

Chapitre 4.

Réponse des bâtiments en torsion.

4.1 Introduction.

Dans le contexte de l'action sismique, plusieurs faits sont à l'origine de la torsion des bâtiments. Il y a d'abord l'existence d'excentricités structurales entre les centres de gravité CM_i et les centre de rigidité CR_i (ou centre de torsion, voir définition en 4.4.1) à chaque niveau i :

- Les composantes horizontales de l'action sismique induisent dans une structure, outre la flexion et le cisaillement, de la torsion, car le centre de gravité CM_i , point de passage de la force d'inertie engendrée par le tremblement de terre à un niveau i donné, n'est généralement pas confondu avec le centre de torsion CR_i de cet étage. Il en résulte les moments de torsion $M_t = V_y \cdot (CM_i CR_i)_x$ où

$M_t = V_x \cdot (CM_i CR_i)_y$ (voir Figure 4.1).

- Dans une construction multi - étagée, les centres de masses CM_i des différents étages i ne sont pas nécessairement sur une même verticale, pas plus que les centres de torsion CR_i . Un niveau j dont le centre de masse CM_j serait confondu avec le centre de torsion CR_j peut donc quand même être soumis à une torsion résultant des décalages entre CM et CR aux niveaux supérieurs.

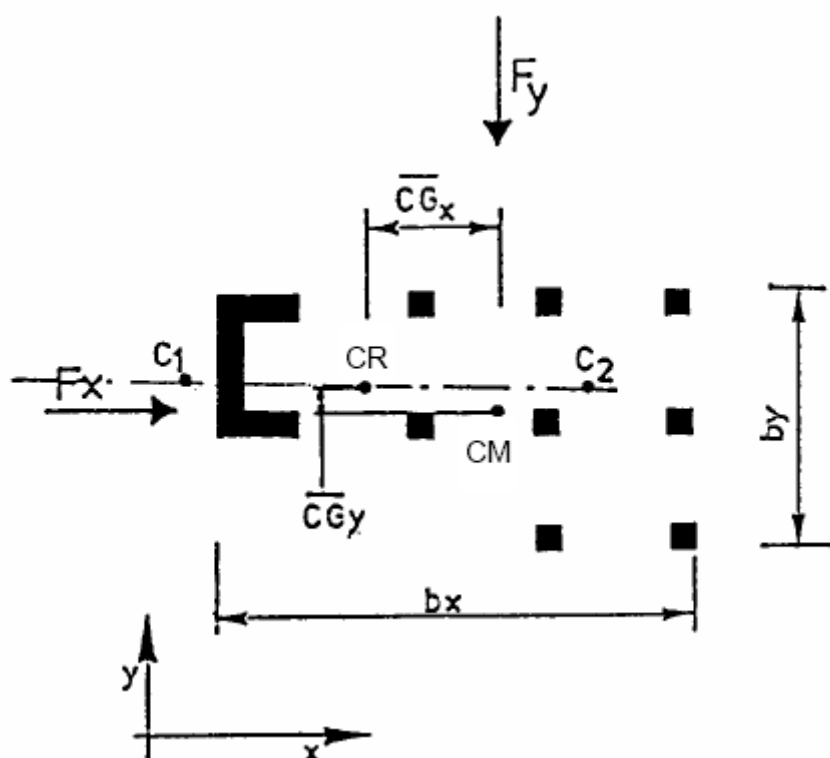


Figure 4.1. Le décalage entre CM et CR entraîne une torsion du bâtiment.

Il y a ensuite des incertitudes diverses sur les positions de CM et CR :

4.2

- La position du centre de masse CM_i de chaque niveau n'est pas connue avec précision, car elle dépend de l'utilisation : position du mobilier, affectation des locaux en archives, salle de réunion, etc ...

- La position du centre de raideur CR_i de chaque niveau n'est pas connue avec précision, car elle dépend de la flexibilité réelle des diverses unités de contreventement, qui est forcément une estimation, en particulier dans les constructions en béton.

Enfin, il existe des phénomènes additionnels engendrant de la torsion, tels que :

- La possibilité de couplage des réponses longitudinale et torsionnelle

- Des mouvements horizontaux différentiels du sol correspondant à la propagation des ondes de cisaillement en surface, qui appliquent aux constructions des rotations alternées faisant appel à leur inertie torsionnelle ; cet effet existe toujours ; il est significatif pour les constructions dont la longueur est comparable à la longueur des ondes de cisaillement.

On tient compte des phénomènes décrits en considérant 2 contributions à la torsion :

- la torsion résultant de la non-coïncidence des centres de gravité CM avec les centres de torsion CR , qu'on appelle dans la suite **la torsion "naturelle"**, cependant que la distance entre CM et CR est appelée **excentricité structurale e_0** .

- la torsion résultant des incertitudes et phénomènes additionnels divers, qu'on appelle dans la suite **torsion "accidentelle"** et qui est traduite dans une **excentricité accidentelle e_a** additionnelle à l'excentricité structurale e_0 .

Dans l'Eurocode 8, l'« excentricité accidentelle » additionnelle à l'excentricité naturelle vaut :

$e_{ai} = \pm 0,05 L_i$ où e_{ai} est l'excentricité accidentelle de la masse du niveau i par rapport à sa position nominale, appliquée dans la même direction à tous les niveaux et L_i est la dimension du plancher perpendiculaire à la direction de l'action sismique. Pour un séisme de direction y , les moments de torsion de calcul à considérer dans l'analyse simplifiée sont $M_{t1} = V_i (e_{ox} + 0,05 L_i)$ et $M_{t2} = V_i (e_{ox} - 0,05 L_i)$. De même pour un séisme de direction x .

Il existe plusieurs façons de tenir compte des effets de la torsion présente dans la réponse d'un bâtiment:

- si on effectue une analyse d'un modèle 3D de la structure à l'aide d'un logiciel, les flexibilités de tous les éléments structuraux sont prises en compte et la torsion **naturelle** est automatiquement calculée ; ce n'est pas le cas de la torsion **accidentelle**, qui demande un calcul additionnel dont on cumule les résultats à ceux du précédent (voir 4.2). C'est l'analyse prescrite par l'Eurocode 8 pour les bâtiments irréguliers (voir 4.6 pour la définition des paramètres caractérisant la régularité d'un bâtiment et 7.5 pour les méthodes de calcul imposées en relation à une irrégularité donnée). Il est possible de réaliser une analyse 3D approchée sans logiciel, au prix d'hypothèses simplificatrices (voir 4.3) ;

- après une analyse du type défini ci-dessus (modèle 3D de la structure dans un logiciel, torsion **naturelle** automatiquement calculée), l'Eurocode 8 permet de tenir compte de la torsion **accidentelle**

en amplifiant les résultats de l'analyse par un coefficient δ . L'Eurocode 8 propose une valeur du coefficient δ : $\delta = 1 + 0,6 x/L_e$; x est la distance (en plan) de l'élément considéré au centre de gravité du bâtiment, L_e est la distance entre les 2 éléments de contreventement extrêmes, grandeurs mesurées perpendiculairement à la direction de l'action sismique. Cette valeur est assez pénalisante, mais l'Eurocode 8 n'interdit pas de considérer des valeurs de δ plus réalistes. On en propose en 4.5 .

- L'Eurocode 8 permet de limiter les analyses à deux modèles plans, un dans chaque direction, pour les structures dont les éléments de raideur et les masses sont distribués assez régulièrement ; pour tenir compte de la torsion **accidentelle**, il faut dans ce cas amplifier les résultats de l'analyse par un coefficient δ en amplifiant par un coefficient δ : $\delta = 1 + 1,2 x/L_e$. Cette valeur est plus pénalisante encore que la précédente, mais l'Eurocode 8 n'interdit pas de considérer des valeurs de δ plus réalistes. On en propose en 4.5.

4.2 Calcul des effets de la torsion par des analyses dynamiques sur modèles 3D de bâtiments.

Dans l'analyse dynamique d'une structure effectuée sur un modèle 3 D de structure, les modes de vibration torsionnels sont mis en évidence comme les autres par l'analyse pour ce qui concerne la torsion "naturelle" résultant d'excentricité "structurales" entre les centres de gravité CM et les centres de rigidité CR . Les effets calculés S_{3D} (sollicitations, déplacements) incluent les effets de la torsion naturelle.

Un problème pratique existe concernant la prise en compte de l'excentricité accidentelle (voir 4.1) dont les codes demandent d'affecter la position des centres de gravité d'étage, car déplacer le centre de gravité CM en modifiant la distribution des masses peut s'avérer compliqué dans les structures multi étagées complexes.

Si des diaphragmes ou planchers rigides sont présents, l'Eurocode 8 permet de déterminer les effets de torsion accidentels en appliquant des moments de torsion statiques $M_{ai} = e_{ai} \cdot F_i$ d'axe vertical à chaque niveau i . e_{ai} est l'excentricité accidentelle de la masse du niveau i et F_i la force horizontale d'étage agissant au niveau i .

On considère les e_{ai} et F_i des différentes directions de séisme analysées et avec des signes positif et négatif pour F_i et on applique le même signe pour tous les étages (ce qui donne le maximum possible).

Un problème pratique est la détermination des forces horizontales d'étage F_i . Celles-ci sont en principe établies par l'analyse dynamique 3D et déduite du diagramme des cisaillements résultants d'étage en faisant la différence des valeurs résultantes entre étages successifs. Ce calcul peut être fastidieux. On peut éventuellement effectuer une estimation simplifiée des forces horizontales d'étage

F_i en effectuant une distribution triangulaire de la résultante globale de cisaillement en pied du bâtiment, valeur simple donnée comme résultat de l'analyse.

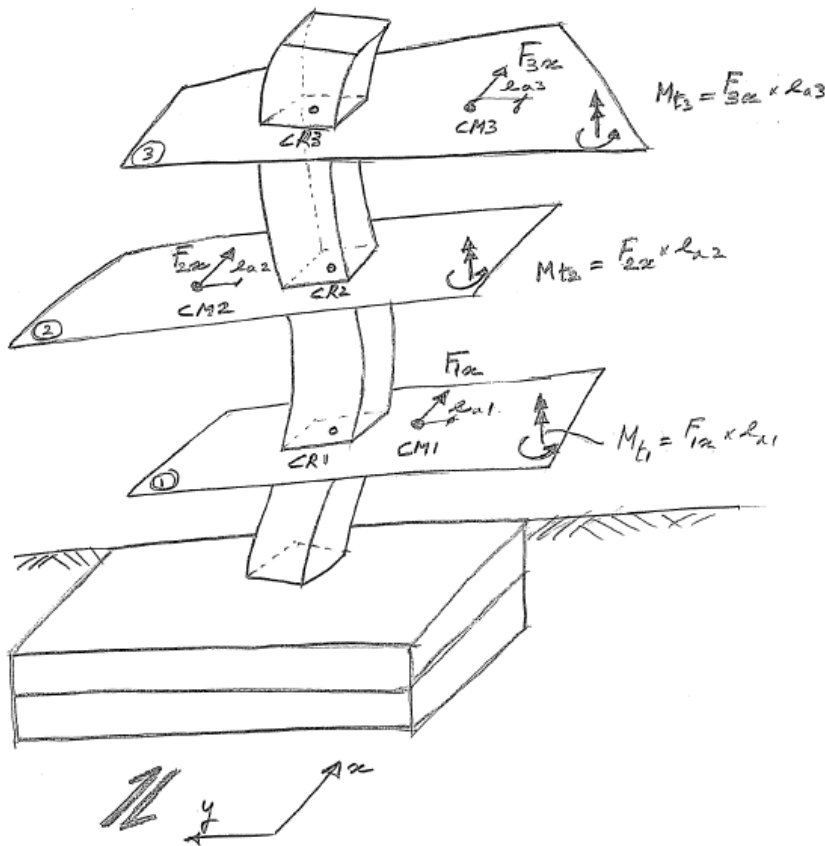


Figure 4.2. Les effets des excentricités accidentelles e_{ai} sont calculés séparément dans une analyse statique où on applique les M_{ai} .

L'application d'un moment de torsion M_{ai} peut être effectué:

- en appliquant un moment M_{ai} d'axe vertical en un point quelconque du diaphragme
- en appliquant une paire de forces FT_i égales, parallèles, de direction opposée et entredistantes de d_i , tel que $FT_i d_i = M_{ai}$

La position de la paire de forces FT_i est quelconque, comme leur orientation, car le résultat est seulement un couple appliqué.

On combine les effets (solicitations, déplacements) calculés dans l'analyse 3D (effets définis positifs par les moyennes quadratiques) aux effets résultant de l'application des moments M_{ai} (qui peuvent être négatifs ou positifs). Compte tenu du problème de signe, c'est $\pm S_{3D} \pm S_{torsion,acc}$ qu'il faut considérer.

La solution décrite et admise dans l'Eurocode 8 est une simplification qui place en sécurité.

On peut aussi penser à évaluer les sollicitations torsionnelles résultantes en déplaçant les centres de gravité d'étage de l'excentricité accidentelle requise, tout en conservant la même masse totale à chaque niveau, mais il faut noter :

- il n'y a pas une distribution de masse unique qui réalise cette condition,
- déplacer les masses change les modes et les périodes, ce qui introduit une erreur dans le calcul.

On note aussi que, dans les structures très dissymétriques, l'excentricité accidentelle $e_a=0,05L$ peut être faible devant l'excentricité naturelle $e_0=CM-CR$. Dans ce cas, les effets de l'excentricité accidentelle peuvent être négligés.

4.3 Evaluation des effets de l'excentricité accidentelle par des relations forfaitaires.

4.3.1 Perspective générale.

L'Eurocode 8 permet de tenir compte de la torsion **accidentelle** en amplifiant par un coefficient δ les résultats d'une analyse ignorant cette contribution.

Si l'analyse utilise un modèle 3D de la structure dans un logiciel, la torsion **naturelle** est automatiquement calculée et le coefficient δ proposé est: $\delta = 1 + 0,6 x/L_e$;

x est la distance (en plan) de l'élément considéré au centre de gravité du bâtiment, L_e est la distance entre les 2 éléments de contreventement extrêmes, grandeurs mesurées perpendiculairement à la direction de l'action sismique.

Si on limite l'analyse à deux modèles plans, un dans chaque direction (acceptable pour les structures dont les éléments de raideur et les masses sont distribués assez régulièrement), le coefficient δ proposé est : $\delta = 1 + 1,2 x/L_e$.

Ces valeurs de δ proposées par l'Eurocode 8 sont très pénalisantes dans certains cas.

Ainsi, pour des éléments de contreventement situés en périphérie, on a : $x = L_e/2$ et la relation

$\delta = 1 + 0,6 x/L_e$ donne $\delta = 1,3$, soit une augmentation de 30 % des sollicitations et déplacements établis par un modèle 3D. L'augmentation est de 60% si on limite l'analyse à deux modèles plans.

Il est rare qu'un calcul explicite conduise à des δ aussi élevés, comme on le montre dans les exemples ci-après.

On y évalue à l'aide d'analyses simplifiées le coefficient δ_c par lequel il faut multiplier $S_{trans, a}$ pour trouver la sollicitation $(S_{tors, a} + S_{trans, a})$ résultante des effets translationnel et torsionnels cumulés. par δ_c . On calcule δ_c par :

$$\delta_c = (S_{tors, a} + S_{trans, a}) / S_{trans, a}$$

4.3.2 Evaluation de quelques valeurs de δ_c

Dans une structure dont la raideur en torsion est assurée par seulement 2 voiles d'extrémité – Figure

4.11.A, on a :

$$S_{\text{transl}, a} = S_{\text{transl}, b} = 0,5 V$$

$$M_t = V \times 0,05 L$$

$$S_{\text{tors}, a} = S_{\text{tors}, b} = M_t/L = 0,05 V$$

$$\delta_c = (S_{\text{tors}, a} + S_{\text{trans}, a}) / S_{\text{trans}, a} = 0,55/0,5 = 1,10 < 1,30$$

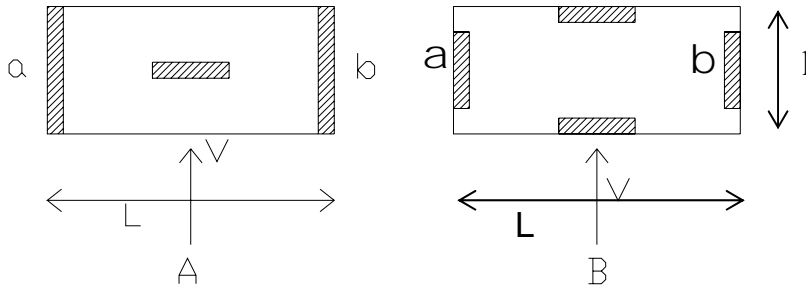


Figure 4.3. A) Structure dont le contreventement pour la torsion consiste en 2 voiles.

B) Structure dont le contreventement pour la torsion consiste en 4 voiles

Si on considère une structure où 4 voiles identiques sont présents à raison d'un par façade, Figure

4.11.B, on a :

$S_{\text{transl}, a}$, $S_{\text{transl}, b}$ et M_t comme dans l'exemple précédent

Si $L = 2l$, $S_{\text{tors}, a} = 4/5 \cdot 0,05 V = 0,04 V$ et $\delta_c = 0,54/0,5 = 1,08 \ll 1,30$.

Si $L = l$, $S_{\text{tors}, a} = 1/2 \cdot 0,05 V = 0,025 V$ et $\delta_c = 0,525/0,5 = 1,05 \ll 1,30$.

Par contre, pour la halle de la Figure 4.4. où 11 contreventements parallèles reprennent la torsion:

$$S_{\text{transl}, a} = V/11 = 0,0909 V$$

$$M_t = 0,05 VL$$

La distribution des $S_{\text{tors}, i}$ dans les voiles est telle que :

$$S_{\text{tors}, 1} = S_{\text{tors}, 5}/5, S_{\text{tors}, 2} = 2 S_{\text{tors}, 5}/5, \text{ etc,}$$

de sorte que l'équilibre s'écrit :

$$M_t = 0,05VL = 2 S_{\text{tors}, 5} \times \frac{L}{2} + 2 \frac{4}{5} S_{\text{tors}, 5} \frac{4L}{5} + \dots = S_{\text{tors}, 5} \frac{L}{5^2} (5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2)$$

$$M_t = \frac{55}{25} S_{\text{tors}, 5} \cdot L \Rightarrow S_{\text{tors}, 5} = \frac{25 \cdot 0,05V}{55} = 0,0227V$$

$$\delta_c = (0,0909 + 0,0227)/0,0909 = 1,25 \approx 1,30$$

Dans un bâtiment de plan rectangle proche d'un carré où des files de contreventement en portique sont présentes dans les deux directions principales, on aura : $\delta_{c, 2D} \approx \delta_{c, 1D} / 2 = 1 + 0,30/2 = 1,15$

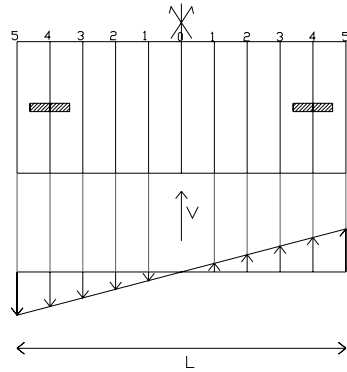


Figure 4.4. Structure de halle où le contreventement pour la torsion consiste en 11 voiles.

Dans la structure de la Figure 4.5, on a :

$$S_{\text{transl}, a} = 0,5 V$$

$$M_t = V \times 0,05 L$$

Pour une entredeistance des voiles égale à $L/2$:

$$S_{\text{tors}, a} = M_t/(L/2) = 0,1 V \quad \text{et} \quad \delta_c = (0,5 + 0,1)/0,5 = 1,20 < 1,30$$

Pour une entredeistance des voiles réduite à $L/4$,

$$S_{\text{tors}, a} = M_t/(L/4) = 0,2 V \quad \text{et} \quad \delta_c = (0,5 + 0,2)/0,5 = 1,40 > 1,30 !$$

Pour une entredeistance des voiles réduite à $L/8$,

$$S_{\text{tors}, a} = M_t/(L/8) = 0,4 V \quad \text{et} \quad \delta_c = (0,5 + 0,4)/0,5 = 1,80 \gg 1,30 !$$

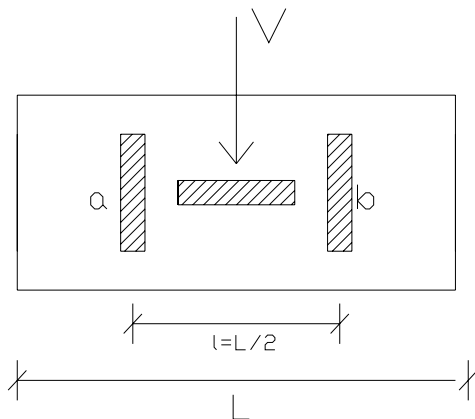


Figure 4.5. Structure où 2 voiles proches du centre constituent le contreventement pour la torsion.

4.3.3 Conclusions.

On voit que le calcul des sollicitations de torsion « accidentelle » effectué à l'aide des coefficients amplificateur forfaitaire δ des sollicitations translationnelles de l'Eurocode 8 n'est pas précise.

δ est bien calibré pour des structures symétriques où :

- des contreventements orientés suivant un seul axe reprennent toute la torsion
- les contreventements ne sont pas en périphérie, mais n'en sont pas trop éloignés

- Les aspects torsionnels des critères de régularité sont respectés.

Dans les autres cas, un calcul explicite des effets de torsionnels peut conduire à des valeurs inférieures ou supérieures aux sollicitations résultantes évaluées à l'aide de la relation forfaitaire.

Des valeurs de δ sont proposées ci-dessus pour quelques cas particuliers.

4.4 Analyse approchée de la réponse torsionnelle.

4.4.1 Définitions et déterminations des centres de gravités et des centres de rigidité.

On considère le bâtiment schématisé à la Figure 4.6 pour la définition des symboles utilisés ci dessous.

Centre de gravité. Définition.

Chaque étage possède un centre de gravité cm_j à priori différent de celui des autres étages.

Pour déterminer les sollicitations d'un niveau i d'un bâtiment de n étages soumis à une action sismique, il faut connaître la position de la force horizontale résultante V_i appliquée à l'étage i ; V_i est la somme des forces d'étage au dessus du niveau i .

V_i passe par le centre de gravité CM_i de l'ensemble des étages situés au-dessus de l'étage i .

Centre de gravité CM_i . Détermination.

Pour déterminer CM_i , centre de gravité des masses m_j situées au dessus du niveau i (voir Figure 4.6), il faut :

- déterminer la masse m_j , "masse sismique" de l'étage j telle que définie en 7.3, et la position du centre de gravité cm_j de chacun des étages au-dessus de l'étage i ; cette position peut s'exprimer par des coordonnées X_j et Y_j par rapport à un système d'axe quelconque (le même pour tous les étages ...);

- calculer la position de la résultante $\sum_{j=i+1}^n m_j$, soit ses coordonnées X_{CM_i} et Y_{CM_i}

L'équilibre de moment par rapport à l'origine des axes (X, Y) donne X_{CM_i} et Y_{CM_i} :

$$X_{CM_i} = \frac{\sum_{j=i+1}^n m_j X_j}{\sum_{j=i+1}^n m_j} \quad (4.1)$$

$$Y_{CM_i} = \frac{\sum_{j=i+1}^n m_j Y_j}{\sum_{j=i+1}^n m_j} \quad (4.2)$$

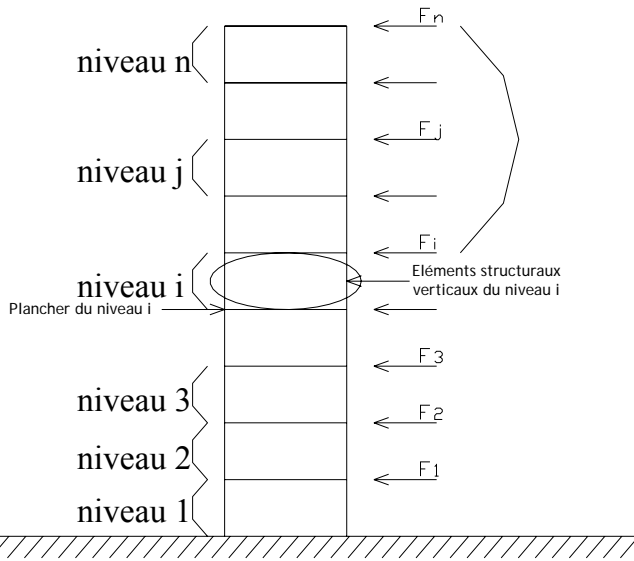


Figure 4.6. Définition des symboles et indices.

Centre de rigidité. Définition.

On désigne par V_i la résultante des forces horizontales appliquées au-dessus du niveau i d'un bâtiment et qui sollicite les éléments structuraux verticaux du niveau i . Dans l'hypothèse où le plancher du niveau $i+1$ constitue un diaphragme infiniment rigide dans son plan (aucun déplacement horizontal relatif des points de ce plan), le déplacement relatif du plancher du niveau $i+1$ par rapport au plancher du niveau i peut être traduit comme la somme de 2 composantes :

- un déplacement translationnel (relatif du plancher du niveau $i+1$ par rapport au plancher du niveau i) suivant l'axe d'application de V_i ;
- une rotation (relative du plancher du niveau $i+1$ par rapport au plancher du niveau i)

Si V_i est appliqué à gauche du bâtiment, la rotation a le sens indiqué à la Figure 4.7a) ; si V_i est appliqué à droite, la rotation a le sens opposé – Figure 4.7b). Il existe donc une ligne d'application de V_i telle que la rotation est nulle : elle définit la position du "centre de rigidité" CR_i des éléments structuraux verticaux du niveau i , notion similaire au "centre de torsion" ou "centre de cisaillement" défini en résistance des matériaux.

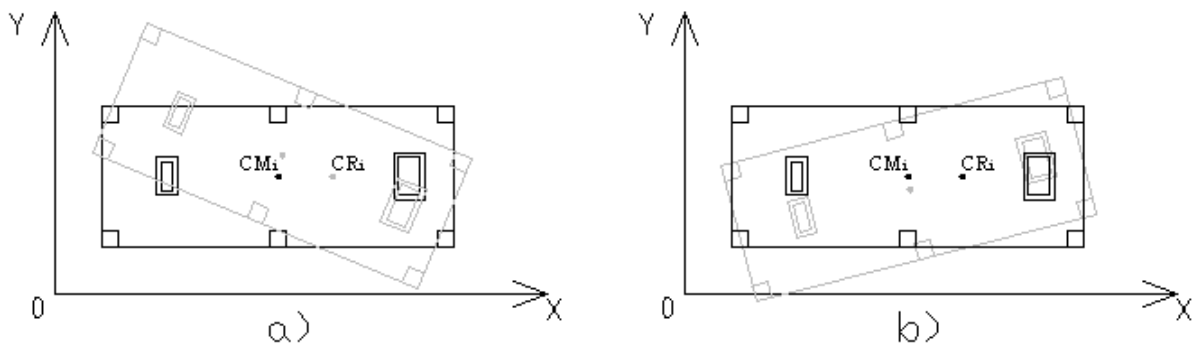


Figure 4.7. Position du "centre de rigidité".

Centre de rigidité CR_i . Détermination.

La position du centre de rigidité CR_i du niveau i dépend :

- des raideurs des éléments structuraux verticaux, colonnes, voiles, noyaux du niveau i
- des raideurs des éléments structuraux au dessus du niveau i ; en particulier, les éléments structuraux horizontaux du niveau $i+1$ forment des portiques avec les éléments structuraux verticaux du niveau i de sorte qu'en fait c'est la raideur de ces portiques qui définit la position du centre de rigidité CR_i

Toutes les raideurs des éléments structuraux sont à priori impliquées : flexionnelle, torsionnelle et de cisaillement, de sorte que, pour une majorité de structures, la détermination de la position exacte du centre de rigidité CR_i est difficile dans une approche simplifiée. On détermine une position approchée de CR_i , au prix de deux hypothèses simplificatrices :

- les planchers (diaphragmes) sont indéformables, non seulement dans leur plan (voir plus haut), mais aussi verticalement (pas de déformation de flexion).
- La résultante V_i du mode de déformation purement translationnel peut être utilisée pour calculer le moment de torsion.

Alors, la détermination de CR_i est simple.

Considérons le niveau i de la structure dont on donne la vue en plan à la Figure 4.8.

Elle comporte 6 poteaux d'inertie I_{xp} et 2 noyaux « a » et « b » d'inertie I_{xa} et I_{xb} (on considère ici les inerties I_x , qui sont celles sollicitées par la flexion résultant d'un mouvement sismique de direction y).

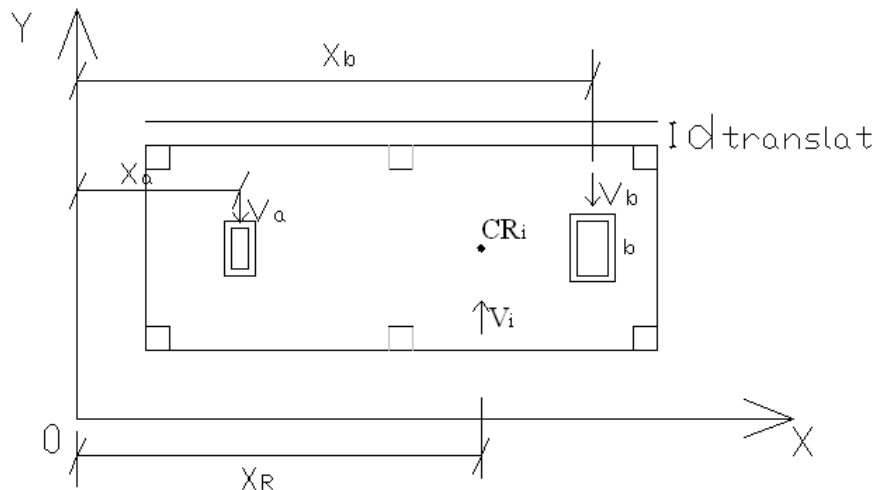


Figure 4.8. Vue en plan du niveau i du bâtiment.

Par définition X_R , abscisse du centre de rigidité dans le système de référence XY choisi, est telle que V_i appliqué à cette abscisse entraîne un déplacement purement translationnel du niveau $i+1$ par rapport au niveau i . Ce déplacement est noté d_{translat} à la Figure 4.8.

Dans ce cas, la résultante de cisaillement V_i de direction Y se répartit entre les poteaux et noyaux du niveau i suivant leurs raideurs flexionnelles relatives $\frac{(EI_x)_k}{\sum_k (EI_x)_k}$.

Par exemple, le noyau « a » reprend un cisaillement V_a :

$$V_a = V_i \frac{E_a I_{xa}}{E_a I_{xa} + E_b I_{xb} + 6 E_p I_{xp}} \quad (4.3)$$

Note 1 : pour les éléments verticaux dont la déformation de cisaillement est importante, on peut effectuer une correction de la raideur flexionnelle EI pour tenir compte de la déformation de cisaillement;

Note 2 : les raideurs torsionnelles n'interviennent pas dans le calcul de CR_i , parce que l'application de la résultante V_i au droit de CR_i est justement telle qu'il n'y a pas de rotation relative entre les niveaux $i+1$ et i , ni donc de torsion des éléments structurels verticaux.

Une équation d'équilibre moment par rapport à un point du plan permet de définir X_R . Si on écrit cette équation par rapport à l'origine des axes X, Y, on a :

$$V_i \cdot X_R = V_a X_a + V_b \cdot X_b + \sum_k V_{pk} X_{pk} \quad (4.4)$$

En remplaçant dans cette relation V_a , V_b , V_{pk} par leur valeur, on trouve :

$$X_R = \frac{\sum_k (E_p I_{xp} X_{pk}) + E_a I_{xa} X_a + E_b I_{xb} X_b}{\sum_k (E_p I_{xp}) + E_a I_{xa} + E_b I_{xb}} \quad (4.5)$$

Similairement :

$$Y_R = \frac{\sum_k (E_p I_{yp} Y_{pk}) + E_a I_{ya} X_a + E_b I_{yb} X_b}{\sum_k (E_p I_{yp}) + E_a I_{ya} + E_b I_{yb}} \quad (4.6)$$

La détermination de la position du centre de rigidité CR_i est susceptible de simplifications. Ainsi, si la raideur flexionnelle des voiles et noyaux ($E_a I_{xa}$, etc) est largement prépondérante sur la raideur flexionnelle cumulée des poteaux ($\sum E_p I_{xp}$, etc), on peut faire le calcul de X_R et Y_R en négligeant toute contribution des poteaux.

4.4.2 Principe de la détermination des sollicitations dues à la torsion.

Un moment de torsion appliqué à une structure est équilibré par des efforts internes correspondant à deux fonctionnements différents (voir Figure 4.9) :

- la torsion uniforme ou "circulatoire" ou "de St Venant" qui induit seulement des contraintes tangentielles dans la barre tordue, avec conservation des sections planes dans la barre ;
- la torsion reprise par la flexion différente de 2 ou plusieurs barres, qui induit des contraintes flexionnelles dans chacune des barres. Cette torsion, dite "non uniforme" ou "par flexion", entraîne que deux sections horizontales de 2 barres situées dans un même plan avant application de la torsion ne sont plus dans le même plan après ; il y a gauchissement.

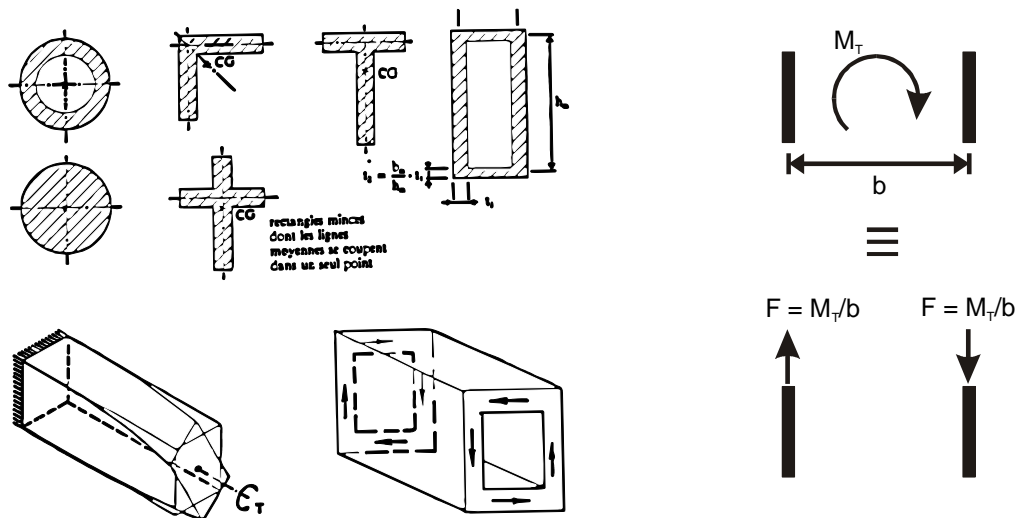


Figure 4.9. Torsion de St. Venant.

Torsion non uniforme (ou par flexion).

Dans l'hypothèse d'un diaphragme infiniment rigide dans son plan, la torsion induit une rotation φ du diaphragme centrée sur le centre de rigidité CR_i qui entraîne:

- une rotation relative φ entre les sections supérieures et inférieures des éléments structuraux verticaux du niveau i ; φ est égale dans tous les éléments.
- des déplacements horizontaux D des sections supérieures des éléments structuraux verticaux par rapport aux sections inférieures de ces éléments ; ces déplacements, tangents au cercle de centre CR_i , sont d'autant plus grand que l'élément structural vertical considéré se trouve sur un cercle de rayon r plus grand ;
- ces déplacements D , en général d'orientation quelconque, peuvent être décomposés en déplacements D_x selon x et D_y selon y ; le D_x d'un point est proportionnel à la valeur r_x de la projection sur x du rayon r joignant CR_i à l'axe vertical de l'élément structural vertical considéré ; idem pour D_y .

De cette dernière remarque découle le fait que le calcul des déplacements est plus simple à ce stade si on utilise un système d'axes centrés sur CR_i .

Dans ce système d'axe :

- la projection de l'excentricité structurale $e_0 = \overline{CR.CM}$ est e_{0x} sur l'axe x et e_{0y} sur l'axe y.

voir Figure 4.10.

- les déplacements D_x et D_y gardent leur valeur et on les décrit par les symboles d_x et d_y dans ce qui suit.

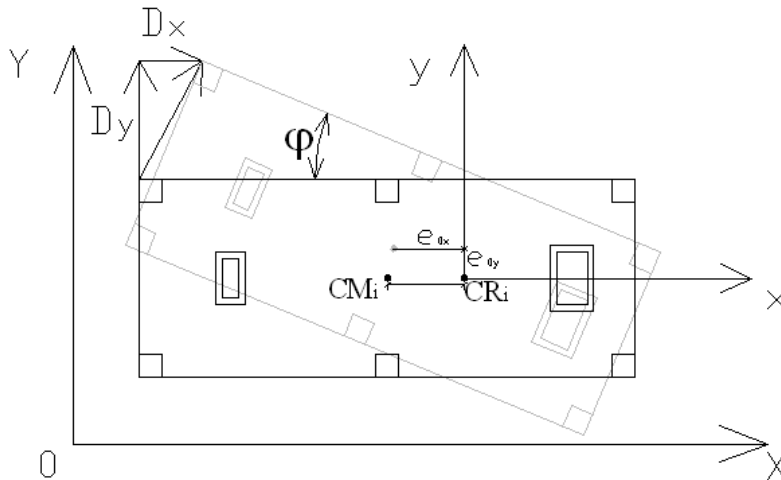


Figure 4.10. Déplacements de torsion.

L'analyse qui précède indique comment calculer la raideur torsionnelle totale C. Elle est composée de :

- termes de raideur torsionnelle C_{tu} des éléments structuraux verticaux, pour le travail en torsion uniforme (ou de St Venant).
- termes C_{flex} de raideur torsionnelle apportée par la flexion des éléments verticaux, pour le travail en torsion par flexion.

La raideur torsionnelle totale C est trouvée comme l'addition des divers termes C_{tu} et des divers termes

$$C_{flex} \text{ des } k \text{ structures verticales du niveau } i \text{ considéré : } C = \sum_k C_{tu} + \sum_k C_{flex}$$

On établit ci dessous les relations correspondant à ces 2 types de raideur.

4.4.3 Termes C_{tu} de la raideur torsionnelle dûs à la torsion uniforme.

La raideur torsionnelle C_{tu} des divers éléments structuraux verticaux est connue par la Mécanique des Matériaux. On donne au Tableau 4.1. des relations de calcul de C_{tu} . On a :

$$C_{tu} = GI_p \quad \text{raideur torsionnelle}$$

$$\theta = M_t / C_{tu} \quad \text{angle de torsion par unité de longueur verticale}$$

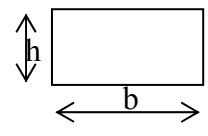
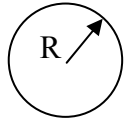
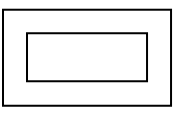
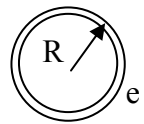
$$\varphi = (M_t \cdot h) / C_{tu} \quad \text{rotation relative de l'étage } i + 1 \text{ par rapport à l'étage } i$$

h : hauteur de l'étage

I_p : moment d'inertie polaire

G : module d'élasticité transversale ou module de glissement $G = E / [2(1+\nu)]$ où ν désigne le coefficient de Poisson (acier : $\nu = 0,3$; béton : $\nu = 0,2$)

Tableau 4.1. Moment d'inertie polaire de quelques sections.

Sections	I_p [m ⁴]	Sections	I_p [m ⁴]
Rectangle (plein) 	$\frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$	Cercle (plein) 	$\frac{\pi R^4}{2}$
tube rectangulaire  dim.ext : b*, h* dim.int : b, h	$I_p = I_{p,ext} - I_{p,int}$ $I_{p,ext}$ et $I_{p,int}$ Suivant formule ci – dessus.	Anneau de faible épaisseur 	$2\pi R^3 e$

4.4.4 Termes C_{flex} de la raideur torsionnelle dûs à la torsion par flexion.

Pour calculer l'apport de la raideur flexionnelle des éléments structuraux verticaux à la reprise de la torsion, on considère l'exemple d'un voile d'inertie I_x distant de x du centre de rigidité CR et on établit le coefficient C correspondant. On a :

$$\varphi = d_y/x \quad d_y : \text{déplacement relatif du voile au niveau } i+1 \text{ par rapport au niveau } i.$$

$$d_y = \frac{Fh^3}{12EI_x} \text{ relation entre la raideur d'un élément de longueur verticale } h \text{ biencastré et déplacé de } d$$

et la réaction d'appui F correspondante.

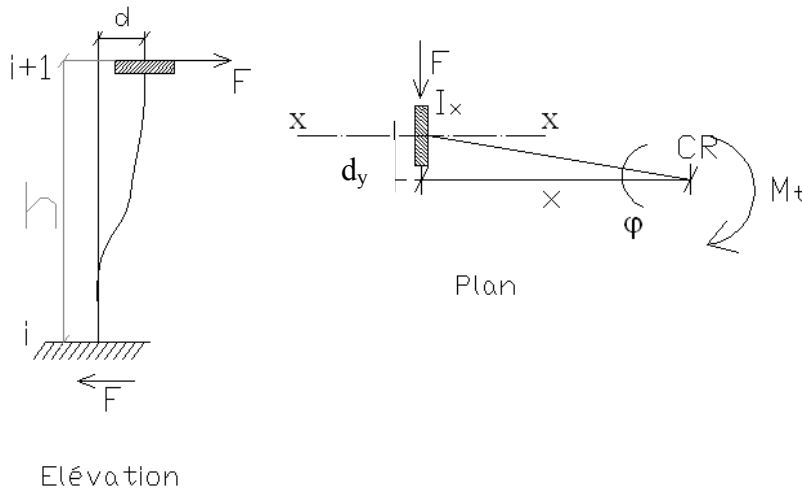


Figure 4.11. Etablissement de la raideur torsionnelle associée à la reprise de torsion par flexion d'un élément structural vertical.

$$F_x = M_t$$

$$\text{D'où } \varphi = \frac{M_t h^3}{12 E I_x x^2}$$

$$\text{Comme } \varphi = \frac{M_t h}{C_{flex}} \text{ (par définition), on trouve : } C_{flex,x} = \frac{12 E I_x x^2}{h^2}$$

$$\text{De même, on trouverait pour la composante dy du déplacement : } C_{flex,y} = \frac{12 E I_y y^2}{h^2}$$

4.4.5 Combinaison des raideurs torsionnelles C_{tu} et C_{flex} .

En se référant à l'exemple de la Figure 4.8, on trouve comme contribution totale du noyau a :

$$C_a = C_{flex,a,x} + C_{flex,a,y} + C_{tu,a} = \frac{12E}{h^2} (I_{xa} x_a^2 + I_{ya} y_a^2) + G I_{pa}$$

De même, on a pour le noyau b :

$$C_b = C_{flex,b,x} + C_{flex,b,y} + C_{tu,b} = \frac{12E}{h^2} (I_{xb} x_b^2 + I_{yb} y_b^2) + G I_{pb}$$

Pour les poteaux, en négligeant leur raideur torsionnelle propre ($C_{tu} \sim 0$), on a :

$$C_{poteaux} = \frac{12}{h^2} (\sum E I_x x^2 + \sum E I_y y^2)$$

$$\text{D'où : } C_{total} = C_{poteaux} + C_a + C_b \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{M_t h}{C_{total}}$$

4.4.6 Sollicitations dues à la torsion.

La fraction du moment de torsion total appliqué reprise par un élément structurel vertical particulier est proportionnelle à la contribution relative de cet élément à la raideur torsionnelle totale.

$$M_t h = \varphi C_{total} = \varphi (C_{poteaux} + C_a + C_b)$$

$$M_a = \frac{\varphi}{h} C_a = \frac{M_t}{C_{total}} C_a \quad M_b = \frac{M_t}{C_{total}} C_b \quad M_{poteau} = \frac{M_t}{C_{total}} C_{poteau}$$

Cette contribution relative est d'autant plus grande que :

- la distance x ou y de l'axe vertical de l'élément au centre de rigidité est grande ;
- la raideur C de l'élément pour la reprise de la torsion est grande.

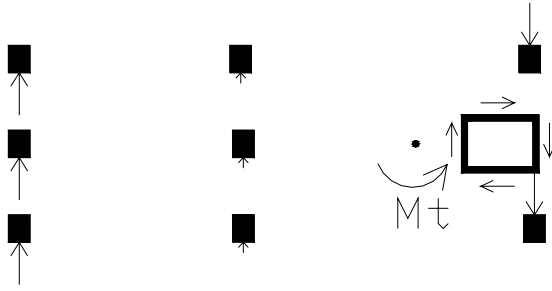


Figure 4.12. Contribution des éléments fléchis à la reprise de la torsion.

Ainsi, par exemple, pour un élément de type voile isolé dont la grande longueur est orientée suivant y , $C_{\text{flex},x} \gg C_{\text{flex},y}$ et $C_{\text{flex},y}$ peut être négligé. On a alors :

$$M_{\text{voile}} = \frac{M_t}{C_{\text{total}}} C_{\text{voile}} = \frac{M_t}{C_{\text{total}}} \frac{12 E I_x x^2}{h^2}$$

Le cisaillement associé vaut, pour ce voile : $V_{\text{voile}} = M_{\text{voile}}/x_{\text{voile}}$.

Pour des noyaux présentant une raideur torsionnelle GI_p d'un ordre de grandeur comparable à la

raideur $\frac{12 E}{h^2} (I_x x^2 + I_y y^2)$, la résultante de cisaillement appliquée à un mur est trouvée en additionnant

le cisaillement V résultant de la flexion (cf relation précédente) et le cisaillement V résultant de la torsion du noyau.

Celui-ci est calculé par la formule de Bredt : $V = \frac{M_t \cdot L}{2S}$

L : longueur du côté considéré (voir Figure 4.13)

S : aire de la section délimitée par le feuillet moyen des parois du noyau.

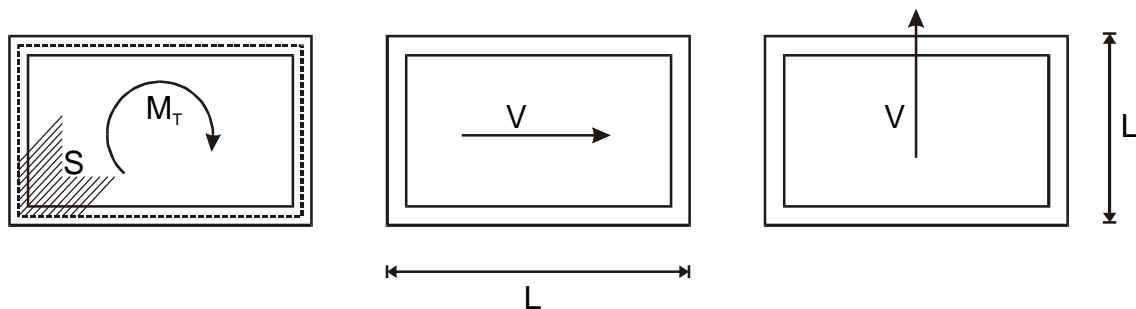


Figure 4.13. Calcul de la résultante de cisaillement. Notations.

4.4.7 Simplifications possibles dans l'analyse.

Il y a de grandes et de petites contributions à la rigidité torsionnelle C_{tot} . Ignorer les petits termes accélère le calcul. De façon générale :

- S'il y a des voiles ou noyaux proches de la périphérie de la structure, la contribution des colonnes à la rigidité torsionnelle C_{tot} est négligeable, tant pour les termes de rigidité flexionnelle que torsionnelle de ces poteaux ;

- Pour un voile, le terme de rigidité flexionnelle $\frac{12 EI}{h^2}$ (avec le moment d'inertie I d'axe fort) est largement supérieur aux autres (rigidité torsionnelle, rigidité flexionnelle pour l'axe faible).

Élément structural présent	Terme de raideur C des poteaux à considérer	Termes de raideur C des poteaux négligeables
1 seul voile orienté en y - x - - - - x -	$C_{flex,x} = 12 EI_x x^2/h^2$	$C_{flex,y}$ C_{tu}
1 seul voile orienté en x y _____ y	$C_{flex,y} = 12 E I_x y^2/h^2$	$C_{flex,x}$ C_{tu}
voiles orientés en x et y		$C_{flex,x}$ Si $C_{flex,x} \ll \Sigma C_{flex,x,voiles}$ $C_{flex,y}$ Si $C_{flex,y} \ll \Sigma C_{flex,y,voiles}$

4.4.8 Combinaison des sollicitations translationnelles et torsionnelles

Les explications qui précèdent montrent comment une résultante de cisaillement V_i axée sur le centre de gravité CM est remplacée par :

- une résultante de cisaillement V_i appliquée au centre de rigidité CR_i , qui donne à la structure une déformée purement translationnelle dans la direction de la force V_i . Cette application de V_i entraîne des effets (sollicitations, déplacements) $S_{translat}$ des éléments structurels verticaux ;
- un moment de torsion M_t , qui donne à la structure une rotation autour du centre de rigidité CR. Cette torsion entraîne des effets $S_{torsion}$ des éléments de structures verticaux.

On pourrait penser trouver les sollicitations résultantes en effectuant l'addition statique des effets de V_i et de $M_t = V_i x e$. Celle-ci conduirait, dans les éléments où $S_{translat}$ et $S_{torsion}$ sont de signes opposés, à des effets résultants ($S_{translat} + S_{torsion}$) inférieurs à un des termes S . Cette évaluation est erronée. En effet, il faut se rappeler que l'analyse effectuée porte sur la réponse dynamique de la structure et que les modes translationnels et torsionnels ne sont pas synchrones. Pour cette raison, il faut utiliser le

même type de combinaison des modes que lors d'une étude de réponse dynamique avec superposition modale, soit généralement une moyenne quadratique : $S_{\text{résultant}} = \sqrt{S_{\text{translat}}^2 + S_{\text{torsion}}^2}$

La combinaison la plus défavorable, soit $\pm S_{\text{translat}} \pm S_{\text{torsion}}$, est généralement trop pessimiste et ne s'appliquerait qu'en cas de modes de vibration translationnels et torsionnels non indépendants (notion à laquelle on n'a pas accès dans une approche simplifiée).

4.5 Exemple de calcul approché des effets de la torsion.

On considère la structure représentée ci-dessous (Figure 4.14). On suppose que la raideur EI_{xb} du voile b est égale à $2 EI_{xa}$.

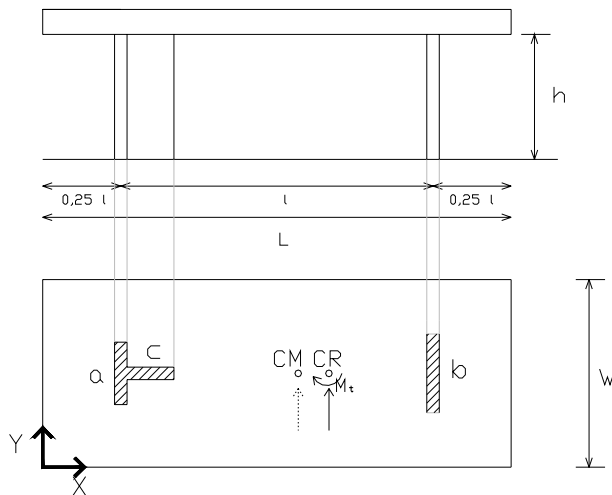


Figure 4.14. Structure à 2 contreventements de raideurs différentes.

Position du centre de gravité CM.

On suppose que CM se trouve au centre géométrique de la toiture rectangulaire.

Position du centre de rigidité.

$$X_R = \frac{EI_{xa} \times 0,25 \ell + 2 EI_{xa} \times 1,25 \ell}{EI_{xa} + 2 EI_{xa}} = \frac{2,75}{3} \ell = 0,9167 \ell$$

$$Y_R = \frac{EI_{yc} \times 0,5 W}{EI_{yc}} = 0,5 W$$

CR se trouve à $0,66 \ell$ du voile a et $0,33 \ell$ du voile b.

$$\overline{CM.CR} = e_{ox} = e_o = 0,165 \ell$$

Définition des actions de calcul.

Pour tenir compte de la torsion "naturelle", on remplace V appliqué au centre de gravité CM par les forces équivalentes :

- V appliqué en CR
- $M_{tm} = 0,165 V \ell$ (appliqué n'importe où, car c'est un couple de force ou moment appliqué à un diaphragme supposé infiniment rigide).

Pour calculer le moment de torsion de calcul M_t , il faut encore tenir compte de l'excentricité accidentelle e_a dont on doit déplacer le centre de gravité :

$$e_{ax} = \pm 0,05 L = \pm 0,05 \cdot 1,5 \ell = \pm 0,075 \ell$$

On déduit 2 moments de torsion de calcul correspondant aux 2 valeurs de l'excentricité totale e :

$$e_1 = e_{ox} + e_{ax} = 0,165 \ell + 0,075 \ell = 0,25 \ell$$

$$e_2 = e_{ox} - e_{ax} = 0,165 \ell - 0,075 \ell = 0,09 \ell$$

$$M_{t1} = 0,25 V \ell$$

$$M_{t2} = 0,09 V \ell$$

Les 2 valeurs e_1 et e_2 doivent être considérées, car $S_{torsion}$ et $S_{translat}$ sont fonction de e.

Détermination des sollicitations des voiles a et b dues au mouvement de translation.

V appliqué en CR donne lieu à des sollicitations $S_{a, transl}$ et $S_{b, transl}$ dans les voiles a et b correspondant à une déformation translationnelle globale de la structure ; V est donc distribué au prorata des raideurs des voiles a et b.

$$S_{transl, a} = 0,33 V$$

$$S_{transl, b} = 0,66 V$$

Détermination des sollicitations des voiles a et b due à la torsion.

$$\text{Voile a : } x_a = -0,66 \ell \quad \text{raideur torsionnelle } C_a = \frac{12 E I_{xa}}{h^2} (0,66 \ell)^2 = 5,22 E I_{xa} \ell^2/h^2$$

$$\text{Voile b : } x_b = +0,33 \ell \quad \text{raideur torsionnelle } C_b = \frac{12 E \cdot 2 I_{xa}}{h^2} (0,33 \ell)^2 = 2,6 E I_{xa} \ell^2/h^2$$

$$\text{Raideur torsionnelle totale : } C_{tot} = 7,84 E I_{xa} \ell^2/h^2$$

Fractions du moment de torsion total appliqué qui sont reprises par les voiles a et b :

$$M_{ta} = M_t C_a / C_{tot} = 0,66 M_t$$

$$M_{tb} = M_t C_b / C_{tot} = 0,33 M_t$$

Sollicitation des voiles due à la torsion :

$$S_{tor, a} = M_{ta} / x_a = 0,66 M_t / -0,66 \ell = -0,25 V$$

$$S_{tor, b} = M_{tb} / x_b = 0,33 M_t / 0,33 \ell = +0,25 V$$

Le résultat est bien un couple de forces égales et opposées entredistantes de ℓ , ce qui donne un moment résultant $0,25 V \ell$ et des résultantes de force nulles.

Sollicitation résultante des effets translationnels et torsionnels dans les voiles.

$$S_{\text{résult, a}} = \sqrt{(0,33 \text{ V})^2 + (0,25 \text{ V})^2} = 0,41 \text{ V}$$

$$S_{\text{résult, b}} = \sqrt{(0,66 \text{ V})^2 + (0,25 \text{ V})^2} = 0,70 \text{ V}$$

Commentaires.

On peut comparer les résultats trouvés à d'autres obtenus dans diverses hypothèses :

- si on ignore l'existence du mode torsionnel, on trouve : $S_{\text{résult, a}} = S_{\text{résult, b}} = 0,5 \text{ V}$

ce qui correspond à une sous estimation de $(0,7 - 0,5)/0,7 = 28 \%$ de la sollicitation du voile b.

- si on combine les modes translationnel et torsionnel en les supposant liés (le signe de M_t est associé à l'orientation de V), on trouve :

$$S_{\text{résult, a}} = 0,33 \text{ V} + 0,25 \text{ V} = 0,58 \text{ V}$$

$$S_{\text{résult, b}} = 0,66 \text{ V} - 0,25 \text{ V} = 0,41 \text{ V}$$

ce qui correspond à une sous estimation de $(0,70 - 0,41)/0,70 = 41 \%$ de la sollicitation du voile b.

4.6 Paramètres de l'Eurocode 8 caractérisant la sensibilité des bâtiments à la torsion.

Le caractère "régulier en plan" des bâtiments est, dans l'Eurocode 8, associé au respect de conditions relatives à :

- la symétrie des raideurs flexionnelles et des distributions de masse ;
- une configuration compacte en plan
- la raideur nécessaire des diaphragmes
- un élancement longueur/largeur du bâtiment limité ;
- la raideur nécessaire en torsion.

Les conditions relatives à la torsion utilisent les paramètres e_{ox} , e_{oy} , r_x , r_y et ℓ_s dont il convient d'expliquer la signification.

L'excentricité structurale e_o est la **distance entre le centre de rigidité CR et le centre de gravité CM**. e_{ox} est la projection de cette distance sur l'axe x perpendiculaire à la direction de calcul considérée. De même pour e_{oy} .

Le **rayon de torsion** r_x est la racine carrée du rapport de la raideur torsionnelle C à la raideur "translationnelle" R_x ou R_y du bâtiment dans la direction x (de type EI_x par exemple s'il s'agit d'un

voile en béton armé) : $r_x = \sqrt{\frac{C}{R_x}}$

La raideur "translationnelle" dans une direction (x par exemple) se calcule en considérant la contribution de tous les éléments structuraux dans cette direction. Il est évident qu'un bâtiment très raide en torsion présente des r_x et r_y plus élevés qu'un bâtiment sensible à la torsion.

ℓ_s est le **rayon de giration** de la masse M du plancher dans la direction perpendiculaire à l'axe

vertical z :

$$\ell_s = \sqrt{\frac{J_z}{M}}$$

J_z est le **moment d'inertie polaire** de la masse du plancher. Il exprime le "volant d'inertie" excité en torsion. Si on désigne par μ est la masse par unité de surface, on a :

$$J_z = \int_v \mu (x^2 + y^2) dv = \int_v \mu r^2 dv$$

dans un système d'axes horizontaux x et y centrés sur le centre de masse CM. Si on concentrait toute la masse M au centre de masse, on trouverait: $J_z = 0$

Valeurs de J_z et ℓ_s pour des formes simples de planchers.

Rectangle de masse M , côtés de longueur a et b :

$$M = \mu ab \quad J_z = \frac{M}{12}(a^2 + b^2) \quad \ell_s = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{12}}$$

Cercle de masse M et de rayon R :

$$M = \mu \pi R^2 \quad J_z = MR^2 \quad \ell_s = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Anneau de masse M , de rayon extérieur R et de rayon intérieur r :

$$M = \mu \pi (R^2 - r^2) \quad J_z = \frac{M(R^2 - r^2)}{2} \approx MR^2 \quad \ell_s \approx R \quad (\ell_s = R \text{ est la valeur la plus élevée possible}$$

de ℓ_s ; on sait que les tubes circulaires sont les solides les plus efficaces pour la reprise de la torsion).

Les conditions de "régularité en plan" limitant la torsion dans l'Eurocode 8 sont:

$$\begin{aligned} 0,3 r_x &\geq e_{ox} & 0,3 r_y &\geq e_{oy} \\ r_x &\geq \ell_s & r_y &\geq \ell_s \end{aligned}$$

Exemple de calcul des paramètres de l'Eurocode 8 caractérisant la sensibilité des bâtiments à la torsion.

Soit la structure carrée représentée à la Figure 4.15, contreventée par 4 voiles de même inertie I_{xa} .

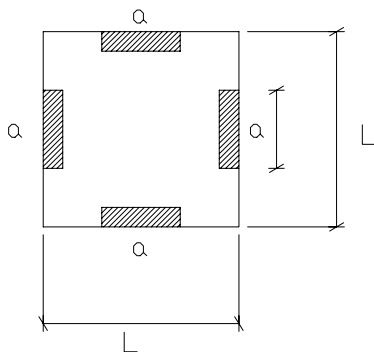


Figure 4.15. Structure carrée contreventée par 4 voiles identiques

On calcule la raideur torsionnelle $C = 2 C_{flex,x} + 2 C_{flex,y} = 4 C_{flex,x}$ u la symétrie.

La raideur flexionnelle R par unité de hauteur d'un élément vertical de hauteur h se déduit de la relation :

$$d = Fh^3/12 E I_{xa} \quad (\text{notations voir Figure 4.11})$$

$$R = (M/\phi)/h = \frac{Fh}{d} = (12 E I_{xa} / h^3)h = 12 E I_{xa} / h^2 \quad C = 4 \frac{12 E}{h^2} I_{xa} \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{12 E I_{xa} L^2}{h^2}$$

$$R_x = R_y = (2 \times 12 E I_{xa})/h^2 \quad r_x = \sqrt{\frac{C}{R_x}} = L/\sqrt{2} = 0,7 L \quad \ell_s = \sqrt{\frac{2L^2}{12}} = 0,41 L$$

et on vérifie bien $r_x > \ell_s$

On peut calculer l'entredistance minimale D_{min} des voiles telle que le bâtiment soit considéré comme régulier en plan. Il faut que la condition $r_x > \ell_s$ soit vérifiée. Comme $C = (12 E I_{xa} D^2)/h^2$ et $r_x = 0,7 D$, la condition s'écrit : $0,7 D > 0,41 L$ et donne : $D_{min} = 0,58 L$

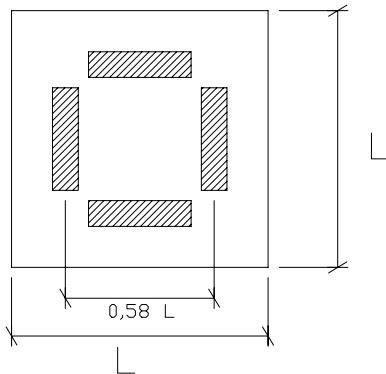


Figure 4.16. Entredistance minimum des voiles pour qu'un bâtiment soit considéré régulier en plan.

Cette définition n'est pas ambiguë pour 1 bâtiment à un seul niveau.

Pour les bâtiments multi-étagés, on a vu que seule une définition approchée du centre de rigidité et donc de la raideur torsionnelle était possible (on a vu que le centre de rigidité est pris comme origine du système d'axe (x,y) ; sa position influence les valeurs des coordonnées x et y des éléments résistants et donc les termes de torsion non uniforme contribuant à la raideur torsionnelle).

Pour que la méthode simplifiée décrite donne des estimations suffisamment correcte de la position du centre de rigidité CR et des rayons de torsion r_x et r_y , il faut que la structure respecte deux conditions :

- les systèmes de contreventement sont ininterrompus de la fondation au sommet du bâtiment ;
- les déformées des divers contreventements présentent une allure similaire.

Cette dernière condition est bien respectée dans les ossatures en portique et dans les structures contreventées par des noyaux ou des voiles, mais pas tellement dans les systèmes hybrides (noyaux + portique) ou (voiles + portiques).