

**Université de Liège**

**Faculté des Sciences Appliquées.**

**DETERMINATION AUTOMATIQUE DE  
LA TAILLE DU PAS DE TEMPS POUR  
LES SCHEMAS IMPLICITES EN  
DYNAMIQUE NON-LINEAIRE.**

Travail de fin d'études présenté par

Ludovic NOELS

pour l'obtention du grade légal  
d'Ingénieur Civil Electro-Mécanicien  
(Aérospatiale)

Année académique 1999-2000

## **Préface.**

*Je voudrais avant toute chose, remercier les personnes sans qui le présent travail n'aurait jamais vu le jour.*

*Mes premiers sentiments iront à Messieurs les Professeurs I. Klapka et J.C. Golinval pour avoir accepté de faire partie du Jury de ce travail de fin d'étude.*

*Je voudrais aussi remercier les personnes de la SNECMA qui ont eu l'amabilité de m'accueillir et de me permettre d'avancer dans la tâche qui m'était assignée. S'ils m'ont tous été d'une grande aide je voudrais principalement exprimer ma reconnaissance aux personnes du service qui « m'hébergeait » à savoir Monsieur O. Balmat et Monsieur O. Roussel. Je tiens aussi à profiter de l'occasion qui m'est faite pour ne pas oublier les personnes du « Bois du Lys » qui ont accepté de me loger et ont rendu mon séjour agréable et enrichissant, grâce à leur sympathie et leurs conseils d'excursions.*

*Les personnes du service du LTAS m'ont aussi été d'une aide précieuse. Il va de soi que sans eux je serais toujours assis devant l'écran à affronter « Chinook ».*

*Une des tâches les plus arides a dû être la lecture et la correction des versions successives de ma prose. Je tiens à remercier le Docteur L. Stainier de s'en être acquitté tout en me prodiguant de précieux conseils concernant l'évolution de mes recherches.*

*Pour réaliser ce travail de fin d'étude, j'avais émis le souhait de pouvoir partir à l'étranger et de travailler en collaboration avec une entreprise aéronautique. Ce projet n'aurait jamais pu aboutir sans la compréhension et l'enthousiasme du Docteur J.P. Ponthot et du Docteur J. Bonini. Ils m'ont également consacré un temps important, malgré un horaire souvent surchargé, à initier et superviser mon travail.*

*Enfin, que Monsieur le Professeur M. Hogge accepte l'expression de mes sentiments les plus reconnaissants pour la confiance qu'il a bien voulu m'accorder.*

*Je terminerais par remercier ma famille qui m'a patiemment soutenu tout au long de mes études.*



# Table des matières.

<b>TABLE DES NOTATIONS.....</b>	<b>5</b>
<b>INTRODUCTION.....</b>	<b>7</b>
<b>2. RAPPEL DES PRINCIPAUX SCHEMAS IMPLICITES D'INTEGRATION.....</b>	<b>10</b>
2.1. PREDICTION.....	12
2.2. CORRECTIONS. ....	12
<b>3. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE DE LA GESTION AUTOMATIQUE DU PAS DE TEMPS. ....</b>	<b>16</b>
3.1. CALCUL DE L'ERREUR D'INTEGRATION. ....	16
3.2. COMPARAISON DES DIFFERENTS ESTIMATEURS D'ERREURS. ....	19
3.3. GESTION DE LA DUREE DU PAS DE TEMPS. ....	19
<b>4. CALCUL DE L'ERREUR D'INTEGRATION.....</b>	<b>25</b>
4.1. CALCUL D'ERREURS D'INTEGRATION INDEPENDANTES DU SCHEMA. ....	25
4.2. EXPRESSIONS UTILISEES DE L'ERREUR D'INTEGRATION. ....	29
4.3. COMPARAISON DES QUATRE EXPRESSIONS DE L'ERREUR D'INTEGRATION.....	30
4.3.1. Barre élastique percutant un mur. ....	30
4.3.2. La barre de Taylor.....	33
4.3.3. Cas de l'amortisseur de choc. ....	34
4.3.4. Comparaison des erreurs. ....	36
<b>5. GESTION DE LA DUREE DU PAS DE TEMPS. ....</b>	<b>37</b>
5.1. LES ITERATIONS N'ONT PAS CONVERGE (BOITE 1). ....	37
5.2. LES ITERATIONS ONT CONVERGE (BOITE 2). ....	38
5.2.1. L'erreur est trop grande (boîte 3).....	39
5.2.2. L'erreur est dans le bon intervalle (boîte 4).....	40
5.2.3. L'erreur est trop petite (boîte 5).....	41
5.3. COMPLEMENTS DES BOITES 1 A 5. ....	41
<b>6. APPLICATIONS POUR DES PROBLEMES DE GRANDES TRANSFORMATIONS. ....</b>	<b>43</b>
6.1. LA BARRE ELASTIQUE.....	43
6.2. LA BARRE DE TAYLOR.....	45
6.3. L'AMORTISSEUR.....	47
6.4. LE CYLINDRE EN FLAMBEMENT. ....	49
6.5. COMPARAISONS DES METHODES.....	52
<b>7. APPLICATIONS A DES CAS INDUSTRIELS « QUASI-LINEAIRES ».....</b>	<b>53</b>
7.1. DESCRIPTION DES SCHEMAS EXISTANTS. ....	54
7.1.1. Schéma de gestion de la durée du pas de temps. ....	54
7.1.2. Schéma de la remise à jour de la matrice d'itération.....	55
7.2. PROPOSITION D'UN SCHEMA DE CHOIX DE REMISE A JOUR DE LA MATRICE D'ITERATION. ....	55
7.2.1. Recherche d'un critère de réactualisation.....	56
7.2.2. Algorithme développé.....	56
7.3. CALCULS DE CAS INDUSTRIELS.....	58
7.3.1. Cas 1.....	58
7.3.2. Cas 2.....	60
<b>CONCLUSIONS.....</b>	<b>64</b>
<b>PERSPECTIVES.....</b>	<b>65</b>
<b>ANNEXE 1 : ERREURS AUX ORDRES SUPERIEURS.....</b>	<b>66</b>
<b>ANNEXE 2 : EXPRESSION DE L'ERREUR POUR UN SYSTEME MULTI DEGRES DE LIBERTE. .</b>	<b>71</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE. ....</b>	<b>74</b>

## **Table des notations.**

Afin de faciliter la lecture du présent travail, une table des notations utilisées est présentée. Les variables des équations utilisées ainsi que les paramètres des programmes utilisés sont repris.

$\mathbf{a}_F$	Paramètre de pondération des forces de l'algorithme HHT.
$\mathbf{a}_M$	Paramètre de pondération des forces d'inertie de l'algorithme CH.
$\mathbf{b}$	Paramètre de l'algorithme de Newmark.
$\mathbf{g}$	Paramètre de l'algorithme de Newmark.
$\mathbf{e}$	Erreur d'intégration d'un système linéaire à un degré de liberté.
$\mathbf{q}$	Paramètre de l'algorithme SMG.
$\mathbf{w}$	Pulsation d'un système à un degré de liberté.
$\Omega$	Pulsation d'un système à un degré de liberté multipliée par le pas de temps.
$h_n$	Durée du pas de temps numéro n. Si aucune confusion n'est possible, l'indice est omis.
$ITER$	Numéro de l'itération.
$t_n$	Temps au début du pas de temps numéro n ou à la fin du pas numéro n-1.
$\cdot$	Dérivée temporelle.
$\mathbf{C}^t$	Matrice d'amortissement.
$e$	Erreur d'intégration.
$E_{cin}$	Energie cinétique.
$E_{pot}$	Energie potentielle.
$\mathbf{F}_{int}$	Vecteur des forces internes.
$\mathbf{F}_{iner}$	Vecteur des forces d'inertie.
$\mathbf{F}_{ext}$	Vecteur des forces extérieures.
$\mathbf{K}^t$	Matrice de raideur.
$\mathbf{M}$	Matrice des masses.
$\mathbf{q}_n$	Vecteur des positions au temps $t_n$ après convergences des itérations.
$\mathbf{q}_n^i$	Vecteur des positions au temps $t_n$ après l'itération numéro i.

$q_n^0$	Vecteur des positions au temps $t_n$ avant la première itération.
$q_{n,i}$	Position au temps $t_n$ pour le degré de liberté $i$ .
$q_{0,i}$	Position initiale du degré de liberté $i$ .
$nddl$	Nombre de degré de liberté.
$R$	Résidu de l'équation d'équilibre.
$S^t$	Matrice d'itération.
$TESF$	Résidu adimensionnalisé de l'équation d'équilibre.
$W_{ext}$	Travail des forces extérieures.
IT1K	Paramètre MECANO désignant le numéro de la première itération pour laquelle il y a remise à jour de la matrice d'itération (1 par défaut).
IT2K	Paramètre MECANO désignant le numéro de la deuxième itération pour laquelle il y a remise à jour (IT1K+1 par défaut).
IT3K	Paramètre MECANO désignant la fréquence (en itérations) de remise à jour de la matrice d'itération après l'itération IT2K (1 par défaut).
ITMA	Nombre maximum d'itérations pour un pas de temps (par défaut 10 pour MECANO et 7 pour METAFOR).
PRCR	Paramètre désignant la précision requise pour le résidu adimensionnel (TESF) (par défaut 1E-5 pour MECANO et 1E-4 pour METAFOR).
PRCK	Paramètre MECANO désignant le seuil du résidu adimensionnel sous lequel la matrice d'itération n'est plus remise à jour (10*PRCR par défaut).
PRCU	Seuil de tolérance de l'erreur d'intégration (1E-3 par défaut)
RDOWN	Facteur de division du pas de temps (par défaut 2 pour MECANO et 3 pour METAFOR)
RUP	Facteur de multiplication du pas de temps de MECANO (2 par défaut).

## **Introduction.**

La nécessité de pouvoir modéliser des impacts devient de plus en plus grande. En effet de nombreuses industries s'intéressent à des problèmes de sécurité (constructeurs automobiles, industries aéronautiques...). Afin d'améliorer la résistance aux chocs des structures, il devient nécessaire de modéliser des phénomènes d'impacts (perte d'aubes d'un moteur d'avion, collision frontale d'une voiture ...) lors de la conception des pièces mécaniques. Dès lors un code d'éléments finis doit permettre de simuler ces phénomènes.

Lors d'un impact, les déplacements et les déformations de la pièce étudiée sont conséquents. En effet, les pièces se déplacent en translation et en rotation. Suite à ces déplacements, elles rentrent en contact avec des matrices, d'autres pièces ou se replient sur elles mêmes (auto-contact). Sous l'effet de ces contacts et des forces extérieures, des phénomènes de plasticité apparaissent. Les déformations ne sont pas linéaires et l'équilibre ne peut pas se calculer sur la configuration initiale. Il faut donc avoir recours à une théorie incrémentielle et nous nous plaçons dans le cadre non linéaire des grands déplacements et des grandes déformations.

De plus ces phénomènes sont dynamiques. En effet étant données les vitesses des pièces lorsqu'elles entrent en contact, les forces d'inerties sont non négligeables et doivent être prises en compte. Les équations d'équilibre doivent donc être intégrées afin d'obtenir les réponses temporelles. Cette intégration se fait à l'aide d'un schéma explicite ou implicite. Un tel schéma résout les équations d'équilibre pour des temps choisis. Ces temps choisis ( $t_0, t_1, \dots$ ) sont séparés par une durée ( $h$ ) appelée « pas de temps ». Un schéma implicite calcule des positions en un temps  $t_n$  en fonction des valeurs des vitesses et des accélérations des temps  $t_n$  et  $t_{n-1}$ . Il est donc itératif contrairement au schéma explicite pour lequel les positions du temps  $t_n$  ne dépendent que des vitesses et des accélérations au temps  $t_{n-1}$ . Signalons l'existence de schémas d'intégration qui utilisent, outre les valeurs des inconnues en  $t_n$  et  $t_{n-1}$ , les valeurs des inconnues en des pas antérieures à  $t_{n-1}$ . Ce sont des schémas à plusieurs pas.

Un schéma d'intégration a la particularité d'introduire de l'amortissement numérique dans le système. Si cet amortissement est positif, de l'énergie est créée et la solution calculée tend, après quelques pas de temps, vers des valeurs très élevées. Le système est alors instable. Si l'amortissement est négatif, le système est stable mais la perte d'énergie s'accompagne d'une perte de précision. Les schémas explicites ne sont stables que pour de petites valeurs du pas de temps. Par contre, pour un choix judicieux des paramètres d'intégration, les schémas implicites sont stables quelle que soit la durée du pas de temps. Ils sont alors dits inconditionnellement stables et présentent l'avantage de permettre l'utilisation de pas de temps de durée plus importante. La précision d'intégration des schémas implicites est fonction de la dissipation numérique d'énergie. Le calcul est itératif, la précision dépend donc aussi de l'erreur tolérée pour ces itérations. Les équations sont résolues pour certains pas de temps. Une erreur de discrétisation est alors introduite et cette erreur est d'autant plus faible que la durée du pas de temps est petite. Bien que les opérations d'un schéma implicite soient plus coûteuses (inversion de la matrice d'itération), le temps de calcul reste souvent inférieur à celui d'un schéma explicite. En effet il nécessite moins de pas de temps. Il est dès lors souvent avantageux d'utiliser ce schéma pour des raisons de coût de calcul. Ce travail s'intéresse

uniquement à ces derniers schémas. Le code METAFOR que nous utilisons permet la résolution de problèmes dynamiques implicites en grands déplacements et grandes déformations.

Un des problèmes de l'implicite, lié à la non-linéarité des modèles, est la convergence des schémas d'intégration. En effet la résolution des équations d'équilibre se fait par un schéma de Newton-Raphson dont la convergence n'est pas toujours assurée. Un des paramètres influençant la convergence est la durée du pas de temps utilisé lors de l'intégration. Si ce pas de temps est trop grand, le système ne converge plus. Mais un pas de temps trop petit demande un temps de calcul prohibitif qui rend toute utilisation industrielle onéreuse voire impossible. Insistons sur le fait qu'il ne s'agit pas de réduire le temps de calcul de quelques pourcents mais de permettre la résolution de problèmes industriels en quelques dizaines d'heures plutôt qu'en plusieurs semaines. Considérons un problème non linéaire intégré avec un pas de temps constant. La durée du pas de temps doit alors être choisie de manière à permettre la convergence des itérations aux moments les plus délicats (prises de contact ...). Prenons l'exemple d'un calcul de perte d'aube. Avant la perte, le problème converge très bien avec des durées importantes du pas de temps. Lorsque la perte survient, il y a création d'un balourd et les forces aux paliers augmentent. De plus des sous l'effet de ce balourd, des prises de contact apparaissent. La durée du pas de temps doit alors être réduite d'un facteur important. Suite à la rupture d'aube, la vitesse de rotation de l'arbre du moteur diminue pour s'annuler. Dans ce cas les forces en jeu diminuent et le problème redevient linéaire. La durée du pas de temps peut donc être augmentée. Pour une stratégie de pas de temps fixe, l'utilisateur choisit un pas de temps et se rend compte après plusieurs heures de calcul que ce pas de temps ne permet pas la convergence, il doit donc recommencer avec une durée de pas de temps inférieur. Cette durée est alors souvent très petite ce qui correspond à une perte de temps CPU pour la plupart des périodes de calculs du problème (dans notre exemple, avant la perte d'aube et quand la vitesse de rotation du moteur décroît). De plus aucune garantie de précision n'est donnée à l'utilisateur. En non linéaire, une stratégie automatique de la durée du pas de temps s'avère donc indispensable dans l'industrie. De plus la durée du pas de temps doit pouvoir garantir la précision des résultats.

Ce travail propose une gestion du choix de la durée du pas de temps. Pour ce faire nous choisissons d'utiliser un indicateur de l'erreur d'intégration numérique. La gestion développée s'adapte aux différents schémas d'intégration implicites étudiés. Elle garantit une précision sur les résultats obtenus tout en assurant un coût de calcul réduit. Cette stratégie est d'abord validée sur des cas généraux de grandes déformations afin de mettre en évidence son large domaine d'application. Ensuite, elle est validée sur des cas industriels. Pour l'étude de ces cas industriels, la nouvelle gestion du pas de temps est associée à un nouveau critère de convergence ainsi qu'à un nouveau schéma de décision de remise à jour de la matrice d'itération. L'intérêt principal de l'étude de cas industriels est leur nombre important de degrés de liberté ainsi que la variation des phénomènes physiques qui apparaissent au cours du temps. Les intérêts pratiques (gain de temps de calcul, garantie de précision et diminution du nombre de paramètres utilisateur) des nouveaux schémas sont alors clairement mis en évidence. Nous sommes ainsi parvenus à réduire fortement les temps de calcul de ces cas.

Le présent document est divisé en 6 chapitres :

- Dans un premier temps, les différents schémas d'intégration implicites (Newmark, Hilber-Hugues-Taylor, Chung-Hulbert (PONTHOT [XI]) et le schéma du point milieu généralisé (PONTHOT [XI]) qui existent sont rappelés.



- Ensuite une étude bibliographique est présentée. Nous y résumons les différentes méthodes du calcul de l'erreur d'intégration numérique et du choix du pas de temps qui y correspond. Signalons dès à présent que seul quelques articles se penchent sur le choix de la durée du pas de temps. Nous avons dénombré seulement cinq articles (GERADIN [II], NEUMANN et SCWEIZERHOF [IV], HULBERT et JANG [V], CASSANO et CARDONA [X] et PONTHOT [XI]) qui se sont intéressés à une stratégie automatique de pas de temps des schémas implicites. Les quatre premiers articles développent une théorie sur le calcul de l'erreur d'intégration mais seuls GERADIN, CASSANO et CARDONA développent une théorie sur le choix de la durée du pas de temps. Cette théorie est cependant basée sur l'hypothèse de linéarité et le même schéma est appliqué en non linéaire. Le seul article qui adapte un schéma aux non-linéarités est celui de HULBERT et JANG. Il n'est donc pas exagéré d'affirmer que le « time-stepping » des schémas implicites n'est que peu étudié malgré son importance.
- Dans la troisième partie nous montrons comment adapter ces différentes erreurs pour les différents schémas d'intégration implicites (Newmark (N), Hilber-Hugues-Taylor (HHT), Chung-Hulbert (CH) et le schéma du point milieu généralisé (SMG) ).
- Une proposition de la gestion du pas de temps est alors proposée. Cette gestion se base sur le calcul de l'erreur d'intégration et tient compte des non-linéarités.
- Afin de valider la gestion proposée, des cas tests de grandes déformations sont calculés dans la cinquième partie du travail. Ces cas tests sont résolus grâce à la nouvelle gestion du pas de temps et nous mettons en évidence ses avantages. Ces avantages sont l'assurance d'avoir une convergence des itérations ainsi qu'une bonne précision de l'intégration pour un temps de calcul acceptable.
- Par soucis de généralité des cas fortement non linéaires de grandes déformations ont d'abord été testés. Afin de montrer que la méthode reste pertinente dans des cas industriels quasi linéaires, des cas tests d'entreprises (\*) sont calculés grâce à la proposition de gestion du pas de temps implémentée dans le module MECANO de SAMCEF. Il s'agit de problèmes à trois dimensions modélisés par des super-éléments. Ces super-éléments sont reliés entre eux par des éléments non linéaires qui permettent de simuler le contact aubes-carter ou les jeux des paliers. Dans ce genre de problèmes où le nombre de degrés de liberté est important, l'opération la plus coûteuse est l'inversion de la matrice d'itération. Cette opération doit donc être évitée autant que possible. Nous proposons un critère de remise à jour de cette matrice qui, associé à la nouvelle gestion du pas de temps ainsi qu'à un nouveau critère de divergence des itérations, permet de réduire fortement le temps de calcul.

(\*) Obtenus dans le cadre d'un stage au sein de l'entreprise SNECMA (août-décembre 1999)

## **2. Rappel des principaux schémas implicites d'intégration.**

Le système continu étudié est discrétisé en éléments finis. Le système discrétisé obtenu est caractérisé par un certain nombre de degré de liberté. Les inconnues relatives à ces degrés de liberté, sont regroupées dans un vecteur des positions ( $q$ ), un vecteur des vitesses ( $\dot{q}$ ) et dans un vecteur des accélérations ( $\ddot{q}$ ). Le système est soumis à un ensemble de forces extérieures (vecteur  $F_{ext}$ ). Ces forces peuvent être directement appliquées sur la structure où provenir de phénomènes de contacts, de frottements ... Ces forces dépendent donc de la position et de la vitesse de la structure. Elles sont alors non linéaires. Sous l'effet de ces forces, la structure se déforme. Ces déformations entraîne la création de forces internes (vecteur  $F_{int}$ ). Ces forces internes sont non linéaires. Les principales causes de non-linéarité proviennent des déformations plastiques et des non-linéarités géométriques. Les dernières forces sont les forces d'inerties. Elles peuvent s'exprimer par le produit de la matrice constante des masses ( $M$ ) par le vecteur des accélérations. L'équation d'équilibre à résoudre s'écrit alors au temps  $t_{n+1}$ :

$$M \ddot{q}_{n+1} + F_{int}(q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}) = F_{ext}(q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}) \quad (2.1)$$

avec  $q_n, \dot{q}_n$  connus.

Afin de résoudre l'équation (2.1), nous devons lier les vitesses et les accélérations aux positions afin d'avoir le même nombre d'équations que d'inconnues. Un développement en série de Taylor donne en considérant  $h$  le pas de temps égal à  $t_{n+1} - t_n$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \mathbf{x}, \mathbf{V} \in ]0, 1[ : \\ q_{n+1} = q_n + h \dot{q}_n + \frac{h^2}{2} \ddot{q}_{n+\mathbf{x}} \\ \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + h \ddot{q}_{n+\mathbf{V}} \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Pour des raisons pratiques, les accélérations de la relation (2.2) ne peuvent être calculées. Elles doivent donc être approximées.

Un choix consiste à prendre les accélérations au temps  $t_n$ . Les positions et les vitesses sont alors connus ainsi que les forces internes et extérieures. La relation (2.1) donne alors directement les accélérations. Ce schéma est dit explicite car aucune itération n'est nécessaire.

Détermination automatique de la taille du pas de temps pour les schémas implicites en dynamique non-linéaire.

Chapitre 2 : Rappel des principaux schémas implicites d'intégration.

---

Il a l'inconvénient d'être numériquement instable car l'amortissement numérique est négatif sauf dans certains cas pour de très petites valeurs du pas de temps.

Dans le but de pouvoir travailler avec des pas de temps plus importants, les accélérations de la relation (2.2) sont calculées à partir des accélérations du temps  $t_{n+1}$ . Dès lors, les vitesses et les positions du temps  $t_{n+1}$  dépendent de la solution (accélérations) du temps  $t_{n+1}$ . Il en va donc de même pour les forces internes et externes. La relation (2.1) ne peut donc être résolue qu'itérativement. Le schéma est alors dit implicite. Il vient pour les schémas (N), (CH) et (HHT) :

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + h \dot{q}_n + h^2 \left( \frac{1}{2} - \mathbf{b} \right) \ddot{q}_n + h^2 \mathbf{b} \ddot{q}_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + h(1 - \mathbf{g}) \ddot{q}_n + h\mathbf{g} \ddot{q}_{n+1} \end{cases} \quad (2.3)$$

Les paramètres  $\exists$  et  $\epsilon$  conditionnent la précision et la stabilité de l'intégration. En fonction des paramètres  $\forall_M$  et  $\forall_F$  du schéma (§2.2), des valeurs optimales de précision et de stabilité inconditionnelle (ne dépendant pas de la taille du pas de temps) peuvent être déduites de l'étude d'un système linéaire à un degré de liberté.

Le schéma SMG propose d'utiliser une accélération constante dans l'intervalle de temps  $t_n$ ,  $t_{n+1}$ . Cette accélération est prise en  $t_{n+2}$ . Le système (2.1) est alors résolu en  $t_{n+2}$  et les inconnues sont les positions, les vitesses et les accélérations en ce point. Si  $h$  désigne la durée du pas de temps entre les temps  $t_n$  et  $t_{n+1}$ , alors  $2h$  est le pas de temps entre les temps  $t_n$  et  $t_{n+2}$ . Il vient alors :

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + h \dot{q}_n + \frac{h^2}{2} \ddot{q}_{n+2} \\ \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + h \ddot{q}_{n+2} \\ \ddot{q}_{n+1} = \ddot{q}_{n+2} \\ q_{n+2} = q_n + h\mathbf{q} \dot{q}_n + \frac{\mathbf{q}^2 h^2}{2} \ddot{q}_{n+2} \\ \dot{q}_{n+2} = \dot{q}_n + h\mathbf{q} \ddot{q}_{n+2} \end{cases} \quad (2.4)$$

Etant donné leur caractère itératif, les schémas implicites se décomposent en deux parties : la prédiction et la correction.

## 2.1. Prédiction.

Une première valeur des inconnues est prédite à partir des valeurs en  $t_n$ . Pour les schémas N, CH, HHT il vient :

$$\begin{cases} q_{n+1}^0 = q_n + h \dot{q}_n + h^2 \left(\frac{1}{2} - \mathbf{b}\right) \ddot{q}_n \\ \dot{q}_{n+1}^0 = \dot{q}_n + h(1 - \mathbf{g}) \ddot{q}_n \\ \ddot{q}_{n+1}^0 = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Et pour le schéma SMG, il vient :

$$\begin{cases} q_{n+\mathbf{q}}^0 = q_{n+\mathbf{q}}^0 + h\mathbf{q} \dot{q}_n \\ \dot{q}_{n+\mathbf{q}}^0 = \dot{q}_n \\ \ddot{q}_{n+\mathbf{q}}^0 = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Ces valeurs sont alors corrigées de manière à satisfaire les équations d'équilibres.

## 2.2. Corrections.

Pour le schéma de Newmark, les positions, vitesses et accélérations du temps  $t_{n+1}$  doivent satisfaire l'équation d'équilibre (2.1) en utilisant les relations (2.3). Les valeurs optimales de  $\beta$  et  $\gamma$  sont alors respectivement [XI] 0.25 et 0.5. La précision maximale sur les amplitudes et les fréquences d'un système linéaire à un degré de liberté est alors garantie tout en gardant une stabilité numérique pour toutes valeurs du pas de temps. Dans ces conditions aucun amortissement numérique est introduit. Pour un système sous contraintes cinématiques, des modes numériques de fréquences tendant vers l'infini apparaissent [II]. Ces modes génèrent de l'instabilité numérique s'ils ne sont pas amortis [II]. Un amortissement numérique doit donc être introduit. Une solution consiste à utiliser un schéma de Newmark amorti. Les paramètres d'intégration sont alors  $\mathbf{g} = 0.5 + \mathbf{a}$  et  $\mathbf{b} = 0.25(\mathbf{g} + 0.5)^2$  avec  $\forall \mathbf{a} > 0$ . La précision d'intégration est alors affectée car si les modes numériques sont amortis, les modes physiques aussi. Toutefois dans des cas où les déformations plastiques sont importantes, l'amortissement numérique est négligeable par rapport à l'amortissement physique et la précision redevient acceptable.

Détermination automatique de la taille du pas de temps pour les schémas implicites en dynamique non-linéaire.

Chapitre 2 : Rappel des principaux schémas implicites d'intégration.

---

Une solution élégante consiste à introduire de l'amortissement numérique qui affecte principalement les modes de hautes fréquences. Ce sont les modes numériques créateurs d'instabilités. Le schéma consiste alors à pondérer l'équation d'équilibre (2.1) entre les pas  $n$  et  $n+1$  afin de diminuer les instabilités numériques. Hilbert, Hughes et Taylor ont proposé de pondérer les forces internes et extérieures grâce au paramètre  $\forall_F$  alors que Wood, Bossak et Zienkiewicz pondèrent les forces d'inerties grâce au paramètre  $\forall_M$ . Chung et Hulbert ont obtenu la forme générale (CH) suivante :

$$\left\{ \begin{aligned} & (1 - \mathbf{a}_M)M \ddot{q}_{n+1} + \mathbf{a}_M M \ddot{q}_n + (1 - \mathbf{a}_F)[F_{int}(q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}) - F_{ext}(q_{n+1}, \dot{q}_{n+1})] \\ & + \mathbf{a}_F [F_{int}(q_n, \dot{q}_n) - F_{ext}(q_n, \dot{q}_n)] = 0 \end{aligned} \right. \quad (2.7)$$

Une étude d'un système linéaire permet de garantir une précision du deuxième ordre avec une dissipation maximale des hautes fréquences pour un choix des paramètres  $\forall_F = (\forall_M + 1)/3$ ,  $(= 0.5 - \forall_M - \forall_F \text{ et } \exists = 0.25(1 - \forall_M - \forall_F)^2)$ . Remarquons que comme il a été dit pour Newmark, un choix différent des paramètres ( et  $\exists$  peut être bénéfique en non-linéaire [XI]. Si  $\forall_M$  est choisi négatif, les forces d'inerties d'un système linéaire sont alors évaluées en un temps supérieur à  $t_{n+1}$ . Si  $\forall_M = 0$  alors le schéma est le schéma HHT et  $\forall_F$  doit alors être choisit entre 0 et 1/3. Si en plus  $\forall_F = 0$  le schéma devient celui de N.

Les équations (2.7) et (2.3) sont résolues par itérations. Définissons les valeurs (l'indice supérieur se rapportant au numéro de l'itération et l'indice inférieur au numéro du pas de temps) :

$$\left\{ \begin{aligned} & q_{n+1}^{i+1} = q_{n+1}^i + \Delta q \\ & \dot{q}_{n+1}^{i+1} = \dot{q}_{n+1}^i + \Delta \dot{q} \\ & \ddot{q}_{n+1}^{i+1} = \ddot{q}_{n+1}^i + \Delta \ddot{q} \\ & C^t = \left. \frac{\partial (F_{int} - F_{ext})}{\partial \dot{q}} \right|_{q_{n+1}^i, \dot{q}_{n+1}^i} \\ & K^t = \left. \frac{\partial (F_{int} - F_{ext})}{\partial q} \right|_{q_{n+1}^i, \dot{q}_{n+1}^i} \\ & R = \left\langle (1 - \mathbf{a}_M)M \ddot{q}_{n+1}^i + \mathbf{a}_M M \ddot{q}_n^i + (1 - \mathbf{a}_F)[F_{int}(q_{n+1}^i, \dot{q}_{n+1}^i) - F_{ext}(q_{n+1}^i, \dot{q}_{n+1}^i)] \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{a}_F [F_{int}(q_n, \dot{q}_n) - F_{ext}(q_n, \dot{q}_n)] \right\rangle \end{aligned} \right.$$

alors (2.7) se linéarise en :

$$(1 - \mathbf{a}_M) M \Delta \ddot{q} + (1 - \mathbf{a}_F)(C^t \Delta \dot{q} + K^t \Delta q) = -R \quad (2.8)$$

Etant donné (2.3), il vient :

$$\begin{cases} \Delta \dot{q} = \frac{\mathbf{g}}{bh} \Delta q \\ \Delta \ddot{q} = \frac{1}{bh^2} \Delta q \end{cases} \quad (2.9)$$

Et en définissant  $S_t$  la matrice d'itération :

$$S^t = (1 - \mathbf{a}_F)(K^t + \frac{\mathbf{g}}{bh} C^t) + \frac{(1 - \mathbf{a}_M)}{bh^2} M \quad (2.10)$$

(2.8) devient finalement:

$$S^t \Delta q = -R \quad (2.11)$$

La relation (2.11) fournit  $\Delta q$  ce qui donne grâce à (2.9)  $\Delta \dot{q}$ ,  $\Delta \ddot{q}$ . Les itérations continuent jusqu'à satisfaire le critère de convergence (PRCR est la précision requise):

$$\frac{|R|}{|F_{int}| + |F_{ext}|} < PRCR \quad (2.12)$$

Lors de l'établissement de la relation (2.7), les forces sont pondérées entre deux pas de temps. Pour un système linéaire, la pondération reviendrait à évaluer les forces au temps  $t_{n+1-\forall}$ . Pour un système non linéaire ce n'est plus vrai. Le schéma proposé par PONTHOT [XI] propose d'évaluer toutes les forces de manière rigoureuse au même temps  $t_{n+2}$ . Dans ce cas (SMG), l'équation d'équilibre devient:

$$M \ddot{q}_{n+q} + [F_{int}(q_{n+q}, \dot{q}_{n+q}) - F_{ext}(q_{n+q}, \dot{q}_{n+q})] = 0 \quad (2.13)$$

2 doit être pris légèrement supérieur à l'unité pour avoir un algorithme stable. Les équations (2.13) et (2.4) sont résolues par itérations. Définissons les valeurs (l'indice supérieur se rapportant au numéro de l'itération et l'indice inférieur au numéro du pas de temps) :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{n+q}^{i+1} = q_{n+q}^i + \Delta q \\ \dot{q}_{n+q}^{i+1} = \dot{q}_{n+q}^i + \Delta \dot{q} \\ \ddot{q}_{n+q}^{i+1} = \ddot{q}_{n+q}^i + \Delta \ddot{q} \\ C^t = \frac{\partial (F_{int} - F_{ext})}{\partial \dot{q}} \bigg|_{q_{n+q}^i, \dot{q}_{n+q}^i} \\ K^t = \frac{\partial (F_{int} - F_{ext})}{\partial q} \bigg|_{q_{n+q}^i, \dot{q}_{n+q}^i} \\ R = M \ddot{q}_{n+q}^i + [F_{int}(q_{n+q}^i, \dot{q}_{n+q}^i) - F_{ext}(q_{n+q}^i, \dot{q}_{n+q}^i)] \end{array} \right.$$

Etant donné (2.4) nous déduisons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \dot{q} = \frac{2}{h q} \Delta q \\ \Delta \ddot{q} = \frac{2}{h^2 q^2} \Delta q \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Et en définissant  $S_t$  la matrice d'itération :

$$\boxed{S^t = K^t + \frac{2}{h q} C^t + \frac{2}{h^2 q^2} M} \quad (2.15)$$

(2.13) devient:

$$\boxed{S^t \Delta q = -R} \quad (2.16)$$

(2.16) fournit  $q$  ce qui donne grâce à (2.14)  $\Delta \dot{q}, \Delta \ddot{q}$ . Les itérations continuent jusqu'à satisfaire (2.12). Il reste alors à calculer les valeurs au pas de temps  $n+1$  par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_{n+1} = \ddot{q}_{n+q} \\ \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + h \ddot{q}_{n+1} \\ q_{n+1} = q_n + h \dot{q}_n + \frac{h^2}{2} \ddot{q}_{n+1} \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Dans le cas  $2=1$ , nous retrouvons (N) avec  $\Xi=0.5$  et  $\Theta=1$ .

### **3. Etude bibliographique de la gestion automatique du pas de temps.**

L'étude bibliographique se penche sur deux aspects. Le premier se consacre au calcul de l'erreur d'intégration et le second au choix de la durée du pas de temps qui en découle. Comme il est signalé dans l'introduction, peu d'auteurs se sont intéressés au sujet. La raison de la brièveté des théories exposées dans ce paragraphe ne provient donc pas d'un manque de recherche.

#### **3.1. Calcul de l'erreur d'intégration.**

Les auteurs se basent tous sur l'erreur de troncature du développement des positions du schéma implicite (relations (2.3) et (2.4)). Ce raisonnement n'implique aucune hypothèse quant aux non-linéarités du problème.

Pour GERADIN [II], l'erreur est basée sur l'erreur de troncature effectuée sur les positions. Les algorithmes implicites utilisent (relation (2.2)) un développement en série de Taylor de la position :

$$q(t + h) = q(t) + h \dot{q}(t) + \frac{h^2}{2} \ddot{q}(t) + \frac{h^3}{6} \dddot{q}(t) + O(h^4).$$

Cependant le développement utilisé ne prend pas en compte le troisième ordre. L'erreur est

donc de l'ordre :  $\frac{h^3}{6} \dddot{q}(t)$ . Nous pouvons encore développer  $\dddot{q}(t)$ . En effet :

$$\ddot{q}(t + h) \approx \ddot{q}(t) + h \dddot{q}(t).$$

L'erreur peut donc se mettre sous la forme

$$e = \frac{h^2}{6} \left| \ddot{q}(t + h) - \ddot{q}(t) \right| = \frac{h^2}{6} \left| \Delta \ddot{q} \right| \quad (3.1)$$

Afin de pouvoir comparer cette erreur à celle d'un système linéaire de pulsation  $T$  à un degré de liberté, les auteurs passent aux coordonnées modales et il vient, en nommant le vecteur des positions initiales  $q_0$ , pour le schéma HHT (Annexe 2) :



$$e = \frac{h^2}{6 \mathbf{e}(\Omega_k) \left[ q_0^T M q_0 \right]^{1/2}} \left[ \Delta \ddot{q}^T \Delta (M \ddot{q}) \right]^{1/2} \quad (3.2)$$

avec l'erreur du système linéaire à un degré de liberté  $\mathbf{e}(\Sigma=\text{Th})$  évalué en  $\Sigma_k=0.6$  (Annexe 2):

$$\mathbf{e}(\Omega) = \frac{(1 - \mathbf{a}_F) \Omega^3 \sqrt{1 + \frac{1}{4} \Omega^2}}{3 \mathbf{p} \left[ 1 + (1 - \mathbf{a}_F) \mathbf{b} \Omega^2 \right]} \quad (3.3)$$

Une autre manière d'exprimer l'erreur est de calculer la différence entre la valeur d'un développement de Taylor d'un ordre supérieur et la valeur calculée comme cela est proposé par JEUMAN et SCHWEIZERHOF [IV]. Les erreurs calculées sont la différence entre la position calculée par ce développement et celle calculée par le schéma. Le même calcul peut se faire à partir des vitesses. Il vient dès lors (Annexe 1) pour un schéma autre que SMG:

$$\begin{cases} e_{dep,n+1} = \frac{h^2}{24} \left[ \ddot{q}_{n-1} + (2 - 24\mathbf{b}) \ddot{q}_n + (24\mathbf{b} - 3) \ddot{q}_{n+1} \right] + O(h^5) \\ e_{vit,n+1} = \frac{h}{12} \left[ \ddot{q}_{n-1} + (4 - 12\mathbf{g}) \ddot{q}_n + (12\mathbf{g} - 5) \ddot{q}_{n+1} \right] + O(h^4) \end{cases} \quad (3.4)$$

La relation (3.1) représente une estimation de l'erreur sur la position au 4<sup>ème</sup> ordre, la relation (3.4) représente une estimation de l'erreur sur la position au 5<sup>ème</sup> ordre et sur les vitesses au 4<sup>ème</sup> ordre.

Pour HULBERT et JANG [V] l'erreur de troncature prend la forme (autre schéma que SMG) :

$$\boxed{e = \left( \mathbf{b} - \frac{1}{6} \right) h^2 \Delta \ddot{q}} \quad (3.5)$$

qui est une expression comparable à (3.1). Cependant les auteurs ne passent pas par les coordonnées modales comme GERADIN [II]. De plus l'adimensionalisation de l'erreur est différente. L'erreur est divisée par un facteur dépendant de  $\Delta q$ . Il vient alors [V] :

$$\begin{cases} ref_{n+1} = \max \left( \frac{9}{10} ref_n, |q_{n+1} - q_n| \right) \\ e = \frac{\left( \mathbf{b} - \frac{1}{6} \right) h^2 |\ddot{q}_{n+1} - \ddot{q}_n|}{ref_{n+1}} \end{cases} \quad (3.6)$$

Détermination automatique de la taille du pas de temps pour les schémas implicites en dynamique non-linéaire.

Chapitre 3 : Etude bibliographique de la gestion automatique du pas de temps.

---

Pour un système à un degré de liberté linéaire, l'erreur adimensionnelle peut être reliée au pas de temps  $h$  et à la période  $T$  [V] :

$$e = 4 p^2 \left( b - \frac{1}{6} \right) \frac{h^2}{T^2} \quad (3.7)$$

Une fois un rapport  $h/T$  fixé, la relation (3.7) fournit une tolérance à l'erreur adimensionnelle.

Pour DUTTA et RAMAKRISHNAN [IX], l'erreur est calculée comme (3.5). Elle est cependant adimensionnalisée par la norme maximale des positions durant les calculs.

$$e = \frac{\left( b - \frac{1}{6} \right) h^2 \left| \ddot{q}_{n+1} - \ddot{q}_n \right|}{\max_{n'} \left| q_i \right|} ; n' = 1, \dots, n + 1 \quad (3.8)$$

Pour CASSANO et CARDONA [X], l'erreur est similaire à (3.1). Elle n'est cependant pas adaptée aux coordonnées modales. L'adimensionnalisation se fait à partir d'une position caractéristique. L'erreur adimensionnelle est calculée pour chacun des nœuds et l'erreur maximale est ensuite retenue. Au nœud  $i$  nous avons [X] :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{ref,i} = \left| q_{n+1,i} \right| + \left\{ \begin{array}{ll} L/\sqrt{N} & \text{degré de translation} \\ p/10 & \text{degré de rotation} \end{array} \right. \\ e_i = \frac{h^2}{6} \left| \ddot{q}_{n+1,i} - \ddot{q}_{n,i} \right| \end{array} \right.$$

Avec  $L$  la taille d'un élément et  $N$  le nombre d'éléments

L'erreur adimensionnelle devient donc :

$$e = \max_{i=1,nddl} \left( \frac{e_i}{q_{ref,i}} \right) \quad (3.9)$$

### **3.2. Comparaison des différents estimateurs d'erreurs.**

Le calcul des erreurs (3.1) et (3.5) à (3.9) se base sur l'erreur de troncature du développement de Taylor. Les erreurs (3.4) se calculent à un ordre supérieur et donnent donc une meilleure image de l'erreur entre la position calculée et la position exacte. Cependant le calcul de l'erreur est coûteux. En effet le nombre d'opérations est beaucoup plus important et les vecteurs au temps  $t_{n-1}$  doivent être stockés. Les autres erreurs sont de la forme  $e = \frac{h^2 \Delta \ddot{q}}{\text{référence}}$

L'erreur (3.2) passe par les coordonnées modales. Ce raisonnement a l'avantage de pouvoir comparer de manière rigoureuse l'erreur du système à plusieurs degrés de liberté couplés avec l'erreur d'un système à un degré de liberté. Cependant cette comparaison n'est rigoureuse que dans le cas d'un système linéaire non amorti (Annexe 2). Les autres erreurs calculent  $\Delta \ddot{q}$ .

Une autre différence provient du choix des valeurs d'adimensionalisation. Les erreurs (3.3) et (3.5) gardent cette valeur constante au cours du temps à l'inverse des autres qui la recalculent régulièrement.

Enfin l'expression (3.9) ne moyenne pas l'erreur sur les différents nœuds. Cela conduit à un critère plus sévère comme il apparaîtra clairement dans la suite (§4.3).

### **3.3. Gestion de la durée du pas de temps.**

Seuls GERADIN [II], CARDONA et CASSANO [X] développent une théorie pour établir une formule de prédiction sur la durée du pas de temps à partir de l'erreur d'intégration. Cette formule de prédiction est développée pour les cas linéaires.

Pour GERADIN [II], lorsque les itérations de la phase de correction au temps  $t_n$  ont convergé, l'erreur d'intégration ( $e$ ) est calculée selon (3.2).

Le premier test (Figure 1) consiste à vérifier que l'erreur ( $e$ ) est inférieure au seuil de tolérance choisi (PRCU). Dans le cas contraire, il est rejeté. Alors, le pas de temps  $h_n$  est divisé par deux, le temps  $t_n$  est recalculé ( $t_n = t_{n-1} + h_n$ ) et le système est à nouveau résolu pour ce nouveau temps.

Dans le cas où l'erreur ( $e$ ) est bien inférieure à ce seuil (PRCU), les calculs au temps  $t_n$  sont acceptés et le nouveau pas de temps  $h_{n+1}$  est calculé pour définir le nouveau temps de calcul  $t_{n+1}$ . Le but poursuivi par l'algorithme est d'obtenir une erreur légèrement inférieure à la moitié de la tolérance (c'est-à-dire  $PRCU/2$ ).

Dès lors si l'erreur est supérieure à  $PRCU/2$ , la durée du pas de temps est réduite afin de diminuer l'erreur du pas suivant. La relation (3.3) permet d'établir le rapport entre le pas de

Détermination automatique de la taille du pas de temps pour les schémas implicites en dynamique non-linéaire.

Chapitre 3 : Etude bibliographique de la gestion automatique du pas de temps.

---

temps et l'erreur pour un système linéaire à un degré de liberté. En effet, il vient  $\lim_{\Omega \rightarrow 0} e(\Omega) \div \Omega^3$  et  $\lim_{\Omega \rightarrow \infty} e(\Omega) \div \Omega^2$ . En se rappelant que  $\Sigma$  est le produit entre le pas de temps et la pulsation, la formule liant la durée du pas de temps à l'erreur s'écrit :

$$h_2 = h_1 \left( \frac{e_2}{e_1} \right)^{\frac{1}{h}}, \quad h \in [2, 3] \quad (3.10)$$

Dans cette relation,  $h_1$  est le pas actuel,  $e_1$  est l'erreur actuelle,  $e_2$  est l'erreur désirée et  $h_2$  est le pas de temps théorique qui amène l'erreur voulue. Dans le cas présent, l'erreur doit être ramenée de  $e$  à  $PRCU/2$ . L'exposant  $h$  est choisit égal à trois. La nouvelle durée du pas de temps vaut donc :

$$h_{n+1} = h_n \left( \frac{PRCU}{2e} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.11)$$

Le rapport entre le nouveau pas de temps et l'ancien est toutefois limité par l'intervalle  $[0.5, 0.9]$ . Il doit être inférieur à 0.9 pour réduire suffisamment la durée du pas de temps et supérieur à 0.5 pour ne pas le réduire exagérément.

Si l'erreur est très petite, le pas de temps est inutilement trop petit. Un gain de temps de calcul peut être obtenu en l'augmentant et ce sans dégrader la qualité de la solution. En se référant à la formule (3.10), et pour un exposant  $h$  égal à trois, le pas de temps peut être doublé si l'erreur est inférieure ou égale à un seizième.

Dans le cas où l'erreur est comprise entre un demi et un seizième, le pas de temps est gardé constant.

Le principal désavantage de ce schéma en non linéaire est que l'augmentation ou la division du pas de temps ne correspond pas toujours à une modification physique du système. En effet des variations de l'erreur peuvent être dues à des modes numériques et non à des modes physiques. De plus, l'erreur peut varier périodiquement sur des petits intervalles de temps. Il est alors inutile de modifier l'erreur régulièrement. En effet dans ces conditions, des pas de temps augmentés sont alors régulièrement rejetés ou des divisions inutiles apparaissent. De plus la formule (3.10) a été établie pour un système linéaire à un degré de liberté. Dans le cas de non-linéarités importante, elle ne peut être appliquée impunément. Enfin, ce schéma ne tient pas compte des éventuels problèmes de convergence.

La Figure 1 représente le schéma de choix du pas de temps.

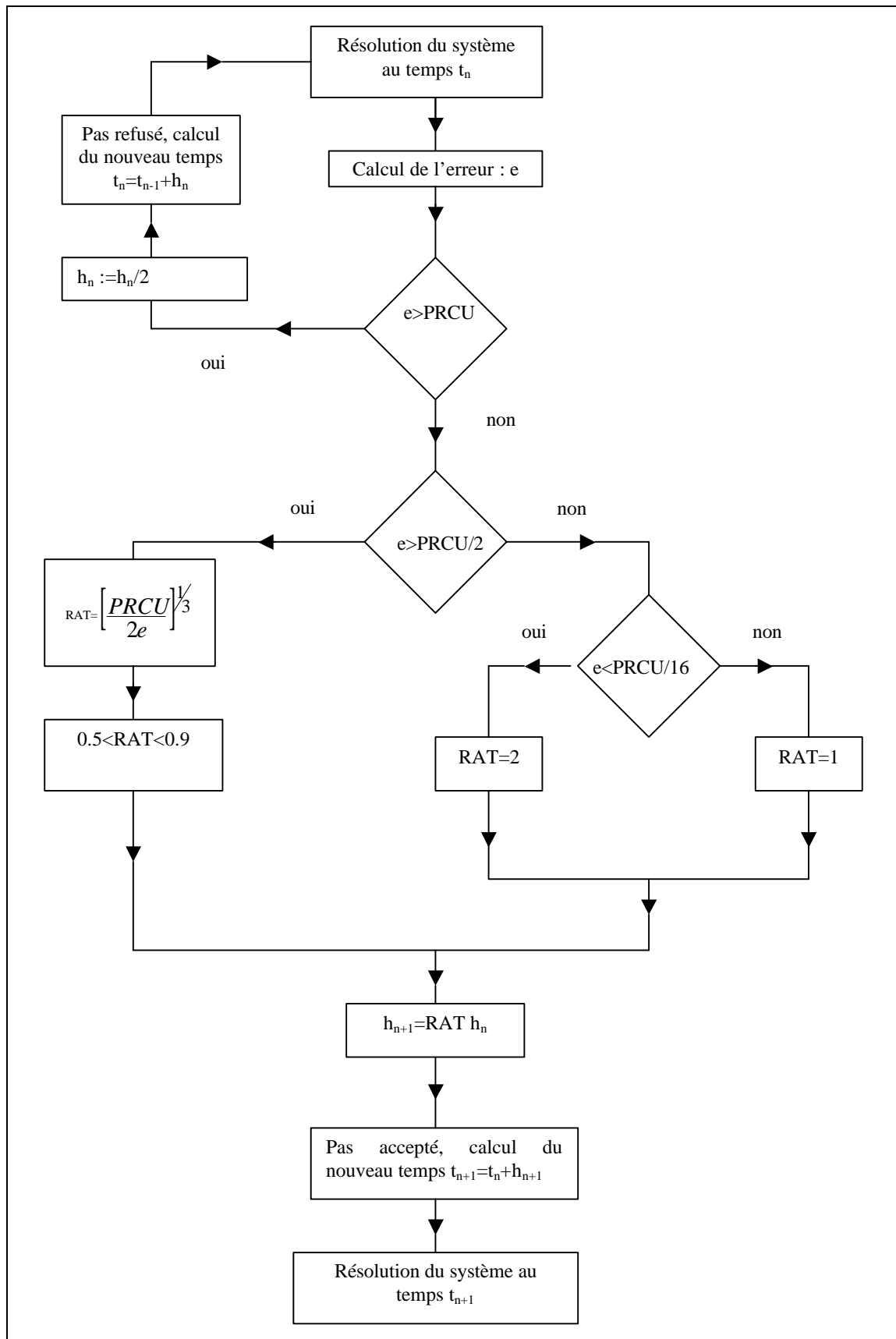


Figure 1 : schéma du pas dans MECANO [II]

Pour NEUMANN et SCHWEIZERHOF [IV] ainsi que pour HULBERT et JANG [V], l'erreur est considérée proportionnelle à  $h^2$  (ce qui suppose  $\Delta\ddot{q}$  presque indépendant de  $h$  vu les expressions (3.4) et (3.5)). Pour DUTTA et RAMAKRISHNAN [IX] l'erreur est supposée proportionnelle à  $h^3$  sans démonstration. Nous retrouvons donc la formule (3.10) qui est cependant délicate d'application dans un cas non linéaire. Les deux schémas de gestion du pas de temps qui suivent sont proposés pour tenir compte des non-linéarités. Ces deux schémas se basent toujours sur la relation (3.1).

Le schéma proposé par DUTTA et RAMAKRISHNAN [IX] utilise le calcul de l'erreur (3.8). L'intervalle de temps de calcul est divisé par l'utilisateur en « nt » sous-domaines. Dans chacun de ces sous-domaines le pas de temps  $h$  est gardé constant (Figure 2). Un sous domaine correspond donc à une succession de pas constant.

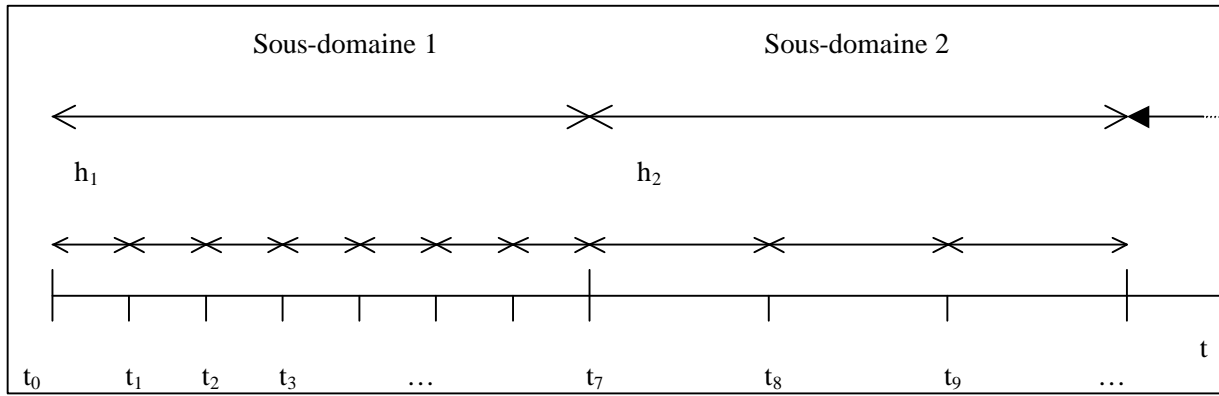


Figure 2 : Division en sous-domaines.

Le pas de temps du sous-domaine  $i$  est alors calculé à partir de l'erreur du sous-domaine  $i-1$ . Soient  $n_{i-1}$  le nombre de pas du sous-domaine  $i-1$ ,  $e_{k,i-1}$  l'erreur sur le  $k^{\text{ième}}$  pas du sous-domaine  $i-1$ , l'erreur moyenne du sous-domaine  $i-1$  est définie :

$$[e]_{i-1} = \frac{\sum_{k=1}^{n_{i-1}} e_{k,i-1}}{n_{i-1}}$$

Le pas de temps du sous-domaine  $i$  est alors calculé par (PRCU étant la précision requise) :

$$h_i = h_{i-1} \left( \frac{PRCU}{[e]_{i-1,i}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Le principal désavantage de cette méthode est de devoir définir l'espace temporel en sous-domaines de taille fixée. De plus des chocs qui interviennent brusquement ne donnent pas de rapides modifications du pas de temps.

Détermination automatique de la taille du pas de temps pour les schémas implicites en dynamique non-linéaire.

Chapitre 3 : Etude bibliographique de la gestion automatique du pas de temps.

---

Afin de ne réagir qu'au modifications physiques et durables du système, un schéma avec compteur est proposé par HULBERT et JANG [V]. En définissant TOL1 l'erreur sous laquelle la durée du pas de temps peut être augmentée, TOL2 l'erreur au-delà de laquelle la durée du pas de temps doit être diminuée et LCOUNT la limite du compteur, le schéma est le suivant :

- Si  $TOL1 < e < TOL2$  alors le pas est accepté et  $h_{n+1} = h_n$ .
- Si  $e > TOL2$  alors le pas est rejeté et
  - Si  $h_n > h_{n-1}$  alors  $h_n = h_{n-1}$ .
  - Sinon  $h_n$  devient  $h_n(TOL2/e)^{1/2}$
- Si  $e < TOL1$  pendant LCOUNT pas successifs alors les pas sont acceptés et  $h_{n+1} = h_n(TOL1/e)^{1/2}$ .

Il existe aussi des schémas qui ne passent pas par le calcul d'une erreur d'intégration. Citons les deux suivants.

Pour PONTHOT [XI] la taille du pas de temps dépend du nombre d'itérations nécessaire à la convergence du pas précédent. Cette technique est expliquée plus en détail au §6.

Pour GIVOLI et HENISBERG [XII], la taille du pas de temps doit satisfaire permettre de limiter la différence de position entre les pas temps, soit :

$$\frac{\|q_{n+1} - q_n\|}{\|q_{n+1}\|} = d \quad (3.12)$$

Le pas de temps  $h_{n+1}$  entre les temps  $t_n$  et  $t_{n+1}$  peut alors être calculé [XII] pour les schémas CH, N, HHT :

$$h_{n+1} = \min \left\{ \frac{d \|q_{n+1}\|}{\|\dot{q}_n\|}, \sqrt{\frac{2d \|q_{n+1}\|}{(1 - 2b) \ddot{q}_n + 2b \ddot{q}_{n+1}}} \right\} \quad (3.13)$$

La durée du pas de temps dépendant des valeurs au temps suivant, il ne peut être calculé qu'itérativement. Le pas de temps prend d'abord la valeur du pas précédent, les inconnues en  $t_{n+1}$  sont alors calculées et le pas de temps peut alors être déduit de (3.13). La nouvelle valeur du temps  $t_{n+1}$  est alors calculée et les inconnues qui y correspondent sont recalculées. Les deux désavantages de cette méthode sont :

- Le nombre d'itération par pas de temps augmente fort car le pas est déterminé à posteriori.
- Borner le saut de déplacement ne nous semble pas judicieux en grandes déformations et en grands déplacements. En effet, dans le cas de prise de contact,

le pas de temps doit être petit pour garantir une certaine précision et la convergence des itérations. Or pendant ces prises de contact, la variation des positions est relativement faible, la relation (3.12) va donc être facilement satisfaite. A l'opposé dans le cas d'une translation à vitesse constante, la durée du pas de temps peut être très grande sans poser de problème d'intégration car l'intégration se fait exactement. Les sauts de positions peuvent donc être grands mais alors la relation (3.12) n'est plus vérifiée.

Dans la suite du présent travail, nous proposons d'améliorer le schéma de GERADIN (Figure 1). Nous introduirons alors un système de compteur comme l'ont fait HULBERT et JANG pour que les variations du pas de temps ne proviennent plus que de variations physiques et durables du système. Nous adapterons également la durée du pas de temps afin de tenir compte des éventuels problèmes de convergence rencontrés. En effet, dans certains cas la durée du pas de temps est suffisamment petite pour intégrer avec une bonne précision mais ne permet pas la convergence des itérations de Newton-Raphson.



## **4. Calcul de l'erreur d'intégration.**

Nous allons montrer comment rendre le calcul de l'erreur indépendant du schéma utilisé ainsi que des paramètres d'intégration. Pour ce faire l'erreur d'un système linéaire à un degré de liberté est calculée analytiquement. Cette valeur servira de valeur de référence aux erreurs calculées numériquement. Ensuite plusieurs possibilités de calcul de l'erreur du §3.1 sont rendues indépendantes du schéma d'intégration. Ces différentes erreurs sont alors évaluées sur des cas test. Pour ces cas test le pas de temps est fixe afin de pouvoir comparer les erreurs.

### **4.1. Calcul d'erreurs d'intégration indépendantes du schéma.**

L'erreur d'un système linéaire non amorti à un degré de liberté est calculée. Cette valeur qui dépend du schéma d'intégration et des paramètres d'intégration sert de valeur de référence.

Soit l'algorithme CH. L'équation du système de pulsation T est :

$$\begin{cases} \ddot{q} + \mathbf{w}^2 q = q \\ q(t = 0) = q_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

La solution exacte du système est ( $\Sigma = T_h$ ):

$$\begin{cases} q = q_0 \cos(\mathbf{w} t) \\ h\dot{q} = -\Omega q_0 \sin(\mathbf{w} t) \\ h^2\ddot{q} = -\Omega^2 q_0 \cos(\mathbf{w} t) \end{cases} \quad (4.2)$$

L'algorithme CH se résout par le système (2.3) et (2.7). Ces équations deviennent pour un système linéaire à un degré de liberté :

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + h \dot{q}_n + \left(\frac{1}{2} - \mathbf{b}\right) h^2 \ddot{q}_n + \mathbf{b} h^2 \ddot{q}_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + (1 - \mathbf{g}) h \ddot{q}_n + \mathbf{g} h \ddot{q}_{n+1} \\ (1 - \mathbf{a}_M) \ddot{q}_{n+1} + \mathbf{a}_M \ddot{q}_n + (1 - \mathbf{a}_F) \mathbf{w}^2 q_{n+1} + \mathbf{a}_F q_n \end{cases} \quad (4.3)$$

Ce dernier système peut se mettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix} q_{n+1} \\ h \dot{q}_{n+1} \\ h^2 \ddot{q}_{n+1} \end{pmatrix} = A(\Omega) \begin{pmatrix} q_n \\ h \dot{q}_n \\ h^2 \ddot{q}_n \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

avec :

$$\begin{cases} D(\Omega) = 1 - \mathbf{a}_M + (1 - \mathbf{a}_F) \Omega^2 \mathbf{b} \\ A(\Omega) = \frac{1}{D(\Omega)} \begin{pmatrix} 1 - \mathbf{a}_M - \mathbf{a}_F \Omega^2 \mathbf{b} & 1 - \mathbf{a}_M & \frac{1 - \mathbf{a}_M - 2\mathbf{b}}{2} \\ -\mathbf{g} \Omega^2 & (1 - \mathbf{a}_F)(\mathbf{b} - \mathbf{g}) \Omega^2 + 1 - \mathbf{a}_M & 1 - \mathbf{g} - \mathbf{a}_M + \Omega^2 (\mathbf{b} - \frac{\mathbf{g}}{2})(1 - \mathbf{a}_F) \\ -\Omega^2 & (\mathbf{a}_F - 1) \Omega^2 & -\mathbf{a}_M + (1 - \mathbf{a}_F)(\mathbf{b} - \frac{1}{2}) \Omega^2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(4.2) et (4.4) donnent alors :

$$\begin{pmatrix} \Delta q \\ h \Delta \dot{q} \\ h^2 \Delta \ddot{q} \end{pmatrix} = [A(\Omega) - I] \begin{pmatrix} q_0 \cos(\mathbf{w} t) \\ -\Omega q_0 \sin(\mathbf{w} t) \\ -\Omega^2 h^2 \cos(\mathbf{w} t) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Et il vient de (4.5) la relation :

$$\left| h^2 \Delta \ddot{q} \right| = \left| q_0 \right| \frac{(1 - \mathbf{a}_F) \Omega^2 \left| \sin(\mathbf{w} t) + \frac{\Omega}{2} \cos(\mathbf{w} t) \right|}{1 - \mathbf{a}_M + (1 - \mathbf{a}_F) \Omega^2 \mathbf{b}} \quad (4.6)$$

Définissons  $\mathbf{e}$  l'erreur moyenne adimensionnelle sur une période :

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{w}}{2\mathbf{p}} \int_{t=0}^{t=\frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{w}}} \frac{\left| h^2 \Delta \ddot{q} \right|}{6 \left| q_0 \right|} dt \quad (4.7)$$

Etant donné que :

$$\frac{\mathbf{w}}{2\mathbf{p}} \int_{t=0}^{t=\frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{w}}} \left| a \cos(\mathbf{w} t) + b \sin(\mathbf{w} t) \right| dt = \frac{2}{\mathbf{p}} \sqrt{a^2 + b^2}$$

(4.7) devient en utilisant (4.6) :

$$\mathbf{e} = \frac{(1 - \mathbf{a}_F) \Omega^3 \sqrt{1 + \frac{\Omega^2}{4}}}{3 \mathbf{p} [1 - \mathbf{a}_M + (1 - \mathbf{a}_F) \Omega^2 \mathbf{b}]} \quad (4.8)$$

Cette expression de l'erreur reste évidemment valable pour les schémas N et HHT, il suffit de prendre les valeurs des paramètres adéquates.

Quant au schéma SMG, (4.2) est remplacé grâce à (2.4) et (2.13) par :

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + h \dot{q}_n + \frac{h^2}{2} \ddot{q}_{n+q} \\ h \dot{q}_{n+1} = h \dot{q}_n + h^2 \ddot{q}_{n+q} \\ h^2 \ddot{q}_{n+1} = h^2 \ddot{q}_{n+q} \\ q_{n+q} = q_n + \mathbf{q} h \dot{q}_n + \frac{\mathbf{q}^2 h^2}{2} \ddot{q}_{n+q} \\ h \dot{q}_{n+q} = h \dot{q}_n + \mathbf{q} h^2 \ddot{q}_{n+q} \\ \ddot{q}_{n+q} + \mathbf{w}^2 q_{n+q} = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Qui peut se mettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix} q_{n+1} \\ h \dot{q}_{n+1} \\ h^2 \ddot{q}_{n+1} \end{pmatrix} = A(\Omega) \begin{pmatrix} q_n \\ h \dot{q}_n \\ h^2 \ddot{q}_n \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

avec :

$$A(\Omega) = \frac{2}{2 + \mathbf{q}^2 \Omega^2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\Omega^2}{2} (\mathbf{q}^2 - 1) & 1 + \frac{\Omega^2}{2} (\mathbf{q}^2 - \mathbf{q}) & 0 \\ -\mathbf{g} \Omega^2 & 1 + \frac{\Omega^2}{2} (\mathbf{q}^2 - 2\mathbf{q}) & 0 \\ -\Omega^2 \mathbf{q}^2 & -\Omega^2 \mathbf{q} & 0 \end{pmatrix}$$

Dès lors, l'erreur moyenne sur une période adimensionnée s'écrit :

$$e = \frac{\Omega^2 \sqrt{\left[ q^2 \Omega^2 + 2(1 - q^2) \right]^2 + 4 q^2 \Omega^2}}{3 p \left[ 2 + q^2 \Omega^2 \right]} \quad (4.11)$$

La Figure 3 illustre l'évolution de  $e$  en fonction de  $\Sigma$  pour les différents schémas. Pour un système linéaire à un degré de liberté  $\Sigma = 0.6$  fournit une solution acceptable. Nous fixons donc  $\Sigma$  à cette valeur pour obtenir une valeur de référence, pour chaque schéma. La Figure 3 montre que cette valeur peut varier d'un facteur 3 à 4 ce qui est significatif pour le calcul de l'erreur.

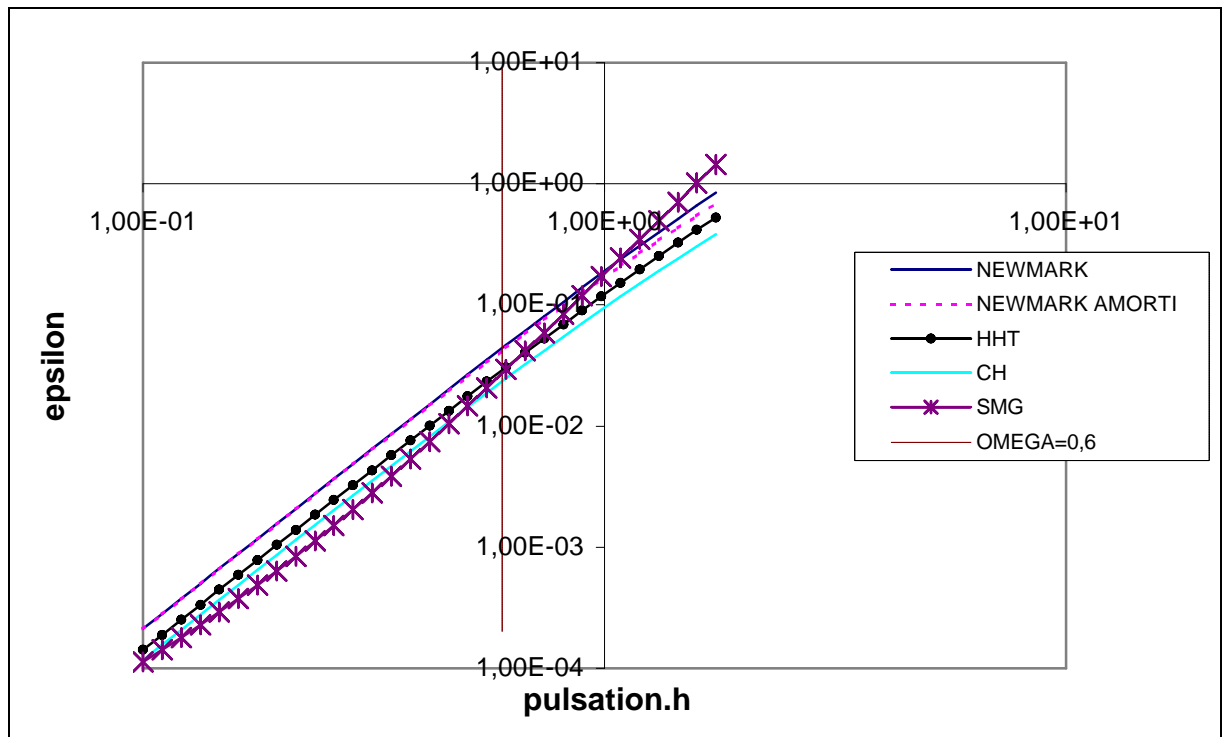


Figure 3 : Evolution de l'erreur pour les différents schémas.

Remarques :

- (4.11) et (4.8) ont la même expression si  $2=1.1$  et  $\forall_M=0$ ,  $\forall_F=0$ ,  $\exists=0.5$  et  $(=1$  comme la théorie le prévoit.
- Le même raisonnement peut se faire pour les erreurs (4.4) (Annexe I).

## 4.2. Expressions utilisées de l'erreur d'intégration.

Plusieurs expressions de l'erreur d'intégration sont implémentées et comparées. Les erreurs calculées numériquement sont divisées par la valeur de référence établie au §4.1 afin d'avoir une erreur indépendante du schéma et des paramètres d'intégration. Notons que les expressions (3.4) ne sont pas reprises. En effet, aucun avantage n'a été obtenu qui justifie le coût supplémentaire entraîné. La valeur d'adimensionnalisation de l'erreur est gardée constante au cours du calcul. Ce choix se justifie par le raisonnement suivant : dans le cas d'un système amorti, la variation des positions diminue. La valeur d'adimensionnalisation diminuerait donc, ce qui augmenterait l'erreur et réduirait le pas de temps. Or le choix du pas de temps peut se justifier de deux manières. Il doit être suffisamment petit en regard de la période du mouvement afin de l'intégrer correctement et il doit être suffisamment petit pour permettre la convergence des itérations. Dans le cas d'un amortissement du système, rien ne justifie donc de réduire la durée du pas de temps. D'autant plus que dans les cas qui nous concernent, au moment où le contact a déjà eu lieu, la convergence devient plus facile alors que la variation des positions diminue. Nous nous attendons donc à pouvoir travailler avec des pas de temps plus grands et non plus petits (le cas de la barre élastique (§ 4.3.1) illustre clairement ce raisonnement).

Les différentes erreurs suivantes ont été implémentées (*nddl* est le nombre de degré de liberté et l'indice 0 caractérise le système au temps initial).

Erreur e1 :

$$e_1 = \frac{h^2}{6e} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{nddl} abs[\Delta \ddot{q}_i \Delta(M \ddot{q}_i)]}{\sum_{i=1}^{nddl} abs[q_{0,i} (M q_0)_i]}} \quad (4.12)$$

Erreur e2 :

$$e_2 = \frac{h^2}{6e} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{nddl} \Delta \ddot{q}_i \Delta(M \ddot{q}_i)}{\sum_{i=1}^{nddl} q_{0,i} (M q_0)_i}} \quad (4.13)$$

Erreur e3 :

$$e_3 = \frac{h^2}{6e} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{nddl} (\Delta \ddot{q}_i)^2}{\sum_{i=1}^{nddl} q_{0,i}^2}} \quad (4.14)$$

Erreur e4 :

$$e_4 = \frac{h^2 \max_{i=1,...,nddl} abs[\Delta \ddot{q}_i]}{6e \max_{i=1,...,nddl} abs[q_{0,i}]} \quad (4.15)$$

$e$  est calculé par (4.8) sauf pour le schéma SMG où il est calculé par (4.11).

Les erreurs (4.12) et (4.13) viennent de l'expression (3.2) alors que les erreurs (4.14) et (4.15) viennent de (3.1).

### **4.3. Comparaison des quatre expressions de l'erreur d'intégration.**

Les erreurs  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  et  $e_4$  vont être comparées sur trois cas test différents. Chacun de ces cas test est résolu par un schéma différent. Le pas de temps est pris constant pour pouvoir mettre en rapport l'évolution de l'erreur avec la physique du phénomène.

#### **4.3.1. Barre élastique percutant un mur.**

Il s'agit d'une barre parfaitement élastique (Figure 4) ayant un module de Poisson nul. De plus les degrés de liberté selon l'axe  $y$  et  $z$  sont fixés. Le problème est donc unidimensionnel selon l'axe  $x$ . La barre est animée selon l'axe  $x$  d'une vitesse de 5,1 m/s.

Le métal a les caractéristiques suivantes :  $\Delta=7895 \text{ kg/m}^3$ ,  $E=206840 \text{ N/mm}^2$ . La barre a une longueur selon  $x$  de 247,65 mm et une épaisseur selon  $y$  de 40 mm. Elle est à une distance initiale du mur de 0.25 mm et le contact se fait sans frottement. Le problème est en état plan de déformation et se calcule par un schéma HHT ( $\forall_F=0.2$ ). Le pas de temps vaut  $1\text{E-}6\text{s}$ .

Le profil de la vitesse d'un point de la face qui entre en contact est représenté à la Figure 5. En se rappelant que la célérité d'une onde dans un métal élastique vaut  $\sqrt{E/\rho}=5120 \text{ m/s}$ , il faut un temps de  $1\text{E-}4\text{s}$  pour que l'onde parcoure un aller-retour dans la barre. C'est donc le temps qu'il faut à la barre pour quitter le mur une fois qu'elle est rentrée en contact comme il apparaît sur la Figure 5. La barre repart alors en sens inverse avec la même vitesse. Cependant l'onde ne s'est pas parfaitement annulée lorsqu'elle est revenue sur le mur (le schéma d'intégration est non conservatif). Des oscillations apparaissent alors toutes les  $1\text{E-}4\text{s}$ .

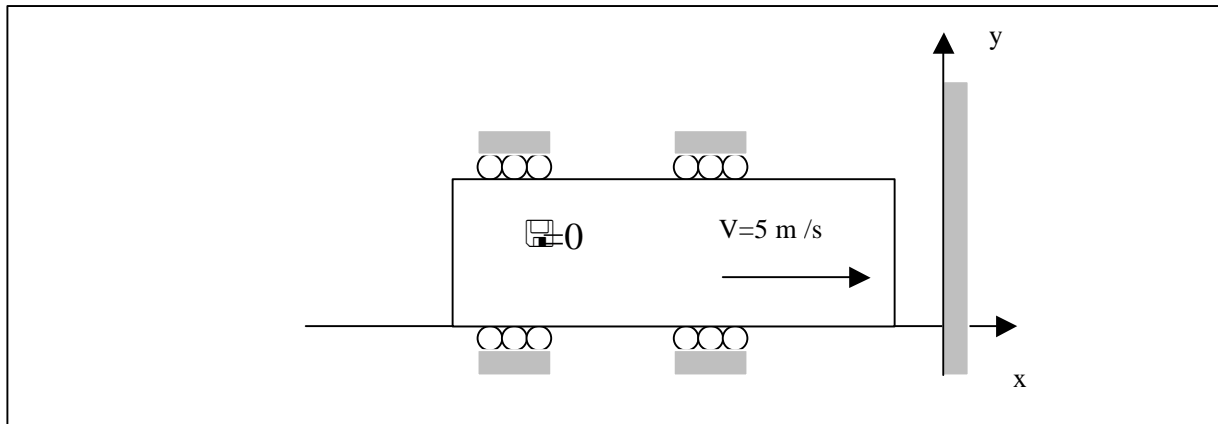


Figure 4 : Schéma de la barre élastique.

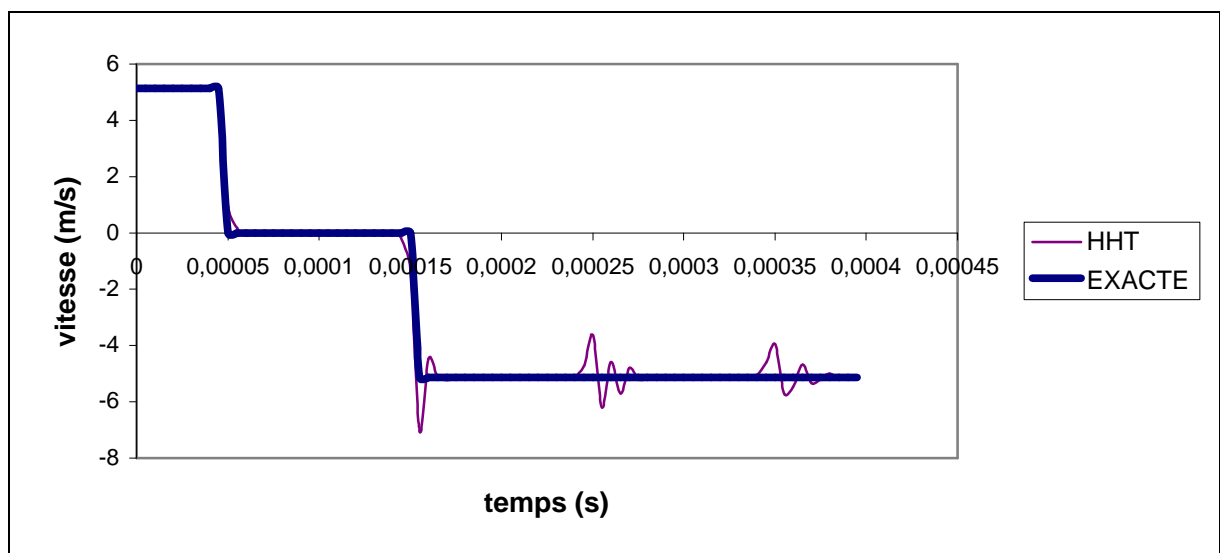


Figure 5 : vitesse d'un point de la barre élastique.

La Figure 6 et la Figure 7 illustrent l'évolution des quatre erreurs proposées lors de l'intégration HHT. Quand la barre n'est pas encore en contact avec le mur, l'accélération est nulle et les algorithmes implicites sont alors exacts. L'erreur calculée doit donc bien être nulle. Quand la barre quitte le mur, la vitesse n'est pas rigoureusement constante à cause des schémas d'intégration. Cependant les oscillations dans le profil des vitesses disparaissent par dissipation numérique (HHT avec  $\gamma_F = 0.2$ ), et l'erreur tend vers zéros. Entre  $5\text{E-}5\text{s}$  et  $15\text{E-}5\text{s}$ , l'erreur subit bien un pic provenant de la prise de contact. L'erreur  $e_4$  subit de plus fortes variations car elle prend l'erreur du point qui subit le plus fort l'onde alors que les autres erreurs moyennent l'ensemble des points. Les trois autres erreurs ont la même allure (Figure 7).

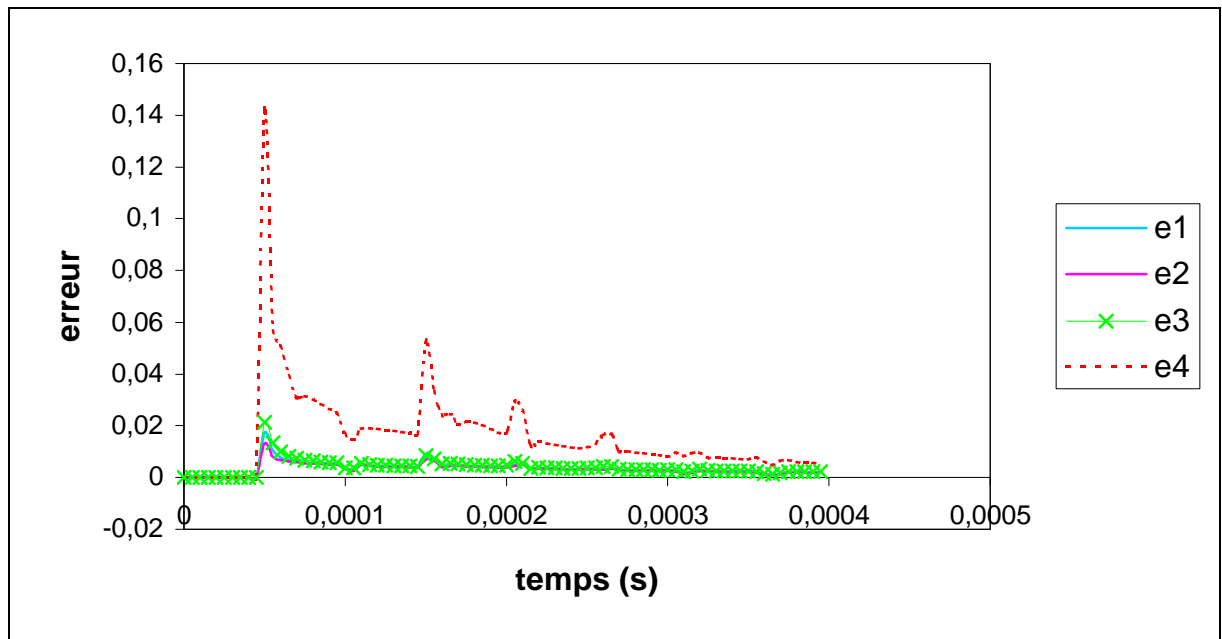


Figure 6 : Evolution des différentes erreurs pour la barre élastique.

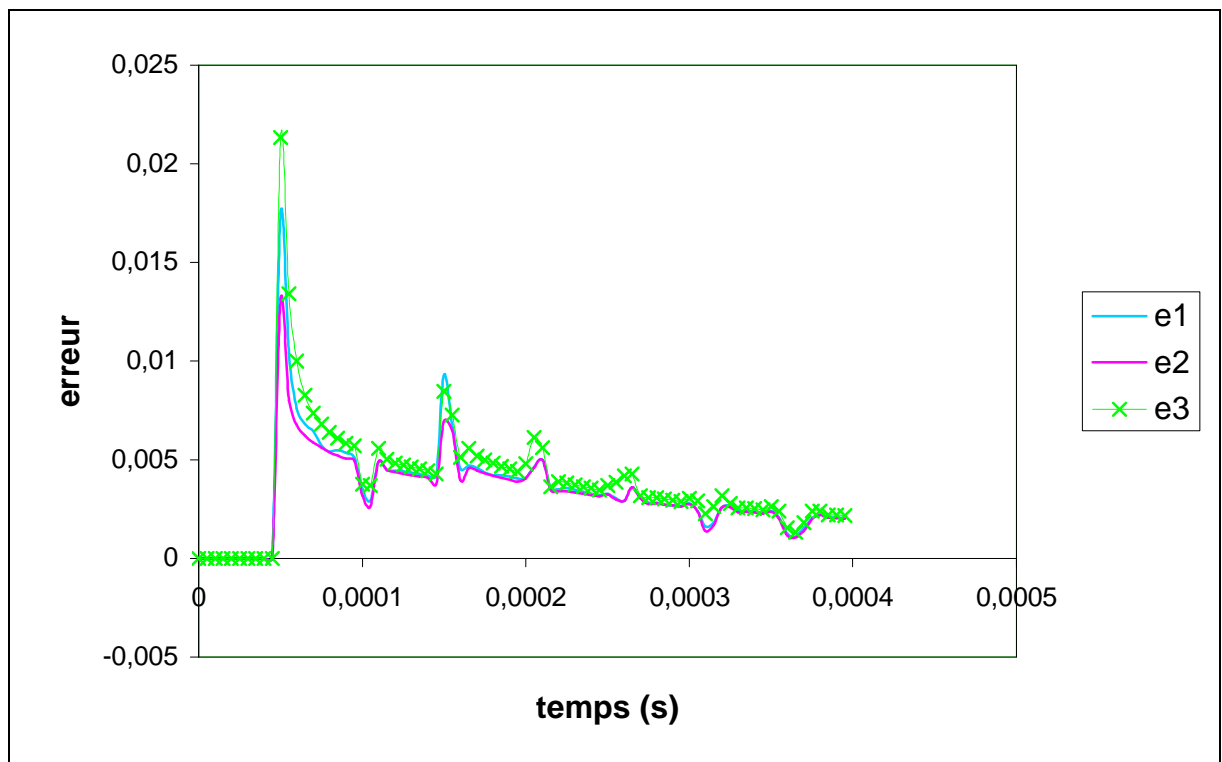


Figure 7 : Evolution des erreurs e1-3 pour la barre élastique.



### 4.3.2. La barre de Taylor.

Il s'agit d'une barre ayant les propriétés suivantes :  $\Delta = 8930 \text{ kg/m}^3$ ,  $E=117\text{E}9 \text{ kg/m}^2$  et  $\nu=0.35$ . Le matériau est élasto-plastique avec une limite élastique initiale de  $4\text{E}8 \text{ N/m}^2$  et un coefficient d'écrouissage de  $1\text{E}8 \text{ N/m}^2$ .

Le problème est axisymétrique. Le rayon est de 3.2 mm alors que la hauteur de la barre vaut 32.4 mm. La barre rencontre un mur avec une vitesse de 227 m/s.

Le contact se fait sans frottement. L'intégration se fait par le schéma SMG avec  $\alpha=1.1$  et le pas de temps= $1.7\text{E}-7\text{s}$ . La déformation en  $t=8\text{E}-5\text{s}$  est illustrée sur la Figure 8.

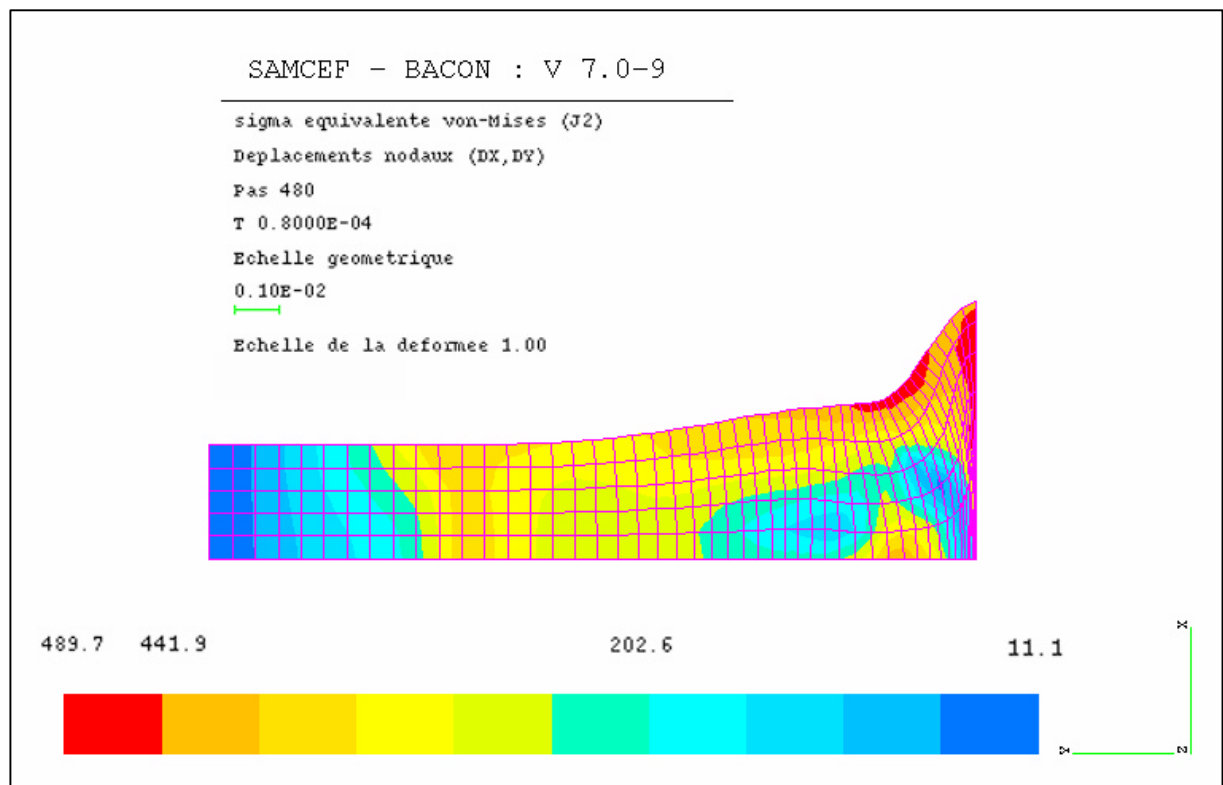


Figure 8 : Déformation et contraintes de Von-Mises (N/mm<sup>2</sup>) de la barre de Taylor.

La Figure 9 représente l'évolution des erreurs d'intégration pour le cas de la barre de Taylor. Les quatre courbes montrent bien une erreur importante au moment de l'impact et une diminution de cette erreur après le choc. Les erreurs e2 et e4 ont le désavantage d'être peu régulières. En effet, si nous considérons que l'erreur liée à l'évolution physique du problème est un lissage des courbes d'erreur obtenues, alors, les erreurs e2 et e4 oscillent avec de plus grandes amplitudes autour de cette courbe lissée.

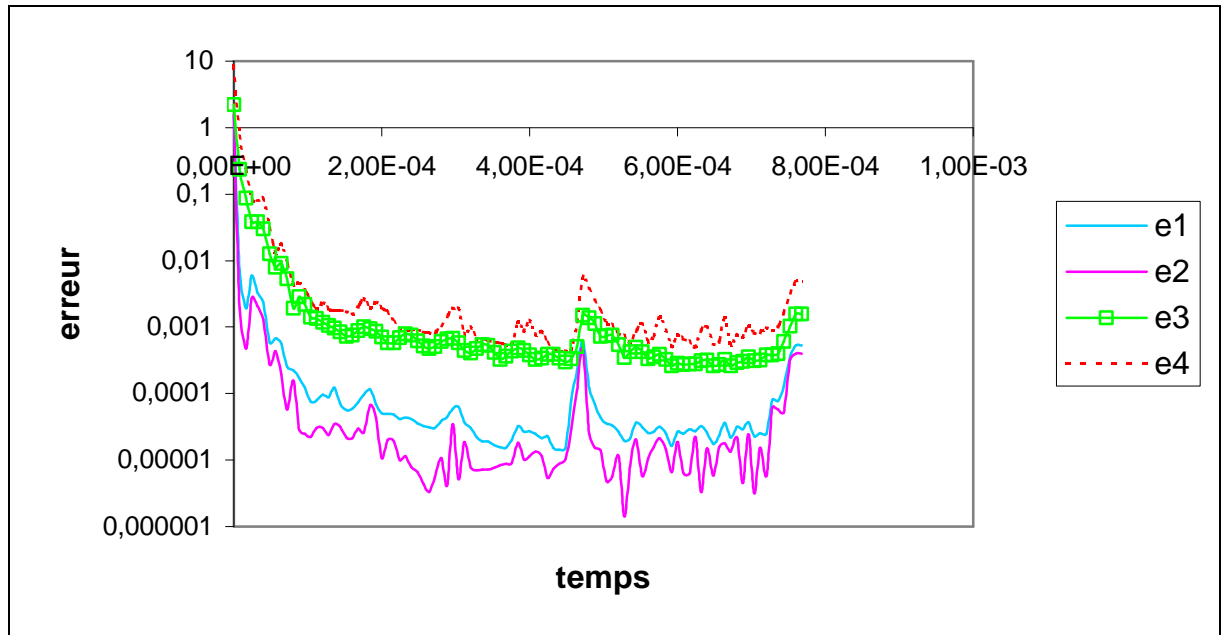


Figure 9 : Evolution des erreurs pour la barre de Taylor.

### 4.3.3. Cas de l'amortisseur de choc.

Un cylindre creux s'écrase sans frottement sur une matrice concave (Figure 10). Le problème est axisymétrique. Le matériau ( $\Delta=2700\text{kg/m}^3$ ,  $E=67\text{E}9\text{ N/m}^2$ ,  $\nu=0.33$ ) élasto-plastique a une limite élastique initiale de  $150\text{E}6\text{ N/m}^2$  et un coefficient d'écrouissage de  $44.7\text{E}6\text{ N/m}^2$ . L'intégration se fait par un schéma de CH avec  $\nabla_M=-0.8$  et un pas de temps de  $1.32\text{E}-6\text{s}$ .

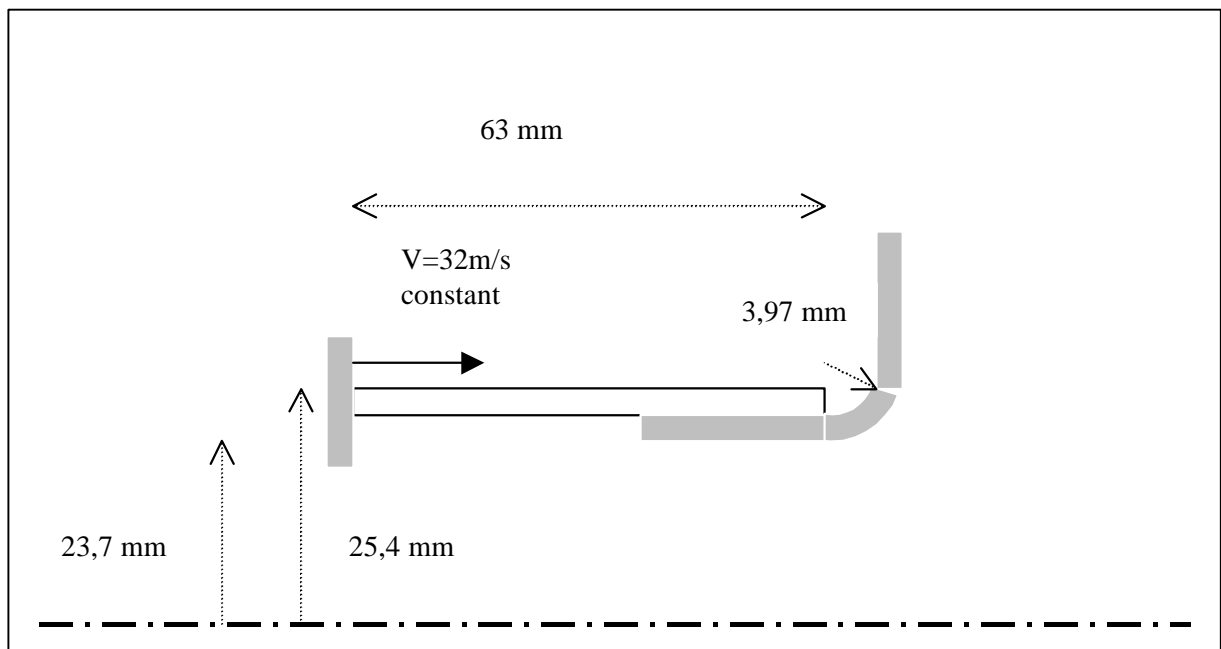


Figure 10 : Schéma de l'amortisseur.

La configuration atteinte après  $1.25E-3$  s est illustrée à la Figure 11.

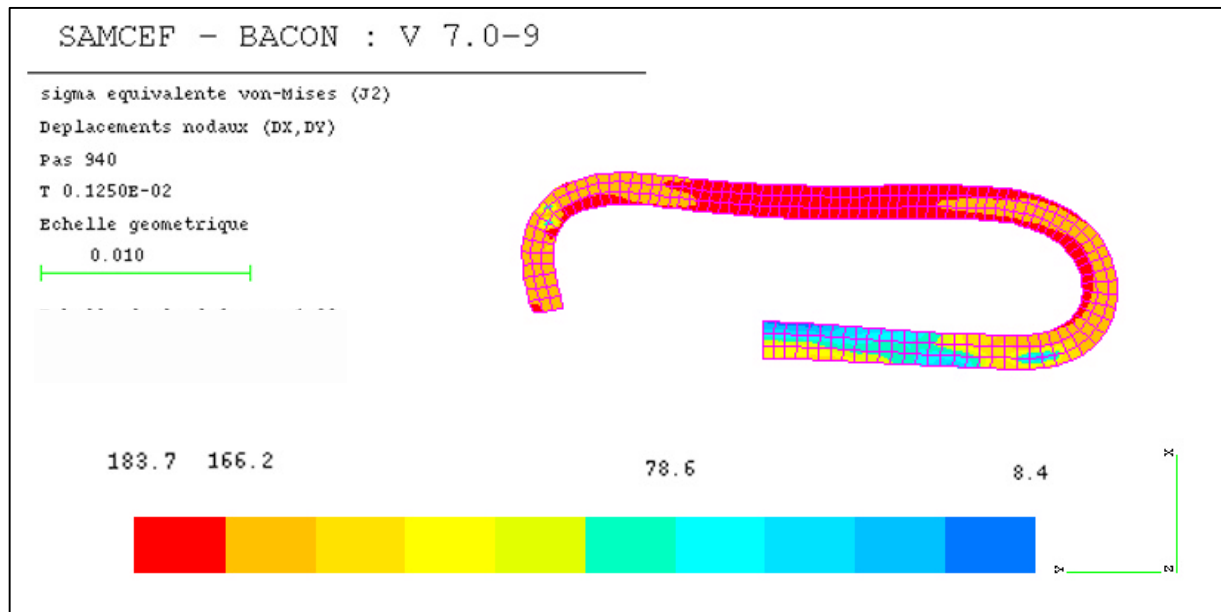


Figure 11 : Configuration déformée et contraintes de Von-Mises (N/mm<sup>2</sup>) de l'amortisseur.

Les erreurs obtenues sont illustrées à la Figure 12. A nouveau, les erreurs sont importantes au moment du contact. Les quatre erreurs se stabilisent ensuite. L'erreur e4 subit de plus fortes variations.

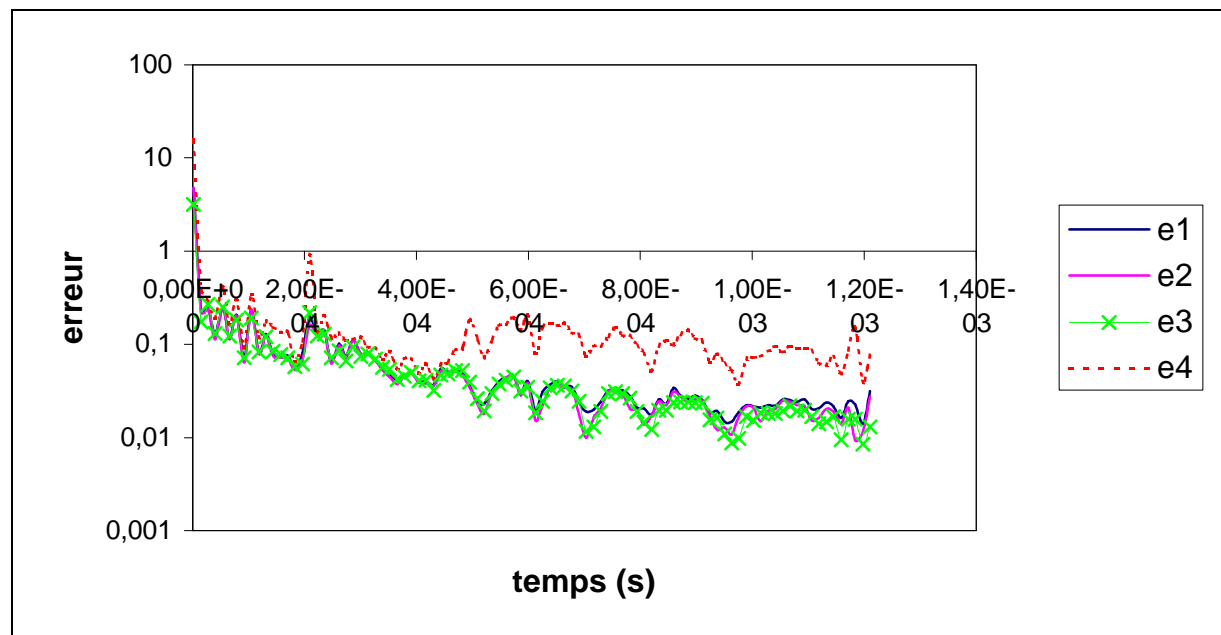


Figure 12 : Evolution des erreurs pour l'amortisseur.

#### **4.3.4. Comparaison des erreurs.**

Les quatre erreurs réagissent conformément à nos attentes quel que soit le schéma utilisé.

L'erreur  $e_4$  prend en compte le nœud où les déformations sont les plus importantes. Elle réagit donc plus que les autres mais cela a deux inconvénients. Le premier est que l'erreur ne se stabilise pas et donc que le pas de temps risque de varier inutilement. Le second est que nous risquons de travailler avec des pas trop petits sans réelle nécessité. Dans un cas l'erreur  $e_2$  a montré des oscillations que n'avaient ni  $e_1$  ni  $e_3$ . Ces oscillations sont indésirables.

Nous pouvons donc déjà avancer les conclusions suivantes :

- L'erreur  $e_4$  est plus stricte puisqu'elle considère le degré de liberté subissant la plus forte erreur.
- L'intérêt de passer par les forces d'inertie ne se justifie pas en non-linéaire. En effet les erreurs  $e_1$  et  $e_2$  n'apportent aucune information supplémentaire à  $e_3$ . Au contraire, l'erreur  $e_2$  a montré des oscillations plus importantes qui ne peuvent être mises en relation avec l'évolution physique du problème.

Nous allons maintenant comparer les solutions obtenues lorsque ces erreurs gèrent la durée du pas de temps afin de confirmer ces conclusions. Avant cela un algorithme de gestion de la durée du pas de temps est proposé.

## 5. Gestion de la durée du pas de temps.

Un schéma de gestion de la durée du pas de temps en fonction de l'erreur d'intégration est proposé. Il se base sur le schéma de GERADIN [II] (Figure 1). Cependant afin de le rendre plus efficace quand il y a des non-linéarités importantes, il est modifié.

L'erreur d'intégration calculée au §4.2 doit atteindre une valeur fixée à  $PRCU/2$ . PRCU est la tolérance de l'erreur d'intégration que l'utilisateur se fixe. Une première étape consiste à savoir si les itérations de Newton du schéma implicite ont convergé (Figure 13).

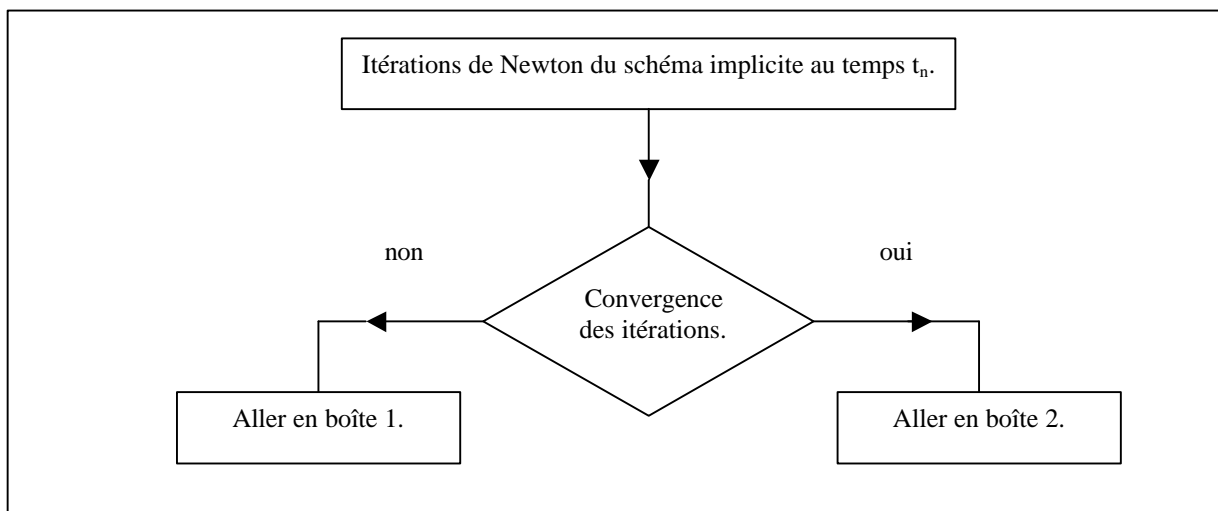


Figure 13 : Description du test de convergence.

### 5.1. Les itérations n'ont pas convergé (boîte 1).

Dans le cas où les itérations n'ont pas convergé, la durée du pas de temps est réduite et le calcul au temps  $t_n$  se refait avec le nouveau pas de temps. Le facteur de réduction (division de la durée du pas) est un paramètre utilisateur RDOWN. Si un problème de convergence est intervenu cela veut dire que la durée du pas de temps permet d'avoir une erreur d'intégration suffisamment faible mais n'est pas assez petite pour permettre la convergence. Si le problème de convergence survient pour un autre pas de temps que le premier, nous décidons alors de diminuer l'erreur de référence PRCU. De cette manière nous travaillons avec une erreur qui assure la précision de l'intégration mais aussi la convergence des itérations. Une condition est imposée sur le numéro du pas car pour le premier pas nous ne savons pas encore si l'erreur d'intégration est inférieure à la précision tolérée PRCU. Le schéma est décrit à la Figure 14.

Si le problème converge sans difficulté lors des prochaines itérations, le seuil PRCU peut à nouveau être augmenté pour se rapprocher de sa valeur initiale. Il faut cependant remarquer

que cela ne peut se faire qu'après un nombre assez élevé (ordre de 100) de pas de temps sous peine de recréer des problèmes de convergence. Il faut donc attendre que la physique (prises de contact...) se soit stabilisée.

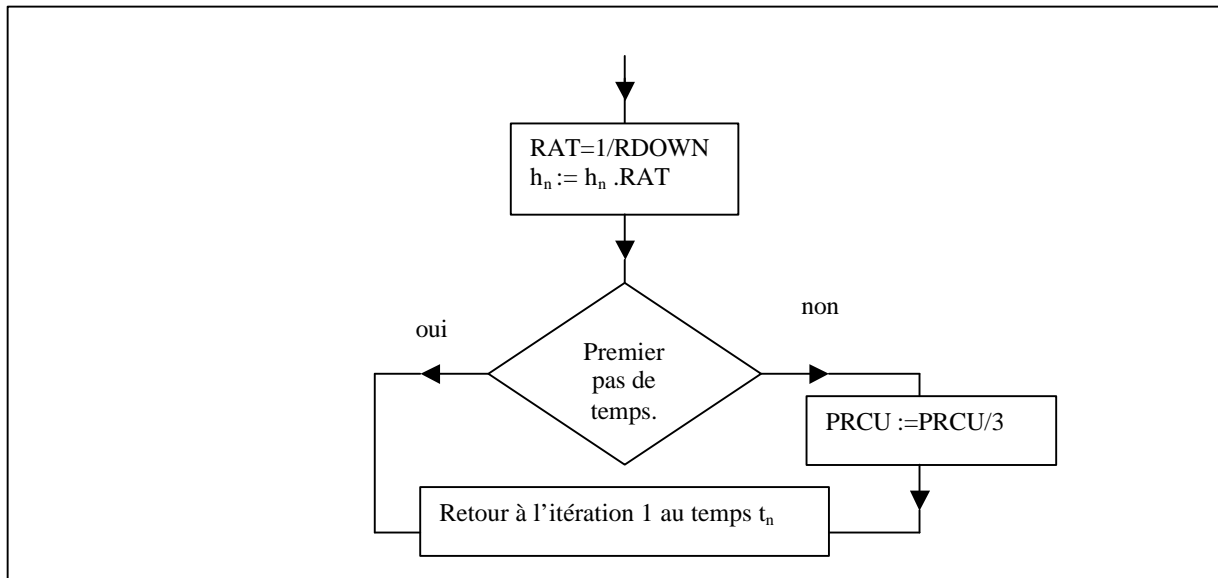


Figure 14 : Description de la boîte 1.

## 5.2. Les itérations ont convergé (boîte 2).

Si les itérations ont convergé, il faut s'assurer que l'intégration s'est faite avec suffisamment de précision. Cette précision s'évalue en considérant le rapport entre l'erreur calculée au §4.2 et la précision voulue PRCU. Trois possibilités se présentent :

- L'erreur obtenue est trop grande et la durée du pas de temps doit être réduite. Nous considérons l'erreur comme étant trop grande si elle est supérieure à  $PRCU/2$ .
- L'erreur est trop petite, l'intégration pourrait se faire avec une bonne précision en travaillant avec des pas plus grands. Une limite SEUIL est fixée, sous laquelle le pas de temps est considéré comme étant trop petit.
- L'erreur appartient à l'intervalle  $[PRCU/2 ; SEUIL]$ . La durée du pas de temps est alors idéale.

Nous obtenons alors le schéma de décision de la Figure 15.

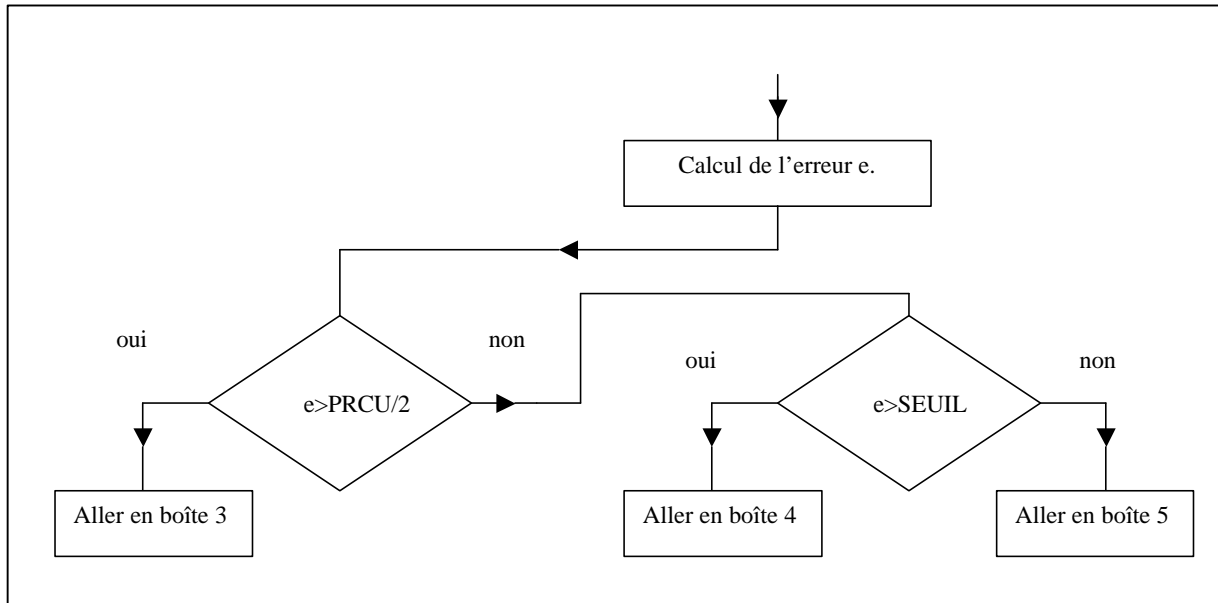


Figure 15 : Description de la boîte 2.

### 5.2.1. L'erreur est trop grande (boîte 3).

Quand l'erreur d'intégration est supérieure à l'erreur recherchée ( $PRCU/2$ ), la taille du pas de temps doit être réduite. Cependant il faut s'assurer que la variation d'erreur provient bien d'une perte de précision due à un changement de l'évolution de la physique du problème et que cette variation persiste pour plusieurs pas.

Afin de s'assurer que la variation d'erreur provient bien d'une variation de la physique du problème, nous introduisons un compteur. Si l'erreur est un certain nombre de fois (CO) d'affilée supérieure à  $PRCU/2$ , alors la taille du pas de temps est réduite, sinon elle est gardée constante. Une valeur de CO égale à 3 donne des résultats satisfaisants pour l'ensemble des problèmes. L'erreur prise en compte pour calculer le nouveau pas de temps est alors l'erreur maximale des CO itérations (ERRO). ICO est l'index de ce compteur.

L'introduction de ce compteur a le désavantage d'empêcher une variation rapide de la durée du pas de temps en cas de variation brusque de la physique du problème (comme l'apparition d'un contact à haute vitesse). Nous posons donc une limite au rapport erreur sur tolérance ( $ERR/PRCU$ ) au-delà de laquelle le pas de temps est immédiatement réduit. Cette limite est prise égale à l'unité. De plus si ce rapport dépasse une autre limite (REJL), la taille du pas de temps est réduite mais le pas de temps est rejeté afin de garantir une certaine précision. La valeur du seuil REJL égale 1.5 garanti une bonne précision. Pour le premier pas de temps elle est prise égale à 1 par sécurité. Dans ces deux cas il ne faut pas oublier de réinitialiser le compteur ICO et l'erreur maximale ERRO à zéros.

La variation du pas de temps obéit toujours à une loi du type (3.10), c'est à dire

$$h_{n+1} = h_n \left( \frac{2e}{PRCU} \right)^{1/h}$$
 avec  $PRCU/2$  la valeur de l'erreur que l'on cherche à obtenir. En

effet quel que soit le schéma d'intégration, un mouvement linéaire obéit à la relation (3.1) avec  $h \in [2,3]$ . Cependant en non linéaire la valeur de 0 ne peut être prédite. Nous prenons donc  $0 < 2$  quand le pas de temps doit être réduit afin de s'assurer qu'il le sera assez.

La Figure 16 illustre le schéma de décision pour une erreur trop grande.

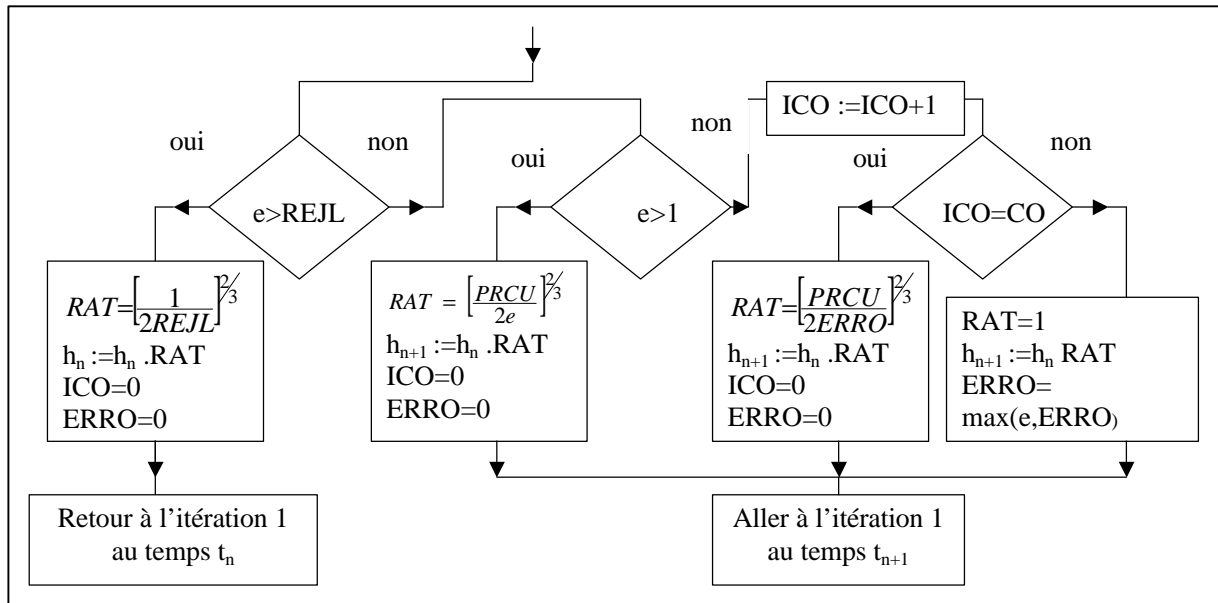


Figure 16 : Description de la boîte 3.

### 5.2.2. L'erreur est dans le bon intervalle (boîte 4).

Dans ce cas la durée du pas de temps n'est pas modifiée, et il vient le schéma trivial de la Figure 17.

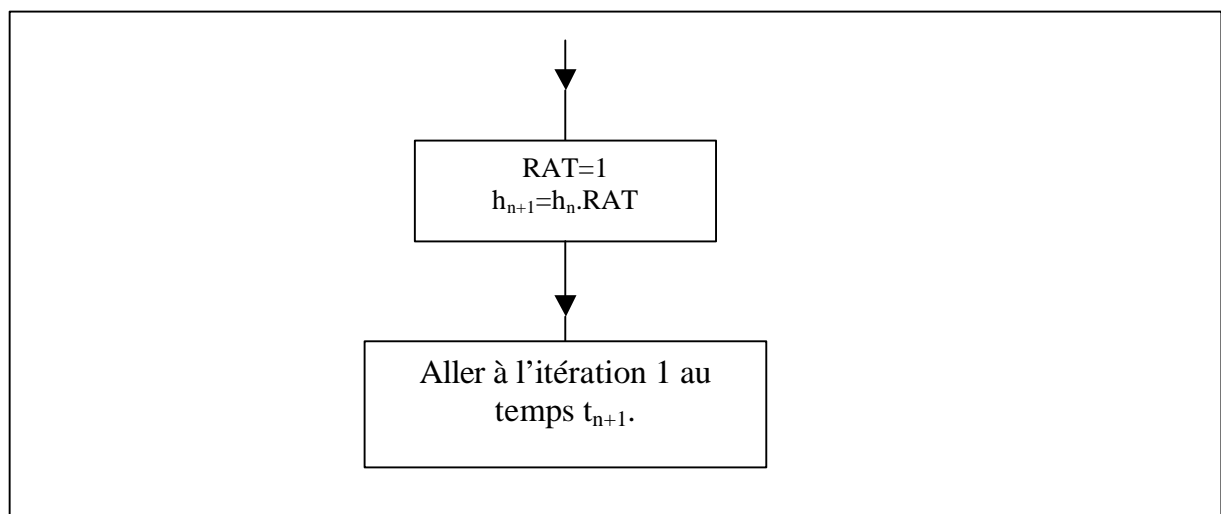


Figure 17 : Description de la boîte 4.



### 5.2.3. L'erreur est trop petite (boîte 5).

Le pas de temps n'est pas directement augmenté. Nous vérifions que si l'erreur est inférieure à la limite SEUIL multiplié par PRCU, cela est dû à un adoucissement de la physique du problème. Un nouveau compteur est alors introduit. Si pendant CT pas consécutifs, l'erreur reste inférieure au seuil, alors le pas de temps est augmenté.

L'erreur prise en considération pour se fixer la durée du nouveau pas est l'erreur maximale (ERRT) des CT derniers pas. Nous utilisons une loi du type (3.10), c'est à dire :

$$h_{n+1} = h_n \left( \frac{2e}{PRCU} \right)^{-\frac{1}{h}}$$

avec PRCU/2 la valeur de l'erreur désirée. Cependant, nous prenons  $0 < h$  afin de ne pas augmenter exagérément le pas de temps. ICT est l'index de ce compteur.

L'introduction d'un compteur avant d'augmenter le pas de temps peut ralentir la vitesse d'augmentation du pas dans le cas où rien ne justifie de travailler avec un petit pas (comme pour le cas de la barre élastique avant le contact et loin après le contact (§4.3.1)). Dès lors si le pas de temps augmente plusieurs fois de suite sans jamais être réduit, nous augmentons progressivement la valeur SEUIL en le multipliant par DUT1 et diminuons CT. Afin de tenir compte du cas où l'erreur est nulle, nous limitons l'erreur à SEUIL/10. Les valeurs initiales de CT et de SEUIL respectivement égales à 5 et 1/16 permettent de garantir une bonne précision en ne pénalisant pas le temps CPU. Le paramètre DUT1 peut être pris égal à 1.3.

Le schéma est illustré à la Figure 18.

## 5.3. Compléments des boîtes 1 à 5.

Les valeurs des paramètres ICO, ICT, ERRO et ERRT doivent être réinitialisées à leur valeur initiale quand le schéma passe par une boîte qui n'est pas propre au paramètre. Ainsi les paramètres ICO et ERRO doivent être ramenés à zéro si le schéma passe par la boîte 1, 4 ou 5. Il en va de même pour les paramètres ICT et ERRT si le schéma passe par la boîte 1, 3 ou 4. Les paramètres SEUIL et CT doivent être ramenés à respectivement 1/16 et 5 si le schéma passe par la boîte 1 ou 3. Si l'erreur appartient à l'intervalle  $[PRCU \cdot SEUIL ; PRCU/2]$ , ces paramètres gardent leurs valeurs sinon un adoucissement physique du problème n'est jamais détecté.

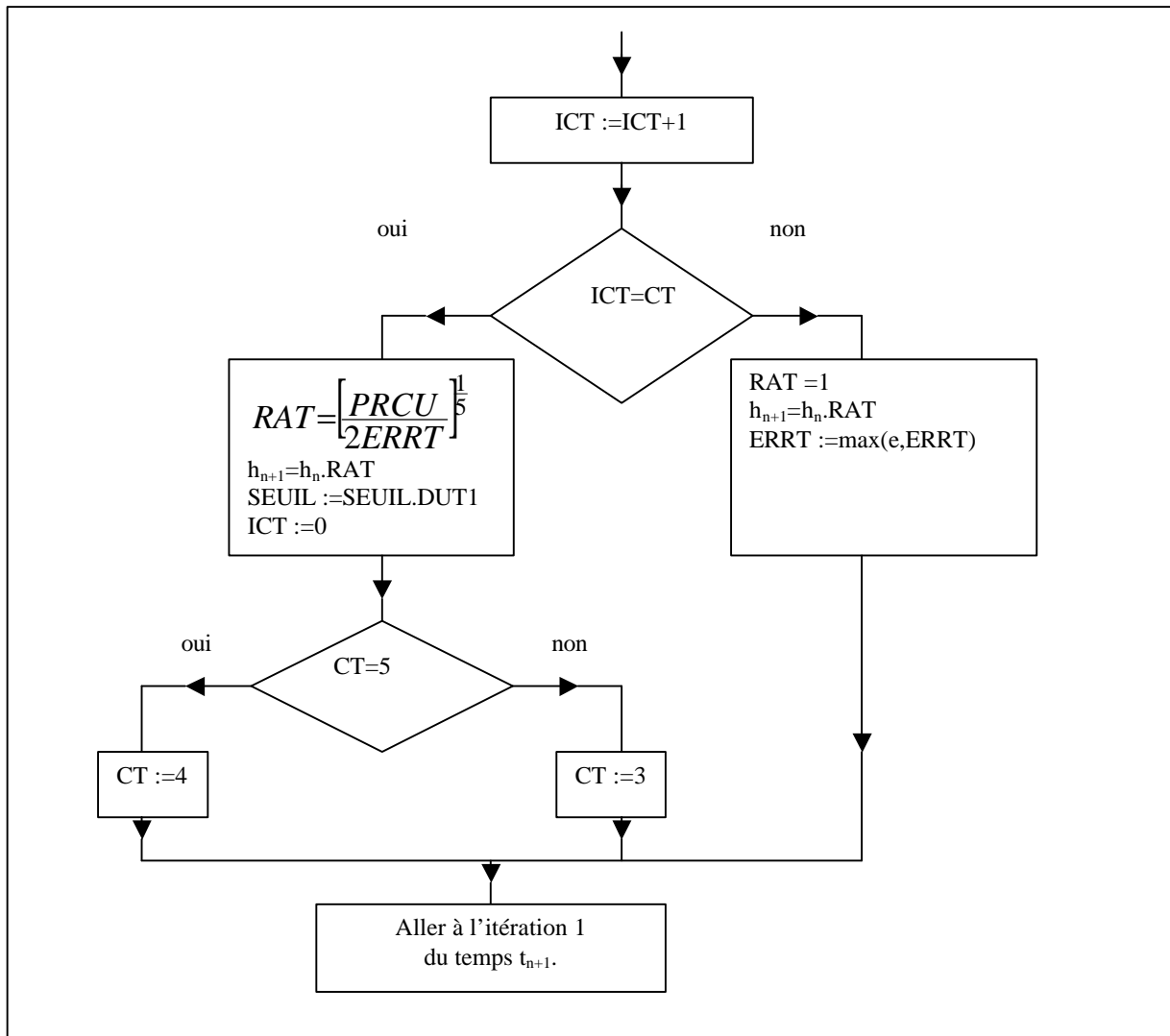


Figure 18 : Description de la boîte 5.

## **6. Applications pour des problèmes de grandes transformations.**

L'algorithme proposé au §5 va être appliqué pour différents cas tests et pour plusieurs schémas d'intégration implicite.

Nous nous plaçons dans le cadre général des grandes déformations afin de prouver la généralité de l'algorithme. L'erreur peut être calculée par  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  ou  $e_4$ . Quel que soit le schéma d'intégration ou le choix de l'erreur d'intégration, la tolérance de l'erreur d'intégration PRCU de départ est prise égale à 0.001 (sauf pour le calcul par  $e_3$  où il est pris égal à 0.003 afin de garder le nombre de pas de temps environ constant pour les quatre erreurs). Le fait que la tolérance PRCU puisse être prise toujours égale à la même valeur, quel que soit le schéma d'intégration et quel que soit le problème, montre que les valeurs d'adimensionnalisations étaient correctes et que l'erreur calculée est bien physique.

Dans chaque cas nous comparons les résultats obtenus avec ceux provenant de la gestion du pas exposée par PONTHOT [XI]. Cette gestion (appelée « opti ») se base sur le nombre d'itérations du pas précédent pour calculer la valeur du nouveau pas. Si le nombre d'itérations est 0 (pas de correction), le pas de temps est multiplié par 1.4, si le nombre d'itérations est 1 ou 2, le pas de temps est multiplié par 1.25. Dans le cas où le nombre d'itérations est 3 ou 4, le pas est gardé constant et si le nombre d'itérations est supérieur à 4 alors le pas de temps est divisé par la racine carrée de la différence entre le nombre d'itérations et 4 ( $\sqrt{iter - 4}$ ). Le but poursuivi par ce schéma est de converger à chaque pas de temps en 3 ou 4 itérations. La durée du pas de temps est alors supposée être suffisamment petite pour amener la convergence des itérations avec une certaine précision d'intégration. Si le pas converge en moins de 3 itérations, la durée du pas de temps est augmentée pour diminuer le temps CPU.

### **6.1. La barre élastique.**

Il s'agit de la barre décrite au §4.3.1. Elle est maintenant calculée par la méthode du pas de temps automatique. Nous comparons les résultats obtenus pour les quatre calculs de l'erreur d'intégration et par la méthode « opti » (choix de  $h$  selon le nombre d'itérations du pas précédent).

La Figure 19 donne le profil de la vitesse au point qui rentre en contact avec le nœud. La méthode « opti » ne donne pas assez de points pour représenter les deux « cassures » de vitesse et ne donne de vitesse constante à aucun des deux paliers.

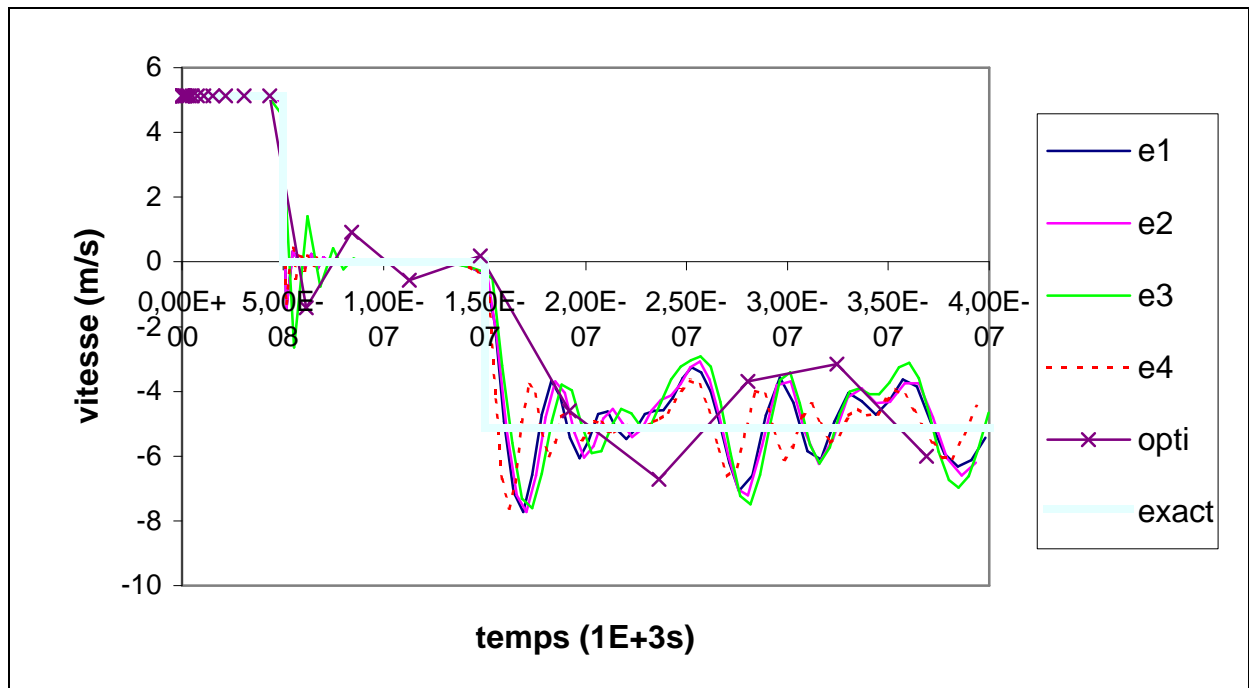


Figure 19 : Vitesse de la barre élastique par pas automatiques.

La Figure 20 compare les coûts des calculs. La méthode opti est la moins chère et les quatre autres méthodes donnent des solutions et des coûts proches. L'avantage du calcul par la méthode de l'erreur d'intégration est de mesurer une grandeur pour y adapter le pas de temps. Ceci explique pourquoi le profil de vitesse obtenu par la méthode « opti » est moins proche de la réalité.

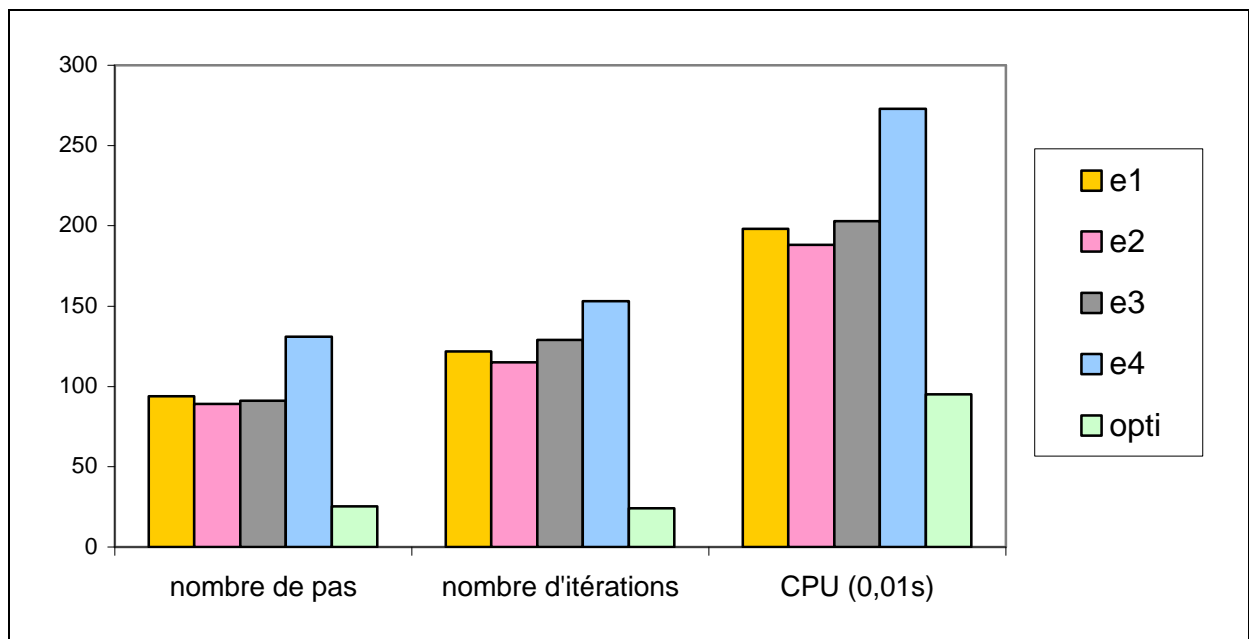


Figure 20 : Coût du calcul de la barre élastique.

## 6.2. La barre de Taylor.

Il s'agit de la barre décrite au §4.3.2. Ne disposant pas de solution analytique, les résultats sont comparés à un résultat de référence. Cette référence est obtenue pour un calcul avec un pas de temps fixe choisi petit ( $1.7E-7s$ ). Le schéma d'intégration est le SMG et nous comparons les déformées en  $t=8E-5s$ .

La Figure 22 montre les déformations et les contraintes de Von-Mises obtenues pour les différents calculs. L'écart entre les contraintes de la configuration de référence et celles obtenues par la méthode « opti » est de 5%. Cet écart est de 2.5% si le calcul se fait en passant par l'erreur d'intégration. La carte de déformée est semblable dans tous les cas. Le coût des calculs est illustré Figure 21.

Le coût en temps CPU du calcul par les méthodes e1 e2 et e3 est de 15 à 30% (65% pour e4) supérieur à celui de la méthode « opti ». Cependant il faut noter que le nombre d'itérations n'est que de 10 % supérieur. Si le nombre de degrés de liberté était plus important, une plus grosse partie du temps CPU viendrait du calcul de la matrice d'itération. Le coût deviendrait alors proportionnel au nombre d'itération et la méthode de calcul par l'erreur d'intégration serait plus rentable.

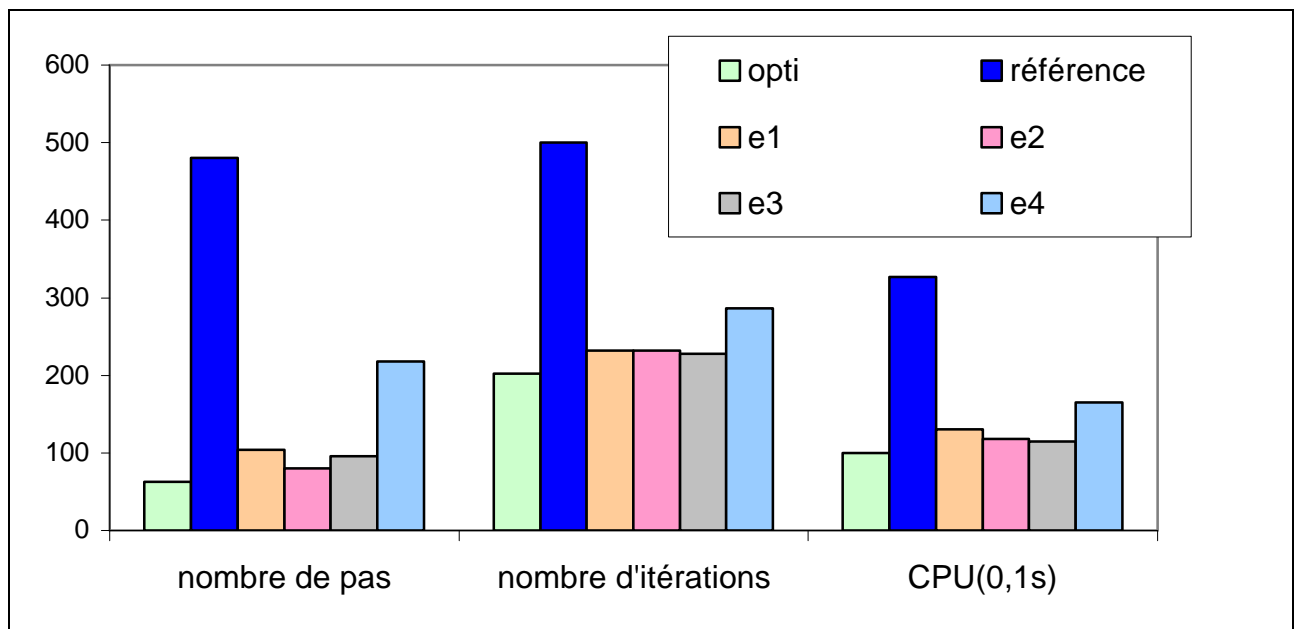


Figure 21 : Comparaison des coûts de la barre de Taylor.

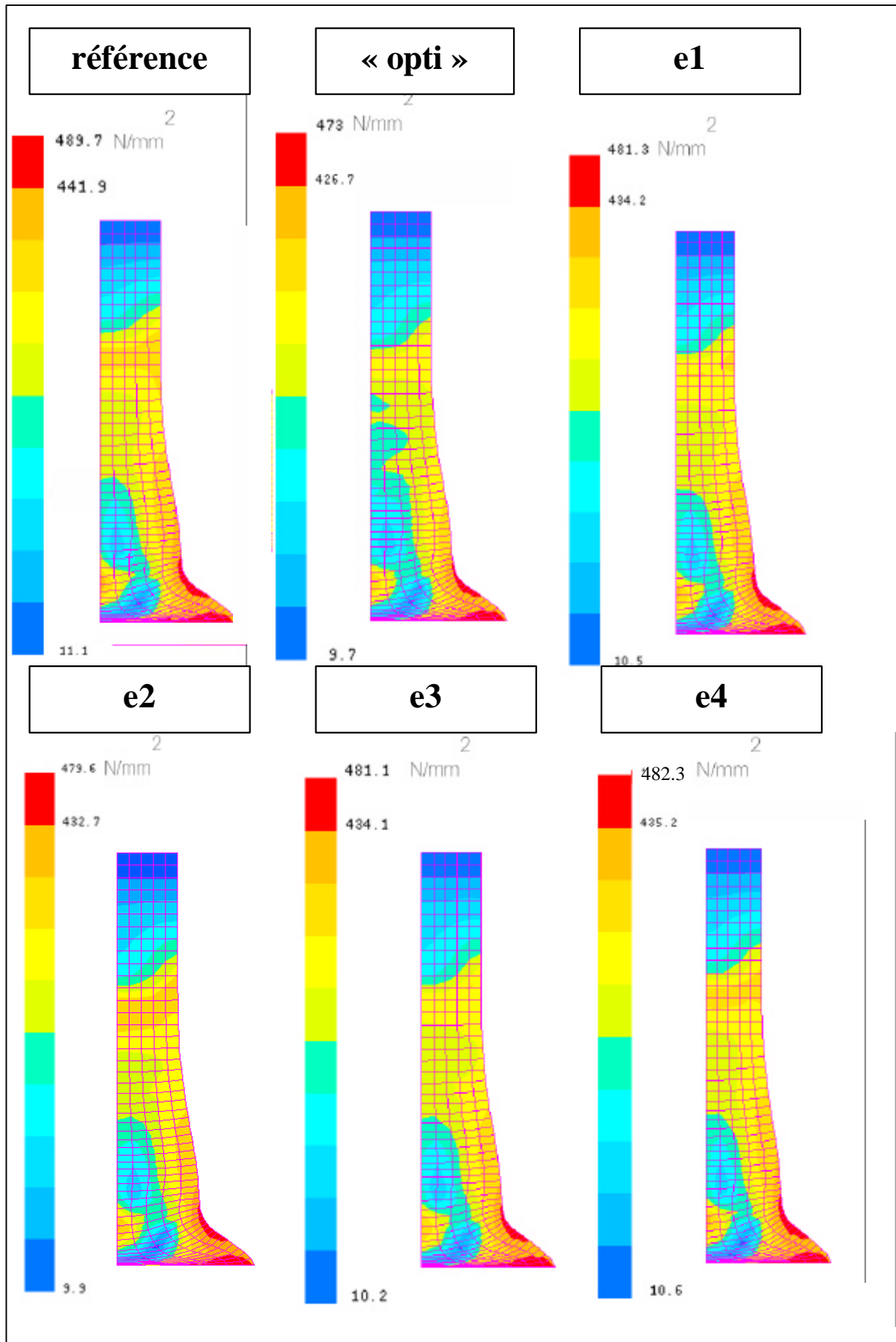


Figure 22 : Déformée et contraintes de Von-Mises de la barre de Taylor.

### 6.3. L'amortisseur.

Il s'agit de l'amortisseur défini au §4.3.3 Le schéma d'intégration est de CH. Comme pour le cas de la barre de Taylor, aucune solution analytique n'existe. Nous comparons donc les résultats avec ceux obtenus pour un pas de temps petit ( $1.27E-6s$ ).

La Figure 24 montre que les résultats obtenus sont de même qualité pour toutes les méthodes.

La méthode « opti » est la moins chère (Figure 23). Vient ensuite le calcul par e3 qui coûte 35 % d'itérations et de temps CPU en plus. Le calcul par e1, e2 ou e4 demande 75% d'itération et de temps CPU en plus.

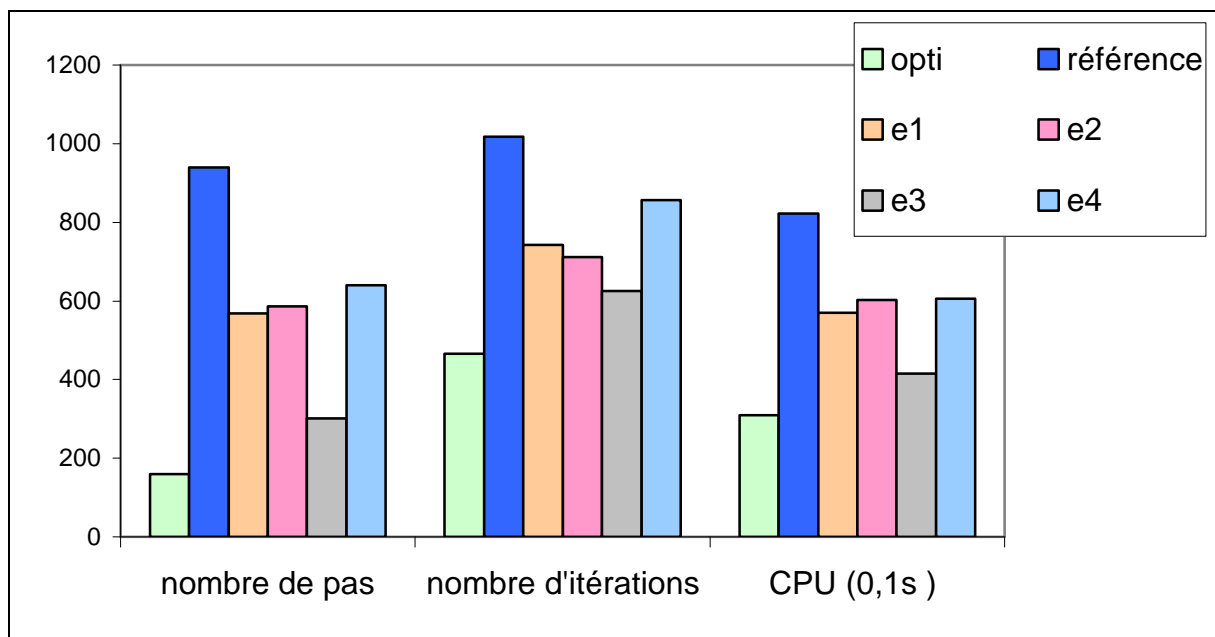


Figure 23 : Coût des calculs de l'amortisseur.

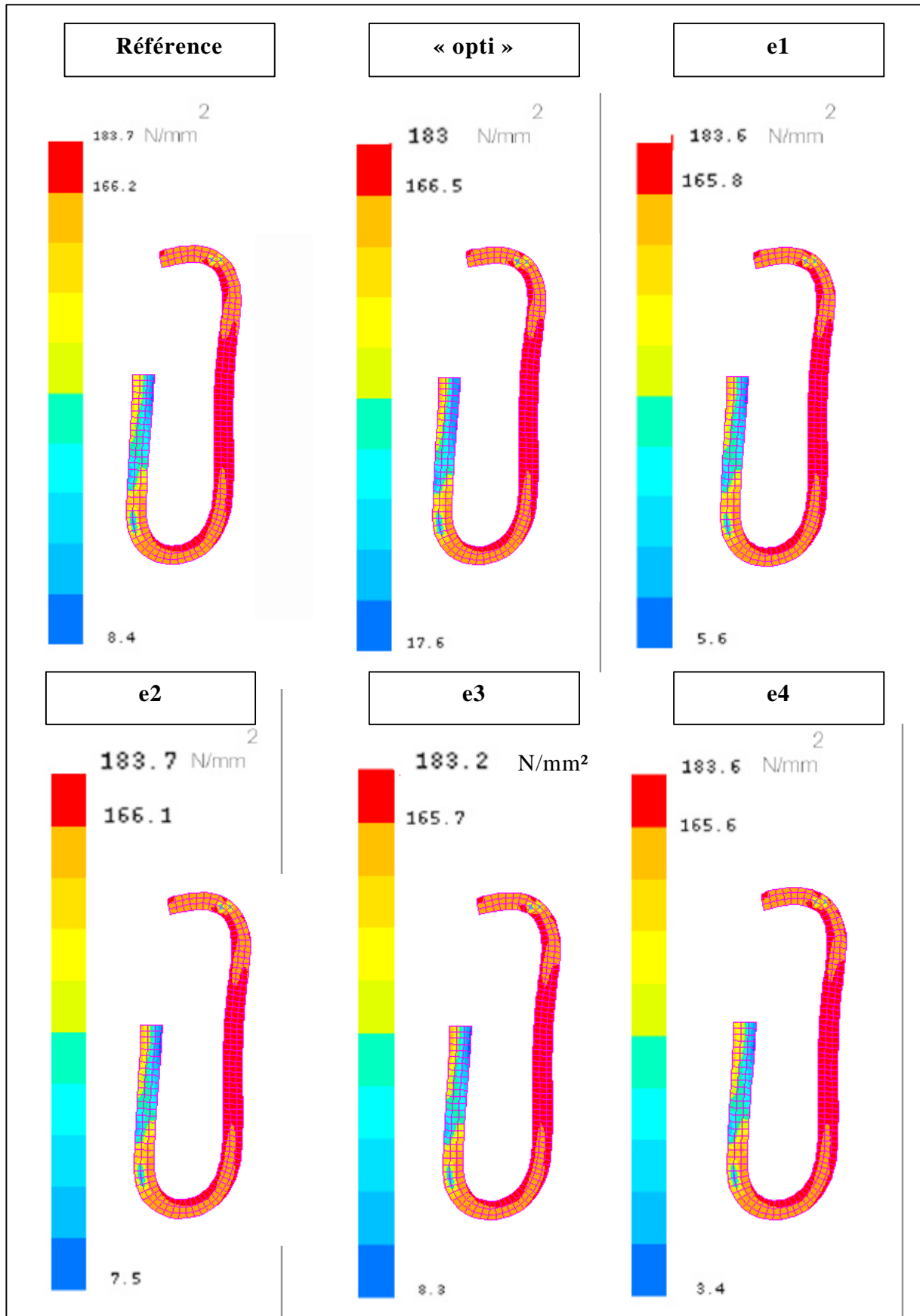


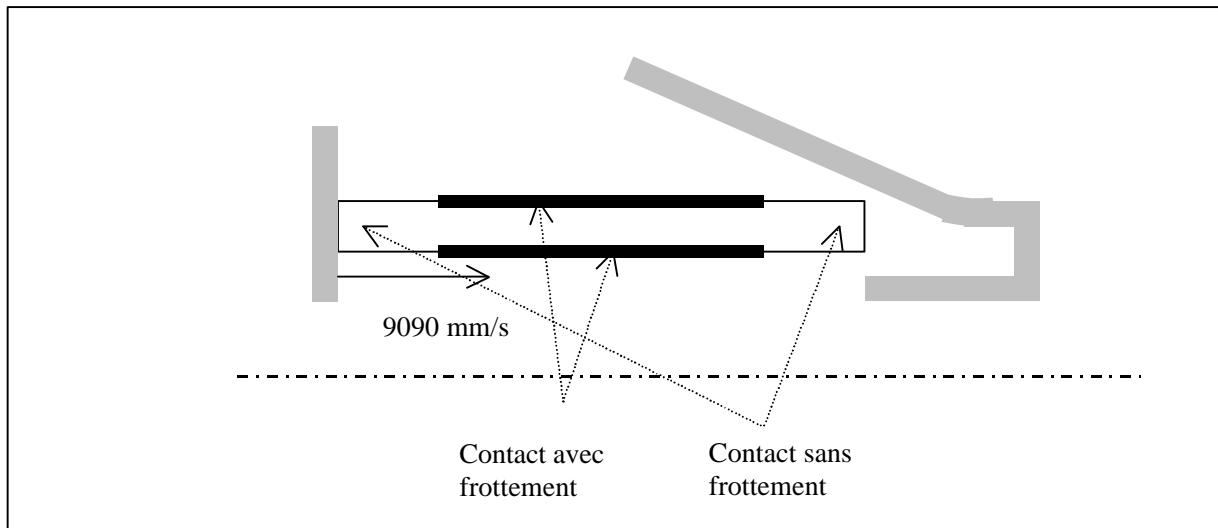
Figure 24 : Déformée et contraintes de Von-Mises de l'amortisseur.



## **Le cylindre en flambement.**

Il s'agit d'un cylindre creux de rayon interne égal à 13.5 mm, de rayon externe égal à 15.875 mm et de longueur égale à 180 mm. Le matériau a les propriétés suivantes :  $\Delta = 7850 \text{ kg/m}^3$ ,  $E=210000 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu=0.3$ , limite élastique initiale  $=700 \text{ N/mm}^2$  et coefficient d'écroutissage  $=808 \text{ N/mm}^2$ .

Le bord supérieur du cylindre subit un déplacement de 100 mm en un temps  $=1.1\text{e-}2\text{s}$  à vitesse constante et le bord inférieur rencontre une matrice rigide (Figure 25). Le contact avec cette matrice se fait sans frottement. Le cylindre entre en flambement et un côté du cylindre se replie pour entrer en contact avec lui-même. Ces contacts se font avec un frottement de Coulomb de  $\mu=0.15$ .



**Figure 25 : Schéma du cylindre en flambement.**

Le schéma d'intégration est CH avec  $\forall_M = -0.87$  et il y a remaillage au cours des calculs. Pour ce problème, la principale difficulté est le calcul de la prise de contact lors de la déformation des côtés du cylindre. Le pas de temps doit être suffisamment petit pour permettre la convergence quelle que soit l'erreur d'intégration ou le nombre d'itérations du pas précédent. Le fait de diviser la valeur de l'erreur de référence (PRCU) si l'algorithme rencontre des problèmes de convergence va permettre d'avoir un pas de temps optimum. Les résultats obtenus par les méthodes « opti » et par le calcul de l'erreur d'intégration sont comparés à une méthode à pas fixe choisi petit ( $3\text{E-}7 \text{ s}$ ).

La Figure 26 montre que les résultats obtenus pour toutes les méthodes sont comparables. Par e1 et e2 il y a un écart de 2% avec la solution de référence. De plus deux boucles se touchent uniquement pour ces erreurs. Cet écart est de 1% par « opti » et de 0.1% par e3 et e4. Ceci est expliqué par le fait que les méthodes e3 et e4 ont travaillé avec un pas de temps un rien inférieur à celui pour e1 et e2.

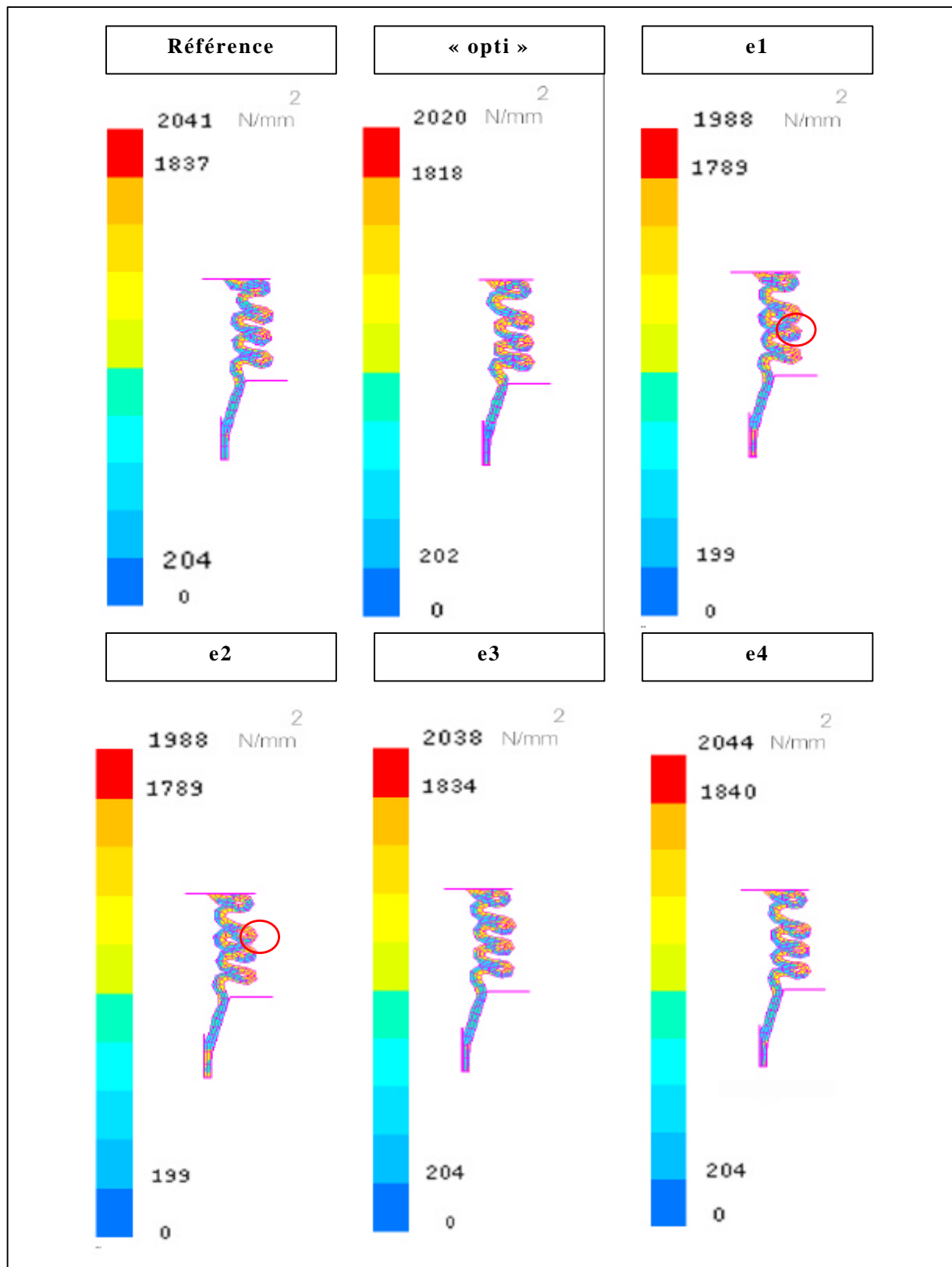


Figure 26 : Déformées et contraintes de Von-Mises du cylindre en flambement.

La Figure 27 montre que la gestion du pas de temps qui se base sur l'erreur d'intégration permet de travailler avec un pas de temps qui permet la convergence. En effet, le nombre d'itérations est pratiquement identique au nombre de pas de temps. La convergence est donc très rapide. Par la méthode « opti », quand le pas converge avec une seule itération par pas de temps, la durée du pas de temps est augmentée ce qui ne permet plus de converger au pas suivant. Le nombre d'itérations est alors cinq à six fois plus grand que par la méthode de l'erreur d'intégration et le temps CPU quatre à cinq fois plus grand.

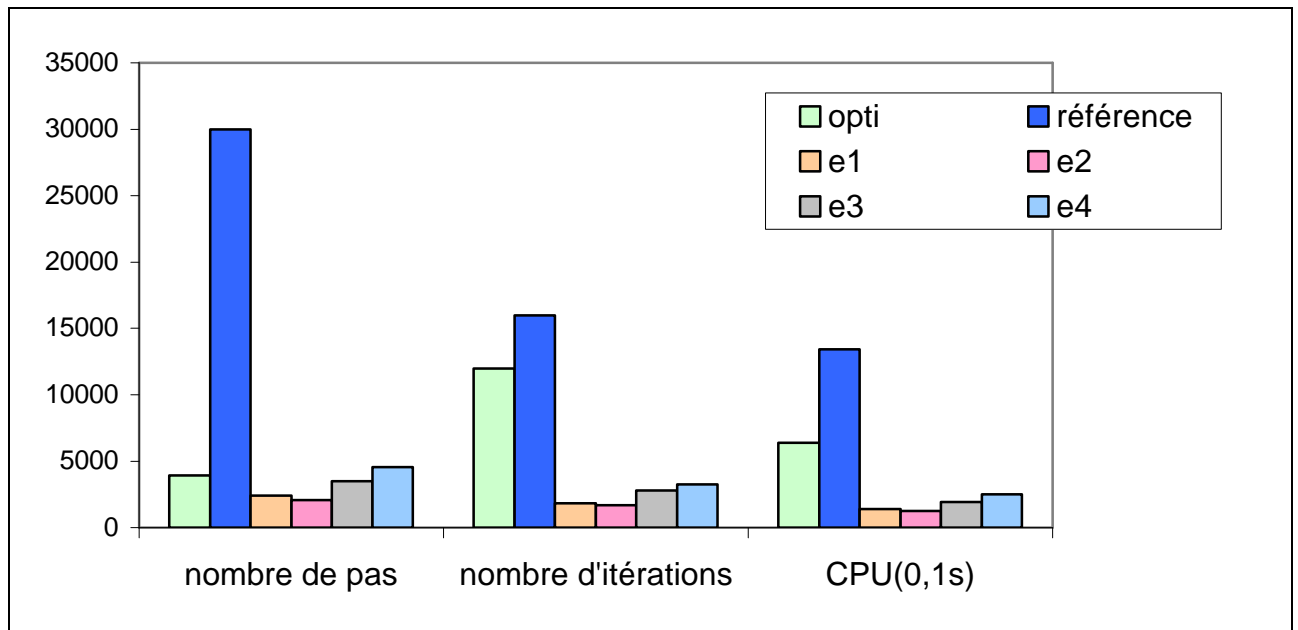


Figure 27 : Coûts des calculs du cylindre en flambement.

## **Comparaisons des méthodes.**

Dans les différents cas analysés, la méthode proposée donne de bons résultats aussi bien sur la qualité des résultats obtenus que sur le temps CPU nécessaire. Le choix de la méthode du calcul de l'erreur d'intégration n'est pas évident. En effet, les quatre calculs proposés se basent sur l'erreur du développement de Taylor. Dès lors les résultats obtenus sont comparables. Le calcul par e4 est un rien plus sévère car il prend l'erreur maximale pour tous les degrés de liberté et pas une moyenne comme les autres (dans le cas de la barre élastique, c'est la méthode qui a permis de mieux représenter le palier des vitesses (§6.1)). Il permet donc de mieux tenir compte de variations locales mais le coût en terme de temps CPU est un peu plus élevé (entre 10 et 25%). Le calcul par la méthode e3 permet d'obtenir une meilleure précision ou un coût plus faible (10%) que les méthodes e1 et e2. Les méthodes e1 et e2 passent par les coordonnées modales. Le principal avantage est leur étude théorique plus rigoureuse dans le cas linéaire. En non-linéaire cet avantage est perdu et les méthodes présentent le désavantage de devoir calculer les forces d'inerties.

La méthode « opti » a présenté deux désavantages. Le premier est, que dans le cas de la barre élastique, le nombre de pas de temps ne permettait pas de représenter convenablement les paliers de vitesses (§6.1). La gestion proposée a permis de mieux le représenter. De plus en cas de nécessité il suffit de réduire le paramètre de tolérance PRCU pour mieux s'approcher de la solution exacte. Le second est dans le cas du cylindre en flambement où le nombre d'itérations du pas précédent n'était plus une bonne image de la taille maximale du pas nécessaire à la convergence. Le temps CPU était alors prohibitif (300% supérieur).

En conclusion, nous retiendrons que le calcul de l'erreur par e4 est plus sévère et plus onéreux alors que le calcul par e3 constitue un bon compromis précision-prix.

## **7. Applications à des cas industriels « quasi-linéaires ».**

Après avoir testé des cas dans le cadre général des grandes déformations, la gestion du pas de temps proposée au §5 est validée dans le contexte plus particulier de problèmes industriels quasi linéaires. Ces problèmes ont été obtenus lors d'un stage à la SNECMA. Pour des raisons de confidentialité, nous ne sommes pas autorisés à révéler certaines précisions concernant les problèmes étudiés. Ainsi, les cas tests ne sont pas décrit et seuls les courbes obtenues sont représentées en omettant les graduations. Pour les mêmes raisons, le nombre de degrés de liberté utilisés n'est pas révélé.

Le programme utilisé est le module MECANO de SAMCEF qui résout les équations par un schéma HHT. Ces problèmes consistent en la modélisation en trois dimensions de parties de moteurs ou de moteurs complets. L'étude dynamique est pertinente afin de modéliser des phénomènes comme la perte d'aube, l'excitation d'un mode propre par des phénomènes extérieurs ou d'autres situations où la connaissance de la réponse transitoire est nécessaire pour le dimensionnement des pièces. La plupart des éléments sont linéaires. Ils sont connectés entre-eux par des éléments de raideur non linéaire. Dans de telles situations, le nombre d'éléments non linéaires des matrices d'itération (2.10) et (2.15) est de quelques uns pour un nombre total d'éléments important. Le système peut donc être qualifié de « quasi-linéaire ». Le nombre de degrés de liberté étant important, l'opération la plus coûteuse est l'inversion de la matrice d'itération (2.11). Cependant, le système étant quasi linéaire cette opération peut-être supprimée du schéma d'intégration sous certaines conditions. Soit le système  $b(x)=0$ , il est résolu par la méthode de Newton Raphson :

$$\begin{cases} a(x) = \frac{\partial b(x)}{\partial x} \\ \Delta x = -\frac{b(x_i)}{a(x_i)} \end{cases} \quad (7.1)$$

Il peut être résolu en recalculant  $a(x_i)$  à chaque itération ou bien en gardant  $a(x_0)$  de la première itération. En effet comme le montre la Figure 28 , la convergence du système (7.1) peut encore être possible en utilisant une matrice inversée approchée  $a_0$ . Dans ce cas, le nombre d'itérations nécessaire à la convergence est plus important mais ces itérations sont moins onéreuses. Ce schéma s'appelle le schéma de Newton-Raphson modifié.

Dans un premier temps, nous expliquons la gestion du pas de temps et de la remise à jour existant actuellement dans MECANO. Ensuite nous proposons une gestion de la remise à jour de la matrice d'itération plus performante. Le critère de détection de divergences des itérations est aussi étudié. Enfin, nous comparons les résultats obtenus sur des cas industriels en utilisant les nouveaux schémas de remise à jour et de gestion du pas de temps et les anciens.

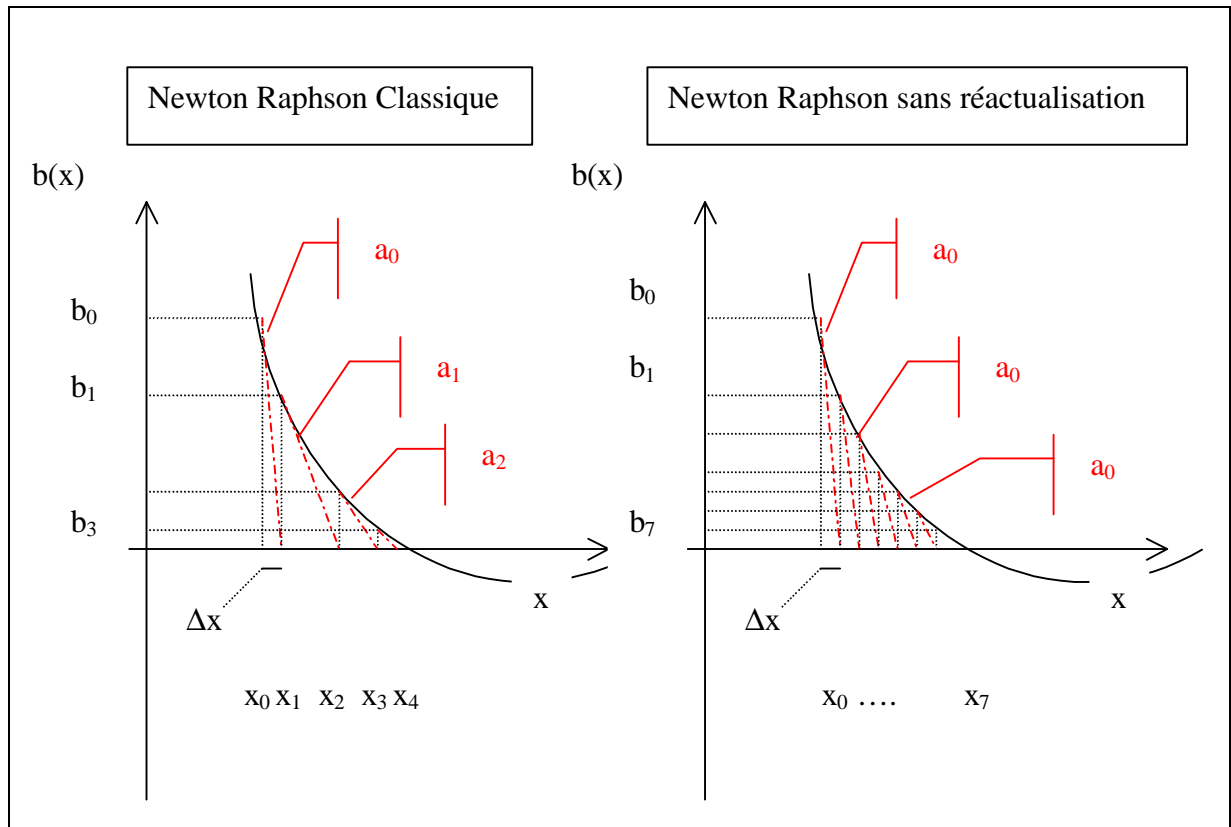


Figure 28 : Influence de la remise à jour ou non de la matrice d'itération.

## 7.1. Description des schémas existants.

Le schéma, existant dans MECANO, de gestion de la durée du pas de temps ainsi que le schéma du choix de réactualisation de la matrice d'itération sont décrits.

### 7.1.1. Schéma de gestion de la durée du pas de temps.

Le calcul de l'erreur d'intégration se fait par la relation (4.13). La détermination du pas de temps se fait comme cela est proposé dans [II] (Figure 1). Le problème de cette gestion est qu'elle réagit mal aux non linéarités car le pas de temps peut être modifié pour des raisons ne provenant pas d'une modification de la physiques du phénomène ou pour des modifications qui ne sont pas durables dans le temps. C'est la raison pour laquelle nous avons introduit un compteur dans la proposition de gestion du pas de temps (§5). Les conséquences des variations inutiles de la durée du pas de temps sont :

- Une augmentation du nombre de pas rejetés et donc du temps CPU.
- Des variations trop fréquentes de la durée du pas de temps et donc obligation de remettre à jour la matrice d'itération (§7.1.2).

### 7.1.2. Schéma de la remise à jour de la matrice d'itération.

Actuellement le passage d'un schéma à l'autre est conditionné par l'utilisateur. Un seuil de relaxation (PRCK) sur le résidu de l'équation d'intégration (TESF est le résidu adimensionné de la relation (2.11)) est défini. Des numéros d'itération (IT1K, IT2K, IT3K) sélectionne le passage d'un schéma à l'autre. Le schéma est de Newton Raphson pur si :

$$\begin{aligned} &TESF > PRCK \\ &ITER = IT1K \text{ ou } ITER = IT2K + n.IT3K \end{aligned}$$

sont vérifiés simultanément (ITER est le n° de l'itération,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Sinon le schéma est de Newton-Raphson modifié. Par exemple pour des valeurs de paramètres IT1K, IT2K, IT3K, PRCK et PRCK valant respectivement : 2, 4, 2, 1E-4, 1E-5, il y a remise à jour aux itérations 2, 4, 6, 8, 10, 12 ... tant que TESH reste supérieur à 1E-4. Une fois que TESH devient inférieur à 1E-4, il n'y a plus remise à jour. Quand TESH devient inférieur à 1E-5, alors les itérations ont convergées.

La matrice d'itération est en plus recalculée pour la première itération d'un pas de temps car elle dépend de la valeur du pas de temps (2.9). A l'heure actuelle, MECANO n'est pas capable de ne pas la recalculer (et de ne pas l'inverser) si le pas de temps n'a pas changé.

Dans le cas où ITER atteint le nombre maximal d'itérations toléré (ITMA) le pas est rejeté parce qu'il n'y a pas eu de convergence et le pas est divisé par RDOWN.

Les problèmes liés à ce schéma sont :

- L'utilisateur doit définir les itérations pour lesquelles il y a remise à jour ou non de la matrice d'itération. Le choix de la remise à jour ne peut donc évoluer au cours du temps et il ne dépend donc pas de l'évolution de la physique du problème.
- Le fait de remettre à jour la matrice d'itération à chaque première itération même si la durée du pas n'a pas évolué coûte.
- Le critère de non-convergence des itérations ne tient pas compte de la vitesse de convergence. Un problème peut converger en beaucoup d'itérations alors qu'il peut diverger après deux itérations. Le nombre d'itérations n'est donc pas un critère de convergence pertinent.

### 7.2. Proposition d'un schéma de choix de remise à jour de la matrice d'itération.

La réactualisation de la matrice d'itération est l'opération la plus coûteuse lors de l'intégration numérique. Elle doit donc être évitée autant que possible. Cependant dans le cas de problèmes non linéaires, instationnaires (vitesse de rotation du moteur qui varie) ou quand des contraintes cinématiques existent, la remise à jour de la matrice devient nécessaire pour avoir une convergence des itérations de corrections (§2.2).

Il s'avère donc intéressant de choisir si la réactualisation doit avoir lieu en fonction des pas précédents et même des itérations précédentes.

### 7.2.1. Recherche d'un critère de réactualisation.

Ce critère doit tenir compte de deux points :

- Le fait de ne pas réactualiser systématiquement doit préserver la convergence du problème.
- Le fait de ne pas réactualiser doit s'accompagner d'un gain de temps. Pour certains problèmes (fortement non linéaires et de petite taille), le nombre d'itération augmente quand il n'y a pas de réactualisation et ces itérations ne sont pas beaucoup moins chères.

Nous avons vu au §2.2 que les itérations s'arrêtent si le résidu de l'équation d'équilibre devient inférieur à un seuil ( $TESF < PRCR$ ). Or l'évaluation de  $TESF$  fait intervenir les forces extérieures et d'inerties. Ces dernières ne dépendent pas de la matrice d'itération. Nous pouvons donc dire, si  $TESF$  devient inférieur à  $PRCR$ , que le problème a convergé. Cela reste vrai dans le cas où la matrice d'itération n'aurait pas été modifiée alors que des paramètres (vitesse de rotation ...) ont changé. Il est donc possible d'utiliser l'évolution de  $TESF$  pour savoir quand la réactualisation s'avère nécessaire.

Le gain de temps réalisé quand la réactualisation n'a pas lieu dépend du système. La différence de temps de calcul dépend de la taille du système mais aussi de l'organisation des matrices (une matrice bande est plus facilement inversée qu'une matrice pleine de même taille). Nous pouvons donc utiliser la valeur  $NT$  (nombre de ddl) et le rapport entre le temps de calcul avec réactualisation et sans réactualisation calculé au cours du problème.

### 7.2.2. Algorithme développé.

L'algorithme proposé garde l'ancienne formulation : la réactualisation a alors lieu pour les itérations  $IT1K, IT2K+n, IT3K, n=0,1,2,\dots$

Dans le cas où le problème est supposé pouvoir se passer d'une réactualisation à chaque itération, une nouvelle gestion est proposée en parallèle. Cette dernière n'intervient donc que si  $IT1K$  est choisi grand ( $>15$ ).

Cette nouvelle formulation a nécessité les modifications suivantes :

- La première itération subit une réactualisation si  $h$  a changé,
- Une valeur de référence est introduite :
$$VALREF1 = \frac{CPU\_d'une\_itération\_avec\_réactualisation}{CPU\_d'une\_itération\_sans\_réactualisation} \in [2;15]$$
- Une seconde valeur de référence est introduite :
$$VALREF2 = \frac{NT}{1000} \in [\max(5, VALREF1); \max(VALREF1, 15)]$$
- Si après  $VALREF1$  itérations la convergence n'a pas eu lieu, nous forçons la réactualisation à chaque itération. Ainsi nous sommes sûrs que le fait de ne pas réactualiser ne coûte pas plus cher que réactualiser à chaque itération.



Détermination automatique de la taille du pas de temps pour les schémas implicites en dynamique non-linéaire.

Chapitre 7 : Applications à des cas industriels « quasi-linéaires ».

---

- Entre l'itération 1 et l'itération VALREF1, la réactualisation n'a lieu que si le TESF n'est pas multiplié par une valeur ( $<1$ ) inférieure à  $RAPRES=VALREF1/10 \in [0.75;0.95]$ .
- Si pour un numéro d'itération (ITER) inférieur à VALREF1 la remise à jour a été nécessaire, elle est forcée pour les itérations suivantes.
- Si lors de la dernière itération du pas précédent, une réactualisation a lieu, une réactualisation a aussi lieu lors de la première itération du pas suivant. La convergence du pas précédent étant difficile (car ayant nécessité des réactualisations), il peut s'avérer profitable de commencer le pas suivant par une nouvelle réactualisation.
- Si après 5 itérations avec remise à jour, TESF n'a pas diminué de 2, nous considérons que le problème diverge et le pas est divisé par le facteur de réduction (RDOWN).

Remarques :

- Au début du problème, VALREF1 vaut VALREF2, le temps de pouvoir calculer le rapport des temps CPU.
- Une réactualisation de la matrice d'itération se fait en deux itérations. Lors de la première elle est recalculée, lors de la seconde itération elle est inversée. Lorsque la réactualisation est choisie, elle intervient donc avec une itération de retard. Pour éviter ce phénomène une modification de la structure du programme serait nécessaire.
- Afin de rendre cette proposition d'algorithme plus efficace, la modification suivante est souhaitable : Si après une itération sans remise à jour TESF n'a pas été multiplié par une valeur ( $<1$ ) inférieure à RAPRES, l'itération suivante se fait bien entendu avec remise à jour, mais au lieu de repartir des dernières valeurs obtenues, il serait souhaitables de repartir des pénultièmes valeurs obtenues (c'est à dire celles à partir desquelles l'itération sans remise à jour a été effectuée). Un certain nombre d'itérations avec remise à jour serait alors évité. Cette modification n'a pas été apportée à MECANO car elle nécessite la modification de la structure mentionnée à la remarque précédente. Pour contourner ce problème, nous avons introduit la commande suivante. Si les premières itérations sont faites sans remise à jour, et que le résidu n'a pas diminué de RAPRES, alors le pas est rejeté puis repris avec une remise à jour à l'itération 1. Il va de soi que ce n'est pas la manière la plus belle de programmer.
- Les deux propositions précédentes permettraient de réduire le temps de calcul de manière appréciable dans certains cas. En effet elles permettraient d'éviter des divergences qui sont toujours coûteuses (plusieurs itérations avec remise à jour).
- Nous avons été contraints d'introduire plusieurs paramètres arbitraires (intervalle de variation de RAPRES, VALREF1, VALREF2, nombre (5) d'itérations qui n'amènent pas la diminution (0.5) de TESF voulue avant rejet du pas...). Le choix plus ou moins arbitraire de ces valeurs se justifie par le fait qu'elles assurent le fonctionnement de l'algorithme pour des cas divers. Il est tentant lors d'un test sur un problème d'optimiser ces valeurs afin d'obtenir le CPU minimum, mais cette optimisation ne peut se faire qu'à posteriori ce que nous cherchons justement à éviter en proposant un algorithme qui gère lui-même les divers paramètres.

Les avantages de cette proposition sont :

- L'utilisateur ne doit plus choisir des paramètres pour gérer la remise à jour.
- Le critère de remise à jour permet d'éviter nombre de remises à jour inutiles tout en conservant la convergence des itérations.
- Le critère de divergence implémenté évite le calcul d'itérations inutiles.

Deux problèmes industriels vont être calculés grâce aux gestions proposées. Nous comparerons les résultats obtenus avec ceux obtenus par les anciennes gestions. Les problèmes étant quasi-linéaires, l'erreur utilisée est l'erreur  $e_2$  (4.13). Pour des raisons pratiques nous n'avons pas pu implémenter l'erreur  $e_3$  dans MECANO. Etant donné le caractère quasi-linéaire des cas tests, l'erreur  $e_2$  convient. Cependant il serait intéressant de pouvoir refaire ces calculs avec l'erreur  $e_3$  afin de généraliser son utilisation au domaine quasi-linéaire.

### **7.3. Calculs de cas industriels.**

Nous allons valider les gestions du pas de temps et de la remise à jour de la matrice d'itération sur des problèmes industriels. Pour ce faire nous comparons les résultats obtenus pour les deux algorithmes suivants :

- Ancienne gestion du pas et de la remise à jour.
- Nouvelle gestion du pas et de la remise à jour.

Dans ces deux cas, les paramètres ( tolérance de l'erreur d'intégration « PRCU », tolérance sur le résidu des itérations « PRCR »...) sont identiques.

#### **7.3.1. Cas 1**

Pour des raisons de confidentialités, nous ne sommes pas autorisés à révéler le problème étudié ainsi que les valeurs des courbes obtenues. Cependant nous pouvons préciser qu'il ne s'agit pas d'un cas trivial à un degré de liberté. La modélisation comprend plusieurs milliers de degrés de libertés, les forces sont instationnaires et des phénomènes non-linéaires apparaissent au cours du temps.

##### **7.3.1.a. Comparaisons des résultats.**

Les paramètres du calcul sont :

- Ancienne gestion : tolérance de l'erreur d'intégration « PRCU »  $1e-3$ , tolérance du résidu des itérations « PRCR »  $1e-3$ , seuil de relaxation de remise à jour de la matrice d'itération « PRCK »  $1e-3$ , itération de remise à jour « IT1K » 3, « IT2K » 6 et « IT3K » 1.

Détermination automatique de la taille du pas de temps pour les schémas implicites en dynamique non-linéaire.

Chapitre 7 : Applications à des cas industriels « quasi-linéaires ».

- Nouvelle gestion : PRCU 1e-3, PRCR 1e-3, PRCK 1e-3, IT1K 100, même pas initial que l'ancienne gestion.

Il faut remarquer que pour l'ancienne gestion, il y a une réactualisation pour chaque première itération. Le choix IT1K 3 est nécessaire à la convergence des premiers pas de temps (ainsi que la durée du pas initial).

Les graphiques des déplacements (Figure 29) et du bilan d'énergie (Figure 30) indiquent que la qualité des solutions obtenues par les deux méthodes est la même. Le bilan d'énergie est un bon indicateur de la précision de l'intégration. Il consiste à évaluer au cours du temps la différence entre la somme des énergies cinétiques et potentielles et le travail de forces extérieures ( $B = E_{cin} + E_{pot} - W_{ext}$ ). Si ce bilan est positif, l'intégration numérique a créé de l'énergie. Cela correspond à un schéma d'intégration instable. Si ce bilan d'énergie est négatif, il y a eu dissipation d'énergie au cours du temps. Cette dissipation peut provenir de phénomènes physiques (plastification...) ou du schéma d'intégration numérique. Dans le cas présent la différence entre des courbes du bilan d'énergie ne provient que des effets numériques. La différence doit donc être aussi réduite que possible. La perte d'énergie de la nouvelle méthode reste faible (0.5%).

La nouvelle méthode est donc assez précise et le temps de calcul (Figure 31) a été réduit de 60%.

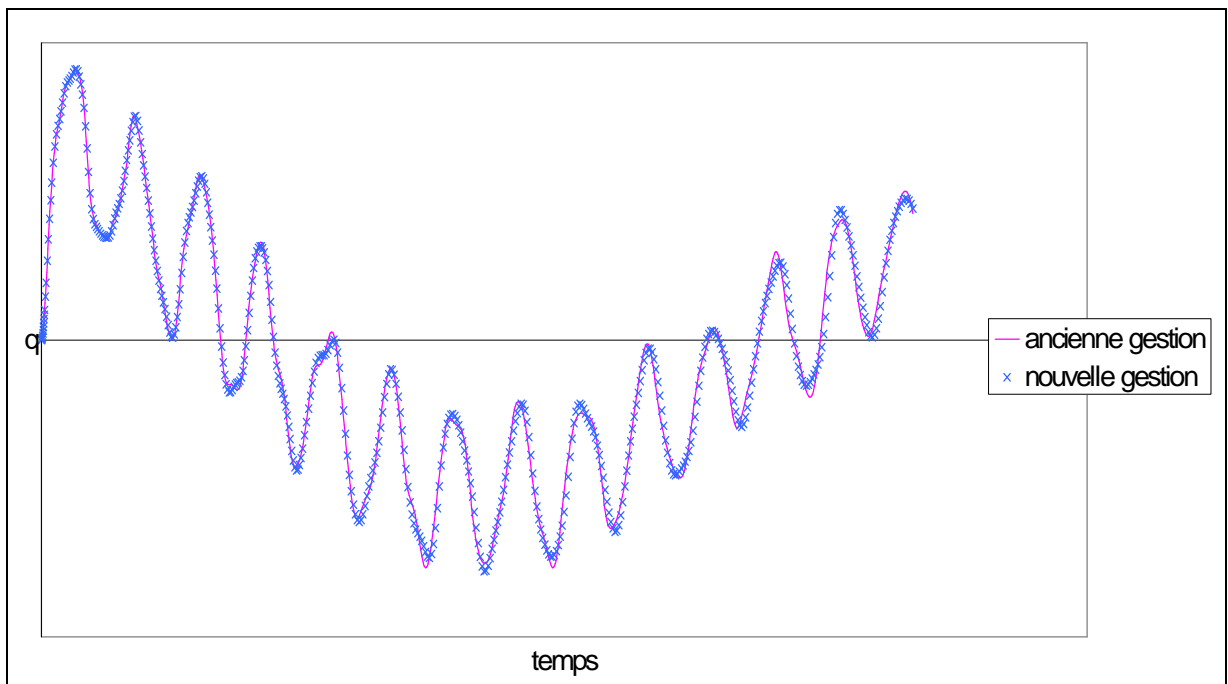


Figure 29 : Déplacements du cas 1.

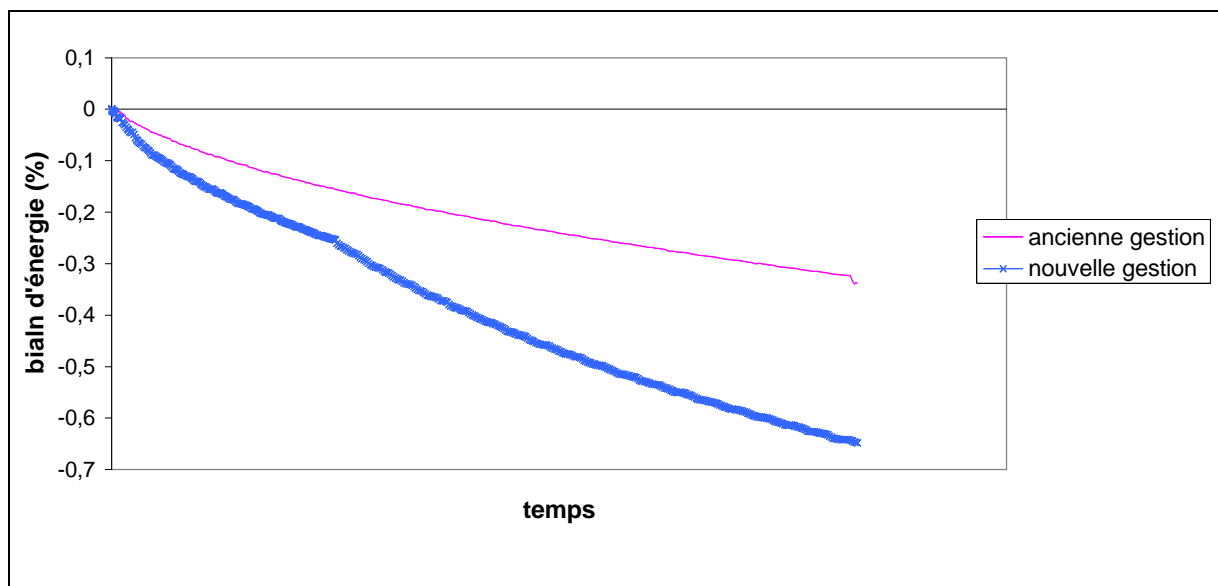


Figure 30 : Bilan d'énergie du cas 1.

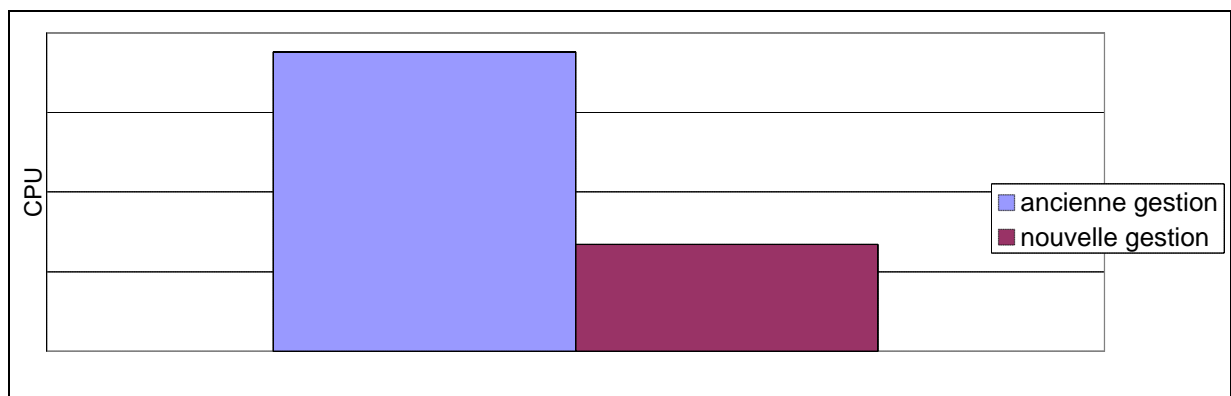


Figure 31 : Coût des calculs du cas 1.

### 7.3.2. Cas 2.

Pour des raisons de confidentialités, nous ne sommes pas autorisés à révéler le problème étudié ainsi que les valeurs des courbes obtenues. Toutefois, comme pour le cas 1, Le problème comporte plusieurs milliers de degrés de libertés, les forces sont instationnaires et des phénomènes non-linéaires apparaissent.

#### 7.3.2.a. Comparaisons des résultats.

Nous comparons l'ancienne gestion à la nouvelle gestion du pas de temps et de la réactualisation de la matrice d'itération.

Pour les deux problèmes nous avons les paramètres suivants : tolérance du résidu « PRCR »  $1e-4$ , tolérance de l'erreur d'intégration « PRCU »  $1e-3$ .

Détermination automatique de la taille du pas de temps pour les schémas implicites en dynamique non-linéaire.

#### Chapitre 7 : Applications à des cas industriels « quasi-linéaires ».

Pour la gestion automatique du pas de temps, les itérations de remise à jour de la matrice d'itération sont IT1K est pris égal à 3, IT2K à 5 et IT3K à 1. Le nombre maximum d'itération « ITMA » est 25. Ce sont ces paramètres qui amènent une convergence en un minimum de temps.

Les graphiques des efforts (Figure 32), (Figure 33) et des déplacements (Figure 34) obtenus par les deux calculs sont identiques. Le graphique de l'évolution de la durée du pas de temps (Figure 36) montre que le pas de temps se stabilise mieux grâce à la nouvelle gestion. En effet, des pics et des creux sont remplacés par des paliers. Cette stabilisation évite de devoir recalculer la matrice d'itération uniquement parce que le pas de temps a changé. Le gain de temps obtenu par la nouvelle gestion est de 40% (Figure 35).

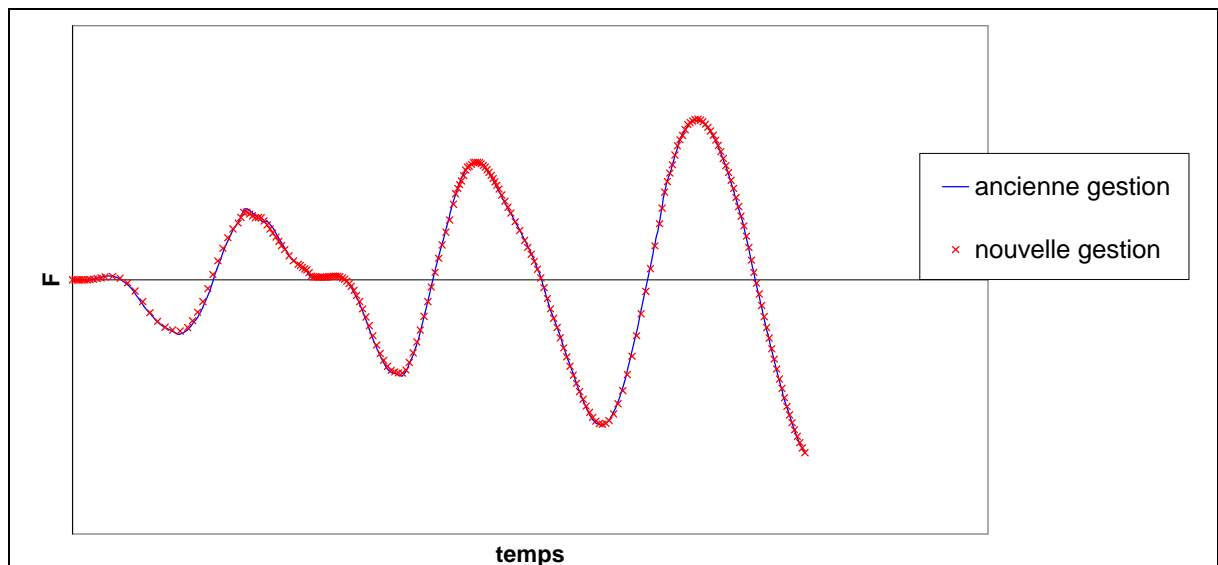


Figure 32 : Effort du cas 2.

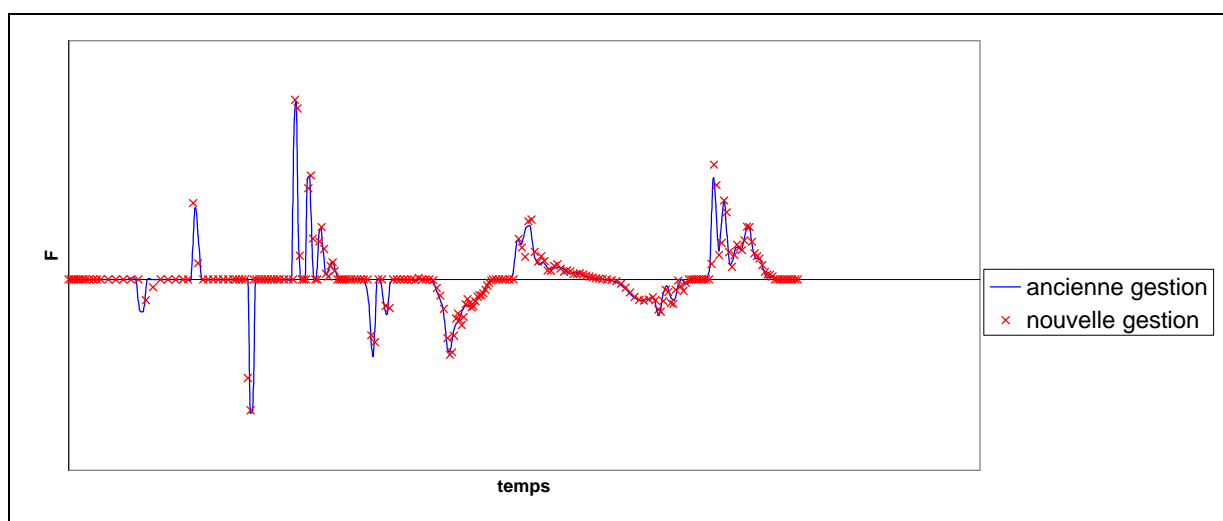


Figure 33 : Effort du cas 2.

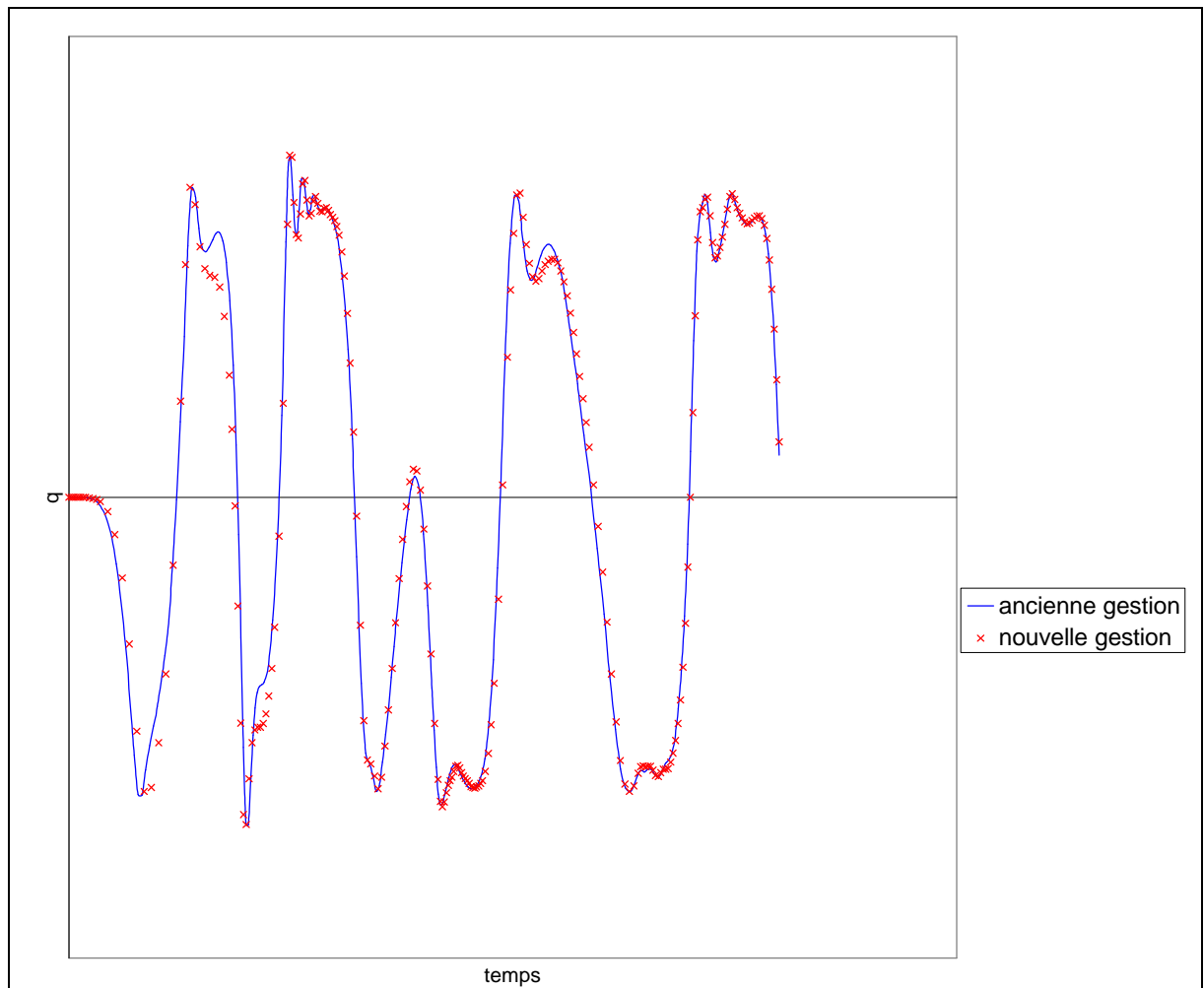


Figure 34 : Déplacement du cas 2.

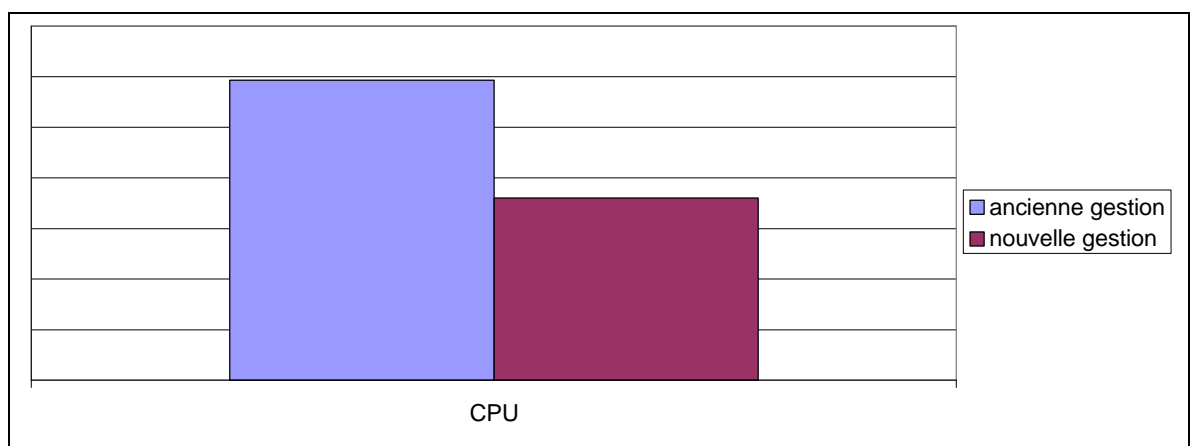


Figure 35 : Coût des calculs du cas 2.

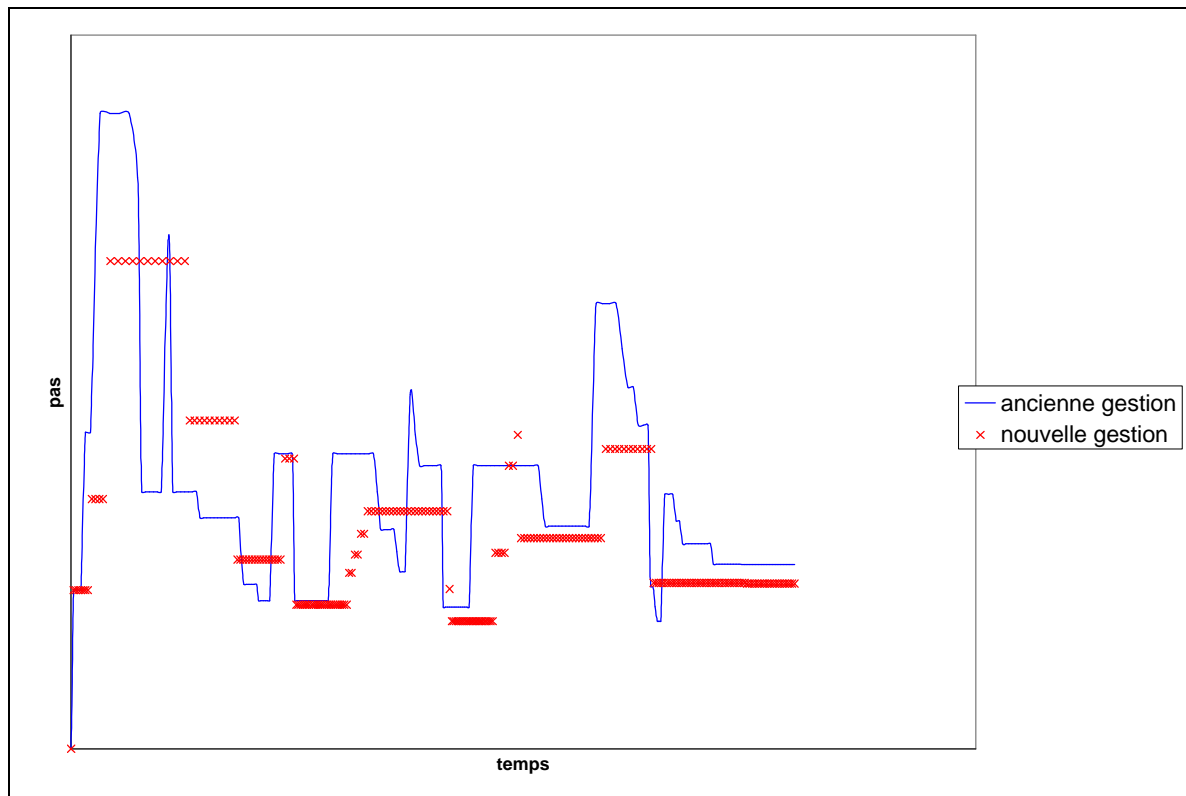


Figure 36 : Evolution du pas de temps du cas 2.

## **Conclusions.**

Dans un premier temps, une étude de l'erreur d'intégration a été effectuée. Nous avons rendu cette erreur indépendante du schéma d'intégration. Quatre estimateurs de l'erreur d'intégration ont été comparés. Nous avons montré que l'évolution de ces erreurs avec le temps correspondait bien à l'évolution de la physique du problème. Toutefois, en non-linéaire, les erreurs e3 et e4 sont apparues meilleurs indicateurs de cette évolution. L'erreur e4, plus sévère demandait un temps de calcul supérieur pour un faible gain de précision par rapport à l'erreur e3. Les erreurs e1 et e2 développées en linéaires utilisaient les forces d'inerties. Aucun avantage n'est apparu en non-linéaire où les temps de calcul sont plus grands et la précision moindre que pour une utilisation de e3. Par contre, lors de l'étude des cas quasi-linéaires industriels, l'erreur e2 a pu être utilisée avec succès.

Une gestion de la durée du pas de temps se basant sur la mesure de l'erreur d'intégration a été ensuite présentée. Cette gestion se base sur le schéma proposé par GERADIN [II]. Il a été amélioré afin que les modifications du pas de temps n'interviennent que pour des modifications physiques et durables du problème. La durée du pas de temps permet d'intégrer les équations du mouvement avec une précision requise par l'utilisateur. Afin de pouvoir converger quand de fortes non-linéarités sont présentes, le pas de temps est choisi volontairement petit. Ce choix se fait grâce à deux critères. Le premier est : pour augmenter la durée du pas de temps nous devons absolument être sûrs que le problème n'est plus dans une phase de choc. Nous avons donc introduit un système de compteur. Le deuxième est : si malgré le compteur le pas de temps augmentait trop que pour pouvoir converger, alors le paramètre de précision qui conditionne l'erreur d'intégration acceptable est diminué. Quand le problème redevient quasi-linéaire, les problèmes de convergence sont moindres, et la durée du pas de temps peut augmenter très rapidement afin de diminuer le temps CPU.

Cette gestion a été validée dans le cadre général des grandes déformations. Elle a permis de garantir une précision de l'intégration des équations tout en limitant le temps CPU. Ensuite, des problèmes industriels quasi-linéaires ont été calculés grâce à cette gestion afin de mettre en évidence son efficacité dans des cas plus particuliers. Pour ces problèmes un schéma de décision de remise à jour de la matrice d'itération et un nouveau critère de convergence ont été développés. Les nouvelles méthodes ont permis de résoudre les problèmes en un temps nettement inférieur (ordre de 50%) avec l'avantage de demander moins de paramètres utilisateurs. Il faut remarquer que le nouveau schéma de gestion du pas de temps a facilité l'utilisation du critère de réactualisation de la matrice d'itération. En effet, l'algorithme de gestion du pas de temps proposé permet de conserver la durée du pas de temps constante sur des intervalles de temps assez long. La matrice d'itération ne doit dès lors pas être réactualisée uniquement parce que la durée du pas de temps a été modifiée.



## **Perspectives.**

L'erreur  $e_3$  peut être testée sur des cas quasi-linéaires afin de généraliser son utilisation.

Le critère de convergence des itérations développé au §7.2.2 peut être implémenté dans le cas général des grandes déformations. Il pourrait permettre un gain CPU pour des problèmes de plus grande dimension. De même, la proposition de gestion de la remise à jour de la matrice d'itération pourrait être étendue aux problèmes de grandes déformations. En effet quand les conditions de contacts ne se modifient plus, certaines itérations pourraient se faire sans remise à jour de la matrice d'itération. De plus cette gestion proposée peut-être modifiée en tenant comptes des remarques du §7.2.2. Ces remarques proposent de repartir des valeurs de l'itération précédente si une itération sans remise à jour n'a pas convergé.

Les problèmes d'emboutissage de tôles sont généralement résolus par des schémas explicites. Cependant une théorie implicite peut présenter l'avantage de nécessiter un temps CPU plus faible. Les codes d'emboutissage commencent donc à être développés en implicite. Ces problèmes de mise à forme sont caractérisés par des forces d'inerties très faibles. Le problème est alors physiquement quasi-statique. Or l'algorithme de gestion développé se base sur une mesure de l'erreur obtenue à partir du saut d'accélération. Il serait donc intéressant de voir si la mesure du saut d'accélération reste pertinente quand les accélérations sont faibles. L'algorithme développé pourrait ainsi s'appliquer dans des problèmes d'emboutissage.

## **Annexe 1 : Erreurs aux ordres supérieurs**

L'erreur du développement en série de Taylor peut être calculée à l'ordre 5 pour les déplacements et à l'ordre 4 pour les vitesses. La valeur de référence pour un système linéaire à un degré de liberté est aussi calculée dans le cas du schéma HHT.

Il s'agit d'exprimer l'erreur et de calculer la différence entre la valeur d'un développement d'un ordre supérieur et la valeur calculée comme cela est proposé dans [V]. Les erreurs calculées sont la différence entre le déplacement de l'ordre supérieur et celui calculé, et la différence entre la vitesse de l'ordre supérieur et celle calculée.

$$\begin{cases} e_{dep,n+1} = q_{sup,n+1} - q_{n+1} \\ e_{vit,n+1} = \dot{q}_{sup,n+1} - \dot{q}_{n+1} \end{cases}$$

Nous allons calculer les valeurs de l'ordre supérieur à partir d'un développement en série de Taylor :

$$\begin{cases} q_{sup,n+1} \approx q_n + h \dot{q}_n + \frac{h^2}{2} \ddot{q}_n + \frac{h^3}{6} \dddot{q}_n + \frac{h^4}{24} \dots + O(h^5) \\ \dot{q}_{sup,n+1} \approx \dot{q}_n + h \ddot{q}_n + \frac{h^2}{2} \dddot{q}_n + \frac{h^3}{6} \dots + O(h^4) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \ddot{q}_n \approx \frac{\ddot{q}_{n+1} - \ddot{q}_{n-1}}{2h} + O(h^2) \\ \dddot{q}_n \approx \frac{\ddot{q}_{n+1} - 2\ddot{q}_n + \ddot{q}_{n-1}}{h^2} + O(h^2) \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} q_{sup,n+1} \approx q_n + h \dot{q}_n + h^2 \left[ -\frac{1}{24} \ddot{q}_{n-1} + \frac{5}{12} \ddot{q}_n + \frac{1}{8} \ddot{q}_{n+1} \right] + O(h^5) \\ \dot{q}_{sup,n+1} \approx \dot{q}_n + h \left[ -\frac{1}{12} \ddot{q}_{n-1} + \frac{2}{3} \ddot{q}_n + \frac{5}{8} \ddot{q}_{n+1} \right] + O(h^4) \end{cases}$$

Le schéma d'intégration étant le HHT, nous avons les valeurs calculées :

Détermination automatique de la taille du pas de temps pour les schémas implicites en dynamique non-linéaire.

Annexe 1 : Erreurs aux ordres supérieurs.

---

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + h \dot{q}_n + \frac{h^2}{2} \left[ (1 - 2\mathbf{b}) \ddot{q}_n + 2\mathbf{b} \ddot{q}_{n+1} \right] \\ \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \frac{h}{2} \left[ (1 - \mathbf{g}) \ddot{q}_n + \mathbf{g} \ddot{q}_{n+1} \right] \end{cases}$$

Nous avons alors les relations (3.4) :

$$\begin{cases} e_{dep,n+1} = \frac{h^2}{24} \left[ \ddot{q}_{n-1} + (2 - 24\mathbf{b}) \ddot{q}_n + (24\mathbf{b} - 3) \ddot{q}_{n+1} \right] + O(h^5) \\ e_{vit,n+1} = \frac{h}{12} \left[ \ddot{q}_{n-1} + (4 - 12\mathbf{g}) \ddot{q}_n + (12\mathbf{g} - 5) \ddot{q}_{n+1} \right] + O(h^4) \end{cases} \quad (A1.1)$$

Les équations (2.3) et (2.7) pour un système à un degré de liberté peuvent se résoudre par le système :

$$\begin{bmatrix} q_{n+1} \\ h\dot{q}_{n+1} \\ h^2\ddot{q}_{n+1} \end{bmatrix} = A(\Omega) \begin{bmatrix} q_n \\ h\dot{q}_n \\ h^2\ddot{q}_n \end{bmatrix} \quad (A1.2)$$

avec (2.5) adapté au schéma HHT:

$$\begin{cases} \Omega = \mathbf{w}.h \\ A(\Omega) = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} 1 + \mathbf{a}\mathbf{b}\Omega^2 & 1 & \frac{1}{2} - \mathbf{b} \\ -\mathbf{g}\Omega^2 & 1 - (1 + \mathbf{a})(\mathbf{g} - \mathbf{b})\Omega^2 & 1 - \mathbf{g} - (1 + \mathbf{a})(\frac{\mathbf{g}}{2} - \mathbf{b})\Omega^2 \\ -\Omega^2 & -(1 + \mathbf{a})\Omega^2 & -(1 + \mathbf{a})(\frac{1}{2} - \mathbf{b})\Omega^2 \end{bmatrix} \\ D = 1 + (1 + \mathbf{a})\mathbf{b}\Omega^2 \end{cases}$$

$\mathbf{a}$  est l'amortissement numérique,  $\mathbf{b}, \mathbf{g}$  sont deux paramètres dits de Newmark.

Exprimons l'erreur sur le déplacement au 5<sup>ème</sup> ordre (A1.1.a) pour un système à un degré de liberté. Les équations du système sont :

$$\ddot{q} + \mathbf{w}^2 q = 0 \quad q(t = 0) = q_0 \quad \Rightarrow \quad q(t) = q_0 \cos(\mathbf{w} t)$$

Détermination automatique de la taille du pas de temps pour les schémas implicites en dynamique non-linéaire.

Annexe 1 : Erreurs aux ordres supérieurs.

---

Grâce à (A1.2), il vient :

$$h^2 \ddot{q}_{n+1} = \frac{1}{D} [-\Omega^2 q_n - (1 + \mathbf{a})\Omega^2 h \dot{q}_n - (1 + \mathbf{a})(\frac{1}{2} - \mathbf{b})\Omega^2 h^2 \ddot{q}_n]$$

De la même manière les valeurs en  $t_n$  sont calculées en fonction des valeurs en  $t_{n-1}$  :

$$\begin{pmatrix} q_n \\ h \dot{q}_n \\ h^2 \ddot{q}_n \end{pmatrix} = A(\Omega) \begin{pmatrix} q_{n-1} \\ h \dot{q}_{n-1} \\ h^2 \ddot{q}_{n-1} \end{pmatrix} = A(\Omega) \begin{pmatrix} q_0 \cos(\mathbf{w} t) \\ -\Omega q_0 \sin(\mathbf{w} t) \\ -\Omega^2 h^2 \cos(\mathbf{w} t) \end{pmatrix}$$

Les trois accélérations nécessaires au calcul de (A1.1) valent :

$$\begin{aligned} h^2 \ddot{q}_{n-1} &= -\Omega^2 q_0 \cos(\mathbf{w} t) \\ h^2 \ddot{q}_n &= \frac{1}{D} \left\{ -\Omega^2 q_0 \cos(\mathbf{w} t) + (1 + \mathbf{a}) \Omega^3 q_0 \sin(\mathbf{w} t) + (1 + \mathbf{a})(\frac{1}{2} - \mathbf{b}) \Omega^4 q_0 \cos(\mathbf{w} t) \right\} \\ h^2 \ddot{q}_{n+1} &= \frac{1}{D} \left\{ -\frac{\Omega^2}{D} \left[ (1 + \mathbf{a}\mathbf{b}\Omega^2) q_0 \cos(\mathbf{w} t) - \Omega q_0 \sin(\mathbf{w} t) - (\frac{1}{2} - \mathbf{b}) \Omega^2 q_0 \cos(\mathbf{w} t) \right] \right. \\ &\quad \left. - (1 + \mathbf{a}) \frac{\Omega^2}{D} \left[ -\mathbf{g}\Omega^2 q_0 \cos(\mathbf{w} t) - [1 - (1 + \mathbf{a})(\mathbf{g} - \mathbf{b})\Omega^2] q_0 \sin(\mathbf{w} t) \right] \right. \\ &\quad \left. - (1 + \mathbf{a})(\frac{1}{2} - \mathbf{b}) \frac{\Omega^2}{D} \left[ -\Omega^2 q_0 \cos(\mathbf{w} t) + (1 + \mathbf{a}) \Omega^3 q_0 \sin(\mathbf{w} t) + (1 + \mathbf{a})(\frac{1}{2} - \mathbf{b}) \Omega^4 q_0 \cos(\mathbf{w} t) \right] \right\} \end{aligned}$$

En remplaçant ces trois expressions dans la formule (A1.1a), il vient :

$$e_{dep,n+1} = B q_0 \cos(\mathbf{w} t) + C q_0 \sin(\mathbf{w} t)$$

avec :

Détermination automatique de la taille du pas de temps pour les schémas implicites en dynamique non-linéaire.

Annexe 1 : Erreurs aux ordres supérieurs.

$$B = \frac{1}{24} \left\{ \begin{aligned} & \left[ -\Omega^2 + \frac{2-24b}{D} \left[ -\Omega^2 + (1+a)\left(\frac{1}{2} - b\right)\Omega^4 \right] \right. \\ & \left. + \frac{24b-3}{D} \left\{ -\frac{\Omega^2}{D} \left[ 1+ab\Omega^2 - \left(\frac{1}{2} - b\right)\Omega^2 \right] \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(1+a)\Omega^2}{D} \left[ -g\Omega^2 - \left[ 1-g - (1+a)\left(\frac{g}{2} - b\right)\Omega^2 \right] \Omega^2 \right] \right\} \right. \\ & \left. \left. - \frac{(1+a)\left(\frac{1}{2} - b\right)\Omega^2}{D} \left[ -\Omega^2 + (1+a)\left(\frac{1}{2} - b\right)\Omega^4 \right] \right] \right\} \\ C = \frac{1}{24} \left\{ \begin{aligned} & \frac{2-24b}{D} (1+a)\Omega^3 \\ & + \frac{24b-3}{D} \left[ \frac{\Omega^3}{D} + (1+a)\frac{\Omega^3}{D} [1 - (1+a)(g-b)\Omega^2] - (1+a)^2 \left(\frac{1}{2} - b\right) \frac{\Omega^5}{D} \right] \end{aligned} \right\}$$

Il reste maintenant à calculer  $\mathbf{e}(\Omega) = E \left[ \left| \frac{e_{dep,n+1}}{q_0} \right| \right]$  soit :

$$\mathbf{e}(\Omega) = \frac{E[e]}{|q_0|} = \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e dt}{|q_0|}$$

pour obtenir l'erreur moyenne adimensionnelle. L'intégrale effectuée, il vient :

$$\mathbf{e}(\Omega) = \frac{2}{p} \sqrt{B^2 + C^2} \quad (\text{A1.3})$$

En procédant de la même manière pour l'erreur sur les vitesses au 4<sup>ème</sup> ordre, mais en partant du système :

$$\ddot{q} + \mathbf{w}^2 q = 0 \quad q(t=0) = 0 \quad \dot{q}(t=0) = \dot{q}_0 \Rightarrow q(t) = \frac{\dot{q}_0}{\mathbf{w}} \sin(\mathbf{w} t)$$

nous arrivons à l'erreur adimensionnelle suivante :

$$\dot{\mathbf{e}}(\Omega) = E \left[ \left| \frac{e_{vit,n+1}}{\dot{q}_0} \right| \right] = \frac{2}{p} \sqrt{E^2 + F^2} \quad (\text{A1.4})$$

avec :

Détermination automatique de la taille du pas de temps pour les schémas implicites en dynamique non-linéaire.

Annexe 1 : Erreurs aux ordres supérieurs.

---

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{12} \left\{ \begin{aligned} & -\Omega + \frac{4-12\mathbf{g}}{D} \left[ -\Omega + (1+\mathbf{a})\left(\frac{1}{2} - \mathbf{b}\right)\Omega^3 \right] \\ & + \frac{12\mathbf{g}-5}{D} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{\Omega}{D} \left[ 1 + \mathbf{a}\mathbf{b}\Omega^2 - \left(\frac{1}{2} - \mathbf{b}\right)\Omega^2 \right] \\ & -\frac{(1+\mathbf{a})\Omega}{D} \left[ -\mathbf{g}\Omega^2 - \left[ 1 - \mathbf{g} - (1+\mathbf{a})\left(\frac{\mathbf{g}}{2} - \mathbf{b}\right)\Omega^2 \right] \Omega^2 \right] \\ & -\frac{(1+\mathbf{a})\left(\frac{1}{2} - \mathbf{b}\right)\Omega}{D} \left[ -\Omega^2 + (1+\mathbf{a})\left(\frac{1}{2} - \mathbf{b}\right)\Omega^4 \right] \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \\
 F &= -\frac{1}{12} \left\{ \begin{aligned} & \frac{4-12\mathbf{g}}{D} (1+\mathbf{a})\Omega^2 \\ & + \frac{12\mathbf{g}-5}{D} \left[ \frac{\Omega^2}{D} + (1+\mathbf{a})\frac{\Omega^2}{D} \left[ 1 - (1+\mathbf{a})(\mathbf{g} - \mathbf{b})\Omega^2 \right] - (1+\mathbf{a})^2\left(\frac{1}{2} - \mathbf{b}\right)\frac{\Omega^4}{D} \right] \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

## **Annexe 2 : Expression de l'erreur pour un système multi degrés de liberté.**

L'expression de l'erreur (3.1) peut être étendue pour un système à plusieurs degrés de libertés. Plaçons-nous dans le cas linéaire non amorti.

Dans un premier temps, l'erreur est exprimée pour un système multi degrés de libertés découplés. Si l'erreur est choisie inférieure à un seuil, les modes qui ne participent pas à la réponse sont filtrés.

Supposons le système de m équations linéaires découplées :

$$\ddot{y}_i + \mathbf{w}_i^2 y_i = 0 \quad i = 1, \dots, m, \text{ les déplacements initiaux sont } y_{0i}.$$

Un vecteur comprenant les erreurs pour chaque degré de liberté est défini grâce à (3.1). L'erreur moyenne est alors choisie comme la norme de ce vecteur :

$$\|e\| = \frac{h^2}{6} \left\| \Delta \ddot{y} \right\| \quad (\text{A2.1})$$

En appliquant la relation (4.8) au système linéaire à un degré de liberté  $\ddot{y}_i + \mathbf{w}_i^2 y_i = 0$ , il vient :

$$E[e_i] = |y_{0i}| \mathbf{e}(\mathbf{w}_i h).$$

$\mathbf{e}$  et  $\Sigma$  étant défini dans la relation (4.8).

La stratégie de choix de h est la suivante :  $O_k$  est fixé à 0.6, quand h est fixé, nous sommes en présence de deux types de  $y_{0i}$ , ceux qui amène  $O_i > O_k$  et ceux qui amène  $O_i \leq O_k$ . **Nous allons voir, comment choisir h de manière à ce que les modes qui ne participent pas à la réponse soient filtrés. C'est-à-dire avoir :**

$$\left( \sum_{\Omega_k}^{\Omega_m} y_{0i}^2 \right)^{1/2} \leq TOL$$

Développons (A2.1) :

$$E[\|e\|] = \frac{h^2}{6} E\left[\left\| \Delta \ddot{y} \right\|\right] = \left( \sum_{\Omega_1}^{\Omega_m} y_{0i}^2 \mathbf{e}^2(\Omega_i) \right)^{1/2} = \left( \sum_{\Omega_1}^{\Omega_k} y_{0i}^2 \mathbf{e}^2(\Omega_i) + \sum_{\Omega_k}^{\Omega_m} y_{0i}^2 \mathbf{e}^2(\Omega_i) \right)^{1/2}$$

ce qui implique :

Détermination automatique de la taille du pas de temps pour les schémas implicites en dynamique non-linéaire.

Annexe 2 : Expression de l'erreur pour un système multi degrés de liberté.

---

$$E[\|e\|] = \frac{h^2}{6} E\left[\left\|\Delta \ddot{y}\right\|\right] \geq \left(\sum_{\Omega_k}^m y_{0i}^2 \mathbf{e}^2(\Omega_i)\right)^{1/2}$$

or la courbe  $e(O)$  étant strictement croissante, nous avons pour  $k \leq i \leq m$  :  $\mathbf{e}_i \geq \mathbf{e}_k$ . Il vient alors :

$$\left(\sum_{\Omega_k}^m y_{0i}^2\right)^{1/2} \leq \frac{1}{\mathbf{e}_k} \left(\sum_{\Omega_k}^m y_{0i}^2 \mathbf{e}_i^2\right)^{1/2} \leq \frac{h^2}{6 \mathbf{e}_k} \left\|\Delta \ddot{y}\right\| \quad (\text{A2.2})$$

Il apparaît donc que si h est choisi pour vérifier la condition

$$\frac{h^2}{6 \mathbf{e}_k} \left\|\Delta \ddot{y}\right\| \leq TOL \quad (\text{A2.3})$$

alors les amplitudes des modes ayant  $O_i > O_k$  ne participent pas à la réponse car nous avons la relation :

$$\boxed{\left(\sum_{\Omega_k}^m y_{0i}^2\right)^{1/2} \leq TOL} \quad (\text{A2.4})$$

Filtrer ces modes correspond en fait à introduire une dissipation numérique.

Les systèmes qui nous intéressent sont à plusieurs degrés de liberté couplés. Il importe donc d'étudier ce cas. Il se ramène à un système à plusieurs degrés de liberté découplés. En effet,

supposons le système de m équations linéaires couplées :  $M \ddot{q} + Kq = 0$ , le vecteur des déplacements initiaux est  $q_0$ . Appelons  $\Phi$  la matrice des vecteurs propres (la colonne i correspond au mode i). Les vecteurs propres sont normés de manière à satisfaire  $\Phi^T M \Phi = I$ , nous avons alors, en utilisant les coordonnées modales y, avec  $q = \Phi y$ , au système matriciel

$\Phi^T M \Phi \ddot{y} + \Phi^T K \Phi y = 0$ . Par définition de  $\Phi$ , nous avons  $\Phi^T K \Phi = \text{diag}(\omega_i^2)$ . Nous retrouvons

alors le système découplé étudié dans le point précédent :  $\ddot{y}_i + \omega_i^2 y_i = 0 \quad i = 1, \dots, m$ . En utilisant la relation (A2.2), et en explicitant le dernier terme :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\Omega_k}^m y_{0i}^2\right)^{1/2} &\leq \frac{h^2}{6 \mathbf{e}_k} \left\|\Delta \ddot{y}\right\| = \frac{h^2}{6 \mathbf{e}_k} \left\|I \Delta \ddot{y}\right\| = \frac{h^2}{6 \mathbf{e}_k} \left\|\Phi^T M \Phi \Delta \ddot{y}\right\| \\ \left(\sum_{\Omega_k}^m y_{0i}^2\right)^{1/2} &\leq \frac{h^2}{6 \mathbf{e}_k} \left\|\Phi^T M \Delta \ddot{q}\right\| = \frac{h^2}{6 \mathbf{e}_k} (\Delta \ddot{q}^T M^T \Phi \Phi^T M \Delta \ddot{q})^{1/2} \end{aligned}$$

En remarquant que :



Détermination automatique de la taille du pas de temps pour les schémas implicites en dynamique non-linéaire.

Annexe 2 : Expression de l'erreur pour un système multi degrés de liberté.

---

$$\begin{aligned}\Phi^T M \Phi &= I \Rightarrow \Phi^T (\Phi^T M)^T = I^T = I \Rightarrow \Phi^T M^T \Phi = I \\ \Rightarrow \Phi^T M^T \Phi \Phi^T &= \Phi^T \Rightarrow M^T \Phi \Phi^T = I\end{aligned}$$

Nous arrivons à la relation :

$$\left( \sum_{\Omega_k}^{\Omega_m} y_{0i}^2 \right)^{1/2} \leq \frac{h^2}{6\mathbf{e}_k} (\Delta \ddot{\mathbf{q}}^T M^T \Phi \Phi^T M \Delta \ddot{\mathbf{q}})^{1/2} = \frac{h^2}{6\mathbf{e}_k} (\Delta \ddot{\mathbf{q}}^T M \Delta \ddot{\mathbf{q}})^{1/2} \quad (\text{A2.5})$$

Il reste à adimensionnaliser cette dernière expression, par le même raisonnement que précédemment :

$$\|y_0\| = (q_0^T M q_0)^{1/2},$$

il vient alors :

$$\frac{\left( \sum_{\Omega_k}^{\Omega_m} y_{0i}^2 \right)^{1/2}}{\|y_0\|} \leq \frac{h^2}{6\mathbf{e}_k} \left( \frac{\Delta \ddot{\mathbf{q}}^T M \Delta \ddot{\mathbf{q}}}{q_0^T M q_0} \right)^{1/2} = \frac{h^2}{6\mathbf{e}_k (q_0^T M q_0)^{1/2}} (\Delta \ddot{\mathbf{q}}^T \Delta F_{iner})^{1/2} = e_{relative}$$

Donc, si h permet d'avoir :

$$e_{relative} = \frac{h^2}{6\mathbf{e}_k (q_0^T M q_0)^{1/2}} (\Delta \ddot{\mathbf{q}}^T \Delta F_{iner})^{1/2} < \text{TOL} \quad (\text{A2.6})$$

les modes qui ne participent pas sont filtrés car :

$$\frac{\left( \sum_{\Omega_k}^{\Omega_m} y_{0i}^2 \right)^{1/2}}{\left( \sum_0^{\Omega_m} y_{0i}^2 \right)^{1/2}} < \text{TOL}$$

## **Bibliographie.**

- [I] HUGHES Thomas  
The finite element method (linear static and dynamic finite element analysis),  
Prentice-Hall International Editions, 1987
- [II] GERADIN Michel (LTAS)  
Analyse, simulation et conception de systèmes polyarticulés et structures  
déployables  
Cours IPSI Paris, 11-13 mars 1997
- [III] ARMERO Francis and ROMERO Ignacio  
Dissipative integration algorithms for non-linear elasto-dynamics  
European Conference on Computational Mechanics  
AUGUST 31 – September 3  
München, Germany
- [IV] NEUMANN Jens and SCWEIZERHOF Karl  
Analysis of shell structures under transient loading using adaptivity in time and space  
European Conference on Computational Mechanics  
AUGUST 31 – September 3  
München, Germany
- [V] HULBERT G.M. and JANG I.  
Automatic time step control algorithms for structural dynamics  
Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering 126, 155-178 (1995)
- [VI] SAMTECH,  
Manuel d'utilisation de Samcef, v8.0 (1999)
- [VII] MOHTAR R.H. and SEGERLIND L.J.  
Dynamic time-step estimates for two-dimensional transient field problems using square elements  
International Journal For Numerical Methods In Engineering 42, 1-14 (1998)
- [VIII] LI X.D. and WIBERG N.E.  
Implementation and adaptivity of a space-time finite element method for structural dynamics  
Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering 156, 211-229 (1998)
- [IX] DUTTA A. and RAMAKRISHNAN C.V.  
Accurate computation of design sensitivities for structures under transient dynamic loads using time  
marching scheme  
International Journal For Numerical Methods In Engineering 41, 977-999 (1998)

- [X] CASSANO A. and CARDONA A.  
A comparaison between three variable-step algorithms for the integration of the equations of motion in structural dynamics  
Latin American Research 21, 187-197 (1991)
  
- [XI] PONTHOT J.P.  
Traitement unifié de la mécanique des milieux continus solides en grandes transformations par la méthode des éléments finis  
Thèse présentée en vue de l'obtention du titre de Docteur en Sciences Appliquées de l'Université de Liège (1994-1995)
  
- [XII] GIVOLI D. and HENISBERG I.  
A simple times-step control scheme  
Communication In Numerical Methods In Engineering, Vol 9, 873-881 (1993)
  
- [XIII] GERADIN M. and RIXEN D.  
Théorie des vibrations. Application à la dynamique des structures.  
Masson (1993)