Solutions TP5 - Rendements - Mécanismes réversibles et irréversibles

26 mai 2010

Exercice 1

Le rendement du mécanisme :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_{rec}}{\mathcal{P}_{mot}} = \frac{R \cdot v}{F \cdot u} = \left(\frac{R}{F}\right)^{1} \cdot \left(\frac{v}{u}\right) \tag{1}$$

Les vitesses v et u :

$$\tan\alpha = \frac{v}{u} \tag{2}$$

L'angle de frottement φ [2] :

$$\begin{cases} G \cdot \cos\varphi = N \\ \mu N = G \cdot \sin\varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mu = \tan\varphi \tag{3}$$

Les forces F et R en fonction de α et μ :

$$\sum \text{horizontal}^{3} \rightarrow -N\sin\alpha + F - \mu N\cos\alpha = 0 \tag{4}$$

$$F = N(\mu\cos\alpha + \sin\alpha) \tag{5}$$

$$\sum \text{vertical}^{4} \rightarrow -N\cos\alpha + \mu N\sin\alpha + R = 0 \tag{6}$$

$$R = N(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) \tag{7}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{F} = \frac{N(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}{N(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)} = \frac{\cos\alpha - \tan\varphi\cdot\sin\alpha}{\tan\varphi\cdot\cos\alpha + \sin\alpha} \tag{8}$$

---

1. $F \rightarrow$ effort nécessaire pour monter la tige (charge R)
2. L'inclinaison à partir de laquelle l'objet commence à descendre sur son propre poids $\leftrightarrow$ Figure 3
3. Figure 1
4. Figure 2

$$\frac{R}{F} = \frac{\cos\alpha \cdot \cos\varphi - \sin\alpha \cdot \sin\varphi}{\sin\varphi \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\varphi} = \frac{\cos(\alpha+\varphi)}{\sin(\alpha+\varphi)} \tag{9}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{F} = \frac{1}{\tan(\alpha+\varphi)} \tag{10}$$

Le rendement dans le sens direct [5] :

$$\Rightarrow \eta_{dir} = \left(\frac{R}{F}\right) \cdot \left(\frac{v}{u}\right) = \frac{\tan\alpha}{\tan(\alpha+\varphi)} \tag{11}$$

Le rendement dans le sens inverse (rétrograde) $\leftrightarrow$ la sortie devienne entrée : Le coefficient μ change de sens $\rightarrow$ φ aussi.

$$\mu \rightarrow -\mu \Rightarrow \frac{F}{R} = \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\varphi - \sin\varphi \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\varphi + \sin\alpha \cdot \sin\varphi} \tag{12}$$

$$\frac{F}{R} = \frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos(\alpha-\varphi)} = \tan(\alpha-\varphi) \tag{13}$$

$$\eta_{rét} = \left(\frac{F}{R}\right) \cdot \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\tan(\alpha-\varphi)}{\tan\alpha} \tag{14}$$

Pour $\alpha - \varphi \leq 0$ ($\alpha \geq \varphi$), $\eta_{rét}$ est négatif. Le mécanisme est donc irréversible. Dans ce cas, la valeur pour η_{dir} est :

$$\eta_{dir} = \frac{\tan\alpha}{\tan(\alpha+\varphi)} \leq \frac{\tan\alpha}{\tan(2\alpha)}\ ^{6} \tag{15}$$

$$\eta_{dir} \leq \frac{\tan\alpha(1-\tan^2\alpha)}{2\tan\alpha} = \frac{1}{2}(1 - \underbrace{\tan^2\alpha}_{\leq 1}) \tag{16}$$

$$\Rightarrow \eta_{dir} \leq \frac{1}{2} \tag{17}$$

Dans un mécanisme irréversible, le rendement est toujours inférieur à 0,5 ($\eta_{dir} \leq \frac{1}{2}$). L'hypothèse d'un système réversible n'induit pas que le mécanisme présente un rendement inférieur à 1/2. Par contre, si $\eta_{dir} \geq 0{,}5$, le mécanisme est toujours réversible.

On vérifie le point où le rendement devienne inférieur à 0,5 :

$$\eta_{dir} = \frac{\tan\alpha}{\tan(\alpha+\varphi)} \leq \frac{1}{2} \tag{18}$$

$$\tan(\alpha+\varphi) \geq \tan\alpha \Rightarrow \frac{\tan\alpha + \tan\varphi}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\varphi} \geq \tan\alpha \tag{19}$$

$$\tan\varphi(1 + 2\tan^2\alpha) \geq \tan\alpha \Rightarrow \tan\varphi \geq \frac{\tan\alpha}{1 + 2\tan^2\alpha} \tag{20}$$

Pour φ croissant, le rendement est donc inférieur à 1/2 avant que le mécanisme ne devienne irréversible [7].

5. $\eta_{dir} = \frac{\mathcal{P}_{sortie}}{\mathcal{P}_{entrante}}$
6. La fonction tan croissante entre 0 et $\frac{\pi}{2}$
7. Figure 4

Exercice 2

On définit le vecteur unitaire, dans les 3 directions principales (x, y et z). Les composantes pour ce vecteur normal à la surface de contact sont :

$$(\lambda \tan\alpha, -\lambda \tan\beta, \lambda)\,^{8} \tag{21}$$

$$\lambda^2(\tan^2\alpha + \tan^2\beta + 1) = 1\,^{9} \tag{22}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}} \tag{23}$$

Les vitesses v et u [10] :

$$\tan\alpha = \frac{v}{u} \tag{24}$$

L'effort N est dans un plan oblique par rapport aux axes. L'effort de frottement μN est toujours dans le plan des vitesses, xoz.

Les forces F et R en fonction de α et μ :

$$\sum \text{horizontal}\,^{11} \rightarrow F - N\lambda\tan\alpha - \mu N\cos\alpha = 0 \tag{25}$$

$$F = N(\lambda\tan\alpha + \mu\cos\alpha) \tag{26}$$

$$\sum \text{vertical}\,^{12} \rightarrow -R - \mu N\sin\alpha + \lambda N = 0 \tag{27}$$

$$R = N(\lambda - \mu\sin\alpha) \tag{28}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{F} = \frac{N(\lambda-\mu\sin\alpha)}{N(\lambda\tan\alpha+\mu\cos\alpha)} = \frac{1-\frac{\mu}{\lambda}\sin\alpha}{\tan\alpha+\frac{\mu}{\lambda}\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha - (\frac{\mu}{\lambda}\cos\alpha)\sin\alpha}{\sin\alpha + (\frac{\mu}{\lambda}\cos\alpha)\cos\alpha} \tag{29}$$

On définit l'angle de frottement fictif $\varphi*$:

$$\tan\varphi* = \frac{\mu}{\lambda}\cos\alpha = \mu\cos\alpha\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta} \tag{30}$$

$$\Rightarrow \tan\varphi* = \mu\frac{\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \tag{31}$$

On a donc :

$$\frac{R}{F} = \frac{\cos\alpha - \tan\varphi*\cdot\sin\alpha}{\sin\alpha+\tan\varphi*\cdot\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha\cos\varphi* - \sin\varphi*\cdot\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\varphi* + \sin\varphi*\cdot\cos\alpha} \tag{32}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{F} = \frac{1}{\tan(\alpha+\varphi*)} \tag{33}$$

8. Figure 5
9. Vecteur unitaire
10. Figure 6
11. Figure 7
12. Figure 8

Le rendement du mécanisme :

$$\eta_{dir} = \frac{\tan\alpha}{\tan(\alpha + \varphi*)} \tag{34}$$

Dans le sens rétrograde :

$$\eta_{rét} = \frac{\tan(\alpha - \varphi*)}{\tan\alpha} \tag{35}$$

Comme $\varphi* > \varphi$, le rendement du coin incliné est plus faible que celui du coin droit (il est aussi plus irréversible).

Exercice 3

Calcul du rendement d'une vis.

$M10$ (metric 10) ; $\beta = 30^{\circ}$; p=1,5.

Le filet de la vis peut être assimilé à un coin. Pour avoir une vis réversible, le meilleur choix est filet carré.

L'angle d'inclinaison d'une vis est en fonction de son pas et son diamètre [13] :

$$\tan\alpha = \frac{p}{\pi d} \tag{36}$$

Plus le pas p est plus grand ($\alpha \nearrow$, $\tan\alpha \nearrow$), moins la vis est irréversible.

$$\tan\alpha = \frac{1,5}{\pi \cdot 10} = 0,04775 \Rightarrow \alpha = 2,73^{\circ} \tag{37}$$

Le rendement pour $\varphi = 0,08$ et $\varphi = 0,14$:

$$\mu = \varphi = 0,08 \tag{38}$$

$$\eta_{dir} = \frac{\tan\alpha}{\tan(\alpha + \varphi*)} \tag{39}$$

$$\tan\varphi* = \frac{\mu}{\lambda} \cdot \cos\alpha = \mu\cos\alpha \cdot \sqrt{1 + \tan^2\alpha + \tan^2\beta} \tag{40}$$

$$\tan\varphi* = \mu \cdot \frac{\sqrt{1 + \tan^2\alpha + \tan^2\beta}}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}} = 0,0925 \Rightarrow \varphi* = 5,28^{\circ} \tag{41}$$

$$\eta_{dir} = \frac{0,04775}{\tan(2,73^{\circ} + 5,28^{\circ})} \Rightarrow \eta_{dir} = 0,338 \tag{42}$$

$$\mu = \varphi = 0,14 \tag{43}$$

$$\eta_{dir} = \frac{\tan\alpha}{\tan(\alpha + \varphi*)} \tag{44}$$

$$\tan\varphi* = \frac{\mu}{\lambda} \cdot \cos\alpha = \mu\cos\alpha \cdot \sqrt{1 + \tan^2\alpha + \tan^2\beta} \tag{45}$$

13. Figure 9

$$\tan\varphi* = \mu \cdot \frac{\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = 0,162 \Rightarrow \varphi* = 9,2^\circ \tag{46}$$

$$\eta_{dir} = \frac{0,04775}{\tan(2,73^\circ + 9,2^\circ)} \Rightarrow \eta_{dir} = 0,226 \tag{47}$$

Le couple de serrage d'une vis dans un ecrou fixe.
Quand la vis tourne d'un tour :

$$\tau_{mot} = \text{Couple} \cdot 2\pi \quad \text{(travail effectué)} \tag{48}$$

La vis avance dans l'ecrou d'un pas :

$$\tau_{rés} = N \cdot p^{14} \quad \text{(travail résistant)} \tag{49}$$

$$\eta_{dir} = \frac{\tau_{rés}}{\tau_{mot}} \tag{50}$$

$$\frac{\tan\alpha}{\tan(\alpha+\varphi*)} = \frac{Np}{2\pi C} \tag{51}$$

$$\Rightarrow C = \frac{\tan(\alpha+\varphi*)}{\tan\alpha} \cdot \frac{Np}{2\pi} = \frac{\tan(\alpha+\varphi*)}{\tan\alpha} \cdot N\frac{d}{2} \cdot \underbrace{\frac{p}{\pi d}}_{\tan\alpha} \tag{52}$$

$$C = N\frac{d}{2} \cdot \tan(\alpha+\varphi*) \tag{53}$$

Exercice 4

L'efficacité est le rapport entre le couple de freinage et la force nécessaire au freinage.

Disc neuf $\rightarrow p = cte$. (la pression sur le disque est constante).

L'effort nécessaire au freinage :

$$dF = p \cdot dS = p \cdot \alpha \cdot r \cdot dr \tag{54}$$

$$\Rightarrow F = \int_{\lambda R}^{R} \underbrace{p}_{cte} \cdot \alpha \cdot r \cdot dr = p \cdot \alpha \cdot \int_{\lambda R}^{R} r \cdot dr = p \cdot \alpha \cdot \left.\frac{r^2}{2}\right|_{\lambda R}^{R} \tag{55}$$

$$\Rightarrow F = \alpha p \frac{R^2}{2}(1-\lambda^2) \tag{56}$$

Le couple de l'effort de serrage :

$$dC_F = dF \cdot r = \alpha p r^2 dr \tag{57}$$

14. $N \rightarrow$ effort axial ; $p \rightarrow$ pas

Le couple de freinage (μ en plus) :

$$dC_{frein} = \mu \cdot dC_F \tag{58}$$

$$\Rightarrow dC_{frein} = \mu\alpha p r^2 dr \tag{59}$$

$$\Rightarrow C_{frein} = \mu\alpha p \cdot \int_{\lambda R}^{R} r^2 dr = \mu\alpha p \cdot \left.\frac{r^3}{3}\right|_{\lambda R}^{R} \tag{60}$$

$$C_{frein} = \frac{1}{3}\mu p\alpha R^3(1-\lambda^3) \tag{61}$$

L'efficacité :

$$E = \frac{C_{frein}}{F} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\mu p\alpha R^3(1-\lambda^3)}{\frac{1}{2}\alpha p R^2(1-\lambda^2)} \tag{62}$$

$$\Rightarrow E = \frac{2}{3}\mu R\left(1+\frac{\lambda^2}{1+\lambda}\right) \tag{63}$$

L'efficacité dépend du coefficient de frottement μ, le rayon R et du λ (plus λ s'approche de 1, plus le frein est efficace).

L'efficacité si le frein est rodé :

$$p \cdot v = cte. \tag{64}$$

$$v = \omega \cdot r = \underbrace{\alpha'}_{cte.} \cdot r \tag{65}$$

$$\Rightarrow p \cdot \alpha' \cdot r = c \Rightarrow p \cdot r = \frac{c}{\alpha'} = c_1 \tag{66}$$

$$p = \frac{c_1}{r} \tag{67}$$

L'effort nécessaire au freinage :

$$dF = p \cdot dS \tag{68}$$

$$F = \int_{\lambda R}^{R} p dS = \int_{\lambda R}^{R} \frac{c_1}{r}\alpha r dr = c_1\alpha \cdot \int_{\lambda R}^{R} dr \tag{69}$$

$$\Rightarrow F = c_1 \cdot \alpha \cdot R \cdot (1-\lambda) \tag{70}$$

Le couple de l'effort de serrage :

$$dC_F = dF \cdot r = \alpha c_1 r dr \tag{71}$$

Le couple de freinage :

$$dC_{frein} = \mu \cdot dC_F = \mu\alpha c_1 r dr \tag{72}$$

$$\Rightarrow C_{frein} = \mu\alpha c_1 \cdot \int_{\lambda R}^{R} r dr = \mu\alpha c_1 \left.\frac{r^2}{2}\right|_{\lambda R}^{R} \tag{73}$$

$$C_{frein} = \frac{1}{2}\mu\alpha c_1 R^2(1-\lambda^2) \quad (74)$$

L'efficacité :

$$E = \frac{C_{frein}}{F} = \frac{\frac{1}{2}\mu\alpha c_1 R^2(1-\lambda^2)}{c_1\alpha R(1-\lambda)} \quad (75)$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}\mu R(1+\lambda) \quad (76)$$

Plus λ est grand, plus l'efficacité est grande.

L'evolution de l'efficacité dans les deux cas (neuf et rodé) est présentée dans le tableau suivant :

λ	Neuf	Rodé	Evolution
0	0,6 μR	0,5 μR	$\downarrow$
$\frac{1}{2}$	0,77 μR	0,75 μR	$\downarrow$
1	μR	μR	$\rightarrow$

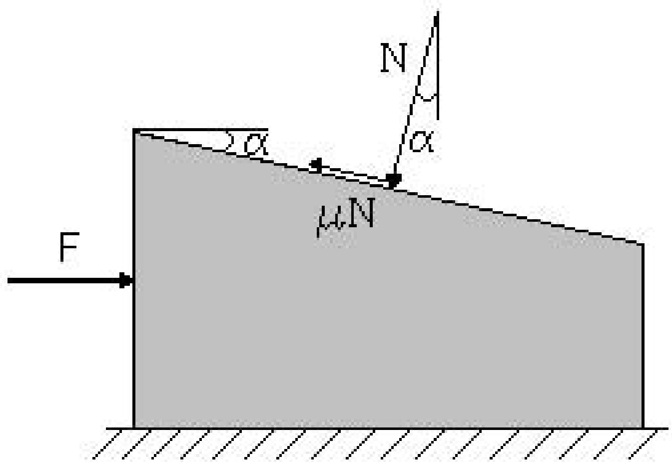

Figure 1 - Détail coin

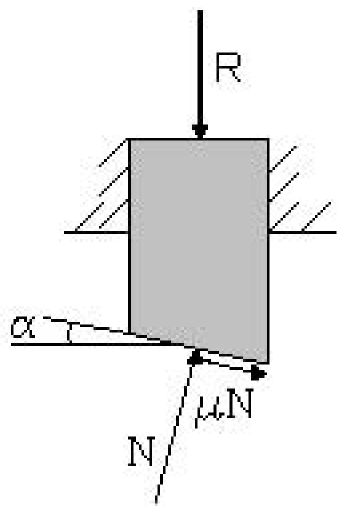

Figure 2 - Détail tige

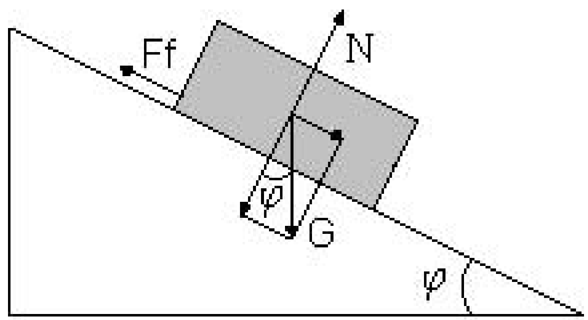

Figure 3 - L'angle de frottement

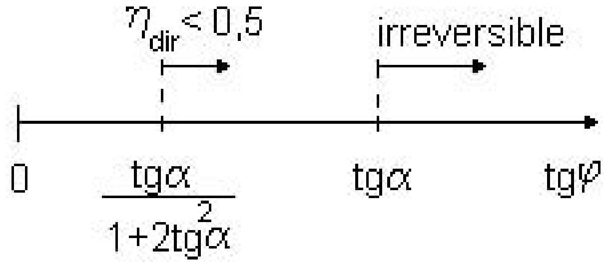

Figure 4 - Evolution rendement - irréversibilité

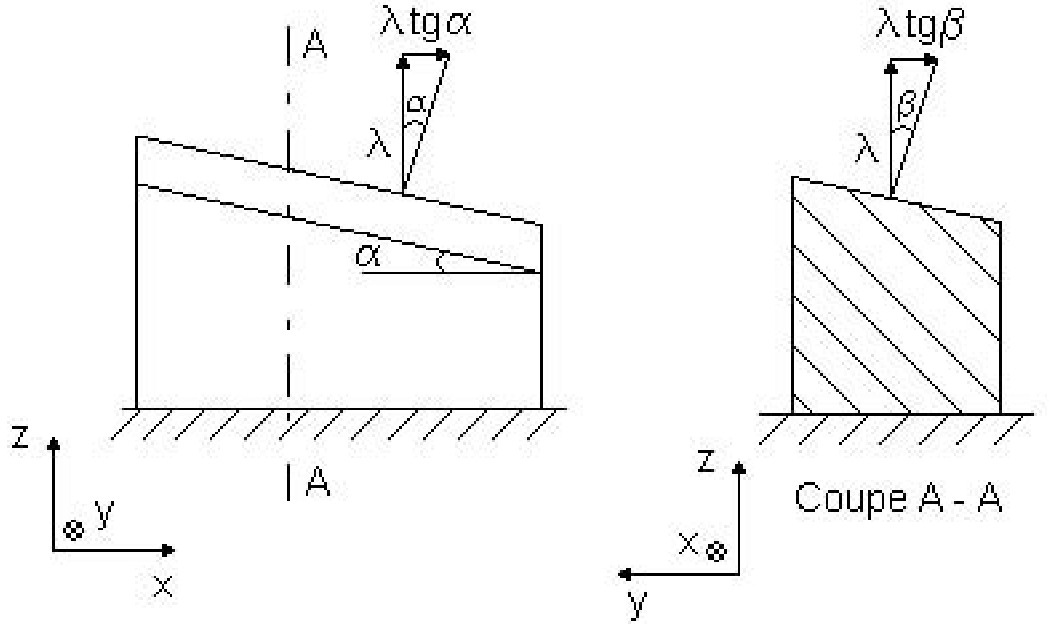

Figure 5 - Définition vecteur unitaire λ

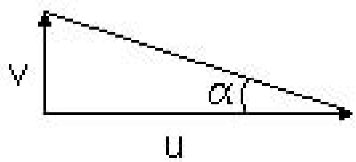

Figure 6 - Vitesses u, v et angle α

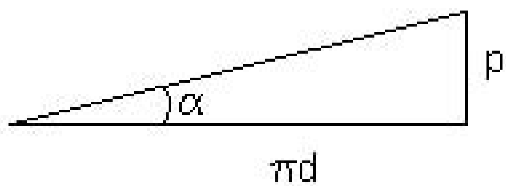

Figure 9 - L'inclinaison en fonction du pas et du diamètre de la vis

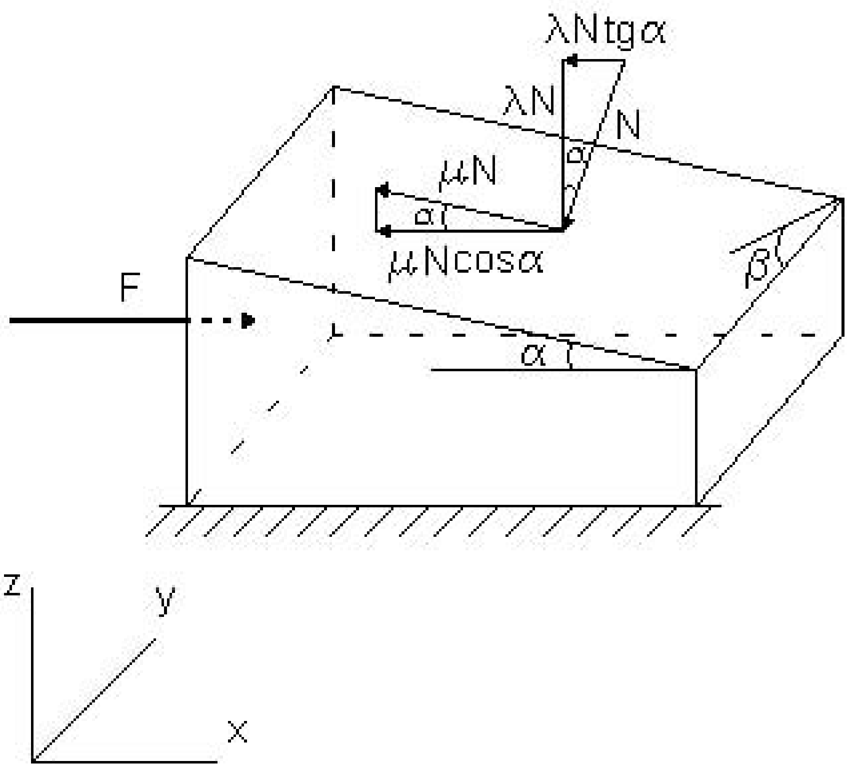

Figure 7 - Efforts sur le coin

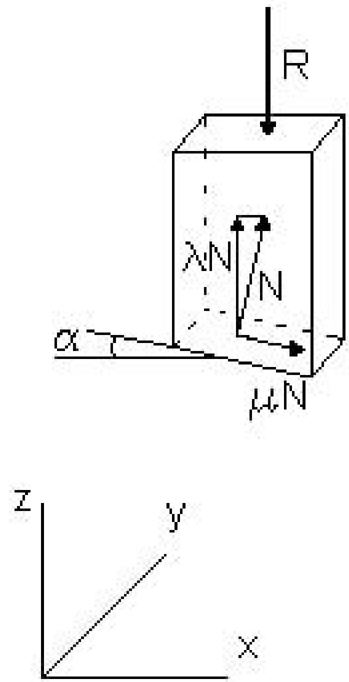

Figure 8 - Efforts sur la tige