassard, ce paramètre étant celui posant des problèmes connus aux niveaux des mesures, et celui dont on veut connaître les effets. Cependant, on peut également tester l'influence d'autres données, comme par exemple la longueur du brassard ou encore la musculature du patient.

La circonférence étant l'objet principal de ce travail, nous nous y attarderons plus en détails. Les comparaisons concernant les autres paramètres seront-elles très succinctes.

Pour l'analyse de l'influence des données telles la longueur du brassard ou la musculature, il nous suffit de changer les valeurs numériques correspondantes dans les feuilles de données. Pour ce qui est des problèmes de circonférence, la manipulation à effectuer n'est pas aussi directe, nous introduirons donc une réflexion supplémentaire quant aux paramètres modifiés par une mauvaise adéquation du brassard.

4.1 MAUVAISE ADÉQUATION DE LA CIRCONFÉRENCE DU BRASSARD

Dans un premier temps, nous allons réfléchir à la manière de prendre en compte la diminution de circonférence du brassard. Ensuite, nous utiliserons les résultats obtenus pour modifier les paramètres de calculs, pour enfin tirer des conclusions quant aux différences de comportements.

4.1.1 PHÉNOMÈNE INDUIT PAR UNE DIMINUTION DE LA CIRCONFÉRENCE DU BRASSARD

Le fait que le brassard soit trop serré engendre en fait une augmentation de la pression induite dans le bras. Pour atteindre une certaine pression effective, il nous faut donc moins gonfler le brassard que dans le cas d'un brassard ajusté à la circonférence du bras.

Pour déterminer la surpression amenée avant tout gonflement du brassard, il nous suffit en fait d'utiliser les différentes expressions ayant été introduites dans la partie matériaux de ce travail, relatives aux déformations d'un cylindre sous pression. La différence entre les recherches présentées ici et celles présentées alors se situe dans le fait que inconnues et variables sont échangées. Alors que nous recherchions auparavant les déplacements sous une certaine pression donnée, nous avons maintenant à déterminer la surpression engendrant certains déplacements connus.

Les expressions analytiques du problème restent exactement les mêmes, nous avons donc pour la pression de contact l'expression suivante

$$p_c = 2 \frac{B_1 r_i^2 p_i (1 - \nu_1) + B_2 r_e^2 p_e (1 - \nu_2)}{B_1 (r_i^2 + (1 - 2\nu_1) r_c^2) + B_2 (r_e^2 + (1 - 2\nu_2) r_c^2)} \\ = p_c^x$$

Tandis que, pour les déplacements du muscle nous avons,

$$u_r(r) \Big|_{\text{Matériau 2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{G_2} \left(\frac{1}{r_e^2 - r_c^2} \right) \left((1 - 2\nu_2) (r_c^2 p_c - r_e^2 p_e) r + (p_c - p_e) r_c^2 r_e^2 \frac{1}{r} \right)$$

Soit, au niveau du brassard et pour la pression de contact évaluée précédemment,

$$u_r(r = r_e) \Big|_{\text{Matériau 2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{G_2} \left(\frac{1}{r_e^2 - r_c^2} \right) \left((1 - 2\nu_2) (r_c^2 r_e p_c^x - r_e^3 p_e) + (p_c^x - p_e) r_c^2 r_e \right)$$

Pour résoudre le problème posé, nous avons juste à créer une routine sous Excel, routine qui fera en fait tourner les pressions jusqu'à ce que celles-ci soient telles que les déplacements calculés soient équivalents aux déplacements imposés.

4.1.2 INFLUENCE DE LA CIRCONFÉRENCE DU BRASSARD SUR LES MESURES

Une fois les différents calculs nécessaires à l'évaluation de la pression effective engendrée par l'utilisation d'un brassard non ajusté, il nous suffit d'utiliser dans nos programmes cette pression. On obtiendra ainsi la réponse du signal de pression artérielle pour le cas d'un brassard trop serré.

Nous avons exécuté le programme pour trois valeurs de circonférence, valeurs croissantes. Nous avons ensuite entré les valeurs de pressions correspondantes dans notre fichier de traitement des données. Enfin, nous avons traité les données et nous en avons retiré les résultats suivants

Référence		-0,0000005m		
		p _{mesure} [mmHg]	p _{aval, brassard} [mmHg]	p _{aval} [mmHg]
Systole	p _{mesure}	121,3069		
	p _{aval, brassard}	94,6590		
	p _{aval}	91,8695		
Diastole	p _{mesure}	80,0009		
	p _{aval, brassard}	94,9321		
	p _{aval}	91,7658		
Systole	p _{mesure}	121,3082	-0,001%	
	p _{aval, brassard}	88,3704	6,64%	
	p _{aval}	91,0493	0,89%	
Diastole	p _{mesure}	75,3786	5,778%	
	p _{aval, brassard}	96,1337	-1,27%	
	p _{aval}	89,1309	2,87%	

-0,0000010m				
Systole	p_{mesure}	[mmHg]	121,3094	-0,002%
	$p_{aval, brassard}$	[mmHg]	92,7140	2,05%
	p_{aval}	[mmHg]	93,6491	-1,94%
-0,0000015m				
Systole	p_{mesure}	[mmHg]	121,3107	-0,003%
	$p_{aval, brassard}$	[mmHg]	92,7074	2,06%
	p_{aval}	[mmHg]	93,6957	-1,99%
Diastole	p_{mesure}	[mmHg]	70,7332	11,584%
	$p_{aval, brassard}$	[mmHg]	94,9172	0,02%
	p_{aval}	[mmHg]	91,7564	0,01%

On constate effectivement que les pressions lues sur le brassard sont supérieures à la pression réelle du sujet.

On peut présenter, pour se donner une idée plus représentative des résultats, le graphique de l'évolution des pressions aux trois points caractéristiques considérés, par exemple pour la modification de circonference numéro 1.

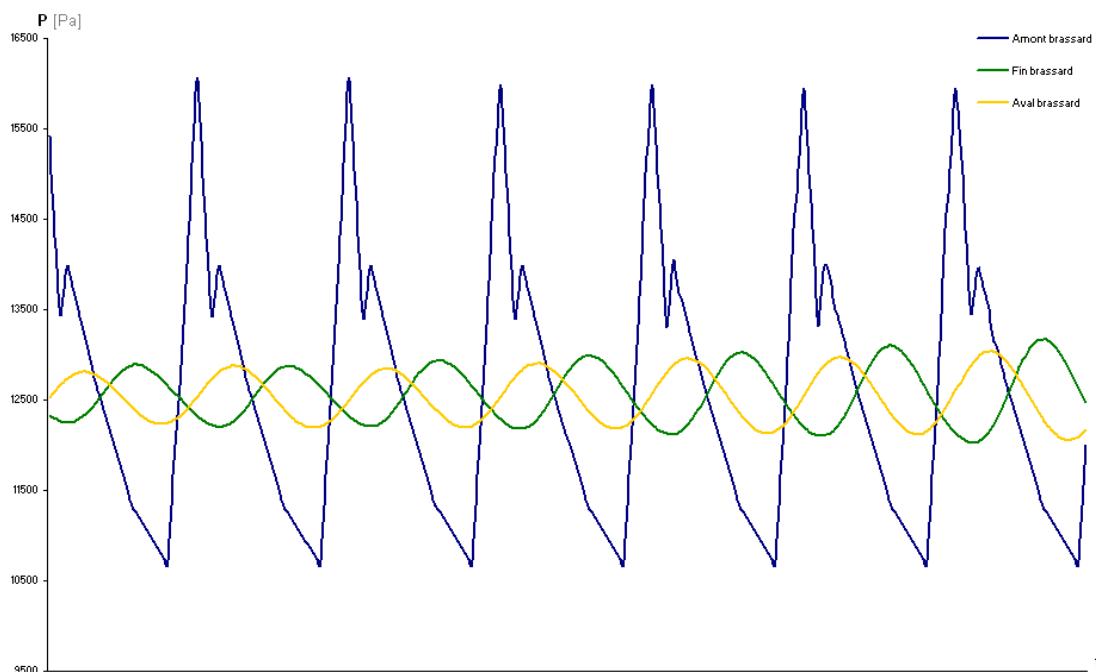


Figure 29 : Evolution des pressions aux endroits caractéristiques pour une diminution circonférentielle de $5 \cdot 10^{-5} m$

On peut également présenter des graphes comparatifs pour chaque point caractéristiques. On a ainsi, pour la pression à l'amont du brassard, avec la pression de référence et la pression correspondant à la diminution maximale de circonférence

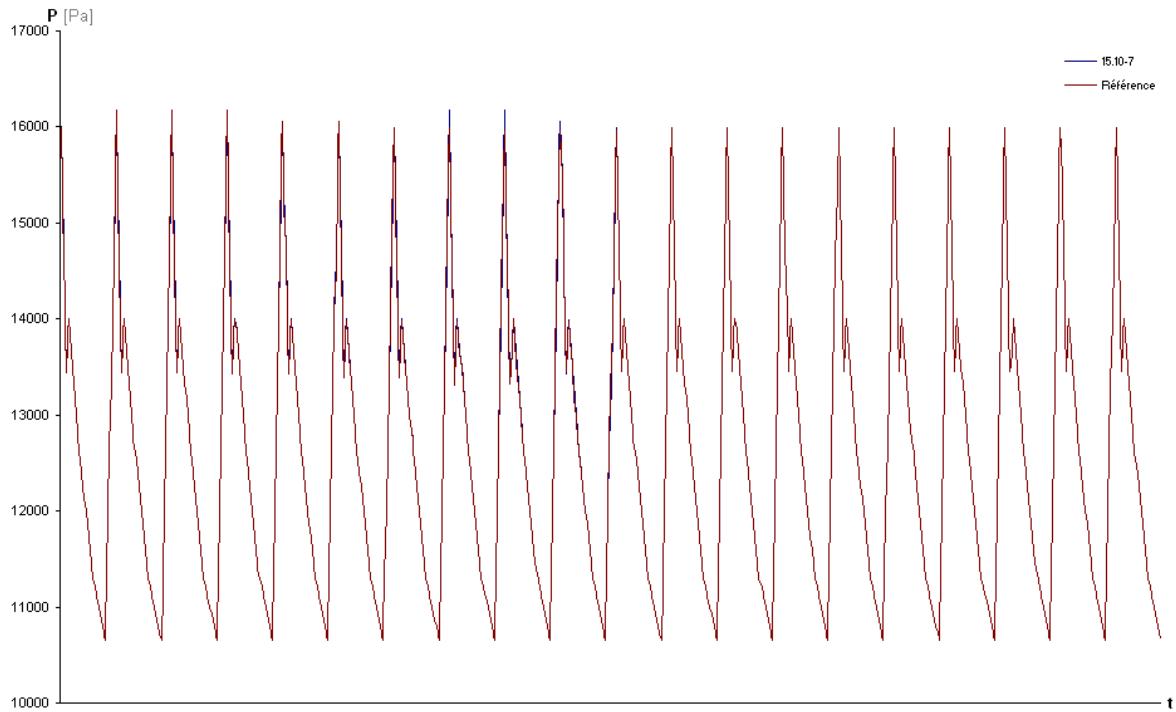


Figure 30 : Comparaison des signaux de pression à l'aval pour la pression de référence et pour une diminution de la circonférence de 15.10^{-5} m

Enfin, on a respectivement pour le point de la fin du brassard et le point à l'aval du brassard.

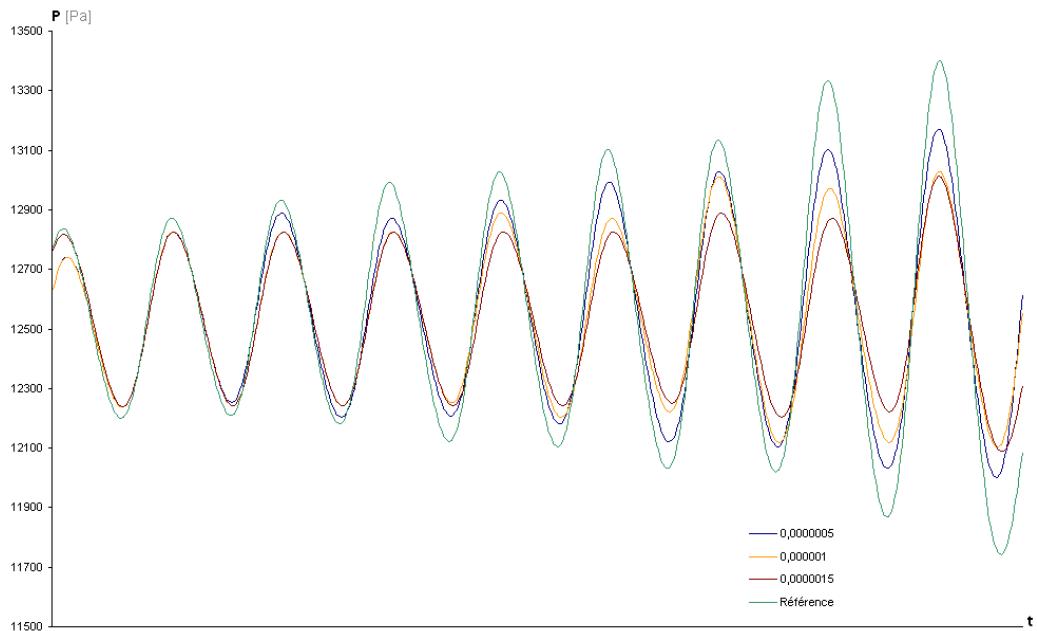


Figure 31 : Comparaison des signaux de pression à la sortie du brassard pour la pression de référence et pour trois diminutions de la circonférence

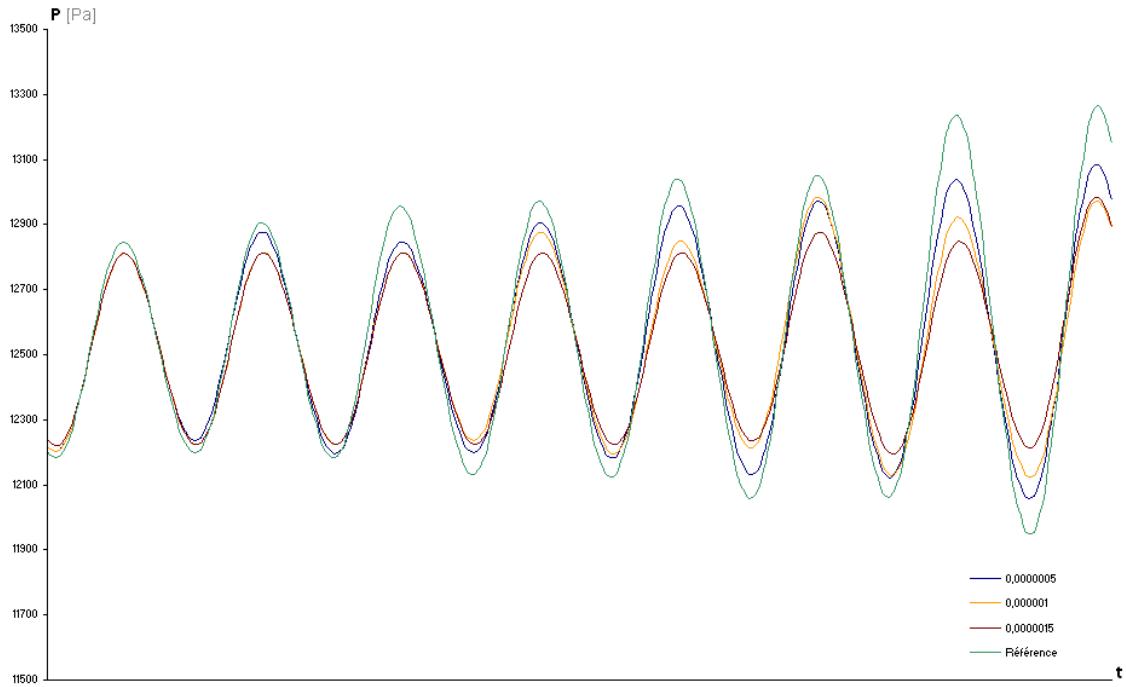


Figure 32: Comparaison des signaux de pression à l'aval pour la pression de référence et pour trois diminutions de la circonference

Les différences de pressions ne sont pas très marquées à l'amont du brassard. Par contre, on constate très clairement sur les deux derniers graphiques que les différences sont plutôt marquées à l'aval du brassard, et vont dans un sens logique de diminution de la pression avec la diminution de la circonference.

Au final, on conclut des résultats présentés ci-dessus que la pression lue sur le brassard est en effet surestimée, ce qui était attendu. De plus, on peut conclure que les perturbations introduites à l'aval du brassard par l'utilisation d'un brassard non adéquat sont très importantes.

4.2 INFLUENCE DES AUTRES PARAMÈTRES

Nous présentons uniquement dans ce chapitre des graphiques comparatifs. Les erreurs de mesures introduites à la lecture des chiffres sur le manomètre sont infiniment petites, tandis que les différences de comportement à l'aval du brassard sont, tout du moins pour le paramètre longueur, relativement importantes.

4.2.1 LONGUEUR DU BRASSARD

Pour tester la longueur du brassard, nous avons juste à changer le paramètre longueur du brassard dans la feuille de données. Nous pouvons alors comparer les valeurs obtenues pour un brassard de référence avec les données du nouveau cas pratique.

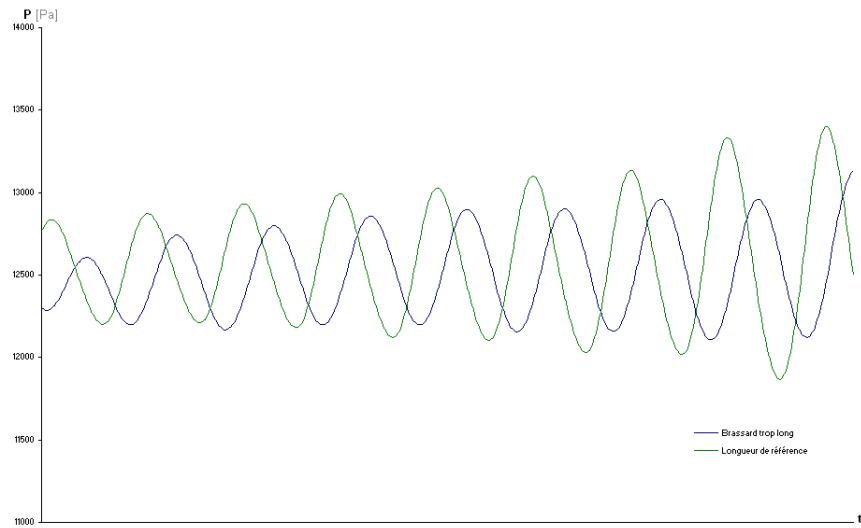


Figure 33 : Comparaison des signaux de pression à la sortie du brassard, pour un brassard de référence et un brassard trop long

On observe, aux deux figures de cette page, que le signal de pression est amorti par la présence d'un brassard trop long, ce à quoi l'on pouvait s'attendre. Le retard de phase observé provient du fait que la fin du brassard n'est pas située à la même distance du point amont, les signaux de pressions n'y parviennent dès lors pas en même temps.

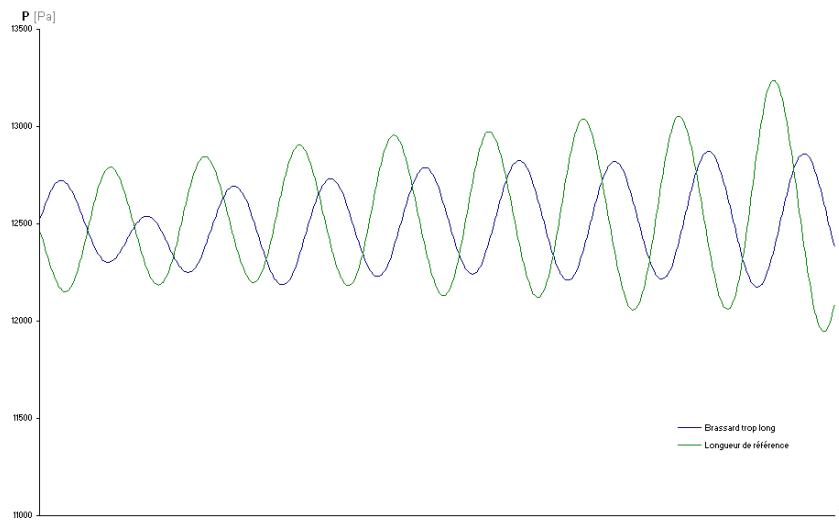


Figure 34 : Comparaison des signaux de pression à l'aval du brassard, pour un brassard de référence et un brassard trop long

4.2.2 MUSCULATURE DU SUJET

Pour tester l'influence de la musculature du sujet, nous avons à modifier les paramètres mécaniques de l'élasticité linéaire relatifs au muscle. Les valeurs numériques du module de Young vont avoir tendance à augmenter avec le développement de la musculature.

L'influence de ces paramètres est relativement faible, on enregistre en fait une tendance de l'artère à moins se déformer. En effet, si le muscle se rigidifie, la pression de contact à l'interface des deux matériaux sera moins influencée par la pression extérieure. Cependant, il faut noter que les changements de comportements observés au niveau de la pression de contact, et, à fortiori du déplacement radial de l'artère, sont extrêmement faibles. Les conséquences d'une modification de musculature sur l'écoulement sanguin sont de ce fait elles aussi très faibles, et difficilement observables. Nous présentons néanmoins ci-dessous un graphique de l'évolution des pressions.

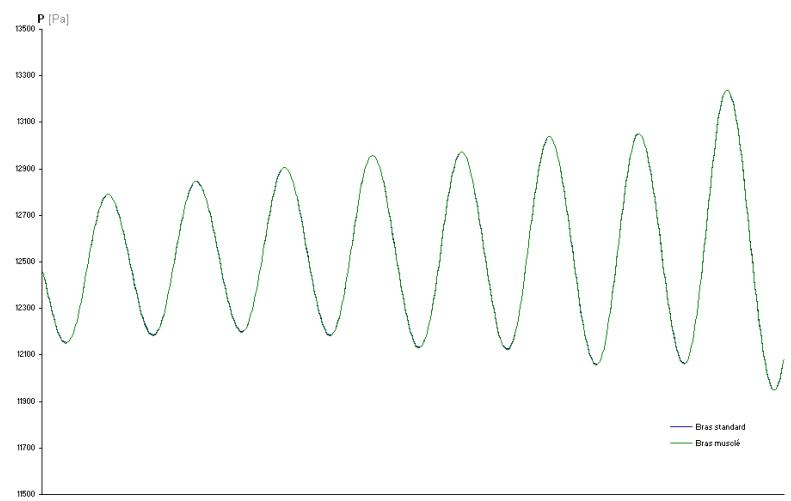


Figure 35 : Comparaison des signaux de pression à l'aval du brassard, pour un bras de référence et un bras plus musclé

Les différences de comportement ne sont pas très visibles. On peut, pour mieux se rendre compte de l'effet engendré, évaluer les erreurs numériques introduites

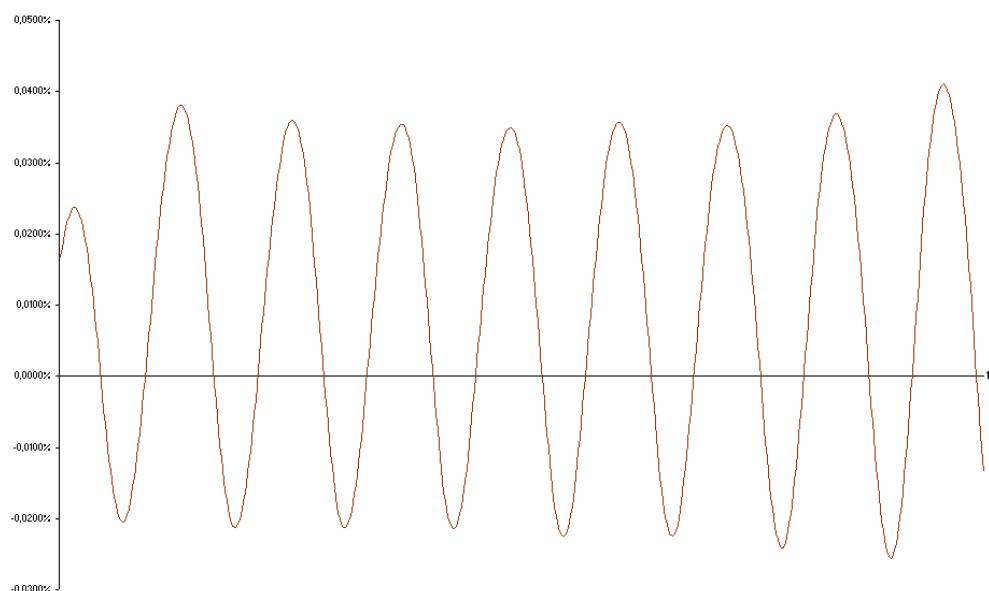


Figure 36 : Erreurs mesurées entre les deux signaux de pression correspondant respectivement à un bras standard et à un bras trop musclé

L'erreur oscille autour d'une position d'équilibre. Si l'on observe les signes de l'erreur ainsi que les positions, dans le temps, des erreurs nulles, on conclut que le signal de pression correspondant au bras trop musclé se situe tout le temps à l'extérieur du signal de pression correspondant au bras standard. On peut mieux se rendre compte de ce phénomène si l'on grossit une partie de courbe de la figure35.

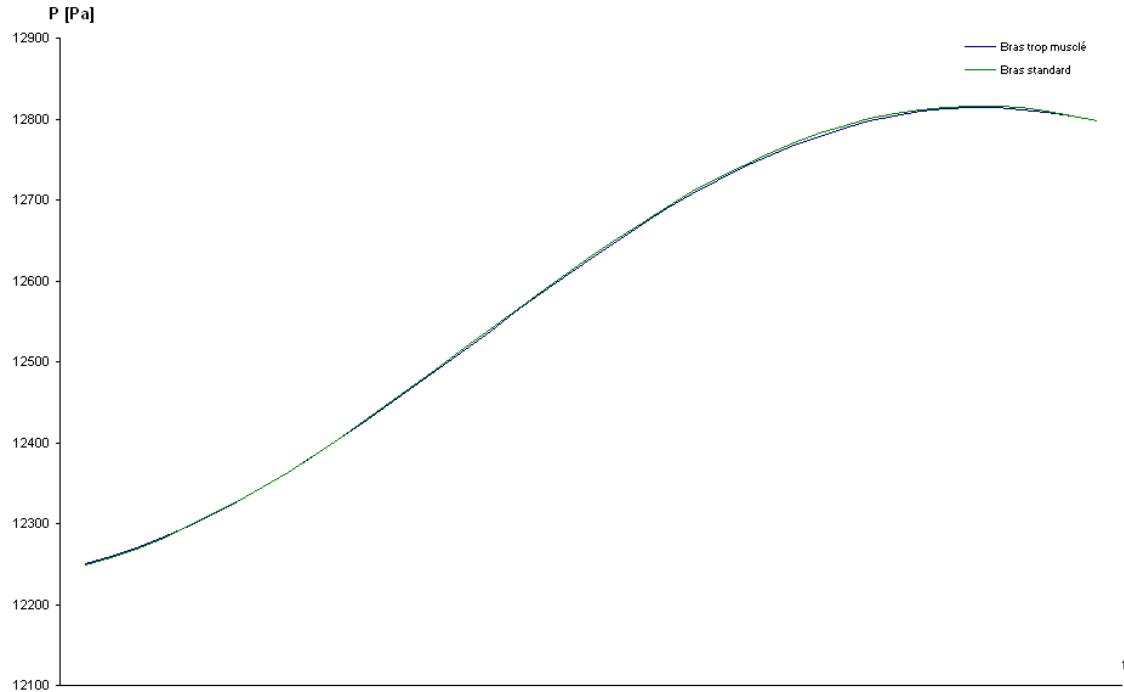


Figure 37 : Comparaison des signaux de pression à l'aval du brassard, pour un bras de référence et un bras plus musclé – Zoom

On peut dès lors conclure que le développement de la musculature du bras aura lui aussi pour effet d'amortir le signal de pression.

Une remarque importante est ici à apporter. On pourrait conclure que les constantes d'élasticité du muscle n'ont presque aucune influence sur l'écoulement sanguin. Cependant, il faut noter que nous n'avons pas trouvé de valeurs numériques de module de Young pour des sujets fort musclés, il est dès lors possible que valeurs réelles de E_{muscle} influencent plus clairement le comportement du sang dans l'artère. Nous pouvons donc uniquement conclure quand au comportement global d'amortissement du signal.

CONCLUSIONS

Cette dernière partie de ce travail de fin d'études nous a amené à considérer l'écoulement sous pression du sang au sein d'une artère déformable.

Nous avons ainsi utilisé des théories de la mécanique des fluides adaptées à ce cas d'étude.

Au cours de cette étude de l'hémodynamique vasculaire, nous avons, dans un premier temps, situé la physique du problème, en introduisant et discutant les différentes hypothèses nécessaires, puis en présentant le système d'équation régissant l'écoulement en présence.

Ensuite, nous avons considéré les quelques connaissances expérimentales à notre disposition, afin de choisir le modèle de comportement matériel le mieux adapté à la représentation fidèle des particularités de l'écoulement.

Une fois les différents modèles connus et les différentes équations finalisées, nous avons pu résoudre celles-ci numériquement, à l'aide de la méthode des volumes finis. Au cours de cette réalisation, nous avons du faire intervenir un bon nombre de notions qui avaient été introduites dans la première partie de ce travail, ceci afin de comprendre au mieux les mécanismes physiologiques posés en trame de fond du problème.

Finalement, les programmes réalisés ont été testés en regard de quelques paramètres anatomiques variables d'un sujet à l'autre, soit la circonférence du brassard principalement, mais aussi la longueur de ce brassard, ainsi que la musculature de l'individu.

Nous avons ainsi pu observer les effets hydrauliques induits par l'utilisation d'un brassard de mesure de pression artérielle non adéquat, et tirer quelques conclusions quant aux comportements observés.

CONCLUSIONS

Le travail de fin d'études sur le sujet « Analyse des effets mécaniques et hydrauliques induits dans le bras par un brassard de mesure de pression artérielle », et présenté dans ce rapport, touche maintenant à sa fin.

Le rapport présenté a été scindé en trois parties élémentaires.

La première partie a été intitulée « **Prérequis médicaux** ».

Cette première partie du travail nous a permis d'introduire nombre de notions essentielles à la bonne compréhension du domaine étudié. Elle nous a également donné l'opportunité de préciser la nécessité de recherches avancées sur le sujet. Les enseignements principaux de cette première partie sont ainsi principalement de deux types...

Un premier ensemble d'enseignements plutôt personnels, correspondant aux différents sujets que l'on pourrait qualifier d'annexes qui ont été évoqués dans ce rapport, comme, par exemple, les conséquences d'une pression artérielle trop élevée ou encore la dramatique présence du phénomène d'hypertension de par le monde, le nombre de personnes atteintes étant relativement important. Malgré l'intérêt à priori anecdotique de telles informations, elles donnent à ce travail une dimension supplémentaire, en insistant sur la nécessité de recherches approfondies dans le domaine, et, en ce qui nous concerne, sur les bénéfices pouvant être apportés par l'utilisation de sciences appliquées pour analyser les phénomènes.

Le deuxième type d'enseignements est lui conceptuel. Nous avons en effet, à la fin de cette première partie du travail, parcouru l'ensemble des notions nécessaires aux réflexions phénoménologiques du problème posé, et nous avons alors pu aborder les recherches mécaniques en comprenant l'ensemble des rouages anatomophysiologiques du problème.

Nous sommes ensuite entrés dans les recherches dites mécaniques. Le titre de ce travail de fin d'études suggérait la présence de deux types d'études mécaniques, il nous faut en effet analyser les effets mécaniques et hydrauliques induits dans le bras par un brassard de mesure de pression artérielle. Les deuxième et troisième parties du rapport se sont donc construites autour des deux types d'effets à analyser.

La deuxième partie du travail s'est axée sur la « **Mécanique des Matériaux** », les matériaux en présence étant le muscle et l'artère du bras.

Nous avions pour objectif d'y déterminer la manière dont les pressions exercées sur ces matériaux, soit la pression artérielle au sein de l'artère et la pression du brassard à l'extérieur

du bras, affectaient le comportement de l'artère. Ayant considéré artère et muscle comme étant des cylindres coaxiaux pour ce qui est du côté géométrique, et comme étant des matériaux élastiques transversalement isotropes pour ce qui est du côté mécanique, nous avons pu utiliser les théories de la mécanique du solide appliquées à un cylindre épais sous pression, cylindre ayant la particularité d'être constitué de deux matériaux. Les résultats obtenus ont été formulés en variations de la section artérielle, et ont pu ainsi être directement utilisées dans la suite des développements.

Enfin, la troisième partie du travail était elle consacrée à la « Mécanique des Fluides », ou plus précisément, vu le fluide en question, à l'**« Hémodynamique vasculaire »**.

Nous avons, dans cette section finale, utiliser les équations principales de tout écoulement hydraulique, à savoir l'équation de la continuité et celles de Navier-Stokes, avec pour objectif de modéliser l'écoulement sanguin au sein de l'artère, artère qui, par ailleurs, se déforme sous les pressions exercées.

Ainsi, nous avons réalisé un programme nous permettant de déterminer, pour différents paramètres anatomiques et physiologiques d'un sujet – soit par exemple les dimensions en jeu pour le bras et l'artère ou encore les valeurs de pressions et de vitesses connues au sein de l'artère – les valeurs de la pression et de la vitesse en fonction du temps et de la position le long de l'axe du vaisseau sanguin considéré, soit l'artère brachiale.

Finalement, nous avons utilisé ce programme pour tester l'influence de divers paramètres sur l'écoulement du sang, mettant ainsi en relief les affirmations faites dans l'introduction concernant les problèmes introduits par une mauvaise adéquation du brassard.

Nous n'allons pas revenir ici sur les différentes conclusions intermédiaires effectuées pour les différents tests réalisés, mais plutôt, d'une manière générale, sur les possibilités des méthodes réalisées.

Le programme réalisé nous permet de tester l'influence sur la pression artérielle d'un grand nombre de paramètres, mais également de visualiser au mieux les phénomènes de propagation des ondes de pression.

On peut enfin noter les différents apports théoriques et conceptuels amenés au cours du travail. Nous avons pu développer bon nombre d'équations et de programmes intermédiaires qui pourraient être appliqués dans de nombreux domaines. Notons tout particulièrement à ce sujet les développements réalisés en analyse élastique non linéaire, qui n'ont

malheureusement pas pu être exploités dans ce travail, mais dont l'intérêt théorique semble réel.

Au final, nous pouvons conclure que les apports de ce travail sont non seulement utiles pour le domaine médical, mais également pour les aspects théoriques intermédiaires qui ont été développé au cours de sa réalisation.

A côté de cela, notons cependant les limitations introduites par les nombreuses hypothèses effectuées, et ce à plusieurs niveaux.

Pour ces raisons, des recherches approfondies pourrait s'inscrire dans la continuité de ce travail, recherches qui auraient pour objectif principal de préciser les différents modèles réalisés.

D'un point de vue « matériaux », il conviendrait de déterminer avec plus de précisions les paramètres mécaniques, et surtout de trouver un modèle de comportement non linéaire qui représenterait le phénomène plus fidèlement, tout en vérifiant les observations expérimentales concernant la célérité.

D'un point de vue « fluides », c'est également au niveau des paramètres que le modèle peut être amélioré. Il serait en effet judicieux de déterminer des lois de comportement plus précises en ce qui concerne les frottements aux parois, de même qu'il paraît indispensable de rechercher avec plus de précision les vitesses et pressions à l'amont du brassard.

Enfin, les différents résultats devraient être comparés à des données expérimentales, de manière à corrélérer les valeurs obtenues.

Le travail de continuité s'inscrit ainsi plutôt dans un environnement à tendance médicale, la plupart des améliorations suggérées étant d'ordre expérimental. Une fois les différents raffinements réalisés, il sera alors aisément d'implémenter les nouveaux développements dans les programmes déjà réalisés.

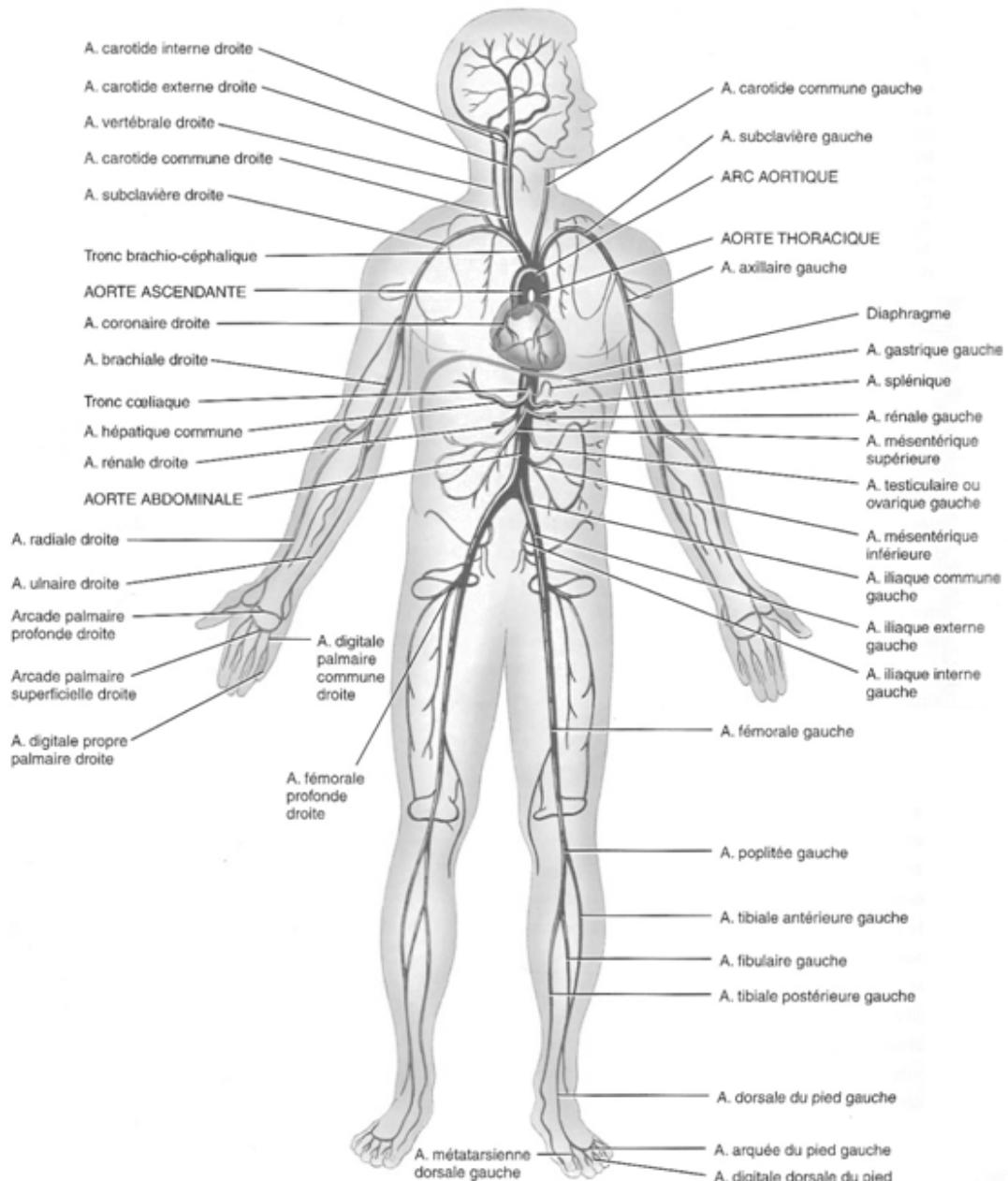
Enfin, nous désirons terminer ce travail par une conclusion un peu plus personnelle.

Le présent travail nous a permis d'aborder un domaine d'études qui nous était à priori totalement étranger, mais qui, au final, s'est avéré facilement approchable avec les techniques habituelles de notre formation. Il était par ailleurs relativement intéressant d'appliquer ces différentes techniques, ainsi que les différents enseignements reçus au cours de notre cursus universitaire, à des problèmes qui ne relèvent pas nécessairement de la science de l'ingénieur.

ANNEXES

ANNEXE 1, LE RÉSEAU SANGUIN

RÉSEAU ARTÉRIEL

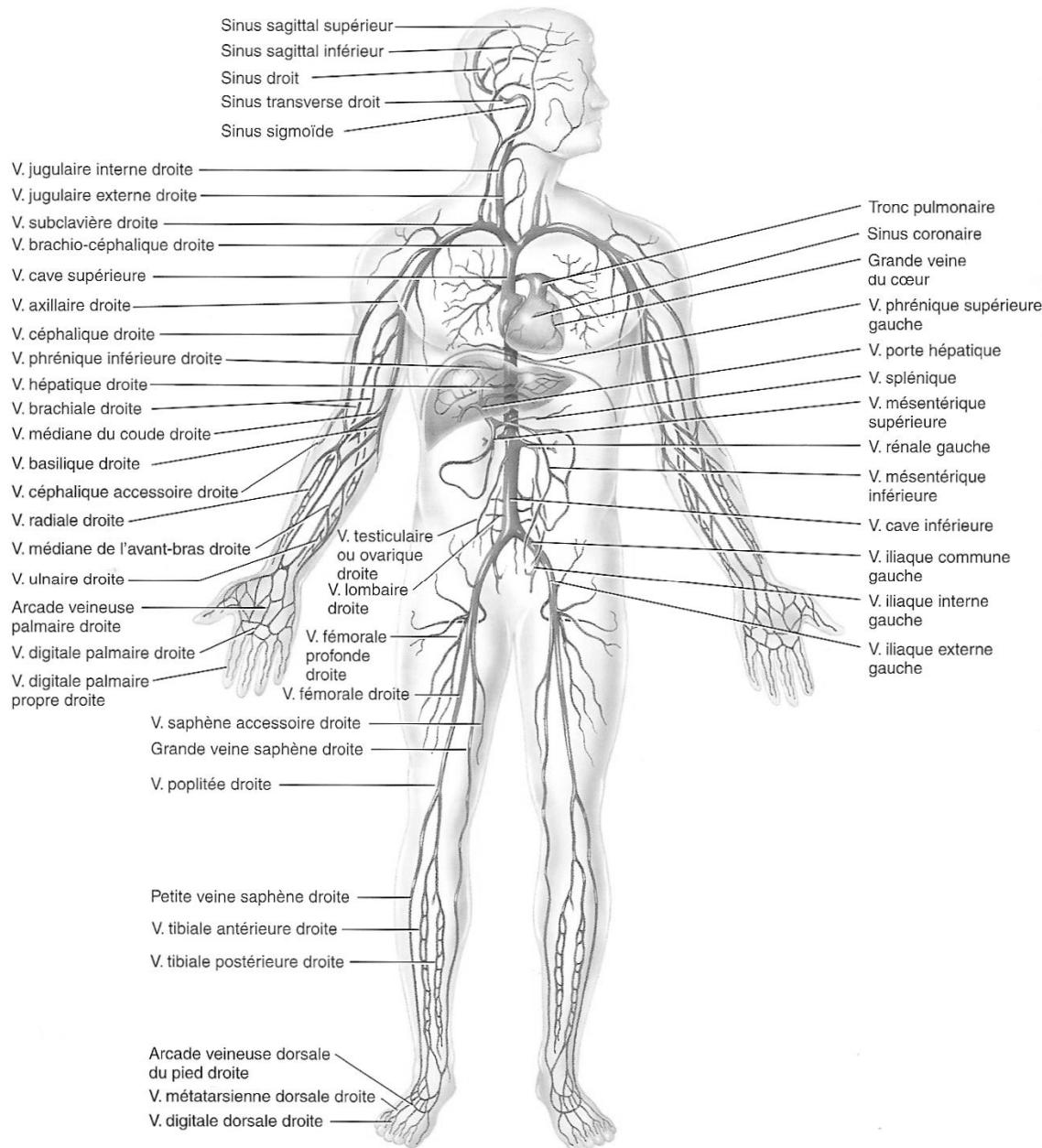


46

Figure 38 : Réseau artériel

⁴⁶ Image provenant du livre ‘Principes d’Anatomie et de Physiologie’, par Tortora & Grabowski

RÉSEAU VEINEUX



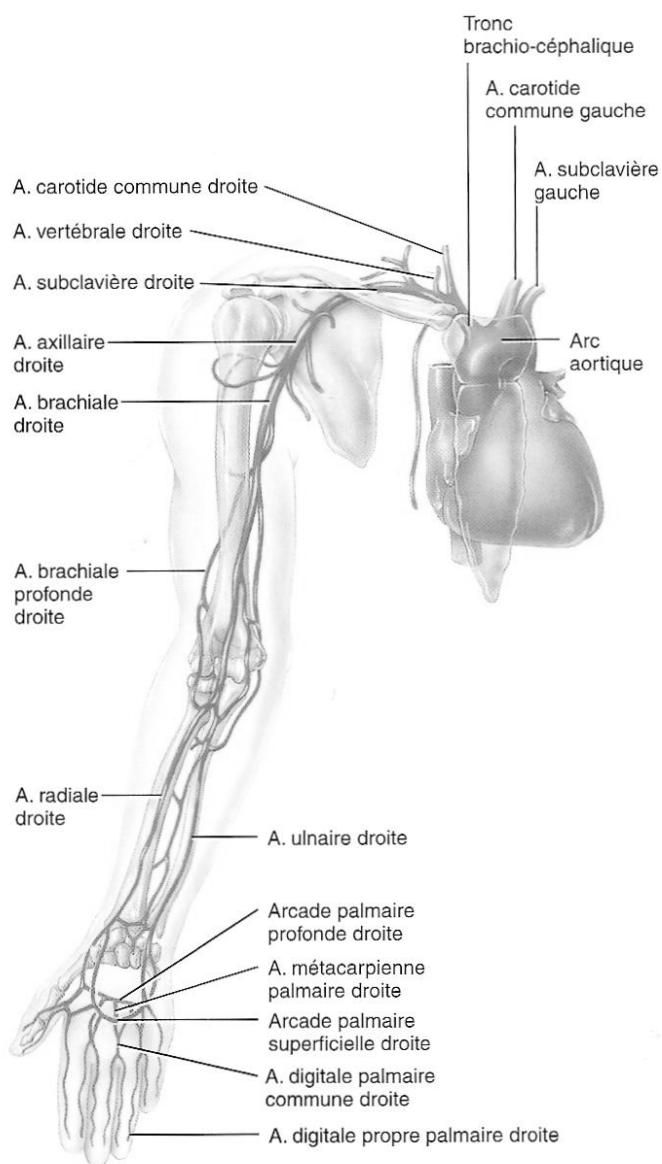
47

Figure 39 : Réseau veineux

⁴⁷ Image provenant du livre ‘Principes d’Anatomie et de Physiologie’, par Tortora & Grabowski

VASSEAUX DU BRAS

La pression artérielle, sujet principal de ce travail, est mesurée au niveau du bras⁴⁸, il est donc intéressant de s'intéresser à l'anatomie du bras de manière relativement précise, étant donné les études ultérieures qui risquent d'y faire appel.



49

Figure 40 : Réseau d'artères au sein du bras

⁴⁸ Cette information est plus ou moins connue de toutes et tous. Le chapitre dédié aux méthodes de mesure de la pression artérielle y fait référence et explicite de manière plus précise la méthodologie de la mesure.

⁴⁹ Image provenant du livre ‘Principes d’Anatomie et de Physiologie’, par Tortora & Grabowski

ANNEXE 2, SOURCES ET SOLUTIONS AUX PROBLÈMES DE PRESSION

SOURCES DE L'HYPOTENSION

Les sources sont peu nombreuses, bien connues et relativement claires. La pression dans le corps peut en fait diminuer pour plusieurs raisons principales, soit de par la diminution du volume total de sang dans le corps, soit à cause d'une décompensation cardiaque, ou encore de par une vasodilatation excessive. Enfin, on peut noter une quatrième raison, qui est l'effet néfaste de certains médicaments. Nous allons maintenant revenir plus précisément sur ces quatre raisons.

- Diminution du volume total de sang**

La diminution du volume de sang peut provenir de plusieurs problèmes, comme la déshydratation, le saignement excessif, ...

- Décompensation cardiaque**

La décompensation cardiaque amène la pompe qu'est le cœur à diminuer son débit. Les raisons pouvant amener à une décompensation cardiaque sont multiples et variées. Cela peut provenir soit d'une défaillance cardiaque (due par exemple à des attaques antérieures), soit d'un embolisme pulmonaire⁵⁰, soit d'une arythmie cardiaque⁵¹.

- Vasodilatation⁵² excessive**

Des chocs anaphylactiques⁵³ ou septiques⁵⁴ peuvent amener à un élargissement des vaisseaux, et donc à un travail du cœur plus important pour permettre une circulation physiologique du sang dans ces mêmes vaisseaux.

⁵⁰ Qui provoque en fait une diminution du contenu du sang en oxygène.

⁵¹ Un rythme cardiaque trop lent diminuera effectivement le débit de sang dans les artères, mais un rythme cardiaque beaucoup trop élevé est également à éviter, car il ne permet pas le remplissage complet des cavités lors du mécanisme de pompe, la quantité de sang éjectée est donc insuffisante.

⁵² Augmentation du calibre d'un vaisseau par extension de ses fibres musculaires.

⁵³ Réaction allergique importante.

⁵⁴ Du à une infection importante.

• Effet négatif de certains médicaments

Certains médicaments, comme par exemple tout ceux qui servent à éviter l'hypertension en diminuant la pression artérielle, peuvent être pris en excès ou mal dosés, de manière à conduire à une pression trop faible. De même, les médicaments servant à combattre le Parkinson ou les dépressions nerveuses peuvent avoir un effet néfaste.

Enfin, l'alcool et la prise de narcotiques peuvent diminuer la pression artérielle dans le corps.

SOLUTIONS À L'HYPOTENSION

La basse pression se décèle par une mesure de pression trop faible, pouvant être relevée lors d'un changement de position⁵⁵, et elle nécessite parfois des tests, de manière à trouver la cause effective et ainsi adapter le traitement en fonction.

Les causes à l'hypotension étant relativement facilement décelables, les traitements envisageables sont facilement répertoriés en fonction de la cause globale et de la raison interne de celle-ci. Par exemple, si les médicaments sont le problème, il conviendra de revoir, avec un médecin, les quantités à ingérer ou encore la base du médicament.

SOURCES À L'HYPERTENSION

Avant de citer les différentes sources à l'hypertension, notons qu'il existe de nombreuses formes d'hypertension observées, suivant la nature même du problème initial. Ces distinctions ne trouvent cependant pas de but réel ici, étant donné notre objectif plus informatif et introductif. On peut par ailleurs noter le fait que les conséquences sur le sujet sont plus ou moins les mêmes peu importe la cause initiale. De plus, 95% de la population atteinte l'est de la même forme, appelée « essentielle » ou « primaire ». Nous nous tiendrons donc aux sources les plus générales et les plus fréquentes, sans se tracasser du type d'hypertension qu'elles entraînent, et nous envisagerons finalement les solutions générales relatives à ces sources.

Les causes sont relativement bien connues de tous, et correspondent souvent à notre mode de vie actuel, et se trouvent fréquemment au centre des discussions politiques sur la santé. On retrouve ainsi les classiques tabac, café, obésité, sel ou encore stress quotidien. A côté de ces causes relativement évitables, on retrouve bien entendu des causes plus tragiques, comme les problèmes génétiques (et donc héréditaires), certaines insuffisances aux niveaux d'organes

⁵⁵ Le changement brusque de position, dans tous les cas, favorise l'apparition d'une hypotension.

importants (comme les reins) ou encore des anomalies (absence d'élasticité ou rigidité trop importante) aux niveaux des artères. Avant toute conclusion, il est toutefois important de relativiser l'importance de certains paramètres en discutant quelque peu les principaux, et en apportant quelques explications aux phénomènes un peu flous. La liste ici est à nouveau non exhaustive, mais elle est cependant fort complète et essaie de traiter des cas de figure les plus rencontrés.

• Le tabac

Le tabagisme favorise la formation de plaques d'athérosclérose, et par ce fait un facteur de risque cardiovasculaire majeur (entraînant hypertension artérielle, angor, infarctus du myocarde, claudication intermittente,...). Cependant, on note que, paradoxalement, le tabac n'agit pas directement sur la pression artérielle en tant que telle.

• Le café

De même que pour le tabac, le café aura des effets négatifs sur des sujets déjà atteints. Il aura de même des effets similaires en cas d'utilisation excessive (on situe l'abus au delà de 4 ou 5 tasses de café par jour).

Enfin, on note que la combinaison café/cigarettes est très néfaste.

• Le sel

La sensibilité de la tension au sel n'est pas immédiate chez tous les sujets, certains sujets sont en effet fort sensibles à une consommation de sel excessive, tandis que d'autres ne le sont pour ainsi dire pas du tout. Les personnes dont la tension est sensible aux abus de sels peuvent rencontrer de très gros problèmes d'hypertension.

• L'alcool

La consommation excessive d'alcool augmente d'une à deux fois le risque d'hypertension. A nouveau, certaines recherches citent une consommation dangereuse au delà de 4 à 5 verres d'alcool par jour.

• L'obésité

L'embonpoint contribue à augmenter la pression artérielle en plusieurs points. En premier lieu, l'excès de poids demande une augmentation de l'apport en sang, le cœur devant forcément pomper plus pour alimenter les tissus supplémentaires⁵⁶.

⁵⁶ On chiffre à 0,32mmHg l'augmentation de pression moyenne nécessaire par kilo supplémentaire.

A côté de cela, l'obésité provoque également une augmentation des résistances artérielles, une meilleure résistance à l'insuline⁵⁷ et une tendance rénale à stocker le sel.

- **Age avancé**

Avec l'âge, le cœur travaille moins efficacement, et cela se ressent surtout par une diminution de la pression diastolique et une augmentation proportionnelle de la pression pulsatoire.

- **Anormalité des artères**

La résistance des artères au passage du sang augmente avec la distance des artères au cœur, le passage du sang est directement plus difficile et la pression augmente pour compenser cela.

- **Phénomènes génétiques...**

Les désordres sont alors spécifiques et très difficilement prouvables, si ce n'est par l'observation des antécédents familiaux. De même, la cause héréditaire est difficilement décelable à l'heure actuelle. Les possibilités de problèmes d'ordres génétiques sont par exemple l'insuffisance rénale, la production excessive d'hormones ou encore des irrégularités artérielles.

SOLUTIONS À L'HYPERTENSION

Les solutions premières sont d'abord de contrôler notre niveau de vie, et ce à plusieurs points, de manière à éviter le stress ou l'obésité.

Une solution de premier choix est également l'exercice régulier⁵⁸, comme le jogging, la natation ou le cyclisme⁵⁹. La relation entre la pratique d'exercice et la diminution de la pression artérielle est directe. De plus, la résistance à une pression artérielle élevée est augmentée, par augmentation de la réserve cardiaque. De plus, il est plus ou moins connu qu'une alimentation équilibrée – ainsi que la consommation de fruits, légumes et autres condiments connus sous la dénomination de « produits sains » – amène un meilleur comportement de l'ensemble du système cardiovasculaire

Il existe bien entendu des traitements médicaux nombreux mais dont la place et l'intérêt dans ce travail sont plutôt limités, c'est pourquoi nous nous limiterons à ces quelques remarques.

⁵⁷ L'insuline est une hormone permettant de réguler la glycémie dans le métabolisme.

⁵⁸ On conseille entre 30 et 45 minutes d'exercice par jour.

⁵⁹ On conseille des exercices physiques de type aérobie, c'est-à-dire qui requièrent de l'oxygène, nécessitant ainsi le travail simultané du cœur et des poumons.

ANNEXE 3, ISOTROPIE DES MATERIAUX

Nous nous proposons, dans cette annexe, d'examiner quelque peu les deux matériaux en présence, de manière à savoir si l'hypothèse d'isotropie faite dans le rapport à leur sujet est valable.

ISOTROPIE TRANSVERSALE

L'isotropie d'un matériau suppose l'invariance des propriétés physiques de ce matériau en fonction de la direction. Dans notre cas, comme nous allons très rapidement le remarquer en analysant les matériaux, on devrait en fait parler d'isotropie transversale. Les matériaux présentent en effet plutôt deux directions préférentielles de comportement, soit la direction longitudinale et la direction radiale. Cependant, nous étudions ces matériaux en état plan (de contraintes ou de déformations), et nous ne considérons donc à aucun moment ce qu'il se passe selon l'axe longitudinal du bras, il ne nous est donc pas utile de prendre en compte les caractéristiques mécaniques selon cet axe en compte. Pour un matériau transversalement isotrope, on aurait en effet l'expression suivante pour la loi de Hooke

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu_l}{E_l} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & -\frac{\nu_l}{E_l} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_l} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_l} & 0 \\ SYM. & & & & & \frac{1}{G_l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix}$$

Comme nous nous travaillons en coordonnées cylindriques, ce sont les caractéristiques mécaniques longitudinales qui n'apparaîtront pas dans nos développements, nous aurons donc uniquement à effectuer des recherches en ce qui concerne les caractéristiques mécaniques transversales.

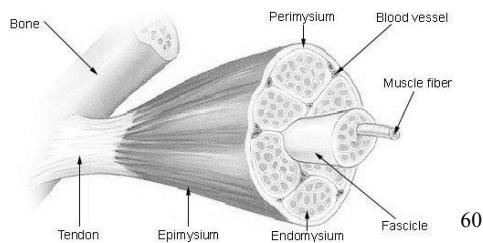
Au final, cette annexe aura donc plutôt pour objectif d'examiner si l'hypothèse d'isotropie transversale est valable, auquel cas nous pourrons conclure que nous considérons dans nos calculs uniquement les caractéristiques transversales.

Pour ce faire, nous allons successivement observer les compositions du muscle et du matériau.

LE MUSCLE

Le muscle brachial est un muscle squelettique, c'est-à-dire qu'il s'attache à certains os par l'intermédiaire de tendons. On parle de biceps, triceps ou enfin quadriceps selon le nombre de tendons rattachant ce muscle.

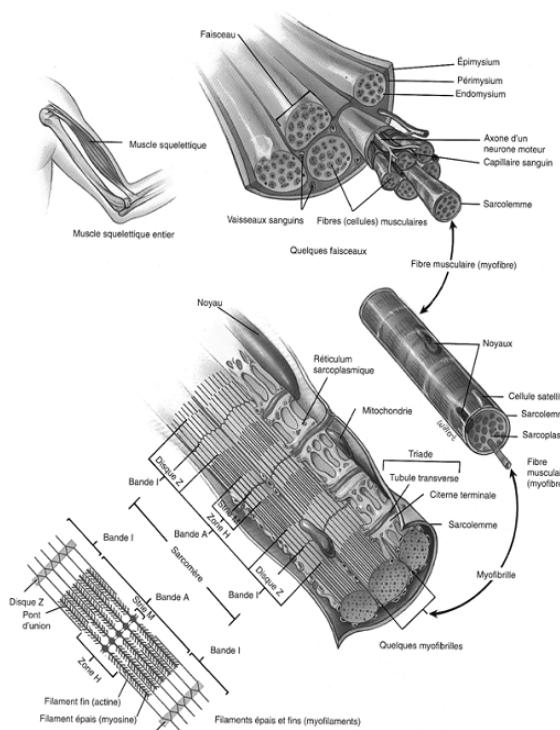
Les muscles squelettiques sont des muscles striés, ils présentent la structure suivante



60

Figure 41 : Structure d'un muscle squelettique tel le muscle brachial

On peut encore mieux observer cette structure en symétrie circulaire sur la figure suivante



61

Figure 42 : Structure détaillée du muscle brachial

⁶⁰ Image empruntée sur www.netzwelt.de/lexikon

⁶¹ Image empruntée sur <http://www.theses.ulaval.ca/2004/21784/ch02.html>

On aperçoit clairement sur ces deux figures la construction en faisceaux, qui va dans le sens d'une isotropie transversale, notre hypothèse, en ce qui concerne le muscle, est donc acceptable

L'ARTÈRE

Des coupes d'artères ont déjà été présentées dans la partie médicale de ce travail. Nous pouvons nous rappeler la figure présentées alors, soit

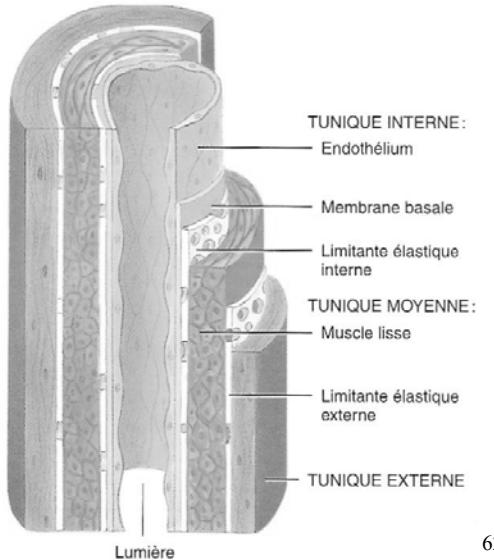


Figure 43 : Coupe dans une artère

On constate, comme pour le muscle, une structure concentrique, qui justifie donc notre hypothèse de matériau transversalement isotrope.

⁶² Image provenant du livre ‘Principes d’Anatomie et de Physiologie’, par Tortora & Grabowski

ANNEXE 4, THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

Nous n'allons bien sûr pas revenir sur l'intégralité de la théorie en question, mais juste résigner les particularités les plus importantes de cette classe de matériaux, pour ensuite expliciter plus précisément la méthode de calcul qui nous a amené aux expressions des contraintes utilisées dans le travail.

ELASTICITÉ LINÉAIRE, MATÉRIAUX ISOTROPE

Tous les matériaux sont caractérisés par ce qu'on appelle une loi de comportement, loi qui relie les déformations aux contraintes. En effet, les déformations d'un matériau sont fonction des contraintes appliquées à ce matériau. De plus, ces mêmes déformations sont également fonction de la géométrie en place et, finalement, de la nature même du matériau. La loi de comportement dont il est question est une loi du type

$$\text{contrainte} = f(\text{défo})$$

La loi de comportement choisie caractérise le type de matériau.

La plupart des matériaux présentent, lorsqu'on les soumet à une certaine force de traction, un diagramme contraintes/déformations d'allure suivante

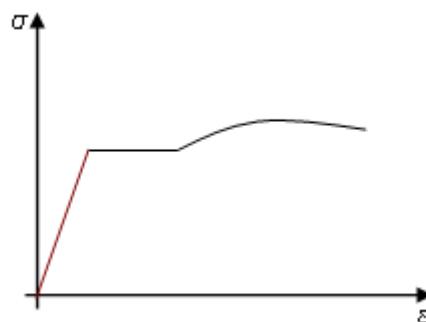


Figure 44 : Diagramme σ/ε d'un matériau

La première partie, colorée, correspond au domaine élastique linéaire. La loi de comportement y est donc linéaire, et elle est connue sous le nom de loi de Hooke,

$$\sigma = E\varepsilon$$

avec E le module de Young du matériau.

Les propriétés fondamentales de ce type de matériaux sont

- Les contraintes sont proportionnelles aux déformations
- Retour des déformations à l'état initial après un chargement
- Les déformations sont supposées petites.

Enfin, un matériau isotrope est un matériau qui possède les mêmes propriétés dans toutes les directions. Ce type de matériau est ainsi caractérisé par un module de Young E semblable dans toutes les directions. De plus, on admet aisément que les déformations dans les directions principales sont proportionnelles, en faisant entrer en jeu le coefficient de Poisson, ν , *i.e.*, dans le cas d'une traction longitudinale selon l'axe z ,

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z$$

Au final, si on exprime l'équilibre d'un petit parallélépipède soumis simultanément aux contraintes σ_1 , σ_2 et σ_3 , on obtient au final (en utilisant le principe de superposition et le cercle de Mohr)

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-2\nu)\varepsilon_{ij} + \nu\varepsilon_{ll}\delta_{ij}]$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{ll}\delta_{ij}]$$

En se plaçant en état plan de contraintes, c'est-à-dire en considérant l'état de contrainte

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$$

la loi de Hooke précédente nous donne

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^{63}$$

CYLINDRE ÉPAIS SOUS PRESSION

Nous considérons un cylindre circulaire à paroi épaisse, de rayon intérieur r_i et de rayon extérieur r_e , soumis à une pression intérieure p_i et à une pression extérieure p_e , uniformément réparties.

⁶³ En toute rigueur, il nous faudrait ici considérer les module de Young et coefficient de Poisson dans la direction transversale, mais, comme nous l'avons mentionné plus tôt, étant donné le fait que nous n'évaluerons pas les déformations et les contraintes selon l'axe longitudinal, il importe peu de faire la différence entre l'isotropie transversale et l'isotropie.

Nous nous situons dans un premier temps en état plan de contraintes. Cependant, nous ne chercherons pas à déterminer les déformations dans le sens de l'écoulement, ces déformations ne nous intéressent pas étant donné que nous étudions uniquement une coupe transversale du bras, nous notons juste que ces déformations ne sont pas nulles. Vu la symétrie du problème, on change de repère et on utilisera des coordonnées cylindriques.

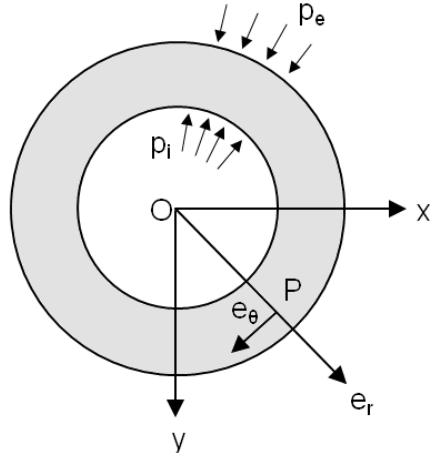


Figure 45 : Géométrie d'un cylindre épais sous pression

Il nous faut en fait, pour obtenir les équations analytiques des contraintes, partir des équations indéfinies d'équilibre en terme de déplacements, choisissant ainsi les déplacements comme inconnues de base.

D'une part, nous pouvons successivement exprimer les déformations et les contraintes en fonction des déplacements, soit

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(D_i u_j + D_j u_i) \\ \sigma_{ij} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-2\nu)\varepsilon_{ij} + \nu \varepsilon_{il} \delta_{lj}] \\ &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-2\nu) \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) + \nu D_l u_l \delta_{ij} \right] \\ &= 2G \left[\frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) + \frac{\nu}{1-2\nu} D_l u_l \delta_{ij} \right] \\ &= G \left(D_i u_j + D_j u_i + \frac{2\nu}{1-2\nu} D_l u_l \delta_{ij} \right)\end{aligned}$$

D'autre part, nous avons à disposition l'expression des équations d'équilibre en volume

$$D_j \sigma_{ij} + F_i = 0$$

On peut enfin insérer l'expression des contraintes obtenues dans l'équation d'équilibre en volume, pour obtenir

$$\begin{aligned}
& GD_j \left(D_i u_j + D_j u_i + \frac{2\nu}{1-2\nu} D_l u_l \delta_{ij} \right) + F_i = 0 \\
\Leftrightarrow & \left(D_{ij} u_j + D_{ji} u_i + \frac{2\nu}{1-2\nu} D_{jl} u_l \delta_{ij} \right) G + F_i = 0 \\
\Leftrightarrow & \left(D_{jj} u_i + \frac{(1-2\nu)D_{ij} u_j + 2\nu D_{jl} u_l \delta_{ij}}{1-2\nu} \right) G + F_i = 0 \\
\Leftrightarrow & \left(D_{jj} u_i + \frac{(1-2\nu)D_{ij} u_j + 2\nu D_{ij} u_i}{1-2\nu} \right) G + F_i = 0 \\
\Leftrightarrow & \left(D_{jj} u_i + \frac{1}{1-2\nu} D_{ij} u_i \right) G + F_i = 0
\end{aligned}$$

Dans notre cas, pour des raisons de symétrie, on conçoit aisément que le déplacement d'un point P quelconque est uniquement radial, donc uniquement fonction de r . L'équation d'équilibre en rotation devient dès lors (ayant effectué en route un passage en coordonnées cylindriques)

$$\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru_r) \right) + F_r = 0$$

Notons enfin qu'il n'y a, pour notre cas d'étude, pas de forces volumiques, on peut donc facilement intégrer cette relation, obtenant ainsi le déplacement radial u_r

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned}
u_\theta &= 0 \\
u_z &\neq 0
\end{aligned}$$

On peut, de là, trouver les expressions des déformations respectives.

Analytiquement, nous avons

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\
\Leftrightarrow \varepsilon_r &= \frac{\partial}{\partial r} \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \\
&= C_1 - \frac{C_2}{r^2}
\end{aligned}$$

Tandis que, physiquement,

$$\begin{aligned}\varepsilon_\theta &= \frac{l-L}{L} = \frac{2\pi(r+u_r) - 2\pi(r)}{2\pi(r)} = \frac{u_r}{r} \\ &= C_1 + \frac{C_2}{r^2}\end{aligned}$$

En appliquant Hooke, nous trouvons

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta) \\ &= \frac{E}{(1-\nu^2)}\left(C_1 - \frac{C_2}{r^2} + \nu\left(C_1 + \frac{C_2}{r^2}\right)\right) \\ &= E\left(\frac{C_1}{1-\nu} - \frac{C_2}{(1+\nu)r^2}\right) \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r) \\ &= \frac{E}{(1-\nu^2)}\left(C_1 + \frac{C_2}{r^2} + \nu\left(C_1 - \frac{C_2}{r^2}\right)\right) \\ &= E\left(\frac{C_1}{1-\nu} + \frac{C_2}{(1+\nu)r^2}\right)\end{aligned}$$

Nous pouvons ensuite rechercher les constantes en exprimant les conditions aux bords, soit

$$\begin{cases} \sigma_r(r=r_i) = -p_i \\ \sigma_r(r=r_e) = -p_e \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}C_1 &= (1-\nu) \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{E(r_e^2 - r_i^2)} \\ C_2 &= (1+\nu) \frac{p_i - p_e}{E\left(\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r_e^2}\right)}\end{aligned}$$

Et nous avons finalement

$$\sigma_r = E \left\{ \frac{(1-\nu) \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{E(r_e^2 - r_i^2)}}{1-\nu} - \frac{(1+\nu) \frac{p_i - p_e}{E\left(\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r_e^2}\right)}}{(1+\nu)r^2} \right\}$$

$$= \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{(r_e^2 - r_i^2)} - \frac{p_i - p_e}{\left(\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r_e^2}\right) r^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{(r_e^2 - r_i^2)} + \frac{p_i - p_e}{\left(\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r_e^2}\right) r^2}$$

ETAT PLAN DE DÉFORMATIONS

Les déplacements, en état plan de déformations, s'obtiennent directement à partir des déplacements correspondants en état plan de contraintes, en effectuant la substitution élémentaire

$$1 + \nu = \frac{1 - \nu'}{1 - 2\nu'}$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} u_r(r)_{\text{Matériau 1}} &= \frac{1}{2} \frac{1}{G_1(1+\nu_1)} \left(\frac{1}{r_c^2 - r_i^2} \right) \left((1-\nu_1)(r_i^2 p_i - r_c^2 p_c) r + (1+\nu_1)(p_i - p_c) r_i^2 r_c^2 \frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{G_1} \left(\frac{1}{r_c^2 - r_i^2} \right) \left(\frac{(1-\nu_1)}{(1+\nu_1)} (r_i^2 p_i - r_c^2 p_c) r + (p_i - p_c) r_i^2 r_c^2 \frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{G_1} \left(\frac{1}{r_c^2 - r_i^2} \right) \left((1-2\nu_1)(r_i^2 p_i - r_c^2 p_c) r + (p_i - p_c) r_i^2 r_c^2 \frac{1}{r} \right) \\ u_r(r)_{\text{Matériau 2}} &= \frac{1}{2} \frac{1}{G_2(1+\nu_2)} \left(\frac{1}{r_e^2 - r_c^2} \right) \left((1-\nu_2)(r_c^2 p_c - r_e^2 p_e) r + (1+\nu_2)(p_c - p_e) r_c^2 r_e^2 \frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{G_2} \left(\frac{1}{r_e^2 - r_c^2} \right) \left(\frac{(1-\nu_2)}{(1+\nu_2)} (r_c^2 p_c - r_e^2 p_e) r + (p_c - p_e) r_c^2 r_e^2 \frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{G_2} \left(\frac{1}{r_e^2 - r_c^2} \right) \left((1-2\nu_2)(r_c^2 p_c - r_e^2 p_e) r + (p_c - p_e) r_c^2 r_e^2 \frac{1}{r} \right) \end{aligned}$$

Ensuite, on peut évaluer ces déplacements au niveau de l'interface, soit en $r = r_c$

$$\begin{aligned} u_r(r = r_c)_{\text{Matériau 1}} &= \frac{1}{2} \frac{1}{G_1} \left(\frac{1}{r_c^2 - r_i^2} \right) \left((1-2\nu_1)(r_i^2 r_c p_i - r_c^3 p_c) + (p_i - p_c) r_i^2 r_c \right) \\ u_r(r = r_c)_{\text{Matériau 2}} &= \frac{1}{2} \frac{1}{G_2} \left(\frac{1}{r_e^2 - r_c^2} \right) \left((1-2\nu_2)(r_c^3 p_c - r_e^2 r_c p_e) + (p_c - p_e) r_c r_e^2 \right) \end{aligned}$$

Et, pour obtenir l'expression analytique de la pression de contact à l'interface, on exprime la compatibilité des déplacements, soit

$$\begin{aligned}
& u_r(r = r_c) \Big|_{\text{Matériau 1}} = u_r(r = r_c) \Big|_{\text{Matériau 2}} \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{2} \frac{1}{G_1} \left(\frac{1}{r_c^2 - r_i^2} \right) \left((1 - 2\nu_1)(r_i^2 r_c p_i - r_c^3 p_c) + (p_i - p_c)r_i^2 r_c \right) \\
& = \frac{1}{2} \frac{1}{G_2} \left(\frac{1}{r_e^2 - r_c^2} \right) \left((1 - 2\nu_2)(r_c^3 p_c - r_e^2 r_c p_e) + (p_c - p_e)r_c r_e^2 \right) \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{2} \frac{1}{G_1} \left(\frac{1}{r_c^2 - r_i^2} \right) \left(p_c (-r_c^3 (1 - 2\nu_1) - r_i^2 r_c) + (1 - 2\nu_1)r_i^2 r_c p_i + r_i^2 r_c p_i \right) \\
& = \frac{1}{2} \frac{1}{G_2} \left(\frac{1}{r_e^2 - r_c^2} \right) \left(p_c (r_c^3 (1 - 2\nu_2) + r_c r_e^2) - (1 - 2\nu_2)r_e^2 r_c p_e - p_e r_c r_e^2 \right) \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{2} \frac{1}{G_1} \left(\frac{1}{r_c^2 - r_i^2} \right) \left(p_c (-r_c^2 (1 - 2\nu_1) - r_i^2) + 2(1 - \nu_1)r_i^2 p_i \right) \\
& = \frac{1}{2} \frac{1}{G_2} \left(\frac{1}{r_e^2 - r_c^2} \right) \left(p_c (r_c^2 (1 - 2\nu_2) + r_e^2) - 2(1 - \nu_2)r_e^2 p_e \right) \\
\Leftrightarrow & p_c \left(\frac{1}{2} \frac{1}{G_2} \left(\frac{1}{r_e^2 - r_c^2} \right) \left(r_c^2 (1 - 2\nu_2) + r_e^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{G_1} \left(\frac{1}{r_c^2 - r_i^2} \right) \left(r_c^2 (1 - 2\nu_1) + r_i^2 \right) \right) \\
& = \frac{1}{2} \frac{1}{G_1} \left(\frac{1}{r_c^2 - r_i^2} \right) 2(1 - \nu_1)r_i^2 p_i + \frac{1}{2} \frac{1}{G_2} \left(\frac{1}{r_e^2 - r_c^2} \right) 2(1 - \nu_2)r_e^2 p_e \\
\Leftrightarrow & p_c = 2 \frac{\frac{1}{G_1} \left(\frac{1}{r_c^2 - r_i^2} \right) (1 - \nu_1)r_i^2 p_i + \frac{1}{G_2} \left(\frac{1}{r_e^2 - r_c^2} \right) (1 - \nu_2)r_e^2 p_e}{\left(\frac{1}{G_2} \left(\frac{1}{r_e^2 - r_c^2} \right) \left(r_c^2 (1 - 2\nu_2) + r_e^2 \right) + \frac{1}{G_1} \left(\frac{1}{r_c^2 - r_i^2} \right) \left(r_c^2 (1 - 2\nu_1) + r_i^2 \right) \right)} \\
\Leftrightarrow & p_c = 2 \frac{B_1 (1 - \nu_1) r_i^2 p_i + B_2 (1 - \nu_2) r_e^2 p_e}{\left(B_2 \left(r_c^2 (1 - 2\nu_2) + r_e^2 \right) + B_1 \left(r_c^2 (1 - 2\nu_1) + r_i^2 \right) \right)} \\
& = p_c^x
\end{aligned}$$

En ayant posé

$$B_k = \frac{1}{G_k (r_{ek}^2 - r_{ik}^2)}$$

Nous avons ainsi l'expression de la pression de contact en état plan de déformations, expression que nous pouvons injecter dans celle des déplacements radiaux de l'artère, pour

obtenir au final une expression analytique des déplacements radiaux de l'artère dans laquelle tous les termes sont connus, soit

$$u_r(r = r_i) = \frac{1}{2} \frac{1}{G_1} \left(\frac{1}{r_c^2 - r_i^2} \right) \left((1 - 2\nu_1) (r_i^3 p_i - r_c^2 r_i p_c^x) + (p_i - p_c^x) r_i r_c^2 \right)$$

$$u_r(r = r_i) = \frac{1}{2} B_1 \left[(1 - 2\nu_1) \left(r_i^3 p_i - r_c^2 r_i 2 \frac{B_1 r_i^2 p_i (1 - \nu_1) + B_2 r_e^2 p_e (1 - \nu_2)}{B_1 (r_i^2 + (1 - 2\nu_1) r_c^2) + B_2 (r_e^2 + (1 - 2\nu_2) r_c^2)} \right) \right.$$

$$\left. + \left(p_i - 2 \frac{B_1 r_i^2 p_i (1 - \nu_1) + B_2 r_e^2 p_e (1 - \nu_2)}{B_1 (r_i^2 + (1 - 2\nu_1) r_c^2) + B_2 (r_e^2 + (1 - 2\nu_2) r_c^2)} \right) r_i r_c^2 \right]$$

ANNEXE 5, TESTS SUR LES RÉSULTATS DE L'ANALYSE ÉLASTIQUE LINÉAIRE

Nous allons dans cette annexe tester les expressions obtenues lors de l'analyse élastique linéaire, ce pour les deux états de configuration (état plan de contraintes et état plan de déformations). De plus, nous en profiterons pour comparer ces deux états.

Pour la suite des tests, nous considérerons les valeurs suivantes pour les paramètres géométriques et mécaniques du problème⁶⁴

- $E_{artère} = 1,7 \text{ MPa}$
- $E_{muscle} = 0,002527 \text{ MPa}$
- $\nu_{artère} \approx \nu_{muscle} \approx 0,5$
- $r_i = 0,00195 \text{ m}$
- $r_c = 0,00295 \text{ m}$
- $r_e = 0,047 \text{ m}$

Enfin, nous ferons logiquement varier les pressions lors de nos différents tests. En effet, la pression est, pour un patient observé et connu, la seule véritable inconnue. Si on se réfère à la première partie de ce travail, nous avons vu la manière dont les pressions variaient simultanément lors de la mesure de la pression sur un patient. Nous avions en fait le graphe suivant

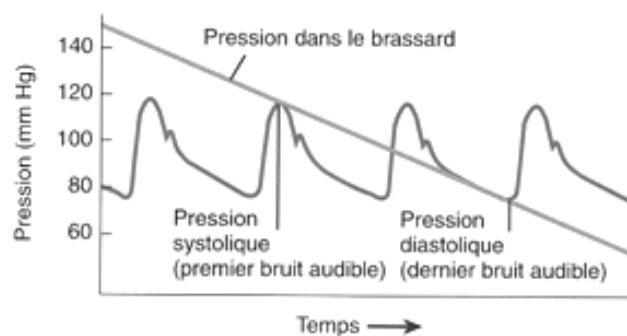


Figure 46 : Variation simultanée des pressions dans le brassard et dans l'artère

⁶⁴ Les valeurs présentées ici seront en fait introduites plus tard, lorsque nous rechercherons les différents paramètres relatifs au phénomène. Pour l'instant, nous nous contenterons donc de les accepter telles qu'elles.

Nous pouvons relever les valeurs numériques sur ce graphique, afin d'avoir une évolution chiffrée des différentes pressions, on obtient ainsi le graphique suivant

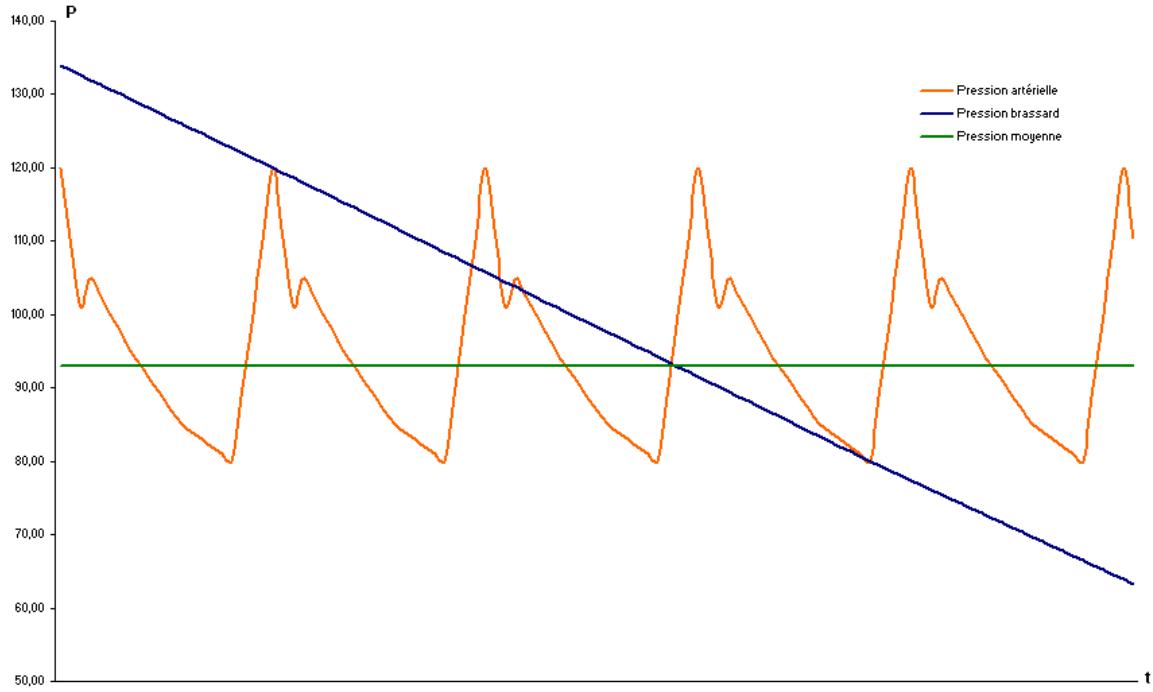


Figure 47 : Variation des pressions dans le brassard et dans l'artère – Modélisation numérique sous Excel

Il est important de bien fixer ce graphique, étant donné que nous y reviendrons à de multiples reprises, dans un premier temps pour les tests équivalents de l'analyse non linéaire, mais également et surtout pour la discussion des résultats que nous donnera l'analyse hydraulique.

Nous allons donc maintenant utiliser ces données pour tester les formules introduites dans l'analyse élastique linéaire. Nous les testerons uniquement pour l'état plan de déformations. En effet, les recherches sont globalement les mêmes dans les deux cas, et il est suffisant de s'attarder sur une seule des deux expressions.

En état plan de déformations, nous avions en fait l'expression suivante pour le déplacement radial

$$u_r(r = r_i) = \frac{1}{2} B_1 \left[\left(1 - 2\nu_1 \right) \left(r_i^3 p_i - r_c^2 r_i 2 \frac{B_1 r_i^2 p_i (1 - \nu_1) + B_2 r_e^2 p_e (1 - \nu_2)}{B_1 (r_i^2 + (1 - 2\nu_1) r_c^2) + B_2 (r_e^2 + (1 - 2\nu_2) r_c^2)} \right) + \left(p_i - 2 \frac{B_1 r_i^2 p_i (1 - \nu_1) + B_2 r_e^2 p_e (1 - \nu_2)}{B_1 (r_i^2 + (1 - 2\nu_1) r_c^2) + B_2 (r_e^2 + (1 - 2\nu_2) r_c^2)} \right) r_i r_c^2 \right]$$

Il nous suffit de construire une feuille Excel évaluant, colonne par colonne, les différents termes de cette équation, en fonction des pressions interne et externe reprises dans le tableau présenté dans le premier chapitre de cette annexe.

Nous avons à ce stade toutes les données nécessaires pour dresser des graphiques représentatifs du phénomène. Nous présentons ainsi, ci-dessous, successivement le graphique d'évolution des déplacements et le graphique d'évolution des sections. Nous finirons cette annexe par quelques commentaires sur les comportements observés.

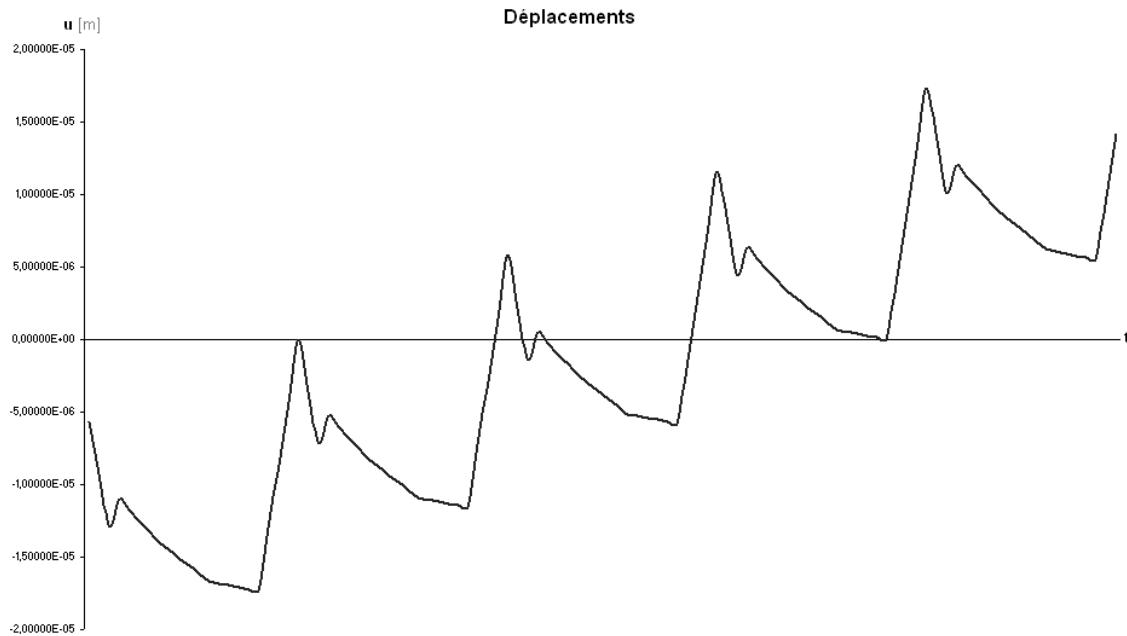


Figure 48 : Evolution des déplacements en état plan de déformations pour le modèle élastique linéaire

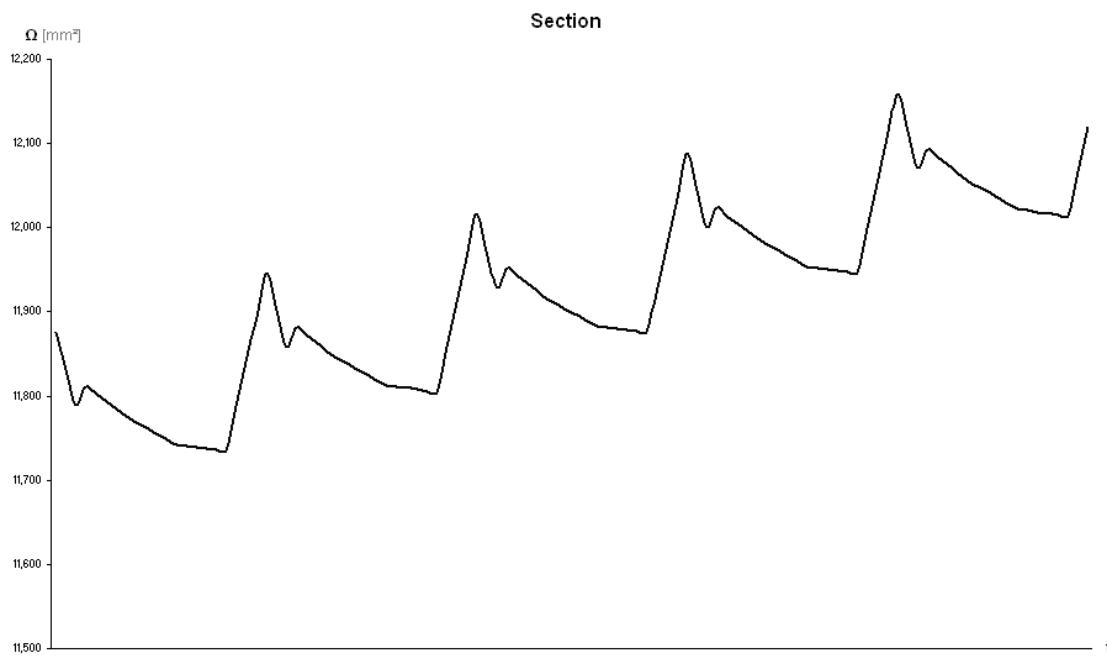


Figure 49 : Evolution de la section artérielle en état plan de déformations pour le modèle élastique linéaire

L'observation attentive de ces graphiques nous amène à considérer la différence de valeur en ce qui concerne les modules d'élasticité des deux matériaux. Nous voyons en effet que le

module de Young de l'artère est beaucoup plus important que le module de Young du muscle. Les comportement des deux matériaux sont donc globalement fort différents en ce qui concerne les déformations. Le muscle aura en fait un comportement plus mou que l'artère, et les efforts appliqués au muscle sont retransmis presque intégralement à l'artère, comme on peut le voir clairement sur le graphique de l'évolution de la pression de contact ci-dessous

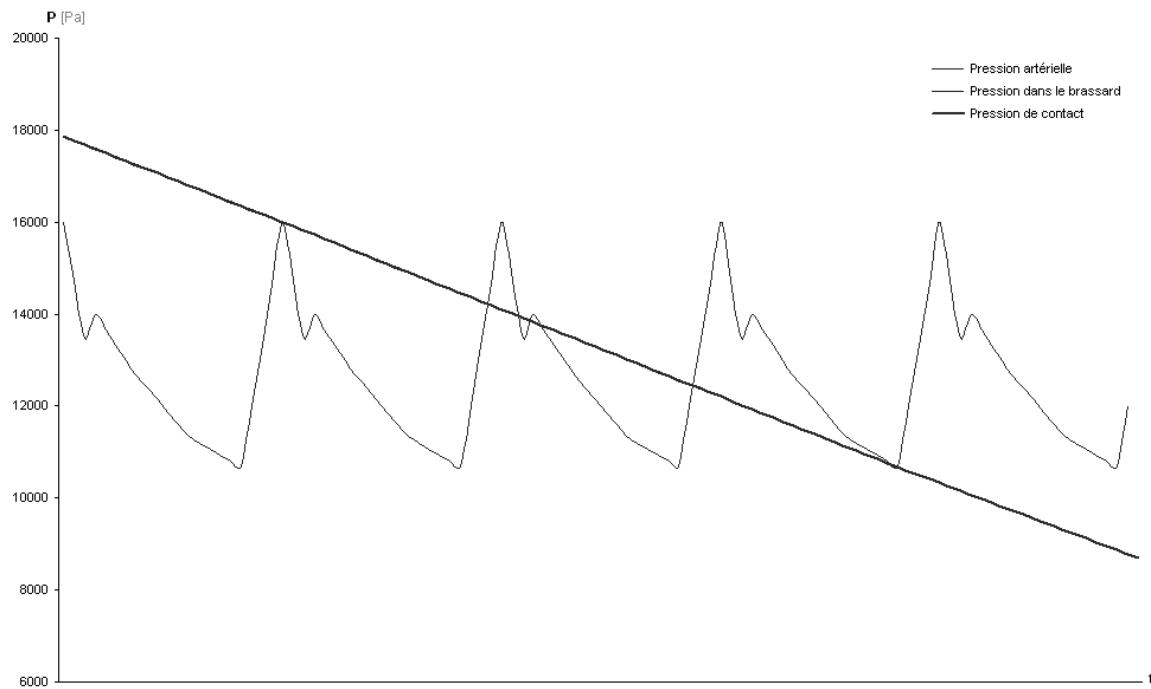


Figure 50 : Evolution de la pression de contact en état plan de déformations pour le modèle élastique linéaire

ANNEXE 6, THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ NON LINÉAIRE

L'annexe présente en fait les généralités de l'élasticité non linéaire, ainsi que les développements qui nous ont été nécessaires pour arriver aux résultats utilisés dans le rapport.

INTRODUCTION

On considère en fait, en analyse élastique non linéaire, la possibilité de grands déplacements. Ceci étant, l'expression des déformations en fonction des déplacements n'est plus linéaire, et on ne peut plus parler de déformations de Cauchy. On a en fait ici l'expression suivante

$$E_{ij}^G = \frac{1}{2} [D_i u_j + D_j u_i + D_i u_k D_j u_k]$$

Où l'on reconnaît les deux premiers termes, communs aux petites déformations de Cauchy, mais où le dernier terme – négligé lorsque les déformations sont petites – est non linéaire.

Notons que ce nouveau tenseur des déformations est connu sous le nom de Green-Lagrange. Il est, comme nous avons pu le comprendre directement, l'équivalent du tenseur de Cauchy pour les grandes déformations.

On peut observer, sur le graphique ci-dessous, que, pour des petites déformations, les différents tenseurs donnent effectivement des réponses semblables.

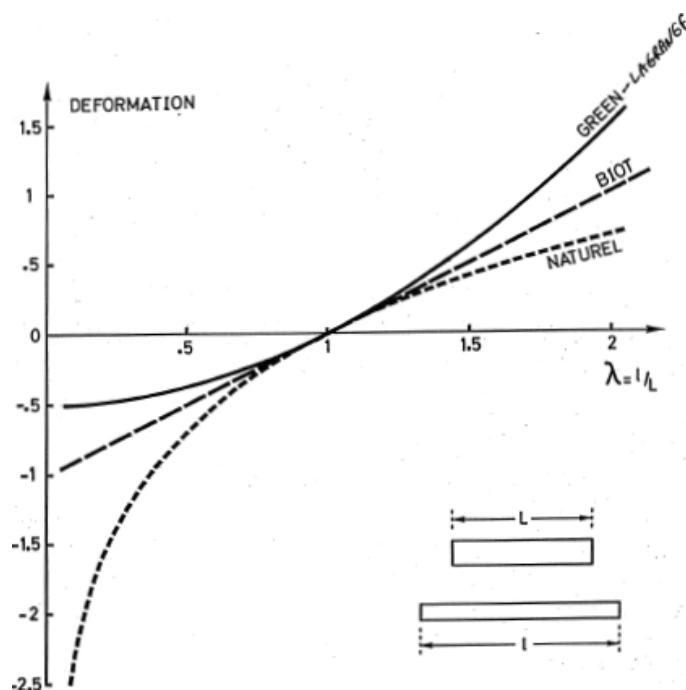


Figure 51 : Déformations et tenseurs correspondants

Sur ce graphique, la déformation de Biot correspond en fait à celle de Cauchy, tandis que la déformation dite naturelle, employée pour les très grandes déformations, est en fait exprimée par

$$\bar{\varepsilon} = \ln \frac{l}{L} = \ln \lambda$$

MATÉRIAUX HYPERÉLASTIQUES

Un matériau dit hyperélastique est un matériau pour lequel on suppose l'existence d'une fonction énergétique W (potentiel de déformation) telle que les contraintes et les déformations soient reliées entre elles par des fonctions du style

$$\text{contrainte} = \frac{\partial W}{\partial(\text{défo})}$$

Soit, par exemple,

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}^G}$$

Le tenseur des contraintes S est connu sous le nom de tenseur de Piola-Kirchhoff, il est en grandes déformations l'équivalent du tenseur des contraintes de Cauchy pour les petites déformations.

Il est important de noter la transformation effective entre les contraintes de Cauchy et celles de Piola-Kirchhoff (que nous noterons par la suite PK), car cela va nous permettre d'introduire quelques grandeurs d'importance centrale dans cette théorie des matériaux hyperélastiques.

A partir des contraintes de PK, nous pouvons relativement aisément obtenir les contraintes de Cauchy, ceci grâce à la transformation suivante

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{J} F_{ia} S_{ab} F_{bj}$$

Ou encore

$$\underline{\sigma} = \frac{1}{J} \underline{F} \underline{S} \underline{F}^T$$

Le tenseur F est en fait le tenseur des gradients de déformation

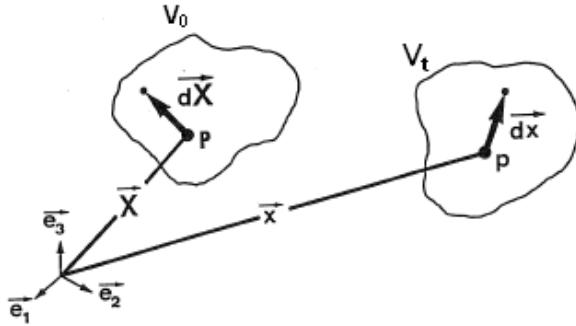


Figure 52 : Tenseur des gradients de déformation \underline{F}

Nous avons en fait

$$dx = \underline{F}dX$$

$$\underline{F} = \frac{dx}{dX}$$

Tandis que le déterminant de F n'est autre que J , le jacobien de la transformation

$$J = \det \underline{F} > 0$$

La condition de positivité stricte sur J provient de son sens physique, J étant en fait une mesure de changement de volume.

Avant de continuer, notons deux hypothèses importantes que nous allons utiliser pour la suite :

- Le matériau est considéré comme isotrope, ce qui va nous permettre d'exprimer la fonction énergétique W en fonction des invariants de $\underline{C} = \underline{F}^T \underline{F}$;
- Le matériau est incompressible, ce qui nous donne en fait

$$J = 1$$

RECHERCHES DES ÉQUATIONS CONSTITUTIVES

La condition d'isotropie nous permet d'exprimer

$$W = W(I_1, I_2, I_3)$$

Avec I_1, I_2, I_3 les invariants de C , soit

$$\begin{cases} I_1 = \text{tr}(\underline{C}) \\ I_2 = \frac{1}{2}[(\text{tr}(\underline{C}))^2 - \text{tr}(\underline{C}^2)] \\ I_3 = \det(\underline{C}) \end{cases}$$

Nous avons ensuite

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial E_{ij}^G} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial E_{ij}^G} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial E_{ij}^G}$$

En posant

- $\phi = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1}$
- $\Psi = 2 \frac{\partial W}{\partial I_2}$
- $p = 2 \frac{\partial W}{\partial I_3}$

Et, en évaluant les dérivées des différents invariants, soit

$$\begin{cases} \frac{\partial I_1}{\partial E_{ij}^G} = 2\underline{I} \\ \frac{\partial I_2}{\partial E_{ij}^G} = 2(I_1\underline{I} - \underline{C}) \\ \frac{\partial I_3}{\partial E_{ij}^G} = 2I_3\underline{C}^{-1} \end{cases}$$

Nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial E_{ij}^G} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial E_{ij}^G} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial E_{ij}^G} \\ &= \phi\underline{I} + \Psi(I_1\underline{I} - \underline{C}) + pI_3\underline{C}^{-1} \end{aligned}$$

Cependant, les matériaux en présence sont incompressibles, le déterminant du tenseur F est donc unitaire. De ce fait, le 3^{ème} invariant de C est en fait $I_3 = 1$, et la relation ci-dessus devient

$$S_{ij} = \phi\underline{I} + \Psi(I_1\underline{I} - \underline{C}) + p\underline{C}^{-1}$$

Pour résoudre cette équation, il nous faut choisir un modèle de matériau, qui imposera en fait une certaine fonction W .

Le choix du modèle à imposer doit se situer en prédisant le type de phénomène à observer.

Pour le type de matériau en présence et les sollicitations données (pressions internes et externes), un modèle de Mooney-Rivlin suffit amplement à satisfaire notre étude, ce qui revient à déterminer W par

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3)$$

Nous introduisons ainsi deux constantes par matériaux, soit $C_{1, \text{muscle}}$, $C_{2, \text{muscle}}$, $C_{1, \text{artère}}$ et $C_{2, \text{artère}}$. Ces constantes seront discutées dans le chapitre 4 de la partie Matériaux de ce travail.

RELATIONS GÉOMÉTRIQUES

Dans un premier temps, il nous faut évaluer les différents tenseurs rentrant dans les équations ci-dessus, tenseurs exprimant des relations entre les configurations de base et les configurations déformées.

Vu la symétrie du problème, il est évident que l'on utilisera les coordonnées cylindriques, soit, respectivement pour les configurations initiales et déformées

$$\begin{cases} X = R \cos \theta \\ Y = R \sin \theta \\ Z = Z \end{cases}$$

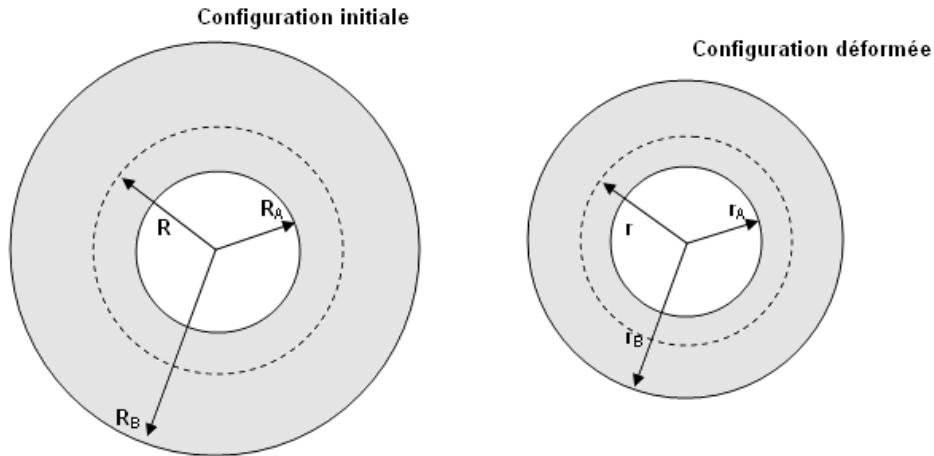


Figure 53 : Configurations initiale et déformée en coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

La différence entre les deux configurations consiste donc simplement, en toute généralité, en une inflation du cylindre.

Les déplacements d'une configuration à l'autre peuvent s'exprimer par les équations suivantes

$$\begin{cases} u_r = u = r - R \\ u_z = z - Z = kZ \end{cases}$$

Ou encore

$$\begin{cases} r = u + R \\ z = u_z + Z = (k+1)Z \end{cases}$$

Le tenseur des gradients de déformation peut directement s'obtenir de ces relations. En effet, nous avons $\underline{F} = D_j x_i$

On a ainsi

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{du}{dR} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{u}{R} & 0 \\ 0 & 0 & 1+k \end{bmatrix}$$

Notons que les dérivées par rapport à θ sont nulles (étant donné l'axisymétrie de la configuration), et les dérivées croisées de z et r sont supposées nulles, ce qui revient à supposer un déplacement longitudinal constant sur l'épaisseur et un déplacement radial constant sur la longueur du brassard.

La contrainte d'incompressibilité donne alors

$$\begin{aligned} J &= \det(\underline{F}) \\ &= \left(1 + \frac{du}{dR}\right) \left(1 + \frac{u}{R}\right) (k+1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} 1 + \frac{du}{dR} + \frac{u}{R} + \frac{du}{dR} \frac{u}{R} &= \frac{1}{1+k} \\ \Leftrightarrow \left(1 + \frac{u}{R}\right) + \frac{du}{dR} \left(1 + \frac{u}{R}\right) &= \frac{1}{1+k} \\ \Leftrightarrow \left(1 + \frac{u}{R}\right) \left(1 + \frac{du}{dR}\right) &= \frac{1}{1+k} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{R+u}{R}\right) \left(\frac{dR+du}{dR}\right) &= \frac{1}{1+k} \\ \Leftrightarrow \frac{r}{R} \frac{dr}{dR} &= \frac{1}{1+k} \end{aligned}$$

Cette équation est une simple différentielle uniquement fonction de r , et peut donc s'intégrer directement, pour donner la relation suivante

$$rdr = \frac{dR}{1+k}$$

$$\int r dr = \int \frac{dR}{1+k}$$

Et la contrainte d'incompressibilité nous donne, au final, une relation entre les rayons des configurations initiale et déformée, soit

$$r = \sqrt{\frac{R^2 + C(1+k)}{1+k}}$$

avec C une constante d'intégration.

On a ainsi

$$u = \sqrt{\frac{R^2 + C(1+k)}{1+k}} - R$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dR} &= \frac{1}{2} \left(\frac{R^2 + C(1+k)}{1+k} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{2R}{1+k} - 1 \\ &= \frac{R}{(1+k)\sqrt{\frac{R^2 + C(1+k)}{1+k}}} - 1 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant réévaluer le tenseur F

$$F = \begin{bmatrix} 1 + \frac{du}{dR} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{u}{R} & 0 \\ 0 & 0 & 1+k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R}{(1+k)\sqrt{\frac{R^2 + C(1+k)}{1+k}}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\frac{R^2 + C(1+k)}{1+k}}}{R} & 0 \\ 0 & 0 & 1+k \end{bmatrix}$$

Nous pouvons ensuite évaluer le tenseur C

$$\underline{C} = \underline{F}^T \underline{F} = \begin{bmatrix} \frac{R^2}{(1+k)^2 \frac{R^2 + C(1+k)}{1+k}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2 + C(1+k)}{R^2(1+k)} & 0 \\ 0 & 0 & (1+k)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{R^2}{(1+k)(R^2 + C(1+k))} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2 + C(1+k)}{R^2(1+k)} & 0 \\ 0 & 0 & (1+k)^2 \end{bmatrix}$$

EVALUATION DES CONTRAINTES

Plus tôt, nous avons vu la relation exprimant les contraintes de Piola-Kirchoff en fonction des invariants de C et des tenseurs évalués plus haut, soit

$$S_{ij} = \phi \underline{I} + \Psi(\underline{I}_1 \underline{I} - \underline{C}) + p \underline{C}^{-1}$$

- **Evaluation des tenseurs et invariants nécessaires**

Nous avons maintenant tout en main pour évaluer les différents termes de cette équation, soit, successivement, \underline{I}_1 , C et C^{-1} .

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} \frac{R^2}{(1+k)(R^2 + C(1+k))} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2 + C(1+k)}{R^2(1+k)} & 0 \\ 0 & 0 & (1+k)^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \text{tr}(\underline{C}) \\ &= \frac{R^2}{(1+k)(R^2 + C(1+k))} + \frac{R^2 + C(1+k)}{R^2(1+k)} + (1+k)^2 \\ &= \frac{R^4}{(1+k)R^2(R^2 + C(1+k))} + \frac{(R^2 + C(1+k))(R^2 + C(1+k))}{R^2(1+k)(R^2 + C(1+k))} + \frac{(1+k)^2(1+k)R^2(R^2 + C(1+k))}{(1+k)R^2(R^2 + C(1+k))} \\ &= \frac{R^4 + (R^2 + C(1+k))^2 + (1+k)^3 R^2(R^2 + C(1+k))}{(1+k)R^2(R^2 + C(1+k))} \end{aligned}$$

Enfin, le tenseur C étant diagonal, son inverse se calcule directement comme étant la diagonale de l'inverse de ses éléments, soit

$$\begin{aligned} \underline{C}^{-1} &= \begin{bmatrix} \left(\frac{R^2}{(1+k)(R^2 + C(1+k))} \right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{R^2 + C(1+k)}{R^2(1+k)} \right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \left((1+k)^2 \right)^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(1+k)(R^2 + C(1+k))}{R^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2(1+k)}{R^2 + C(1+k)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(1+k)^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant en revenir à l'expression des contraintes et y remplacer les différents termes évalués, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \underline{S} &= (2C_1 + 2C_2I_1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\quad - 2C_2 \begin{bmatrix} \frac{R^2}{(1+k)(R^2 + C(1+k))} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2 + C(1+k)}{R^2(1+k)} & 0 \\ 0 & 0 & (1+k)^2 \end{bmatrix} \\ &\quad + p \begin{bmatrix} \frac{(1+k)(R^2 + C(1+k))}{R^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2(1+k)}{R^2 + C(1+k)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(1+k)^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

D'autre part, nous savons que

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} S_r & & \\ & S_\theta & \\ & & S_z \end{bmatrix}$$

Nous pouvons donc maintenant développer l'expression des 3 contraintes formant le tenseur de Piola-Kirchoff, en identifiant les termes des diagonales des deux expressions amenées ci-dessus. Pour plus de clarté, nous allons développer les composantes une à une.

• Développement de S_r

$$\begin{aligned}
S_r &= (2C_1 + 2C_2 I_1) - 2C_2 \frac{R^2}{(1+k)(R^2 + C(1+k))} + p \frac{(1+k)(R^2 + C(1+k))}{R^2} \\
&= 2C_1 + 2C_2 \left[\frac{R^4 + (R^2 + C(1+k))^2 + (1+k)^3 R^2 (R^2 + C(1+k))}{(1+k)R^2(R^2 + C(1+k))} \right] \\
&\quad - 2C_2 \frac{R^2}{(1+k)(R^2 + C(1+k))} + p \frac{(1+k)(R^2 + C(1+k))}{R^2} \\
&= 2C_1 + 2C_2 \left[\frac{R^4 + (R^2 + C(1+k))^2 + (1+k)^3 R^2 (R^2 + C(1+k)) - R^4}{(1+k)R^2(R^2 + C(1+k))} \right] \\
&\quad + p \frac{(1+k)(R^2 + C(1+k))}{R^2} \\
&= 2C_1 + 2C_2 \left[\frac{(R^2 + C(1+k))^2 + R^2(1+k)^3(R^2 + C(1+k))}{(1+k)R^2(R^2 + C(1+k))} \right] \\
&\quad + p \frac{(1+k)^2(R^2 + C(1+k))^2}{(1+k)R^2(R^2 + C(1+k))} \\
&= 2C_1 + \frac{2C_2 [(R^2 + C(1+k)) + R^2(1+k)^3] + p[(1+k)^2(R^2 + C(1+k))] }{(1+k)R^2} \\
&= \frac{2C_1 R^2(1+k) + 2C_2 [(R^2 + C(1+k)) + R^2(1+k)^3] + p[(1+k)^2(R^2 + C(1+k))] }{(1+k)R^2} \\
&= \frac{R^2 [2C_1(1+k) + 2C_2 + 2C_2(1+k)^3 + p(1+k)^2] + 2C_2 C(1+k) + pC(1+k)^3}{(1+k)R^2}
\end{aligned}$$

• Développement de S_θ

$$S_\theta = (2C_1 + 2C_2 I_1) - 2C_2 \frac{R^2 + C(1+k)}{R^2(1+k)} + p \frac{R^2(1+k)}{R^2 + C(1+k)}$$

$$\begin{aligned}
&= 2C_1 + 2C_2 \left[\frac{R^4 + (R^2 + C(1+k))^2 + (1+k)^3 R^2 (R^2 + C(1+k))}{(1+k)R^2 (R^2 + C(1+k))} \right] \\
&\quad - 2C_2 \frac{R^2 + C(1+k)}{R^2 (1+k)} + p \frac{R^2 (1+k)}{R^2 + C(1+k)} \\
&= 2C_1 + 2C_2 \left[\frac{R^4 + (R^2 + C(1+k))^2 + (1+k)^3 R^2 (R^2 + C(1+k)) - (R^2 + C(1+k))^2}{(1+k)R^2 (R^2 + C(1+k))} \right] \\
&\quad + p \frac{R^2 (1+k)}{R^2 + C(1+k)} \\
&= 2C_1 + 2C_2 \left[\frac{R^4 + (1+k)^3 R^2 (R^2 + C(1+k))}{(1+k)R^2 (R^2 + C(1+k))} \right] + p \frac{R^2 (1+k)}{R^2 + C(1+k)} \\
&= 2C_1 + 2C_2 \left[\frac{R^2 + (1+k)^3 (R^2 + C(1+k))}{(1+k)(R^2 + C(1+k))} \right] + p \frac{R^2 (1+k)}{R^2 + C(1+k)} \\
&= 2C_1 + \frac{2C_2 [R^2 + (1+k)^3 (R^2 + C(1+k))] + p [R^2 (1+k)^2]}{(1+k)(R^2 + C(1+k))} \\
&= \frac{2C_1 [(1+k)(R^2 + C(1+k))] + 2C_2 [R^2 + (1+k)^3 (R^2 + C(1+k))] + p [R^2 (1+k)^2]}{(1+k)(R^2 + C(1+k))} \\
&= \frac{R^2 [2C_1 (1+k) + 2C_2 + 2C_2 (1+k)^3 + p(1+k)^2] + 2C_1 C(1+k)^2 + 2C_2 C(1+k)^4}{(1+k)(R^2 + C(1+k))}
\end{aligned}$$

• Développement de S_z

$$\begin{aligned}
S_z &= (2C_1 + 2C_2 I_1) - 2C_2 (1+k)^2 + p \frac{1}{(1+k)^2} \\
&= 2C_1 + 2C_2 \left[\frac{R^4 + (R^2 + C(1+k))^2 + (1+k)^3 R^2 (R^2 + C(1+k))}{(1+k)R^2 (R^2 + C(1+k))} \right] - 2C_2 (1+k)^2 + p \frac{1}{(1+k)^2} \\
&= 2C_1 + 2C_2 \left[\frac{R^4 + (R^2 + C(1+k))^2 + (1+k)^3 R^2 (R^2 + C(1+k)) - R^2 (R^2 + C(1+k))(1+k)^3}{(1+k)R^2 (R^2 + C(1+k))} \right] \\
&\quad + p \frac{1}{(1+k)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2C_1 + 2C_2 \left[\frac{R^4 + (R^2 + C(1+k))^2}{(1+k)R^2(R^2 + C(1+k))} \right] + p \frac{1}{(1+k)^2} \\
&= 2C_1 + 2C_2 \left[\frac{R^4 - (R^2 + C(1+k))^2}{(1+k)R^2(R^2 + C(1+k))} \right] + 4C_2 \left[\frac{(R^2 + C(1+k))^2}{(1+k)R^2(R^2 + C(1+k))} \right] + p \frac{1}{(1+k)^2} \\
&= 2C_1 - 2C_2 \left[\frac{C^2(1+k)^2 + 2R^2C(1+k)}{(1+k)R^2(R^2 + C(1+k))} \right] + \frac{4C_2(R^2 + C(1+k))^2}{(1+k)R^2(R^2 + C(1+k))} + p \frac{1}{(1+k)^2} \\
&= 2C_1 - 2C_2 \left[\frac{C^2(1+k) + 2R^2C}{R^2(R^2 + C(1+k))} \right] + \frac{4C_2(R^2 + C(1+k))}{(1+k)R^2} + p \frac{1}{(1+k)^2} \\
&= 2C_1 - 2C_2 \left[\frac{C^2(1+k) + 2R^2C}{R^2(R^2 + C(1+k))} \right] + \frac{4C_2R^2}{(1+k)R^2} + \frac{4C_2C(1+k)}{(1+k)R^2} + \frac{p}{(1+k)^2} \\
&= 2C_1 - 2C_2C \left[\frac{C(1+k) + R^2 + R^2}{R^2(R^2 + C(1+k))} \right] + \frac{4C_2R^2}{(1+k)R^2} + \frac{4C_2C(1+k)}{(1+k)R^2} + \frac{p}{(1+k)^2} \\
&= 2C_1 - 2C_2C \left[\frac{C(1+k) + R^2}{R^2(R^2 + C(1+k))} \right] - \frac{2C_2CR^2}{R^2(R^2 + C(1+k))} + \frac{4C_2(1+k)}{(1+k)^2} + \frac{4C_2C}{R^2} + \frac{p}{(1+k)^2} \\
&= 2C_1 - \frac{2C_2C}{R^2} - \frac{2C_2C}{(R^2 + C(1+k))} + \frac{4C_2(1+k)}{(1+k)^2} + \frac{4C_2C}{R^2} + \frac{p}{(1+k)^2} \\
&= 2C_1 + \frac{2C_2C}{R^2} - \frac{2C_2C}{(R^2 + C(1+k))} + \frac{4C_2(1+k) + p}{(1+k)^2}
\end{aligned}$$

• Contraintes de Cauchy

En résumé, nous avons les contraintes de Piola-Kirchhoff suivantes

$$S_r = \frac{R^2 [2C_1(1+k) + 2C_2 + 2C_2(1+k)^3 + p(1+k)^2] + 2C_2C(1+k) + pC(1+k)^3}{(1+k)R^2}$$

$$S_\theta = \frac{R^2 [2C_1(1+k) + 2C_2 + 2C_2(1+k)^3 + p(1+k)^2] + 2C_1C(1+k)^2 + 2C_2C(1+k)^4}{(1+k)(R^2 + C(1+k))}$$

$$S_z = 2C_1 + \frac{2C_2C}{R^2} - \frac{2C_2C}{(R^2 + C(1+k))} + \frac{4C_2(1+k) + p}{(1+k)^2}$$

Les contraintes de Cauchy peuvent directement s'évaluer à partir de celles de Piola-Kirchoff, ceci en appliquant la substitution suivante

$$\underline{\sigma} = \frac{1}{J} \underline{F} \underline{S} \underline{F}^T$$

Soit, successivement,

$$\sigma_r = \frac{R^2 [2C_1(1+k) + 2C_2 + 2C_2(1+k)^3 + p(1+k)^2] + 2C_2C(1+k) + pC(1+k)^3}{(1+k)^2(R^2 + C(1+k))}$$

$$\sigma_\theta = \frac{R^2 [2C_1(1+k) + 2C_2 + 2C_2(1+k)^3 + p(1+k)^2] + 2C_1C(1+k)^2 + 2C_2C(1+k)^4}{(1+k)^2 R^2}$$

$$\sigma_z = (1+k)^2 \left[2C_1 + \frac{2C_2C}{R^2} - \frac{2C_2C}{(R^2 + C(1+k))} + \frac{4C_2(1+k) + p}{(1+k)^2} \right]$$

EQUATIONS INDÉFINIES D'ÉQUILIBRE

Les équations indéfinies d'équilibre en volume s'écrivent

$$D_j \sigma_{ij} + F_i = 0$$

Tandis que les équations indéfinies d'équilibre en translation nous fournissent les conditions aux limites du problème.

Travaillant en coordonnées cylindriques, nous devons tout d'abord réexprimer ces équations, ou tout du moins l'expression de l'équation d'équilibre radial, soit

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + F_r = 0$$

Etant donné l'absence de forces volumiques, on a successivement

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

$$\Leftrightarrow r \frac{d\sigma_r}{dr} = \sigma_\theta - \sigma_r$$

$$\Leftrightarrow r \frac{d\sigma_r}{dR} \frac{dR}{dr} = \sigma_\theta - \sigma_r$$

Nous avons donc au final 3 termes à évaluer, soit $\frac{d\sigma_r}{dR}$, $\frac{dR}{dr}$ et $\sigma_\theta - \sigma_r$. Pour des raisons de clarté dans la présentation, nous allons évaluer ces 3 termes dans 3 paragraphes bien séparés, et nous reviendrons au final sur l'expression totale que nous tenterons alors de résoudre.

• Evaluation de $\frac{d\sigma_r}{dR}$

σ_r est une fonction de R et de p , nous avons ainsi

$$\frac{d\sigma_r}{dR} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial R} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial p} \frac{dp}{dR}$$

Les deux dérivées partielles sont évaluables relativement facilement si l'on se rappelle l'expression analytique de la contrainte radiale, soit

$$\sigma_r = \frac{R^2 [2C_1(1+k) + 2C_2 + 2C_2(1+k)^3 + p(1+k)^2] + 2C_2C(1+k) + pC(1+k)^3}{(1+k)^2(R^2 + C(1+k))}$$

Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial p} &= \frac{R^2(1+k)^2 + C(1+k)^3}{(1+k)^2(R^2 + C(1+k))} \\ &= \frac{R^2 + C(1+k)}{(R^2 + C(1+k))} = 1 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial R} &= \frac{2R[2C_1(1+k) + 2C_2 + 2C_2(1+k)^3 + p(1+k)^2](1+k)^2(R^2 + C(1+k))}{(1+k)^4(R^2 + C(1+k))^2} \\ &\quad - \frac{2RR^2(1+k)^2[2C_1(1+k) + 2C_2 + 2C_2(1+k)^3 + p(1+k)^2]}{(1+k)^4(R^2 + C(1+k))^2} \\ &\quad - \frac{2R(1+k)^2(2C_2C(1+k) + Cp(1+k)^3)}{(1+k)^4(R^2 + C(1+k))^2} \\ &= \frac{2RC(1+k)[2C_1(1+k) + 2C_2 + 2C_2(1+k)^3 + p(1+k)^2] - 2R(1+k)(2C_2C + Cp(1+k)^2)}{(1+k)^2(R^2 + C(1+k))^2} \\ &= \frac{2RC[2C_1(1+k) + 2C_2(1+k)^3]}{(1+k)(R^2 + C(1+k))^2} = \frac{4RC[C_1 + C_2(1+k)^2]}{(R^2 + C(1+k))^2} \end{aligned}$$

Ce qui nous donne, au final,

$$\frac{d\sigma_r}{dR} = \frac{4RC[C_1 + C_2(1+k)^2]}{(R^2 + C(1+k))^2} + \frac{dp}{dR}$$

• **Evaluation de $\frac{dR}{dr}$**

Nous avons vu au début de ce chapitre, par l'expression de la condition d'incompressibilité, que

$$r = \sqrt{\frac{R^2 + C(1+k)}{1+k}}$$

Nous pouvons donc exprimer la dérivée de r par rapport à R

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dR} &= \frac{1}{2} \left(\frac{R^2 + C(1+k)}{1+k} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{2R}{1+k} \\ &= \frac{R}{(1+k)\sqrt{\frac{R^2 + C(1+k)}{1+k}}} = \frac{R}{\sqrt{(1+k)(R^2 + C(1+k))}}\end{aligned}$$

Ou encore

$$\frac{dR}{dr} = \frac{\sqrt{(1+k)(R^2 + C(1+k))}}{R}$$

• Evaluation de $\sigma_\theta - \sigma_r$

Il nous faut revenir sur les expressions correspondantes et effectuer un bon nombre d'opérations algébriques, afin d'obtenir une expression des plus épurée.

$$\begin{aligned}\sigma_\theta - \sigma_r &= \frac{R^2 [2C_1(1+k) + 2C_2 + 2C_2(1+k)^3 + p(1+k)^2] + 2C_1C(1+k)^2 + 2C_2C(1+k)^4}{(1+k)^2 R^2} \\ &\quad - \frac{R^2 [2C_1(1+k) + 2C_2 + 2C_2(1+k)^3 + p(1+k)^2] + 2C_2C(1+k) + pC(1+k)^3}{(1+k)^2 (R^2 + C(1+k))} \\ &= \frac{(R^2(R^2 + C(1+k)) - R^4) [2C_1(1+k) + 2C_2 + 2C_2(1+k)^3 + p(1+k)^2]}{(1+k)^2 R^2 (R^2 + C(1+k))} \\ &\quad + \frac{[2C_1C(1+k)^2 + 2C_2C(1+k)^4] (R^2 + C(1+k)) - [2C_2C(1+k) + pC(1+k)^3] R^2}{(1+k)^2 R^2 (R^2 + C(1+k))} \\ &= \frac{R^2 C [2C_1(1+k) + 2C_2 + 2C_2(1+k)^3 + p(1+k)^2]}{(1+k) R^2 (R^2 + C(1+k))} \\ &\quad + \frac{[2C_1C(1+k) + 2C_2C(1+k)^3] (R^2 + C(1+k)) - [2C_2C + pC(1+k)^2] R^2}{(1+k) R^2 (R^2 + C(1+k))} \\ &= \frac{R^2 C [2C_1 + 2C_2(1+k)^2 + p(1+k)] + [2C_1C + 2C_2C(1+k)^2] (R^2 + C(1+k))}{R^2 (R^2 + C(1+k))} \\ &\quad - \frac{pC(1+k) R^2}{R^2 (R^2 + C(1+k))} \\ &= \frac{R^2 C [2C_1 + 2C_2(1+k)^2] + [2C_1 + 2C_2(1+k)^2] C (R^2 + C(1+k))}{R^2 (R^2 + C(1+k))} \\ &= \frac{[2C_1 + 2C_2(1+k)^2] [R^2 C + C (R^2 + C(1+k))] }{R^2 (R^2 + C(1+k))}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{[2C_1 + 2C_2(1+k)^2][2R^2C + C^2(1+k)]}{R^2(R^2 + C(1+k))} \\
&= \frac{2C[C_1 + C_2(1+k)^2][2R^2 + C(1+k)]}{R^2(R^2 + C(1+k))}
\end{aligned}$$

• Expression finale de l'équation d'équilibre

Les différents termes de l'équation d'équilibre sont maintenant connus. Nous avions au départ

$$r \frac{d\sigma_r}{dR} \frac{dR}{dr} = \sigma_\theta - \sigma_r$$

En remplaçant par les différents termes, nous obtenons au final

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{R^2 + C(1+k)}{1+k}} \left(\frac{4RC[C_1 + C_2(1+k)^2]}{(R^2 + C(1+k))^2} + \frac{dp}{dR} \right) \frac{\sqrt{(1+k)(R^2 + C(1+k))}}{R} \\
&= \frac{2C[C_1 + C_2(1+k)^2][2R^2 + C(1+k)]}{R^2(R^2 + C(1+k))}
\end{aligned}$$

Ou encore, en réorganisant les termes

$$\begin{aligned}
&\frac{R^2 + C(1+k)}{R} \left(\frac{4RC[C_1 + C_2(1+k)^2]}{(R^2 + C(1+k))^2} + \frac{dp}{dR} \right) = \frac{2C[C_1 + C_2(1+k)^2][2R^2 + C(1+k)]}{R^2(R^2 + C(1+k))} \\
&\Leftrightarrow \frac{R^2 + C(1+k)}{R} \frac{dp}{dR} = \frac{2C[C_1 + C_2(1+k)^2][2R^2 + C(1+k) - 2R^2]}{R^2(R^2 + C(1+k))} \\
&\Leftrightarrow \frac{R^2 + C(1+k)}{R} \frac{dp}{dR} = \frac{2C[C_1 + C_2(1+k)^2]C(1+k)}{R^2(R^2 + C(1+k))}
\end{aligned}$$

Et, finalement,

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dR} &= \frac{2C[C_1 + C_2(1+k)^2]C(1+k)}{R^2(R^2 + C(1+k))} \frac{R}{R^2 + C(1+k)} \\
&= \frac{2C^2[C_1 + C_2(1+k)^2](1+k)}{R(R^2 + C(1+k))^2}
\end{aligned}$$

• Expression analytique de p

Nous pouvons alors résoudre cette équation différentielle, de manière à obtenir l'expression de p en fonction du rayon.

La résolution n'est pas immédiate, et doit faire recours à la décomposition en fraction simple de l'expression ci-dessus. On a ainsi

$$\frac{2C^2[C_1 + C_2(1+k)^2](1+k)}{R(R^2 + C(1+k))^2} = \frac{A}{R} + \frac{BR+D}{R^2 + C(1+k)} + \frac{ER+F}{(R^2 + C(1+k))^2}$$

Et les différents coefficients introduits se trouvent en identifiant les termes correspondant aux différentes puissances de R du numérateur.

$$\begin{aligned} 2C^2[C_1 + C_2(1+k)^2](1+k) &= A(R^2 + C(1+k))^2 + (BR+D)(R^2 + C(1+k)) + (ER+F)R \\ &= A(R^4 + C^2(1+k)^2 + 2R^2C(1+k)) + BR^4 + BCR^2(1+k) + DR^3 \\ &\quad + CDR(1+k) + ER^2 + FR \\ &= R^4(A+B) + R^3(D) + R^2(2AC(1+k) + BC(1+k) + E) \\ &\quad + R(CD(1+k) + F) + AC^2(1+k)^2 \end{aligned}$$

Et on peut ensuite identifier les termes des différentes puissances de R .

$$R^4 : A + B = 0$$

$$R^3 : D = 0$$

$$R^2 : 2AC(1+k) + BC(1+k) + E = 0$$

$$R^1 : CD(1+k) + F = 0$$

$$R^0 : AC^2(1+k)^2 = 2C^2[C_1 + C_2(1+k)^2](1+k)$$

Et on obtient finalement

$$D = 0$$

$$F = 0$$

$$A = \frac{2(C_1 + C_2(1+k)^2)}{(1+k)}$$

$$B = -\frac{2(C_1 + C_2(1+k)^2)}{(1+k)}$$

$$E = -2C(C_1 + C_2(1+k)^2)$$

Notre différentielle devient ainsi

$$\frac{dp}{dR} = [C_1 + C_2(1+k)^2] \left\{ \frac{2}{(1+k)R} - \frac{2R}{(1+k)(R^2 + C(1+k))} - \frac{2CR}{(R^2 + C(1+k))^2} \right\}$$

$$p = A + [C_1 + C_2(1+k)^2] \left\{ \frac{2}{(1+k)R} - \frac{2R}{(1+k)(R^2 + C(1+k))} - \frac{2CR}{(R^2 + C(1+k))^2} \right\}$$

Et, en intégrant, on obtient

$$\begin{aligned} p(R) &= A + [C_1 + C_2(1+k)^2] \left\{ \frac{2}{1+k} \ln R - \frac{1}{1+k} \ln(R^2 + C(1+k)) + \frac{C}{R^2 + C(1+k)} \right\} \\ &= A + \frac{[C_1 + C_2(1+k)^2]}{1+k} \left\{ \frac{C(1+k)}{R^2 + C(1+k)} + 2 \ln R - \ln(R^2 + C(1+k)) \right\} \end{aligned}$$

Où C et A sont deux constantes d'intégration. Les conditions aux limites qui nous permettront de trouver ces deux constantes sont les pressions aux bords du matériau considéré.

RÉSOLUTION DU PROBLÈME

On connaît maintenant toutes les données du problème, et il nous reste à intégrer la contrainte radiale pour tenir compte des valeurs de celle-ci aux bornes du système, résolvant ainsi l'équation d'équilibre en surface.

On peut insérer l'expression analytique de p dans celle de la contrainte radiale, qui était, pour rappel,

$$\sigma_r = \frac{R^2 [2C_1(1+k) + 2C_2 + 2C_2(1+k)^3 + p(1+k)^2] + 2C_2C(1+k) + pC(1+k)^3}{(1+k)^2(R^2 + C(1+k))}$$

Nous trouvons ainsi l'expression suivante, quelque peu lourde, mais dont l'utilisation sera simplifiée lorsque nous utiliserons des programmes de calculs tel Excel.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{R^2 \left[\left(A + \frac{[C_1 + C_2(1+k)^2]}{1+k} \left\{ \frac{C(1+k)}{R^2 + C(1+k)} + 2 \ln R - \ln(R^2 + C(1+k)) \right\} \right) (1+k)^2 \right]}{(1+k)^2(R^2 + C(1+k))} \\ &\quad + 2C_2C(1+k) + \left(A + \frac{[C_1 + C_2(1+k)^2]}{1+k} \left\{ \frac{C(1+k)}{R^2 + C(1+k)} + 2 \ln R - \ln(R^2 + C(1+k)) \right\} \right) C(1+k)^3 \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

• Schéma de résolution

Nous avons en fait 2 inconnues, soit C et A et deux conditions aux limites, soit les pressions aux bornes du matériau.

$$\begin{cases} \sigma_r(r = r_A) = -q_A \\ \sigma_r(r = r_B) = -q_A \end{cases}$$

On peut en fait imposer un C tel que la contrainte d'incompressibilité soit vérifiée, soit par exemple

$$C = \frac{(1+k)r_A^2 - R_A^2}{1+k}$$

Qui est tel que

$$r_A = \sqrt{\frac{R_A^2 + C(1+k)}{1+k}}$$

Si C vérifie cette équation, alors les autres rayons seront directement déterminés par

$$r = \sqrt{\frac{R^2 + C(1+k)}{1+k}}$$

On peut maintenant évaluer la contrainte à la borne $R = R_B$, où on a $\sigma_r = -q_B$. Ceci nous donne

$$\begin{aligned} \sigma_r(R = R_B) &= -q_B \\ &= \frac{R_B^2 \left[2C_1(1+k) + 2C_2 + 2C_2(1+k)^3 + \right.}{\left. \left(A + \frac{[C_1 + C_2(1+k)^2]}{1+k} \left\{ \frac{C(1+k)}{R_B^2 + C(1+k)} + 2 \ln R_B - \ln(R_B^2 + C(1+k)) \right\} \right) (1+k)^2 \right]} \\ &\quad \frac{(1+k)^2(R_B^2 + C(1+k))}{(1+k)^2(R_B^2 + C(1+k))} \\ &+ 2C_2C(1+k) + \left(A + \frac{[C_1 + C_2(1+k)^2]}{1+k} \left\{ \frac{C(1+k)}{R_B^2 + C(1+k)} + 2 \ln R_B - \ln(R_B^2 + C(1+k)) \right\} \right) C(1+k)^3 \end{aligned}$$

De cette équation, nous pouvons déterminer un A (qui y apparaît linéairement), qui sera uniquement fonction de C (et donc de r_A par la condition précédente d'incompressibilité) et de q_B .

$$\begin{aligned} A &= -q_B - \frac{R_B^2 \left[2C_1(1+k) + 2C_2 + 2C_2(1+k)^3 + \right.}{\left. \left(C_1 + C_2(1+k)^2 \right) (1+k) \left\{ \frac{C(1+k)}{R_B^2 + C(1+k)} + 2 \ln R_B - \ln(R_B^2 + C(1+k)) \right\} \right]} \\ &\quad \frac{(1+k)^2(R_B^2 + C(1+k))}{(1+k)^2(R_B^2 + C(1+k))} \\ &+ 2C_2C(1+k) + C(1+k)^2 \left(C_1 + C_2(1+k)^2 \left(\frac{C(1+k)}{R_B^2 + C(1+k)} + 2 \ln R_B - \ln(R_B^2 + C(1+k)) \right) \right) \\ &= A^x \end{aligned}$$

Soit, en remplaçant C par la valeur conditionnante de l'incompressibilité

$$\begin{aligned}
A = & -q_B - \frac{R_B^2 \left[2C_1(1+k) + 2C_2 + 2C_2(1+k)^3 + \right.} \\
& \left. \left[C_1 + C_2(1+k)^2 \right] (1+k) \left\{ \frac{(1+k)r_A^2 - R_A^2}{R_B^2 + C(1+k)} + 2 \ln R_B - \ln(R_B^2 + (1+k)r_A^2 - R_A^2) \right\} \right] \\
& \frac{(1+k)^2 (R_B^2 + C(1+k))}{(1+k)^2 (R_B^2 + C(1+k))} \\
& + 2C_2((1+k)r_A^2 - R_A^2) + ((1+k)r_A^2 - R_A^2)(1+k)(C_1 + C_2(1+k)^2) \\
& \left. \left(\frac{(1+k)r_A^2 - R_A^2}{R_B^2 + C(1+k)} + 2 \ln R_B - \ln(R_B^2 + (1+k)r_A^2 - R_A^2) \right) \right] \\
& \dots \\
= & A^x
\end{aligned}$$

Enfin, il nous reste à exprimer la contrainte à l'autre borne, pour finalement y remplacer A par la valeur fraîchement obtenue.

$$\begin{aligned}
\sigma_r(R = R_A) = & -q_A \\
= & \frac{R_A^2 \left[2C_1(1+k) + 2C_2 + 2C_2(1+k)^3 + \right.} \\
& \left. \left(A^x + \frac{\left[C_1 + C_2(1+k)^2 \right]}{1+k} \left\{ \frac{C(1+k)}{R_A^2 + C(1+k)} + 2 \ln R_A - \ln(R_A^2 + C(1+k)) \right\} \right) (1+k)^2 \right] \\
& \frac{(1+k)^2 (R_A^2 + C(1+k))}{(1+k)^2 (R_A^2 + C(1+k))} \\
& + 2C_2 C(1+k) + \left(A^x + \frac{\left[C_1 + C_2(1+k)^2 \right]}{1+k} \left\{ \frac{C(1+k)}{R_A^2 + C(1+k)} + 2 \ln R_A - \ln(R_A^2 + C(1+k)) \right\} \right) C(1+k)^3 \\
& \dots
\end{aligned}$$

Et, en remplaçant C par sa valeur, de manière à respecter la contrainte d'incompressibilité,

$$\begin{aligned}
\sigma_r(R = R_A) = & -q_A \\
= & \frac{R_A^2 \left[2C_1(1+k) + 2C_2 + 2C_2(1+k)^3 + \right.} \\
& \left. \left(A^x(1+k)^2 + \left[C_1 + C_2(1+k)^2 \right] (1+k) \left\{ \frac{(1+k)r_A^2 - R_A^2}{(1+k)r_A^2} + 2 \ln R_A - \ln((1+k)r_A^2) \right\} \right) \right] \\
& \frac{(1+k)^3 r_A^2}{(1+k)^3 r_A^2} \\
& + 2C_2((1+k)r_A^2 - R_A^2) + ((1+k)r_A^2 - R_A^2) \\
& \left. \left(A^x(1+k)^2 + \left[C_1 + C_2(1+k)^2 \right] (1+k) \left\{ \frac{(1+k)r_A^2 - R_A^2}{(1+k)r_A^2} + 2 \ln R_A - \ln((1+k)r_A^2) \right\} \right) \right] \\
& \dots
\end{aligned}$$

On aura ainsi une contrainte fonction uniquement de r_A . Si on connaît r_A , on connaît C et on peut évaluer le déplacement radial de tous les points par la fonction

$$r = \sqrt{\frac{R^2 + C(1+k)}{1+k}}$$

• Déplacements selon z

Pour être complet, il reste à considérer k , qui représente le déplacement longitudinal pris en conséquence de l'inflation du cylindre. La valeur de k sera donc forcément différente selon que l'on se situe en état plan de déformations ou de contraintes.

Dans le premier cas, on aura simplement à prendre

$$k = 0$$

Dans le second cas, k devra être déterminé en résolvant l'équation suivante

$$0 = 2\pi \int_{r_A}^{r_B} \sigma_z r dr$$

Or, l'expression des contraintes longitudinales est pour l'instant une fonction de R , nous avons donc à effectuer un changement de variable

$$r = \sqrt{\frac{R^2 + C(1+k)}{1+k}}$$

Et on a alors

$$2\pi \int_{X_A}^{X_B} \sigma_z(R) \frac{R}{\sqrt{(1+k)\sqrt{R^2 + C(1+k)}}} dR = 0$$

Avec, pour bornes d'intégration

- $X_A = \sqrt{\frac{R_A^2 + C(1+k)}{1+k}}$
- $X_B = \sqrt{\frac{R_B^2 + C(1+k)}{1+k}}$

On peut se remémorer les expressions analytiques de σ_z et de p , soit

$$\sigma_z = (1+k)^2 \left[2C_1 + \frac{2C_2C}{R^2} - \frac{2C_2C}{(R^2 + C(1+k))} + \frac{4C_2(1+k) + p}{(1+k)^2} \right]$$

$$p(R) = A + \frac{[C_1 + C_2(1+k)^2]}{1+k} \left\{ \frac{C(1+k)}{R^2 + C(1+k)} + 2 \ln R - \ln(R^2 + C(1+k)) \right\}$$

Il nous reste alors à injecter ces différents termes dans l'expression à intégrer, obtenant ainsi successivement

$$2\pi \int_{X_A}^{X_B} (1+k)^{3/2} \left[2C_1 + \frac{2C_2 C}{R^2} - \frac{2C_2 C}{(R^2 + C(1+k))} + \frac{4C_2(1+k) + p}{(1+k)^2} \right] \frac{R}{\sqrt{R^2 + C(1+k)}} dR = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\pi(1+k)^{3/2} \int_{X_A}^{X_B} \left[2C_1 + \frac{2C_2 C}{R^2} - \frac{2C_2 C}{(R^2 + C(1+k))} + \frac{4C_2(1+k)}{(1+k)^2} + \frac{1}{(1+k)^2} \right] \frac{R}{\sqrt{R^2 + C(1+k)}} dR = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\pi(1+k)^{3/2} \int_{X_1}^{X_B} \left[A + \frac{[C_1 + C_2(1+k)^2]}{1+k} \begin{pmatrix} \frac{C(1+k)}{R^2 + C(1+k)} + 2\ln R \\ -\ln(R^2 + C(1+k)) \end{pmatrix} \right] \frac{R}{\sqrt{R^2 + C(1+k)}} dR = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\pi(1+k)^{3/2} \int_{X_1}^{X_B} \left[\frac{2C_1 R}{\sqrt{R^2 + C(1+k)}} + \frac{2C_2 C}{R\sqrt{R^2 + C(1+k)}} - \frac{2C_2 C R}{(R^2 + C(1+k))^{3/2}} \right. \\ \left. + \frac{(4C_2(1+k) + A)R}{(1+k)^2 \sqrt{R^2 + C(1+k)}} + \frac{C[C_1 + C_2(1+k)^2]R}{(1+k)^2 (R^2 + C(1+k))^{3/2}} \right. \\ \left. + \frac{2R \ln R [C_1 + C_2(1+k)^2]}{(1+k)^3 \sqrt{R^2 + C(1+k)}} - \frac{R \ln(R^2 + C(1+k)) [C_1 + C_2(1+k)^2]}{(1+k)^3 \sqrt{R^2 + C(1+k)}} \right] dR = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\pi(1+k)^{3/2} \left[\left(2C_1 + \frac{(4C_2(1+k) + A)}{(1+k)^2} \right) \int \frac{R}{\sqrt{R^2 + C(1+k)}} dR + 2C_2 C \int \frac{1}{R\sqrt{R^2 + C(1+k)}} dR \right. \\ \left. + \left(\frac{C[C_1 + C_2(1+k)^2]}{(1+k)^2} - 2C_2 C \right) \int \frac{R}{(R^2 + C(1+k))^{3/2}} dR \right. \\ \left. + \frac{2[C_1 + C_2(1+k)^2]}{(1+k)^3} \int \frac{R \ln R}{\sqrt{R^2 + C(1+k)}} dR - \frac{2[C_1 + C_2(1+k)^2]}{(1+k)^3} \int \frac{R \ln(R^2 + C(1+k))}{\sqrt{R^2 + C(1+k)}} dR \right] = 0$$

Et on peut enfin intégrer les différents termes de cette équation⁶⁵, pour obtenir l'équation qui nous permettra de trouver k pour l'état plan de contraintes.

⁶⁵ La plupart des termes donnent une intégration directe, sauf pour les termes en logarithme, qui ont nécessité l'utilisation de quelques astuces, comme l'intégration par parties et la substitution. Etant donné la taille de cette équation, il nous a semblé inutile de recopier dans ces feuilles les différentes intégrations. Les différents termes ont cependant été agencés de manière à permettre une identification relativement aisée entre intégrants et expressions finales.

$$\begin{aligned}
& 2\pi(1+k)^{\frac{3}{2}} \left[\left(2C_1 + \frac{(4C_2(1+k)+A)}{(1+k)^2} \right) \sqrt{R^2 + C(1+k)} \Big|_{X_A}^{X_B} \right. \\
& \quad \left. + 2C_2 C \left(\frac{-1}{\sqrt{C(1+k)}} \ln \left(\frac{2C(1+k) + 2\sqrt{C(1+k)}\sqrt{R^2 + C(1+k)}}{R} \right) \right) \Big|_{X_A}^{X_B} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{C[C_1 + C_2(1+k)^2]}{(1+k)^2} - 2C_2 C \right) \left(\frac{-1}{\sqrt{R^2 + C(1+k)}} \right) \Big|_{X_A}^{X_B} \right] \\
& \quad + \frac{[C_1 + C_2(1+k)^2]}{(1+k)^3} \left[\frac{-1}{\sqrt{C(1+k)}} \left(-C(1+k) + C(1+k)\sqrt{\frac{R^2}{C(1+k)} + 1} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{(C(1+k))^{\frac{3}{2}}} \left(-(C(1+k))^2 + (C(1+k))^2 \sqrt{\frac{R^2}{C(1+k)} + 1} - 2(C(1+k))^2 \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^2}{C(1+k)} + 1} \right) \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\sqrt{C(1+k)}} \ln R \left(-2C(1+k) + 2C(1+k)\sqrt{\frac{R^2}{C(1+k)} + 1} \right) \right] \Big|_{X_A}^{X_B} \\
& \quad - \frac{2[C_1 + C_2(1+k)^2]}{(1+k)^3} \left[\ln(R^2 + C(1+k))\sqrt{R^2 + C(1+k)} - 4\sqrt{R^2 + C(1+k)} \right] \Big|_{X_A}^{X_B} = 0
\end{aligned}$$

Il suffit alors d'insérer dans cette expression les valeurs de R aux bornes. Comme nous pouvons l'imaginer, l'expression en deviendrait très lourde, ce pourquoi nous nous limiterons à l'expression ci-dessus.

ANNEXE 7, TESTS SUR LES RÉSULTATS DE L'ANALYSE ÉLASTIQUE NON LINÉAIRE

Le principe de recherche des déplacements radiaux est globalement le même que pour l'analyse élastique linéaire. Il s'agit d'exprimer d'une part les déplacements pour le muscle, d'autre part les déplacements pour l'artère, puis enfin d'exprimer la compatibilité des déplacements à l'interface pour trouver la pression de contact, qui nous permettra de trouver les déplacements artériels.

Ce qui change fondamentalement ici, c'est que les expressions ne sont pas linéaires par rapport au rayon, il nous faut donc procéder par approximations successives afin de les trouver, et il nous faut donc réaliser une routine afin de résoudre les équations proposées.

Rappelons nous en effet les formules obtenues, soit

$$\begin{aligned}
 A = -q_B - & \frac{R_B^2 \left[2C_1(1+k) + 2C_2 + 2C_2(1+k)^3 + \right.} {(1+k)^2(R_B^2 + C(1+k))} \\
 & \left. \left[C_1 + C_2(1+k)^2 \right] (1+k) \left\{ \frac{C(1+k)}{R_B^2 + C(1+k)} + 2 \ln R_B - \ln(R_B^2 + C(1+k)) \right\} \right] \\
 & + 2C_2C(1+k) + C(1+k)^2 \left(C_1 + C_2(1+k)^2 \left\{ \frac{C(1+k)}{R_B^2 + C(1+k)} + 2 \ln R_B - \ln(R_B^2 + C(1+k)) \right\} \right) \\
 & \dots \\
 & = A^x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_r(R = R_A) = -q_A & \\
 = & \frac{R_A^2 \left[2C_1(1+k) + 2C_2 + 2C_2(1+k)^3 + \right.} {(1+k)^2(R_A^2 + C(1+k))} \\
 & \left. \left(A^x + \frac{\left[C_1 + C_2(1+k)^2 \right]}{1+k} \left\{ \frac{C(1+k)}{R_A^2 + C(1+k)} + 2 \ln R_A - \ln(R_A^2 + C(1+k)) \right\} \right) (1+k)^2 \right] \\
 & + 2C_2C(1+k) + \left(A^x + \frac{\left[C_1 + C_2(1+k)^2 \right]}{1+k} \left\{ \frac{C(1+k)}{R_A^2 + C(1+k)} + 2 \ln R_A - \ln(R_A^2 + C(1+k)) \right\} \right) C(1+k)^3 \\
 & \dots
 \end{aligned}$$

Sous Excel, nous avons donc du créer 4 feuilles de calcul ainsi qu'une feuille de données. Les feuilles de calcul sont les suivantes

- Une feuille pour le calcul de A relatif au muscle, où q_B est alors la pression extérieure exercée par le brassard, et où tous les paramètres (rayons et paramètres mécaniques du modèle de Mooney-Rivlin) sont propres au matériau muscle⁶⁶ ;
- Une feuille pour le calcul de C relatif au muscle, où q_A est la pression de contact ;
- Une feuille pour le calcul de A relatif à l'artère, où q_B est cette fois la pression de contact⁶⁷ ;
- Une feuille pour le calcul de C relatif à l'artère, où q_A est la pression artérielle.

Les feuilles concernant les évaluations des A sont entièrement données, les équations correspondantes étant linéaires. Ces valeurs de A sont ensuite renvoyées dans les feuilles de C . Les feuilles concernant les évaluations des C sont elles à remplir par approches successives.

Le programme réalisé consiste en fait à faire tourner les valeurs des rayons (rayons dans les configurations déformées) de manière à vérifier les équilibres de translation en surface pour les deux bornes, soit avec la pression artérielle comme limite pour l'artère, et avec la pression de contact comme limite pour le muscle. La résolution consiste en une série d'exécution de la fonction « valeur cible » de Excel, qui permet en fait de faire tourner r pour que les contraintes imposées aux bornes soient respectées.

Etant donné l'importante quantité de données à traiter, nous n'avons pas utilisé la fonction « valeur cible », mais nous avons matérialisé celle-ci dans une routine en VisualBasic, que nous présentons ci-dessous celle relative au muscle.

```
Public Sub r_mus()      'recherche les valeurs de rA par valeur cible étendue...'
    Dim rA As Double
    Dim qA As Double
    Dim i As Integer
    Dim X As Integer
    X = 0      'recherche du nombre de lignes à traiter'
```

⁶⁶ Cette remarque est valable pour les 4 feuilles de calcul, les paramètres étant évidemment à chaque fois relatif au matériau considéré.

⁶⁷ Les pressions de contact sont bien entendu reliées entre elles. De manière à être strict, nous aurions du rechercher cette pression de contact de manière approchée, en réalisant une seconde routine, cependant, il s'est avéré qu'utiliser la pression de contact relative à l'analyse élastique linéaire introduisait des erreurs extrêmement faibles (erreurs évaluées par comparaison des déplacements radiaux au niveau de la zone de contact), soit de l'ordre de 0,01%. Nous avons donc décidé de ne pas mettre en place un programme de recherche de pression de contact.

```

While Worksheets("qA_mus").Cells(i + 4, 2) <> 0
    X = X + 1
    i = i + 1
Wend
For i = 1 To X
    Worksheets("qA_mus").Cells(i + 3, 5).ClearContents
Next i
Worksheets("qA_mus").Cells(4, 5) = 0.1
For i = 1 To X      'initialisation des valeurs de la colonne, pour éviter des problèmes de non-convergence
en cas de valeurs trop éloignées
    Worksheets("qA_mus").Cells(i + 3, 5) = 0.001
Next i
For i = 1 To X      'valeur cible étendue à toute la colonne'
    Worksheets("qA_mus").Cells(i + 3, 11).Select
    Worksheets("qA_mus").Cells(i + 3, 11).GoalSeek Goal:=0, ChangingCell:=Worksheets("qA_mus").Cells(i + 3,
5)
Next i
End Sub

```

En faisant tourner les deux routines, on obtient alors les valeurs des déplacements pour l'artère et le muscle.

On trouve ainsi au final les valeurs des rayons de l'artère pour la configuration déformée. De ces valeurs, on peut évaluer directement le déplacement radial est les sections, grâce aux formules

$$u_r = u = r - R$$

$$\Omega = \pi(r_A)^2$$

Nous pouvons alors dresser les graphiques d'évolution des déplacements radiaux et d'évolution de la section artérielle pour les variations de pression données.

Enfin, nous pourrions également effectuer les différents calculs pour l'état plan de contraintes, mais, étant donné que nous sommes en état plan de déformations (comme nous le verrons dans le chapitre 3 de la partie Matériaux du travail) et que les différents calculs à introduire pour évaluer k sont relativement lourds, nous avons décidé de nous en tenir aux résultats ici présents, concernant l'état plan de déformations.

Notons finalement que nous reviendrons dans un chapitre ultérieur sur les valeurs numériques des paramètres mécaniques nécessaires qui nous ont été nécessaires pour dresser ces graphes. Notons juste que les paramètres utilisés ici sont tels que les deux modèles sont calibrés.

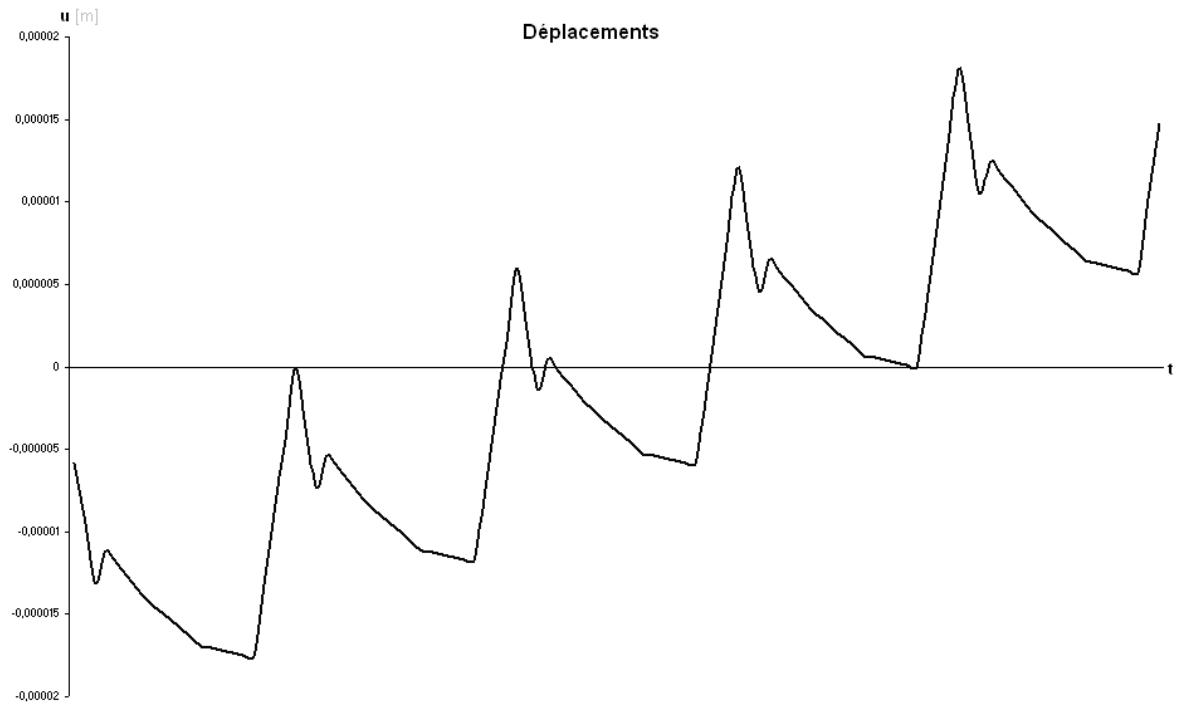


Figure 54 : Evolution des déplacements en état plan de déformations pour le modèle élastique non linéaire

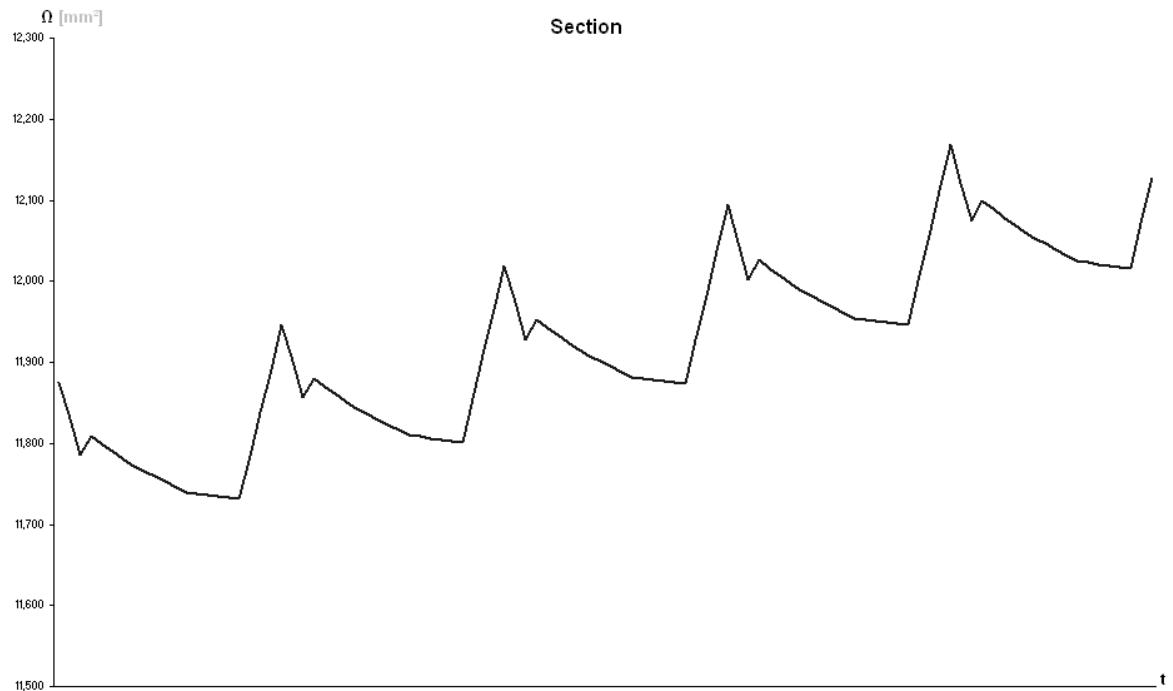


Figure 55 : Evolution de la section artérielle en état plan de déformations pour le modèle élastique non linéaire

Il nous faut encore évaluer les déplacements extérieurs de l'artère, pour les comparer aux déplacements intérieurs du muscle, et ainsi situer l'erreur introduite dans la zone de contact. Cette évaluation est fort simple de par la connaissance de tous les paramètres en jeu. Il suffit en effet d'appliquer l'équation

$$r = \sqrt{\frac{R^2 + C(1+k)}{1+k}}$$

à tous les points situés sur la zone de contact et appartenant à l'artère.

Finalement, nous présentons ci-dessous les différentes erreurs de calcul, introduites d'une part par un choix arbitraire de la pression de contact, et d'autre part lors de l'utilisation de nos routines en VBA. Ces dernières se situent au niveau des contraintes q_A , étant donné que le rayon tournait de manière à déterminer ces contraintes, et de telle sorte que celles-ci approchent au mieux les contraintes radiales réelles

Pour évaluer les erreurs globales introduites par ces manipulations, nous avons simplement à comparer les valeurs évaluées par notre programme et les valeurs imposées par notre connaissance du phénomène, et on obtient ainsi

$\varepsilon_{qA, muscle}$	0,001329%
$\varepsilon_{qA, artère}$	0,007429%
ε_r	0,05784%

ANNEXE 8, EXTRAITS DES RECHERCHES CONCERNANT LES PARAMÈTRES MÉCANIQUES DES MATERIAUX

Nous présentons dans cette annexe les documents et graphiques qui nous ont permis de déterminer les modules de Young des deux matériaux en présence, soit l'artère et le muscle.

L'ARTÈRE

Pour l'artère, nous avons trouvé divers diagramme de déformations en fonction de la contrainte, reprenant également les valeurs des modules d'élasticité correspondant. Les documents suivants sont retirés d'une publication du « Department of Pathology and Laboratory Medicine », intitulée « Mechanical Behavior of Vessel Wall: A comparative Study of Aorta, Vena Cava and Carotid Artery » et écrite par Frederic H. Silver, Patrick B. Snowhill et David J. Foran.

Il s'agit de mesures réalisées sur des porcs à l'aide d'instruments de mesure Instron, instruments qui permettent d'effectuer des tests en compression et traction sur les matériaux.

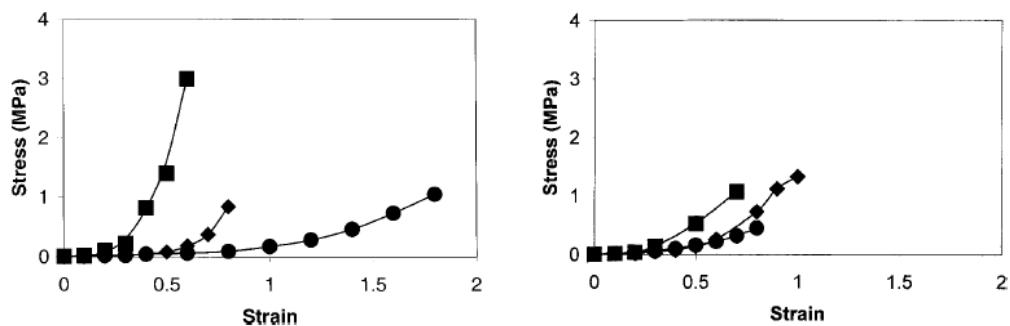


FIGURE 3. Mean incremental tensile elastic stress-strain curves for vessel wall. Incremental elastic stress-strain curves for aorta (diamonds), carotid artery (circles), and vena cava (squares) obtained at a strain rate of 10%/min at room temperature in the transverse (left) and longitudinal (right) directions. The elastic stress was obtained as the equilibrium load divided by the original cross-sectional area. Slopes were calculated at low and high strains and are reported in Table 2. Typical standard deviations ranged from 28% to 54% of the elastic stress.

TABLE 2. Slopes of incremental elastic stress-strain curves for vessel wall at a strain rate of 10% and per min.

Sample	Low strain slope (intercept) (MPa)	CC	High Strain slope (intercept) (MPa)	CC
Aorta (long) (trans)	0.250 (-0.006)	0.974	3.16 (-1.712)	0.980
	0.0567 (-0.007)	0.960	3.30 (-1.867)	0.906
Carotid (long) (trans)	0.188 (0.0027)	0.986	1.15 (-0.4845)	0.978
	0.0823 (-0.0005)	0.896	1.30 (-1.31)	0.985
Vena cava (long) (trans)	0.319 (0.0028)	0.977	2.31 (-0.573)	0.991
	0.191 (0.0)	1.00	6.00 (-1.582)	1.00

Nous n'y trouvons malheureusement pas directement des valeurs du module d'élasticité pour l'artère brachiale. Nous avons donc fait choix de prendre les valeurs correspondant à la carotide, artère dont le comportement est à priori le plus proche de celui de l'artère étudiée dans ce travail. Ces valeurs sont corroborées par d'autres recherches

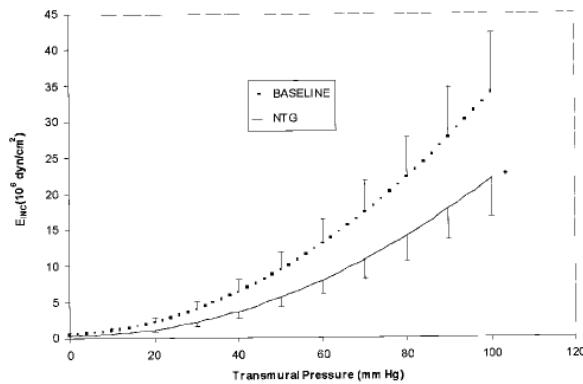


Figure 6. E_{inc} vs pressure curves at baseline (dotted) and after 0.4 mg sublingual NTG (solid). NTG significantly decreased E_{inc} by an average of 42% over the entire pressure range as compared with baseline. * $P<0.05$.

La pression transmurale étant la différence de pression entre la pression artérielle et la pression externe. En l'absence de brassard, la pression extérieure est la pression atmosphérique, et la pression transmurale est donc globalement la même que la pression artérielle.

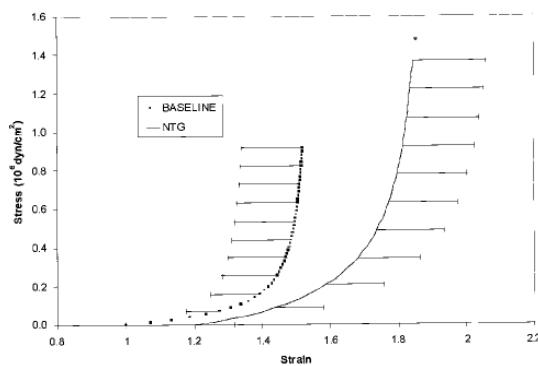


Figure 7. Stress vs strain curves at baseline (dotted) and after 0.4 mg sublingual NTG (solid). NTG significantly shifted the baseline stress-strain curve rightward resulting in a large decrease in isometric wall stress. * $P<0.01$.

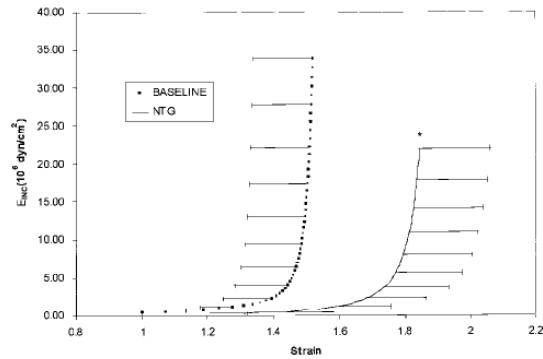


Figure 8. E_{inc} vs strain curves at baseline (dotted) and after 0.4 mg sublingual NTG (solid). NTG significantly ($P<0.01$) shifted the baseline E_{inc} vs strain curve rightward resulting in a large decrease in isometric wall stiffness.

En prenant comme référence une pression transmurale de 93mmHg, on trouve par la première figure un module d'élasticité de $17 \cdot 10^6$ dyn/cm², soit 1,7MPa. Les deux figures suivantes étant des mesures différencierées du même phénomène, elles fournissent des résultats semblables.

Il est important de remarquer ici que le module de Young du matériau n'est pas constant, mais varie normalement avec les efforts appliqués, ce qui n'est pas en accord avec notre théorie de l'élasticité linéaire. Cependant, en première approximation, on peut considérer un module de Young constant dans la zone étudiée.

Au final, nous considérerons comme valeur

$$E = 1,7 \text{ MPa}$$

LE MUSCLE

Pour le muscle, nous n'avons pas trouvé de valeur du module de Young. Nous avons néanmoins trouvé d'autres valeurs équivalentes, soit d'une part des valeurs de la rigidité musculaire, soit d'autre part des valeurs du module de cisaillement, ou module de Coulomb.

• Rigidité musculaire

Celle-ci est en fait donnée par

$$k = \frac{F}{\delta}$$

où

- F est la force appliquée (exprimée en N) ;
- Δ est le déplacement engendré (exprimé en m).

Pour des raisons relativement inconnues, les valeurs trouvées de la rigidité étaient fort disparates, et, de plus, leur transposition pour en retirer des valeurs du module d'élasticité n'était pas directe. En effet, on sait qu'on a

$$\sigma = E\varepsilon$$

avec

- $\sigma = \frac{F}{A}$ (exprimé en MPa) ;
- $\varepsilon = \frac{l - L}{L} = \frac{\delta}{L}$ (sans dimension).

Ce qui nous permet d'obtenir, au final

$$\begin{aligned}\frac{F}{A} &= E \frac{\delta}{L} \\ \Leftrightarrow E &= \frac{F L}{A \delta} = \frac{k \delta L}{A \delta} = \frac{kL}{A}\end{aligned}$$

Et il nous faut donc précisément connaître la section sur laquelle la force est appliquée, de même que la longueur initiale du solide dans le sens de la force. Comme nous cherchons l'isotropie transversale du matériau, ces données ne sont pas accessibles directement, sont donc dépendantes d'hypothèses, et les valeurs de E qui s'en retirent peuvent se présenter sur un domaine plutôt large.

• Module de Coulomb

Le module de cisaillement est lui donné par

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

L'obtention du module d'élasticité est ici beaucoup plus directe, on a en effet

$$E = 2G(1+\nu)$$

Nous avons trouvé des mesures du module de cisaillement dans une thèse de Doctorat de l'Université de Paris sur le sujet « Le Palpeur acoustique : Un nouvel outil d'investigation des tissus biologiques », réalisée par J.-L. Genisson.

Les tests réalisés nous donne des valeurs du module de glissement transversal, et consiste en fait à mesurer des vitesses de propagation d'ondes de cisaillement au sein du bras, de manière à en mesurer les paramètres mécaniques élastiques. La thèse propose au final le tableau de valeurs suivant

Sujet	Module de cisaillement au repos (kPa)
1	1,20
2	0,75
3	1,67
4	0,33
5	0,36
6	0,42
7	1,30
8	1,65
9	1,22
10	0,31

Tableau 2 : Ensemble des résultats expérimentaux relatifs au module de cisaillement.

Nous pouvons dès lors extraire la valeur moyenne de ce tableau, ce qui nous donne

$$G = 0,919 \text{ kPa}$$

Ce qui nous donne pour le module d'élasticité une valeur de

$$E = 2,757 \text{ kPa}$$

ANNEXE 9, EQUATIONS DE L'HÉMODYNAMIQUE VASCULAIRE

Les équations et les différents développements qui vont être présentés dans cette annexe sont extraits du cours d'hémodynamique vasculaire de Monsieur Pirotton. Notons que, par rapport aux notations utilisées dans le rapport, il faut effectuer les changements suivants :

- S devient Ω ;
- W devient U .

Les notes de cours de Monsieur Pirotton sont présentées ici intégralement. Dans le rapport, nous reprendrons les résultats principaux et commenterons quelque peu les données du problème.

10.1.2 Établissement des équations du modèle

10.1.2.1 Equations hydrauliques de base

Les équations gouvernant le phénomène sont donc :

- les équations de Navier-Stokes,
- l'équation de continuité,
- les conditions à la jonction fluide - pariétal,
- la relation section - pression - adscisse,
- .. les conditions aux limites des conduits.

Nous allons montrer comment, dans le cadre des hypothèses énoncées plus haut, les équations des quatre premières catégories peuvent se ramener à un système hyperbolique de deux équations aux dérivées partielles quasilinéaires du premier ordre.

Considérons un tronçon de conduit à axe rectiligne dont la section est de forme quelconque et variable de point en point si on se déplace le long de cet axe. Cette section est par ailleurs fortement déformable. La conduite est parcourue par un fluide homogène et incompressible. Nous travaillerons en coordonnées cylindriques. La Figure 10.1 définit les axes r, θ, z ainsi que les vitesses u, v, w .

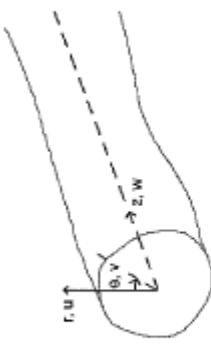


Figure 10.1 : Définition des coordonnées cylindriques et des vitesses

L'écoulement d'un fluide visqueux incompressible est régi par les équations de Navier-Stokes générales que nous rappelons ici sous leur forme vectorielle :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\text{grad}} p - \rho \vec{\text{grad}} U - \mu \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{V}) \quad (10.1)$$

où \vec{V} est le vecteur vitesse,

$-\vec{\text{grad}} p$ les forces de pression,

$-\rho \vec{\text{grad}} U$ les forces de volume,

$\mu \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{V})$ les forces de viscosité.

10.1.2.2 Passage en unidimensionnel

Nous avons vu que le passage en unidimensionnel est indispensable pour rendre le modèle utilisable en pratique. Pour essayer de réaliser cette simplification de la façon la moins destructive possible, nous allons tout d'abord écrire les quatre équations précédentes sous forme adimensionnelle. Pour cela, nous choisissons tout d'abord une vitesse caractéristique selon chaque axe-coordonnée, soit U_0 , V_0 , W_0 ainsi qu'un rayon caractéristique R_0 . Grâce à ces valeurs, construisons une longueur selon z qui soit caractéristique, à partir du rapport des vitesses caractéristiques entre l'axe longitudinal et l'axe radial :

$$\lambda_z = \frac{R_0}{W_0} = \frac{R_0}{U_0} \quad (10.6)$$

On imagine aisément que cette longueur s'apparente à un quart d'une longueur d'onde caractéristique (Figure 10.2).

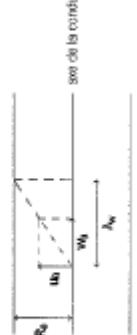


Figure 10.2 : Définition de la longueur caractéristique λ_z

Définissons ensuite deux rapports de vitesses caractéristiques. Ils comparent les vitesses caractéristiques selon les axes r , θ à celles selon z :

$$S_r = \frac{V_0}{W_0} \quad (10.7)$$

$$S_\theta = \frac{V_0}{W_0} \quad (10.8)$$

La coordonnée θ est bien sûr conservée, par contre les deux autres sont rendues adimensionnelles en les remplaçant logiquement par :

$$r' = \frac{r}{R_0} \quad (10.9)$$

$$z' = \frac{z}{\lambda_z}$$

L'axe longitudinal étant l'axe principal de l'écoulement, le temps caractéristique est choisi sur base de la propagation dans ce sens :

$$t_0 = \frac{\lambda_z}{W_0} \quad (10.11)$$

et le temps adimensionnel est alors défini par :

L'établissement des équations d'écoulement dans les antères est réalisé en passant par les équations de Navier-Stokes en termes de contraintes. Celles-ci peuvent être obtenues à partir de l'équation (10.1) où les opérateurs sont des opérateurs en coordonnées cylindriques.

Afin d'éclaircir la présentation, nous travaillerons dans un premier temps sans tenir compte de la pesanteur. Elle sera introduite plus tard. Dans ces conditions et si nous extrayons de ces contraintes la pression, les équations de Navier-Stokes générales en termes de contraintes s'écrivent classiquement :

$$-\text{Équilibre radial} \quad \rho \left(\frac{Du}{Dr} - \frac{v^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial r \sigma_{zz}}{\partial z} \right) - \frac{\sigma_{rz}}{r} \quad (10.2)$$

$$-\text{Équilibre circumférentiel} \quad \rho \left(\frac{Dv}{Dr} - \frac{uv}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta \theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial r \sigma_{zz}}{\partial z} \right) - \frac{\sigma_{rz}}{r} \quad (10.3)$$

$$-\text{Équilibre longitudinal} \quad \rho \frac{Dw}{Dr} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta \theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial r \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \quad (10.4)$$

Nous utilisons les notations suivantes :

$\frac{D}{D}$ sont des dérivées totales, tandis que $\frac{\partial}{\partial}$ sont des dérivées partielles,

r , θ , z les coordonnées cylindriques,

u , v , w les vitesses selon les axes correspondants,
 t le temps,

ρ la masse volumique,
 p la pression,
 σ_{rr} , $\sigma_{\theta \theta}$, σ_{zz} , $\sigma_{\theta z}$, σ_{rz} , σ_{az} les contraintes extérieures appliquées à un volume

élémentaire (compte non-tenu de la pression).

Selon nos conventions, ces contraintes ne représentent plus que l'effet du comportement rhéologique intrinsèque du sang, pour lequel nous ne faisons pas d'hypothèse a priori.

Dans les mêmes notations, et compte tenu de l'incompressibilité du fluide, l'équation de continuité prend la forme suivante :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rw) = 0 \quad (10.5)$$

$$I = \frac{f}{t_0} = \frac{W_0}{A_p} I \quad (10.12)$$

Les vitesses adimensionnelles sont alors déduites des définitions suivantes, imposées par cohérence :

$$W' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{1}{W_0} \frac{dx}{dt} = \frac{w}{W_0}$$

$$u' = \frac{dr'}{dt'} = \frac{1}{W_0} \frac{dr}{dt} = \frac{u}{W_0} \quad (10.13)$$

$$v' = r' \frac{d\theta'}{dt'} = \frac{r}{W_0} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\kappa_0}{W_0} \frac{v}{V} \quad (10.14)$$

Les gradients de pression apparaîtront essentiellement dans le sens longitudinal, ce qui justifie la définition de la pression adimensionnelle :

$$p' = \frac{P}{\rho A_0^2} \quad (10.15)$$

Enfin, les contraintes rhéologiques adimensionnelles suivront les définitions suivantes :

$$\sigma'_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{\rho A_0^2} \quad (10.16)$$

$$\sigma'_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\rho V_0^2} \quad (10.17)$$

$$\sigma'_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{\rho V_0^2} \quad (10.18)$$

$$\sigma'_{rz} = \frac{\sigma_{rz}}{\rho V_0^2} \quad (10.19)$$

$$\sigma'_{\theta z} = \frac{\sigma_{\theta z}}{\rho V_0^2} \quad (10.20)$$

$$\sigma'_{\theta r} = \frac{\sigma_{\theta r}}{\rho V_0^2} \quad (10.21)$$

$$\sigma'_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\rho V_0^2} \quad (10.22)$$

Nous introduisons ces grandeurs dans les équations hydrauliques fondamentales (10.2), (10.3), (10.4) et (10.5), en tenant compte du fait que les dérivées totales des vitesses par rapport au temps qui y apparaissent peuvent aisément être remplacées par des dérivées partielles grâce à l'opérateur suivant :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + r \frac{\partial}{\partial \theta} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (10.23)$$

Si on multiplie ou divise ensuite les équations par les termes dimensionnels restants, on obtient les formes adimensionnelles suivantes des équations :

- Equilibre radial.

$$\varepsilon_r^2 \frac{\partial w'}{\partial r} + \varepsilon_r^3 u' \frac{\partial w'}{\partial r} + \varepsilon_r^2 w' \frac{\partial w'}{\partial \theta} - \varepsilon_r^2 \frac{\partial v'}{\partial r} - \varepsilon_r^2 \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \varepsilon_r^2 \frac{\partial \sigma'_{rr}}{\partial r} + \varepsilon_r^2 \frac{\partial \sigma'_{\theta\theta}}{\partial r} - \varepsilon_r^2 \frac{\partial \sigma'_{rz}}{\partial r} = 0 \quad (10.24)$$

- Equilibre circonférentiel

$$\varepsilon_r^2 \frac{\partial v'}{\partial r} + \varepsilon_r^3 u' \frac{\partial v'}{\partial r} + \varepsilon_r^2 w' \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \varepsilon_r^2 \frac{\partial v'}{\partial z} - \varepsilon_r^2 \frac{\partial \sigma'_{rr}}{\partial \theta} + \varepsilon_r^2 \frac{\partial \sigma'_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \varepsilon_r^2 \frac{\partial \sigma'_{rz}}{\partial \theta} = - \frac{1}{r'} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \varepsilon_r \varepsilon_\theta \frac{\partial \sigma'_{rz}}{\partial \theta} + \varepsilon_r \varepsilon_\theta \frac{\partial \sigma'_{\theta\theta}}{\partial z} \quad (10.25)$$

- Equilibre longitudinal

$$\frac{\partial w'}{\partial r} + \varepsilon_r^2 u' \frac{\partial w'}{\partial r} + \varepsilon_r^2 w' \frac{\partial w'}{\partial \theta} + \varepsilon_r^2 \frac{\partial w'}{\partial z} = - \frac{1}{r'} \frac{\partial p'}{\partial z} + \varepsilon_r \varepsilon_\theta \frac{\partial \sigma'_{rz}}{\partial z} + \varepsilon_r \varepsilon_\theta \frac{\partial \sigma'_{\theta\theta}}{\partial r} \quad (10.26)$$

- Équation de continuité

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial r'}{\partial \theta} + \frac{1}{r'} \frac{\partial w'}{\partial \theta} + w' \frac{\partial w'}{\partial z} - \varepsilon_r^2 \frac{\partial^2 v'}{\partial r^2} - \frac{1}{r'} \frac{\partial p'}{\partial r} + \varepsilon_r \frac{\partial \sigma'_{rz}}{\partial r} + \varepsilon_r \frac{\partial \sigma'_{\theta\theta}}{\partial z} + \varepsilon_r^2 \frac{\partial \sigma'_{zz}}{\partial r} = 0 \quad (10.27)$$

L'observation de cette forme de système montre comment nous allons procéder pour ramener notre problème de trois à une dimension.

Nous supposons que les facteurs ε_r^2 , ε_r^3 et $\varepsilon_r \varepsilon_\theta$ sont faibles vis-à-vis de l'unité. Cela revient donc à considérer que les rapports entre les vitesses dans les directions radiale ou circonférentielle et la vitesse dans le sens longitudinal sont petits vis-à-vis de l'unité. La présence du carré rend cette hypothèse acceptable. Néanmoins, dans des zones à forte courbure, l'arc aérique en est un exemple typique, où à l'éaval de bifurcation, on pourrait s'étendre en discussion. Nous nous autoriserons donc à négliger les termes multipliés par les ε_r^2 , ε_r^3 et $\varepsilon_r \varepsilon_\theta$ vis-à-vis des autres. Il est bien certain qu'en toute rigueur, l'ordre de grandeur des termes multipliés devraient être vérifiés à posteriori.

Les équations d'équilibre radial (10.24) et d'équilibre circonférentiel (10.25) se réduisent à :

- Equilibre radial

$$\frac{\partial p'}{\partial r} = 0 \quad (10.28)$$

- Equilibre circonférentiel

$$\frac{\partial p'}{\partial \theta} = 0 \quad (10.29)$$

Ces deux équations expriment que la pression est constante sur la section.

Par contre, les équations d'équilibre longitudinal et de continuité restent semblables. La forme prise maintenant par nos équations n'est pas encore unidimensionnelle mais on peut supposer que leur intégration sur la section permettra d'atteindre cet objectif. Ceci est l'objectif des paragraphes suivants.

10.1.2.3 Intégration des équations sur la section

Pour rendre cette intégration commode, une étape intermédiaire est indispensable. Elle consiste à transformer les équations d'équilibre longitudinal et de continuité de telle sorte que n'y apparaissent plus que des dérivées à coefficient constant. Pour l'équation de continuité (10.27), il suffit de la multiplier par r . Elle devient :

$$r' \frac{\partial r' w'}{\partial \theta} + \frac{\partial(r' w')}{\partial z'} + \frac{\partial(r' u')}{\partial z'} = 0 \quad (10.30)$$

Le traitement de l'équation d'équilibre longitudinal est plus complexe. Il faut en effet la remplacer par la combinaison linéaire suivante :

$$r' (10.26) + r' w' \quad (10.27)$$

Après association adroite des termes, on obtient la nouvelle équation d'équilibre longitudinal. $\frac{\partial(r' w')}{\partial r'} + \frac{\partial(r' w')}{\partial z'} + \frac{\partial(r' w^2)}{\partial \theta} = - \frac{\partial(r' p')}{\partial r'} + \frac{\partial(r' \sigma_{zz}')}{\partial z'} + \frac{\partial(r' \sigma_{\theta\theta}')}{\partial \theta} + \frac{e_0}{\kappa_r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} \quad (10.31)$

Nous pouvons maintenant intégrer ces deux équations sur la section. Pour ce faire, chaque terme est d'abord intégré sur le rayon puis selon l'angle θ , en gardant en mémoire que le rayon de l'antre est bien sur fonction de l'abscisse, du temps (du fait de la grande déformabilité), mais aussi de l'angle, les sections ayant a priori une forme quelconque.

Intégrer de cette manière suppose néanmoins que tous les points de la section peuvent être joints au point de percée de l'axe longitudinal par un segment qui ne soit pas de la section. Concrètement, les sections sont du type de celle illustrée à la du type donné à la Figure 10.4 :



Figure 10.3



Figure 10.4

La généralisation de la théorie qui suit à ces sections ne poserait pas de problème, mais alourdirait considérablement les écritures. Il faudrait néanmoins agir avec prudence car on peut se demander si en déformant les sections comme à la Figure 10.34, ne se créent pas de zones analogues aux zones mortes des îles majeurs de rivière en crue.

Si nous utilisons la notation R pour les rayons, et sous forme unidimensionnelle R' , défini conformément à (10.9) par :

$$R' = \frac{R}{R_0} \quad (10.32)$$

on peut écrire $R' = R'(r', z', \theta)$

Si par ailleurs, on fait l'usage de la formule de dérivée d'une intégrale et de la constance de la pression sur la section, les intégrations des équations (10.30) et (10.31) sur la section fournissent les relations suivantes :

$$-\text{Equation de continuité} \\ - \int_{\theta=0}^{2\pi} V_{r=r'} \frac{\partial R'}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial}{\partial z'} \int_{z'=0}^{R'} r' w' dr' d\theta' - \int_{z'=0}^{R'} (r' w')_{r=r'} \frac{\partial R'}{\partial z'} d\theta + \int_0^{2\pi} (r' w')_{r=r'} d\theta = 0 \quad (10.33)$$

- Equation dynamique

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial}{\partial z'} \int_{z'=0}^{R'} r' w' dr' d\theta' - \int_{z'=0}^{R'} (r' w')_{r=r'} \frac{\partial R'}{\partial z'} d\theta + \int_0^{2\pi} (r' w' w)_{r=r'} d\theta - \int_0^{2\pi} (w' w)_{r=r'} d\theta + \frac{\partial R'}{\partial \theta} + \\ & - \frac{\partial}{\partial z'} \int_{z'=0}^{R'} r' w'^2 dr' d\theta' - \int_{z'=0}^{R'} (r' w'^2)_{r=r'} \frac{\partial R'}{\partial z'} d\theta \\ & = - \frac{\partial p'}{\partial z'} \int_{z'=0}^{R'} \frac{K'^2}{2} d\theta' + \int_{z'=0}^{R'} (r' \sigma_{zz}')_{r=r'} d\theta' + \frac{\partial}{\partial z'} \int_{z'=0}^{R'} r' \sigma_z'^2 dr' d\theta' \\ & - \int_{z'=0}^{R'} R' \sigma_{zz,r=r'}' \frac{\partial R'}{\partial z'} d\theta - \frac{e_0}{\kappa_r} \int_{z'=0}^{R'} \sigma_{\theta\theta,r=r'}' \frac{\partial R'}{\partial \theta} d\theta \end{aligned} \quad (10.34)$$

Ces équations font apparaître les valeurs des vitesses à la paroi. Il est donc maintenant opportun d'analyser ce qui se passe à la jonction entre la paroi et le fluide.

10.1.2.4 Jonction paroi - fluide

Nous allons exploiter dans le cadre de notre problème, l'hypothèse de non décollement du fluide à la paroi. Nous supposons donc que le comportement rhéologique du sang est tel qu'il ne peut créer de tel décollement.

Le caractère quelconque de la forme de la section, ainsi que sa forte variabilité selon l'abscisse z' et le temps ne rendent pas son application immédiate.

Plus rien ne justifiant le traitement unidimensionnel, nous repassons maintenant en dimensionnel. Soient $r(t)$, $\theta(t)$ et $z(t)$ les composantes de la trajectoire d'une particule. La vitesse radiale s'exprime par :

$$u = \frac{dr(f)}{dt} \quad (10.35)$$

Si la particule est à la paroi, l'hypothèse considérée impose que le rayon $r(t)$ soit égal au rayon du conduit au même endroit, rayon que l'on calcule grâce aux autres composantes de la trajectoire $\theta(t)$ et $z(t)$ et au temps t . On peut donc écrire, pour une particule à la paroi :

$$r(t) = R(t, z(t), \theta(t)) \quad (10.36)$$

En remplaçant dans (10.35) la condition de non décollement induit donc :

$$u_{r,\theta} = \frac{dR(t)}{dt} \quad (10.37)$$

En explicitant la dérivée particulaire et compte tenu de :

$$\frac{dz(t)}{dt} = w_{r,\theta} \text{ et de } \frac{d(R(t))}{dt} = \frac{1}{R} v_{r,\theta} \quad (10.38)$$

On obtient :

$$u_{r,\theta} = \frac{\partial R(t)}{\partial t} + w_{r,\theta} \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{1}{R} v_{r,\theta} \frac{\partial R}{\partial \theta}$$

Nous utilisons cette relation pour faire disparaître dans les formes dimensionnelles de nos deux équations (10.33) et (10.34) les vitesses à la paroi. Introduisons par ailleurs la notation S pour la section et W pour la vitesse axiale moyenne sur la section :

$$S = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\theta \quad (10.39)$$

$$W = \frac{1}{S} \int_0^{2\pi} w_r r d\theta \quad (10.40)$$

Les deux équations sous forme dimensionnelle prennent alors les formes suivantes :

- Équation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial z} (WS) + \frac{\partial}{\partial t} S = 0 \quad (10.41)$$

- Équation dynamique

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (WS) + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{2\pi} r w^2 dr d\theta \\ = - \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \int_0^{2\pi} R \sigma_{r,\theta,z} d\theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{2\pi} r \sigma_r dr d\theta - \frac{1}{\rho} \int_0^{2\pi} R \sigma_{z,\theta,z} d\theta - \frac{1}{\rho} \int_0^{2\pi} r \sigma_z dr d\theta \end{aligned} \quad (10.42)$$

10.1.2.5 Frottement à la paroi

L'équation dynamique fait apparaître des contraintes rhéologiques au niveau de la paroi. Ces termes sont :

$$\frac{1}{\rho} \int_0^{2\pi} R \sigma_{r,\theta,z} d\theta - \frac{1}{\rho} \int_0^{2\pi} R \sigma_{z,\theta,z} d\theta - \frac{1}{\rho} \int_0^{2\pi} \sigma_{\theta,\theta,z} \frac{\partial R}{\partial \theta} d\theta \quad (10.43)$$

La forme prise par ces termes laisse supposer qu'ils sont liés au frottement du fluide à la paroi, probablement le frottement sur un élément de volume généré par l'intégration, soit donc une tranche de fluide coupée dans le sens perpendiculaire à l'axe longitudinal.

Pour éclaircir ceci, considérons l'élément de volume construit comme suit. A partir d'un point A, situé à la paroi (Figure 10.5) imposons une rotation $d\theta$ et un déplacement d'infinitésimaux. A rayon constant, on obtient les points B, C et D. A partir de ces 3 points, prolongeons les axes-rayons jusqu'à la paroi et définissons ainsi les points B', C' et D' où les rayons sont exprimés à partir du rayon en A.

Un volume élémentaire est ainsi créé entre ABCD et l'élément de la surface extérieure du fluide AB'D'C'. Classiquement, le frottement du fluide à la paroi, qui se manifeste ici sur la facette A'B'D'C', est en fait équilibré par les contraintes rhéologiques sur les autres faces du volume.

La figure ci-dessous reprend les contraintes rhéologiques sur les facettes, selon les conventions de sens habituelles.

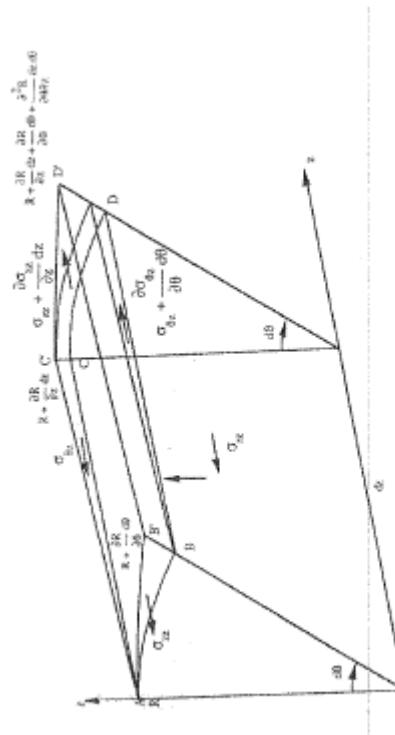


Figure 10.5

Considérons les contraintes selon l'axe z. La composante du frottement selon z est donc égale, au signe près, à la somme des forces générées par ces contraintes. Calculons cette somme de forces, en négligeant classiquement les termes d'ordre supérieur.

$$-\text{ effet de } \sigma_{\theta\theta} : \sigma_{\theta\theta} dz \frac{\partial P}{\partial \theta} d\theta \quad (10.44)$$

$$-\text{ effet de } \sigma_{rr} : -\sigma_{rr} dz \cdot R \cdot d\theta \quad (10.45)$$

$$-\text{ effet de } \sigma_{rz} : \sigma_{rz} \frac{\partial K}{\partial z} dz \cdot R \cdot d\theta \quad (10.46)$$

Si l'on intègre sur l'angle l'opposé de la somme de ces trois termes, on obtient ainsi l'expression du frottement à la paroi dans le sens longitudinal sur une tranche de fluidé de longueur dz . On peut alors aisément conclure que les termes de l'expression (10.43) peuvent s'écrire :

$$\frac{1-r^*}{\rho} \quad (10.47)$$

avec r^* le frottement à la paroi dans le sens longitudinal par unité de longueur.

Observons que le passage à un problème unidimensionnel avait en fait rendu sans influence les composantes du frottement dans les autres directions.

Le modèle que nous construisons, en étant fondé sur l'hypothèse d'écoulement laminaire, ne prend pas en compte l'effet d'éventuelles turbulences. Néanmoins, il est utile de signaler qu'une généralisation est possible à peu de frais, en incluant classiquement dans les équations fondamentales, des perturbations turbulentes entraînées. On pourrait montrer que s'ajouterait alors au terme de frottement que nous venons d'obtenir une perte de turbulence.

Ces turbulences étant en fait rares dans le système cardiaovasculaire, nous ne développerons pas ces considérations plus en détail ici. Nous notons simplement qu'une éventuelle perturbation turbulente pourra être prise en considération au travers du terme de frottement. Un dernier terme de l'équation (10.42) fait encore apparaître explicitement une contrainte rhéologique à nouveau selon z. Nous allons consacrer le paragraphe suivant à l'étude de ce terme.

10.1.2.6 Contraintes rhéologiques normales à la section

Le terme sus-mentionné, que nous appelons K , s'écrit :

$$K = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{r^*} \int_0^\pi r \sigma_{zz} dr d\theta \quad (10.48)$$

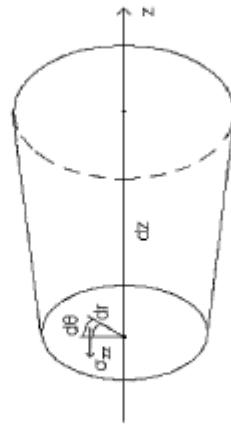


Figure 10.6 : Visualisation des contraintes rhéologiques normales à la section

La Figure 10.6 montre qu'il s'agit en fait, à l'inverse de la masse volumique près, de la résultante des contraintes rhéologiques normales à la section du tube, appliquées à une tranche élémentaire et exprimées par unité de longueur. La dérivée partielle par rapport à z englobe à la fois l'accroissement des contraintes et l'accroissement de section.

En rapprochant ceci des termes étudiés au paragraphe précédent, il est clair qu'apparaissent ainsi les derniers effets extérieurs longitudinaux appliqués à une tranche élémentaire. Ce terme pose néanmoins problème. En effet, nous souhaitons rendre le problème totalement unidimensionnel. Nous n'aurons donc plus la possibilité de déterminer le champ de contraintes rhéologiques normales sur toute la section. Pour trouver une issue à cette situation, nous allons essayer d'estimer l'importance de ce terme par rapport aux autres termes rhéologiques. Pour ce faire, nous allons être forcés d'utiliser une série d'hypothèses restrictives. Elles ont pour seul but de nous rendre apte à estimer un ordre de grandeur.

Nous allons utiliser un fluide newtonien. Dans ce cadre, la contrainte normale à la section s'écrit :

$$\sigma_{zz} = 2\rho v \frac{\partial w}{\partial z} \quad (10.49)$$

où v désigne la viscosité.

En remplaçant, K s'écrit alors :

$$K = 2v \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{r^*} \int_0^\pi r \frac{\partial w}{\partial z} dr d\theta \quad (10.50)$$

L'estimation de ce terme est compliquée par la présence sous l'intégrale de la dérivée de la vitesse. Il faudrait donc en connaître la répartition sur la section. Nous allons utiliser la simplification draconienne d'une vitesse constante sur la section. La dérivée de la vitesse peut alors être extraite de l'intégrale. K s'exprime ainsi par :

$$K = 2\nu \left[\frac{\partial w}{\partial z} \int_0^k r dr \right] = 2\nu \left[\frac{\partial w}{\partial z} \cdot S \right] \quad (10.51)$$

en appelant S la section de la conduite.

Supposons maintenant que la solution de notre problème soit simple et se ramène à une forme sinusoïdale (m et k étant deux coefficients) :

$$W = W_0 \cos(mr - kz) \quad (10.52)$$

La section S est, elle, variable avec l'abscisse et se déforme dans le temps. Postulons que la solution du problème soit telle qu'elle suive une loi similaire à la vitesse, avec un éventuel déphasage :

$$S = S_0 + \Delta S \cos(mr - kz + \phi) \quad (10.53)$$

où S_0 est une valeur moyenne,

ΔS l'amplitude maximale de la variation,
 ϕ le déphasage.

L'injection de cette solution dans K permet de l'écrire sous la forme :

$$K = -2\nu W_0 \left[k^2 \cos(mr - kz) S - k^2 \Delta S \sin(mr - kz + \phi) \right] \quad (10.54)$$

Comparons ce terme aux autres termes médiologiques de (10.43), qui se ramènent au frottement à la paroi sous forme de l'expression (10.47).

Pour estimer le frottement du fluide à la paroi dans le sens longitudinal, considérons le cas, à nouveau fort restrictif, d'un fluide newtonien, circulant en régime laminaire et stationnaire dans une conduite rigide à section constante. Le terme (10.47) prend alors la valeur suivante :

$$\frac{r'}{\rho} = -8\pi\nu W \quad (10.55)$$

Et en remplaçant la vitesse par la solution (10.52) :

$$\frac{r'}{\rho} = -8\pi\nu W_0 \cos(mr - kz) \quad (10.56)$$

Nous devons donc comparer les ordres de grandeur des expressions (10.54) et (10.56). Si nous laissons tomber les variations dans le temps et l'espace, soit donc les sinus et cosinus, il nous faut comparer :

– pour K : $2\nu W k^2 S$ et $2\nu W k^2 \Delta S$

– pour le frottement à la paroi : $8\pi\nu W_0$.

La variation de section ne dépasse pas en général 20 %, nous ne conservons que le premier terme pour K, et en simplifiant les facteurs qui apparaissent dans les 2 expressions à comparer, nous sommes ramenés à :

– pour K : $k^2 S$

– pour le frottement à la paroi : 4π .

La question à élucider maintenant est « que vaut k dans la circulation sanguine ? ». L'observation des solutions (10.52) et (10.53) apprend que la célérité c des ondes s'exprime par :

$$c = \frac{m}{k} \quad (10.57)$$

D'autre part, la fréquence f est liée au coefficient m par :

$$m = 2\pi f \quad (10.60)$$

Par conséquent, k peut s'écrire :

$$k = \frac{2\pi f}{c} \quad (10.61)$$

Et en introduisant dans (10.57), après division par 4π , il faut comparer

$$\frac{\pi f^2}{c^2} S \quad (10.62)$$

qui est proportionnel à K, à l'unité.

Plaçons-nous dans le cas le plus défavorable, celui de l'aorte descendante, où la section est maximale et proche de $7 \cdot 10^{-4}$ m² et la célérité des ondes minimale et de l'ordre de 5 m/s. Pour la fréquence de base des pulsations cardiaques, soit environ 1,5 Hz, le terme défini par (10.62) prend la valeur de $2 \cdot 10^{-4}$ totalement négligeable vis-à-vis de l'unité. Dans les autres artères, la situation serait encore plus nette.

Dans l'aorte ascendante, il faut une fréquence de 10,7 Hz pour que le terme K soit de l'ordre de 1 % du frottement à la paroi, et une fréquence de 33,7 pour atteindre 10 %.

Rappelons que nous n'avons comparé que des valeurs maximales des termes. Rien ne dit qu'à certains instants particuliers d'un cycle et à certains endroits, le terme étudié ici ne prendra pas beaucoup plus d'importance par rapport au frottement latéral qu'il n'en a en moyenne. Néanmoins, sur base du raisonnement qui précède, nous nous autorisons à négliger dans l'équation dynamique (10.42) le terme K par rapport aux termes de frottement du fluide à la paroi.

10.1.2.7 Intégration du paramètre d'inégale répartition de la vitesse

Si l'on se reporte aux équations (10.41) et (10.42), un seul terme gêne encore la transformation du problème en une forme totalement unidimensionnelle, celui où apparaît l'intégrale sur la section du carré de la vitesse.

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^{r_c} \int_0^{\pi} r v^2 dr d\theta \quad (10.63)$$

Il ne peut être remplacé simplement en termes de la vitesse moyenne W et de la section S . L'idée va être d'introduire néanmoins ces deux variables, en transformant ce qui n'est pas remplaçable en un facteur dimensionnel. La dimension du terme dans la dérivée est, selon les conventions habituelles, L^{-1} . On peut donc le rendre adimensionnel en le divisant par le produit de la section et du carré de la vitesse moyenne.

Nous définissons un facteur sans dimension φ comme suit :

$$\varphi = \frac{1}{W^2 S} \int_0^{r_c} \int_0^{\pi} r v^2 dr d\theta \quad (10.64)$$

Le terme (10.63) s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial z} (W^2 S \varphi) \quad (10.65)$$

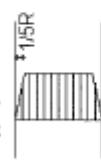
Le facteur φ n'est en fait fonction que de la forme de la section et de la forme du diagramme des vitesses dans la section. Il ne dépend ni de l'amplitude des vitesses, ni de la grandeur de la section. Il apparaît comme le rapport entre la moyenne sur la section du carré de la vitesse et le carré de la vitesse moyenne.

Voyons les valeurs prises par φ pour quelques sections et profils de vitesse classiques. Considérons tout d'abord un écoulement axisymétrique dans une section circulaire. On peut aisément calculer les valeurs de φ dans différents cas.

Profil de vitesse plat : $\varphi = 1$	Profil de vitesse parabolique : $\varphi \approx 1.333$
Profil cosinusoidal : $\varphi = 1.389$	Profil triangulaire : $\varphi = 1.5$

Nous avons vu que dans les petites artères et les artéoles, les profils de vitesse s'approchaient de profils paraboliques. Par contre dans les grosses artères, ils sont beaucoup plus plats.

Pour des profils de vitesse de type plat :



$$\varphi = 1.14$$



La pulsation induira parfois des profils où le maximum de vitesse est proche de la paroi. Analysons par exemple le cas suivant :

Si la zone de vitesse variable est encore réduite, le profil tend vers le profil plat et φ vers l'unité.

o étant le rapport entre la vitesse dans la partie centrale et la vitesse maximale près de la paroi, on calcule aisément les valeurs suivantes :

a	φ	$\frac{a}{1-\varphi}$
1	1.14	0.377
0.8	1.11	0.1
0.6	1.11	-0.2
0.4	1.17	-1
0.2	1.53	-5

Remarquons que des valeurs négatives de a signifient que la vitesse à la paroi et la vitesse au centre sont de sens opposé.

De ces quelques exemples, on peut tirer les conclusions suivantes, φ dépend intimement de la forme du diagramme de la vitesse : lorsqu'il s'uniformise, φ tend vers l'unité, lorsqu'il s'écarte d'un diagramme plat, φ grandit.

C'est pour cette raison que nous appelons φ facteur d'inégale répartition de la vitesse, tout en gardant bien en mémoire qu'il est influencé par la forme géométrique de la section. Nous avons pu toutefois observer qu'il ne dépend pas des dimensions de la conduite.

Toutefois, signalons déjà qu'en régime pulsé, les profils changent de forme parfois significativement pendant un cycle cardiaque, et ce autour des allures que nous venons d'étudier. Par conséquent, dans une antérieure, le paramètre φ varie à priori, à la fois dans le temps et dans l'espace. Or la volonté de rendre le problème unidimensionnel ne nous permettra plus de le calculer. C'est pourquoi nous allons nous autoriser à donner à ce facteur le statut de paramètre dans notre modèle. Sa valeur sera donc fixée par l'utilisateur.

Signalons simplement ici que la majorité des diagrammes de vitesse qui seront rencontrés auront des formes situées entre 1 et 1.33. En pratique, on utilisera donc des valeurs situées dans cette fourchette.

En conclusion, les équations fondamentales (10.41) et (10.42) sont devenues, suite aux considérations des paragraphes précédents :

$$-\text{Équation de continuité : } \frac{\partial}{\partial z} (W'S) + \frac{\partial}{\partial r} S = 0 \quad (10.66)$$

$$-\text{Équation dynamique : } \frac{\partial}{\partial r} (W'S) + \frac{\partial}{\partial z} (W^2 S \varphi) = -\frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{r'}{\rho} \quad (10.67)$$

Où S est la section définie par (10.39),

W la vitesse longitudinale moyenne sur la section définie par (10.40),
 r' le frottement à la paroi par unité de longueur,
 φ le facteur d'inégale répartition de la vitesse que nous venons d'expliquer.

10.1.2.8 Introduction de l'effet de la pesanteur

Avant d'aller plus loin dans les développements, nous allons lever la simplification initiale qui a consisté à ne pas tenir compte des effets des forces de pesanteur sur l'écoulement. Pour ce faire, il y a en fait lieu d'introduire dans la liste des efforts extérieurs des équations dynamiques fondamentales (10.2), (10.3) et (10.4), soit donc dans leur second membre, respectivement les composantes radiale R_0 , circumférentielle θ_0 et axiale Z_0 de la force de pesanteur qui s'applique au fluide, par unité de volume.

Attachons nous à expliciter ces composantes. Considérons une conduite donnée (Figure 10.7). Plissons nous sans une section quelconque. L'axe de la conduite y est incliné d'un angle θ sur l'horizontale. Soit A un élément de fluide, de volume élémentaire dV dans celle section.

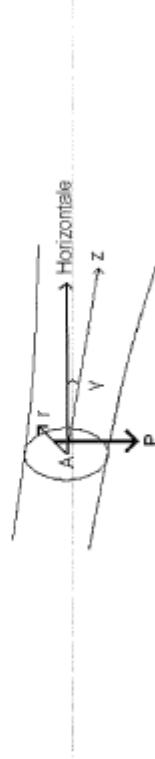


Figure 10.7

Le poids P (à ne pas confondre avec la pression p) de la particule vaut :

$$P = \rho g dV \quad (10.68)$$

Il se décompose en sa composante longitudinale P_z et sa projection sur la droite de plus grande pente ($d.d.p.g.p$) de la section P, (Figure 10.8).

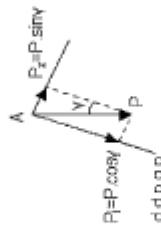


Figure 10.8

Dans le plan de la section, P_z peut alors être scindé en une composante radiale P_r et une composante circumférentielle P_θ . En choisissant de compter les angles dans la section à partir de l'horizontale, ces composantes sont explicitées à la Figure 10.9.

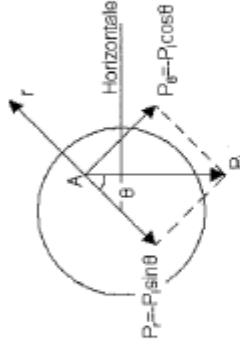


Figure 10.9

Par conséquent, les composantes R_0 , θ_0 et Z_0 cherchées s'écrivent :

$$R_0 = \frac{P_z}{dV} = -\rho g \cos r \sin \theta \quad (10.69)$$

$$\theta_0 = \frac{P_\theta}{dV} = -\rho g \cos r \cos \theta \quad (10.70)$$

$$Z_0 = \frac{P_r}{dV} = -\rho g \sin r \quad (10.71)$$

Ces termes sont respectivement ajoutés aux membres de droite des équations (10.2), (10.3) et (10.4). Associons-les aux termes de pression. On obtient, pour chacune des équations :

$$\text{Pour l'équation d'équilibre radial : } \frac{\partial P}{\partial r} = \rho g \cos \gamma \sin \theta \quad (10.72)$$

$$\text{Pour l'équation d'équilibre circumférentiel : } \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = \rho g \cos \gamma \cos \theta \quad (10.73)$$

$$\text{Pour l'équation d'équilibre longitudinal : } -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g \sin \gamma \quad (10.74)$$

Nous allons maintenant introduire l'altitude du point A, par rapport à une référence donnée. Appelons-la h. Il est immédiat de relier h au coordonnées radiales et circumférentielles de A. En désignant h_0 l'altitude du point de percée de l'axe longitudinal dans la section, on peut écrire :

$$h = h_0 + r \cos \gamma \sin \theta \quad (10.75)$$

dont on déduit :

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \cos \gamma \sin \theta \quad (10.76)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = r \cos \gamma \cos \theta \quad (10.77)$$

Par ailleurs, l'observation de la Figure 10.7 montre que :

$$\frac{\partial h}{\partial z} = -\sin \gamma \quad (10.78)$$

Introduisons ces dérivées dans les relations (10.72), (10.73) et (10.74). Elles deviennent :

$$\frac{\partial P}{\partial r} - \rho g \cos \gamma \sin \theta = -\frac{\partial H}{\partial r} \quad (10.79)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} - \rho g \cos \gamma \cos \theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta} \quad (10.80)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g \sin \gamma = -\frac{\partial H}{\partial z} \quad (10.81)$$

en appelant H la charge définie classiquement par :

$$H = p + \rho g h \quad (10.82)$$

Par conséquent, pour introduire l'effet de la pesanteur sur l'écoulement, il suffit de remplacer dans les équations hydrauliques fondamentales, puis dans tout le raisonnement réalisé jusqu'ici, la pression par la charge.

On obtiendra ainsi, en corrigeant les équations (10.65) et (10.67) les relations fondamentales suivantes :

$$-\frac{\partial}{\partial z} (WS) + \frac{\partial}{\partial r} S = 0 \quad (10.83)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (WS) + \frac{\partial}{\partial z} (W^2 S \varphi) = -\frac{S}{\rho} \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{r'}{\rho} \quad (10.84)$$

En particulier, l'analyse dimensionnelle du point 7.1.2.2 montre maintenant que la charge est constante dans la section, et non plus la pression, qui elle conformément à (10.82) y varie selon l'altitude du point considéré. Dans l'utilisation de ces équations, il faudra rester attentif à cette remarque.

10.1.2.9 Comportement de la paroi

Si l'on peut explicitier le frottement, les deux équations (10.83) et (10.84) que nous avons construites relient en fait, outre le paramètre φ , trois variables indépendantes : la section S, la vitesse W et la charge H et deux variables indépendantes, l'abscisse z et le temps. Une troisième équation est donc indispensable, et cela est bien normal puisque rien n'a encore été fixé au sujet de la paroi de l'arrière qui enferme l'écoulement.

Nous allons simplement supposer que la section est une fonction de la pression (comportement mécanique) et de l'abscisse (géométrique). Cette relation est a priori connue mais quelconque dans nos développements. De cette façon, nous ne nous enfermons pas dans un modèle géométrique ou mécanique classique. Observons néanmoins que l'hypothèse que nous faisons est en soi un modèle. Il pourrait être généralisé par l'influence du temps par exemple ou de la pression transmuraire.

Nous posons donc la relation suivante :

$$S = S(p, z) \quad (10.85)$$

Notons que c'est la pression qu'il faut logiquement considérer et bien sûr pas la charge.

Or, compte tenu de ce que nous venons de voir au chapitre précédent, il existe une ambiguïté sur la pression dans la section, puisque sous l'effet de la pesanteur, elle est variable selon l'altitude.

En pratique cardiovaskulaire, cette variation est faible. Considérons une conduite de 1 cm de diamètre placée à l'horizontal. La différence de pression entre la partie supérieure et la partie inférieure sera de 0,09 kPa. Cette nuance n'est en pratique pas décalable par la plupart des appareils de mesure classiques. Ceci est particulièrement vrai si la pression est mesurée par l'intermédiaire d'un cathéter intra-vasculaire, dont la position précise dans la section n'est en général pas connue et dont de plus, la précision en régime instationnaire est fort difficile à estimer.

Les relations de type (10.85) qui seront utilisées, et qui seront par exemple issues de l'expérience, ne pourront donc prendre en compte qu'une pression « moyenne » ou de référence. En général, il s'agira de ce que l'appareil de mesure aura bien voulu fournir.

Pour être rigoureux, nous dirons donc ici que la pression considérée dans la relation (10.85) est la pression en un point caractéristique de la section. Notons donc, que les notations p, que nous conservons pour ne pas accabler les écritures, change de statut par rapport à ce qu'il a été jusqu'à présent.

Supposons le point caractéristique défini dans chacune des sections et suivant une courbe qui serpente donc dans l'antière. La pression p peut alors être exprimée en termes des seules variables indépendantes z et t . (10.85) devient alors :

$$S = S(p|z, t), \quad (10.86)$$

Cette relation va permettre de remplacer dans les équations (10.83) et (10.84) les dérivées de la section par rapport aux variables indépendantes. En effet, la dérivée partielle par rapport au temps qui y apparaît, peut être écrite :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (10.87)$$

Quant à la dérivée de la section par rapport à z , qui est en fait une dérivée à temps constant, on peut l'écrire, à nouveau grâce à (10.86) :

$$\frac{\partial S}{\partial z} = \left. \frac{\partial S}{\partial p} \right|_z \frac{\partial p}{\partial z} + \left. \frac{\partial S}{\partial t} \right|_z, \quad (10.88)$$

Les expressions des dérivées de la section selon p et z qui apparaissent dans les seconds membres sont connues puisque la relation (10.85) est connue (elle doit donc avoir des propriétés de dérivableité, tout comme d'ailleurs la pression p aux points caractéristiques.) Tous ces termes sont des fonctions de p et de z . Introduisons (10.87) et (10.88) dans l'équation de continuité (10.83).

D'autre part, rappelons que la célérité des ondes dans un tube déformable parcouru par un fluide parfait est dans nombre de modèles définie par la relation :

$$c^2 = \frac{S}{\rho \left. \frac{\partial S}{\partial p} \right|_z}, \quad (10.89)$$

Afin d'alléger les équations, introduisons cette notation, sachant bien que rien ne dit qu'il s'agit de la célérité des ondes : nous utilisons ici simplement une simplification d'écriture. (10.83) devient alors :

$$\frac{S}{\rho c^2} \left(W \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial t} \right) + S \frac{\partial W}{\partial z} + W \left. \frac{\partial S}{\partial z} \right|_p = 0 \quad (10.90)$$

En ce qui concerne l'équation dynamique (10.84), commençons par l'expliciter comme suit :

$$S \frac{\partial W}{\partial t} + W \frac{\partial S}{\partial t} + WS \frac{\partial}{\partial z} (W\varphi) + W\varphi \frac{\partial}{\partial z} (WS) = - \frac{S}{\rho} \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\tau'}{\rho}, \quad (10.91)$$

On peut observer qu'elle s'allègera si on remplace la dérivée selon z du produit WS grâce à l'équation de continuité sous sa forme (10.83). Si l'on tient alors compte de (10.87), (10.88) et (10.89), l'équation dynamique devient, après division par la section :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{\rho c^2} W(1-\varphi) \frac{\partial p}{\partial t} + W \frac{\partial}{\partial z} (W\varphi) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\tau'}{\rho S} \quad (10.92)$$

Dans le système d'équations ainsi construit cohabitent la pression, au sens que nous venons de redéfinir et la charge dans la section. Elles sont bien évidemment liées par l'altitude des points caractéristiques. Pour rendre pratique l'utilisation des équations, il est souhaitable de faire disparaître une des deux variables. Cela peut se faire par le jeu de relations suivant :

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \frac{\partial h}{\partial z} \quad (10.93)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho g \frac{\partial h}{\partial t} \quad (10.94)$$

où, tout comme la pression, h est devenue l'altitude des points caractéristiques.

Il faut être conscient qu'en pratiquant le respect précis de cette considération est illusoire, puisque les points caractéristiques seront souvent mal définis. Puisque la pression apparaît dans nos équations plus souvent que la charge, il est clair que son remplacement introduirait plus de termes nouveaux. De plus, pour le calcul des expressions où intervient la section, il faudrait soit repasser à la pression, soit les exprimer à partir de la charge, ce qui compliquerait encore fortement les équations. Enfin, les données de la littérature sont toujours exprimées sur base de pressions. Par conséquent, nous décidons d'exprimer les équations du modèle en terme de la pression.

10.1.2.10 Équations fondamentales du modèle

Synthétisons les éléments essentiels des équations construites.

En définissant :

$$\tau = \frac{\tau'}{\rho S} \quad (10.95)$$

Les deux équations fondamentales du modèle sont :

$$\frac{S}{\rho c^2} \left(W \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial t} \right) + S \frac{\partial W}{\partial z} + W \left. \frac{\partial S}{\partial z} \right|_p = 0 \quad (10.96)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{\rho c^2} W(1-\varphi) \frac{\partial p}{\partial t} + W \frac{\partial}{\partial z} (W\varphi) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g \frac{\partial h}{\partial z} = \tau \quad (10.97)$$

Cette paire d'équations relie deux variables dépendantes, la "vitesse" longitudinale moyenne W et la pression p à deux variables indépendantes, l'abscisse z et le temps t .

La section S est une fonction connue de la forme :

$$S = S(p, z) \quad (10.98)$$

ANNEXE 10, MÉTHODE DES VOLUMES FINIS

La méthode des volumes finis consiste à construire des équations de la forme

$$\frac{\partial s_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial f^j}{\partial x} = 0$$

Où s_i sont les inconnues, f ce qu'on appelle le flux, et t et x les variables de temps et de position respectivement. Le principe global est le suivant

- Calculer la valeur au centre de gravité des éléments (tronçons)
- Déduire les valeurs aux autres points par une méthode de reconstruction au choix

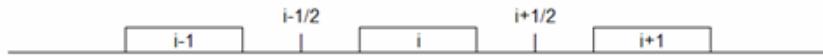


Figure 56 : Schéma de résolution de la méthode des volumes finis

En se plaçant au nœud i comme indiqué sur le schéma ci-dessus, on peut discrétiser la dérivée spatiale du flux de la manière suivante

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f^{i+\frac{1}{2}} - f^{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$

Il s'agit ensuite d'utiliser ce résultat dans l'équation à résoudre, pour obtenir

$$\Delta x_i \frac{\partial s_i}{\partial t} + \sum_j \left(f^{i+\frac{1}{2},j} - f^{i-\frac{1}{2},j} \right) = 0$$

Il reste alors à évaluer la variable temporelle,

$$\frac{\partial s_i}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x_i} \sum_j \left(f^{i+\frac{1}{2},j} - f^{i-\frac{1}{2},j} \right)$$

Finalement, il nous faut évaluer l'inconnue, ce que nous faisons en utilisant une méthode de reconstruction de type Runge Kutta.

Pour ce faire, il nous faut effectuer un double balayage, utilisant ainsi deux sous-pas, un dit prédicteur et l'autre dit correcteur, soit respectivement

$$s_i^x = s_i^t + \Delta t \frac{\partial s_i}{\partial t} \left(s_i^t \right) \text{ et } s_i^{xx} = s_i^t + \Delta t \frac{\partial s_i}{\partial t} \left(s_i^x \right)$$

Et on a alors au final

$$s_i^{t+1} = \frac{s_i^x + s_i^{xx}}{2}$$

ANNEXE 11, RECHERCHE DE LA VITESSE DANS L'ARTÈRE BRACHIALE

Comme nous l'avons évoqué dans le rapport, nous avons trouvé des profils du débit au sein de l'artère brachiale.

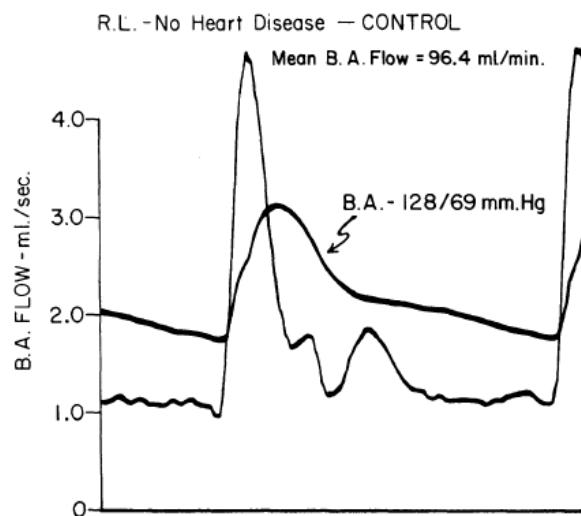


Figure 57 : Signal de débits dans l'artère brachiale

Nous avons relevé les valeurs numériques des débits, puis, à l'aide des programmes réalisés pour l'analyse élastique linéaire, nous avons évalué les vitesses par la relation

$$U = \frac{Q}{\Omega}$$

Où les débits correspondent aux débits relevés sur la figure ci-dessus, et où les sections sont évaluées en tout temps en fonction de la pression artérielle.

Au final, nous avons obtenu le profil de vitesses présenté dans le rapport.

ANNEXE 12, RECHERCHE DU NOMBRE DE COURANT

Nous avons le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} = -U \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho c^2}{\Omega} \frac{\partial(\Omega U)}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial(U^2)}{\partial z} = \tau \end{cases}$$

Pour rechercher les conditions relatives au nombre de Courant d'un tel système, il nous faut dans un premier temps linéariser celui-ci et en rechercher les valeurs propres, pour enfin, à l'aide de ces valeurs propres, déterminer la condition de Courant.

Le système linéarisé se présente comme ci-dessous

Erreur ! Des objets ne peuvent pas être créés à partir des codes de champs de mise en forme.

On peut exprimer ce système sous forme matricielle, ce qui nous donne

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} p \\ U \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & \rho c^2 \\ \frac{1}{\rho} & U \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} p \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\rho c^2 U}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \\ \tau \end{pmatrix}$$

Il nous faut enfin rechercher les valeurs propres de la matrice des coefficients, soit

$$\det \begin{pmatrix} U - \lambda & \rho c^2 \\ \frac{1}{\rho} & U - \lambda \end{pmatrix} = (U - \lambda)^2 - c^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = U \pm c$$

Au final, notre condition de Courant s'écrit

$$N_c = \frac{\lambda dt}{dx} < 1$$

$$= \begin{cases} \frac{|U + c|dt}{dx} \\ \frac{|U - c|dt}{dx} \end{cases} < 1$$

ANNEXE 13, PARAMÈTRES GÉOMÉTRIQUES DU BRASSARD

Le brassard de mesure de pression artérielle se présente comme ci-dessous



Figure 58 : Brassard de mesure de pression artérielle

Et il s'applique comme explicité à la figure suivante

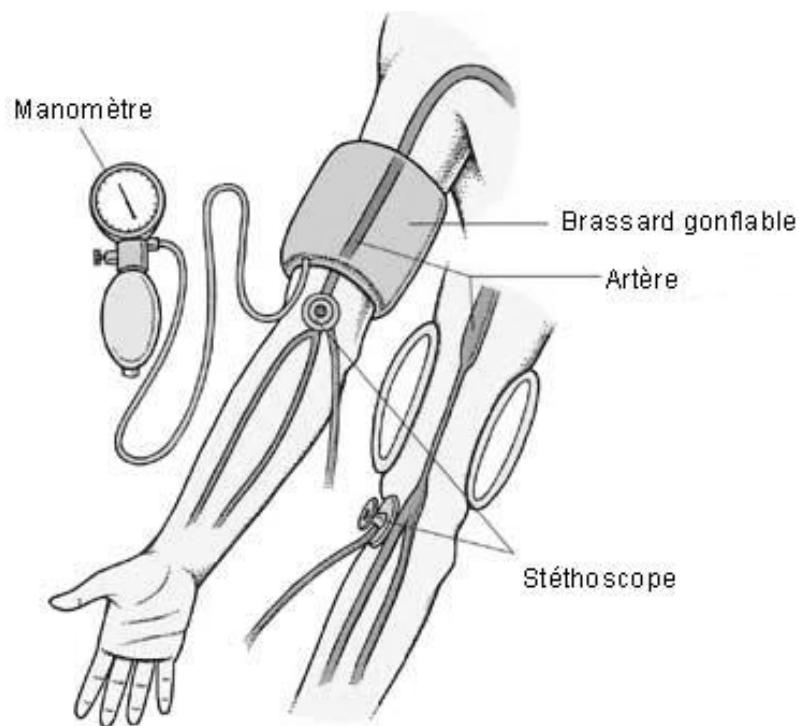
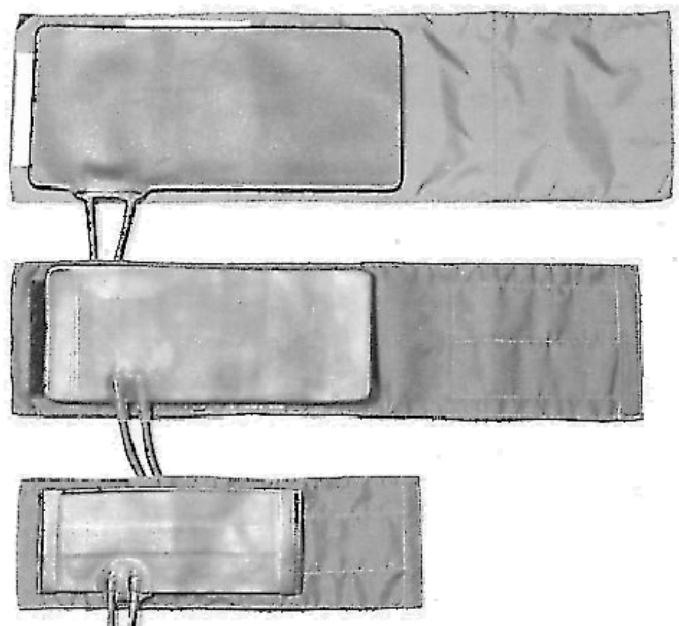


Figure 59 : Mise en place du brassard

⁶⁸ Image empruntée sur <http://www.infirmiers.com>

⁶⁹ Image empruntée sur <http://www.infirmiers.com>

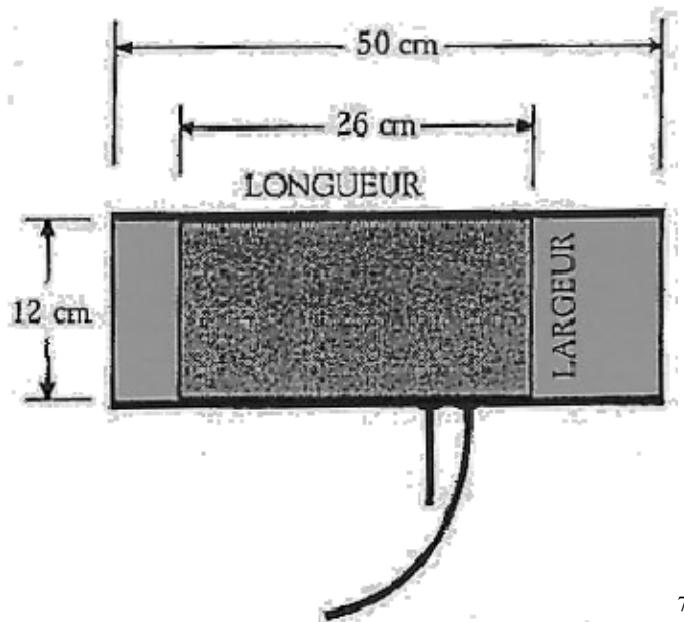
Il existe trois types de brassard, à utiliser suivant la géométrie du bras, soit



70

Figure 60 : Différents types de brassard

Le brassard le plus usité présente les dimensions suivantes



71

Figure 61 : Dimensions du brassard

⁷⁰ Image empruntée sur <http://medidacte.timone.univ-mrs.fr/>

⁷¹ Image empruntée sur <http://medidacte.timone.univ-mrs.fr/>

ANNEXE 14, ROUTINE VISUALBASIC

Comme nous l'avons cité à plusieurs reprises dans le rapport, nous avons réalisé une routine en VisualBasic, sous Excel, pour résoudre notre système d'équations par la méthode des volumes finis.

Nous présentons dans cette annexe l'intégralité du programme réalisé, programme dont l'interface est présentée dans le rapport, accompagnée de quelques précisions quant à son utilisation.

```
Option Explicit
```

'Constantes

```
Dim ro As Single      'Masse volumique de l'eau
Dim phi As Single     'Paramètre d'inégale répartition de la vitesse
Dim L_brassard As Single  'Longueur de bras où le brassard est appliqué
Dim L_ext_pré As Single   'Longueur de bras avant brassard
Dim L_ext_post As Single   'Longueur de bras après brassard
Dim L_tot As Single      'Longueur totale de bras étudiée
Dim tau_star As Single    'Frottement à la paroi
Dim dx As Single          'Pas spatial
Dim Ntrc As Integer      'Nombre de tronçons étudiés
Dim Ntrc_v() As Integer    'Vecteur du nombre tronçons
Dim alpha As Single        'Coefficient de Runge_Kutta
Dim Cmoy As Single         'Célérité moyenne au bord
Dim e, e1, e2, e3,emin As Single   'Erreur entre deux tours
```

'Flux

```
Dim flux_1() As Single    'p
Dim flux_2() As Double    'omega*u
Dim flux_3() As Double    'u^2
```

'Vecteurs

```
Dim p_ext() As Single     'Pression extérieure, f(t)
Dim S() As Double          'Section d'artère, f(t)
Dim DsDp() As Double       'Variation section/pression, f(t)
Dim c2() As Single         'Célérité², f(t)
Dim tau() As Double        'Coefficient de frottement, f(t)
```

'Dérivées temporelles

```
Dim dpdt() As Single
Dim dUDt() As Single
Dim dt As Double            'dt imposé par l'utilisateur
Dim dt_nc As Double         'dt calculé par le nombre de Courant
Dim nc As Single             'Nombre de Courant
Dim v1 As Single              'Caractéristique 1
```

```

Dim v2 As Single      'Caractéristique 2
Dim v As Single       'Caractéristique max
Dim vect_dt() As Double   'Vecteur des pas de temps

'Inconnues
Dim U() As Single     "Vitesse moyenne de l'écoulement, f(t)
Dim Ug() As Single    'à gauche du bord
Dim Ud() As Single    'à droite du bord
Dim Uc() As Single    'de calcul
Dim Umoy As Single    'moyenne au bord
Dim p() As Single      'Pression, f(t)
Dim pd() As Single     'à droite du bord
Dim pg() As Single     'à gauche du bord
Dim pc() As Single     'de calcul

'Indices de progression
Dim i,a,j,x,y,z,w As Integer
Dim nbetape As Integer  'nombre d'étapes dans la décomposition de pi
Dim l As Single         'Indice servant à parcourir les longueurs

Sub calcul()

'Acquisition des constantes
ro = Worksheets("Données").Cells(4, 4)
phi = Worksheets("Données").Cells(6, 4)
L_brassard = Worksheets("Données").Cells(8, 4)
l_ext_pré = Worksheets("Données").Cells(9, 4)
l_ext_post = Worksheets("Données").Cells(10, 4)
L_tot = L_brassard + l_ext_pré + l_ext_post
tau_star = Worksheets("Données").Cells(20, 4)
Worksheets("Données").Cells(11, 4) = L_tot
dx = Worksheets("Données").Cells(24, 4)
alpha = Worksheets("Données").Cells(28, 4)
dt = Worksheets("Données").Cells(22, 4)
nc = Worksheets("Données").Cells(19, 22)
emin = Worksheets("Données").Cells(23, 22)

'Recherche du nombre d'étapes
nbetape = 0
While Worksheets("Données").Cells(nbetape + 6, 8) <> 0
    nbetape = nbetape + 1
    Worksheets("Données").Cells(nbetape + 5, 6) = nbetape
Wend
Worksheets("Données").Cells(29, 22) = nbetape

'Recherche de la dimension des vecteurs
ReDim Ntrc_v(3)
Ntrc = 0
For i = 1 To 3

```

```

I = Worksheets("Données").Cells(7 + i, 4)

If Int(I / dx) < I / dx Then      'On veut plus de volumes finis que de tronçons Ntrc = Ntrc + Int(I / dx) +
1                                'réels, de manière
Else                               'à ce que les portions étudiées soient
    Ntrc = Ntrc + Int(I / dx)     'englobées de volumes finis
End If

Ntrc_v(i) = Ntrc                 'On place les valeurs des 3 tronçons dans un vecteur

Next i

Worksheets("Données").Cells(26, 4) = Ntrc

'Dimensionnement des vecteurs

ReDim p_ext(nbetape, 3)  'Connus
ReDim S(Ntrc + 1)
ReDim DsDp(Ntrc + 1)
ReDim c2(Ntrc + 1)
ReDim tau(Ntrc + 1)
ReDim Ug(Ntrc + 1)          'Inconnus
ReDim Ud(Ntrc + 1)
ReDim Uc(Ntrc + 1)
ReDim U(Ntrc, 3)
ReDim pg(Ntrc + 1)
ReDim pd(Ntrc + 1)
ReDim pc(Ntrc + 1)
ReDim p(Ntrc, 3)
ReDim flux_1(Ntrc + 1)      'Flux
ReDim flux_2(Ntrc + 1)
ReDim flux_3(Ntrc + 1)
ReDim flux_4(Ntrc + 1)
ReDim dpdt(Ntrc)            "Vecteurs de dérivées temporelles
ReDim dUdt(Ntrc)
ReDim vect_dt(Ntrc)

'Acquisition pression du brassard

For i = 1 To nbetape
    p_ext(i, 1) = 0
    p_ext(i, 2) = Worksheets("Données").Cells(i + 5, 16)
    p_ext(i, 3) = 0

Next i

'Boucle principale

For j = 1 To Ntrc
    p(j, 1) = 15998
    U(j, 1) = 0.2

Next j

x = 0
z = 1
e = 10

```

```

y = 0
"Itérations pour trouver les solutions à chaque pas de temps
While Abs(e) > emin
    y = y + 1
    Worksheets("Données").Cells(27, 22) = y      'Compteur d'itérations
    For w = 1 To 2          '1 tour pour hétoile et un pour h2étoiles
        'Construction vecteur gauche & droite
        For j = 2 To Ntrc
            pg(j) = p(j - 1, 1)
            pd(j) = p(j, 1)
            Ug(j) = U(j - 1, 1)
            Ud(j) = U(j, 1)
        Next j
        pg(1) = p(1, 1)
        pd(1) = p(1, 1)
        pg(Ntrc + 1) = p(Ntrc, 1)
        pd(Ntrc + 1) = p(Ntrc, 1)
        Ug(1) = U(1, 1)
        Ud(1) = U(1, 1)
        Ug(Ntrc + 1) = U(Ntrc, 1)
        Ud(Ntrc + 1) = U(Ntrc, 1)
        If Worksheets("Données").Cells(z + 5, 8) <> 0 Then
            pg(1) = Worksheets("Données").Cells(z + 5, 8)
            pd(1) = Worksheets("Données").Cells(z + 5, 8)
        End If
        If Worksheets("Données").Cells(z + 5, 12) <> 0 Then
            pd(Ntrc + 1) = Worksheets("Données").Cells(z + 5, 12)
        End If
        If Worksheets("Données").Cells(z + 5, 10) <> 0 Then
            Ug(1) = Worksheets("Données").Cells(z + 5, 18)
            Ud(1) = Worksheets("Données").Cells(z + 5, 18)
        End If
        If Worksheets("Données").Cells(z + 5, 14) <> 0 Then
            Ud(Ntrc + 1) = Worksheets("Données").Cells(z + 5, 14)
        End If
        'Recherche des pressions/vitesses de calcul par sens de propagation
        For j = 1 To Ntrc + 1
            If Worksheets("Données").Cells(13, 25) = 1 Then
                pc(j) = (pg(j) + pd(j)) / 2
            Elseif Worksheets("Données").Cells(13, 25) = 2 Then
                pc(j) = pg(j)
            Elseif Worksheets("Données").Cells(13, 25) = 3 Then
                pc(j) = pd(j)
        End If
    
```

```

If Worksheets("Données").Cells(16, 25) = 1 Then
    Uc(j) = (Ud(j) + Ug(j)) / 2
Elseif Worksheets("Données").Cells(16, 25) = 2 Then
    Uc(j) = Ug(j)
Elseif Worksheets("Données").Cells(16, 25) = 3 Then
    Uc(j) = Ud(j)
End If

Next j

'Evaluation des paramètres dépendant de la position (soit S, dSdP, c² et tau)

For j = 1 To Ntrc + 1      'Inscription de la pression artérielle de calcul
    Worksheets("Données_S").Cells(j + 4, 6) = pc(j)

Next j

For j = 1 To Ntrc + 1      'Suivant la position par rapport au brassard, il y a une      If j <= Ntrc_v(1) Then
'pression extérieure

'à considérer, fonction du temps (donc de z)
    Worksheets("Données_S").Cells(j + 4, 8) = p_ext(z, 1)
Elseif j <= Ntrc_v(2) Then
    Worksheets("Données_S").Cells(j + 4, 8) = p_ext(z, 2)
Elseif j <= Ntrc_v(3) Then
    Worksheets("Données_S").Cells(j + 4, 8) = p_ext(z, 3)
End If

Next j

For j = 1 To Ntrc + 1      'Récupération de S, dSdP, c² et tau dans la feuille de calcul
    S(j) = Worksheets("Calcul_S").Cells(3 + j, 16)
    DsDp(j) = Worksheets("Calcul_S").Cells(3 + j, 18)
    c2(j) = (1 / ro) * Worksheets("Calcul_S").Cells(3 + j, 20)
    tau(j) = tau_star / (S(j) * ro)

Next j

'Calcul des flux

For j = 1 To Ntrc + 1
    flux_1(j) = pc(j)
    flux_2(j) = S(j) * Uc(j)
    flux_3(j) = Uc(j) * Uc(j)

Next j

'Calcul des dérivées temporelles et des sous pas prédicteur et correcteur

For j = 1 To Ntrc
    dUDt(j) = -0.5 * (tau(j + 1) + tau(j)) + (1 / ro) * (flux_1(j + 1) - flux_1(j)) / dx + 0.5 * (flux_3(j + 1) - flux_3(j)) /
    / dx
    dpdt(j) = 0.5 * (Uc(j + 1) + Uc(j)) * (flux_1(j + 1) - flux_1(j)) / dx + ro * (c2(j + 1) + c2(j)) / (S(j + 1) + S(j)) *
    (flux_2(j + 1) - flux_2(j)) / dx

Next j

For j = 1 To Ntrc

'Calcul du pas de temps

If y = 1 Then

```

```

Cmoy = (0.5 * (c2(j + 1) + c2(j)))
Umoy = 0.5 * (Uc(j + 1) + Uc(j))
v1 = Abs(Umoy + Cmoy)
v2 = Abs(Umoy - Cmoy)
If v1 < v2 Then
    v = v2
Else
    v = v1
End If
dt_nc = dx * nc / v
vect_dt(j) = dt_nc
Worksheets("Données").Cells(21, 22) = dt_nc
ElseIf y > 1 Then
    dt_nc = vect_dt(j)
End If
If nc = 0 Then
    dt_nc = dt
End If
'Evaluation des inconnues
U(j, w + 1) = Uc(j) - (dUdt(j) * dt_nc)
p(j, w + 1) = pc(j) - (dpdt(j) * dt_nc)
Next j
Next w
'Reconstruction de p et U
For j = 1 To Ntrc
    p(j, 1) = (p(j, 2) + p(j, 3)) / 2
    U(j, 1) = (U(j, 2) + U(j, 3)) / 2
Next j
For j = 1 To Ntrc
    Worksheets("Résultats_p").Cells(z + 1, j + 1) = p(j, 1)
    Worksheets("Résultats_U").Cells(z + 1, j + 1) = U(j, 1)
Next j
a = 1
Worksheets("Résultats_z").Cells(1, 3) = a
Worksheets("Résultats_z").Cells(z + 1, 3) = p(a, 1)
a = Ntrc_v(1)
Worksheets("Résultats_z").Cells(1, 4) = a
Worksheets("Résultats_z").Cells(z + 1, 4) = p(a, 1)
a = Ntrc_v(2)
Worksheets("Résultats_z").Cells(1, 5) = a
Worksheets("Résultats_z").Cells(z + 1, 5) = p(a, 1)
a = Ntrc_v(3)
Worksheets("Résultats_z").Cells(1, 6) = a
Worksheets("Résultats_z").Cells(z + 1, 6) = p(a, 1)

```

```

Worksheets("Erreur").Cells(z + 3, 2) = p(1, 1)
Worksheets("Erreur").Cells(z + 3, 7) = p(Int(Ntrc / 2), 1)
Worksheets("Erreur").Cells(z + 3, 12) = p(Ntrc, 1)

z = z + 1
'Calcul des erreurs entre deux tours
If y Mod nbetape = 0 Then
    x = x + 1
    z = 1
    e1 = 0
    e2 = 0
    e3 = 0
    For j = 1 To nbetape
        e1 = e1 + Worksheets("Erreur").Cells(j + 3, 5)
        e2 = e2 + Worksheets("Erreur").Cells(j + 3, 10)
        e3 = e3 + Worksheets("Erreur").Cells(j + 3, 15)
        Worksheets("Erreur").Cells(j + 3, 3) = Worksheets("Erreur").Cells(j + 3, 2)
        Worksheets("Erreur").Cells(j + 3, 8) = Worksheets("Erreur").Cells(j + 3, 7)
        Worksheets("Erreur").Cells(j + 3, 13) = Worksheets("Erreur").Cells(j + 3, 12)
    Next j
    e1 = Abs(e1) / nbetape
    Worksheets("Données").Cells(33, 32) = e1
    e2 = Abs(e2) / nbetape
    Worksheets("Données").Cells(34, 32) = e2
    e3 = Abs(e3) / nbetape
    Worksheets("Données").Cells(35, 32) = e3
    If e1 > e2 Then
        e = e1
    Else: e = e2
    End If
    If e3 > e Then
        e = e3
    Else: e = e2
    End If
End If
Worksheets("Données").Cells(31, 22) = x
Worksheets("Données").Cells(25, 22) = e
Wend
End Sub

```

ANNEXE 15, TRAITEMENT DES DONNÉES

Nous avons construit un nouveau fichier Excel qui nous permet de traiter les données selon la méthode introduite dans le rapport.

Nous présentons dans cette annexe la macro réalisée à cet effet ainsi que quelques remarques quant à la présentation des résultats.

Dans un premier temps, une feuille Excel reprend les valeurs numériques de la pression aux points intéressants (début brassard, fin brassard et aval brassard), ceci pour les différents tests effectués. Ensuite, il nous reste à effectuer la prise virtuelle de pression pour les données reprises dans ces feuilles, ceci en exécutant la macro réalisée.

Enfin, nous pouvons à présent présenter la routine réalisée sous Excel

```
Option Explicit

Dim i,j As Integer           'Indices de progression
Dim X,Y As Integer          'Repérage position des futurs résultats dans la feuille de résultats
Dim nbetape As Integer
Dim plecture As Single       'Pression Iue
Dim pavalbras As Single      'Pression fin du brassard
Dim pavalind As Single       'Pression à l'aval du brassard

Sub recherche_c()
    For i = 1 To 40
        If Worksheets("Erreurs").Cells(i + 3, 9) = 1 Then
            X = Worksheets("Erreurs").Cells(i + 3, 10)      'vecteur position nous permettant d'utiliser le
            Y = i + 3                                     'même programme pour tous les tests, actualisant
            End If                                         'la place de destination des résultats
        Next i
        nbetape = 0
        While Worksheets("c petit").Cells(nbetape + 4, 2) <> 0
            nbetape = nbetape + 1                      'recherche de la dimension de la base de données
        Wend
        'Diminution de la pression du brassard, pression systolique
        For i = 1 To nbetape
            If Abs(Worksheets("c petit").Cells(i + 3, X + 4) > Worksheets("c petit").Cells(i + 3, X)) Then
                plecture = Worksheets("c petit").Cells(i + 3, X + 4)
                pavalbras = Worksheets("c petit").Cells(i + 3, X + 5)
                pavalind = Worksheets("c petit").Cells(i + 3, X + 6)
                j = i + 3
                Worksheets("Erreurs").Cells(Y + 1, 10) = plecture
                Worksheets("Erreurs").Cells(Y + 2, 10) = pavalbras
            End If
        Next i
    End Sub
```

```

Worksheets("Erreurs").Cells(Y + 3, 10) = pavalind
i = 1000
End If
Next i
Y = Y + 4
'Augmentation de la pression du brassard, pression diastolique
For i = 1 To nbetape
    If Abs(Worksheets("c petit").Cells(nbetape + 4 - i, X + 4) < Worksheets("c petit").Cells(nbetape + 4 - i, X))
        Then
            plecture = Worksheets("c petit").Cells(nbetape + 4 - i, X + 1)
            pavalbras = Worksheets("c petit").Cells(nbetape + 4 - i, X + 5)
            pavalind = Worksheets("c petit").Cells(nbetape + 4 - i, X + 6)
            j = nbetape + 4 - i
            Worksheets("Erreurs").Cells(Y + 1, 10) = plecture
            Worksheets("Erreurs").Cells(Y + 2, 10) = pavalbras
            Worksheets("Erreurs").Cells(Y + 3, 10) = pavalind
            i = 1000
        End If
    Next i
End Sub

```

BIBLIOGRAPHIE

OUVRAGES

- Collectif. 2006. *Larousse Médical 2006*.
- Green A.E., Zerna W.. 1968. *Theoretical Elasticity*. 2nd edition. London. Oxford University Press. Pp103-107.
- Tortora J., Grabowski S.R.. 2002. *Principes d'Anatomie et de physiologie*. 3^{ème} édition française. Bruxelles. De Boeck Université. Pp 646-780.

PUBLICATIONS

- Achab L., Benhadid S. 2004. *Application d'une loi constitutive dans l'étude numérique de l'écoulement sanguin à travers une artère sténosée*. Alger. Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumedienne.
- Bank A.J., Kaiser D.R., et al. 1999. *In vivo human brachial artery elastic mechanics: Effects of muscle relaxation*. Circulation Research – American Heart Association.
- Fry D.L., Mallos A.J., Casper G.T., et al. 1956. *A catheter tip method for measurement of the instantaneous Aortic blood velocity*. Dallas. Circulation Research – American Heart Association.
- Gabe I.T., Gault J.H. et al. 1969. *Measurement of instantaneous blood flow velocity and pressure in conscious man with a catheter-tip velocity probe*. Circulation Research – American Heart Association.
- Gault J.H., Ross J., et al. 1966. *Patterns of brachial arterial blood flow in conscious human subjects with and without cardiac dysfunction*. Circulation Research – American Heart Association.
- Silver F.H., Snowhill P.B., et al. 2002. *Mechanical behavior of vessel wall: A comparative study of aorta, vena cava, and carotid artery*. Circulation Research – American Heart Association.
- Vito R.P., Dixon S.A., et al. 2002. *Blood vessel constitutive*. Atlanta. Woodruff school of Mechanical Engineering, Georgia Institute of Technology.

NOTES DE COURS

- Cescotto S.. 1999. *Eléments de mécanique du solide déformable*. Liège. Centrale des cours de l'AEES.

- Cescotto S.. 2006. *Non linear finite Elements – Finite deformations of solids – General strategy for the solution of non linear problems*. Liège. Département M&S.
- Crépeau E.. 2006. *Modèle de Windkessel et solitons pour la pression sanguine*. Rocquencourt. UVSQ.
- Dumont N., Palumbo S., Serteyn C.. 2001. *Soins infirmiers de base*. Liège. Institut S^{te} Julienne.
- Pirotton M. 2006. *Introduction à l'hémodynamique vasculaire*. Liège. Département HACH.
- Pirotton M., Archambeau P., Detrembleur S., Dewals B., Erpicum S., Fraikin C.. 2006. *Hydraulique appliquée*. Liège. Département HACH.
- Ponthot J.P.. 2006. *Large deformations & non linear dynamic analysis by the finite element method*. Liège. Département LTAS.
- Tüzel V.H., Erbay H.A.. 2002. *The dynamic response of an incompressible non linearly elastic membrane tube subjected to a dynamic extension*. Maslak. Department of Mathematics, Faculty of Science and Letters, İŞIK University.
- Van Loocke M., Lyons C.G., Simms C.. 2004. *The 3-Dimensional mechanical properties of skeletal muscle : Experiments and modelling*. Dublin. Department of Mechanical and Manufacturing Engineering.
- Xie S.. 2005. *Blood Fluid Dynamics*. McMaster University. Department of chemical engineering.

THESES ET TRAVAUX DE FIN D'ETUDES

- Genisson J.-L.. 2003. *Le palpeur acoustique :Un nouvel outil d'investigation des tissus biologiques*. Paris. Thèse de doctorat.
- Ziortza G.C.. 2006. *Study of the hyperelastic transversely isotropic constitutive model for the modelling of the muscles skeletal*. Liège. Master thesis.

SITES INTERNET

- <http://neurosciences.univ-fcomte.fr>
- <http://imagerie-cv.univ-lyon1.fr/>
- <http://www.doctossimo.fr>
- <http://www.easygym.com/physiologie>

- <http://www.infirmiers.com>
- <http://www.liguecardiologue.com>
- <http://www.medecine-et-santé.com>
- <http://www.medecinet.com>
- <http://www.medicms.be>
- <http://www.meditacte.timone.univ-mrs.fr>
- <http://www.medscape.com>
- <http://www.netzwelt.de/lexikon>
- <http://www.poirpom.com>
- <http://www.theses.ulaval.com>
- <http://www.wikipedia.org>

TABLE DES ILLUSTRATIONS

Figure 1 : Circulation schématique du sang à travers le corps.....	15
Figure 2 : Représentation complète du cœur.....	16
Figure 3 : Vocabulaire relatif au coeur.....	17
Figure 4 : Circulation schématique du sang à travers le cœur (et le corps)	19
Figure 5 : Coupe dans une artère.....	22
Figure 6 : Coupe dans un capillaire.....	22
Figure 7 : Coupe dans une veine	23
Figure 8 : Coupe micro-angiographique RX d'un cœur	23
Figure 9 : Section transversale et vitesse de l'écoulement sanguin	24
Figure 10 : Section transversale du bras.....	39
Figure 11 : Coupe transversale simplifiée du bras	44
Figure 12 : Zoom sur la zone de contact à l'interface muscle-artère	45
Figure 13 : Etat de contraintes au niveau de l'artère	46
Figure 14 : Etat de contraintes au niveau du muscle.....	47
Figure 15 : Comparaison des modèles élastique linéaire et élastique non linéaire pour les déplacements radiaux, en état plan de déformations.....	63
Figure 16 : Comparaison des modèles élastique linéaire et élastique non linéaire pour la section artérielle, en état plan de déformations	63
Figure 17 : Evolution de la vitesse de propagation des ondes avec la pression artérielle.....	71
Figure 18 : Variation de pression utilisée pour vérifier le comportement de la célérité	73
Figure 19 : Variation de la célérité en fonction d'un certain signal de pression pour le modèle élastique non linéaire.....	73
Figure 20 : Variation de la célérité en fonction d'un certain signal de pression pour le modèle élastique linéaire.....	74
Figure 21 : Variation de la section en fonction de la pression pour les modèles élastique linéaire et élastique non linéaire.....	75
Figure 22 : Signal de pressions à l'amont du brassard.....	80
Figure 23 : Signal de vitesses à l'amont du brassard	80
Figure 24 : Paramètres du modèle de Casson	82

Figure 25 : Aperçu de l'interface du programme, paramètres constants	83
Figure 26 : Aperçu de l'interface du programme, paramètres aux bornes et pression dans le brassard.....	84
Figure 27 : Pression artérielle en fonction du temps, à différents pas spatiaux	85
Figure 28 : Pression artérielle en fonction de la position, à différents pas de temps	85
Figure 29 : Evolution des pressions aux endroits caractéristiques pour une diminution circonférentielle de 5.10^{-5} m.....	89
Figure 30 : Comparaison des signaux de pression à l'aval pour la pression de référence et pour une diminution de la circonférence de 15.10^{-5} m	90
Figure 31 : Comparaison des signaux de pression à la sortie du brassard pour la pression de référence et pour trois diminutions de la circonférence	90
Figure 32: Comparaison des signaux de pression à l'aval pour la pression de référence et pour trois diminutions de la circonférence	91
Figure 33 : Comparaison des signaux de pression à la sortie du brassard, pour un brassard de référence et un brassard trop long	92
Figure 34 : Comparaison des signaux de pression à l'aval du brassard, pour un brassard de référence et un brassard trop long	92
Figure 35 : Comparaison des signaux de pression à l'aval du brassard, pour un bras de référence et un bras plus musclé	93
Figure 36 : Erreurs mesurées entre les deux signaux de pression correspondant respectivement à un bras standard et à un bras trop musclé	93
Figure 37 : Comparaison des signaux de pression à l'aval du brassard, pour un bras de référence et un bras plus musclé – Zoom	94
Figure 38 : Réseau artériel	101
Figure 39 : Réseau veineux	102
Figure 40 : Réseau d'artères au sein du bras	103
Figure 41 : Structure d'un muscle squelettique tel le muscle brachial.....	109
Figure 42 : Structure détaillée du muscle brachial	109
Figure 43 : Coupe dans une artère.....	110
Figure 44 : Diagramme σ/ϵ d'un matériau	111

Figure 45 : Géométrie d'un cylindre épais sous pression	113
Figure 46 : Variation simultanée des pressions dans le brassard et dans l'artère	119
Figure 47 : Variation des pressions dans le brassard et dans l'artère – Modélisation numérique sous Excel.....	120
Figure 48 : Evolution des déplacements en état plan de déformations pour le modèle élastique linéaire.....	121
Figure 49 : Evolution de la section artérielle en état plan de déformations pour le modèle élastique linéaire.....	121
Figure 50 : Evolution de la pression de contact en état plan de déformations pour le modèle élastique linéaire.....	122
Figure 51 : Déformations et tenseurs correspondants	123
Figure 52 : Tenseur des gradients de déformation F	125
Figure 53 : Configurations initiale et déformée en coordonnées cylindriques	127
Figure 54 : Evolution des déplacements en état plan de déformations pour le modèle élastique non linéaire	149
Figure 55 : Evolution de la section artérielle en état plan de déformations pour le modèle élastique non linéaire.....	149
Figure 56 : Schéma de résolution de la méthode des volumes finis	166
Figure 57 : Signal de débits dans l'artère brachiale	167
Figure 58 : Brassard de mesure de pression artérielle.....	169
Figure 59 : Mise en place du brassard.....	169
Figure 60 : Différents types de brassard.....	170
Figure 61 : Dimensions du brassard.....	170

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS.....	3
PLAN.....	5
INTRODUCTION GÉNÉRALE.....	8
PREMIÈRE PARTIE, PRÉREQUIS MÉDICAUX	11
INTRODUCTION	12
1. QUELQUES NOTIONS D'ANATOMIE ET DE PHYSIOLOGIE.....	13
1.1 Le sang, la circulation sanguine	13
1.2 Le cœur, pompe du système	16
1.2.1 <i>Anatomie du coeur</i>	16
1.2.2 <i>Mécanisme de pompe</i>	18
1.2.3 <i>Débit et autres informations annexes</i>	20
1.3 Les vaisseaux sanguins.....	21
2. LA PRESSION ARTÉRIELLE.....	25
2.1 Notions de pression	26
2.2 Effets dissipatifs	27
2.3 Contrôle et régulation.....	28
3. POURQUOI ÉTUDIER LA PRESSION ARTÉRIELLE	29
Introduction	29
3.1 L'hypotension artérielle	29
3.2 L'hypertension	30
3.2.1 <i>Le phénomène</i>	30
3.2.2 <i>Dangers de l'hypertension</i>	31
4. COMMENT ÉTUDIER LA PRESSION ARTÉRIELLE	33
4.1 Méthodes actuelles de mesure.....	33

4.2	Problématique des méthodes actuelles	35
CONCLUSIONS	36	
<u>INTERMÈDE</u>	<u>37</u>	
<u>DEUXIÈME PARTIE, MÉCANIQUE DU MUSCLE ET DE L'ARTÈRE</u>		<u>41</u>
INTRODUCTION	42	
1. ANALYSE ELASTIQUE LINÉAIRE	44	
1.1	Cheminement de la résolution.....	44
1.2	Déplacements radiaux	45
1.3	Pression à l'interface	48
1.4	Variation sectionnelle de l'artère	50
1.5	Transposition en état plan de déformations.....	51
	Synthèse	52
2. ANALYSE ELASTIQUE NON LINÉAIRE.....	53	
2.1	Recherche du déplacement radial.....	53
2.2	Principe de résolution.....	56
3. RÉFLEXIONS SUR L'ÉTAT PLAN	57	
3.1	Généralités.....	57
3.2	Comportement de l'artère.....	58
3.3	Comportement du muscle.....	58
3.4	Conclusion.....	59
4. PARAMÈTRES DU PROBLÈME	60	
4.1	Paramètres géométriques.....	60
4.2	Pressions à considérer	61
4.3	Paramètres mécaniques de l'élasticité linéaire.....	62

4.4	Paramètres mécaniques de l'élasticité non linéaire	62
CONCLUSIONS	64	
TROISIÈME PARTIE, HÉMODYNAMIQUE.....		65
INTRODUCTION	66	
1. ECOULEMENT DU SANG DANS LES ARTÈRES.....	67	
1.1	Généralités et particularités de l'écoulement	67
1.2	Equations de l'écoulement	68
1.3	Examen de la célérité	70
Remarques	75	
2. MÉTHODE DE RÉSOLUTION	76	
2.1	Méthode des volumes finis.....	76
2.2	Autres informations nécessaire à l'élaboration de la routine	79
2.2.1	<i>Conditions aux bords</i>	79
2.2.2	<i>Nombre de Courant</i>	81
3. DÉVELOPPEMENT DE LA MÉTHODE.....	82	
3.1	Paramètres du problème	82
3.2	Présentation du programme réalisé	83
3.3	Test sur un cas particulier.....	84
3.4	Traitement des données	86
4. INFLUENCE DES DIFFÉRENTS PARAMÈTRES	87	
4.1	Mauvaise adéquation de la circonférence du brassard	87
4.1.1	<i>Phénomène induit par une diminution de la circonférence du brassard</i>	87
4.1.2	<i>Influence de la circonférence du brassard sur les mesures</i>	88
4.2	Influence des autres paramètres	91
4.2.1	<i>Longueur du brassard</i>	91
4.2.2	<i>Musculature du sujet</i>	92

CONCLUSIONS	95
<u>CONCLUSIONS</u>	<u>96</u>
<u>ANNEXES</u>	<u>100</u>
ANNEXE 1, LE RÉSEAU SANGUIN.....	101
Réseau artériel.....	101
Réseau veineux.....	102
Vaisseaux du bras.....	103
ANNEXE 2, SOURCES ET SOLUTIONS AUX PROBLÈMES DE PRESSION	104
Sources de l'hypotension	104
Solutions à l'hypotension	105
Sources à l'hypertension	105
Solutions à l'hypertension.....	107
ANNEXE 3, ISOTROPIE DES MATÉRIAUX.....	108
Isotropie transversale.....	108
Le muscle	109
L'artère	110
ANNEXE 4, THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE.....	111
Elasticité linéaire, matériau isotrope	111
Cylindre épais sous pression	112
Etat plan de déformations.....	116
ANNEXE 5, TESTS SUR LES RÉSULTATS DE L'ANALYSE ÉLASTIQUE LINÉAIRE	119
ANNEXE 6, THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ NON LINÉAIRE	123
Introduction	123
Matériaux hyperélastiques.....	124

Recherches des équations constitutives.....	125
Relations géométriques	127
Evaluation des contraintes.....	130
Equations indéfinies d'équilibre.....	135
Résolution du problème	140
ANNEXE 7, TESTS SUR LES RÉSULTATS DE L'ANALYSE ÉLASTIQUE NON LINÉAIRE	146
ANNEXE 8, EXTRAITS DES RECHERCHES CONCERNANT LES PARAMÈTRES MÉCANIQUES DES MATÉRIAUX	151
L'artère	151
Le muscle	153
ANNEXE 9, EQUATIONS DE L'HÉMODYNAMIQUE VASCULAIRE	155
ANNEXE 10, MÉTHODE DES VOLUMES FINIS	166
ANNEXE 11, RECHERCHE DE LA VITESSE DANS L'ARTÈRE BRACHIALE	167
ANNEXE 12, RECHERCHE DU NOMBRE DE COURANT	168
ANNEXE 13, PARAMÈTRES GÉOMÉTRIQUES DU BRASSARD	169
ANNEXE 14, ROUTINE VISUALBASIC	171
ANNEXE 15, TRAITEMENT DES DONNÉES	178
BIBLIOGRAPHIE	180
TABLE DES ILLUSTRATIONS.....	184
TABLE DES MATIÈRES.....	188