La résolution de problèmes : un processus complexe de «modélisation mathématique»[1]

Synthèse de la recherche en pédagogie 35/01
Annick FAGNANT, Isabelle DEMONTY & Michèle LEJONG
Service de Pédagogie expérimentale de l'Université de Liège
sous la direction du Professeur Marcel CRAHAY

Contexte de la recherche

L'apprentissage des mathématiques accorde actuellement une place importante à la résolution de problèmes. Tardif (1992)[2] précise que ce type d'activités devrait constituer la pierre angulaire du curriculum scolaire. Selon cet auteur, *les activités les plus susceptibles de produire des apprentissages significatifs et permanents chez les élèves sont des activités de résolution de problèmes* (p. 218).

Les documents officiels en vigueur en Communauté française de Belgique renforcent cette conception. Très concrètement, les « Socles de Compétences » précisent que *c'est par la résolution de problèmes que l'élève développe des aptitudes mathématiques, acquiert des connaissances profondes et se forge une personnalité confiante et active* (p. 23).

Les «Socles» présentent deux types de compétences en mathématiques : des compétences transversales relatives à la résolution de problèmes et des compétences spécifiques concernant les outils et les démarches mathématiques.
Quatre grandes compétences interagissent dans la résolution de problèmes : analyser et comprendre un message ; résoudre, raisonner et argumenter ; appliquer et généraliser ; structurer et synthétiser. Ces compétences transversales sont essentielles : les nouvelles approches d'enseignement des mathématiques s'y appuient pour enseigner, par la résolution de problèmes, les différents contenus mathématiques (cf. compétences spécifiques).

L'objet de la présente recherche est de construire un outil méthodologique à usage des enseignants de cinquième et de sixième années de l'enseignement primaire. Cet outil doit permettre d'apprendre aux élèves à résoudre des problèmes ; il s'agit de leur faire construire et développer les compétences transversales indispensables à la mise en œuvre d'une démarche efficace de résolution de problèmes.

«*Faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes !*»
Si on reconnaît que la résolution de problèmes est un passage obligé pour accéder aux connaissances mathématiques, alors il faut que les élèves « se débrouillent » efficacement face aux situations-problèmes. Autrement dit, pour permettre à tous les élèves de réussir en mathématiques, il convient de leur offrir la possibilité de résoudre des problèmes (Julo, 1995)[3].

Si l'idée paraît simple, sa mise en œuvre pratique, en revanche, ne l'est pas : *c'est toute la question de l'aide à la résolution de problèmes qui se trouve ainsi posée* (p.1).

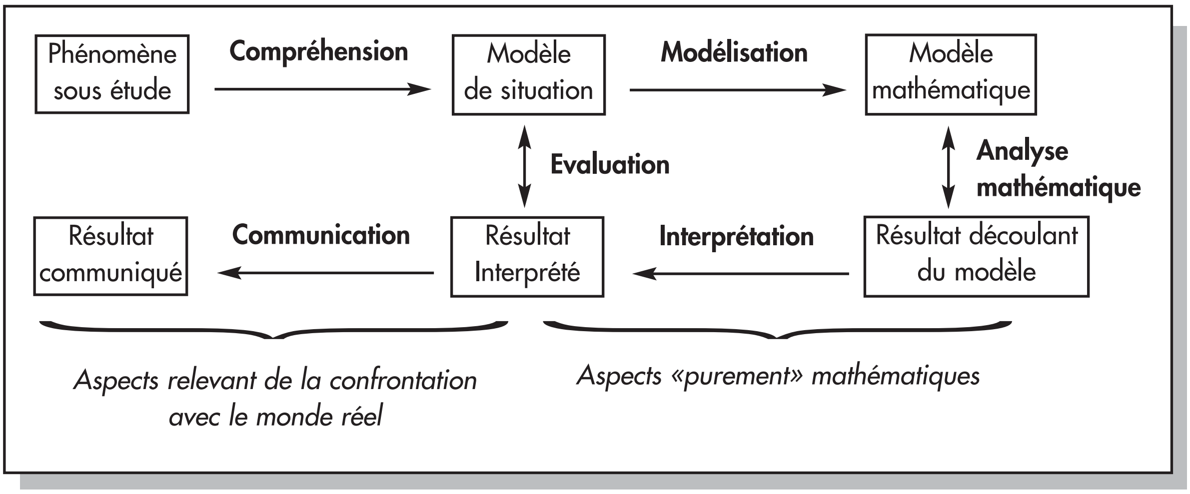
La résolution de problèmes permet notamment de donner du sens aux concepts mathématiques et de réinvestir des procédures dans un contexte qui justifie leur utilisation. Cependant, de nombreux élèves éprouvent d'importantes difficultés face aux situations problématiques. Certains pensent qu'il suffit de faire une opération avec tous les nombres de l'énoncé ou d'appliquer la procédure qui vient d'être vue en classe. D'autres pensent que résoudre un problème, c'est faire le bon calcul et qu'il n'y a donc qu'une et seule « bonne » façon d'arriver à l'unique solution acceptable. Certains ne répondent pas à la question posée ; d'autres proposent des réponses qui peuvent paraître complètement insensées (Verschaffel, Greer et De Corte, 2000)[4].
Bien qu'elles permettent parfois d'aboutir à la réponse correcte face à certains problèmes, ces démarches superficielles (c'est-à-dire non fondées sur une analyse approfondie des situations) révèlent rapidement leurs limites lorsque les enfants sont confrontés à de véritables situations problématiques.

Amener les enfants à développer des stratégies efficaces de résolution de problèmes (c'est-à-dire à mettre en œuvre adéquatement les compétences nécessaires) est loin d'être chose aisée pour l'enseignant. Ce dernier ne dispose que de peu de ressources pour l'aider à mener à bien ce projet. L'outil méthodologique à construire dans le cadre de la présente recherche a pour objectif d'apporter une aide en ce sens : fournir aux enseignants un bagage d'activités concrètes pour apprendre aux élèves de cinquième et de sixième années de l'enseignement primaire à développer des compétences leur permettant de faire face à des problèmes variés. Les activités proposées devront également viser le désapprentissage des stratégies superficielles et la remise en cause des présupposés associés.

La modélisation mathématique

A l'heure actuelle, il est généralement admis de considérer la résolution de problèmes comme un processus complexe de modélisation mathématique (**mathematical modelling** – Verschaffel et al., ibid.). Ce processus complexe peut se traduire par la mise en œuvre d'une démarche de résolution impliquant plusieurs phases.

Le schéma suivant (traduit du schéma proposé par Verschaffel et al., ibid.) illustre la démarche de résolution. La partie droite du schéma correspond aux aspects « purement » mathématiques du processus ; la partie gauche fait référence aux aspects relevant de la confrontation avec le monde réel. La démarche doit être considérée comme cyclique, plutôt que comme une progression linéaire conduisant des données au but.



On peut décrire les différentes étapes du processus de modélisation.

Le point de départ est le **phénomène sous étude**. Il correspond à la description de certains aspects de la réalité, considérés comme potentiellement capables d'être soumis à une analyse mathématique.

> A l'école, il s'agit habituellement d'une description simplifiée d'une situation, présentée généralement sous la forme d'un texte, avec éventuellement des informations supplémentaires, présentées sous la forme de dessins ou de données organisées sous différentes formes (tableaux, graphiques,…).

La première étape implique la compréhension de la situation décrite et la construction d'un **modèle de situation**. La construction de ce modèle peut être médiatisée par des représentations externes, mettant en évidence les variables importantes dans la situation, ainsi que les relations temporelles et causales entre ces variables.

La construction du modèle de situation nécessite de disposer de certaines connaissances relatives au phénomène impliqué dans la situation décrite. Disposer des connaissances nécessaires est un élément essentiel pour résoudre correctement le problème mais n'est toutefois pas encore un élément suffisant : encore faut-il y avoir accès et les activer. On constate par exemple que les connaissances de la vie réelle ne sont pas souvent prises en compte par les élèves. Par ailleurs, on peut aussi « étendre » la base de connaissances dont on dispose en consultant différentes sources d'informations, en interagissant avec des pairs, etc…

La deuxième étape (la **modélisation**) consiste à transformer le modèle de situation en un **modèle mathématique**. Pour ce faire, il convient d'identifier les éléments importants et les relations clés et d'exprimer tout cela sous une forme mathématique.

Ce processus implique l'accès à d'autres types de connaissances, c'est-à-dire celles concernant les concepts mathématiques, les techniques de calcul,…

La construction d'un modèle mathématique peut être influencée par différents facteurs.

- Le contenu de la base de connaissances (concepts mathématiques, connaissances relatives aux techniques de calcul,…).
Notons que l'apprentissage de ces différents concepts et techniques ne doit pas nécessairement précéder l'application en problèmes mais que la résolution de problèmes peut aussi être un moyen d'aborder ces concepts.

- La maîtrise et l'utilisation d'heuristiques de résolution (ex. utiliser un diagramme, chercher des régularités, décomposer le problème en sous-problèmes,…).

- Les buts implicites de la situation (ils peuvent être imposés par le contexte d'enseignement ou ils peuvent être négociés).
Faut-il donner une réponse précise ou vaut-il mieux fournir une approximation ?
Faut-il prendre en compte des conceptions réalistes et jusqu'à quel point ?

- Les ressources mathématiques dont dispose l'étudiant.
Par exemple, les ressources qui peuvent servir de médiateur pour la représentation : symboles, graphiques, objets manipulables,…

La troisième étape consiste à appliquer une **analyse mathématique** au modèle mathématique.
La disponibilité des ressources joue alors un rôle important, tant pour l'analyse elle-même que pour une anticipation des **résultats découlant du modèle**.
La troisième étape permet d'aboutir à une ou plusieurs solution(s) qui doit(vent) encore être soumise(s) à interprétation.

Il ne faut pas perdre de vue qu'il n'y a pas qu'une seule façon de modéliser une situation donnée et qu'il peut y avoir plusieurs modèles dont on pourra discuter et analyser la pertinence respective.

La quatrième étape consiste à **interpréter** la ou les solution(s) en relation avec le modèle de situation. Plusieurs modèles peuvent encore être comparés à cette étape.

Les résultats interprétés doivent être **évalués** en fonction du modèle de situation : la solution obtenue a-t-elle du sens ? Si ce n'est pas le cas, le modèle de situation peut être soumis à une nouvelle analyse et le processus cyclique peut redémarrer.
Une fois la solution trouvée, interprétée, évaluée et acceptée, … la dernière étape consiste alors à **communiquer** la solution en fonction des requêtes de la tâche.

Il paraît intéressant d'illustrer le modèle à partir d'un problème du type de ceux présentés dans les manuels scolaires.

Phénomène sous étude

Conditions d'entrée à la piscine

Carte de 20 bains (valable 1 an)	10 euros
Entrée	1,25 euros
Entrée (famille nombreuse)	0,75 euros
Gratuit en dessous de 6 ans	

Heures d'ouverture
9h-12h30 et 14h-20h
Le dimanche : 9h-12h et 14h30-18h30.

Recherche la formule la plus intéressante pour les différentes familles.

Isabelle 7 ans
Marc Henri 9 ans
Famille DUROI
(se rend à la piscine 2 fois par mois)

Loïc 5 ans
Juliette 8 ans
Fabian 9 ans
Famille DUTOIT
(se rend à la piscine 6 fois par an)

Construction du modèle de situation (compréhension)

L'étape de compréhension du problème peut déboucher sur un modèle de situation qui se présente sous l'aspect d'une reformulation de l'énoncé. Un exemple est proposé ci-dessous.

Des tarifs d'entrée à la piscine sont proposés :
- une carte de 20 bains (valable 1 an) coûte 10 euros ;
- l'entrée individuelle coûte 1,25 euros ;
- si on est dans une famille nombreuse, on paie 0,75 euros par personne ;
- les enfants de moins de 6 ans ne paient pas (et ceci est vrai pour les trois types de formules précitées).

On recherche la formule la plus économique pour deux familles :

◆ Duroi: 4 entrées payantes (2 adultes et 2 enfants de plus de six ans) sans réduction pour les familles nombreuses (1,25 euros l'entrée ou l'utilisation d'une carte de 20 bains).
Ils vont 2 fois par mois à la piscine.

◆ Dutoit : 4 entrées payantes (2 adultes et 2 enfants de plus de six ans), soit au prix avec réduction pour les familles nombreuses (0,75 euros l'entrée), soit en utilisant le carte de 20 bains.
Ils vont 6 fois par an à la piscine

Le modèle de situation proposé ici implique la prise en compte d'une connaissance de la vie réelle (famille nombreuse = 3 enfants ou plus) ainsi que la réalisation d'un choix (ici, les enfants vont à la piscine accompagnés de deux adultes – par exemple, le papa et la maman). En fonction de son vécu, l'enfant peut également faire d'autres choix, comme par exemple de ne compter qu'un seul adulte (famille monoparentale ou habitude d'aller à la piscine uniquement avec le papa ou seulement avec la maman) ou de n'en comptabiliser aucun (par exemple, si l'enfant a l'habitude d'aller à la piscine sans être accompagné d'adultes).

Construction du modèle mathématique (modélisation)

Plusieurs modèles mathématiques peuvent être élaborés au départ du modèle de situation. Voici deux exemples proposés à titre illustratif.

1. Analyse arithmétique du problème

Pour chaque famille, il s'agit de comparer deux expressions arithmétiques, l'une correspondant au prix à payer avec une carte et l'autre, sans carte :

◆ Famille Duroi :

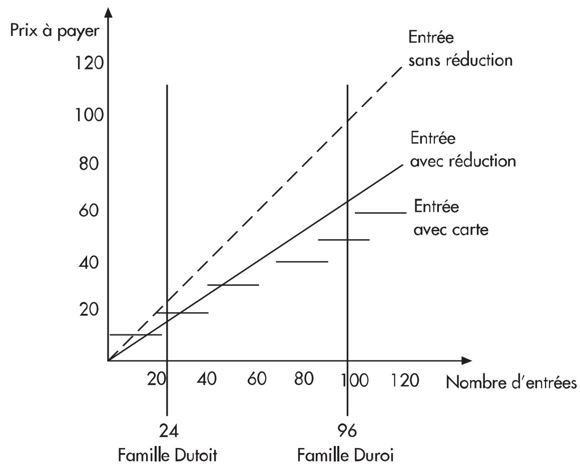
sans carte		avec carte(*)
4 x 1,25 x 2 x 12	$\boxed{> \; = \; <}$	10 x 5

◆ Famille Dutoit

sans carte		avec carte(**)
4 x 0,75 x 6	$\boxed{> \; = \; <}$	10 x 2

2. Analyse graphique du problème

On peut représenter la situation à l'aide d'un graphique comprenant trois fonctions : une pour l'achat de tickets sans réduction, la deuxième pour l'achat des tickets avec réduction et la troisième pour l'achat de cartes. Ces trois fonctions visent à mettre en relation le prix à payer en fonction du nombre d'entrées achetées sur l'année. On place ensuite sur ce graphique la situation correspondant aux deux familles.



(*) La famille Duroi va 24 fois à la piscine (2 fois par mois durant 12 mois). S'ils prennent la formule de cartes, ils doivent en acheter 5 (5 cartes de 20 bains = 100 bains) puisqu'il sont 4 à payer 24 fois pour aller à la piscine (96 entrées payantes).

(**) La famille Dutoit va 6 fois à la piscine. S'ils prennent la formule de cartes, ils doivent en acheter 2(2 cartes de 20 bains = 40 bains) puisqu'il sont 4 à payer 6 fois pour aller à la piscine (24 entrées payantes).

Résultat découlant du modèle (analyse mathématique)

Famille Duroi
<u>La formule sans carte coûte plus cher que celle avec carte</u>

parce que …

4 x 1,25 x 2 x 12	>	10 x 5
120	>	100

Pour la famille Duroi…

… la courbe de l'entrée individuelle (sans réduction) est nettement au-dessus de la courbe correspondant à la carte de 20 bains.

Famille Dutoit
<u>La formule sans carte coûte moins cher que celle avec carte</u>

parce que…

4 x 0,75 x 6	<	10 x 2
18	<	20

Pour la famille Dutoit…

… la courbe de l'entrée individuelle (avec réduction) est légèrement en dessous de la courbe correspondant à la carte de 20 bains.

Résultat interprété

(interprétation)
La formule « carte de 20 bains » est la solution la plus avantageuse pour la famille Duroi.
Pour la famille Dutoit, c'est la formule « entrée individuelle avec réduction pour famille nombreuse » qui est la plus avantageuse.

(évaluation)
La formule « carte de 20 bains » est assurément la solution la plus économique pour la famille Duroi.
On pourrait aussi conseiller la formule « carte de 20 bains » à la famille Dutoit. En effet, la différence de prix entre les deux options n'est pas très importante (2 euros) et la formule « carte » leur offre l'avantage de leur procurer encore 16 entrées pour la piscine (ils pourront donc y aller 4 fois de plus puisqu'ils sont 4 à payer les entrées).

Résultat communiqué (communication)

Pour la famille Duroi, on conseille d'acheter une carte de 20 bains.
Pour la famille Dutoit, les deux solutions peuvent s'avérer intéressantes (et ceci pour les raisons évoquées au point précédent).

La démarche développée ici illustre une démarche « experte » (analytique et réflexive) de résolution. L'objectif d'un enseignement de la résolution de problèmes est de faire tendre les élèves vers une telle démarche. Différents résultats de recherches mettent en évidence un écart important entre cet objectif et les démarches mises en œuvre par les élèves. Il paraît dès lors intéressant de donner un aperçu des travaux menés dans ce domaine.

Les démarches superficielles et la «suspension de construction de sens»

Fin des années 1970 et début des années 1980, quelques études françaises ont mis en évidence des comportements étonnants de la part de jeunes élèves. L'exemple le plus frappant concerne celui connu sous le nom de l'âge du capitaine : « *Il y a 26 chèvres et 10 moutons sur le bateau. Quel est l'âge du capitaine ?* ».

Des chercheurs de l'université de Grenoble ont proposé ce problème à des élèves de première et de deuxième années primaires et ont constaté que la plupart d'entre eux fournissaient une réponse numérique précise en combinant les données de l'énoncé (l'addition des données conduisant ainsi notre brave capitaine à l'âge de 36 ans). Les résultats de ces études ont fait couler beaucoup d'encre et ont donné lieu à de nombreuses interprétations : pourquoi les enfants abordent-ils les problèmes sans faire attention au contexte et sans faire appel à leur sens commun ? Pourquoi cette perte de sens en mathématiques ?

Un autre exemple célèbre provient d'une étude américaine dans laquelle on pose le problème suivant à des élèves de 13 ans : «*Un bus de l'armée peut contenir 36 soldats. Si 1128 soldats doivent être conduits en bus à leur site d'entraînement, combien faudra-t-il de bus ?*».

Seuls 23 % des élèves fournissent la réponse attendue (32 bus), les autres élèves qui réalisent correctement la division n'interprètent pas correctement le résultat et proposent «31 reste 12», «31,33» ou «31».

Le point commun entre les différentes études de ce type est de montrer que lorsque les élèves sont confrontés à des problèmes un peu particuliers (et ceci dans un contexte de classe classique), ils y réagissent de manière stéréotypée et artificielle sans faire appel à leurs connaissances de la vie réelle.

Autrement dit, les problèmes ne semblent pas fonctionner comme des contextes réalistes qui inviteraient les élèves (voire même qui les forceraient) à utiliser leurs connaissances relevant du sens commun et leurs expériences du monde réel en les combinant avec les connaissances et les outils mathématiques qu'ils ont acquis à l'école.

Au contraire, les problèmes semblent être perçus par les élèves comme des tâches scolaires « capricieuses » qui sont complètement séparées du monde réel et qui peuvent être résolues par l'application directe de techniques de calculs. Les élèves vont même parfois jusqu'à accepter des conditions contextuelles qui sont empiriquement fausses.

De nombreuses études se sont attachées à étudier de manière assez systématique le phénomène de perte de sens. Plus précisément, ces études ont tenté de voir si les élèves utilisaient leurs connaissances de la vie réelle pour résoudre des problèmes de mathématiques.

Les deux études pionnières dans ce domaine sont celles réalisées par Greer (1993)[5] en Irlande du Nord et par Verschaffel et al. (1994)[6] en Communauté flamande de Belgique. Elles ont été reproduites dans de nombreux pays et aboutissent toujours à des résultats assez similaires : Caldwell en Irlande du Nord, Hidalgo au Vénézuela, Reusser et Stebler en Suisse, Yoshida et al. au Japon, Renkl en Allemagne ; Verschaffel et al. en Communauté flamande de Belgique (voir Verschaffel, Greer et De Corte, 2000, pour une présentation de ces études).

L'étude de Verschaffel et al. (ibid.) a été menée dans trois classes de cinquième année primaire (75 élèves). Un test papier-crayon composé de 10 paires de problèmes a été proposé aux élèves. Chaque paire d'items était composée d'un problème standard (qui pouvait être résolu par l'application directe d'une opération) et d'un problème problématique pour lequel la simple application d'une opération posait question à partir du moment où on évoquait des connaissances réalistes liées à la situation.

Le tableau page suivante présente quelques paires de problèmes proposées et des exemples de réponses réalistes pour les problèmes problématiques. On note également le pourcentage de réponses réalistes fournies pour chacun de ces problèmes.

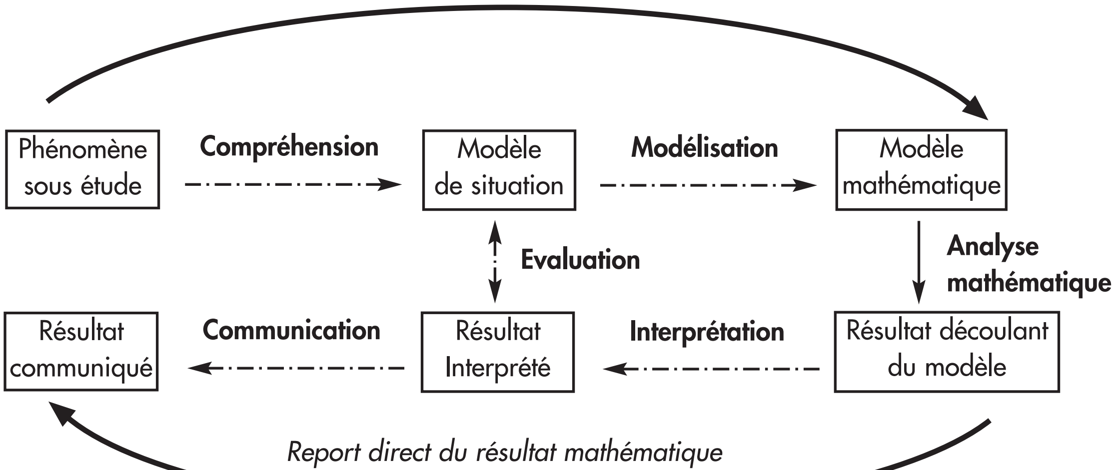
Problèmes standards	**Problèmes problématiques** RR = réponses faisant appel à des considérations réalistes	
Steve a acheté 5 planches de 2 m chacune. Combien de planches de 1 m peut-il faire à partir de ces planches ?	**Les planches** Steve a acheté 4 planches de 2,5 m chacune. Combien de planches de 1 m peut-il faire à partir de ces planches ?	**RR : 14%** - *Ex. Steve peut faire 2 planches d'un mètre au départ d'une planche de 2,5 m* > il peut donc faire 8 planches (2x4=8)
Le compte en banque de Pierre est de 690 francs. Il dépense tout son argent pour acheter 20 petites voitures. Quel est le prix d'une petite voiture ?	**Les bus** 450 soldats doivent être amenés en bus à leur site d'entraînement. Chaque bus de l'armée peut contenir 36 soldats. Combien de bus sont nécessaires ?	**RR : 49%** -*13 bus*
Un bateau navigue à une vitesse moyenne de 45 km/h. Combien de temps lui faudra-t-il pour parcourir 180 km ?	**Le coureur** John court le 100 m en 15 secondes. Combien de temps lui faudra-t-il pour parcourir un km ?	**RR : 3%** - *Ex. certainement plus de 150 secondes*
Christophe fait une balade. Il marche 8 km durant la matinée et 15 km durant l'après-midi. Combien de km a-t-il marché en tout ?	**L'école** Bruce et Alice vont à la même école. Bruce habite à 17 km de l'école et Alice à 8 km de l'école. Quelle est la distance entre la maison de Bruce et la maison d'Alice.	**RR : 5%** - *Ex. La réponse doit se situer entre 9 et 25 km*

On constate que les élèves fournissent très peu de réponses réalistes : tout se passe comme s'ils résolvaient les problèmes sans faire appel à leurs connaissances de la vie réelle. Ces résultats ne sont pas propres à la Communauté flamande de Belgique puisqu'on retrouve des résultats similaires dans toutes les études parallèles qui ont été menées dans différents coins du monde (Suisse, Allemagne, Japon, Irlande du Nord, Vénézuela,…).

Les résultats issus des diverses recherches menées dans ce domaine montrent que les élèves ont tendance à «appliquer envers et contre tout» des opérations mathématiques en vue de fournir des réponses numériques précises à tous les problèmes qui leur sont proposés. Tout se passe comme s'ils excluaient «totalement» leurs connaissances de la vie réelle pour résoudre les problèmes proposés en classe.

Par contraste avec le schéma de modélisation présenté en début d'article, il apparaît que ce type de démarche de résolution de problèmes néglige plusieurs étapes du processus.

Le schéma présenté ci-dessous illustre les démarches superficielles de résolution



En accord avec ce modèle, on peut considérer que la découverte du problème conduit directement au choix d'un modèle mathématique, et ceci, sans passer par la construction d'une représentation appropriée de la situation (un modèle de situation). Le choix du modèle mathématique peut alors être guidé par des critères superficiels comme la recherche de mots-clés (ex. perdre = soustraction) ou par l'association directe entre la situation décrite et des modèles primitifs liés aux opérations (ex. tout ce qui peut suggérer une action de mise en commun est lié à une opération d'addition). Le modèle mathématique ainsi choisi est alors appliqué directement aux nombres proposés dans le problème et le résultat ainsi trouvé est communiqué comme étant la solution du problème. L'étape d'interprétation du résultat par rapport au contexte de départ est ignorée. La pertinence de la solution trouvée n'est pas évaluée, son aspect plausible et réaliste n'est pas interrogé.

Pourquoi les élèves agissent-ils ainsi ? Une explication souvent proposée est que les stratégies superficielles qu'ils développent sont renforcées par la nature stéréotypée des problèmes rencontrés généralement en classe, ainsi que par différents facteurs relevant de l'environnement éducatif.

On peut illustrer brièvement cela au départ d'une analyse portant sur les « règles du jeu » de la résolution de problèmes et sur la nature stéréotypée et artificielle des problèmes proposés (voir Verschaffel, Greer et De Corte, 2000, pour plus de détails).

Les règles du jeu de la résolution de problèmes et la nature des problèmes proposés

La croyance des élèves selon laquelle les problèmes sont sans lien avec la réalité ne peut pas être considérée isolément. Elle fait partie d'un système de connaissances et de croyances plus général concernant les problèmes, la manière dont ils sont structurés et formulés et le rôle qu'ils jouent dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à l'école. De Corte et Verschaffel ont introduit le terme de «*word problem schemata*» (qu'on pourrait traduire de façon non textuelle par **les règles du jeu de la résolution de problèmes**) pour faire référence à ce système.

Le *word problem schemata* comprend les connaissances et les croyances portant sur différents aspects.

Le but et le rôle des problèmes : une compréhension intuitive de comment le sujet doit réagir de manière appropriée face à un problème (par opposition à une blague, une histoire) et ceci même lorsque l'énoncé ou les instructions qui l'accompagnent contiennent très peu d'indices explicites à cette fin.

> Ex. Dans la cours de récréation, le problème suivant est considéré comme une blague alors qu'il conduira à proposer une réponse chiffrée au cours de mathématiques : Il y a 5 oiseaux sur une branche. *Un chasseur prend son fusil et en tue trois. Combien reste-t-il d'oiseaux sur la branche ?*

La structure typique des problèmes : c'est ce qui oriente le processus de lecture du sujet en le focalisant sur certains éléments et certaines relations qui sont cruciales pour la construction d'une représentation mathématique appropriée. Ceci peut aussi le conduire à ne pas prendre en considération certaines informations parce qu'elles sont non pertinentes pour construire cette représentation.

> Ex. Dans un problème faisant référence à une notion de vitesse, l'élève fait appel à un raisonnement proportionnel, sans se demander si ce rapport est proportionnel dans la réalité.
>
> Ex. Face à un tableau présentant les tarifs postaux, l'élève a tendance à vouloir calculer un prix proportionnel au poids plutôt que de se concentrer sur une lecture du tableau.

Un certain nombre de règles implicites, de présupposés et d'accords inhérents au «jeu» de la résolution de problèmes : ceci permet au sujet de résoudre certaines ambiguïtés ou zones d'ombres dans l'énoncé. De plus, cela lui fournit une aide supplémentaire pour réagir au problème de façon conforme aux attentes de celui qui pose le problème.

> *Ex. Pierre avait 4 pommes. Anne lui a donné 9 pommes. Combien de pommes Pierre a-t-il maintenant ?* ⟶ Il est sous-entendu que Anne a des pommes au départ…
> Ex. Si on parle de partage (sans plus de précisions), il est sous-entendu qu'il s'agit d'un partage équitable. De même, si on parle de vitesse (sans plus de précision), il faut comprendre qu'il s'agit d'une vitesse moyenne.

Verschaffel et al. (2000) dressent également une liste de **présupposés**. Ceux-ci ont des aspects négatifs et positifs : d'une part, s'il n'y avait aucun présupposé, on ne pourrait pas «jouer» mais, d'autre part, ils cautionnent souvent la mise en œuvre de démarches superficielles et routinières.

Supposer que tous les problèmes proposés sont corrects, complets et qu'ils ont du sens (puisqu'ils sont déterminés tels quels par l'autorité en place).

Supposer qu'il n'y a qu'une seule réponse correcte pour chaque problème et qu'elle doit se présenter sous une forme numérique et précise.

Supposer que cette réponse unique, précise et numérique peut être et doit être obtenue en mettant en œuvre une ou plusieurs opérations arithmétiques ou formules au départ des nombres proposés dans l'énoncé et certainement avec tous les nombres.

Supposer que la tâche peut être effectuée au départ des connaissances mathématiques dont dispose l'étudiant – c'est-à-dire, dans la plupart des cas, en appliquant les concepts mathématiques, les formules, les algorithmes,… qu'on vient de voir récemment dans les leçons de mathématiques.

Supposer que la solution finale (et même généralement les résultats intermédiaires), doit (doivent) contenir des nombres «propres» (c'est-à-dire des nombres entiers).

Supposer que le problème contient en lui-même toutes les informations nécessaires pour l'interpréter et le résoudre correctement et qu'aucune information extérieure ne doit être prise en considération. Le problème ne doit pas être altéré par l'importation d'informations contextuelles pertinentes qui ne sont pas spécifiées telles quelles dans l'énoncé et qui risquent de compliquer les intentions initiales relatives au modèle mathématique impliqué.

Supposer que les personnes, les objets, les endroits, les prix, etc… sont différents dans les problèmes scolaires et dans la vie réelle ; il ne faut pas (trop) se tracasser si les connaissances ou intuitions personnelles dont on dispose concernant la vie de tous les jours sont parfois «violées» dans les problèmes décrits.

La notion de **word problem schemata** peut être reliée à des notions plus générales telles que le «contrat didactique» (Brousseau), les « normes socio-mathématiques » (Cobb), le «contrat expérimental» (Greer) et les concepts de « curriculum caché » ou de « curriculum latent ». Une rupture des ces «contrats» ou des «règles du jeu» peut, en partie, expliquer les résultats de «*suspension de construction de sens*».

Il semblerait que le « *word problem schemata* » se construise progressivement lorsque l'élève «vit» au sein de l'école (cf. concept d'enculturation – Brown, Collins et Duguid, 1989[7]). Cette enculturation semblerait pouvoir s'expliquer partiellement par la **nature stéréotypée et artificielle des problèmes** proposés habituellement en classe. Verschaffel et al. (2000) proposent une analyse en plusieurs points.

---

1) Durant les premières années d'école, les élèves sont majoritairement confrontés à des problèmes qui peuvent être directement résolus par l'application d'une des quatre opérations arithmétiques de base au départ des nombres proposés dans l'énoncé.
Ceci renforce la croyance selon laquelle tous les problèmes d'application peuvent être résolus de cette manière. En plus de cela, s'ajoute encore l'idée selon laquelle la résolution d'un problème nécessite seulement un petit nombre d'étapes de résolution et ne doit pas prendre plus de cinq minutes.

---

2) Les problèmes sont souvent présentés de manière à rendre efficaces les stratégies superficielles et routinières : chercher des indices dans le titre du chapitre ou dans l'environnement dans lequel le problème est proposé, chercher les mots-clés qui indiquent l'opération à effectuer,…

---

3) Très peu de problèmes incluent des données superflues, imprécises ou manquantes. Résoudre un problème revient alors à faire quelque chose avec tous les nombres de l'énoncé.

---

4) Les tâches numériques sont incluses dans des contextes mais ceux-ci sont généralement de nature stéréotypée et manquent d'informations vivantes ou intéressantes. Il en est généralement de même pour la nature des questions posées. Tout cela contribue à ne pas motiver ou stimuler l'enfant à faire attention au contexte et à y apporter un regard critique. Il est plutôt amené à considérer celui-ci comme un habillage peu pertinent et ayant peu d'incidence sur la tâche mathématique à réaliser.

5) Les enfants sont souvent confrontés à des problèmes qui contiennent des données peu réalistes. Des exemples typiques concernent les problèmes de vitesse où des véhicules roulent à des vitesses constantes pendant des heures (quand ce ne sont pas des animaux inépuisables,…), les problèmes de jardin autour desquels on met une clôture sans laisser de «porte d'entrée», un enfant lisant les pages d'un livre à une cadence invariable,…
Les élèves apprennent donc qu'il y a un fossé entre les problèmes scolaires et le monde réel.

6) Les problèmes qui requièrent une estimation plutôt qu'une solution précise sont extrêmement rares. Ceci renforce l'idée selon laquelle la solution doit être un nombre précis et que les autres types de réponses (réponses conditionnelles, approximations, intervalles,…) sont des réponses moins valides, voire complètement illégitimes.

7) Les problèmes indéterminés, équivoques ou insolvables sont très rares. Comme les enfants ne sont pas confrontés à des problèmes qui permettent des interprétations multiples, des modèles de situation alternatifs, des chemins de résolutions divergents, des solutions variées,… ils développent une croyance selon laquelle chaque problème a une seule interprétation, une seule méthode de résolution et une seule solution.

8) Les situations qui requièrent de formuler des problèmes, de structurer des problèmes similaires ou différents, de trier des problèmes en fonction de diverses caractéristiques,… sont très rares. Ceci est très différent du monde réel dans lequel identifier, définir et formuler les problèmes sont des tâches qui jouent un rôle essentiel dans le processus de résolution.

Vers la construction d'un outil méthodologique à usage des enseignants…

L'objet de la recherche dont il est question dans le présent article est de développer une «*méthodologie d'enseignement des compétences transversales dans le cadre de la résolution de problèmes en 5e et 6e années de l'enseignement primaire*». Concrètement, cette recherche devra déboucher sur un outil méthodologique à usage des enseignants.

Cet outil devra permettre d'apprendre aux élèves à développer une démarche «experte» (analytique et réflexive) de résolution de problèmes ; c'est-à-dire une démarche complexe de modélisation telle que développée en début de cet article.
Les différentes étapes de la démarche de résolution font intervenir la plupart des compétences transversales à développer.

Le tableau ci-dessous en présente une mise en perspective.

Phase du processus de résolution de problème	Compétences transversales investies pour mener à bien les différentes phases du processus de résolution de problème
Modèle de situation	◆ Revivre la situation, la raccorder à son environnement, ses domaines d'intérêt, à d'autres objets étudiés, à son vécu. ◆ Repérer, reformuler la ou les question(s) explicites(s), implicite(s). ◆ Se poser des questions. ◆ Repérer la nature des informations dans un tableau, un graphique, repérer les mots importants, l'articulation entre les différentes propositions, prendre en compte le contexte d'un mot pour en déterminer la signification. ◆ Distinguer, sélectionner les informations utiles des autres, percevoir l'absence d'une donnée nécessaire et la formuler. ◆ Recourir à des référents habituels.

Phase du processus de résolution de problème	Compétences transversales investies pour mener à bien les différentes phases du processus de résolution de problème
Modèle mathématique	◆ Raccrocher la situation à des objets mathématiques connus. ◆ Utiliser un schéma, un graphique lorsque ces supports sont pertinents. ◆ Morceler un problème, transposer un énoncé en une suite d'opérations. ◆ Maîtriser le symbolisme mathématique usuel. ◆ Construire une formule, une règle, schématiser une démarche, ordonner une suite d'opérations, construire un organigramme.
Résultat découlant du modèle	◆ Présenter des stratégies qui conduisent à une solution. ◆ Utiliser une règle apprise, une méthode. ◆ Combiner plusieurs démarches en vue de résoudre une situation nouvelle.
Résultat interprété	◆ Estimer le résultat. ◆ Vérifier la plausibilité d'un résultat. ◆ Exposer et comparer ses arguments, ses méthodes ; confronter ses résultats avec ceux des autres et avec une estimation préalable.
Résultat communiqué	◆ S'exprimer dans un langage clair et précis. ◆ Présenter des stratégies qui conduisent à la solution.

En parallèle à l'apprentissage de cette démarche de résolution, il ne faut pas perdre de vue la tendance des élèves à développer des démarches superficielles et des comportements de «suspension de construction de sens». Ces comportements «inadaptés» sont liés à un certain nombre de présupposés sur la résolution de problèmes et sur les règles du jeu qui la gouvernent. Il faudra donc veiller à proposer un corpus de problèmes variés (non artificiels et non stéréotypés) et à développer une méthodologie «ouverte» (acceptant notamment la variété des démarches de résolution) qui permette de lutter contre ces présupposés et de «désapprendre» des comportements inefficaces.

La construction de cet outil méthodologique est en cours d'élaboration et se fait en collaboration avec des inspecteurs et des groupes d'enseignants des niveaux concernés.

Notes

1 Article lié à la première année (2001-2002) de la recherche «Méthodologie d'enseignement des compétences transversales dans le cadre de la résolution de problèmes en cinquième et sixième années de l'enseignement primaire».

2 TARDIF, J. (1992). Pour un enseignement stratégique. Québec, Logiques.
3 JULO, J. (1995). Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement. «Psychologies». P.U. de Rennes.
4 VERSCHAFFEL, L., GREER, B. & DE CORTE, E. (2000). Making sense of word problems. Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger.
5 GREER, B. (1993). The mathematical modelling perspective of wor(l)d problems. Journal of Mathematical Behavior, 12, 239-250.
6 VERSCHAFFEL, L., De Corte, E., Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modelling of school arithmetic word problems. Learning and Instruction, 4, 273-294.
7 BROWN, J.S., COLLINS, A. & DUGUID, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. Educational Researcher, 18(1), 32-42.