Comment l'enseignement des partages inégaux peut-il s'appuyer sur les démarches des élèves ?

Synthèse de la recherche en pédagogie 35/02

Isabelle DEMONTY, Annick FAGNANT et Michèle LEJONG
Service de Pédagogie expérimentale de l'Université de Liège
Sous la direction du Professeur **Marcel CRAHAY**

Dans le cadre de cette recherche, le Bulletin d'informations pédagogiques (n°54, septembre 2003) a publié un précédent article intitulé : La résolution de problèmes : un processus complexe de «modélisation mathématique».
L'article qui suit en constitue le prolongement.

La recherche dont s'inspire le présent article a pour objectif principal de créer et d'expérimenter des séquences d'enseignement de la résolution de problèmes en cinquième et sixième années primaires. Ces séquences visent à apprendre aux élèves à développer une démarche experte et réflexive de résolution de problèmes.

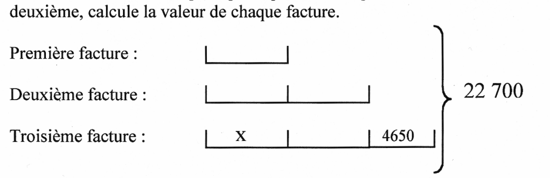
Dans cet article, nous présentons une séquence d'enseignement sur les problèmes de partages inégaux. Celle-ci a été élaborée sur la base d'une analyse approfondie des démarches des élèves mises en œuvre dans des situations variées de partages inégaux avant tout enseignement dans ce domaine. Une synthèse de l'analyse réalisée au départ de ces productions permet de montrer comment développer des activités d'apprentissage soucieuses de partir de ces démarches qui se révèlent assez différentes des démarches formelles qu'on veut leur apprendre.

1.Pourquoi développer une séquence sur les problèmes de partages inégaux ?

Les problèmes de partages inégaux constituent un contenu important envisagé à la fin de l'enseignement primaire. L'intérêt de ces situations réside bien moins dans la place qu'ils occupent dans la vie de tous les jours (où on est en effet globalement peu confronté à ce genre de problèmes) que dans les apprentissages mathématiques qu'ils peuvent engendrer. En effet, d'une part, ces problèmes envisagent une première rencontre avec la notion d'inconnue, concept qui sera largement exploité dans la suite de la scolarité et, d'autre part, ils permettent de développer de nouveaux outils de modélisation.

Dans de nombreux manuels, ces problèmes sont accompagnés d'une représentation opérationnelle qui débouche rapidement sur une démarche de résolution. Voici un exemple illustrant le type de modélisation accompagnant ces problèmes :

Chez le garagiste, Hector doit payer trois factures dont le total est 22 700 €. Sachant que la deuxième vaut deux fois plus que la première et que la troisième vaut 4 650 € de plus que la deuxième, calcule la valeur de chaque facture.



La schématisation en bandelettes permet de déduire une stratégie de résolution : 5 parts + 4650 = 22 700, donc une part = (22700 – 4650) : 5

Cette démarche est intéressante dans la mesure où la représentation apparaît ici sous un autre aspect qu'une simple énonciation des données et des relations entre celles-ci. En effet, le fait de schématiser le problème sous cette forme apporte une information supplémentaire qui n'était pas explicite dans le problème, à savoir que la somme totale (dans le problème, 22700) est répartie en un certain nombre de parts (5) auxquelles est ajouté un montant connu (4650). Résoudre le problème revient alors à découvrir la valeur d'une part.

Confronter l'élève à ce type de problèmes peut lui permettre d'avoir une autre vision des problèmes arithmétiques. En effet, dans cette classe de problèmes, on ne peut déduire d'emblée le calcul à effectuer : l'élève est confronté à un nombre inconnu dont il ne peut trouver directement la valeur. En termes plus mathématiques, l'élève est amené à résoudre des équations où l'inconnue apparaît à plusieurs reprises dans un même membre (dans l'exemple plus haut, il s'agit de l'équation «$x + 2x + 2x + 4650 = 22700$»).
Ce type de problèmes impose de construire une démarche où il faut réaliser une opération avec un nombre inconnu. En ce sens, l'élève peut appréhender le concept d'inconnue, qui est une notion fondamentale en mathématiques.

Toutefois, présenter d'emblée ces problèmes de cette manière amène l'élève à rentrer dans une démarche nouvelle, sans avoir la possibilité d'être lui-même amené à construire son propre raisonnement. Pour cette raison, l'élève n'est pas réellement plongé dans une situation de résolution de problèmes et ce type d'activité risque de ne pas lui permettre de développer ses propres outils de modélisation.

Lors des évaluations de fin d'année mises au point par les inspecteurs, ces derniers nous ont fait part de réelles difficultés des élèves face à cette classe de problèmes : choisir le bon schéma en bandelettes correspondant à un problème semble être une compétence maîtrisée par très peu d'élèves en fin de sixième année. De nombreuses études ont également mis en évidence la difficulté, pour des élèves débutants en algèbre, à opérer sur un nombre inconnu (Bednarz et Janvier, 1993, Filloy et Rojano, 1984, Linchevski et Herscovics, 1996). Par ailleurs, historiquement, cette capacité a également pris du temps pour s'installer et a nécessité le dépassement d'un certain paradoxe : comment est-il possible d'agir sur quelque chose dont on ne connaît pas la nature tangible (Charbonneau et Levebvre 1992, cité par Schmidt, 1996) ?

Il n'est donc guère étonnant d'observer des difficultés similaires chez les élèves.

2. L'analyse des démarches des élèves avnt tout enseignement dans le domaine

Dans le cadre de la recherche il nous est apparu pertinent d'analyser en profondeur cette thématique en vue de réfléchir au développement d'une approche d'enseignement alternative, qui prendrait mieux en compte les démarches des élèves. Afin de mieux comprendre leurs difficultés dans le domaine, nous leur avons soumis un test requérant la résolution de problèmes de partages inégaux de difficultés variables.
Pour chaque problème, nous avions demandé aux élèves de procéder en trois étapes :

- explication du problème ;
- résolution du problème ;
- réponse.

La première étape visait à conduire l'élève à décrire sa représentation du problème (sous la forme d'un dessin ou d'une reformulation écrite). Les étapes deux et trois l'invitaient à expliciter sa démarche de résolution et à communiquer clairement la solution obtenue.

Problème 1
Un père partage une somme de 1800 euros entre ses trois filles : Aurélie, Béatrice et Céline. Il donne 2 fois plus à Céline qu'à Aurélie et il donne 200 euros de moins à Béatrice qu'à Céline. Sachant que Béatrice reçoit 600 euros, combien les autres enfants ont-ils reçu?

Problème 2
Un père partage une somme de 600 euros entre ses deux filles : Aurélie et Béatrice. Il donne 150 euros de plus à Aurélie qu'à Béatrice. Combien chaque enfant a-t-il reçu ?

Problème 3
Un père partage une somme de 1000 euros entre ses deux filles : Aurélie et Béatrice. Il donne 4 fois plus à Aurélie qu'à Béatrice. Combien chaque enfant recevra-t-il ?

Problème 4
Un père partage une somme de 1200 euros entre ses 3 filles : Aurélie, Béatrice et Céline. Il donne 3 fois plus à Aurélie qu'à Béatrice et 200 euros de moins à Céline qu'à Aurélie. Combien chaque enfant a-t-il reçu?

Ces quatre problèmes de partages inégaux présentent des structures assez variées.
Le premier problème proposé peut être très facilement résolu à partir de la partie réservée à Béatrice. Il est dès lors possible de déterminer les deux autres parties en réalisant des opérations arithmétiques sur des quantités connues (la mise en équation de ce problème aboutit à une équation où l'inconnue n'apparaît qu'une seule fois, dans un seul membre de l'équation).

Ce n'est pas le cas pour les autres problèmes qui apparaissent dès lors comme des problèmes nécessitant la prise en compte du concept d'inconnue (la mise en équation aboutit à une équation où l'inconnue apparaît plusieurs fois dans un seul membre).

Les pourcentages de réussite à ces problèmes montrent que la structure du problème est un élément déterminant dans la difficulté de celui-ci :

Problème 1	Ne nécessite pas d'effectuer d'opération sur l'inconnue	61%
Problème 2 **Problème 3** **Problème 4**	Nécessite d'effectuer des opérations mettant en jeu une inconnue	14% 36% 33%

En effet, le problème 1 est réussi par 61% des élèves alors que les autres ne dépassent pas les 36% de réussite.
Le faible taux de réussite du problème 2 comparativement aux problèmes 3 et 4 peut sans doute en partie s'expliquer par la nature des solutions :
◆ dans le problème 2, les solutions sont 375 et 225 ;
◆ dans les autres, les solutions sont toujours des multiples de 100.
Une stratégie intuitive de comparaison des nombres a donc beaucoup plus de chances d'aboutir pour les problèmes 3 et 4 que pour le problème 2.

Malgré la variété des situations proposées, de grandes tendances se dégagent à travers les analyses des démarches des élèves, et ceci, à plusieurs niveaux.

A. Au niveau de la représentation des problèmes

Deux constats se retrouvent dans tous les problèmes : d'une part, une **omission massive des relations** entre les données, et, d'autre part, une **proportion peu élevée d'erreurs** de représentation.

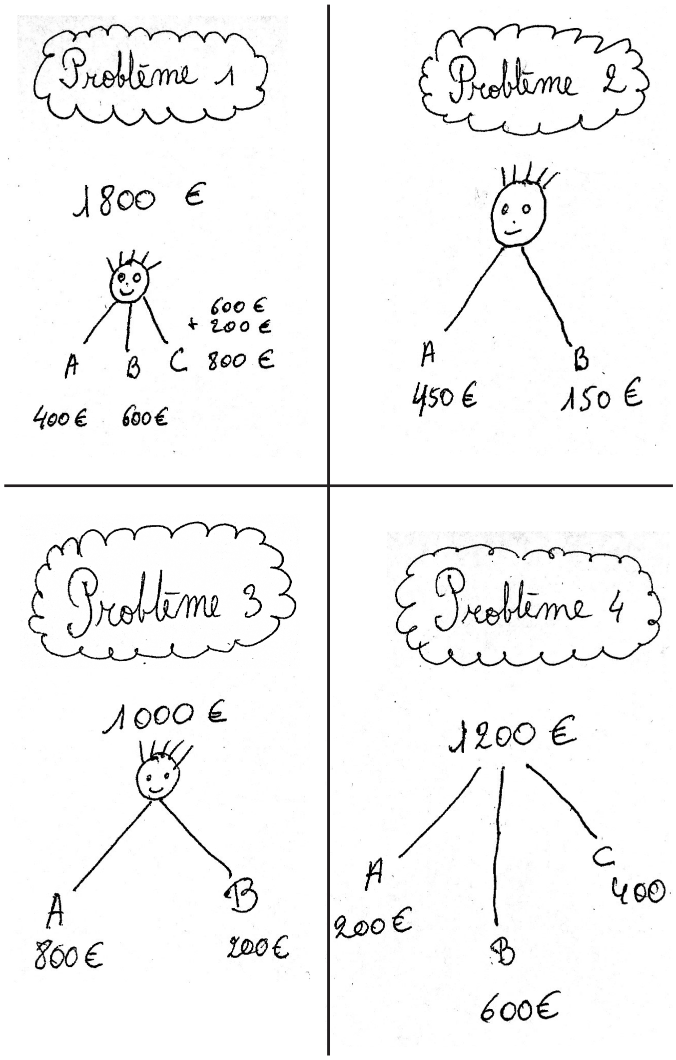
	P1		P2	P3	P4	
% d'omission des relations	**55 % C=2A**	**57 % B=C-200**	**55 % A=B+50**	**60 % A=4B**	**65 % A=3B**	**65 % C=A-200**

◆ Pourcentage d'omissions des relations :

	P1	P2	P3	P4
% de représentations erronées	**11%**	**11%**	**4%**	**8%**

◆ Pourcentages de représentations erronées :

Ces problèmes étant assez dépouillés, il n'est pas étonnant qu'à ce niveau de l'apprentissage, peu d'erreurs apparaissent. En effet, la seule interprétation à réaliser était liée aux relations. Plus spécifiquement, il s'agissait de préciser le sens de ces relations. Les exemples suivants illustrent bien le type de représentation que la plupart des élèves se font de cette classe de problèmes :



◆ La représentation du problème 1 est relativement complète : on peut voir le père, la somme totale à partager, la somme reçue par chaque enfant (ce qui correspond à une donnée pour Béatrice et à la solution du problème pour Aurélie et Céline) et certaines relations (il manque la relation A x 2 = C).

◆ Les représentations des problèmes 2, 3 et 4 sont très dépouillées. La somme à partager est représentée dans deux problèmes sur trois mais les relations entre les enfants sont chaque fois absentes. En revanche, les sommes à attribuer à chaque enfant (erronées ici pour le problème 2) sont représentées alors qu'il s'agit en fait de la solution du problème (et non d'un réel élément de la représentation).

B. Au niveau des démarches de résolution

En plus de mettre en évidence la variété des démarches développées par les élèves, nous avons analysé le point de départ sur lequel se base la démarche de résolution. Trois points de départ ont pu être recensés.

- Certains rentrent dans le problème par la somme totale à partager, qu'ils divisent équitablement entre les trois personnes. Ils essaient ensuite de développer diverses stratégies afin de rétablir l'inégalité des différentes parties. Cette stratégie permet de ramener le problème à un problème arithmétique classique : à aucun moment, l'élève ne considère dans ce cas une quantité inconnue. En effet, une répartition équitable entre les parties permet de générer d'emblée un nombre sur lequel appliquer les relations décrites dans l'énoncé.

- Une autre démarche consiste à se préoccuper dans un premier temps des relations. La démarche classique d'enseignement de la résolution de ce type de problèmes nécessite de réaliser une telle analyse du problème. En effet, c'est sur la base de la prise en compte des relations que l'on pourra déterminer les parts à attribuer à chaque enfant. Dans cette démarche, et contrairement à la précédente, l'élève est confronté à une quantité inconnue, à laquelle il ne cherche pas d'emblée à attribuer une valeur. Il utilise donc pleinement ici le concept d'inconnue.

- Une dernière démarche consiste à attribuer d'emblée une valeur numérique à l'une des parties. On détermine ensuite, sur la base des relations, les parts réservées aux autres enfants. L'écart entre la somme totale ainsi obtenue, et celle qui est stipulée dans le problème permet alors de rectifier la valeur posée au départ. On recommence ensuite cette procédure d'essais-erreurs jusqu'à obtenir un total égal à celui donné dans l'énoncé. A nouveau ici, le concept d'inconnue n'est pas pleinement utilisé puisque, dès le départ, on travaille sur des quantités connues.

En ce qui concerne les points d'entrée dans les problèmes, le problème 1 se distingue des autres : la démarche la plus fréquemment observée est celle qui prend appui sur l**a part de Béatrice** (51% des cas). Les élèves semblent donc capables de mettre en œuvre une procédure de substitution lorsque l'énoncé précise explicitement une des parties (en effet, le problème 1 mentionne la part réservée à Béatrice). Pour les autres problèmes, le point d'entrée le plus fréquent est le **partage égal entre les différents intervenants** (56% pour le problème 2, 32% pour le problème 3 et 40% pour le problème 4) . La démarche classique, qui prend comme point de départ les relations entre les parties, est excessivement peu utilisée par les enfants et quand elle est utilisée, elle s'avère très souvent inefficace.

On constate donc que spontanément, les élèves ne mettent pas en œuvre la démarche classique d'enseignement et que leur analyse première du problème est assez éloignée de celle qu'il faudrait entreprendre pour mener à bien la démarche classique de résolution.

Un autre constat se dégage également de l'analyse des démarches aboutissant à des solutions correctes : les **démarches correctes** utilisées sont t**rès souvent variées** (4 démarches différentes et aboutissant à une résolution correcte pour le premier problème, 2 pour le deuxième, 5 pour le troisième et 7 pour le quatrième). Un certain nombre d'élèves parvient donc à trouver la solution à ces problèmes de façon originale mais également très différente de la démarche que l'on veut classiquement enseigner.

Au niveau des **démarches incorrectes,** on constate très souvent une certaine forme de cohérence dans le raisonnement : les élèves prennent en compte plusieurs éléments de l'énoncé mais interprètent mal certaines informations ou ne prennent pas en compte certaines contraintes. De plus, une **erreur typique** se retrouve (en proportion variable toutefois) dans les différents problèmes : la transformation des relations multiplicatives en relations additives (par exemple, **«x 2» devient «+ 200»)**. Plus qu'une simple erreur de lecture, cette interprétation erronée pourrait être attribuée à une mauvaise estimation des parts : vu la taille des nombres, si j'ajoute 200 à un enfant, il aura environ 2 fois plus. Cette stratégie n'étant pas suivie d'une vérification performante, elle aboutit à une réponse incorrecte dans tous les cas.

C. Au niveau des solutions proposées

Deux constats majeurs se dégagent :

◆ **peu de solutions ne respectent aucune contrainte** (respectivement 1%, 7%, 6% et 2%);

◆ pour les problèmes 2, 3 et 4, **la relation «le tout = la somme des parties» semble souvent mieux respectée** que les relations entre les parties, comme le montrent les données reprises dans le tableau ci-dessous :

	P1	P2	P3	P4
Solutions respectant le total mais où les relations sont bafouées	**19%**	**59%**	**39%**	**36%**

	P1	P2	P3	P4
Solutions respectant les relations mais où le total n'est pas correct	**17%**	**15%**	**7%**	**22%**

D. Au niveau du lien entre représentation et résolution

Concernant cet aspect de l'analyse, il semble se dégager une absence de lien entre représentation et résolution, qui présente les caractéristiques suivantes.

- Une proportion importante d'élèves qui avaient une représentation complète de la situation ne parvient pas à obtenir la solution correcte.
- A l'inverse, la majorité des élèves qui obtiennent la réponse correcte ont produit une représentation incomplète de la situation.

Ce constat paraît a priori assez étonnant. En effet, de nombreuses études menées en psychologie cognitive ont mis en évidence que la représentation du problème est un des éléments essentiels qui distinguent les experts des novices en résolution de problèmes (Richard, 1990 ; Schoenfeld, 1992 ; Tardif, 1992 ; Gagné, cité par Crahay, 1996).

Une explication de ce phénomène pourrait être la suivante : «*la compréhension d'un problème ne se limite pas à la compréhension de l'énoncé*» (Julo, 1996). Or l'analyse des représentations a mis en évidence que les représentations complètes consistent à préciser correctement les données des problèmes ainsi que les relations les unissant (la somme totale, le nombre d'enfants, et les relations additives ou multiplicatives énoncées dans les problèmes). Ces représentations nous amènent à penser que, dans le meilleur des cas, les élèves n'ont pas de difficulté de compréhension en lecture des énoncés proposés. En revanche, ils ne parviennent pas à rendre leur représentation opérationnelle, c'est-à-dire que leurs représentations ne débouchent pas d'emblée sur une stratégie de résolution, comme pourrait le permettre la représentation classique de ce type de problèmes (schéma en bandelettes, précisant au-delà de la reformulation des données, le nombre de parts entre lesquelles la somme totale devra être partagée - information qui n'est jamais explicitement donnée dans l'énoncé). La représentation qu'ils proposent ne leur permettant pas de trouver une stratégie de résolution, on peut dès lors mieux comprendre cette absence de lien : certains ont peut-être même considéré les deux tâches (représentation et résolution) comme totalement indépendantes et n'ont donc pas confronté la solution obtenue avec la représentation qu'ils avaient formulée par écrit.

3. La conception d'une séquence d'apprentissage

La démarche classique de résolution des problèmes de partages inégaux est une démarche qui prend appui sur l'analyse des relations : c'est en fonction de ces dernières que l'on pourra établir le schéma en bandelettes permettant de visualiser le nombre de parts entre lesquelles la somme totale devra être partagée. Or, les productions initialesdes élèves montrent des lacunes importantes au niveau de l'analyse de ces relations :

- elles sont rarement mentionnées dans les représentations ;
- les démarches de résolution se focalisent massivement sur une des parties ou sur la somme totale qui, au départ, est répartie équitablement entre les enfants ;
- bien souvent, les solutions proposées par les élèves ne parviennent pas à combiner les contraintes relatives aux relations ;
- les quelques tentatives de résolutions centrées sur les relations qui ont pu être recensées, aboutissent, dans une large majorité des cas, à un échec.

Enseigner d'emblée la démarche classique aux élèves reviendrait à nier leurs démarches initiales, qui, tout en suivant une certaine logique, sont pourtant globalement peu efficaces.

Comment dès lors amener les enfants à être plus performants dans ce domaine ? **S'appuyer sur leurs démarches et chercher à leur faire approfondir la vérification de leurs solutions pourrait être une voie d'enseignement intéressante** à plusieurs niveaux.

- Elle cherche avant tout à plonger l'élève dans une véritable activité de résolution de problèmes.
- Elle permet à chacun de faire émerger ses propres démarches : l'élève aura ainsi l'occasion de développer sa propre procédure de résolution qui, bien souvent, ne manque pas de logique.
- Elle amènerait l'élève à se rendre compte de lui-même que sa démarche, tout en étant logique, ne fonctionne pas.
- Elle pourrait apporter une aide à la construction de la représentation initiale. En vérifiant sa réponse en référence, non pas à la démarche de résolution qui l'a engendrée, mais plutôt aux contraintes énoncées dans le problème, l'élève pourra être amené à retravailler sa représentation initiale en accordant une place importante aux relations unissant les données du problème.

La démarche par essais-erreurs pourrait être une démarche à privilégier dans un premier temps. En effet, elle permet à l'élève d'attaquer le problème par une répartition équitable entre les parties. Accompagnée d'une démarche performante de vérification, cette approche par essais-erreurs pourra ainsi être mieux organisée de manière à devenir un outil efficace de résolution de problèmes.

Dans un second temps, une formalisation plus systématique de cette démarche pourrait conduire à découvrir le concept d'inconnue, qui lui-même permettra alors de donner sens à la démarche plus classique de résolution.

Les objectifs à poursuivre

La séquence d'enseignement poursuit un double objectif : d'une part, amener les élèves à **construire des stratégies efficaces de résolution des problèmes de partages inégaux et d'autre part, développer le concept d'inconnue**, notion essentielle en mathématiques.

Vu l'efficacité de la démarche classique de résolution de ces problèmes, il pourrait sembler plus économique d'orienter rapidement les élèves vers cette procédure. Or, l'analyse du test montre que les démarches initiales des élèves sont très éloignées de cette procédure et que par ailleurs, un nombre non négligeable d'entre eux parviennent à des solutions correctes (par tâtonnement notamment). Enseigner d'emblée la démarche classique risque donc de nier complètement leurs démarches initiales et de les entraîner à une procédure qui ne leur permettra pas d'entrer pleinement dans une démarche réflexive de résolution de problèmes.

En revanche, **amener l'élève à construire une représentation prenant en compte l'ensemble des contraintes du problème et à trouver, même en tâtonnant, des valeurs qui satisfont à ces contraintes** permettra à la fois d'affiner les démarches initiales des enfants (et les rendre ainsi plus efficaces) et de développer le concept d'inconnue : cette dernière apparaîtra comme le nombre qui permet de rendre vraie l'égalité «la somme des parties = le tout», tout en respectant les relations formulées dans l'énoncé. En effet, la démarche par essais-erreurs permet de déterminer la valeur des différentes parties en appliquant les relations sur un nombre dont on fixe a priori la valeur. On aura trouvé l'inconnue lorsque on arrivera à respecter la contrainte supplémentaire «le tout = la somme des parties».

Afin d'être réellement efficace, la démarche par essais-erreurs doit être accompagnée d'une **procédure de vérification performante** consistant à analyser dans quelle mesure la solution trouvée satisfait à l'ensemble des contraintes évoquées dans le problème. Développer cette étape de vérification est également un objectif prioritaire de la séquence : l'analyse du test a en effet mis en évidence que, d'une part, très souvent, seule une partie des informations utiles (la somme totale et le nombre d'enfants) est évoquée dans la représentation et que, d'autre part, les solutions proposées ne respectent qu'une partie des contraintes. Par ailleurs, par le biais de la vérification, on pourra amener l'élève à affiner sa représentation du problème.
Quelle place accorder dans la séquence à la démarche classique de résolution ? Bien que la démarche par essais-erreurs puisse s'avérer efficace dans un grand nombre de cas, elle a également ses limites, notamment lorsque les parties correspondent à des décimaux. **Amener l'élève à s'approprier progressivement la démarche s'appuyant sur un schéma en bandelettes** est également un objectif qu'il convient de poursuivre dans la séquence.

La méthodologie proposée

La méthodologie s'organise en six étapes.

Etape 1
Remise en question des démarches inefficaces

La première étape a pour but de plonger les élèves dans un problème concret, consistant à partager une bandelette de papier en trois parties. L'enseignant réalise le découpage devant les enfants puis propose à chacun de réaliser le même découpage grâce à des indices précisant les relations entre les parties.
Cette démarche visuelle a pour but d'amener les enfants à constater notamment qu'une répartition équitable entre les parties ne peut aboutir. Une fois le découpage réalisé, les enfants peuvent venir comparer leur solution avec celle de l'enseignant. Cela leur permet d'avoir un retour sur leur production tout en leur offrant l'opportunité de continuer la recherche, puisque ni la solution chiffrée, ni la démarche de résolution ne leur sont fournies.

Etape 2
Analyse de solutions et résolution du problème

Cette seconde étape vise à apporter des indices pour les enfants qui ne parviennent pas à trouver la réponse correcte. Deux types d'indices sont proposés et visent à affiner la représentation que se font les élèves du problème en focalisant leur attention sur l'ensemble des contraintes du problème.
◆ Des solutions à critiquer : élaborées au départ des démarches mises en œuvre par les élèves lors du test, ces solutions sont argumentées (le raisonnement proposé semble souvent logique et cohérent). Dès lors, la façon la plus économique de vérifier est de comparer les nombres trouvés aux contraintes du problème.
◆ Quelques questions permettant d'affiner la représentation que l'élève se fait du problème.
Ces questions visent à affiner la représentation sans orienter les élèves sur une démarche particulière de résolution : quel est le morceau le plus petit ? Si le morceau A mesure 7 cm, combien de centimètres doit-on ajouter pour avoir le morceau B ? …

Ces deux types d'indices doivent amener les élèves à affiner leur démarche de résolution et à trouver la solution du problème. Une mise en commun sera organisée afin de permettre d'affiner les représentations et de confronter les différentes démarches de résolution.

Etape 3
Résolution d'un autre problème - organisation de la démarche par essais-erreurs – introduction du schéma en bandelettes

Cette étape a pour objectif de formaliser la démarche par essais-erreurs autour d'un tableau de données. Elaboré au départ des essais des enfants, ce tableau permettra d'approfondir la démarche par essais-erreurs et de travailler la notion d'inconnue. Par ailleurs, l'analyse du tableau permettra également d'introduire la schématisation en bandelettes.

Exemple d'un tableau que l'on pourrait obtenir au départ du problème suivant : partager une bandelette de 35 cm en deux parties, de manière à ce que l'une ait 7 cm de plus que l'autre.

Bandelette A (en cm)	Bandelette B (en cm)	Total obtenu (en cm)
18	25	43
10	17	27
28	35	63
15	22	37
13	20	33
+7 cm		35 cm

◆ L'analyse de ce tableau pourrait permettre de dépasser le simple tâtonnement : on s'approche de la solution lorsque l'écart entre le total qu'on obtient et celui qu'on doit obtenir diminue.
◆ De même, l'analyse des relations entre les colonnes pourrait déboucher sur la construction du schéma en bandelettes :
- L'inconnue est la valeur qu'il faut donner à la bandelette A pour que la somme des parties soit égale à 35 ;
- quelle est la relation entre les nombres de la première et de la deuxième colonne? (Pour trouver le nombre de la deuxième, il faut ajouter 7 au nombre figurant dans la première) ;
- quelle est la relation entre les nombres de la première et de la troisième colonnes ? Pour trouver le nombre de la troisième colonne, il faut multiplier celui de la première par 2 et ajouter 7.

Le schéma en bandelette peut alors découler assez logiquement de cette analyse : si A a une part, alors b a une part + 7 et le total est égal à 2 parts + 7. La part de A est l'inconnue (et est donc représentée par une bandelette d'une taille quelconque) puisqu'elle correspond au différents nombres sur lesquels on s'est basé pour tenter d'établir l'égalité A + B = total à obtenir).

Etape 4
Formulation d'énoncés au départ de solutions obtenues

La formulation d'énoncés variés permet de focaliser l'attention sur les contraintes du problème (ce qu'il faut donner comme information pour que le problème puisse être résolu). Par ailleurs, cela permet de disposer d'une variété d'énoncés que les élèves pourront ensuite résoudre. La confrontation des démarches permettra peut-être de voir émerger progressivement la démarche classique de résolution.

Etape 5
Résolution d'un problème où la démarche par essais-erreurs devient très complexe (problème faisant intervenir des décimaux)

Ce n'est qu'à cette étape de la séquence que la démarche classique de résolution devient clairement indispensable et se trouve pleinement justifiée. Une mise en commun permettra de pointer les limites de la démarche par essais-erreurs et de formaliser, plus explicitement encore que dans l'étape 3, la démarche classique de résolution.

Etape 6
Extension à d'autres types de problèmes et à d'autres contextes.

Une extension vers d'autres contextes et d'autres structures de problèmes permettra d'assurer un transfert et une maîtrise de plus en plus importante de cette classe de problèmes.

4. Les enjeux d'une telle méthodologie d'enseignement

L'analyse des démarches initiales des enfants montre que l'utilisation de la démarche classique de résolution des problèmes de partages inégaux implique l'intégration du concept d'inconnue, qui est loin d'être familier aux élèves de fin d'enseignement primaire. Par ailleurs, la créativité dont font preuve les élèves pour résoudre ces problèmes est assez interpellante : une large majorité ne suit en rien la démarche que l'on voudrait leur enseigner. Mentionnons également que cette classe de problèmes ne se rencontre que très peu dans la vie courante. Quel peut être dès lors l'intérêt d'enseigner de façon directe et massive la démarche classique de résolution de cette classe de problèmes ?

D'une part, bon nombre d'élèves risquent de passer à côté d'une compréhension approfondie du concept d'inconnue et, d'autre part, ils disposeront, dans le meilleur des cas, d'une technique qui ne sera applicable que dans un nombre très limité de situations peu utiles dans leur vie de citoyen.

En revanche, partir de la diversité des démarches pour introduire progressivement le concept d'inconnue permet de proposer un enseignement qui s'appuie explicitement sur les démarches initiales des élèves, tout en amenant ces derniers à développer des outils performants de vérification et de modélisation plus efficaces de cette classe de problèmes. Ils sont donc plongés dans des situations–problèmes leur permettant de construire progressivement de nouveaux concepts et outils mathématiques. Cela permet également de leur donner une autre vision de la résolution de problèmes et de casser progressivement une croyance largement ancrée selon laquelle il n'existe qu'une et une seule façon de résoudre un problème.

Rappelons que cette séquence fait partie d'un ensemble plus large d'activités visant à développer chez les élèves de 5e et 6e années primaires une démarche réflexive de résolution de problèmes. L'ensemble des situations doit encore faire l'objet de modifications et d'améliorations en vue de déboucher sur une brochure à destination des enseignants. Cette brochure sera terminée fin 2004 et pourra dès lors être diffusée plus largement.

◆ BEDNARZ, N. & JANVIER, B. T*he arithmetic-algebra transition in problem solving : Continuities and discontinuities. Proceedings of the 15th Annual Meeting of the international Group for the psychology of mathematics education* (North American chapter PME-NA), Vol. II, Asilomar, California, 1993. pp. 19-25

◆ CRAHAY, M. *Tête bien faite ou tête bien pleine. Recadrage constructiviste d'un vieux dilemme. Perspectives,* XXVI (1), 1996. pp. 59-89.

◆ FILLOY, ROJANO T. *From an arithmetical to an algebra thought (a clinical study with 12-13 year old, in Proceedings of the 6th annual meeting of psychology of mathematics education.* Madison,1984. pp. 51-56.

◆ JULO, J. *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques.* Presse Universitaire de Rennes. 1996.

◆ LINCHEVSKI, L., HERSCOVICS, N. *Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra : operation on the unknown in the context of equation.* Educational studies in mathematics, 1996. pp. 30, 39-65.

◆ RICHARD, J.F. *Les activités mentales. Comprendre, raisonner, trouver des solutions.* Paris : Armand Colin Editeur. 1990.

◆ SCHMIDT, S. *La résolution de problèmes, un lieu privilégié pour une articulation fructueuse entre arithmétique et algèbre.* Revue des sciences de l'éducation, XXVII(2), 1996. pp. 277-294.

◆ SCHOENFELD, A.H. *Learning to think mathematically: problem solving, metagognition and sense manking in mathematics.* In D.A. Grows (Ed.), Handbook of research on mathematics learning and teaching, New York, Macmillan.1992. pp. 334-370

◆ TARDIF, J. Pour un enseignement stratégique. Montréal, Québec, Ed. Logiques. 1992.

Notes

1 Nous n'avons pas tenu compte ici des erreurs relatives à la solution (c'est-à-dire la somme attribuée à chaque enfant)

2 Il faut noter qu'un nombre important de démarches n'ont pu être catégorisées parce qu'il était impossible d'identifier avec une certitude suffisante leur point de départ.lorsque celle-ci est présentée dans la représentation du problème.

Références