

## Chapitre 2.

### Réponse élastique des structures aux séismes.

La réponse d'une structure soumise aux mouvements du sol appliqués à sa base est un problème de dynamique. On en rappelle ci-après quelques éléments.

#### 2.1 Avertissement.

Pour obtenir des résultats corrects dans les problèmes de dynamique, il est nécessaire de caractériser chaque grandeur physique dans son unité significative : ainsi, un plancher ou sa charge sont des **masses** et l'unité de masse est le **kg** (pas le kN !).

Il est aussi nécessaire d'utiliser un système d'unités cohérent, SI (Système International) par exemple.

Les unités du système SI utilisées en dynamique sont :

masse  $m$             kg

accélération  $a$     m/s<sup>2</sup>

force  $F$             N (souvenir :  $F = m a$ )

longueur            m

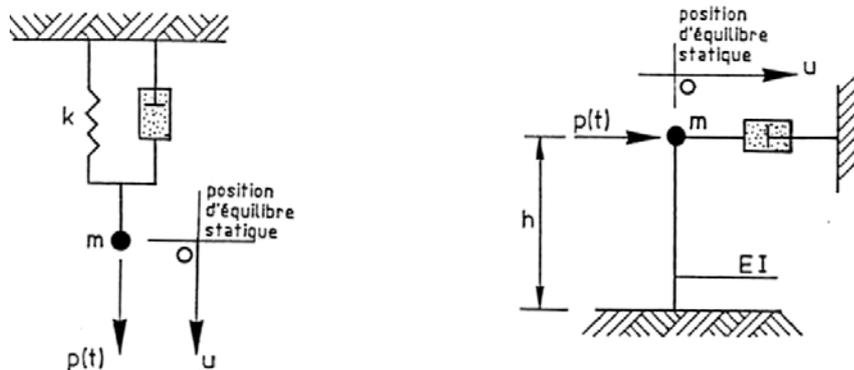
temps                s

Si on omet ces règles, on s'expose à des erreurs quantitatives graves : ainsi, si on exprime les masses en kN et qu'on applique  $F = m a$ , la force trouvée est 10 fois trop grande, soit une erreur de 1000 %, erreur classique de débutant...

#### 2.2 Dynamique de l'oscillateur simple.

Un oscillateur simple est constitué d'une masse  $m$  concentrée reliée à un point fixe par un ressort.

Figure 2.1.



Force de rappel du ressort :  $F_l = -k u$       Force de rappel de la poutre encastree :  $F_l = -3 EI u / h^3$

(Ex : suspension de voiture)

(Ex : château d'eau, si l'eau est gelée)

Figure 2.1. Exemple d'oscillateurs simples et relation entre la force de rappel  $F_l$  et un déplacement  $u$  imposé à la masse  $m$ .

On considère qu'il ne peut se déplacer que dans une seule direction et le mouvement est, dans le cas général, amorti. On peut écrire l'équation de mouvement de cet oscillateur simple soumis à une force variable  $p(t)$ .

Soit  $u(t)$  le déplacement de la masse  $m$  par rapport à la position d'équilibre,  $u'(t)$  sa vitesse,  $u''(t)$  son accélération. Lors du mouvement,  $m$  est soumise à :

$$F1(t) = -ku(t) \quad \text{force de rappel du ressort}$$

$$F2(t) = -c u'(t) \quad \text{résistance de l'amortisseur}$$

$$p(t) \quad \text{force extérieure imposée.}$$

La loi fondamentale de la dynamique s'écrit :  $F1(t) + F2(t) + p(t) = m u''(t)$

$$\text{ou} \quad u''(t) + cu'(t) / m + ku(t) / m = p(t) / m \quad (2.1)$$

### **Oscillations libres, amortissement nul.**

Oscillation libre  $p(t) = 0$  Amortissement nul  $c = 0 \Rightarrow u(t) = A \sin(\omega t + \phi)$

Le mouvement est sinusoïdal de période  $T = 2\pi (m/k)^{1/2} = 2\pi / \omega$  ( en s )

La fréquence  $f$  du mouvement vaut :  $f = 1/T$  ( en Hertz =  $s^{-1}$  )

On appelle  $\omega = (k/m)^{1/2} = 2\pi / T$  la pulsation du mouvement ( en rad/sec)

$A$  fixe l'amplitude du mouvement et  $\phi$  son déphasage. Ces deux paramètres dépendent des conditions initiales du problème (importance du déplacement imposé, décalage par rapport à l'origine du temps).

Le mouvement oscillant a lieu sans fin. Figure 2.2 haut.

### **Oscillations libres avec amortissement non nul.**

Oscillations libre  $p(t) = 0$  Amortissement  $c \neq 0 \Rightarrow u''(t) + c u'(t) / m + ku(t) / m = 0$

La solution dépend de la valeur de  $c$ . Si  $c > 2 m\omega$ , le mouvement ne comporte pas d'oscillation et s'arrête sans repasser au-delà de la position d'équilibre statique. Si  $c < 2 m\omega$ , le mouvement est pseudo-périodique, avec des extréma décroissants avec le temps. Figure 2.2.

On caractérise le degré d'efficacité  $c$  de l'amortisseur par le paramètre  $\zeta = c / 2m\omega$

Lorsque  $\zeta = 1$ , on dit que l'amortissement est critique. Dans ce cas la structure, écartée de sa position d'équilibre, revient à celle-ci sans aucune oscillation. Figure 2.2 milieu.

Pour les structures travaillant dans le domaine élastique, l'ordre de grandeur de  $\zeta$  est de 1% pour les constructions en acier et 2% pour les constructions en béton.

Toutefois, dans le contexte sismique, il existe des facteurs additionnels d'amortissement, tels que des fissurations, des déplacements avec frottement dans les assemblages, des frottements entre cloisons et structures. Pour cette raison, on admet une valeur unique de  $\zeta$  égale à 0,05, soit 5 % de l'amortissement critique. Pour cette valeur de  $\zeta$ , la pseudo période  $T$  de l'oscillateur amorti vaut :

$$T = 2\pi (1 - \zeta^2)^{-1/2} / \omega = 1.00125 \times 2\pi / \omega \approx 2\pi / \omega$$

Elle peut donc en pratique être confondue avec la période de l'oscillateur libre.

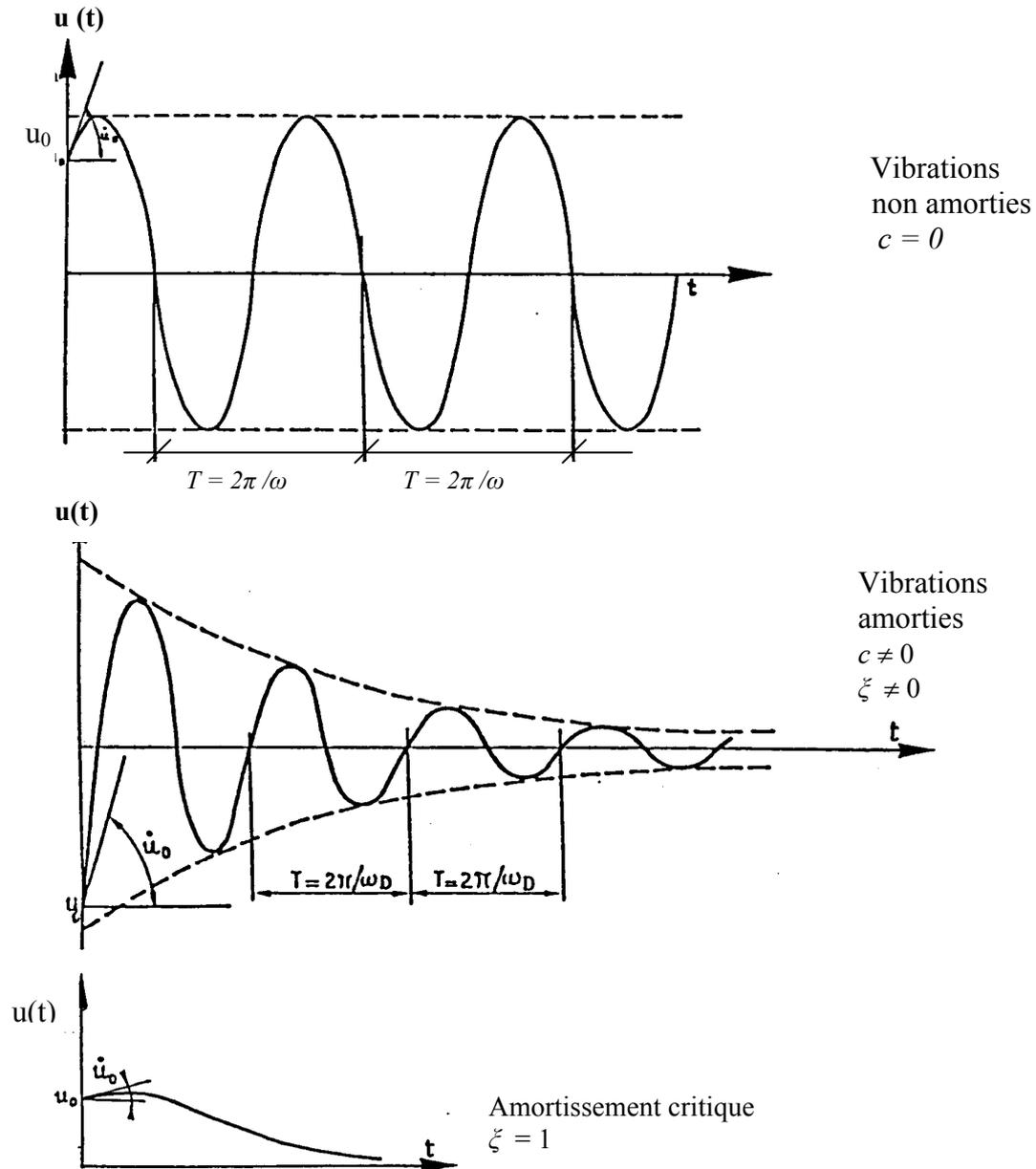


Figure 2.2. Types de vibrations libres ( $p(t)=0$ ) réalisées par écartement  $u_0$  de la position d'équilibre.

### Oscillations forcées harmoniques.

Soit  $p(t) = p_0 \sin at$ . La résolution de l'équation du mouvement montre que le déplacement  $u$  comporte :

- un terme transitoire de période  $2\pi / \omega$  résultant du déplacement imposé initial  $u_0$  ; ce mouvement est amorti rapidement
- un terme de mouvement permanent :  $u = (p_0 / k) \times \lambda \sin (at - \theta)$  . Figure 2.3.

On note que:

- la période du mouvement permanent est celle de la force d'excitation  $T_{\text{excit}} = 2\pi / \alpha$  et non la période  $T_{\text{oscil}} = 2\pi / \omega$  de l'oscillateur

-  $p_0/k$  est le déplacement statique du ressort sous la force  $p_0$

-  $\lambda$  est un coefficient d'amplification dynamique dépendant de l'amortissement et du rapport

$$\beta = T_{\text{oscil}} / T_{\text{excit}} = \alpha / \omega \quad \lambda = [1 - \beta^2]^2 + (2\beta\zeta)^2)^{-1/2}$$

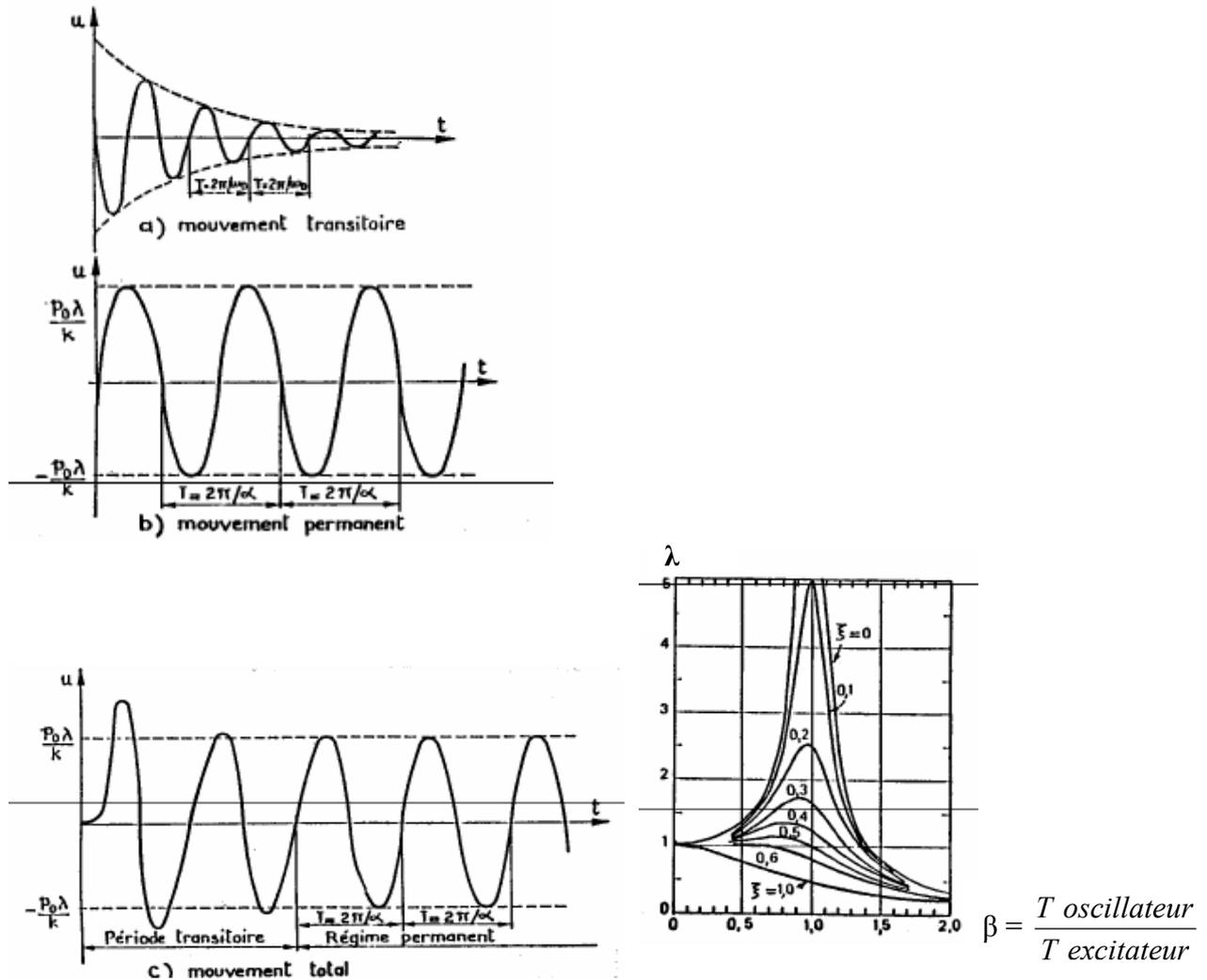


Figure 2.3. Oscillations forcées harmoniques et coefficient d'amplification  $\lambda$  du déplacement.

On constate que :

- pour un oscillateur infiniment raide ( $T \rightarrow 0$ ,  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $\beta = 0$ ) le mouvement est sinusoïdal d'amplitude  $p_0/k$
- pour un oscillateur très souple ( $T \rightarrow \infty$ ,  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\beta$  grand) le coefficient d'amplification du déplacement est très faible et le mouvement est sinusoïdal d'amplitude  $p_0/m\alpha^2$
- lorsque la période propre de l'oscillateur est égale à la période de la force d'excitation, l'oscillateur entre en résonance et l'amplitude du mouvement vaut :  $\lambda = 1/2\zeta$ .

Ainsi, pour  $\zeta = 0,05$ ,  $\lambda = 10$

- pour éviter des problèmes de résonance, il faut que la période propre de l'oscillateur s'écarte au minimum d'environ 20 % de la période de la force d'excitation.

### Oscillations forcées quelconques.

Pour  $p(t)$  quelconque, la solution de l'équation du mouvement est fournie par l'intégrale de Duhamel. Aucune remarque générale ne peut être faite.

### 2.3 Excitation par déplacement d'appui d'un oscillateur simple de type console encastrée.

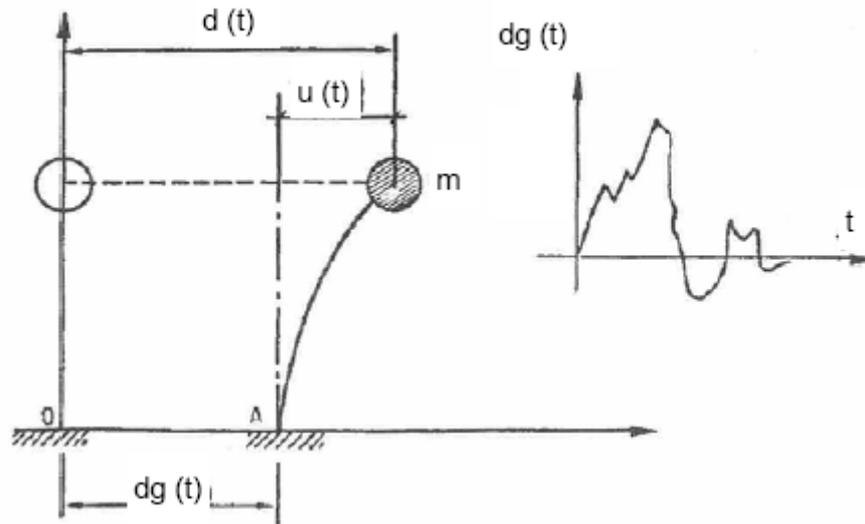


Figure 2.4. Excitation d'une structure par déplacement horizontal de son appui.

Un tremblement de terre impose au point A d'encastrement de la console verticale un déplacement  $d_g(t)$  (indice g pour « ground », sol en anglais) – Figure 2.4. Les déplacements  $d_g(t)$  sont considérés dans un repère absolu. Pour connaître les effets du séisme dans la structure de l'oscillateur, on considère les déplacements relatifs  $u(t)$  par rapport au point A, car ils permettent le calcul des grandeurs liées à la déformation du solide "oscillateur" :

- la force de rappel  $F_1 = -k u(t)$
- la force d'amortissement  $F_2 = -c u'(t)$ .

L'équation fondamentale de la dynamique s'écrit ici :

$$F_1 + F_2 = m d''(t) \quad \text{d'où} \quad m d''(t) + c u'(t) + k u(t) = 0$$

$$\text{Or : } d(t) = u(t) + d_g(t) \quad \text{et} \quad d''(t) = u''(t) + d_g''(t)$$

$$\text{d'où} \quad m u''(t) + c u'(t) + k u(t) = -m d_g''(t) \quad (2.2)$$

Cette équation est similaire à (2.1), si on note  $p(t) = -m d_g''(t)$

L'étude de l'oscillateur simple soumis à un déplacement imposé du monde extérieur auquel il est fixé est un problème mathématique identique à celui de l'oscillateur simple considéré dans le repère relatif mobile fixé à sa liaison au monde extérieur et soumis à une force fictive  $p(t) = -m d_g''(t)$  proportionnelle à l'accélération absolue  $d_g''(t)$  de sa liaison au sol.

Lorsque  $u(t)$  est calculé, on trouve  $F_1(t) = -k u(t) = -EI u(t) / h^3$

Les efforts internes dans la console se déduisent de  $F_1(t)$ .

On dispose ainsi d'une méthode d'étude de toute l'histoire des efforts internes en fonction du temps dans l'oscillateur simple dont le déplacement d'appui suit une loi d'accélération  $a(t) = d_g''(t)$ . Une telle étude est dite "time-history" ou analyse chronologique (linéaire ici). Compte tenu de la définition de la pulsation  $\omega = (k/m)^{1/2}$ , on peut écrire la relation précédente sous la forme

$$F_1(t) = -ku(t) = -m\omega^2 u(t) = -m\beta(t)$$

et dire que le résultat est similaire à celui obtenu lorsque la masse  $m$  est soumise à une "pseudo accélération"  $\beta(t) = \omega^2 u(t) = 4\pi^2 u(t)/T^2$

On voit au paragraphe suivant que cette formulation permet une présentation simple du calcul de l'oscillateur soumis à un tremblement de terre.

#### **2.4 Spectre de réponse élastique en accélération. Principe d'établissement.**

Dans une zone géographique donnée où un accélérogramme  $d_g''(t)$  représentatif des mouvements sismiques en base de la fondation de la structure étudiée est connu, on peut penser à simplifier la vie des ingénieurs auteurs de projet (spécialisés à ce stade en oscillateurs simples amortis) en résolvant une fois pour toutes l'ensemble des cas des divers oscillateurs simples possibles. A cette fin, on effectue  $n$  fois l'opération suivante.

On considère un oscillateur composé d'une masse  $M$ , située à une hauteur  $H$  d'une poutre console d'inertie  $I$  et de module d'élasticité  $E$ .

La constante de rappel  $k$  de la console « ressort » est égale à :  $k = 3EI/H^3$

La période propre  $T_1$  de l'oscillateur ainsi constitué vaut:

$$T_1 = 2\pi/\omega = 2\pi(M/k)^{1/2} \Rightarrow T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{MH^3}{3EI}}$$

En résolvant l'équation (2.2), on établit la valeur du déplacement relatif  $d = u(t)$  de la masse  $M$  par rapport l'encastrement A de sa console support et de la pseudo accélération  $\beta(t) = \omega^2 u(t)$  à chaque instant. L'amplitude du déplacement  $d$  de la masse par rapport à la base est influencée par l'amortissement du système ; on attribue à ce dernier pour la plupart des applications une valeur standard égale à 5 % de l'amortissement critique.

On retient la valeur maximale de  $\beta(t)$  sur la durée du tremblement de terre, et on l'associe à la période  $T_1$ , soit  $\beta(T_1) = \max \beta(t)$ . On reporte  $\beta(T_1)$  dans un diagramme  $(\beta(T_1), T)$ . Figure 2.5.

En faisant varier les paramètres qui définissent la console de référence (autres masses  $M$ , autres raideurs  $k$ , qui correspondent à d'autres périodes fondamentales  $T = T_1, T_2, \dots$ ), on établit un ensemble de paires de valeurs  $[T_i, \beta(T_i)]$ .

L'ensemble des points  $[T_i, \beta(T_i)]$  constitue ce qu'on appelle le **spectre de réponse élastique  $\beta(T)$  en accélération** (en fait en pseudo accélération) correspondant à un accélérogramme de la zone étudiée.

L'auteur de projet qui dispose de ce spectre peut obtenir directement, pour un oscillateur simple donné dont il évalue la période propre  $T$ , la force maximale  $F_{max}$  « équivalente » au tremblement de terre :

$$F_{max} = M \beta(T_1)$$

L'équivalence mentionnée correspond au fait que le déplacement calculé sous l'application de ce  $F$  est égal au déplacement relatif maximum  $d = u_{max}$  entre la masse  $M$  et la base de la console.

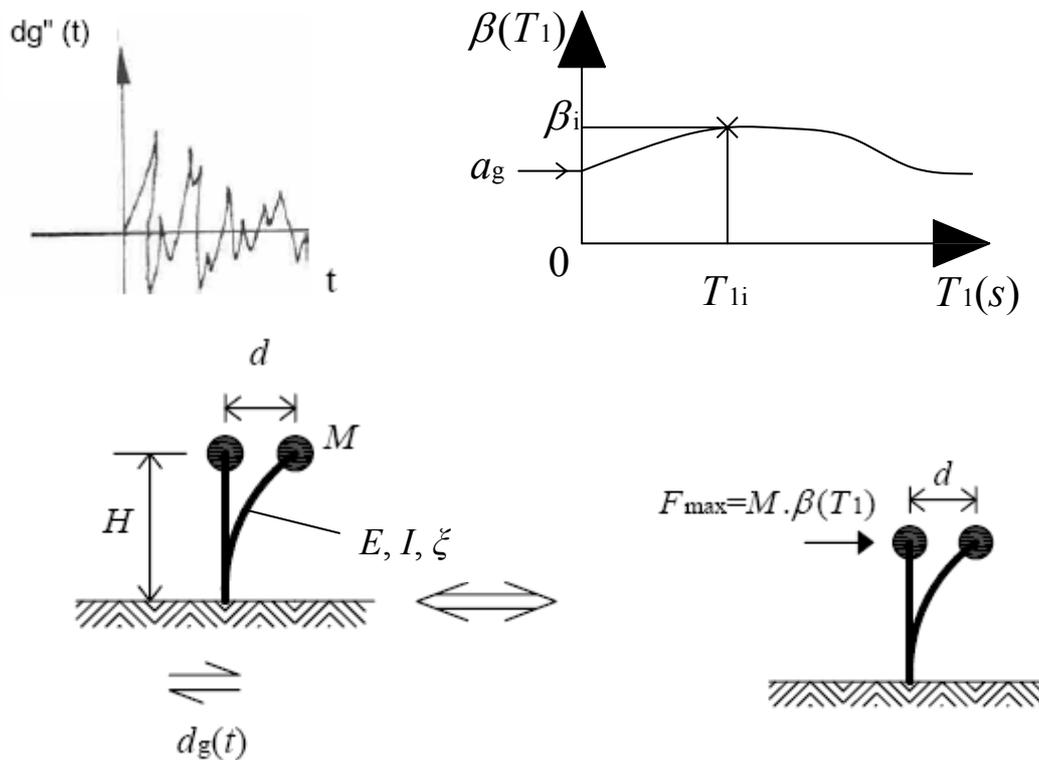


Figure 2.5. Construction d'un spectre de réponse élastique en accélération correspondant à un accélérogramme donné et définition d'une Force statique  $F_{max}$  « équivalente » au séisme.

### Spectre de réponse du code parasismique.

Des incertitudes affectent la connaissance de l'accélérogramme qui sera mesuré à un endroit donné lors du prochain tremblement de terre. Le "spectre de réponse en accélération  $\beta$ " établi comme indiqué ci-dessus correspond à un seul accélérogramme et ne peut pas bien représenter la sismicité du site.

On rencontre les incertitudes quant aux prochains séismes en établissant plusieurs spectres de réponse  $\beta(T_1)$  qui correspondent à plusieurs accélérogrammes et en retenant comme spectre pour le code parasismique une "moyenne" de tous ces spectres – Figure 2.6.

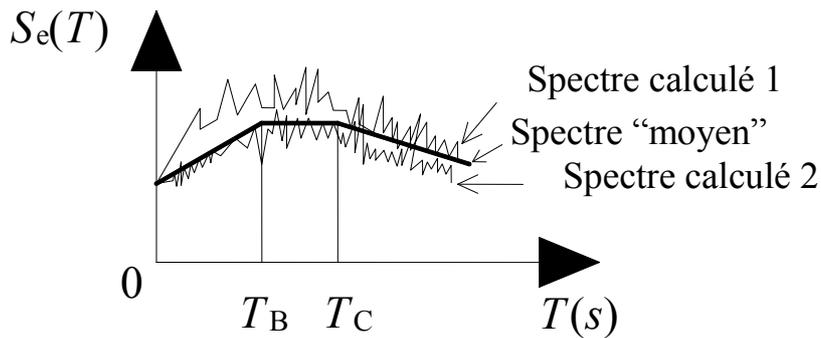


Figure 2.6. Définition d'un spectre « moyen »  $S_e(T)$  de code parasismique.

Le spectre "moyen" résulte d'une approche statistique, associée à un "jugement d'ingénieur" et au souci d'un confort d'utilisation du spectre normatif, de sorte que la forme du spectre de réponse de projet  $S_e(T)$  est plus schématique que celle de chaque spectre de réponse  $\beta(T_1)$ .

On présente à la Figure 2.7 le spectre de réponse élastique  $S_e(T)$  de l'Eurocode 8, où on distingue des périodes "de coin"  $T_B$ ,  $T_C$  et  $T_D$ . Les codes parasismiques définissent généralement une seule schématisation de base pour le spectre de réponse élastique en accélération de référence.

L'évaluation de la déformée et des sollicitations d'une console de masse  $M$  et de raideur  $EI/H$  est effectuée comme expliqué précédemment et la force horizontale  $F$  maximale vaut:  $F_{max} = M S_e(T)$

*Ne pas oublier de considérer le spectre en unité d'accélération ( $m/s^2$ ) pour des calculs pratiques...*

Si on peut établir que l'amortissement est différent de la valeur standard de 5 %, le spectre de réponse élastique peut être corrigé par un coefficient  $\eta$ .

Le spectre est fonction du sol par le paramètre  $S$ , comme on l'on explique en 2.5. Le spectre des codes parasismiques est généralement établi pour une valeur standard d'amortissement égale à 5% de l'amortissement critique. Si on peut démontrer qu'une structure étudiée est caractérisée par une autre valeur d'amortissement, on modifie le spectre de base par un paramètre  $\eta$ .

L'examen d'un spectre de réponse élastique en accélération -Figure 2.7- met en évidence plusieurs faits :

- pour une structure très raide ( $T \approx 0$  s), la pseudo accélération  $S_e(T)$  est égale à l'accélération maximale  $Sa_g = Sd_g''(t)$  du sol (si on construit sur le bedrock,  $S=1$ ); c'est logique, car une structure infiniment raide suit exactement les mouvement du sol, sans avoir de déformée propre
- la réponse dynamique des structures modérément flexibles ( $T$  compris entre  $T_B$  et  $T_C$ , ordre de grandeur 0,25s et 0,8s, voir Tableau 2.3 ) entraîne à une amplification des accélérations par rapport à l'accélération du sol; la pseudo accélération  $S_e(T)$  est de l'ordre de 2,5 fois l'accélération maximale  $Sa_g = Sd_g''(t)$  du sol ; le contenu fréquentiel des accélérogrammes, qui est plus important dans cette gamme de périodes, favorise un aspect « résonance » dans la réponse de la structure.

- les structures très flexibles sont les moins sollicitées en terme de force, car elles fléchissent de telle sorte que  $u(t) \approx d_g(t)$  et « ne voient pas passer » le séisme ; cette grande flexibilité est toutefois synonyme d'un effet  $P-\Delta$  important.

On conclut que les effets d'un tremblement de terre sur une structure dépendent de sa rigidité : une structure plus rigide (période propre  $T$  faible) subit des forces plus élevées qu'une structure flexible.

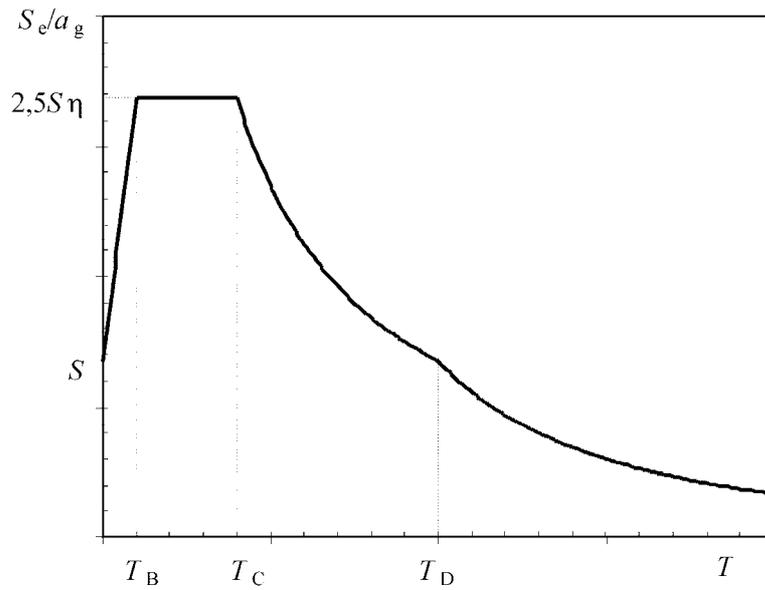


Figure 2.7. Spectre de réponse élastique en accélération  $S_e(T)$  de l'Eurocode 8.

## **2.5 Spectre de calcul pour l'analyse élastique.**

### **Du spectre de réponse élastique au spectre de calcul.**

D'autres facteurs que ceux considérés dans l'établissement du spectre de réponse élastique  $S_e(T)$  interviennent dans la réponse des structures aux tremblements de terre.

Les spectres de calcul pour l'analyse élastique  $S_d(T)$  prennent en compte ces facteurs additionnels, qu'on définit aux paragraphes suivants.

### **Importance de la construction.**

La définition de l'accélération maximale "de calcul"  $a_g$  résulte d'un processus statistique et correspond à l'acceptation d'un certain niveau de risque. Il en découle que l'accélération maximale de calcul  $a_g$  devrait être plus grande pour les structures considérées comme plus précieuses ou plus importantes à divers points de vue. Dans l'Eurocode 8, on définit une accélération de référence  $a_{gR}$  correspondant à un niveau standard de risque accepté ;  $a_{gR}$  est compris entre  $0,05 g$  ( $0,5 \text{ m/s}^2$ ) dans les zones très

faiblement sismiques et  $0,4 g$  ( $4 \text{ m/s}^2$ ) dans les zones très sismiques. L'accélération maximale de calcul  $a_g$  est trouvée en multipliant  $a_{gR}$  par  $\gamma_I$ , "coefficient d'importance" de la structure considérée :

$$a_g = \gamma_I a_{gR}.$$

$\gamma_I$  est égal à 1 pour les bâtiments courant et vaut jusqu'à 1,4 pour les structures dont l'intégrité est vitale en cas de séisme. On donne au Tableau 2.1 les valeurs de  $\gamma_I$  recommandées dans l'Eurocode 8 pour différentes catégories d'importance de bâtiments.

**Tableau 2.1. Catégories d'importance de bâtiments et valeurs recommandées de  $\gamma_I$ .**

**(EN1998-1:2004).**

Catégorie d'importance	Bâtiments	$\gamma_I$
I	Bâtiments d'importance mineure pour la sécurité des personnes, par exemple, bâtiments agricoles, etc.	0,8
II	Bâtiments courants n'appartenant pas aux autres catégories	1,0
III	Bâtiments dont la résistance aux séismes est importante compte tenu des conséquences d'un effondrement, par exemple : écoles, salles de réunion, institutions culturelles, etc.	1,2
IV	Bâtiments dont l'intégrité en cas de séisme est d'importance vitale pour la protection civile, par exemple : hôpitaux, casernes de pompiers, centrales électriques, etc.	1,4

### **Séisme proche, séisme lointain.**

Une accélération de pointe  $a_{gR}$  donnée à un endroit donné peut être engendrée par différents types de séisme : un fort séisme dont l'épicentre est éloigné ou un séisme plus faible dont l'épicentre est proche. Le séisme réel affectant une zone est fonction de la géologie, proche et lointaine. Mais les spectres de réponse correspondant aux deux types de séisme mentionnés sont différents, parce que des ondes propagées de loin ou de près produisent des effets différents. Dans l'Eurocode 8, cette possibilité est considérée et des formes de spectres de types 1 et 2 sont définies.

Le type 1 correspond à des séismes lointains de magnitude suffisante ( $M_S \geq 5,5$ ) pour engendrer au site de construction des accélérations significatives dont la contribution est prépondérante dans le risque sismique.

Le type 2 est à considérer si des tremblements de terre de magnitude  $M_S < 5,5$  constituent le facteur prépondérant de risque.

Dans certaines régions, le spectre de calcul résulte d'une combinaison des spectres des types 1 et 2.

### **Sols et sites.**

Les couches de sol présentes entre le rocher sous-jacent et la fondation d'un bâtiment modifient la forme et les amplitudes du spectre de réponse élastique ou "alea", établies au niveau du rocher. Un

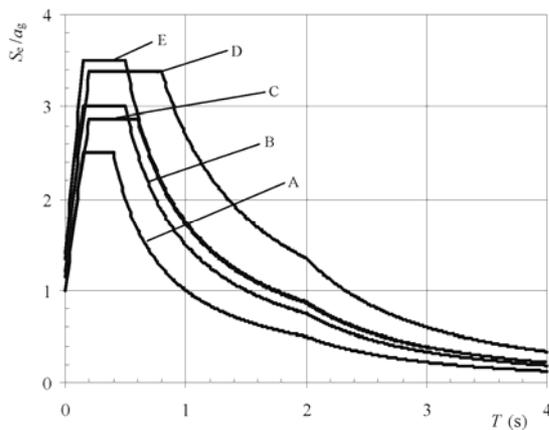
paramètre de sol  $S$  prend en compte cette influence, de sorte que l'accélération maximale à la fondation est égale à  $Sa_g$ .

Les sites sont classifiés en types A, B, C, D, E, S1 et S2 selon des profils stratigraphiques et des valeurs de paramètres caractérisant les sols. Le tableau 2.2 définit les valeurs de  $S$  associées à ces types de sols et sites. On voit que l'influence sur le mouvement en base de la structure est significatif, puisque  $S$  est compris entre 1 (sur le rocher) et 1,8 (sol très meuble). De plus, les valeurs des périodes "de coin"  $T_B$  et  $T_C$ , assez différentes selon les sites et sols et visibles à la Figure 2.8, influencent significativement le spectre.

En examinant la Figure 2.8, on constate que:

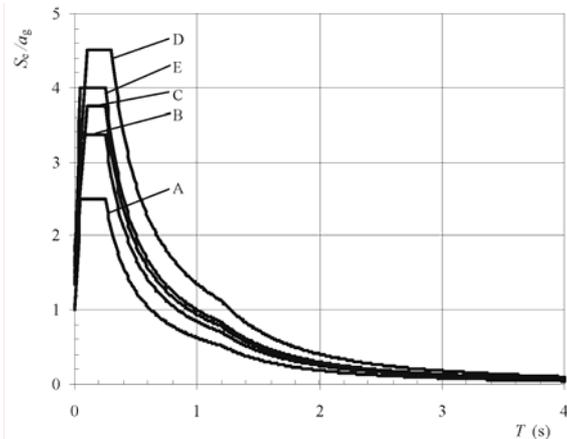
- plus les couches sont meubles (origine du mot « meuble » : mobile...), plus l'amplification est élevée à période égale (penser au mouvement de l'eau dans un bassin agité, par comparaison au mouvement de la même eau, mais gelée, dans le même bassin).
- l'amplification relative du site D par rapport au site A atteint pratiquement 3 pour des oscillateurs (bâtiments, château d'eau, etc) de période égale à 1 s
- la période  $T_C$  de « coin » du spectre se déplace vers la droite quand on passe de sol rocheux à sol meuble

Il apparaît clairement qu'ignorer les conditions de sol et site peut conduire à de grandes sous-estimations de l'action sismique.



*Spectre de Type 1.*

*Séisme lointain de magnitude  $M_S \geq 5,5$*



*Spectre de Type 2.*

*Séisme de magnitude  $M_S < 5,5$*

*Figure 2.8. Spectres de calcul  $S_e(T)$  de l'Eurocode 8 pour les tremblements de terre des types 1 et 2 et pour différentes conditions des sols et site*

**Tableau 2.2. Paramètres de l'Eurocode 8 tenant compte des conditions de sol et site.**

Sol et site	Séisme de Type 1				Séisme de Type 2			
	$S$	$T_B(s)$	$T_C(s)$	$T_D(s)$	$S$	$T_B(s)$	$T_C(s)$	$T_D(s)$
A: Rocher ou autre formation géologique de ce type comportant une couche superficielle d'au plus 5 m de matériau moins résistant	1,0	0,15	0,4	2,0	1,0	0,05	0,25	1,2
B Dépôts raides de sable, de gravier ou d'argile sur-consolidée, d'au moins plusieurs dizaines de mètres d'épaisseur, caractérisés par une augmentation progressive des propriétés mécaniques avec la profondeur	1,2	0,15	0,5	2,0	1,35	0,05	0,25	1,2
C Dépôts profonds de sable de densité moyenne, de gravier ou d'argile moyennement raide, ayant des épaisseurs de quelques dizaines à plusieurs centaines de mètres	1,15	0,20	0,6	2,0	1,5	0,10	0,25	1,2
D Dépôts de sol sans cohésion de densité faible à moyenne (avec ou sans couches cohérentes molles) ou comprenant une majorité de sols cohérents mous à fermes	1,35	0,20	0,8	2,0	1,8	0,10	0,30	1,2
E Profil de sol comprenant une couche superficielle d'alluvions avec des valeurs de $v_s$ de classe C ou D et une épaisseur comprise entre 5 m environ et 20 m, reposant sur un matériau plus raide avec $v_s > 800$ m/s	1,4	0,15	0,5	2,0	1,6	0,05	0,25	1,2
$S_1$ Dépôts composés, ou contenant, une couche d'au moins 10 m d'épaisseur d'argiles molles/vases avec un indice de plasticité élevé ( $PI > 40$ ) et une teneur en eau importante.	Etudes particulières							
$S_2$ Dépôts de sols liquéfiables d'argiles sensibles ou tout autre profil de sol non compris dans les classes A à E ou $S_1$	Etudes particulières							

**Ductilité de la structure.**

On dit "ductile" une structure qui peut subir sans perte de résistance des déformations plastiques alternées. Comme expliqué plus en détail au Chapitre 3, la ductilité peut avoir une influence positive sur l'économie d'un projet, car :

- la structure ductile est capable de subir avec succès le même déplacement qu'une structure qui répondrait de façon purement élastique, mais elle atteint ce résultat avec des éléments structuraux de section moindre ;
- les sollicitations à la fondation sont réduites.

Cette capacité à se déformer plastiquement sans perte de résistance est traduite par l'attribution d'un "coefficient de comportement",  $q$  dans l'Eurocode 8, dont la valeur dépend du type de structure résistante. Le coefficient  $q$  intervient comme réducteur du spectre élastique  $S_e(T)$  lors de la définition du spectre de calcul  $S_d(T)$ . La réduction est comprise entre 1,5 pour les structures peu dissipatives et 6 pour les structures très dissipatives. Le facteur  $q$  permet de tenir compte de la capacité de déformation plastique d'une structure tout en effectuant une analyse purement élastique sous un spectre  $S_d(T)$ .

### Exemples de spectres de calcul.

Lorsqu'on tient compte de tous les facteurs définis aux paragraphes précédents, c'est toute une famille de spectres de calcul  $S_d(T)$  qui apparaît au départ d'un spectre de réponse élastique  $S_e(T)$ .

$S_e(T)$  est fonction de  $a_{gR}$ ,  $\gamma_1$  et  $T$ .

$S_d(T)$  est fonction de  $S_e(T)$ ,  $q$  et des conditions de sol et site.

Les expressions définissant les différentes branches du spectre  $S_d(T)$  de l'Eurocode 8 sont données en Annexe. On présente à la Figure 2.9 quelques exemples de spectres de calcul correspondant à une zone sismique où  $a_g = 2\text{m/s}^2$ , où le risque sismique correspond à un tremblement de terre de type 1, pour des structures caractérisées par  $q = 1,5$  construites sur des sols de type A et C et pour des structures caractérisées par  $q = 4$  construites sur un sol de type C.

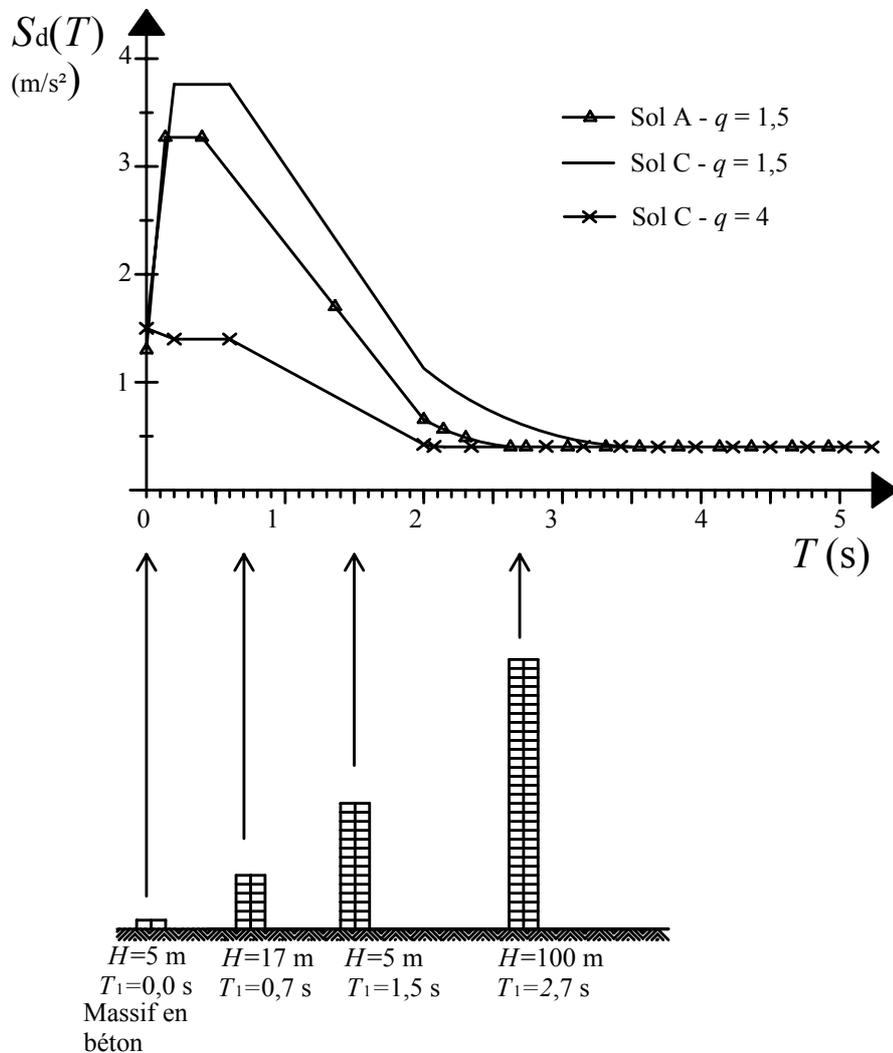


Figure 2.9. Exemples de spectre de calcul pour divers sites et coefficient de comportement, en regard de quelques structures caractérisées par leurs périodes  $T_1$  (estimée par la relation  $T_1 = C_1 H^{3/4}$  du Tableau 2.3).

## **2.6 Spectre de réponse en déplacement.**

Le processus d'établissement du spectre de réponse en accélération décrit en 2.3 fournit aussi les déplacements  $u(t)$ , car les accélérations, les déplacements (et les vitesses  $u'$ ) sont mathématiquement liés entre eux. On a vu que la "pseudo accélération"  $\beta(t) = \omega^2 u(t) = 4 \pi^2 u(t)/T^2$  d'où

$$u(t) = \beta(t) \times (T/2\pi)^2$$

Cette relation appliquée aux spectres donne, en notations Eurocode 8, le spectre de réponse élastique en déplacement  $S_{De}(T)$ :  $S_{De}(T) = S_e(T) (T/2\pi)^2$

L'Eurocode 8 propose un spectre de ce type – Figure 2.10 – dont la forme est influencée par des considérations de sécurité.

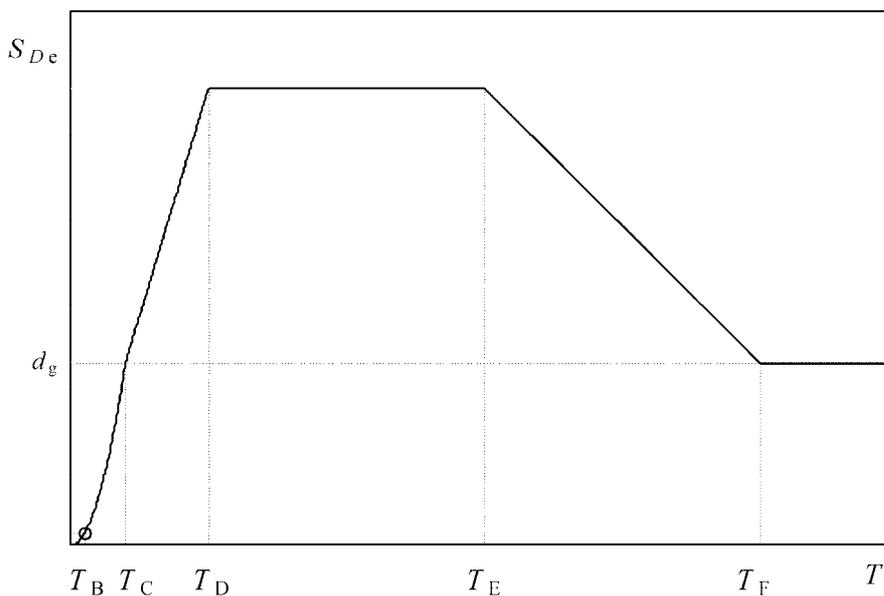


Figure 2.10. Spectre de réponse en déplacement de l'Eurocode 8.

On constate, à l'examen de ce spectre de déplacement, que :

- le déplacement relatif  $S_{De}(T)$  d'une structure par rapport à sa base est nul pour les structures très raides ( $T \approx 0$  s) ; c'est logique, car une telle structure suit exactement les mouvements du sol, sans connaître de déformée propre
- la réponse dynamique des structures modérément flexibles ( $T$  compris entre 0,25s et 0,8 s) entraîne à une amplification ; le déplacement  $S_{De}(T)$  est de l'ordre de 2,5 fois le déplacement maximum  $d_g$  du sol ; le contenu fréquentiel des accélérographes, qui est plus important dans cette gamme de périodes, favorise un aspect « résonance » dans la réponse de la structure et explique cette remarque.
- dans les structures très flexibles, le déplacement relatif de la masse par rapport à sa base est égal au déplacement  $d_g$  du sol

## 2.7 Dynamique des oscillateurs multiples.

Un oscillateur multiple est une structure comportant plusieurs masses reliées entre elles par des éléments structuraux (barres, poutres, plaques,...). Il s'y développe plusieurs modes de vibration.

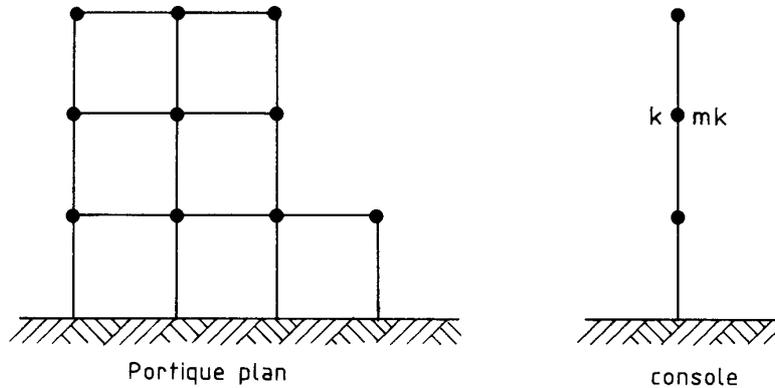


Figure 2.11. Exemples d'oscillateurs multiples.

La résolution du problème de la réponse dynamique d'un oscillateur multiple est une généralisation du cas de l'oscillateur simple. Les différents coefficients associés à la masse unique  $m$  et à son déplacement  $u(t)$  deviennent des vecteurs ou des matrices.

$u \rightarrow U$	vecteur déplacement	$u' \rightarrow U'$	vecteur vitesse
$u'' \rightarrow U''$	vecteur accélération	$p \rightarrow P$	vecteur forces extérieures aux nœuds
$m \rightarrow M$	matrice des masses (diagonale)	$c \rightarrow C$	matrice des amortissements
$k \rightarrow K$	matrice de rigidité		

[tous les vecteurs sont des fonctions du temps  $U = U(t)$ , etc...]

### Équation du mouvement.

Pour une déformation relative  $U$  donnée, les masses  $M$  sont soumises à

$F1(t) = -K.U(t)$  forces de rappel élastique

$F2(t) = -c.U(t)$ , forces générées par les amortissements

$P(t)$  forces extérieures

L'équation du mouvement s'écrit :  $F1(t) + F2(t) + P(t) = M.U(t)$

$MU''(t) + CU'(t) + KU(t) = P(t)$

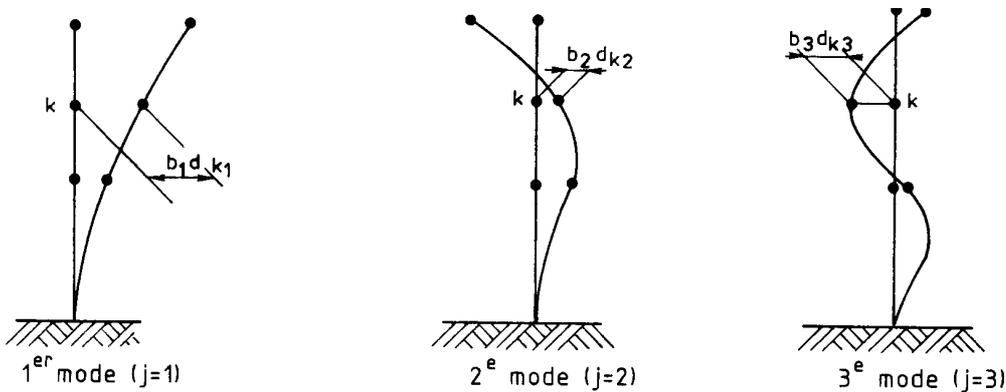
### Oscillations libres.

$P(t) = 0$   $C = 0$  et on trouve :  $U(t) = \sum a_j d_j \sin(\omega_j t + \theta_j)$  pour  $J = 1, n$  si  $n$  est le nombre de modes de vibration. Le mouvement global est la somme de  $n$  mouvements sinusoïdaux appelés "modes de vibrations" et dont chacun est caractérisé par les paramètres suivants :

- une pulsation  $\omega_j$  et donc une période propre  $T_j = 2\pi / \omega_j$
- un vecteur déformation  $D_j$  appelé "déformée modale"
- un coefficient  $b_j$ , qui fixe l'amplitude des déplacements

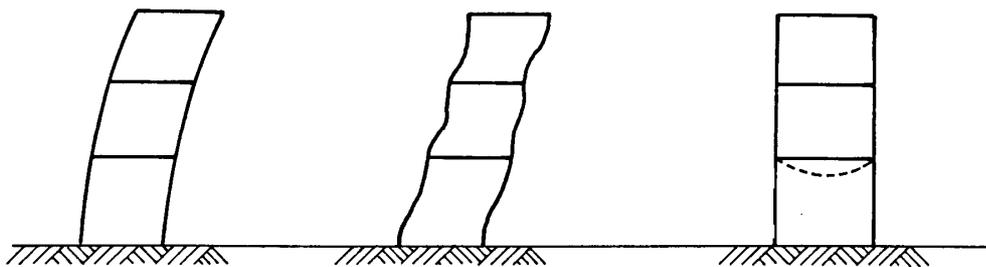
- un déphasage  $\theta_j$

$a_j$  et  $\theta_j$  dépendent des conditions initiales du problème, par exemple le vecteur déplacement  $U_0$  initial imposé à l'oscillateur à l'instant  $t = 0$ .



$$U_k = b_1 d_{k1} \sin(\omega_1 t + \theta_1) + b_2 d_{k2} \sin(\omega_2 t + \theta_2) + \dots$$

Figure 2.12. Modes de vibration et déplacement global  $U_k$  de la masse  $k$ .



Modes : flexion globale      cisaillement entre étages      vibration verticales d'un plancher

Figure 2.13. Exemple de modes de vibration dans une ossature en portique.

**Oscillations forcées.**

Lorsque l'oscillateur multiple est soumis à un vecteur de forces extérieures variables  $P(t)$ , le vecteur déplacement  $U(t)$  peut être mis sous la forme :  $U(t) = \sum y_j(t).D_j$

Les  $y_j(t)$ , qui fixent les amplitudes des diverses déformées modales  $D_j$  intervenant dans la déformée globale sont des intégrales de Duhamel.

**2.8 Excitation d'un oscillateur multiple par un mouvements des appuis.**

On effectue des développements similaires à ceux résumés en 2.3. La translation d'ensemble de la base est unique et le repère relatif lié à cette base également, dans la mesure où on ne considère pas de déformabilité de la base dans la direction parallèle au mouvement.

On note que cette hypothèse est réaliste pour des bâtiments, au prix de quelques précautions relatives à la continuité des fondations, mais qu'elle ne correspond pas au cas des structures à appuis séparés comme les ponts. La formulation matricielle du problème s'exprime par une équation similaire à (2.1) :

$$MU''(t) + CU'(t) + KU(t) = M.d_g(t).\Delta$$

$\Delta$  est un vecteur composé de 0 et de 1. Les 0 correspondent aux lignes où le déplacement  $u_k(t)$  n'est pas une translation parallèle à la base.

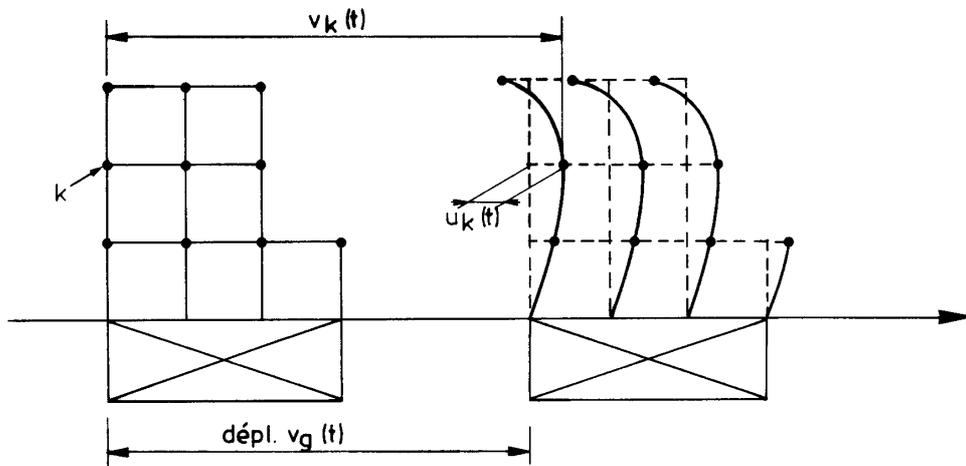


Figure 2.14. Excitation par déplacement d'appui.

La solution de cette équation peut être mise sous la forme d'une somme de réponses selon les divers modes  $j$ :  $U(t) = \sum u_j(t) a_j D_j$

Cette formulation permet d'effectuer une étude complète de type "time-history" de la réponse de l'oscillateur multiple à un mouvement  $a(t) = d_g''(t)$  du sol. Dans cette formulation :

- $D_j$  est le vecteur « déformée modale » du mode  $J$
- $u_j(t)$  est une intégrale de DUHAMEL ; elle fixe l'importance de la participation de la déformée  $D_j$  en fonction de la loi de déplacement  $d_g''(t)$  imposée en base
- $a_j$  est appelé « facteur de participation modale du mode  $j$  » ; il fixe l'importance de la participation de la déformée modale  $D_j$  en fonction de la distribution des masses dans la structure ; ce coefficient peut être positif ou négatif ; sa valeur en module, comparée aux  $a_j$  des autres modes donne une idée de l'importance relative de la contribution des différents modes à la configuration déformée de la structure.

## **2.9 Utilisation des spectres de réponse pour les oscillateurs multiples.**

Si au lieu de l'accélérogramme  $d_g''(t)$  mentionné en 2.7, on utilise un spectre de pseudo-accélération  $S_{De}(T)$ , le vecteur des pseudo accélération à appliquer aux masses  $m_k$  est donné pour chaque mode  $j$  de période  $T_j$  par :  $\Gamma_j = S_{De}(T_j) a_j D_j$

On en déduit pour chaque masse  $m_k$  la force statique équivalente  $F_k$  correspondant au mode  $J$  :

$$F_{kj} = m_k \gamma_{kj} \quad \text{où} \quad \gamma_{kj} = S_{De}(T_j) a_j d_{kj}$$

On calcule alors la déformée de la structure correspondant à chaque mode et on en déduit les sollicitations ( $M$ ,  $N$ ,  $V$ , etc...) correspondantes, puis on cumule les contributions des divers modes à ces sollicitations de la structure, suivant l'un des processus de cumulation définis en 2.10.

La Figure 2.14 reprend la synthèse de l'approche effectuée lors de l'utilisation d'un spectre de réponse par le calcul d'un oscillateur multiple sous action sismique.

## **2.10 Cumulation des sollicitations des divers modes.**

### **Le problème.**

Les valeurs des pseudo accélérations  $S_{De}(T_j)$  données par le spectre de réponse sont des maxima dans chaque mode et il est peu probable que ces maxima surviennent au même instant  $t$ . Une addition pure et simple des efforts internes correspondant aux valeurs maximales de déformation dans chaque mode est donc l'hypothèse la plus pessimiste et on n'y a recours que dans des cas particuliers. Différentes méthodes de cumulation sont utilisées, en regard des données particulières à chaque problème.

### **Moyenne quadratique.**

La pratique de cumulation la plus courante consiste à effectuer une moyenne quadratique des effets des différents modes. La moyenne quadratique est la racine carrée de la somme des carrés des contributions de chaque mode (en anglais SRSS, Square Root of the Sum of the Squares).

La moyenne quadratique donne une valeur dont la probabilité d'être dépassée n'est pas différente de la probabilité que la valeur  $M_i$  dans un mode particulier soit dépassée si ce mode seul était activé. C'est donc une évaluation probabiliste du maximum.

Chaque fois que toutes les réponses modales prises en compte peuvent être considérées comme indépendantes les unes des autres, la valeur maximale  $E_E$  de l'effet d'une action sismique peut être

$$\text{prise égale à : } E_E = \sqrt{\sum E_{Ei}^2}$$

où  $E_E$  est l'effet de l'action sismique considéré (force, déplacement, etc.) ;

$E_{Ei}$  est la valeur de cet effet de l'action sismique due au mode de vibration  $i$ .

Dans l'Eurocode 8, on considère que les réponses de deux modes de vibration  $i$  et  $j$  (y compris les modes de torsion et de translation) peuvent être prises comme indépendantes l'une de l'autre si leurs périodes  $T_i$  et  $T_j$  satisfont à la condition suivante (avec  $T_j \leq T_i$ ) :  $T_j \leq 0,9 \cdot T_i$

### **Cumulation CQC.**

La cumulation CQC est une évaluation à caractère général du maximum probable de la réponse, dont la moyenne quadratique n'est qu'un cas particulier.

### **Addition.**

Une addition pure et simple des efforts internes correspondant aux valeurs maximales de déformation dans chaque mode donne les sollicitations maximales possibles. Elle se justifie si on a des raisons de craindre la simultanéité des effets maximum dans chaque mode. C'est par exemple le cas si un mode de période très grande (quelques s) est cumulé à un mode de période très courte.

### **2.11 Conditions relatives aux masses modales.**

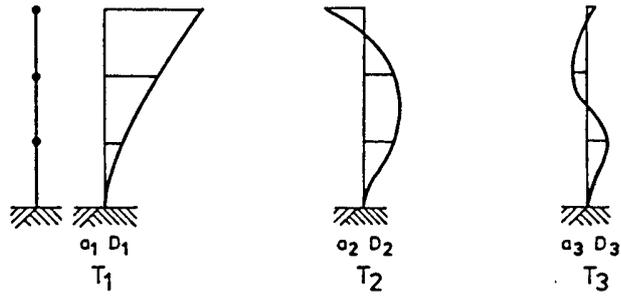
Les réponses de tous les modes de vibration contribuant de manière significative à la réponse globale doivent être prises en compte. Dans l'Eurocode 8, on considère cette condition comme réalisée si la somme des masses modales effectives pour les modes considérés atteint au moins 90% de la masse totale de la structure et si tous les modes dont la masse modale effective est supérieure à 5% de la masse totale sont pris en compte.

Si ceci ne peut pas être vérifié (par exemple, dans le cas de bâtiments où la contribution du mode de torsion est significative), il convient de considérer, lors d'une analyse spatiale, un nombre minimal  $k$  de modes satisfaisant aux conditions:

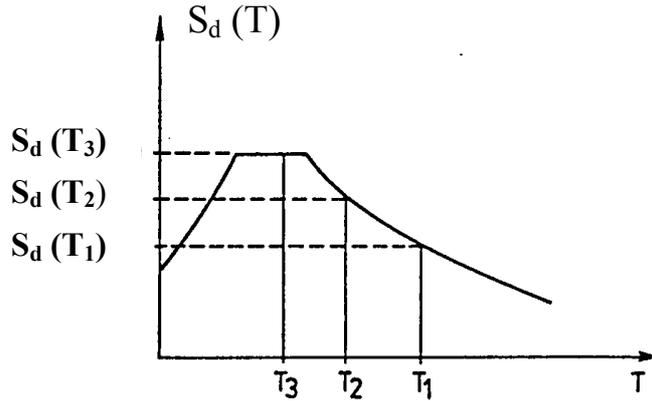
$$k \geq 3 \cdot \sqrt{n} \quad \text{et} \quad T_k \leq 0,20 \text{ s}$$

où  $k$  est le nombre de modes à considérer,  $n$  le nombre de niveaux au-dessus des fondations ou du sommet d'un soubassement rigide et  $T_k$  la période de vibration du mode  $k$ .

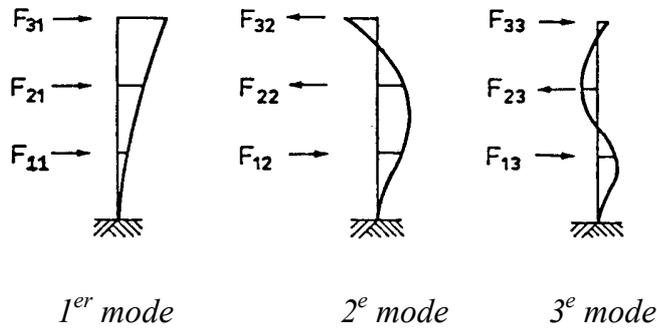
**(A)**  
Calcul des déformées modales et périodes propre



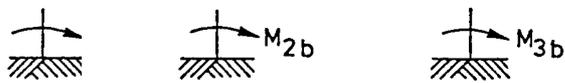
**B**  
Lecture du spectre



**(C)**  
Réponses modales



**D**  
Calcul des MNV correspondant à chaque réponse modale  
Exemple :  $E_{Ei} = M_{base, i}$



**E**  
Calcul de  $E_E = M_{base} = \sqrt{M_{1b}^2 + M_{2b}^2 + M_{3b}^2}$  (moyenne quadratique)

Figure 2.15. Principe du calcul de la réponse spectrale et de la superposition modale.

## **2.12 Amortissement différencié suivant les modes de vibration.**

Le spectre de réponse, qui est établi pour un oscillateur simple, ne prend en considération qu'une seule valeur de l'amortissement, égale pour tous les modes de vibration. L'utilisation d'un spectre de réponse n'est donc strictement valable que si les coefficients d'amortissement affecté aux différentes masses sont tous égaux à cette seule valeur. Cette hypothèse n'est pas gênante dans les applications où les masses sont liées rigidement à la structure. Cette hypothèse est très gênante dans le cas contraire. C'est par exemple le cas dans un réservoir partiellement rempli ou pour des bâtiments où des structures lourdes sont suspendues par des bielles à l'ossature.

L'utilisation directe du spectre de réponse à taux d'amortissement unique conduirait alors à des évaluations très approximatives des forces réelles. On peut résoudre ce problème :

- en revenant à des intégrations pas à pas sur le temps, si on dispose d'accélérogrammes
- en utilisant l'artifice qui consiste à construire un spectre fait de morceaux de spectres dont chacun correspond à l'amortissement correct pour chaque mode (de période connue) considéré. Voir 16. 7.

## **2.13 La méthode d'analyse par forces latérales.**

### **2.13.1 Principe.**

Dans les structures dont la réponse est constituée essentiellement du 1<sup>er</sup> mode de vibration, on peut trouver de façon approchée les sollicitations sismiques en ne considérant que le seul premier mode. L'effort tranchant sismique à la base  $F_b$  est déterminé par :

$$F_b = S_d(T_1) \cdot m \cdot \lambda$$

$S_d(T_1)$  est l'ordonnée du spectre de réponse en accélération de calcul pour la période  $T_1$ , période fondamentale (= 1<sup>er</sup> mode) de vibration du bâtiment pour le mouvement de translation dans la direction considérée ;  $m$  est la masse « sismique » du bâtiment, au-dessus des fondations ou du sommet d'un soubassement rigide;  $\lambda$  ( $\leq 1$ ) est un coefficient de correction qui traduit le fait que la masse modale effective du premier mode est inférieure à la masse totale  $m$  du bâtiment, de sorte que considérer  $\lambda = 1$  conduirait à une surestimation de la résultante de cisaillement.

Dans l'Eurocode 8,  $\lambda = 0,85$  si  $T_1 \leq 2 T_C$  et si le bâtiment a plus de 2 étages (voir 2.14.1 pour la définition de  $T_C$ ). Sinon  $\lambda = 1,0$ .

Cette méthode de calcul statique des sollicitations dynamique est ce qu'on appelle, dans l'Eurocode 8, la « **méthode d'analyse par forces latérales** ». Elle était précédemment appelée « méthode de la force statique équivalente » ou « analyse dynamique simplifiée ».

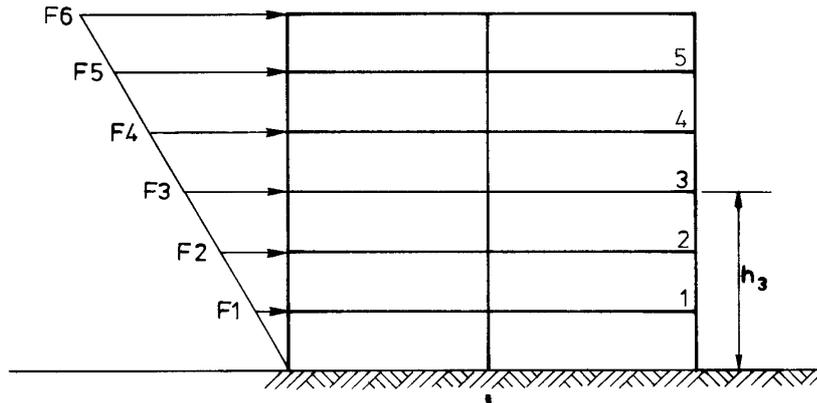


Figure 2.16. Analyse par forces latérales « équivalentes ».

### 2.13.2 Estimation de la période fondamentale $T_1$ .

Au départ d'un projet, un problème se pose: l'action sismique  $S_d(T_1)$ , dont découle l'effort tranchant sismique à la base  $F_b$ , et les sollicitations de la structure dépendent de la période  $T_1$ , qui est inconnue car elle est fonction des raideurs des éléments structurels non encore dimensionnés.

On résout ce problème :

- soit par essai et erreur, en partant d'une estimation de  $T_1$  ; on donne au Tableau ci desous des formules de calcul ou d'estimation de la période de divers solides.
- soit en considérant pour  $S_d(T_1)$  l'ordonnée maximum du spectre  $S_d(T)$ , qui correspond au palier compris entre les périodes  $T_B$  et  $T_C$ , ce qui donne une estimation en sécurité de  $F_b$ .

**Tableau 2.3. Evaluation de  $T_1$** 

Note 1 : unités cohérentes ! masse : Kg force : N longueur : m temps(période  $T_1$ ) : s  
 Note 2 : dans les structures en béton, on considère  $E=E/2$  pour prendre en compte la fissuration.

Solide & Période $T_1$	Origine des relations
$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{MH^3}{3EI}}$	Formule physique exacte pour l'oscillateur simple. Masse concentrée M en tête d'une console verticale de hauteur H. Masse de barre $M_B = 0$
$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{0,24M_B H^3}{3EI}}$	Formule physique exacte pour l'oscillateur simple. Console verticale de hauteur H et de masse totale $M_B$
$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{(M + 0,24M_B)H^3}{3EI}}$	Formule physique exacte pour l'oscillateur simple. Masse concentrée M en tête d'une console verticale dont la hauteur vaut H et la masse $M_B$ .
$T_1 = C_t \cdot H^{3/4}$ H hauteur du bâtiment en m depuis les fondations ou le soubassement rigide	Relation empirique de l'Eurocode 8. $C_t = 0,085$ portiques spatiaux en acier $C_t = 0,075$ portiques spatiaux en béton & ossature acier à triangulation excentrée $C_t = 0,050$ autres structures
$T_1 = C_t \cdot H^{3/4}$ H hauteur du bâtiment en m depuis les fondations ou le soubassement rigide	Relation empirique de l'Eurocode 8. Structures à murs de contreventement en béton ou maçonnerie $C_t = 0,075 / \sqrt{A_c}$ $A_c = \Sigma [A_i \cdot (0,2 + (l_{wi} / H))^2]$ $A_c$ aire effective totale des sections des murs de contreventement au premier niveau du bâtiment en m <sup>2</sup> $A_i$ aire de la section du mur de contreventement $i$ au premier niveau du bâtiment en m <sup>2</sup> $l_{wi}$ longueur du mur de contreventement $i$ au premier niveau dans la direction parallèle aux forces appliquées en m, à condition que: $l_{wi} / H \leq 0,9$ $\Sigma$ s'applique sur tous les murs $i$ parallèles à la direction des forces appliquées
$T_1 = 2 \cdot \sqrt{d}$	Relation empirique. Eurocode 8. $d$ déplacement élastique horizontal du sommet du bâtiment en m dû aux charges gravitaires appliquées horizontalement.

### **2.13.3 Distribution verticale des forces sismiques horizontales.**

Pour définir la distribution sur la hauteur du bâtiment des forces horizontales équivalentes à l'action sismique, il faut calculer la déformée du mode fondamental dans chaque direction d'analyse horizontale du bâtiment. On peut faire ce calcul :

- à l'aide de méthodes de dynamique des structures (mais alors on perd la simplicité, principal avantage de la méthode).
- de manière approchée, en supposant que les déplacements horizontaux (et donc les accélérations et donc les forces d'étage) croissent linéairement avec la hauteur du bâtiment (déformée linéaire).

Les effets de l'action sismique sont déterminés en appliquant, dans les deux modèles plans, des forces horizontales  $F_i$  à tous les étages.

Dans le cas où on établit la déformée, on a : 
$$F_i = F_b \cdot \frac{s_i \cdot m_i}{\sum s_j \cdot m_j}$$

$F_i$  est la force horizontale agissant au niveau  $i$  ;  $F_b$  est l'effort tranchant à la base ;

$s_i, s_j$  sont les déplacements des masses  $m_i, m_j$  dans le mode fondamental ;

$m_i, m_j$  sont les masses des niveaux.

$\Sigma$  est une somme de 1 à  $n$ , nombre de niveaux au-dessus du sol, y compris le toit.

Si on considère la déformée linéaire, on a : 
$$F_i = F_b \cdot \frac{z_i \cdot m_i}{\sum z_j \cdot m_j}$$

Si on considère la déformée linéaire et que les masses sismiques d'étage sont égales, la distribution

verticale des forces horizontales  $F_i$  d'étage est triangulaire- Figure 2.16 et 2.17 : 
$$F_i = F_b \cdot \frac{z_i}{\sum z_j}$$

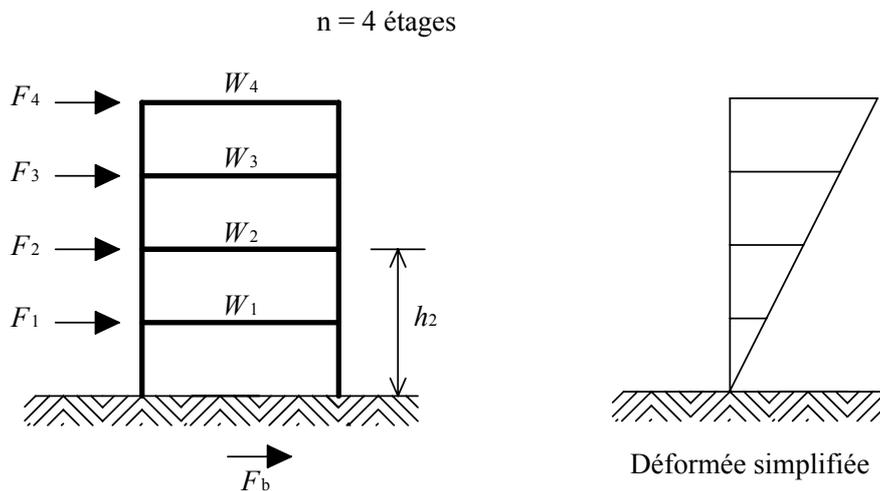


Figure 2.17. Distribution verticale des forces  $F_i$  si les masses sismiques d'étage sont égales

#### **2.13.4 Distribution des forces horizontales d'étage $F_i$ dans les contreventements.**

Les forces horizontales  $F_i$  d'étage se distribuent dans les contreventements.

Si les planchers constituent des diaphragmes rigides dans leur plan, les  $F_i$  se distribuent entre les divers contreventements au pro rata des raideurs de ces derniers.

Si les planchers ne constituent pas des diaphragmes rigides dans leur plan, l'analyse de la structure doit en tenir compte et la méthode simplifiée ne peut pas être appliquée.

## **2.14 Spectres de réponse de l'Eurocode 8.**

On reprend ci-dessous pour information des éléments de l'Eurocode 8.

### **2.14.1 Spectre élastique $S_e(T)$ horizontal de réponse en accélération.**

La représentation de base de l'action sismique en un point donné de la surface du sol est exprimée par un spectre de réponse élastique en accélération. L'aléa est caractérisé par le paramètre « accélération maximale de référence  $a_{gr}$  au niveau d'un sol de classe A (bedrock) ». Cette accélération vaut pour les structures auxquelles on attribue un coefficient d'importance  $\gamma_i = 1,0$ . Pour les autres catégories d'importance, l'accélération de calcul au niveau d'un sol de classe A vaut  $a_g = \gamma_i \cdot a_{gr}$ . Ceci revient à considérer pour ces structures d'autres périodes de retour que la période de référence  $T_{NCR}$ .

Les catégories d'importance  $\gamma_i$  des bâtiments recommandées par l'Eurocode 8 sont données au Tableau 2.1.

Le spectre de réponse élastique horizontal  $S_e(T)$  est formulé mathématiquement de façon unique pour l'Europe, à l'aide des paramètres suivants :

$T_B$  limite inférieure des périodes correspondant au palier d'accélération spectrale constante

$T_C$  limite supérieure des périodes correspondant à ce palier

$T_D$  valeur définissant le début de la branche à déplacement spectral constant

$S$  paramètre du sol, dont les valeurs sont définies au Tableau 2.2.

$\eta$  coefficient de correction de l'amortissement ( $\eta = 1$  pour 5 % d'amortissement visqueux)

$\eta = \sqrt{10 / (5 + \xi)} \geq 0,55$  où  $\xi$  est le coefficient d'amortissement visqueux, en %

$a_g = \gamma_i \cdot a_{gr}$   $a_{gr}$  : accélération maximale de référence au niveau d'un sol de classe A (bedrock).

$$0 \leq T \leq T_B : S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \left[ 1 + \frac{T}{T_B} \cdot (\eta \cdot 2,5 - 1) \right]$$

$$T_B \leq T \leq T_C : S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2,5$$

$$T_C \leq T \leq T_D : S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2,5 \left[ \frac{T_C}{T} \right]$$

$$T_D \leq T \leq 4s : S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2,5 \left[ \frac{T_C T_D}{T^2} \right]$$

### **2.14.2 Spectre de calcul $S_d(T)$ horizontal de réponse en accélération.**

Le spectre de calcul horizontal  $S_d(T)$  est la représentation de l'action sismique la plus couramment utilisée dans l'analyse des ossatures de bâtiments. Il est basé sur le spectre élastique  $S_e(T)$ , mais il intègre aussi l'influence de certains aspects de la réponse des structures, en particulier, la capacité de

dissipation d'énergie de la structure dans des déformations plastiques, via le « coefficient de comportement  $q$  » .

Le spectre de calcul  $S_d(T)$  horizontal de réponse en accélération est formulé de façon unique pour l'Europe, à l'aide des paramètres suivants :

$S, T_B, T_C, T_D$ , donnés au Tableau 2.2.

$\beta$  est un coefficient fixant la limite inférieure des ordonnées du spectre (valeur recommandée  $\beta = 0,2$ ).

$a_g = \gamma \cdot a_{gr}$   $a_{gr}$  : accélération maximale de référence au niveau d'un sol de classe A (bedrock).

$$0 \leq T \leq T_B : S_d(T) = a_g \cdot S \cdot \left[ \frac{2}{3} + \frac{T}{T_B} \cdot \left( \frac{2,5}{q} - \frac{2}{3} \right) \right]$$

$$T_B \leq T \leq T_C : S_d(T) = a_g \cdot S \cdot \frac{2,5}{q}$$

$$T_C \leq T \leq T_D : S_d(T) \begin{cases} = a_g \cdot S \cdot \frac{2,5}{q} \cdot \left[ \frac{T_C}{T} \right] \\ \geq \beta \cdot a_g \end{cases}$$

$$T_D \leq T : S_d(T) \begin{cases} = a_g \cdot S \cdot \frac{2,5}{q} \cdot \left[ \frac{T_C T_D}{T^2} \right] \\ \geq \beta \cdot a_g \end{cases}$$

### **2.14.3 Spectre de réponse élastique en déplacement.**

Jusqu'à la période de contrôle  $T_E$ , les ordonnées du spectre de réponse élastique en déplacement  $S_{De}(T)$  sont obtenues à partir des expressions du spectre de réponse élastique en accélération  $S_e(T)$ :

$$S_{De}(T) = S_e(T) \left[ \frac{T}{2\pi} \right]^2$$

Pour des périodes de vibration au delà de  $T_E$ , les ordonnées du spectre de réponse élastique en déplacement sont données par :

$$T_E \leq T \leq T_F : S_{De}(T) = 0,025 a_g \cdot S \cdot T_C \cdot T_D \left[ 2,5\eta + \left( \frac{T - T_E}{T_F - T_E} \right) (1 - 2,5\eta) \right]$$

$$T \geq T_F : S_{De}(T) = d_g$$

$S, T_C$  et  $T_D$  : voir Tableaux ci dessus ;  $d_g$  : déplacement de calcul, voir en 2.14.5.

Périodes  $T_E$  et  $T_F$ , voir Tableau ci dessous.

**Eurocode 8. Périodes  $T_E$  et  $T_F$  du spectre de déplacement (séisme de type 1, lointain de  $M_S \geq 5,5$ ).**

Type de sol	$T_E$ (s)	$T_F$ (s)
A	4,5	10,0
B	5,0	10,0
C	6,0	10,0

D	6,0	10,0
E	6,0	10,0

#### **2.14.4 Spectre de réponse en accélération élastique vertical**

La composante verticale de l'action sismique est représentée par un spectre de réponse élastique

$$S_{ve}(T) : a_g = \eta \cdot a_{gr}$$

$a_{gr}$  : accélération maximale de référence au niveau d'un sol de classe A (bedrock).

$$0 \leq T \leq T_B : S_{ve}(T) = a_{vg} \cdot \left[ 1 + \frac{T}{T_B} \cdot (\eta \cdot 3,0 - 1) \right]$$

$$T_B \leq T \leq T_C : S_{ve}(T) = a_{vg} \cdot \eta \cdot 3,0$$

$$T_C \leq T \leq T_D : S_{ve}(T) = a_{vg} \cdot \eta \cdot 3,0 \left[ \frac{T_C}{T} \right]$$

$$T_D \leq T \leq 4s : S_{ve}(T) = a_{vg} \cdot \eta \cdot 3,0 \left[ \frac{T_C \cdot T_D}{T^2} \right]$$

L'accélération verticale  $a_{vg}$  est une fraction de l'action horizontale, définie au tableau suivant.

Valeurs recommandées des paramètres décrivant le spectre de réponse élastique vertical.

Spectre	$a_{vg}/a_g$	$T_B(s)$	$T_C(s)$	$T_D(s)$
Type 1 (séisme lointain $M_S \geq 5,5$ )	0,90	0,05	0,15	1,0
Type 2 (séisme proche $M_S \leq 5,5$ )	0,45	0,05	0,15	1,0

#### Spectre de réponse en accélération vertical de calcul .

Le spectre de réponse vertical de calcul est donné par les expressions du spectre horizontal de calcul avec :

- l'accélération de calcul du sol dans la direction verticale  $a_{vg}$  à la place de  $a_g$
- $S = 1,0$
- $q \leq 1,5$  pour tous les matériaux et tous les systèmes structuraux.

#### Déplacement de calcul du sol.

Le déplacement de calcul au niveau du sol  $d_g$ , correspondant à l'accélération de calcul au niveau du sol, peut être estimé par :

$$d_g = 0,025 \cdot a_g \cdot S \cdot T_C \cdot T_D$$

