

**MODELISATION DES DISCONTINUITES
EN ECOULEMENT INSTATIONNAIRE
A SURFACE LIBRE**



**Du ruissellement hydrologique en fine lame
à la propagation d'ondes consécutives
aux ruptures de barrages**

M. Piroton

Ingénieur Civil des Constructions ULg
Docteur en Sciences Appliquées

Editions L.H.C.N.

1994

Liège

**MODELISATION DES DISCONTINUITES
EN ECOULEMENT INSTATIONNAIRE
A SURFACE LIBRE**

**Du ruissellement hydrologique en fine lame
à la propagation d'ondes consécutives
aux ruptures de barrages**

M. Pirotton
Ingénieur Civil des Constructions ULg
Docteur en Sciences Appliquées

REMERCIEMENTS

Au terme de cette thèse, je souhaiterais exprimer ma profonde gratitude à tous ceux qui m'ont aidé dans les différentes phases de ce travail.

Je pense d'abord à Monsieur le Professeur N.M. Dehousse qui m'a permis de découvrir le monde de la recherche scientifique et appliquée en m'accueillant dans son Service. C'est grâce à ses encouragements, à son ouverture d'esprit ainsi qu'à sa grande disponibilité, que cette recherche a pu aboutir. Qu'il trouve ici l'expression de mon profond respect et le témoignage de ma sincère reconnaissance.

Je souhaite également adresser mes plus vifs remerciements à Monsieur le Professeur J. Smolderen dont les enseignements, la patience et la clairvoyance m'ont permis de surmonter bien des difficultés.

Je ne saurais passer sous silence la disponibilité quotidienne et la compétence de Monsieur R. Mathieu dont les précieux conseils et la collaboration dans le domaine informatique ont contribué au bon déroulement de ces travaux.

La collaboration scientifique avec le bureau français Coyne et Bellier, dans le domaine des ruptures de barrages, a permis de substantiels développements dans l'élaboration d'un des codes proposés. Je tiens à remercier Messieurs A. Carrère et A. Lara pour leur coopération et leur disponibilité.

Je voudrais également remercier Monsieur le Professeur P. Gabriel et Monsieur M. Salhouf avec qui les échanges d'idées ont souvent été fructueux.

Messieurs les Professeurs V. de Kosinsky, A. Lejeune, J. Sterling et C. Thirriot ont accepté de s'intéresser à ces travaux et de les juger. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

J'adresse également mes remerciements à Madame J. Thullen et à Murielle pour leur efficacité et leur remarquable travail dactylographique.

Je remercie enfin tous les membres des Laboratoires d'Hydraulique Appliquée et des Constructions Hydrauliques et Navales de L'Université de Liège.

Il y a ceux qui, continuellement, m'ont encouragé et soutenu. Je ne saurai jamais assez remercier Bénédicte pour son aide et ses encouragements.

Mes parents ont vécu au quotidien l'avancement de cette thèse et m'ont soutenu dans les moments les plus difficiles. C'est à eux que je dédie ce travail.

Michel Pirotton

Avril 1994

RESUME

L'utilisation intensive de l'eau dans nos sociétés industrielles doit s'accompagner d'une gestion plus appropriée des ressources disponibles.

Les modèles numériques peuvent efficacement seconder les gestionnaires dans la tâche toujours plus difficile d'élaborer une politique optimale conciliant au mieux des rôles parfois antagonistes avec le respect de contraintes imposées. Ces outils donnent en effet une vue claire des processus du système en simulant les situations hydrauliques envisageables. Ils restituent des impacts quantifiables qui aident à la prise de décisions fondées sur des critères plus scientifiques.

L'objectif de ce travail consiste à établir et à résoudre numériquement des modèles hydrauliques régissant les entrées et sorties d'une retenue quelconque, afin d'en prévoir les évolutions. Ils reproduisent également l'impact d'une exploitation normale ou accidentelle sur l'environnement de l'ouvrage.

En suivant le fil de l'eau dans son parcours à l'air libre, sont envisagés successivement :

- un premier modèle théorique qui s'intéresse à la transformation hydrologique d'un signal de pluies en un signal de débits à l'exutoire.

Il s'appuie sur une approche physique du phénomène par représentation de la lame d'eau qui s'écoule sur le bassin versant.

Couplé à une loi d'infiltration, il est d'abord à la base d'un modèle unidimensionnel, et ensuite d'un logiciel quasi-tridimensionnel par éléments finis qui tient compte des répartitions spatiales des précipitations et des propriétés évolutives du sol.

La signification physique attachée à chaque paramètre de la modélisation permet de répercuter aisément l'impact d'une quelconque modification des caractéristiques du bassin versant sur les hydrogrammes élémentaires déversés tout au long des cours d'eau ramifiés qui le drainent.

- un second modèle théorique qui décrit d'abord la propagation des hydrogrammes élémentaires du premier modèle dans un réseau quelconque d'écoulements filaires.

Les hypothèses très générales qui sont à sa base destinent également le code éléments finis correspondant à modéliser la propagation d'ondes dans une retenue soumise à des conditions d'exploitation variables. Il reproduit enfin tous les écoulements filaires en aval des retenues, depuis la gestion des plus basses eaux jusqu'au cas extrême de rupture de barrage.

L'approche chronologique qui caractérise l'analyse de ces écoulements s'accorde également avec la gradation dans la difficulté des approches numériques qui surmontent un problème les liant intimement : l'apparition de discontinuités dans les écoulements.

- Dans le premier modèle, elles apparaissent lorsque le logiciel cherche à exploiter la généralité et la richesse des données topographiques d'un bassin, sans ramener celui-ci à une forme plus simplifiée de surfaces moyennées ou d'une succession de plans indépendants.

Une approche théorique préalable, suivie d'un traitement numérique original par capture numérique du choc, permet in fine de travailler à partir d'une carte topographique digitalisée avec une géométrie complètement tridimensionnelle.

L'excellent comportement de la méthode proposée se vérifie par la formation de discontinuités correctement reproduites et par l'absence totale d'effet parasite dans les hydrogrammes calculés.

Une automatisation extrême des pré et post processeurs simplifie la détermination des zones concernées par l'écoulement et limite la charge numérique par une segmentation de la modélisation en accord avec la théorie.

- Dans le second modèle, ces discontinuités apparaissent en simulation de propagation d'ondes consécutives à la rupture de barrages, et dans les conditions beaucoup moins extrêmes qui imposent la formation de ressauts.

La coexistence de plusieurs régimes d'écoulement dans un réseau ramifié de bras à sections transversales quelconques, la reproduction de fronts raides sans étalement exagéré ni effet parasite, nécessitent la mise au point d'un traitement numérique original.

La comparaison avec des solutions théoriques ainsi qu'avec des résultats de modèles physiques et numériques confirme la valeur de l'approche proposée. Celle-ci est notamment à même de reproduire fidèlement, en instationnaire, l'apparition, le déplacement et la disparition de discontinuités dans les conditions les plus variées de l'hydraulique.

Le couplage des deux modèles principaux prouve son efficacité sur la modélisation d'un bassin liégeois soumis à des précipitations, tandis que l'application extrême du modèle filaire à un réseau de vallées de nos contrées permet de simuler enfin, pour la première fois en Belgique, les premiers moments d'une rupture brusque d'un grand barrage belge.

SOMMAIRE

CHAPITRE I Introduction générale

PARTIE I : ECOULEMENT HYDROLOGIQUE QUASI-TRIDIMENSIONNEL EN FINE LAME SUR L'ENSEMBLE D'UN BASSIN VERSANT

CHAPITRE II Modèle mathématique général d'écoulement hydrologique

CHAPITRE III Application de la théorie cinématique aux écoulements hydrologiques

CHAPITRE IV Méthode numérique unidimensionnelle : Première approche

CHAPITRE V Etude des chocs en écoulement hydrologique

CHAPITRE VI Intégration des chocs dans la solution

CHAPITRE VII Extension de la théorie cinématique aux écoulements hydrologiques quasi-tridimensionnels

CHAPITRE VIII Ordonnancement des phases préalables aux simulations d'écoulement hydrologique

PARTIE II : ECOULEMENT FILAIRE A SURFACE LIBRE EN RESEAUX DE COURS D'EAU A SECTION QUELCONQUE

CHAPITRE IX Modèle mathématique d'écoulement filaire à surface libre en section quelconque

CHAPITRE X Modèle numérique d'écoulement filaire en l'absence de choc : Première approche

CHAPITRE XI Application de la théorie de propagation d'ondes en eau peu profonde aux écoulements consécutifs aux ruptures de barrages

CHAPITRE XII Extension du modèle numérique aux écoulements filaires intégrant des chocs : Approche finale

CHAPITRE XIII Application du modèle numérique aux écoulements discontinus en conditions réelles

PARTIE III : COUPLAGE DES MODELES ET MODELISATION D'UNE RUPTURE BRUSQUE

CHAPITRE XIV Couplage des modèles dans une modélisation d'écoulement sur le bassin du Blanc Gravier

CHAPITRE XV Modélisation de l'écoulement consécutif à la rupture du barrage de la Vesdre à Eupen

CHAPITRE XVI Conclusion générale

ANNEXES

TABLE DES NOTATIONS

BIBLIOGRAPHIE

TABLE DES MATIERES

Chapitre I

Introduction générale

L'eau est la substance la plus répandue sur la terre et la composante majeure de tout organisme vivant.

Si la fraction d'eau douce affectant l'écorce terrestre paraît bien dérisoire avec 3 % seulement du volume global, il est logique que l'existence du cycle perpétuellement reproduit dans lequel elle s'insère, ait d'abord inspiré des réflexions d'ordre philosophique puisqu'elle façonne le relief et décide de la vie sur terre.

Ainsi, des poèmes épiques d'Homère (X^{ème} siècle avant J.C.) aux pensées de Platon, Thalès et Aristote en Grèce, Sénèque et Pline à Rome, toutes ces oeuvres recèlent des traces de spéculations parfois scientifiquement peu rigoureuses sur le cycle de l'eau.

A partir de la version du philosophe grec Anaxagore (500 - 428 avant J.C.) qui appréhendait déjà l'action du soleil, élevant l'eau des mers dans l'atmosphère d'où elle tombe en pluie pour alimenter des réservoirs souterrains, grâce ensuite au grec Théophrastus (372 - 287 avant J.C.) qui compléta l'explication du parcours atmosphérique de l'eau et de l'origine des précipitations, on obtint très tôt la description d'une séquence proche des thèses modernes avec Vitruvius, architecte romain et ingénieur contemporain du Christ, qui dénonça le rôle primordial joué par l'infiltration et l'écoulement souterrain (Show¹).

Quant aux civilisations asiatiques, elles semblent avoir acquis leurs connaissances de façon autonome, encore que le concept du cycle hydrologique tel qu'imaginé par les chinois dès 900 avant J.C., en Inde vers 400 avant J.C. ou en Perse paraît n'avoir eu aucun retentissement dans nos civilisations occidentales.

Mais l'homme n'a pas longtemps cantonné le rôle de l'eau dans la seule fonction vitale de son alimentation ou de celle de son bétail et, au delà des réflexions qu'elle a pu lui inspirer, il en a très vite usé dans ses tâches agricoles, pour se déplacer, pour accroître son bien être, pour attaquer ou se défendre de ses ennemis.

Comme l'a montré Bonin, il est fascinant de constater que si sa compréhension du comportement de l'eau restait fautive ou incomplète, parsemée de croyances superstitieuses et religieuses, il s'ingénia très tôt à la domestiquer et, par son esprit d'entreprise, parvint il y a plus de 2000 ans à surmonter la plupart des problèmes hydrauliques auxquels nous sommes encore confrontés aujourd'hui :

- La protection contre les crues et les inondations a donné lieu à l'édification de digues en Mésopotamie dès le 6^{ème} ou 5^{ème} millénaire avant J.C.

¹ voir bibliographie classée par ordre alphabétique.

- Le creusement de canaux d'irrigation améliorait déjà le rendement des cultures de la plaine de Jéricho 8000 ans avant J.C. L'idée d'élaborer de vastes bassins de rétention germa dans l'esprit des Egyptiens qui, dès 3000 ans avant J.C., mirent en réserve les crues du Nil. Quant au drainage des terres, on en trouve déjà des traces dès 2750 ans avant J.C. dans les plaines de l'Indus.
- L'édification de barrages fait référence à une tradition très ancienne comme en atteste le barrage de Jawa en Jordanie, datant de la fin du 4^{ème} millénaire avant J.C. Les Egyptiens ont également fait étalage de leur savoir-faire en la matière par le barrage de Kosheih au début du 3^{ème} millénaire avant J.C. (long de 450 m et haut d'une quinzaine de mètres), mais l'adversité dont ils s'estimèrent victimes lors de la destruction par subverse de l'ouvrage de Sadd-el-Kaffa en Basse Egypte, semble les avoir fait renoncer, pendant 15 siècles, à de nouvelles tentatives.
- Le transport par voie d'eau fut d'autre part largement utilisé, notamment par les chinois qui creusèrent quelques canaux remarquables dont le "canal magique" traversant, sur 2000 kilomètres environ, le pays du Nord au Sud et toujours en service de nos jours. La liaison des mers trouve une belle application en l'édification de l'ancêtre du canal de Suez au XIX^{ème} siècle avant J.C. sous Sésostris III, puis sous Ramsès II au XV^{ème} siècle avant J.C. Des spéculations sont par ailleurs émises sur son équipement par un ensemble d'écluses dès 280 avant J.C.
- Enfin l'idée au sens large, souvent considérée comme moderne, de gestion des ressources trouve certaines racines ancestrales dans l'établissement de textes réglementant l'utilisation et la protection de l'eau, comme le code Hammourabi, rédigé en Mésopotamie au XVIII^{ème} siècle avant J.C.

En inspirant l'humilité, ces quelques preuves d'un si grand savoir-faire montrent que l'importance de l'enjeu a toujours suscité des capacités créatives adaptées aux technologies de l'époque, dans un contexte théorique d'ignorance, de méconnaissance ou de connaissance incomplète de la science et des techniques de l'eau.

Lorsqu'on se limite au contexte de l'hydrologie, qui traite tous les aspects du parcours de l'eau terrestre, force est de constater que sa mutation progressive en une science d'abord de l'observation ne s'est concrétisée que beaucoup plus tard, avec des personnages tels Léonard de Vinci (première mesure expérimentale de la distribution des vitesses dans un courant), suivie d'avancées théoriques par passes successives au cours des siècles grâce à des noms illustres tels Newton, Bernoulli, Euler, Lagrange, Darcy, Manning, Reynolds ou Stokes.

Le 20^{ème} siècle a ensuite marqué son empreinte par des contributions remarquables telles celles de Richards, Sherman, Horton ou Gumbel pour nous placer dans un contexte d'analyse plus rationnelle des observations.

Cette accumulation de compétences très anciennes, le développement important des modèles théoriques aux siècles derniers et l'évolution actuelle des sciences et de la technologie, amènent aujourd'hui l'ingénieur à traiter certains mêmes problèmes de façon beaucoup plus complexe, prenant en compte nombre de contraintes et d'objectifs parfois

antagonistes pour les concilier au mieux. Des projets d'envergure sont menés, plus respectueux de l'environnement, soumis à des critères de sécurité de plus en plus sévères, dans des sites toujours plus complexes à appréhender.

A côté des progrès de la technologie et du savoir actuel qui se concrétisent dans des réalisations audacieuses pour l'époque, un simple dysfonctionnement des structures élaborées conduit immédiatement à de lourdes conséquences, qu'elles fassent référence à des critères économiques ou qu'elles se chiffrent plus dramatiquement en vies humaines. La conception complète d'un aménagement se doit aujourd'hui de prévoir ces scénarios possibles pour anticiper ou minimiser leurs effets néfastes.

L'accroissement des connaissances entraîne donc les concepteurs vers des responsabilités beaucoup plus larges, qui prennent résolument le pas sur le caractère inéluctable et les sentiments fatalistes et superstitieux de jadis.

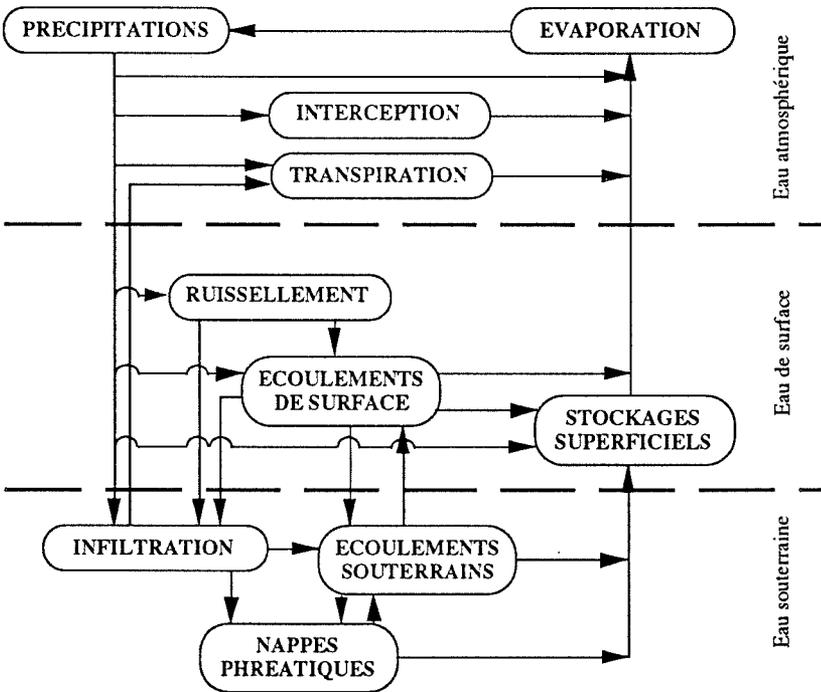


Figure I.1.
Représentation du système hydrologique global
et des mécanismes intervenant à l'échelle d'un bassin versant

Cette évolution ne marque pas pour autant de victoire décisive sur les caprices de la nature qui rappellent régulièrement que les mêmes défis persistent, de la prévision des crues et la protection contre les inondations au stockage et à l'alimentation. Seul le contexte contemporain fait évoluer les problèmes qui y sont liés.

Ainsi, la régularisation des débits par l'écrêtement des crues et par le soutien d'étiage, le stockage d'eau industrielle ou potable et la production d'énergie électrique ont longtemps constitué les objectifs prioritaires des ouvrages de basse, moyenne et haute chutes tandis que les voies d'eau étaient dévolues au transport fluvial.

Mais d'autres rôles souvent antagonistes (refroidissement des centrales nucléaires, lutte contre la pollution, considérations écologiques, loisirs nautiques, ...) s'ajoutent ou se substituent avec le temps. Ils interviennent également dans la gestion des réseaux de cours d'eau et entraînent les exploitants à rechercher une succession de situations qui respectent les contraintes imposées en rencontrant au mieux les attentes des utilisateurs.

A ces critères fondamentaux s'ajoute enfin un contexte assez récent né des besoins en eau sans cesse croissants. L'évolution technique et sociale de nos sociétés transforme l'eau en un bien rare à épargner. Son utilisation intensive réclame une gestion plus appropriée des ressources disponibles.

L'ensemble de ces aspects s'intègre dans la notion large de gestion des ressources hydrauliques, qu'elle s'intéresse à leur origine, à leur consommation ou leur utilisation, ou encore qu'elle se tourne vers les conséquences possibles des infléchissements que l'homme peut provoquer sur leur cycle.

Face à la complexité croissante des modes d'exploitation, l'apport le plus significatif de ces quelques dernières dizaines d'années tient essentiellement à l'accroissement rapide des possibilités numériques qui permettent, avec les acquis théoriques en mécanique des fluides, de développer des outils d'aide à la décision. Ils donnent au gestionnaire une vue claire des processus contenus dans le système envisagé en modélisant les situations hydrauliques complexes engendrées par des décisions possibles. L'impact quantifiable suggéré par ces simulations peut alors aider à l'élaboration d'une politique optimale, sur base de critères plus scientifiques.

Si le numérique touche aujourd'hui quasi tous les domaines appréhendés par l'ingénieur hydraulicien, l'intérêt que suscitent les écoulements à surface libre résulte simplement de leur prépondérance dans les phénomènes hydrodynamiques influents sur lesquels on s'efforce le plus d'agir, comme le montrent les quelques réalisations d'époque citées en préambule. A l'échelle du système hydrologique global, il s'entend donc que notre attention se focalisera davantage sur les processus du cycle qui englobent les écoulements de surface, encore que l'interdépendance des divers composants du cycle, rappelée à la figure I.1., conduira à quelques aménagements significatifs.

L'objectif de ce travail consiste donc à établir puis à résoudre numériquement des modèles hydrauliques d'aide à la gestion d'une retenue ou d'un complexe hydraulique. Outre l'évaluation des fluctuations provoquées sur les variables au sein même du système, ils doivent logiquement se montrer aptes à prendre en compte et à générer les écoulements de surface qui concernent son entourage, depuis ceux qui alimentent ses frontières jusqu'à ceux qu'il suscite à son aval par une exploitation routinière ou accidentelle.

L'approche choisie s'efforcera de ne pas particulariser les raisonnements à un type précis d'ouvrage ou de topographie. Elle axera son analyse sur la signification physique des modèles mathématiques à mettre en oeuvre. Un soin particulier sera également accordé à l'analyse des réponses numériques rendues par les modèles informatiques qui en sont issus afin de discerner, caractériser et, le cas échéant, agir sur les diverses spécificités et mécanismes intrinsèques que développent les schémas numériques élaborés.

La modélisation à la fois de la formation spatiale et temporelle des volumes entrant dans la retenue, des mouvements engendrés dans celle-ci, enfin des conséquences de sa gestion sur le voisinage fait ressortir trois axes principaux de développement qui constituent l'ossature de ce travail :

1. - L'estimation correcte des débits de crue reste une préoccupation majeure pour nombre de populations de par le monde, par les dégâts effroyables que leur méconnaissance peut occasionner. Tout dimensionnement économique d'un ouvrage hydraulique passe nécessairement par l'évaluation des valeurs de pointe qu'il devra supporter. Enfin, prévoir l'amplitude et la distribution temporelle des débits entrant dans un ensemble à gérer permet d'anticiper certaines manoeuvres. La production éventuelle d'énergie s'en trouve maximisée tandis que des pics de hauteur et débit, néfastes pour l'aval, sont d'autant mieux écrêtés.

L'analyse et la modélisation de la transformation hydrologique d'un signal de pluies en un signal de débits à l'exutoire sur une topographie quelconque s'efforce de répondre à ces attentes.

Contrairement aux approches classiques de modélisation hydrologique, transformant par une fonction mathématique paramétrée un signal d'entrée en un signal de sortie, on s'attache ici à développer une approche physique du phénomène en examinant l'écoulement de la fine lame d'eau sur le bassin.

La première partie du travail y est entièrement consacrée.

La validité d'une telle approche est d'abord examinée dans les chapitres II et III. Cette analyse met simultanément en relief les principaux facteurs d'influence.

L'exploitation de la richesse naturelle des données topographiques brutes d'un bassin, par une modélisation directe sur carte topographique digitalisée, suppose la prise en compte d'une géométrie complètement tridimensionnelle. L'ensemble des problèmes théoriques et numériques soulevés par ce cadre original d'application extrêmement libéral font l'objet des chapitres IV, V et VI.

Leur progressive analyse théorique, ainsi que l'élaboration des traitements numériques appropriés, sont abordés dans un contexte d'abord unidimensionnel avant d'étendre les enseignements tirés aux géométries quelconques, dès le chapitre VII.

Cette approche, en conférant une signification physique aux paramètres, s'intègre parfaitement dans une optique d'aide à la décision puisqu'elle s'avère capable, non seulement de prévoir la réponse du système à une pluie donnée, mais surtout d'évaluer l'impact de l'intervention de l'homme sur le bassin versant en modifiant les valeurs des paramètres concernés.

2. - L'étude de la propagation d'ondes dans une retenue ou dans des réseaux quelconques de bras à surface libre s'intègre dans un cadre plus classique de quantification d'impacts de divers scénarios possibles d'exploitation.

Mais les hypothèses très générales qui sont à sa base, en destinant également le modèle à un champ d'applications beaucoup plus vaste, justifie son développement

détaillé au sein d'une deuxième partie du travail.

Car il intervient également dans l'évaluation de la réponse d'un bassin versant à une pluie donnée puisque la fine pellicule fluide va progressivement alimenter un réseau de rus, de rivières ou d'écoulements à caractère unidimensionnel dominant qui propagera ces contributions jusqu'au point étudié.

Il s'agit d'une information fondamentale, tant dans la simple conjoncture d'une évaluation des répercussions entraînées par une crue sur les populations riveraines que comme signal d'entrée pour un complexe qui doit gérer au mieux ses ressources.

Un modèle de propagation d'ondes dans un réseau quelconque de bras à sections variables est ainsi élaboré dans la deuxième partie du travail. Dès le chapitre X, son application à des cas concrets montre qu'il est capable de considérer les différentes conditions limites d'exploitation routinière envisagée pour reproduire fidèlement les mouvements induits dans le système.

3. - Il faut reproduire enfin tous les écoulements filaires en aval des retenues, depuis la gestion des plus basses eaux jusqu'au cas extrême de rupture de barrage.

Si la première hypothèse fait référence à un calcul instationnaire de lignes d'eau, la conception très générale de définition de la géométrie n'écarte pas une coexistence variable à la fois dans le temps et l'espace de divers régimes d'écoulement qui exclut le recours à la plupart des schémas classiques de discrétisation.

Cette question prend une dimension d'autant plus cruciale dans la seconde hypothèse très sensible de mise en place d'une stratégie de protection des populations et des biens en aval des sites de retenue. Car la simulation en géométrie réelle d'écoulements aussi perturbés que ceux initiés par la rupture partielle ou totale, instantanée ou progressive d'un ouvrage de retenue devient une préoccupation très actuelle. Elle s'avère indispensable à l'élaboration de cartes d'inondation sur lesquelles se fonde une politique de plans d'alerte et d'évacuation, recommandée depuis longtemps par le Comité International des Grands Barrages.

Le regain d'intérêt manifesté depuis la solution théorique de Ritter qui, il y a un siècle, émergeait d'hypothèses trop restrictives pour suggérer des conclusions significatives sur sites réels, s'explique par les nouveaux horizons ouverts par les possibilités de résolution par voie informatique.

Ce problème est d'abord analysé sur un plan théorique au chapitre XI. L'examen critique des hypothèses émises suggère les degrés d'incertitude auxquels elles sont susceptibles de conduire.

Les difficultés numériques inhérentes à la représentation correcte d'une propagation de fronts raides ainsi que des régimes d'écoulement variés nécessitent la mise au point d'un traitement numérique original du système d'équations. Il est élaboré puis évalué par comparaison avec des solutions théoriques ainsi qu'avec des résultats de modèles physique et numérique aux chapitres XII et XIII.

Les modèles théoriques successifs qui sont envisagés pour chaque axe du problème posé montrent des liens beaucoup plus étroits que ceux suggérés par les échelles très différenciées des phénomènes étudiés.

Néanmoins, la définition précise du cadre théorique de validité des équations utilisées s'impose pour une interprétation des résultats adaptée au contexte qui a vu leur établissement. Quant à l'examen de la précision des résultats numériques, il contribue à établir certains critères vis-à-vis de la confiance à accorder aux modèles informatiques.

Ces deux aspects prépondérants de la philosophie du travail trouvent leur aboutissement notamment dans la troisième partie (chapitres XIV et XV). Le couplage des deux modèles principaux prouve son efficacité sur la modélisation d'un bassin liégeois soumis à des précipitations, tandis que l'application extrême du modèle filaire à un réseau de vallées de nos contrées permet de simuler, pour la première fois en Belgique, les premiers moments d'une rupture brusque d'un grand barrage belge.

L'examen des différents processus suit le fil naturel de l'eau dans son parcours à l'air libre. Mais cette chronologie s'accorde également avec une gradation dans les difficultés rencontrées puisque, avant même de les détailler, on peut affirmer qu'ils sont intimement liés par l'apparition, le déplacement ou l'extinction de discontinuités dans chaque type d'écoulement appréhendé.

L'analyse théorique de ces ressauts instationnaires permet d'en dégager des significations spécifiques à chaque système, spécialement au niveau des hypothèses introduites, et de guider la recherche d'approches numériques particulières élaborées pour surmonter ces singularités.

Les enseignements successifs tirés de la résolution de systèmes d'équations progressivement plus complexes contribuent à un raisonnement numérique constructif dans l'enchaînement des méthodes particulières à développer. Mais il ne peut être pleinement exploité qu'à condition de conserver sur l'ensemble du travail des approches de discrétisation spatiale et temporelle communes.

Des contingences propres aux différents processus abordés conduiront à un choix commun d'éléments finis en discrétisation spatiale combinés aux différences finies en discrétisation temporelle pour résoudre cet ensemble de modèles instationnaires et non-linéaires.

Partie I

Écoulement hydrologique quasi-tridimensionnel en fine lame sur l'ensemble d'un bassin versant

SOMMAIRE

- CHAPITRE II** *Modèle mathématique général d'écoulement hydrologique*
- CHAPITRE III** *Application de la théorie cinématique aux écoulements hydrologiques*
- CHAPITRE IV** *Méthode numérique unidimensionnelle : Première approche*
- CHAPITRE V** *Étude des chocs en écoulement hydrologique*
- CHAPITRE VI** *Intégration des chocs dans la solution*
- CHAPITRE VII** *Extension de la théorie cinématique aux écoulements hydrologiques quasi-tridimensionnels*
- CHAPITRE VIII** *Ordonnancement des phases préalables aux simulations d'écoulement hydrologique*

Chapitre III

Modèle mathématique général d'écoulement hydrologique

SOMMAIRE

- II.1. Introduction*
- II.2. Objectif du modèle hydrologique*
- II.3. Equations hydrauliques de base*
- II.4. Intégration temporelle des équations*
- II.5. Passage en bidimensionnel*
- II.6. Intégration spatiale des équations*
- II.7. Simplification des équations*

II.1. INTRODUCTION

De toute les catastrophes naturelles, les crues de cours d'eau sont sans doute les plus dévastatrices.

Et si les pertes en vies humaines ont constamment diminué pour laisser place, dans nos pays industrialisés, à un accroissement des dégâts matériels, c'est grâce aux efforts constants réalisés, dans la protection contre ces fléaux, par la construction d'aménagements hydrauliques et grâce à l'acquisition ainsi qu'au suivi permanent d'informations pluviométriques et limnimétriques.

Ainsi, la prévision des crues reste un objectif majeur dans toute politique de prévention, et une première étape incontournable dans tout projet de dimensionnement économique d'un ouvrage hydraulique. Dans une optique de gestion, une prévision fiable de la distribution des apports dans le système est primordiale pour l'élaboration d'une politique adéquate d'anticipation, gérant au mieux l'ensemble des ressources.

Cet ensemble de raisons implique qu'une première étape de ce travail passe prioritairement par l'analyse et la modélisation de la formation des débits de crue, consécutifs à des précipitations.

Lorsqu'on parcourt la littérature spécialisée sur le sujet, force est de reconnaître qu'il existe un foisonnement dans les méthodes et les modèles présentés, ainsi qu'une grande diversité et de singulières divergences dans les philosophies suivies pour aborder le problème.

L'importance des enjeux fondamentaux n'est pas seule responsable de l'engouement actuel pour proposer sans cesse de nouveaux modèles.

Il y a d'abord le contexte particulièrement complexe et varié des processus à prendre en compte. L'importance relative de leur contribution dans la combinaison finale pour l'élaboration du signal de sortie reste particulièrement difficile à déterminer, d'autant que toute expérimentation à l'échelle du bassin versant est impossible. Dans ces conditions, la modélisation devient l'unique possibilité d'analyse et de déduction, qui doit s'appliquer à chaque situation particulière que représente tout bassin par sa taille, ses particularités morphologiques, hydrologiques et géologiques.

Enfin, il est difficile de sélectionner des critères objectifs de comparaison et de classification de modèles, souvent voués et particularisés à un seul de ces systèmes "uniques" que sont les bassins versants, d'autant plus que la complexité des modèles proposés ne va pas nécessairement de pair avec un gain manifeste en qualité.

Avant même d'arrêter notre choix sur une approche puis de la développer, cette dernière remarque indique clairement que l'objectif n'est pas de procéder à une étude comparative et critique de quelques propositions de la littérature en la matière. Nous nous contenterons d'orienter notre choix et notre raisonnement en fonction d'abord des buts fondamentaux poursuivis, ensuite des éventuelles répercussions positives que les enseignements physiques et numériques tirés de cette première étape peuvent apporter pour les approches ultérieures d'autres phénomènes abordés dans ce travail.

La représentation simplifiée des processus de transformation d'une pluie sur un bassin versant en un débit à son exutoire doit nous aider à répondre à certaines préoccupations principales :

- D'abord, et très logiquement, le modèle doit reproduire valablement toute transformation mesurée d'un signal d'entrée en un signal de sortie, avant de pouvoir être extrapolé à des situations simulées où les mesures souhaitées ne sont plus disponibles. Ce type d'application s'identifie par ailleurs aux attentes les plus classiques vis-à-vis d'un modèle hydrologique.
- Un autre aspect, celui du contrôle et de la prévision, est plus étroitement lié à la préoccupation de gestion qui sous-tend ce travail. La possibilité de prendre cet aspect en compte ouvre de nouvelles perspectives pour la modélisation hydrologique, en montrant également les limites de certains types de modèles.

La compréhension des processus de transformation des signaux de pluie sur le bassin permet en effet d'envisager une mesure en temps réel pour construire préventivement la réponse à l'exutoire et y susciter anticipativement des réactions adéquates de gestion. Mais l'exploitation de modèles hydrologiques doit surtout permettre de mieux contrôler divers projets d'actions altérant certaines spécificités du bassin, en faisant mieux comprendre, par la simulation de divers événements pluvieux, leur répercussion sur la fonction de transformation du bassin.

Ces dernières potentialités seront déterminantes dans le choix entre les différentes philosophies qui sont à la base des modèles hydrologiques.

Ces derniers peuvent être scindés en quatre groupes majeurs (Clarke) :

- Les modèles stochastiques - conceptuels
- Les modèles stochastiques - empiriques
- Les modèles déterministes - conceptuels
- Les modèles déterministes - empiriques

Chaque groupe se subdivise à nouveau en différentes classes selon que les modèles sont linéaires ou non, globaux ou distribués.

Dans les modèles stochastiques, les fluctuations du signal de sortie sont partiellement aléatoires et causées par des perturbations non mesurées (Wéry). Par contre, dans les modèles déterministes, les variations du signal de sortie sont entièrement expliquées par la fonction de transformation.

La notion de modèle conceptuel ou empirique est suggérée par la considération ou non des processus physiques agissant sur les signaux d'entrée pour les convertir en signaux de

sortie. Comme le rappelle Clarke, ce dernier tri est assez artificiel puisque les lois de Darcy ou de Newton, par exemple, relèvent au sens strict d'observations empiriques, car elles sont nées de l'observation et de l'expérimentation, non de la théorie. Plus généralement, on range donc dans les modèles empiriques, encore appelés modèles "boîtes noires", ceux qui se focalisent davantage sur la seule description directe du comportement entrée-sortie, sans en détailler les divers mécanismes, avec l'utilisation de paramètres ne donnant pas nécessairement lieu à une interprétation physique.

Enfin, la distinction entre modèles distribués et globaux tient à la préoccupation de prendre en compte ou d'ignorer la distribution spatiale des variables d'entrée, ainsi que des paramètres caractérisant les processus physiques intervenant sur le signal initial.

Lorsque Abbott et al examinent la génération précédente de modèles "boîtes noires" globaux, ils soulignent certaines limitations marquantes, en relation directe avec quelques objectifs fondamentaux que nous avons suggérés en préambule :

- Ces modèles réclament de longues campagnes de mesures pour leur calibration, avec des méthodes d'ajustement qui rendent difficile l'interprétation physique des paramètres utilisés.
- Consécutivement, toute prévision de modification de terrain par une répercussion évidente sur la valeur des paramètres ne peut être assurée de façon fiable.
- Enfin, ils ne tiennent aucun compte de données topographiques, de caractérisation des types de sol ou des couvertures végétales rencontrées.

C'est pour répondre à ces déficiences qu'apparaissent progressivement des modèles distribués, basés sur la physique du phénomène.

Beven constate que ce n'est qu'en théorie que ce nouveau type d'approche est capable de réfuter toutes les objections citées, à cause principalement de l'échelle relativement globale à laquelle le processus peut être actuellement modélisé numériquement.

Il prétend que les paramètres utilisés sont dès lors trop globaux pour représenter la réalité physique, notamment des hétérogénéités du terrain, et parle, dans la phase de fixation de leurs valeurs, des mêmes difficultés que pour tout modèle "boîte noire".

Il serait illusoire de penser, devant la complexité du problème dans son ensemble, qu'on puisse échapper à toute campagne préalable de calage d'un modèle quel qu'il soit sur un bassin particulier. Néanmoins, il existe deux avantages déterminants, cités notamment par Beven et al, Bathrust ou Abbott, qui nous orienteront préférentiellement vers cette philosophie de compréhension physique des mécanismes. Ils sont inhérents à toute approche physique, qui permet d'agir aisément sur les valeurs des paramètres grâce à leur interprétation qui reste, quoi qu'on en dise, attachée à la physique fondamentale du processus.

- D'une part, il est possible, face à un manque de signaux d'entrée-sortie disponibles pour caler les paramètres sur un bassin particulier, de faire varier leurs valeurs dans une gamme raisonnable. On dispose ainsi du premier avantage décisif de pouvoir examiner l'incertitude associée au signal de sortie face aux incertitudes qui sont susceptibles d'affecter les données.

- Dans le même ordre d'idée, ce type de modèle demeure le seul à pouvoir répercuter, par une modification locale des valeurs des paramètres correspondants, toute variation des conditions locales d'écoulement, ce qui ouvre des perspectives très prometteuses dans la modélisation de scénarios envisageables.

Examinons plus précisément dans quel contexte le modèle sera élaboré.

II.2. OBJECTIF DU MODELE HYDROLOGIQUE

Le paragraphe précédent nous a montré l'existence de quelques approches possibles de l'écoulement hydrologique. Mais entre la transformation très globale d'un signal pluie en un signal débit et la description presque à l'échelle microscopique de la destinée d'une goutte de pluie, c'est plutôt d'une multitude d'approches potentielles qu'il faudrait parler. Chacune livre des enseignements spécifiques à l'échelle des phénomènes qu'elle tente de reproduire.

Avant d'établir les bases de la modélisation mathématique de l'écoulement en la resituant dans le contexte d'une gestion globale, faut-il sans doute revenir à la question fondamentale que posait Naef en 1981 :

"Peut-on actuellement mettre en modèle le processus pluie-écoulement ?"

Il s'agit à l'évidence d'un processus complexe, dont on ne soulignera ici que quelques caractères marquants : l'écoulement superficiel instationnaire s'établit sur des sols dont les propriétés dépendent de caractéristiques intrinsèques, d'événements antérieurs et de l'écoulement lui-même. Il ne constitue qu'une part de l'équilibre hydrologique global, parmi les phénomènes non moins complexes que constituent l'évaporation, l'interception, l'infiltration, ...

Considérer chacun de ces intervenants, rassemblés sous le terme laconique de pertes, avec l'outil mathématique le plus complet, conduirait sans nul doute à un modèle inextricable et difficilement exploitable. La nécessité de poser des hypothèses simplificatrices et de globaliser certains processus est à l'origine du nombre de modèles proposés dans la littérature. Elle explique aussi qu'à côté des résultats satisfaisants publiés, chaque code montre des déficiences lorsqu'il n'est pas appliqué dans un contexte proche de celui pour lequel il a été conçu.

Puisqu'on ne peut considérer tous les aspects de la réalité et qu'il faut l'idéaliser, Zbigniew et al préfèrent en fin de compte s'en tenir aux modèles les plus simples qui ne rendent pas toujours une réponse moins fiable que les plus élaborés.

Sans partager leur pessimisme, leur expérience et celle d'autres spécialistes nous pousseront tout au long du travail à rester clairvoyant sur les simplifications choisies afin d'éviter d'inutiles désillusions.

Le but essentiel du modèle hydrologique a été évoqué dans le cadre général d'une gestion de retenue. Il réside plus précisément dans l'étude de la fonction de transfert reliant

l'apport en eau de ruissellement et le débit à l'exutoire.

La modélisation devra cerner les particularités des ondes de débit propagées sur le bassin, depuis leur initiation jusqu'à leur tarissement. Elle saura mettre en lumière l'influence sur l'hydrogramme des modifications portées aux conditions d'écoulement par l'homme ou la nature.

Notre démarche au travers de ce chapitre, procède de quelques constatations :

- L'approche physique, par la signification qu'elle confère à ses paramètres et les avantages qu'elle sous-tend, sera préférée à toute autre approche;
- La modélisation s'intéresse à des bassins versants complets, d'une superficie potentielle de plusieurs centaines d'hectares. Sa mise en oeuvre pour de telles applications doit rester raisonnable en moyens et en temps;
- Le caractère quasi-tridimensionnel d'une géométrie (représentation bidimensionnelle avec la hauteur comme propriété intrinsèque de chaque noeud) constitue une richesse de données à exploiter au maximum. Nous travaillerons pour une prise en compte plus générale de la topographie, sans ramener le bassin à une géométrie idéalisée ou à une succession de plans d'écoulement indépendants.

Dans ce contexte, l'approche tridimensionnelle et non-linéaire, tant pour l'écoulement de surface que pour les "pertes", paraît complètement inappropriée.

Passons donc brièvement en revue les hypothèses nécessaires aux développements mathématiques :

- Nous supposerons le fluide incompressible;
- Nous négligerons l'influence de l'impact des gouttes de pluie pour l'établissement des équations, encore que cet aspect puisse être introduit au travers du terme de frottement comme nous le verrons ultérieurement;
- Nous ne ferons, par contre, aucune hypothèse concernant la forme que prend l'écoulement sur l'épaisseur de la lame fluide, pas plus que sur la forme et l'évolution temporelle des contributions évoquées sous le nom générique de pertes;
- Nous rendrons le modèle bidimensionnel par une hypothèse peu restrictive sur l'importance relative de la composante de vitesse perpendiculaire à la lame d'écoulement par rapport aux deux autres;
- Enfin la mise sous forme adimensionnelle nous aidera à évaluer l'importance relative des termes en présence.

Les essais sur modèle et les expériences tirées de la littérature conduiront aux simplifications mathématiques les moins restrictives vis-à-vis de la forme non-linéaire des équations et de la prise en compte de la géométrie. Ce sera le premier pas vers l'approche globale que nous recherchons.

II.3. EQUATIONS HYDRAULIQUES DE BASE

Considérons un volume de fluide V , dont nous suivons le mouvement dans l'espace à trois dimensions ox, oy, oz . Γ désigne la surface extérieure à V et \vec{n} , de composantes n_i , $i = 1, 2, 3$, la normale extérieure à cette surface.

La figure II.1. définit les axes du repère cartésien trirectangle ainsi que les angles qu'ils font avec l'axe vertical oz' passant par leur origine. Ceux-ci permettent une décomposition aisée de l'accélération de la pesanteur, comme le montrent les coupes verticales passant par les axes ox et oy .

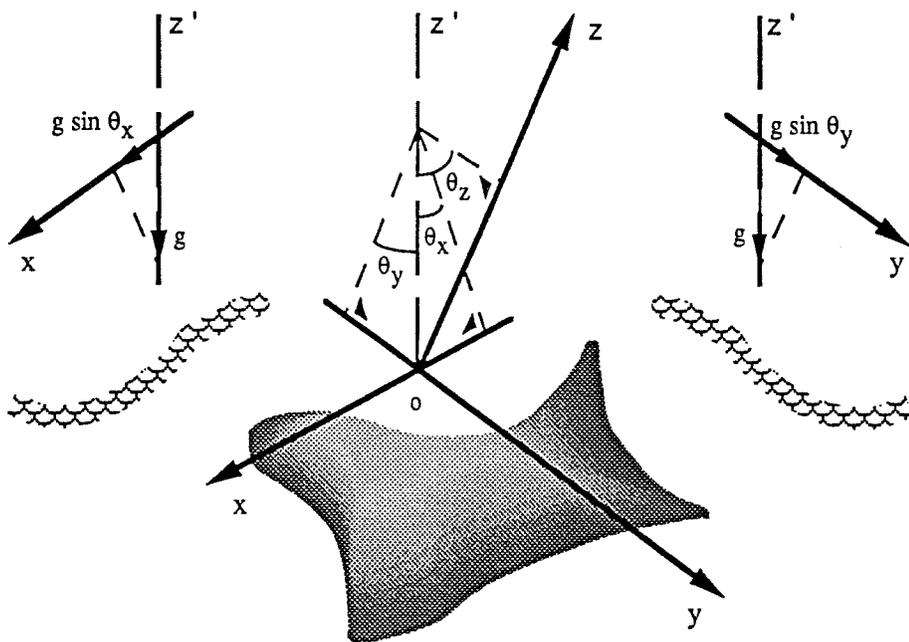


Figure II.1.
Définition des coordonnées cartésiennes et des angles de projection de l'accélération de la pesanteur

Les trois composantes (u, v, w) du vecteur vitesse \vec{v} caractérisent le mouvement d'un fluide que nous supposons incompressible.

En appliquant le principe de conservation de la masse au volume V , on obtient :

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho dV = \iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) dV = \rho \iiint_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dV = 0 \quad (\text{II.1})$$

Nous adopterons les notations suivantes :

$\frac{D}{Dt}$ représente une dérivée totale

$\frac{\partial}{\partial}$ une dérivée partielle

x, y, z les coordonnées cartésiennes

u, v, w les composantes de la vitesse \vec{v} selon les axes correspondants

t le temps

ρ la masse volumique

Comme le volume est arbitraire, l'équation de continuité prend la forme classique :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.2})$$

La seconde loi, écrite sous forme vectorielle, concerne la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho \vec{v} dV = \iiint_V \rho \vec{F} dV + \iint_{\Gamma} \vec{T} d\Gamma \quad (\text{II.3})$$

avec pour définitions :

\vec{F} les forces de volume

→

T les forces de surface, dont chaque composante T_i s'écrit :

$$T_i = (\tau_{ik} - p \delta_{ik})n_k$$

en adoptant la convention de sommation sur les indices répétés.
i, k = 1, 2, 3 correspondent respectivement à x, y, z.

Le tenseur des contraintes se compose donc de :

τ_{ik} le tenseur des contraintes visqueuses du fluide
p la pression

Ecrivons les équations scalaires issues de (II.3) pour un fluide pesant en utilisant le théorème de la divergence de Green pour l'intégrale de surface.

On obtient alors, puisque V est un domaine quelconque, les équations classiques de Navier-Stokes en termes de contraintes, selon les axes ox, oy, oz (Lejeune) :

Selon ox :

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = g \sin \theta_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \quad (II.4)$$

Selon oy :

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = g \sin \theta_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \quad (II.5)$$

Selon oz :

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g \sin \theta_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \quad (II.6)$$

avec g l'accélération de la pesanteur.

L'effet de rotation terrestre a été négligé dans les forces de volume, bien que sa prise en compte ne pose pas de problème particulier (Piroton).

Ce court rappel n'entend pas rétablir des équations différentielles universellement connues. Insistons simplement à ce stade sur le fait que ces équations ponctuelles sont établies à partir de formes intégrales.

II.4. INTEGRATION TEMPORELLE DES EQUATIONS

Nous avons manifesté le souhait de ne pas préjuger, lors de l'établissement des équations, du type d'écoulement au travers de la veine fluide. Nous considérons donc en toute généralité chaque inconnue comme une variable aléatoire de la position et du temps.

Comme l'objectif de notre modèle n'est pas l'étude des fluctuations erratiques instantanées des variables, nous moyennons sur une période caractéristique de ces pulsations, très inférieure aux temps caractéristiques des phénomènes à étudier. Il va sans dire que cette moyenne sera sans effet en laminaire où on suppose nulle toute fluctuation.

Nous parlerons de façon générale d'un mouvement moyen instationnaire puisque les variables moyennes restent dépendantes du temps. La figure II.2. illustre celui-ci lorsqu'il est turbulent.

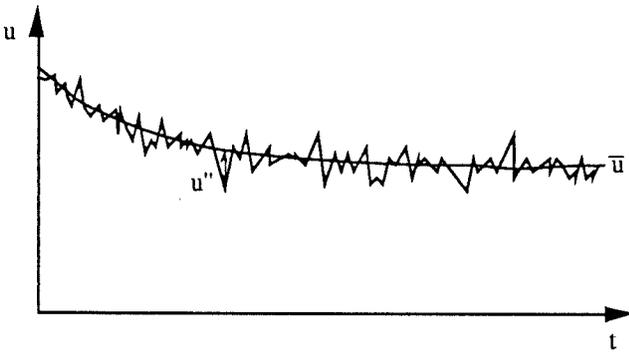


Figure II.2.
Evolution temporelle de la composante selon x de la vitesse instantanée

Nous définissons les notations suivantes :

- u, v, w les composantes instantanées de la vitesse qui se scindent
- en une partie moyenne u^T, v^T, w^T
 - en une fluctuation aléatoire u'', v'', w''

f^T matérialise la moyenne temporelle effectuée sur la variable f .

On a donc par définition :

$$\begin{aligned}
 u &= u^T + u'' & \text{avec} & \quad (u'')^T = 0 \\
 v &= v^T + v'' & \text{avec} & \quad (v'')^T = 0 \\
 w &= w^T + w'' & \text{avec} & \quad (w'')^T = 0
 \end{aligned}
 \tag{II.7}$$

Si nous effectuons cette moyenne sur la continuité (II.2) en respectant les conditions de Reynolds, nous obtenons :

$$\frac{\partial u^T}{\partial x} + \frac{\partial v^T}{\partial y} + \frac{\partial w^T}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.8})$$

Par contre, la forme de certains termes des équations dynamiques (II.4, II.5, II.6) laisse supposer que la décomposition moyenne - fluctuation fera apparaître des termes supplémentaires.

Par commodité pour la suite de l'exposé, nous travaillerons sur les combinaisons suivantes des équations :

(II.4) + u . (II.1) à la place de (II.4)

(II.5) + v . (II.1) à la place de (II.5) (II.9)

(II.6) + w . (II.1) à la place de (II.6)

Elles présentent l'avantage de faire apparaître des dérivées à coefficients constants du type suivant :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (u_i u_k) \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (\text{II.10})$$

où

$$u_1 = u, \quad u_2 = v, \quad u_3 = w$$

Appliquons une moyenne temporelle à ce terme général, en utilisant les propriétés des décompositions de Reynolds

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k} (u_i u_k) \right)^T = \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i^T u_k^T) + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i'' u_k'') \quad (\text{II.11})$$

et remplaçons ce résultat dans (II.9) pour établir des équations dynamiques moyennes :

Selon ox :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u^T u^T) + \frac{\partial}{\partial y} (u^T v^T) + \frac{\partial}{\partial z} (u^T w^T) &= g \sin \theta_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^T}{\partial x} \\ + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx}^T + \rho u'' u'') + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx}^T + \rho v'' u'') + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx}^T + \rho w'' u'') \right) & \quad (\text{II.12}) \end{aligned}$$

Selon oy

$$\frac{\partial v^T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v^T u^T) + \frac{\partial}{\partial y}(v^T v^T) + \frac{\partial}{\partial z}(v^T w^T) = g \sin \theta_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^T}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy}^T + \rho u^T v^T) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yy}^T + \rho v^T v^T) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zy}^T + \rho w^T v^T) \right) \quad (II.13)$$

Selon oz

$$\frac{\partial w^T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(w^T u^T) + \frac{\partial}{\partial y}(w^T v^T) + \frac{\partial}{\partial z}(w^T w^T) = -g \sin \theta_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^T}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xz}^T + \rho u^T w^T) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yz}^T + \rho v^T w^T) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zz}^T + \rho w^T w^T) \right) \quad (II.14)$$

En comparant ces expressions avec les équations (II.9), nous constatons une similarité mathématique, à condition d'ajouter aux contraintes visqueuses des contraintes de turbulence qui portent le nom de tensions de Reynolds. La décomposition moyenne - fluctuation "simplifie" un système où n'intervient désormais que l'effet global des fluctuations au travers d'un tenseur symétrique à six inconnues.

Ces dernières nécessitent d'autres relations sans nouvelle inconnue pour fermer le système. Elles modéliseront la diffusion que créent les fluctuations en cisillant l'écoulement moyen, processus beaucoup plus efficace que celui généré par les tensions visqueuses.

C'est précisément l'importante différence de grandeur entre les deux phénomènes qui nous autorise à unir contraintes visqueuses et turbulentes sous la notation :

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij}^T + \rho u_i^T u_j^T \quad (II.15)$$

i, j = 1, 2, 3 correspondant respectivement à x, y, z.

Compte tenu de l'identité mathématique des équations instantanées et moyennes, nous supprimons les marques "T" de moyenne sur chaque variable afin de ne pas alourdir davantage l'écriture.

II.5. PASSAGE EN BIDIMENSIONNEL

La première étape vers une indispensable simplification du modèle passe par une mise sous forme adimensionnelle des équations. Elle permet, par l'énoncé d'une condition peu

restrictive, de simplifier de façon drastique l'équation dynamique selon l'axe oz.

Soient :

h_0 une épaisseur caractéristique de la lame d'écoulement selon l'axe oz

u_0, v_0, w_0 des vitesses caractéristiques selon chaque axe.

q_0 une vitesse caractéristique selon la droite de plus grande pente, obtenue par une combinaison linéaire des vitesses caractéristiques u_0 et v_0 .

Avec ces valeurs, construisons deux longueurs caractéristiques suivant les axes ox et oy en s'aidant du rapport des vitesses caractéristiques :

$$\lambda_x = h_0 \cdot \frac{u_0}{w_0} \quad (\text{II.16})$$

$$\lambda_y = h_0 \cdot \frac{v_0}{w_0} \quad (\text{II.17})$$

Les vitesses caractéristiques selon les 3 axes sont comparées à la vitesse caractéristique q_0 au travers des définitions suivantes :

$$\varepsilon_x = \frac{u_0}{q_0} \quad (\text{II.18})$$

$$\varepsilon_y = \frac{v_0}{q_0} \quad (\text{II.19})$$

$$\varepsilon_z = \frac{w_0}{q_0} \quad (\text{II.20})$$

Choisissons le temps caractéristique en considérant les axes d'écoulement :

$$t_0 = \frac{\lambda_x}{u_0} = \frac{\lambda_y}{v_0} = \frac{h_0}{w_0} \quad (\text{II.21})$$

Nous pouvons rendre fort logiquement adimensionnelles les coordonnées et le temps par :

$$x' = \frac{x}{\lambda_x} \quad (\text{II.22})$$

$$y' = \frac{y}{\lambda_y} \quad (\text{II.23})$$

$$z' = \frac{z}{h_o} \quad (\text{II.24})$$

$$t' = \frac{t}{t_o} = \frac{w_o}{h_o} \cdot t \quad (\text{II.25})$$

tandis qu'on déduira alors les vitesses adimensionnelles :

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{1}{u_o} \frac{dx}{dt} = \frac{u}{u_o} \quad (\text{II.26})$$

$$v' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{1}{v_o} \frac{dy}{dt} = \frac{v}{v_o} \quad (\text{II.27})$$

$$w' = \frac{dz'}{dt'} = \frac{1}{w_o} \frac{dz}{dt} = \frac{w}{w_o} \quad (\text{II.28})$$

Enfin, nous prenons pour justifier la pression adimensionnelle un axe principal d'écoulement le long duquel se développent essentiellement des gradients de pression :

$$p' = \frac{p}{\rho q_o^2} \quad (\text{II.29})$$

Parallèlement à cette définition, la gravité adimensionnelle devient :

$$g' = \frac{gh_o}{q_o^2} \quad (\text{II.30})$$

et pour la forme adimensionnelle des contraintes visqueuses :

$$\sigma'_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{\rho u_o^2} \quad (\text{II.31})$$

$$\sigma'_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\rho u_o v_o} \quad (\text{II.32})$$

$$\sigma'_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{\rho u_o w_o} \quad (\text{II.33})$$

$$\sigma'_{yx} = \frac{\sigma_{yx}}{\rho v_o u_o} \quad (\text{II.34})$$

$$\sigma'_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{\rho v_o^2} \quad (\text{II.35})$$

$$\sigma'_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{\rho v_o w_o} \quad (\text{II.36})$$

$$\sigma'_{zx} = \frac{\sigma_{zx}}{\rho w_o u_o} \quad (\text{II.37})$$

$$\sigma'_{zy} = \frac{\sigma_{zy}}{\rho w_o v_o} \quad (\text{II.38})$$

$$\sigma'_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{\rho w_o^2} \quad (\text{II.39})$$

En introduisant toutes ces relations dans l'équation de continuité (II.8), nous obtenons après manipulations la forme adimensionnelle suivante :

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0 \quad (\text{II.40})$$

Procédons de même pour les équations dynamiques.

(II.12) s'écrit selon ox :

$$\epsilon_x \epsilon_z \left(\frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{\partial u'u'}{\partial x'} + \frac{\partial u'v'}{\partial y'} + \frac{\partial u'w'}{\partial z'} \right) = g' \sin \theta_x - \frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \epsilon_x \epsilon_z \left(\frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x'} + \frac{\partial \sigma'_{yx}}{\partial y'} + \frac{\partial \sigma'_{zx}}{\partial z'} \right)$$

(II.41)

(II.13) s'écrit selon oy :

$$\varepsilon_y \varepsilon_z \left(\frac{\partial v'}{\partial t'} + \frac{\partial v'u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'v'}{\partial z'} \right) = g' \sin \theta_y - \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_y} \frac{\partial p'}{\partial y'} + \varepsilon_y \varepsilon_z \left(\frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial x'} + \frac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial y'} + \frac{\partial \sigma'_{zy}}{\partial z'} \right) \quad (\text{II.42})$$

(II.14) s'écrit selon oz :

$$\varepsilon_z^2 \left(\frac{\partial w'}{\partial t'} + \frac{\partial w'u'}{\partial x'} + \frac{\partial w'v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'w'}{\partial z'} \right) = -g' \sin \theta_z - \frac{\partial p'}{\partial z'} + \varepsilon_z^2 \left(\frac{\partial \sigma'_{xz}}{\partial x'} + \frac{\partial \sigma'_{yz}}{\partial y'} + \frac{\partial \sigma'_{zz}}{\partial z'} \right) \quad (\text{II.43})$$

Venons-en aux hypothèses qui portent, comme le laisse entrevoir la forme particulière des équations, sur le terme ε_z .

Nous supposons que le carré de ce rapport entre la vitesse perpendiculaire à la lame et la combinaison des vitesses u, v selon la plus grande pente est petit vis-à-vis de l'unité.

L'équation (II.43) adopte alors une forme dépouillée des termes multipliés par ε_z^2 . Elle évoque une distribution hydrostatique de la pression selon l'axe oz :

$$\frac{\partial p'}{\partial z'} = -g' \sin \theta_z \quad (\text{II.44})$$

Le système ne subit aucune autre simplification. Le raisonnement tenu dans ce paragraphe appelle quelques commentaires tant sur le fond que sur la forme :

- Le choix d'un système d'axes inclinés sur la verticale trouve ici sa pleine justification. Il rappelle que l'hydrostaticité de la pression selon un axe vertical n'est une hypothèse raisonnable que dans le cas particulier d'une topographie à faible pente sur laquelle l'écoulement devient quasi-horizontal.
- L'hypothèse sur les vitesses paraît d'autant plus acceptable qu'on raisonne sur le carré d'un rapport.

Notons qu'un choix de trois longueurs caractéristiques selon les axes et d'une vitesse caractéristique selon la plus grande pente donnerait des simplifications identiques en raisonnant cette fois directement sur le carré d'un rapport très disproportionné d'échelle d'écoulement.

Quelle que soit la méthode retenue, l'hypothèse se justifie moins aisément lorsqu'on s'attarde très localement sur des singularités topographiques comme des brusques cassures de pentes.

Enfin, il faudrait, en toute rigueur, vérifier a posteriori l'ordre de grandeur de tous les termes multipliés par ε_z^2 .

- L'effet sur les équations d'une hypothèse apparemment peu restrictive nous ramène à la méthode elle-même.

Parler d'une seule hypothèse sur ε_z , c'est ignorer le choix sous-jacent opéré dans la mise en forme adimensionnelle des variables. Il y a là une reconnaissance implicite d'un plan prédominant d'écoulement défini par les axes ox , oy et d'une direction préférentielle d'écoulement selon la plus grande pente.

On jugera à la fois de la puissance et des dangers de cette méthode à appliquer avec le plus grand soin.

II.6. INTEGRATION SPATIALE DES EQUATIONS

Les simplifications réalisées en adimensionnel ne donnent pas encore une forme bidimensionnelle. Nous allons obtenir cette réduction des dimensions en effectuant une intégration sur la hauteur d'eau (sur les équations (II.40), (II.41), (II.42), (II.44) rendues dimensionnelles).

La figure II.3. définit l'espace physique à considérer, illustre ses frontières et présente ses échanges avec le monde extérieur.

h_f désigne la distance, selon l'axe oz , du plan (ox, oy) au sol.

h_s la distance, selon le même axe, du plan (ox, oy) à la surface libre.

La distance selon oz entre les deux plans limites d'écoulement s'écrit :

$$h = h_f + h_s \quad (II.45)$$

Le système est alimenté par des précipitations r tandis que l'eau s'infiltre dans le sol à une vitesse i . Ces deux vitesses sont mesurées traditionnellement selon un axe vertical.

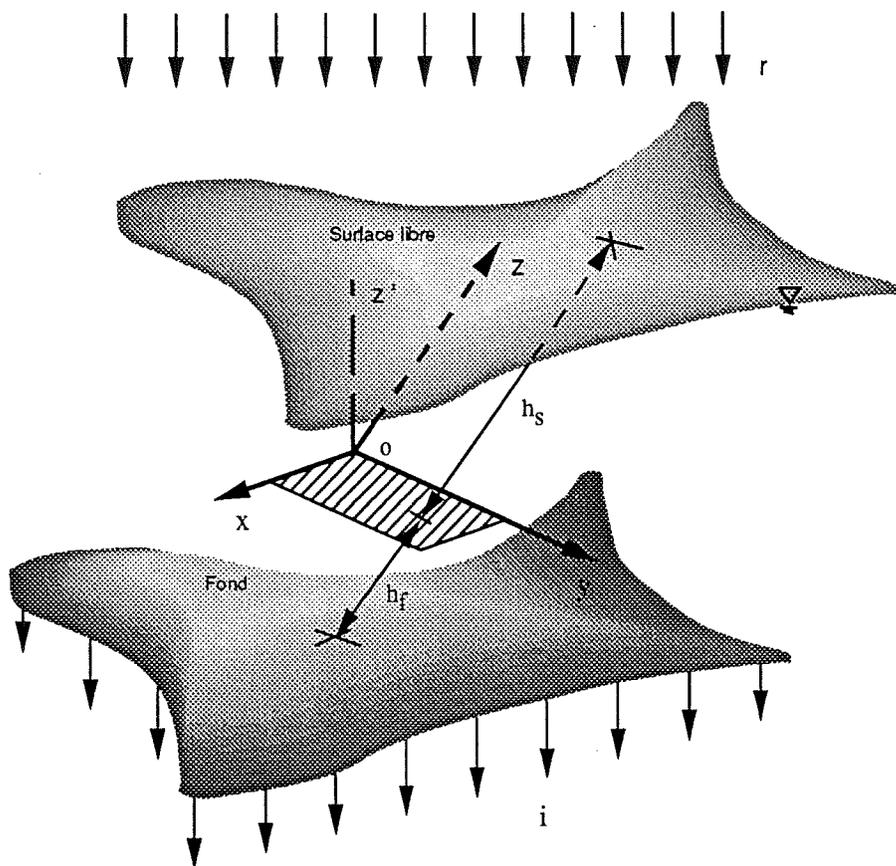


Figure II.3.
Définition des frontières d'intégration selon l'axe oz

II.6.1. Intégration suivant la profondeur locale

Intégrons l'équation de continuité (II.8.) selon oz en utilisant la formule de Leibnitz qui s'écrit pour une fonction f :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h_f}^{h_s} f \, dz = \int_{-h_f}^{h_s} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dz + f_{|z=h_s} \frac{\partial h_s}{\partial x_i} - f_{|z=-h_f} \frac{\partial (-h_f)}{\partial x} \quad (\text{II.46})$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} h + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_f}^{h_s} u \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h_f}^{h_s} v \, dz + \left(w_{|z=h_s} - u_{|z=h_s} \frac{\partial h_s}{\partial x} - v_{|z=h_s} \frac{\partial h_s}{\partial y} \right) \\ - \left(w_{|z=-h_f} - u_{|z=-h_f} \frac{\partial(-h_f)}{\partial x} - v_{|z=-h_f} \frac{\partial(-h_f)}{\partial y} \right) \\ = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

L'intégration de l'équation (II.44), mise sous forme dimensionnelle, donne de façon immédiate :

$$p = \rho g(h_s - z) \sin \theta_z \quad (\text{II.48})$$

en tenant compte d'une pression relative nulle à la surface libre.

Si nous remplaçons la pression par son expression (II.48) dans les équations dynamiques (II.41, II.42) sous forme dimensionnelle, nous obtenons respectivement :

Selon ox :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h_f}^{h_s} u \, dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_f}^{h_s} uu \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h_f}^{h_s} uv \, dz \\ = gh \sin \theta_x - gh \frac{\partial h_s}{\partial x} \sin \theta_z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_f}^{h_s} \sigma_{xx} \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h_f}^{h_s} \sigma_{yx} \, dz \right) \\ + u_{|z=-h_f} \left(\frac{\partial(-h_f)}{\partial t} + u_{|z=-h_f} \frac{\partial(-h_f)}{\partial x} + v_{|z=-h_f} \frac{\partial(-h_f)}{\partial y} - w_{|z=-h_f} \right) \\ - u_{|z=h_s} \left(\frac{\partial h_s}{\partial t} + u_{|z=h_s} \frac{\partial h_s}{\partial x} + v_{|z=h_s} \frac{\partial h_s}{\partial y} - w_{|z=h_s} \right) \\ + \left(\sigma_{zx|z=-h_f} - \sigma_{xx|z=-h_f} \frac{\partial(-h_f)}{\partial x} - \sigma_{yx|z=-h_f} \frac{\partial(-h_f)}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

$$-\left(\sigma_{zx}|_{z=h_s} - \sigma_{xx}|_{z=h_s} \frac{\partial h_s}{\partial x} - \sigma_{yx}|_{z=h_s} \frac{\partial h_s}{\partial y} \right) \quad (\text{II.49})$$

Selon oy :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h_f}^{h_s} v \, dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_f}^{h_s} vu \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h_f}^{h_s} vv \, dz \\ &= gh \sin \theta_y - gh \frac{\partial h_s}{\partial y} \sin \theta_z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_f}^{h_s} \sigma_{xy} \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h_f}^{h_s} \sigma_{yy} \, dz \right) \\ &+ v_{|z=-h_f} \left(\frac{\partial(-h_f)}{\partial t} + u_{|z=-h_f} \frac{\partial(-h_f)}{\partial x} + v_{|z=-h_f} \frac{\partial(-h_f)}{\partial y} - w_{|z=-h_f} \right) \\ &- v_{|z=h_s} \left(\frac{\partial h_s}{\partial t} + u_{|z=h_s} \frac{\partial h_s}{\partial x} + v_{|z=h_s} \frac{\partial h_s}{\partial y} - w_{|z=h_s} \right) \\ &+ \left(\sigma_{zy}|_{z=-h_f} - \sigma_{xy}|_{z=-h_f} \frac{\partial(-h_f)}{\partial x} - \sigma_{yy}|_{z=-h_f} \frac{\partial(-h_f)}{\partial y} \right) \\ &- \left(\sigma_{zy}|_{z=h_s} - \sigma_{xy}|_{z=h_s} \frac{\partial h_s}{\partial x} - \sigma_{yy}|_{z=h_s} \frac{\partial h_s}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.50})$$

L'intégration selon l'axe z nécessite des conditions à imposer sur les frontières extérieures matérialisées par le fond et la surface libre. Elles établissent des relations entre les valeurs des variables aux frontières qui apparaissent dans les équations.

Ces conditions sont de deux types :

- Il faut préciser d'abord le comportement du fluide aux frontières, son mouvement relatif par rapport à elles, ce que nous nommons conditions cinématiques.
- Il convient également d'établir des équilibres de forces à ces mêmes frontières. Ce sont les conditions dynamiques.

II.6.2. Conditions cinématiques

Nous envisageons d'abord le comportement du fluide au voisinage du fond.

Considérons une topographie quelconque, variable avec le temps (soumise à l'érosion par exemple). Même si une telle généralité ne s'impose pas, nous verrons qu'elle n'entrave pas la simplification de l'expression des composantes de vitesse évaluées au fond.

L'équation d'une telle surface peut s'écrire :

$$z = -h_f(x, y, t) \quad (\text{II.51})$$

Désignons par $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ les composantes de la trajectoire d'une particule fluide. Si le fond était imperméable, nous imposerions une condition de non-décollement du fluide par rapport à la paroi.

C'est sans compter sur l'infiltration qui joue un rôle prépondérant dans le processus hydrologique.

Nous exprimerons par conséquent que la vitesse différentielle selon oz entre une particule qui suivrait le fond et celle du liquide au même endroit est égale à la composante de la vitesse d'infiltration selon le même axe.

En introduisant les composantes de la trajectoire dans (II.51) et compte tenu de la définition des composantes de la vitesse, il vient :

$$\frac{\partial(-h_f)}{\partial t} + u_{|z=-h_f} \frac{\partial(-h_f)}{\partial x} + v_{|z=-h_f} \frac{\partial(-h_f)}{\partial y} - w_{|z=-h_f} = i \sin \theta_z \quad (\text{II.52})$$

i est positif quand l'eau s'infiltré dans le sol.

Si nous raisonnons de façon identique pour la surface libre d'équation $z = h_s(x, y, t)$ vis-à-vis des précipitations, nous écrivons :

$$\frac{\partial h_s}{\partial t} + u_{|z=h_s} \frac{\partial h_s}{\partial x} + v_{|z=h_s} \frac{\partial h_s}{\partial y} - w_{|z=h_s} = r \sin \theta_z \quad (\text{II.53})$$

Ces deux relations introduisent dans les équations bidimensionnelles les apports, suivant l'axe intégré, du monde extérieur au système. Elles donnent une forme définitive à l'équation de continuité intégrée (II.47) :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}h}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}h}{\partial y} = (r - i) \sin \theta_z \quad (\text{II.54})$$

à condition de définir les vitesses moyennes sur la profondeur :

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_{-h_f}^{h_s} u \, dz \qquad \bar{v} = \frac{1}{h} \int_{-h_f}^{h_s} v \, dz \qquad (\text{II.55})$$

II.6.3. Conditions dynamiques

La valeur des contraintes aux frontières est liée aux forces qu'exerce le monde extérieur sur le système.

L'équilibre des forces à la surface libre se déduit du volume élémentaire représenté à la figure II.4.

Un plan perpendiculaire à l'axe oz passe par le point A de la surface libre. Le point constitue un des sommets d'un rectangle infinitésimal de dimensions dx , dy . Par les trois autres sommets B, C, D, des parallèles à oz percent la surface libre respectivement en B', C', D'.

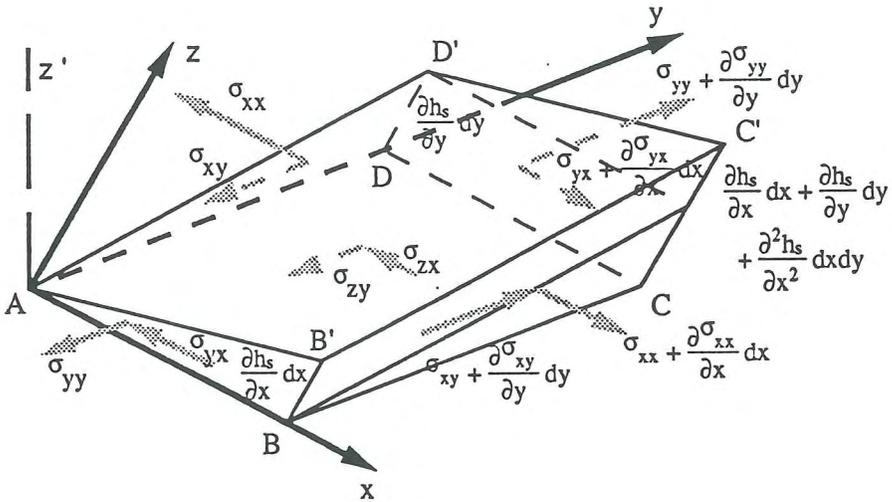


Figure II.4.
Equilibre d'un volume élémentaire de la surface libre

Si on néglige les forces extérieures susceptibles d'agir sur la facette A B' C' D', par exemple l'effet du vent, les contraintes sur les autres facettes s'équilibrent comme suit :

Selon ox :

$$\left(\sigma_{zx}|_{z=h_s} - \sigma_{xx}|_{z=h_s} \frac{\partial h_s}{\partial x} - \sigma_{yx}|_{z=h_s} \frac{\partial h_s}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (II.56)$$

Selon oy :

$$\left(\sigma_{zy}|_{z=h_s} - \sigma_{xy}|_{z=h_s} \frac{\partial h_s}{\partial x} - \sigma_{yy}|_{z=h_s} \frac{\partial h_s}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (II.57)$$

Négligeons de même les termes d'ordre supérieur pour établir, sur une construction similaire, l'équilibre d'un volume élémentaire de fluide sur le fond. En tenant compte des composantes du frottement sur le sol, t_x et t_y , il vient :

Selon ox :

$$\left(\sigma_{zx}|_{z=-h_f} - \sigma_{xx}|_{z=-h_f} \frac{\partial(-h_f)}{\partial x} - \sigma_{yx}|_{z=-h_f} \frac{\partial(-h_f)}{\partial y} \right) dx dy = t_x dx dy \quad (II.58)$$

Selon oy :

$$\left(\sigma_{zy}|_{z=-h_f} - \sigma_{xy}|_{z=-h_f} \frac{\partial(-h_f)}{\partial x} - \sigma_{yy}|_{z=-h_f} \frac{\partial(-h_f)}{\partial y} \right) dx dy = t_y dx dy \quad (II.59)$$

L'introduction de ces relations dans (II.49) et (II.50) fait disparaître l'évolution aux frontières de toute tension. Rappelons encore que t_x et t_y incluent l'effet d'éventuelles perturbations turbulentes.

II.6.4. Equations bidimensionnelles complètes

Les équations ainsi simplifiées contiennent encore certaines évaluations des composantes de vitesses aux extrémités [termes multiplicatifs des conditions cinématiques dans (II.49) et (II.50)], ainsi que deux types de termes qui gênent l'établissement d'une formulation purement bidimensionnelle :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h_f}^{h_s} u_i u_j dz \quad (\text{II.60})$$

$i = 1, 2$ correspondant respectivement à x, y

et

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_f}^{h_s} \sigma_{ij} dz \quad (\text{II.61})$$

Il conviendrait d'exprimer toutes ces expressions en fonction des inconnues moyennées définies en (II.55) et de la profondeur. Par conséquent, une indication supplémentaire concernant la distribution des vitesses sur la profondeur s'impose.

- Elle règle le problème des vitesses aux frontières qui s'expriment dès lors comme une fraction des vitesses moyennes correspondantes par :

$$u_{i|z=-h_f} = K_{if} \bar{u}_i \quad (\text{II.62})$$

$$u_{i|z=h_s} = K_{is} \bar{u}_i$$

$i = 1, 2$ correspondent respectivement à x, y .

- Elle permet d'évaluer des nombres sans dimension que nous définissons comme suit :

$$\rho_{ij} = \frac{1}{\bar{u}_i \bar{u}_j h} \int_{-h_f}^{h_s} u_i u_j dz \quad (\text{II.63})$$

$i, j = 1, 2$

Ils dépendent de la forme des diagrammes des vitesses et non de leur amplitude. Nous reviendrons plus en détail sur ces coefficients adimensionnels lorsque nous étudierons leur équivalent dans l'écoulement unidimensionnel (chapitre X).

- Enfin, elle permet l'intégration sur la hauteur des tensions visqueuses ou turbulentes, dès lors qu'on exprime celles-ci en fonction des valeurs moyennes.

Compte tenu de l'hypothèse naturelle d'un fluide newtonien et de la discussion qui précède, nous écrirons chacun des termes sous une forme S_{ij} qui indique que leur évaluation en fonction des variables bidimensionnelles est possible.

La synthèse de ces dernières définitions donne aux équations dynamiques (II.49) et (II.50) la forme définitive suivante :

Selon ox :

$$\frac{\partial(\bar{u}h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_{xx} \bar{u}^2 h \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho_{xy} \bar{u} \bar{v} h \right) = gh \left(\sin \theta_x - \sin \theta_z \frac{\partial h_s}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} (S_{xx} + S_{yx}) + \sin \theta_z (K_{xf} i - K_{xs} r) \bar{u} + t_x \quad (II.64)$$

Selon oy :

$$\frac{\partial(\bar{v}h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_{xy} \bar{u} \bar{v} h \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho_{yy} \bar{v}^2 h \right) = gh \left(\sin \theta_y - \sin \theta_z \frac{\partial h_s}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} (S_{yx} + S_{yy}) + \sin \theta_z (K_{yf} i - K_{ys} r) \bar{v} + t_y \quad (II.65)$$

L'établissement des équations montre donc qu'un modèle mathématique bidimensionnel de l'écoulement superficiel résulte d'hypothèses peu restrictives.

Certains auteurs les nuancent encore davantage.

Chen et al, Taylor et al, par exemple, supposent négligeables les vitesses verticales sur l'épaisseur de la lame à l'exception de la surface libre qui subit l'impact des gouttes de pluie. A la pression hydrostatique se superpose alors une pression dynamique d'amplitude et de distribution inconnues. Dans la plupart des cas, l'annulation de cette nouvelle composante met un terme à la recherche d'une expression justifiable a priori pour cette nouvelle inconnue (Kawahara et al).

Il ne faut pas pour autant en déduire que nous renonçons à considérer l'effet de l'impact des gouttes sur la lame fluide. Cet effet sera mis en évidence et intégré dans une formulation globale des termes de frottement.

Ces relations fondamentales constituent une base possible pour un modèle numérique d'écoulement hydrologique. La variété des problèmes naturels où deux dimensions spatiales priment sur la troisième a d'ailleurs provoqué le foisonnement dans la littérature de méthodes numériques aptes à résoudre un tel système différentiel. Nous en proposons une en 1986, applicable à des problèmes aussi différents que la modélisation des marées dans la Mer du Nord ou l'embouchure de l'Escaut.

En conclusion, même si la résolution du système reste complexe, avec des calculs longs et délicats, soumis à d'éventuelles difficultés numériques, l'entreprise est numériquement envisageable.

Reste à savoir si elle est raisonnable dans le contexte que nous nous sommes fixé. Se justifie-t-elle seulement dans le cadre des possibilités informatiques actuelles ? Nous consacrons le paragraphe suivant à répondre à ces questions.

II.7. SIMPLIFICATION DES EQUATIONS

Pour être perçus comme une alternative crédible aux méthodes plus traditionnelles, les modèles hydrologiques basés sur la physique de l'écoulement doivent donner des processus les plus simples une image conforme à la réalité.

Cet état d'esprit a notamment conduit nombre d'hydrologistes à entreprendre l'étude théorique et sur modèles réduits de géométries élémentaires, particulièrement les plans inclinés, pour l'écoulement unidimensionnel qu'ils suscitent.

Soucieux d'abord d'apporter certains éléments de réponse sur la validité des simplifications mathématiques possibles, nous étudierons momentanément cet écoulement simplifié en nous aidant des travaux par exemple de Woolhizer et al, Morris ou Vieira. Ils nous orienteront dans la recherche du modèle bidimensionnel beaucoup plus général que nous souhaitons développer.

Les équations unidimensionnelles utilisées dans la littérature présentent une forme quelque peu différente des nôtres. Evoquons d'abord les hypothèses supplémentaires qui rendent une totale identité mathématique entre les systèmes d'équations, afin de mieux comprendre le contexte dans lequel les résultats bibliographiques peuvent être exploités.

- Compte tenu du mouvement unidimensionnel selon l'axe ox , ce dernier forme avec l'axe oz un plan vertical où s'établit une relation simple entre les angles θ_x , θ_z :

$$\theta_x = \frac{\pi}{2} - \theta_z = \theta \quad (\text{II.66})$$

- Nous supposons une répartition uniforme de \bar{u} sur la hauteur, ce qui ramène à l'unité la valeur du coefficient adimensionnel d'inégale répartition de la vitesse ρ_{xx} . Cette hypothèse très largement utilisée se double souvent d'une autre beaucoup plus tacite :

- Le terme $(K_{XS} \bar{u} r \cos \theta)$ de l'équation (II.64) représente la contribution de la pluie à la composante de quantité de mouvement dans le sens de l'écoulement. Il est généralement admis en première approximation que cette contribution est négligeable.

Or cette hypothèse semble entrer en contradiction avec une répartition uniforme de la vitesse jusqu'à la surface. En effet, elle revient à attribuer cette même composante à la pluie considérée ici comme faisant partie d'un même milieu continu. Il faudrait donc à la fois obtenir un diagramme uniforme et annuler la composante de vitesse selon x à la surface pour la pluie (autrement dit annuler K_{XS}).

Cette ambiguïté ne peut être levée qu'en supposant l'existence d'une fine tranche de fluide à la surface qui assure la transition rapide de \bar{u} . Nous retrouvons là une certaine identité avec Chow qui considère également une tranche de transition pour établir ses équations.

Soulignons encore que ce raisonnement trouve son équivalent sur le fond d'écoulement pour annuler le coefficient K_{xf} .

- Enfin, l'intégrale de la composante rhéologique dans le sens de l'écoulement sera négligée. Nous avons déjà montré (1986) que des valeurs usuelles de la viscosité ne créaient aucun effet significatif dans les écoulements progressifs. Sa présence trouvera meilleure justification dans les processus discontinus en rivière que nous étudierons dès le chapitre XI.

Nous obtenons alors le système simplifié suivant :

$$(II.54) \equiv \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}h)}{\partial x} = (r - i) \cos \theta \quad (II.67)$$

$$\frac{(II.64) - \bar{u} (II.54)}{h} \equiv \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} \cos \theta = g \sin \theta + \frac{t_x}{h} - (r-i) \frac{\bar{u}}{h} \cos \theta \quad (II.68)$$

Exprimons ces équations sous une forme adimensionnelle qui met en évidence des paramètres utiles à la classification des diverses approximations possibles.

Désignons par q_0 le débit uniforme à l'exutoire, c'est à dire en $x = l_0$ où l_0 représente la longueur caractéristique d'écoulement. Soit h_0 , la profondeur de la lame à l'exutoire et u_0 la vitesse uniforme au même endroit.

Nous obtenons par définition et continuité :

$$q_0 = h_0 u_0 = (r - i) l_0 \cos \theta \quad (II.69)$$

Les grandeurs u_0 , h_0 sont liées par la définition de la vitesse uniforme qui prend une forme caractéristique du type d'écoulement. Nous nous contenterons d'une expression laconique qui sera développée au chapitre III :

$$\sin \theta = \alpha \frac{u_0^\beta}{h_0^\gamma} \quad (\text{II.70})$$

avec α , γ positifs.

Nous exprimons fort logiquement un temps caractéristique par :

$$t_0 = \frac{l_0}{u_0} \quad (\text{II.71})$$

Des relations (II.69) à (II.71) sont déduites les formes adimensionnelles des coordonnées et des variables

$$x^* = \frac{x}{l_0} \quad (\text{II.72})$$

$$t^* = \frac{t}{t_0} \quad (\text{II.73})$$

$$h^* = \frac{h}{h_0} \quad (\text{II.74})$$

$$u^* = \frac{\bar{u}}{u_0} \quad (\text{II.75})$$

qui déterminent la forme adimensionnelle suivante pour la continuité (II.67) :

$$\frac{\partial h^*}{\partial t^*} + \frac{\partial (u^* h^*)}{\partial x^*} = 1 \quad (\text{II.76})$$

Dans l'équation dynamique (II.68), $-\frac{t_x}{gh}$ est un nombre pur qui porte habituellement le nom de pente de frottement (S_f). On lui attribue généralement une forme mathématique identique à celle du mouvement uniforme correspondant.

Compte tenu de cette remarque, l'introduction dans (II.68) des formes adimensionnelles donne tous calculs faits :

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{gh_o \cos \theta}{u_o^2} \frac{\partial h^*}{\partial x^*} = \frac{l_o g \sin \theta}{u_o^2} \left(1 - \frac{u^{*\beta}}{h^{*\gamma}} \right) - \frac{u^*}{h^*} \quad (\text{II.77})$$

Elle met en évidence l'existence de deux paramètres : le nombre de Froude f_o ainsi que le nombre d'onde cinématique k_o , cité la première fois par Woolhizer et Liggett en 1967 :

$$f_o^2 = \frac{u_o^2}{gh_o \cos \theta} \quad (\text{II.78})$$

$$k_o = \frac{l_o g \sin \theta}{u_o^2} = \frac{l_o \operatorname{tg} \theta}{h_o f_o^2} \quad (\text{II.79})$$

Leurs valeurs relatives donnent lieu à trois approximations possibles de l'équation dynamique :

- Lorsque k_o prend une valeur importante, on obtient l'équation caractéristique de l'onde cinématique, qui s'écrit :

$$u^{*\beta} = h^{*\gamma} \quad (\text{II.80})$$

- Par contre, si sa valeur est négligeable, l'équation dynamique se réduit à l'approximation de l'onde de gravité :

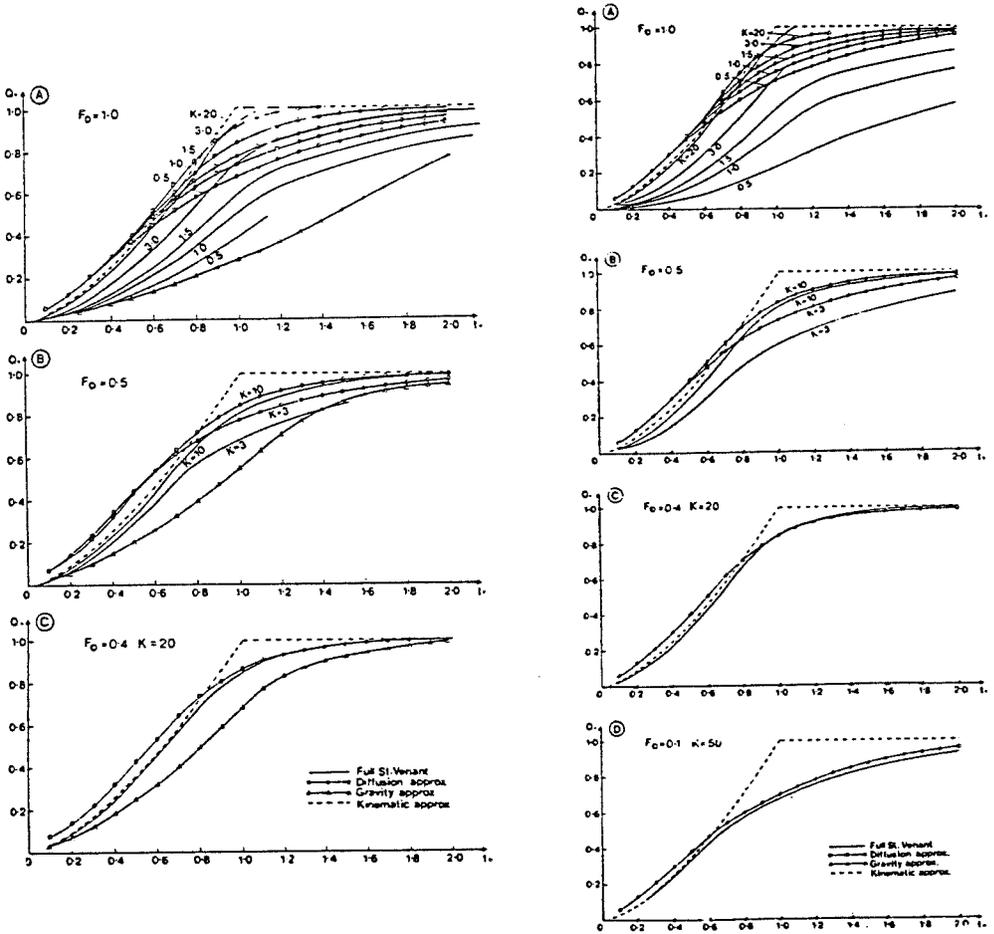
$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{1}{f_o^2} \frac{\partial h^*}{\partial x^*} + \frac{u^*}{h^*} = 0 \quad (\text{II.81})$$

- Enfin, l'équation de l'onde de diffusion découle d'un nombre de Froude négligeable, dont le produit avec k_o garde une valeur significative. (II.77) prend alors la forme suivante :

$$\frac{\partial h^*}{\partial x^*} = f_o^2 k_o \left(1 - \frac{u^{*\beta}}{h^{*\gamma}} \right) \quad (\text{II.82})$$

Mais qu'entend-on au juste par valeurs négligeable, significative ou importante ?

Woolhizer et al apportent une première réponse. Surmontant les difficultés numériques inhérentes aux valeurs extrêmes des paramètres, ils fixent à 10 la limite de k_0 au-delà de laquelle l'onde cinématique approxime valablement les équations complètes. Pour cette valeur, l'erreur maximale entre hydrogrammes complet et approximé n'excède pas 10 % pour décroître rapidement lorsque k_0 augmente.



Imposition d'une vitesse critique à l'aval

Imposition d'un gradient de hauteur nul à l'aval

Figure II.5.
Naissance et stabilisation d'hydrogrammes normalisés. Solutions pour un mouvement turbulent avec $\alpha = \frac{1}{2}$ $\beta = 1$ par Vieira (1983).

Al-Mashidani et Taylor entreprennent une étude similaire par éléments finis et concluent que la borne inférieure de k_0 pour passer à l'onde cinématique doit être revue d'autant plus à la hausse que le nombre de Froude est petit, comme le montre la figure II.5.

Ils mettent également en exergue l'influence de la condition limite à l'aval, dont l'effet s'estompe d'autant plus que k_0 grandit : plus la pente et le frottement dominant l'écoulement, plus ce dernier "oublie" rapidement la condition aval (Napiorkowski et al).

Celle-ci pose d'ailleurs un problème de correspondance physique avec la réalité : *s'il faut envisager une transition de l'écoulement hydrologique en fine lame à l'écoulement en ruisseau, comment imaginer qu'elle s'apparente davantage à un déversement à vitesse critique qu'à un gradient constant de profondeur d'eau par exemple ?*

Son effet sur les résultats doit être précisé tout comme le comportement de l'onde dissipative pour laquelle nous n'avons donné aucun résultat concret.

Morris et Vieira abordent ces interrogations en balayant tout le champ des paramètres pour les trois approximations possibles soumises à deux types de conditions limites aval.

La figure II.5. confirme la synthèse de Vieira qui estime, tous effets confondus, nécessaire une valeur de 50 au moins pour k_0 lorsqu'on recherche une correspondance satisfaisante entre équations complètes et approximation de l'onde cinématique.

Par une étude statistique systématique, il établit les zones de validité de chaque approximation dans le plan f_0, k_0 . Elles sont reproduites à la figure II.6. pour chaque condition limite aval.

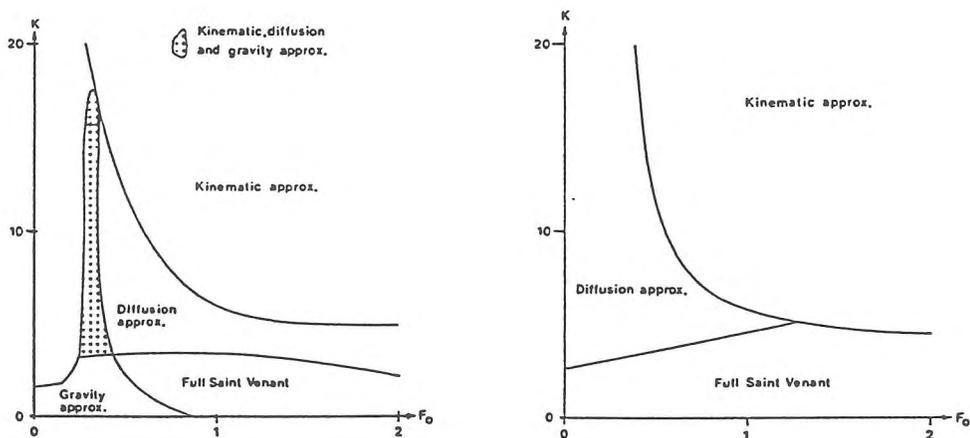


Figure II.6.
Division du plan f_0, k_0 en zones où les approximations peuvent se substituer valablement aux équations complètes (Vieira 1982)

Sans trop anticiper sur des valeurs que nous calculerons précisément au prochain chapitre, concluons en nous appuyant sur l'expérience des hydrologistes : *l'écoulement sur des pentes naturelles situe généralement les couples de valeurs (f_0, k_0) dans des zones où l'approximation cinématique est licite. Ce n'est que sur les faibles pentes courtes et à débit latéral important des régions urbanisées qu'il faut se montrer plus circonspect quant au choix entre l'approche cinématique ou diffusive.*

Enfin, il faudra prendre une décision judicieuse pour les coefficients α et β de la loi de frottement et vérifier le bien fondé de ces assertions en confrontant la théorie à la pratique. Ces points font l'objet du chapitre III.

Chapitre III

Application de la théorie cinématique aux écoulements hydrologiques

SOMMAIRE

- III.1. Introduction*
- III.2. Ecoulement hydrologique sur modèle réduit*
- III.3. Applications de la théorie cinématique aux topographies réelles*
- III.4. Avantages et limitations de la théorie cinématique*

III.1. INTRODUCTION

Le chapitre précédent a tenté de circonscrire les phénomènes présents dans l'écoulement hydrologique de surface pour les traduire en une formulation mathématique moyennant des simplifications. Si certaines d'entre-elles trouvent une justification mathématique, d'autres sont liées à l'idéalisation des processus à représenter.

Il est donc indispensable de vérifier que la physique du problème a été correctement perçue.

Cette vérification s'opère généralement sur des modèles physiques à échelle réduite pour mieux cerner les problèmes d'anisotropie du sol, de non reproductibilité des conditions d'essais grandeur nature et de séparation des intervenants.

Elle a d'autres utilités puisqu'elle apporte des arguments au moment du choix d'une loi de frottement et met en exergue certains phénomènes typiques comme l'influence de l'impact des gouttes de pluie sur l'écoulement et sur l'infiltration.

Nous étudierons quelques-uns de ces effets au travers d'une courte synthèse de la littérature traitant des essais en laboratoire.

Même si ces confrontations théorie - réalité donnent beaucoup d'espoir dans l'approche cinématique, il serait vain de penser que la simplicité apparente de sa formulation mathématique s'obtient impunément quant au champ des phénomènes modélisables.

Les simplifications introduisent des limites dont il faut rester conscient, tout en admettant les atouts que cette approche conserve sur d'autres théories. Nous donnerons certaines indications sur ce sujet tout au long de ce chapitre III.

Les discussions suivantes s'intègrent dans un cadre unidimensionnel propice à la mise en lumière des phénomènes élémentaires. Le chapitre VII verra leur élargissement à deux dimensions.

III.2. ECOULEMENT HYDROLOGIQUE SUR MODELE REDUIT

III.2.1. Bref historique

La validation d'une théorie grâce aux modèles simples que nous allons décrire procède

d'une démarche classique dans l'étude actuelle des processus hydrologiques. Elle constitue pourtant la dernière étape de l'évolution assez récente qu'a connue l'exploitation des modèles réduits dans ce domaine.

Pour un bassin, la recherche des relations qui lient l'évolution des débits à la séquence des précipitations se concrétise traditionnellement par la collecte sur site des mesures de jaugeage et des pluviomètres. Les données d'humidité du sol, d'évaporation, de niveau d'eau souterraine, ..., fournissent un complément d'information sur la façon selon laquelle le bassin intègre une pluie pour la restituer en débit.

Cette pratique quotidienne, coûteuse par la maintenance des appareils et la longueur des campagnes qu'elle occasionne, se heurte aux avatars de la nature : temps capricieux aux pluies trop faibles ou trop intenses, répartition spatiale non uniforme, terrains aux antécédents d'humidité difficiles à évaluer, ...

La frustration d'un manque total de contrôle sur les intervenants a donné l'idée aux pionniers en la matière de générer artificiellement l'éventail des pluies désirées. Nous sommes dans les années 30-40 et les investigations portent essentiellement sur l'érosion des sols et le drainage des routes et pistes d'aéroport (Izzard).

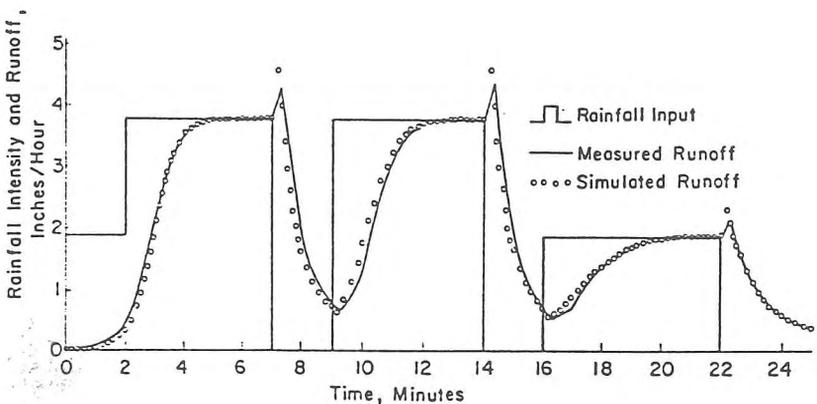


Figure III.1.
Résultat d'écoulements hydrologiques à faible nombre de Reynolds
Plan de 22 m de long pour une pente de 0,005 (Izzard)

Des pulvérisateurs créent les conditions optimales pour une érosion sévère tandis que les plans imperméables ou diversement revêtus subissent des ruissellements dûment contrôlés.

Le succès que suscite ce type d'essais multiplie les approches similaires qui s'attachent à reproduire d'autres aspects hydrologiques. Il fait progressivement germer l'espoir d'une modélisation à l'échelle d'un bassin hydrologique complet (Chézy). Après analyse d'essais de ce genre, Egelson conclut malheureusement qu'aucune tentative ne peut aboutir à un modèle capable de prédire la réponse complète d'un bassin face à un

évènement pluvieux. Quand bien même il existerait une correspondance des débits écoulés, le modèle ne peut garantir reproduire tous les autres comportements du prototype (Singh).

Ces enseignements auront le mérite d'éclairer les modèles physiques sous un autre jour. Ils sont désormais perçus comme des prototypes à part entière, capables de produire pour une pluie une réponse qui reflète leurs caractéristiques propres de stockage et de transfert .

Cette approche des systèmes simples dès lors considérés "grandeur nature" servira de base aux études empiriques sur les paramètres d'influence des hydrogrammes avant d'aider à la vérification des simplifications théoriques envisagées pour la modélisation de diverses composantes du cycle hydrologique.

C'est ce type d'expérience, effectuée sur un plan incliné et soumis à des pluies artificielles, que nous allons maintenant exploiter.

III.2.2. Solution théorique des expérimentations

Considérons un plan de longueur l_0 incliné d'un angle θ sur l'horizontale. Il est soumis à une pluie constante d'intensité r , dont une partie s'infiltré à une vitesse i invariante dans le temps. Au temps $t = 0$, le plan n'est le siège d'aucun ruissellement. Après un temps suffisant pour obtenir l'équilibre, la pluie cesse et la décrue se poursuit jusqu'au tarissement complet.

Dans ces conditions (II.67) s'écrit :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}h)}{\partial x} = (r - i) \cos \theta \neq f(t) \quad (\text{III.1})$$

tandis que par commodité, nous donnons à (II.80) la forme suivante :

$$\bar{u} = \left(\frac{\sin \theta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta}} h^{\frac{\gamma}{\beta}} = ah^m \quad (\text{III.2})$$

Pour une intégration plus aisée, nous transformons le système en éliminant les dérivées partielles au profit de dérivées totales. Cette opération n'est réalisable qu'en transformant la relation (III.1) le long de certaines courbes du plan abscisse - temps communément appelées caractéristiques :

$$(\text{III.1}) \equiv \frac{\partial h}{\partial t} + a(m+1)h^m \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{dh}{dt} = (r - i) \cos \theta \quad (\text{III.3})$$

le long des courbes d'équation :

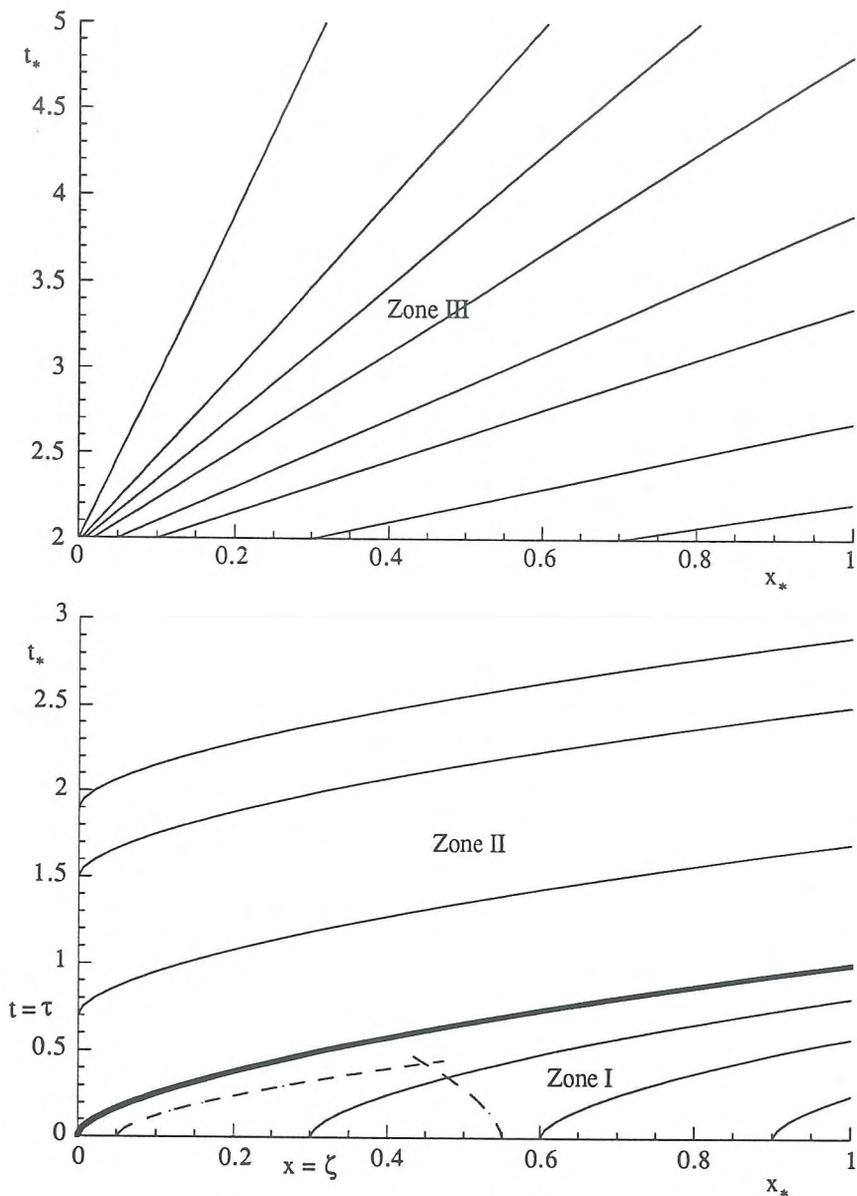


Figure III.2.
 Evolution en coordonnées adimensionnelles des caractéristiques de la théorie cinématique appliquée à une pente uniforme soumise à une pluie constante jusqu'à $\tau = 2$, en l'absence d'infiltration.

$$\frac{dx}{dt} = a(m+1)h^m = (m+1)\bar{u} \quad (\text{III.4})$$

Il est manifeste, au vu de cette dernière équation, que les ondes se déplacent plus rapidement que le fluide, encore que selon les lois considérées, cette différence puisse varier dans l'importantes proportions.

Intégrons ces équations en recourant aux conditions initiales et en fixant les conditions limites.

III.2.2.1. Zone I

Le domaine balayé par les caractéristiques issues de l'axe ox détermine une zone d'états uniformes instationnaires.

L'intégration de (III.3) donne avec les conditions initiales :

$$h = (r - i) t \cos \theta \quad (\text{III.5})$$

L'équation d'une caractéristique est paramétrée par son abscisse initiale $x = \xi$ à $t = 0$. On obtient en remplaçant (III.5) dans (III.4) :

$$x = a(r - i)^m t^{m+1} (\cos \theta)^m + \xi = \frac{a h^{m+1}}{(r - i) \cos \theta} + \xi \quad (\text{III.6})$$

L'équation (III.5) montre que la zone I connaît une croissance uniforme de hauteur indépendante de l'abscisse.

III.2.2.2. Zone II

Considérons à présent les caractéristiques issues de l'axe ot , en présence d'une pluie continue. Elles balayent une zone d'états variés instationnaires.

Appelons τ le temps d'intersection de la caractéristique avec l'axe des ordonnées.

L'intégration de l'équation (III.3) nécessite la fixation d'une condition limite. L'imposition la plus naturelle consiste à fixer à tout moment une hauteur nulle au point amont (crête de partage), puisqu'il ne se trouve alimenté par aucune surface.

On obtient alors :

$$h = (r - i) (t - \tau) \cos \theta \quad (\text{III.7})$$

le long des caractéristiques d'équation

$$x = a(r-i)^m (\cos\theta)^m (t-\tau)^{m+1} = \frac{a h^{m+1}}{(r-i) \cos\theta} \quad (\text{III.8})$$

L'équation (III.8) rappelle la stationnarité de la hauteur, fonction seulement de l'abscisse et de caractéristiques intrinsèques à l'écoulement.

III.2.2.3. Zone III

Etudions enfin l'évolution du ruissellement consécutif à l'arrêt des précipitations. Pour simplifier l'expression mathématique, nous annulons l'infiltration.

La solution s'écrit en prenant l'origine des temps à la fin des pluies et en désignant par τ l'abscisse des caractéristiques à $t = 0$:

$$h = \left(\frac{\tau(r-i) \cos \theta}{a} \right)^{\frac{1}{m+1}} \quad (\text{III.9})$$

le long des caractéristiques d'équation :

$$x = a(m+1) \left(\frac{\tau(r-i) \cos \theta}{a} \right)^{\frac{m}{m+1}} t + \tau = a(m+1) h^m t + \frac{a h^{m+1}}{(r-i) \cos \theta} \quad (\text{III.10})$$

III.2.2.4. Hydrogramme adimensionnel à l'exutoire

Le temps nécessaire pour obtenir l'équilibre s'obtient en imposant que la caractéristique issue de l'origine des axes parvienne en $x = l_0$ à $t = t_e$.

$$t_e = \frac{l_0^{\frac{1}{m+1}}}{\frac{1}{a^{\frac{1}{m+1}} (r-i)^{\frac{m}{m+1}} (\cos \theta)^{\frac{m}{m+1}}} \quad (\text{III.11})$$

tandis que le débit à l'équilibre s'écrit :

$$q_e = a h_e^{m+1} = l_0 (r-i) \cos \theta \quad (\text{III.12})$$

Le diagramme adimensionnel se construit en fonction des variables :

$$t_* = \frac{t}{t_e} \quad (\text{III.13})$$

$$q_* = \frac{a h^{m+1}}{q_e} \quad (\text{III.14})$$

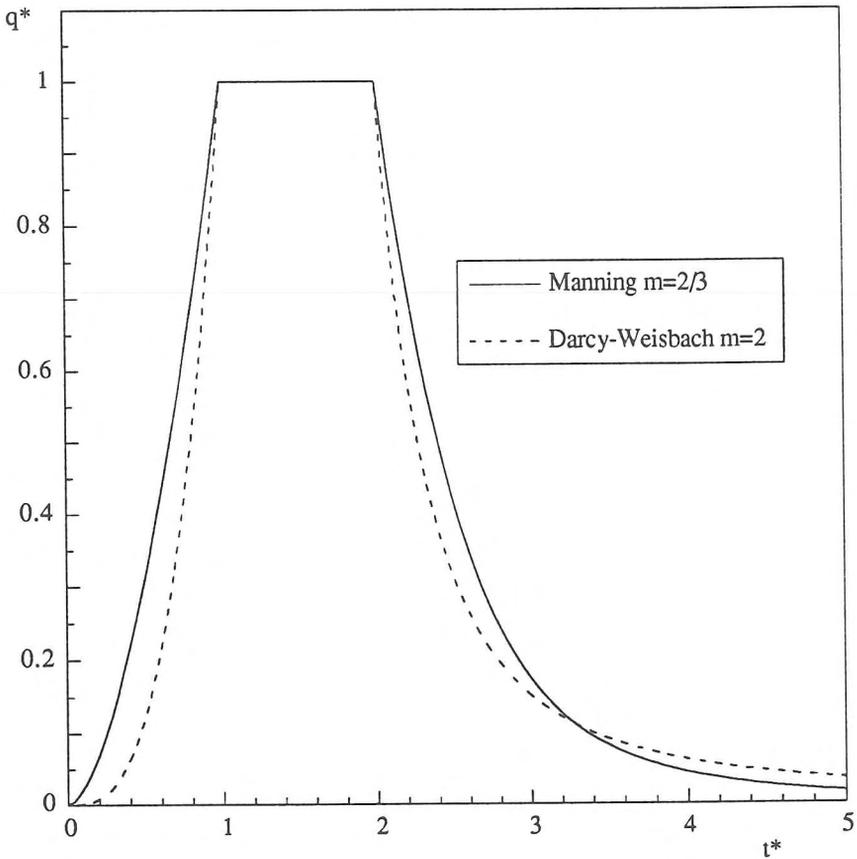


Figure III.3.
Influence de l'exposant m sur un hydrogramme adimensionnel
construit pour une pluie constante jusqu'à $t_* = 2$, en l'absence d'infiltration

On a :

- pour la zone I

$$q_* = t_*^{m+1} \quad (\text{III.15})$$

- pour la zone III

$$q_*^{\frac{1}{m+1}} - q_*^{\frac{m}{m+1}} + (m+1)t_* = 0 \quad (\text{III.16})$$

Cette série d'équations appelle quelques commentaires importants sur le système :

1. La description du mouvement se fait le long d'une seule famille de caractéristiques pour deux dans la théorie complète comme le rappelle la figure III.2.
2. Lorsqu'on choisit deux caractéristiques distinctes de paramètres respectifs τ_1 et τ_2 , on constate dans la zone I que la distance horizontale qui les sépare est constante (équation (III.6)).
3. Procédons à une étude similaire sur les caractéristiques de la zone III. L'équation (III.10) montre qu'elles sont divergentes.
4. Les conditions nécessaires à un problème bien posé se limitent à fixer la valeur de h sur chaque caractéristique. La condition la plus naturelle consiste en une condition amont, ce qui va dans le sens cité précédemment de l'influence évanescence de la condition aval qui, pour cette théorie, est superflue. La crainte d'une condition aval ambiguë est donc sans objet.
5. Dans l'hypothèse où la théorie cinématique approxime valablement l'écoulement, la détermination par les essais de la seule inconnue m de l'hydrogramme adimensionnel dépend du type d'écoulement.

Signalons enfin que l'établissement de solutions théoriques, basés sur des raisonnements analogues, existent pour des surfaces convergentes ou divergentes à symétrie de révolution (Singh, Agiralioglu).

III.2.3. Résultats expérimentaux

La majorité des essais relatés dans la littérature respectent la condition de Woolhizer et al sur la borne inférieure de k_0 . Le ruissellement est provoqué tantôt sur des surfaces imperméables à rugosité artificiellement constituée, tantôt sur des pentes naturelles dont on réalise la constance d'infiltration par un protocole approprié (Foster et al).

La figure III.4. illustre la forme type d'hydrogramme à analyser.

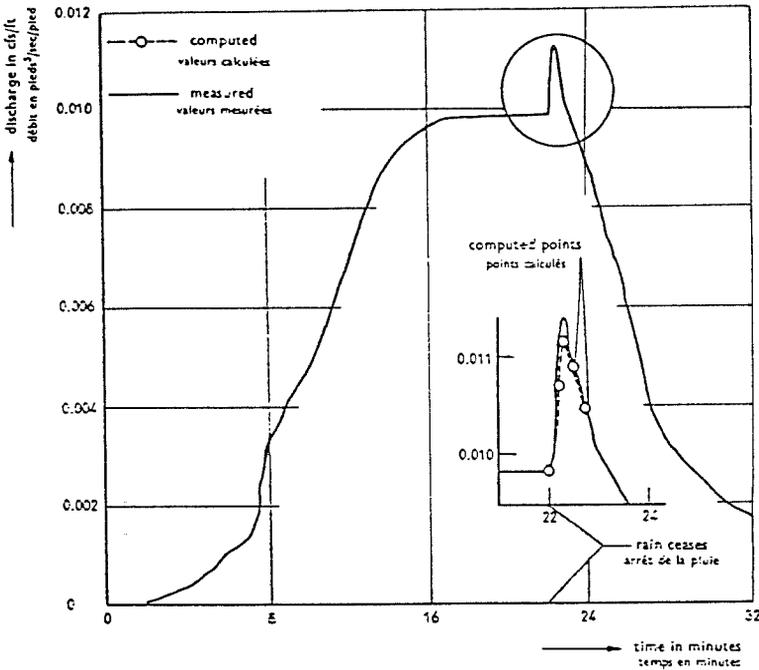


Figure III.4.
Hydrogramme de ruissellement sur une pente de 0,5 %
soumise à une pluie de 6.10^{-6} m/s, selon Yu et al.

Intéressons-nous d'abord à la phase de croissance jusqu'à la stabilisation.

La mise sous forme adimensionnelle pose un problème par l'approche asymptotique que suit la courbe lorsqu'elle se stabilise. L'imprécision sur la détermination du temps d'équilibre a poussé notamment Izzard à le définir comme le double du temps nécessaire au débit pour parvenir à 55 % de sa valeur d'équilibre (Woolhizer et al).

Cette façon de procéder pour fixer Q_e et t_e conduit à des diagrammes adimensionnels caractéristiques en forme de S pour la croissance et la stabilisation.

L'alignement des points expérimentaux sur une courbe type rencontre pleinement l'espoir d'une validation des hypothèses théoriques.

Il subsiste néanmoins un problème, celui que souligne Morgali dans l'ajustement des figures III.5. et III.6.

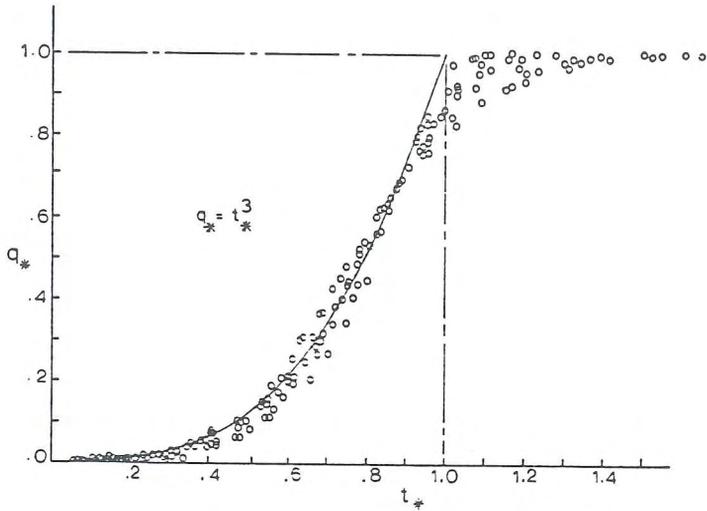


Figure III.5.
Résultats expérimentaux d'hydrogrammes adimensionnels laminaires
pour des écoulements sur du bitume

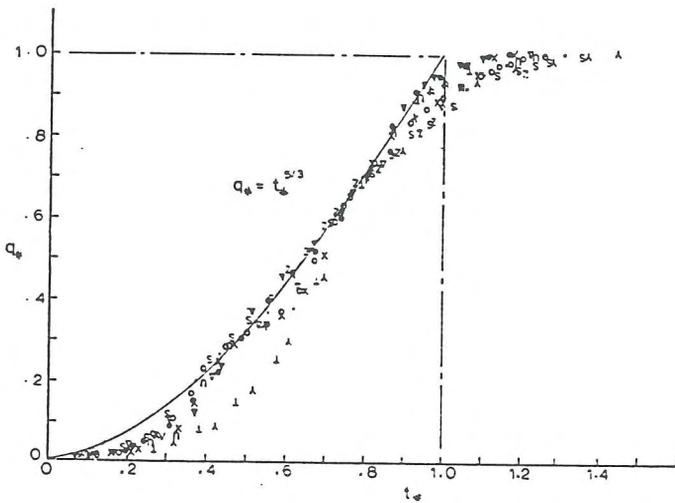


Figure III.6.
Résultats expérimentaux d'hydrogrammes adimensionnels turbulents
pour des écoulements sur du gazon

Passons pour l'instant sur le comportement asymptotique que ne reproduit pas la théorie - la résolution numérique tempèrera ce jugement - pour s'attarder sur la loi $q^* = f(t^*)$ caractéristique de l'écoulement au sein de la lame.

Dans l'écoulement typique d'un terrain naturel, le mince film liquide se déchire sur les irrégularités aléatoires de la végétation et de la géologie. Elles assurent un brassage au sein du fluide qui génère des tourbillons et fait croître la résistance à l'avancement. Les obstacles les plus importants séparent les filets ruisselants et l'aspect discontinu qui en résulte apparente davantage l'écoulement à un suintement.

Horton n'hésite pas à comparer ce phénomène à de l'écoulement en milieu poreux. Wooding préfère globaliser cet aspect instable en recourant pour h à la définition d'un volume d'eau par unité de surface. Il effectue cette moyenne purement "philosophique" sur des dimensions de terrain largement choisies par rapport à celle des irrégularités.

Dans cette discussion, le caractère turbulent semble d'autant plus inéluctable que des chocs dans la progression viennent perturber la transmission des tensions visqueuses entre filets fluides.

Pourtant, les deux types de surface testés par Morgali (figures III.5. et III.6.) relèvent à l'évidence de comportements distincts où la lame régulièrement formée sur le bitume contraste avec la progression chaotique des filets entre les brins de gazon.

Examinons les théories classiques que l'hydraulique propose pour rendre compte de ces états.

- Formule de Darcy - Weisbach

$$\bar{u}^2 = \frac{8gh}{f_D} \sin \theta \quad (\text{III.17})$$

- a. Dans le cas d'un écoulement laminaire, le facteur f_D de frottement de Darcy-Weisbach s'écrit en fonction du nombre de Reynolds (Re) :

$$f_D = \frac{K}{Re} \quad \rightarrow \quad a = \frac{8g \sin \theta}{Kv} \quad m = 2 \quad (\text{III.18a, b, c})$$

où v désigne la viscosité cinématique

Le coefficient laminaire K reflète la rugosité de surface. Il est borné inférieurement pour une surface lisse à 24. Les coefficients a , m rappellent la cohérence des formules avec (III.2).

- b. Pour une turbulence pleinement constituée, f_D prend une valeur constante caractéristique de la surface. On retrouve alors la formule de Chézy :

$$f_D = \frac{8g}{c_h^2} \rightarrow a = c_h \sin \theta^{1/2} \quad m = \frac{1}{2} \quad (\text{III.19a, b, c})$$

où

c_h désigne le coefficient de Chézy

c. Entre ces extrêmes, il existe une série d'expressions dont certaines sont supposées assurer une transition appropriée entre les 2 états.

- Formule de Colebrook - White

$$\frac{1}{\sqrt{f_D}} = -2 \log \left(\frac{K_s}{12h} + \frac{0,625}{\text{Re} \sqrt{f_D}} \right) \quad (\text{III.20})$$

avec

K_s une longueur de rugosité, définie comme un diamètre équivalent de grain de sable (Hall et al).

- Formule de Blasius

$$f_D = \frac{K}{\text{Re}^{1/4}} \rightarrow a = \left(\frac{8g \sin \theta}{K v^{1/4}} \right)^{4/7} \quad m = \frac{5}{7} \quad (\text{III.21})$$

- Formule de Manning

$$\bar{u} = \frac{1}{n} h^{2/3} \sin \theta^{1/2} \rightarrow f_D = \frac{8g n^{9/5} \sin \theta^{1/10}}{\text{Re}^{1/5} v^{1/5}} \quad a = \frac{\sin \theta^{1/2}}{n} \quad m = \frac{2}{3} \quad (\text{III.22a, b, c, d})$$

La figure III.7. reprend ces différentes lois pour une pente donnée. On pourrait y adjoindre, pour les grands nombres de Reynolds, les horizontales représentatives de la formule de Chézy.

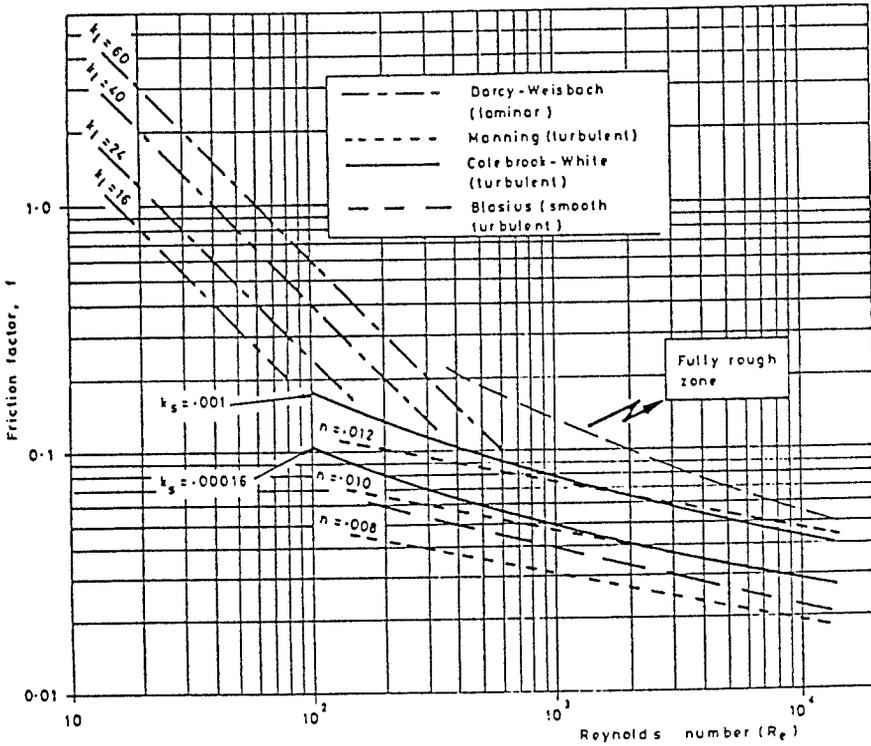


Figure III.7.
Relations entre le coefficient de frottement f_D et le nombre de Reynolds,
d'après Bell et al

L'ajustement d'une loi aux résultats expérimentaux de Morgali souligne un comportement laminaire de l'asphalte et turbulent (Manning) pour la surface gazonnée.

Dès lors qu'il faut composer avec plusieurs lois, lier l'état de surface au type d'écoulement simplifierait l'approche théorique. Un tel raisonnement s'opposerait cependant à la logique d'une relation, classique en mouvement permanent, entre l'état d'écoulement et le nombre de Reynolds.

Si, par contre, cette dernière analyse classique se concrétise, elle incite à faire coexister plusieurs lois dans une même simulation, puisque l'étude d'un hydrogramme complet balaye spatialement et temporellement une gamme étendue de nombres de Reynolds.

En d'autres termes, il est possible de conserver un comportement laminaire perpétuel sur l'amont d'un bassin, tandis que l'aval subit une transition d'état. Cette transition "remonte" vers la ligne de crête au fil du temps pour se stabiliser en une région du bassin à l'équilibre.

L'analyse de Morgali est éclairante à ce sujet.

Le tracé en axes logarithmiques du facteur de frottement f en fonction du nombre de Reynolds doit suivre une droite dont la pente détermine l'état [-1 en laminaire selon (III.17), - 1/5 en turbulent selon (III.22 b)].

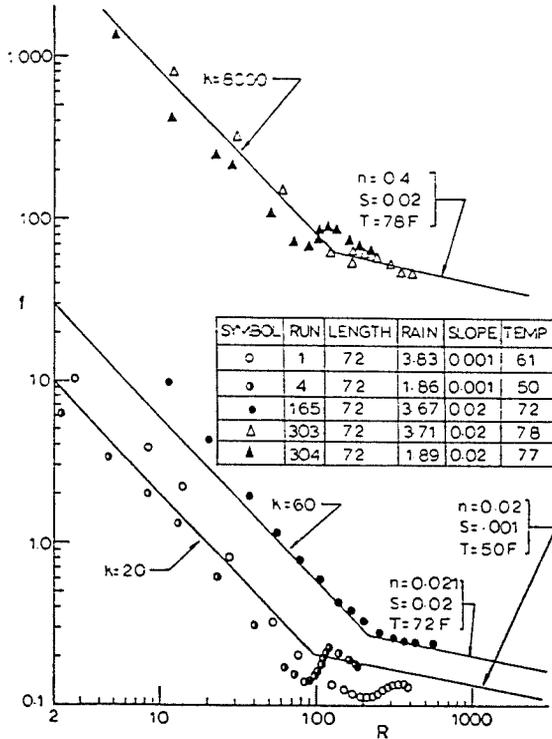


Figure III.8.
 Evolution du facteur de frottement f_p en fonction du nombre de Reynolds pour 3 types de surface, selon Morgali
 n° 1 = asphalt
 n° 165 = ardoises broyées
 n° 303-304 = gazon

La cassure qui se manifeste dans la figure III.8. montre clairement qu'une transition existe pour chaque type de surface. Elle est également visible à la figure III.6. où la courbe analytique turbulente approxime mal les résultats expérimentaux de $t_* = 0$ à $t_* = 0,4$. La figure III.4. enfin, confirme cette tendance laminaire initiale.

Comment réagir face à cette dualité ?

Bell et al proposent une voie théorique simple. En disposant pour une même surface des

coefficients laminaires et turbulents (par exemple celui de Manning), il est aisé de passer d'une relation à l'autre en calculant la transition analytiquement à partir des formules (III.17), (III.18) et (III.22). Ils obtiennent alors :

$$\text{Re}_T = n^{-9/4} v^{1/4} \left(\frac{K}{8g} \right)^{5/4} \sin \theta^{-1/8} \quad (\text{III.23})$$

Cette attitude est discutable pour deux raisons essentielles :

- De nombreuses expériences ont établi que la turbulence apparaît ou s'évanouit graduellement sur une frange de nombres de Reynolds qui dépend des circonstances du mouvement.

Ainsi, lorsque la vitesse croît très rapidement, un écoulement perturbé ne laisse apparaître une turbulence pleinement constituée qu'à des nombres de Reynolds plus élevés qu'avec une croissance plus graduelle. L'effet correspondant existe dans la phase de tarissement où les tourbillons mettent plus de temps à s'évanouir.

Ces effets subissent en plus l'influence considérable d'un effet spécifique aux écoulements hydrologiques : l'impact des gouttes de pluie.

- Le martèlement de la surface libre par la pluie joue un rôle unanimement reconnu. Les perturbations qu'il provoque abaisse considérablement, sur l'échelle des nombres de Reynolds, le seuil de transition d'état. Cette nouvelle donnée incontournable va être étudiée assez paradoxalement sur la phase qui suit immédiatement l'arrêt des pluies.

Lorsque les précipitations cessent, la plupart des hydrogrammes montrent un pic accentué avant de décroître. Cette particularité, présente dans les figures III.1., 4. fut d'abord expliquée par un bilan de quantité de mouvement : *lorsque les gouttes tombent quasi-perpendiculairement à la surface libre, le surplus d'eau qui pénètre dans la lame "ne contribue pas" à la quantité de mouvement dans le sens de l'écoulement. Il ne peut donc que ralentir la progression de ce dernier (Yu et al).*

La faible ampleur que peut avoir cet effet par rapport au phénomène mesuré oblige pourtant à se tourner vers d'autres causes.

Il est admis aujourd'hui que la pluie joue un rôle direct sur le frottement. Lorsqu'elle cesse, le ruissellement cherche un nouvel équilibre. Le sursaut de la courbe résulte d'une augmentation plus rapide de vitesse que la décroissance graduelle de hauteur.

L'arrêt des pluies peut suffire dans certains cas à provoquer une transition directe turbulent-laminaire. C'est le cas des simulations de Morgali sur gazon. L'ajustement théorique de (III.16) sur la courbe expérimentale de récession montre un comportement totalement laminaire alors que l'aval au moins du plan incliné connaissait un mouvement turbulent à l'équilibre (Figure III.9.) :

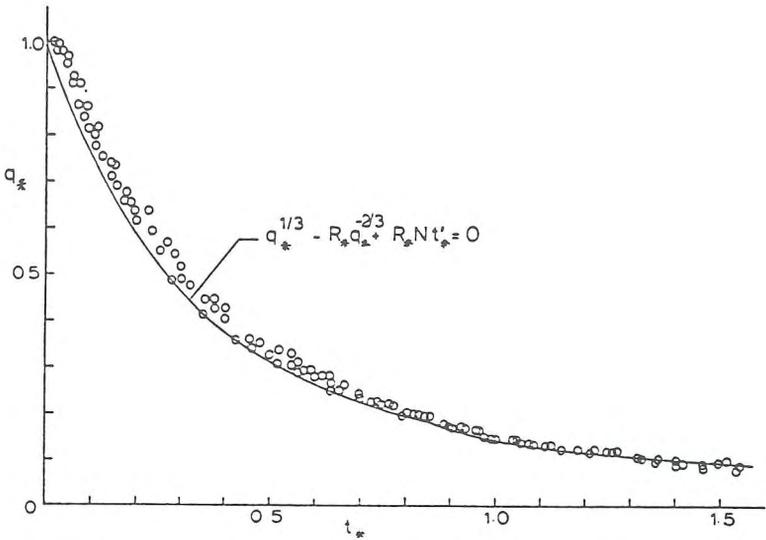


Figure III.9.

Hydrogramme adimensionnel de récession sur pente gazonnée, d'après Morgali

Yu et al ont des conclusions moins nuancées sur les variations du frottement. D'après leurs études, elles ne créent un pic visible que lorsqu'elles s'accompagnent d'un changement d'état. Ils confirment leurs assertions en alignant sur un graphique l'importance relative des pics de débit en fonction du nombre de Reynolds.

Ils expliquent ainsi qu'au delà de $Re = 2000$, l'impact des gouttelettes contribue peu à une turbulence que l'écoulement sait entretenir à lui seul. Parallèlement, il doit exister une valeur en deçà de laquelle la pluie ne parvient plus à perturber un écoulement trop stable.

Si nous suivons ce raisonnement, nous trouvons là une autre façon de cerner la zone de transition qu'esquise Morgali à la figure III.8. La plage d'influence de la figure III.10. donne une coïncidence raisonnable en fixant des bornes entre 100 et 2000.

Terminons cette discussion sur le martèlement pluvieux en rappelant que certains auteurs se sont attachés à établir des relations liant le frottement aux précipitations.

Citons notamment Li et al qui recommandent l'estimation suivante pour le facteur de frottement f_D :

Pour $Re < 900$

$$f_D = \frac{K + K_p r^{0,41}}{Re} \quad (III.24)$$

avec

K le coefficient de Darcy-Weisbach en l'absence de pluie, K_p étant lié à la vitesse des gouttes à l'impact.

Pour $Re > 2000$, ils préconisent la formule de Blasius sans influence de la pluie. Il y a là encore une convergence rassurante avec la zone d'influence de la figure III.10.

Enfin quantifions globalement l'effet des précipitations sur les valeurs de frottement en citant les travaux statistiques de Bell et al. Ils rapportent que les valeurs de K en l'absence de précipitations représentent 80 % approximativement du même coefficient en présence des pluies. Morgali cite quant à lui une influence moindre avec une réduction limitée à 2 %.

Une étude fine de l'action de la pluie sur le sol met en évidence d'importants pics de pression très furtifs (quelques millisecondes) qui sont à la base de l'érosion des sols. Comme le montre Tan, cette influence sur l'évolution même des caractéristiques de frottement est d'autant plus délicate que le phénomène s'aggrave lorsque le sol est recouvert d'une fine pellicule d'eau.

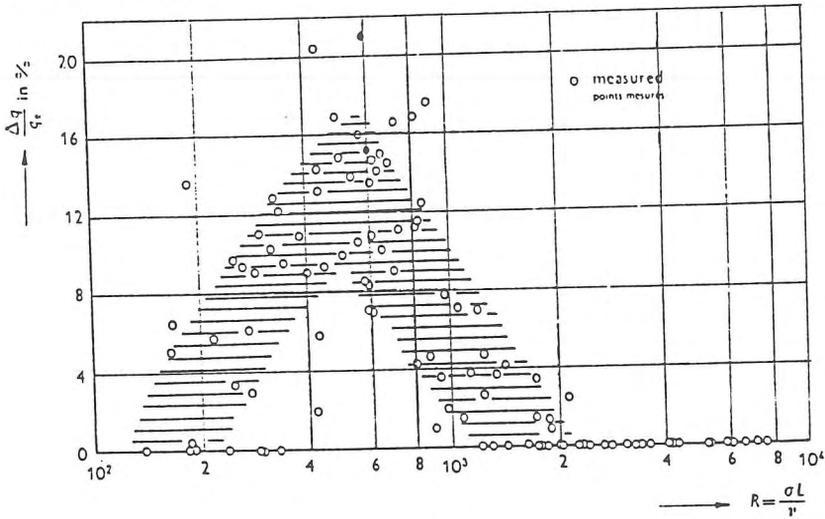


Figure III.10.
Hauteur relative des pointes de débit en fonction du nombre de Reynolds,
d'après Yu et al

Nous concluons en résumant d'abord les acquis de ce paragraphe.

- La théorie cinématique concorde avec la réalité physique reproduite sur des géométries simples. La borne inférieure pour k_0 , fixée par Woolhizer et al à 10, suffit à accorder la théorie simplifiée avec l'expérimentation.

- La nature n'a pas opéré de sélection sur le type d'écoulement qui prévaut en hydrologie de surface. Les deux états, laminaire et turbulent, coexistent et organisent leur transition sur un domaine de nombres de Reynolds qui s'étend au minimum de 100 à 2000. Les travaux qui cherchent à préciser cet espace trouvent dans l'impact des gouttes sur la lame ruisselante un intervenant incontournable et complexe.

Pour le reste, les quelques lignes qui suivent montrent qu'au moment de faire un choix sur une ou plusieurs lois, il subsiste la nécessité d'une part d'intuition et de choix personnel.

- L'utilisation d'une loi laminaire unique rencontre les faveurs de quelques expérimentateurs. Citons Smith et al qui travaillent sur le couplage ruissellement de surface - écoulement souterrain et confrontent leurs résultats à un modèle réduit complet, ou Wooding qui s'intéresse à deux plans convergeant vers une rivière centrale.
- Foster et al hésitent au terme de leurs essais à trancher entre des lois qui rendent, après calibration, des résultats très proches.

En se cantonnant dans les nombres de Reynolds inférieurs à 110, Schreiber et al tendent déjà vers un compromis entre laminaire et turbulent en choisissent $m = 1$.

- Plus nombreux sont ceux qui préconisent un comportement turbulent unique : Singh, par exemple, obtient ses résultats les plus cohérents avec la relation de Chézy lorsqu'il travaille sur des surfaces artificiellement reconstituées, Woolhizer et al confirment l'état turbulent des lames sur surfaces pavées ou gazonnées, Chow et al font un choix similaire pour l'intégrer à leurs équations complètes.

La description donnée à la page III.11 résume l'interprétation physique que nous avons du phénomène pour les couvertures de terrains naturels les plus fréquemment rencontrées. Le brassage imaginé au sein du fluide nous fait irrémédiablement nous rallier aux partisans d'une modélisation turbulente de l'écoulement.

Comme nous n'ignorons pas que ce choix unique n'est pas optimal pour une frange du nombre de Reynolds, il n'est pas inutile de s'intéresser aux éventuelles publications qui étudient les répercussions de cette approximation.

Cette approche s'identifie complètement à celle de Weather et al, dont les études statistiques prouvent le bon comportement global de la formule de Manning même sur des surfaces assez lisses, avec des performances comparables à des lois plus riches en paramètres d'ajustement. Cette étude englobe également les phases de récession. Comme le souligne Overton, le préjudice causé par l'adoption d'une loi turbulente ne se solde pas par des erreurs significatives lorsqu'il existe des régions à écoulement laminaire.

Insistons ici sur le fait que cette décision n'est pas irréversible et que l'organisation modulaire du numérique laissera toutes facilités pour tester d'éventuelles variantes.

L'étude adimensionnelle nous a permis d'échapper jusqu'ici à tout ordre de grandeur. Dès lors que nous sommes désormais fixés sur la loi de frottement, il est temps d'esquisser certaines tendances.

On se doute bien que l'utilisation d'une loi dédiée initialement à des écoulements tout autres se solde par des valeurs du coefficient de Manning, n , "hors norme". Citons d'emblée une borne inférieure approximative de $n = 0,01$ pour la surface très lisse qu'est l'asphalte. Elle constitue une valeur très défavorable pour la vérification de la condition cinématique appliquée à l'hydrologie de surface.

Le calcul suivant concerne une pente imperméable de 10^{-3} m/m, longue de 5 m et soumise à une pluie de $r = 50$ mm/h. La formule (II.78) s'écrit en utilisant la loi de Manning (III.22 a) :

$$k_o = \frac{1_o g \sin \theta}{u_o^2} = \left(\frac{1_o g^5 n^6 \sin^2 \theta}{r^4} \right)^{1/5} = 26 \quad (\text{III.25})$$

La condition sera d'autant plus facilement satisfaite qu'on s'intéressera à des états de surface plus proches des terrains naturels herbeux pour lesquels la valeur de n approche de 0,4. Nous préciserons en temps opportuns le choix des valeurs spécifiques aux applications.

Terminons avec la synthèse graphique de Djenidi.

Les études qu'il a entreprises au sein des laboratoires L.H.C.N. de l'Université de Liège visent à établir une relation entre le coefficient de frottement n et la dimension maximale des irrégularités de la surface de frottement, en l'occurrence le diamètre des graviers d'une même classe granulométrique collés uniformément sur une plaque imperméable. Les résultats qu'il présente à la figure III.11. constituent une référence utile pour la suite de ce travail.

Ils cadrent tout à fait avec les valeurs citées par Ross et al dans leurs applications. Ces derniers proposent en effet d'adopter :

Type de Terrain	n Manning
Zones boisées	0,4
Champs cultivés	0,35
Pâturages	0,3
Zones résidentielles	0,25
Surfaces imperméables	0,02

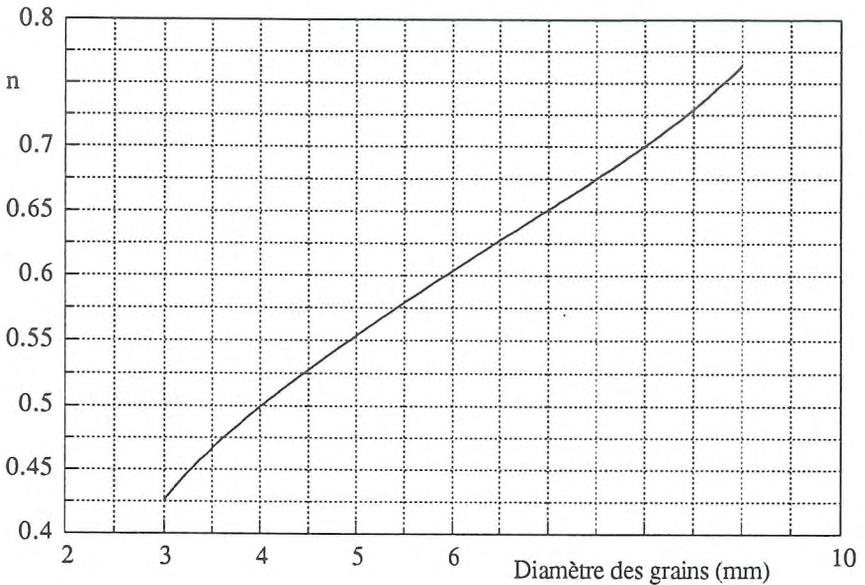


Figure III.11.
Evolution du coefficient de Manning en fonction du diamètre des grains de la surface ruisselante, d'après Djenidi

III.3. APPLICATIONS DE LA THEORIE CINEMATIQUE AUX TOPOGRAPHIES RELLES

La correspondance entre les résultats issus de la littérature et les solutions analytiques semble légitimer l'application de la thèse cinématique à l'hydrologie. Elle explique surtout le succès grandissant dont bénéficient les modèles fondés sur cette théorie.

Un point commun unit la plupart d'entre eux : la modélisation du ruissellement s'appuie sur un raisonnement unidimensionnel. Nous allons voir ce qu'une telle approche implique comme phases préalables d'idéalisation du terrain pour le convertir en bandes d'écoulement unidimensionnelles indépendantes.

C'est précisément la discrétisation de ces dernières qui permet le plus aisément de sérier les méthodes, indépendamment de toute classification d'ordre numérique.

- Le premier groupe respecte strictement le contexte qui a prévalu lors de la vérification de l'approche cinématique. Autrement dit, chaque bande de terrain se

réduit à un seul plan incliné dont l'extrémité amont coïncide avec la crête de partage et l'extrémité aval avec un segment du cours d'eau ou d'un ru qui s'y jette.

Comment parvenir pratiquement à une telle décomposition ?

Il suffit de raisonner sur la structure éventuellement ramifiée des rivières qui alimentent l'exutoire à étudier.

- On procède d'abord à une classification des bras de rivières convergents, attribuant le degré 1 aux premiers rus qui voient le jour tout à l'amont des versants. Ces affluents se jettent dans des bras qui composent les cours d'eau de degré 2. Ceux-ci alimentent à leur tour des écoulements filaires d'ordre 3,...
- En progressant alors par degré croissant, le bassin versant principal se scinde en bassins secondaires propres à chaque branche. Ils subissent à leur tour une décomposition en bandes de ruissellement dont la figure III.12. dépeint le caractère systématique. Les lignes de plus grande pente, qui interceptent les extrémités de chaque segment de rivière concerné, bornent une surface topographique qui s'étale depuis la ligne de faite.
- Cette surface fait l'objet d'une étude indépendante des éléments voisins dès l'instant où le ruissellement n'est supposé évoluer que perpendiculairement aux lignes de niveau. Des règles appropriées convertissent cette bande en un élément filaire à pente constante et à largeur constante ou variable. La théorie unidimensionnelle peut aisément être généralisée à cette dernière éventualité (Jayawadena et al).

Ce concept de décomposition progresse, au gré de l'évolution des possibilités informatiques, vers des discrétisations unidimensionnelles plus fines. Il jouit déjà de la plupart des avantages fondamentaux d'une d'approche physique : interprétation plus aisée des phénomènes et du choix des coefficients, prise en compte des variations spatiales des données géologiques, pluviométriques, ..., mais surtout quantification aisée de l'impact de toute modification sur un intervenant du système.

Par contre, il est évidemment très difficile de soutenir que l'extrême simplification en long des irrégularités topographiques de chaque bande de terrain n'a aucune incidence sur l'hydrogramme qui se déverse dans tout segment de rivière (Lane et al) : les versants très irrégulièrement conformés sortent du cadre d'application de ces méthodes. Dans le même ordre d'idées se pose le problème crucial du critère qui fixe la pente équivalente.

- La seconde étape progresse inévitablement dans la discrétisation en long des bandes de terrain. S'il s'agit d'une évolution inéluctable, elle n'en demeure pas moins théoriquement parlant beaucoup plus audacieuse puisqu'elle étend le champ d'application de l'approximation cinématique à des topographies en long plus générales.

Il serait trop long d'entamer ici une discussion sur la comparaison de méthodes, que nous qualifions d'unidimensionnelles, avec des schémas plus classiques comme ceux cités au chapitre II. Sans entrer dans la polémique d'une quelconque suprématie d'un modèle dans

un domaine où plus qu'ailleurs un tel jugement tient de l'utopie, il ressort de cette littérature que la thèse cinématique apporte des arguments très positifs par rapport aux méthodes linéaires notamment (Keefer, Amororcho et al, Hromadka et al, Singh et al). L'excellent comportement général qui en émerge ne peut qu'inciter à poursuivre l'évolution des modèles physiques.

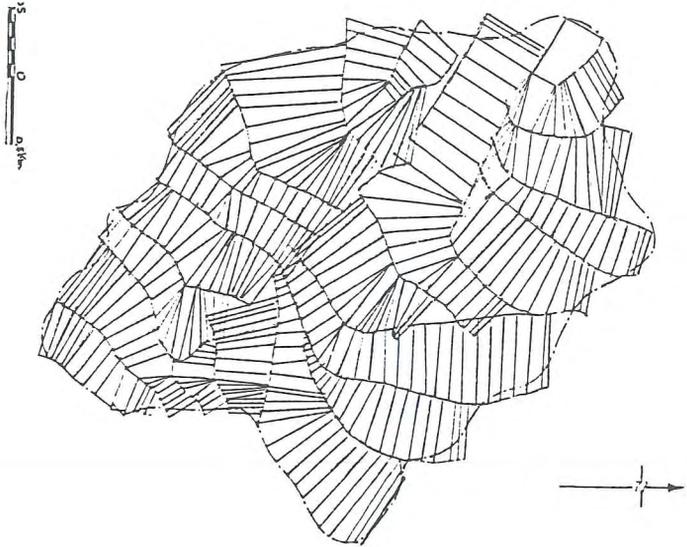


Figure III.12.

Décomposition d'un bassin en bassins secondaires, scindés eux-mêmes en bandes de ruissellement unidimensionnelles à pente longitudinale constante, selon Jayawardena et al

Néanmoins, cette progression réclame avec d'autant plus d'acuité une justification sur la légitimité d'utiliser l'approche cinématique pour des topographies autres que des plans inclinés.

La plupart des auteurs qui procèdent à cette extension en unidimensionnel la justifie sur la seule base du critère initial de Woolhizer et al qui porte sur k_0 . Croley et al soutiennent quant à eux qu'il est peu rigoureux de l'appliquer in extenso à un "modèle en cascades".

Dans la perspective d'une totale liberté dans la représentation topographique, cette question cruciale trouve en fait une réponse dans le réalisme et le bon sens qui doit prévaloir dans une telle modélisation numérique.

Quittons un instant le contexte théorique pour nous en tenir simplement à des ordres de grandeur.

Nous avons marqué notre volonté de prendre en compte l'évolution temporelle de l'hydrologie de surface d'un bassin qui peut couvrir des centaines voire des milliers d'hectares. Dans cette optique, il paraît illusoire d'espérer discrétiser une telle surface avec des mailles dont la dimension moyenne descendrait nettement sous la centaine de mètres.

La complexité d'une discrétisation plus fine pour la gestion des données, le temps que requerrait une telle approche sur du matériel informatique usuel, iraient à l'encontre des buts que nous nous sommes initialement assignés.

Fixons à présent quelques grandeurs caractéristiques de l'écoulement. Compte tenu des phénomènes d'interception, d'infiltration et d'évaporation, l'épaisseur de la lame ruisselante se maintient dans des ordres de grandeur de 10^{-2} m tandis qu'elle s'écoule sur les pentes naturelles à des vitesses de l'ordre de 10^{-2} m/s.

Ces quelques valeurs fixent les ordres de grandeur des gradients de vitesse et de hauteur susceptibles d'être développés dans une simulation numérique. Dans des discrétisations usuelles, ils ne sauront excéder 10^{-4} m/m pour la hauteur et 10^{-4} s⁻¹ pour la vitesse.

Introduisons les valeurs dans chaque terme de l'équation dynamique complète (II.68) pour comparer leurs influences relatives.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = g (\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial \bar{h}}{\partial x}) - \frac{\tau_x}{h} - (r-i) \frac{\bar{u}}{h} \cos \theta \quad (\text{III.26})$$

1	2	3	4	5	6
$0 (10^{-6})$	$0 (10^{-6})$	$0 (1)$	$0 (10^{-3})$	$0 (1)$	$0 (10^{-6})$
inertie	convection	pente de fond pente totale de surface		frottement	contribution des apports extérieurs

L'évaluation est éloquent. Elle révèle la totale inutilité de prendre en compte les équations complètes pour des topographies globales. Seules des mailles de taille comparable à la hauteur de la lame d'eau rendraient à chaque terme la faculté d'être numériquement significatif. On verse alors dans un autre domaine, celui que Tayfur et al intitulent "écoulement sur de la microtopographie". Il se heurte à d'innombrables difficultés, tant "philosophiques" que numériques.

Les ordres de grandeur obtenus mettent en exergue le caractère homogène des simplifications opérées dans l'approximation cinématique. Ils confirment également qu'il est supeflu de conserver la contribution du gradient de hauteur à la pente de surface, même si elle demeure d'un ordre de grandeur supérieur aux autres termes éliminés.

Cet examen nous donne l'occasion de résumer la démarche qui prédomine dans les modèles hydrologiques les plus récents basés sur la physique de l'écoulement :

Les processus naturels à prendre numériquement en compte concernent des étendues telles qu'il faut renoncer à étudier la progression de chaque filet d'eau parmi les brins herbeux pour composer plus sagement avec une échelle de maillage très supérieure à l'épaisseur de la lame ruisselante.

Ces contingences numériques préconisent une intégration topographique qui ne va pas nécessairement à l'encontre d'une autre intégration, plus "philosophique", des processus naturels.

Les réalités de ces phénomènes sont si complexes en hydrologie et les propriétés intrinsèques si anisotropes que la seule voie raisonnable consiste à les intégrer et à les moyenniser à une échelle macroscopique très supérieure à celle des accidents locaux de la topographie ou de l'écoulement.

La théorie cinématique respecte cette dernière démarche conceptuelle.

Ses tests de validité sur des topographies naturelles légitiment pleinement l'approche adoptée. Ils doivent malheureusement se cantonner dans des géométries et conditions élémentaires propices à un meilleur contrôle de tous les intervenants.

La citation de ces essais comme de strictes justifications d'applicabilité de cette méthode aux géométries quelconques ne peut que nous paraître abusive pas plus qu'il n'est dans nos intentions d'invoquer in extenso des valeurs de coefficients k_0 établis sur géométries élémentaires.

Comme dans bien des domaines, ils constituent autant de signes encourageants, des guides et des incitants au moment d'élargir une méthode éprouvée dans des cas simples pour la transformer en une méthode générale qui concilie au mieux réalité physique et impératifs numériques.

La théorie cinématique, nous l'avons montré, accommode au mieux ces deux aspects.

III.4. AVANTAGES ET LIMITATIONS DE LA THEORIE CINEMATIQUE

Nous venons de parler successivement d'extension audacieuse de la méthode puis de choix raisonnable. Rappelons exactement à quelles limitations s'expose la théorie cinématique appliquée à une géométrie quelconque :

- La première est directement liée à l'écriture même des équations. En amputant l'équation dynamique générale d'une partie de ses termes, la vitesse s'exprime comme une relation biunivoque de la hauteur d'eau.

Cette fonction où interviennent certaines propriétés du système marque un appauvrissement par rapport au comportement classique en hystérésis manifesté par les systèmes complets. La figure III.13. schématise cette simplification.

- Un autre point beaucoup plus sensible concerne l'identification de la pente de surface à la pente de fond. D'un point de vue théorique, elle annonce de substantielles limitations des topographies envisageables :
 - D'une part l'absence de pente exclut tout écoulement.
 - A l'autre extrême, on imagine l'impuissance du modèle théorique à reproduire

correctement la formation de zones de stockage à surface libre horizontale. La bathymétrie quelconque de ces cuvettes induit inévitablement des vitesses inexistantes par des méthodes plus complètes.

- Citons encore l'exclusion de toute possibilité d'écoulement à contre-pente.

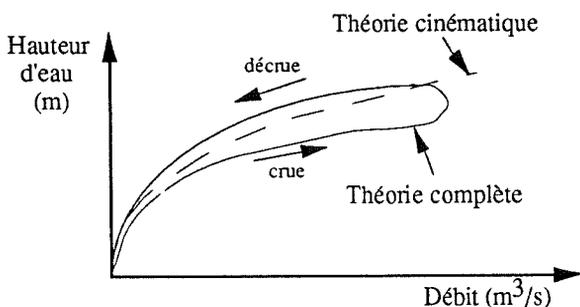


Figure III.13.
Comportement caractéristique de la relation hauteur-débit avec une approche dynamique ou cinématique.

Ces limitations paraissent extrêmement contraignantes puisqu'à côté d'un certain nombre de phénomènes que cette théorie ne peut reconnaître, elle en introduit d'autres qui semblent ne s'identifier à aucun équivalent physique.

Nous pourrions, pour taire certaines de ces inquiétudes, prendre en compte la pente réelle de surface auquel cas nous revenons à la théorie diffusive. Nous venons néanmoins d'insister sur l'impossibilité de rendre le gradient de hauteur numériquement significatif dans nos modélisations.

Il faut à nouveau examiner ces limitations plus raisonnablement à la lumière des écoulements très particuliers que nous souhaitons développer. Peu d'hydrologistes songent réellement à contester l'idée d'un ruissellement globalement orienté selon les droites de plus grande pente alors que cette hypothèse relève des mêmes limitations. Le partage en bandes d'écoulement indépendantes en fait également partie puisqu'il empêche tout appel d'eau possible entre bandes adjacentes dont les surfaces libres n'auraient pas en deux points très voisins exactement les mêmes cotes.

Quant à la formation de lacs, elle peut difficilement avoir lieu à l'échelle macroscopique envisagée, à moins de prendre en compte des précipitations si prolongées et intenses qu'elles appartiennent à des phénomènes naturels aussi rares qu'exceptionnels.

En dehors de ces conditions inattendues de pluviosité, il serait tout aussi étonnant d'attendre un ruissellement à contre-pente.

Toutes ces objections ne se justifient donc qu'aussi longtemps qu'on raisonne dans le

cadre des phénomènes hydrauliques les plus familiers. Elles trouvent également leur place dans le contexte d'une modélisation de tous les accidents très locaux de la topographie prise à l'échelle de la goutte de pluie.

Le modèle à développer cherche à prendre en compte des circonstances normales de ruissellement où de telles singularités d'écoulement n'ont pas cours.

Néanmoins, nous attacherons une attention toute particulière à la définition donnée aux bassins versants qu'il convient d'accorder à ces objections. Nous vérifierons pourtant que cette mise au point s'identifie complètement aux hypothèses et aux acquis de l'hydrologie classique, dont nous venons de citer quelques aspects marquants.

Chapitre IV

Méthode numérique unidimensionnelle :

Première approche

SOMMAIRE

- IV.1. Introduction*
- IV.2. Discrétisation spatiale et temporelle*
- IV.3. Résolution numérique du système non-linéaire*
- IV.4. Etude de stabilité du schéma numérique*
- IV.5. Modélisation d'un écoulement sur plan incliné*
- IV.6. Modélisation de l'écoulement sur pente non uniforme, de valeur croissante vers l'exutoire*
- IV.7. Modélisation de l'écoulement sur pente non uniforme, de valeur décroissante vers l'exutoire*
- IV.8. Conclusion*

IV.1. INTRODUCTION

Il peut paraître assez paradoxal d'introduire une méthode numérique unidimensionnelle après avoir fait l'apologie d'une modélisation quasi-tridimensionnelle de la topographie et surtout après avoir justifié l'application de la méthode aux géométries quelconques.

Pour l'expliquer, il nous faut revenir à la brève classification que nous avons établie des approches unidimensionnelles et, plus précisément, à la seconde évolution qui concerne une discrétisation en long de chaque bande de terrain.

L'analyse de quelques modèles élaborés sur ces bases révèle que la découpe du profil de chaque bande est souvent assez timide, avec deux ou trois transitions seulement et très graduelles (Ross et al par exemple). Lorsque Jayawardena et al exploitent davantage ce concept, ils relatent l'apparition d'imprécisions numériques qui donnent entre autres un bilan volumique assez détérioré.

Ce sont notamment leurs remarques qui nous incitent à la plus grande prudence et à examiner en premier lieu ce qui, de la méthode numérique ou de la théorie elle-même, doit être incrimé. Ce chapitre s'y attache en respectant scrupuleusement l'évolution graduelle qu'a connu notre démarche :

Plutôt qu'étudier directement des méthodes multidimensionnelles dans des applications où la complexité cache le comportement intrinsèque du code élaboré, cantonnons-nous d'abord dans un cadre strictement unidimensionnel à la recherche d'une solution numérique pleinement satisfaisante. Les conclusions tirées de ce premier essai guideront notre choix et nos recherches vers une extension plus aisée aux autres dimensions.

Dans cette optique, il va sans dire que la méthode de résolution sera fondamentalement commune à chaque étape.

Les schémas numériques aptes à résoudre une équation quasi-linéaire similaire à la nôtre foisonnent dans la littérature et les critères de choix sont multiples : temps de calcul, mémoire requise, stabilité, ... Ces critères fondamentaux orientent davantage vers un concept que vers une méthode précise.

Parmi ces grandes familles que constituent les schémas aux différences finies, aux éléments finis, aux volumes finis, aux caractéristiques ou autres méthodes spectrales, il faut encore se forger une opinion sur chaque code quant aux comportements numériques, propriétés de convergence et surtout qualités intrinsèques de dissipation ou d'amplification.

Il est un autre critère fondamental que nous n'avons pas mentionné et qui s'avère ici

déterminant : la facilité de discrétiser les géométries quasi-tridimensionnelles les plus quelconques.

La méthode des éléments finis présente des avantages substantiels dans ce domaine, qui ont contribué à son succès dans chaque spécialité de l'ingénieur.

Outre le fait qu'elle n'impose aucune restriction sur la forme du domaine occupé par le fluide, elle offre pour avantages principaux la flexibilité inhérente aux grilles constituées d'éléments de taille et de forme variables, une solution continue obtenue sur l'entièreté du domaine, enfin le choix dans l'ordre d'approximation des variables selon le degré d'interpolation choisi.

Ces spécificités répondent pleinement aux qualités requises pour notre application et justifient que nous travaillions, pour ce qui concerne la discrétisation spatiale du moins, en éléments finis.

Quoi qu'il en soit, aussi large et complète que puisse être la justification du choix d'une famille de méthodes numériques, elle n'en conserve pas moins une part de subjectivité qui ne sera pleinement appréciée qu'a posteriori, à la lumière des résultats obtenus.

Notons dès à présent qu'une telle alternative implique déjà une option sensible puisque la discrétisation spatiale est nécessairement implicite, avec d'éventuels problèmes sous-jacents de taille mémoire et de temps de calcul. Nous aurons largement l'occasion d'y revenir.

Ce chapitre définit également la discrétisation temporelle qui complète le schéma numérique. Une courte analyse théorique permet d'en extraire les caractères les plus manifestes en matière de stabilité et de dissipation numérique.

Elle ouvre la voie aux premiers tests numériques sur des géométries de moins en moins triviales qui mettent en exergue l'importance de la forme donnée à la description topographique.

IV.2. DISCRETISATION SPATIALE ET TEMPORELLE

Considérons l'expression générale suivante

$$\frac{\partial h}{\partial t} = L(h) \text{ sur le domaine } S \quad (\text{IV.1})$$

soumise à des conditions limites sur la frontière ∂S .

$L(h)$ représente un opérateur spatial qui inclut également les apports et retraits du monde extérieur sur le système.

Nous travaillons avec une discrétisation temporelle par différences finies qui porte sur deux niveaux temporels t et $(t + \Delta t)$. Elle s'énonce sous la forme suivante, lorsqu'elle est appliquée à l'équation (IV.1) :

$$\frac{h^{t+\Delta t} - h^t}{\Delta t} = L (\theta_t h^{t+\Delta t} + (1 - \theta_t) h^t) \quad (\text{IV.2})$$

pour

$$0 \leq \theta_t \leq 1$$

Le domaine du coefficient de pondération temporel θ_t englobe certaines valeurs particulières qui donnent lieu à des schémas mieux connus sous les noms suivants :

- $\theta_t = 0$ schéma explicite d'Euler
- $\theta_t = 1$ schéma implicite d'Euler
- $\theta_t = 0,5$ schéma de Crank-Nicholson.

La discrétisation spatiale recourt aux éléments finis. La forme intégrale à traiter provient de l'application de la méthode des résidus pondérés et plus particulièrement de celle de Galerkin, largement répandue en mécanique des fluides.

Rappelons ici les grandes lignes de cette méthode exposée en détails dans des ouvrages de base comme ceux de Lapidus et Pinder, Chung ou encore Pironneau. Nous l'appliquons en toute généralité à une équation (IV.1) multidimensionnelle.

Désignons par \hat{h} une solution approchée du problème. Le résidu R de l'équation se définit par la relation suivante :

$$R(\hat{h}) = \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} - L(\hat{h}) \quad (\text{IV.3})$$

La méthode des résidus pondérés consiste en une projection orthogonale du résidu sur une série de fonctions P_i linéairement indépendantes. Nous cherchons par conséquent la fonction \hat{h} qui minimise les formes intégrales :

$$W_i = \int_S P_i \hat{h} R(\hat{h}) dS = 0 \quad (\text{IV.4})$$

Pour que \hat{h} représente la solution exacte du système, R doit être identiquement nul ce qui revient à imposer de façon équivalente l'orthogonalité de R par rapport à n'importe quelle fonction P_j . Néanmoins, lorsque la discrétisation comporte n inconnues, nous n'avons la possibilité d'exprimer que n conditions et donc de ne choisir que n fonctions P_j linéairement indépendantes. C'est ce choix qui particularise dans les résidus pondérés la méthode de Galerkin.

Dans cette approche, les fonctions de pondération s'identifient aux fonctions d'interpolation de la variable h , que nous désignons par N_j . En éléments finis, l'approximation de la solution s'écrit en effet :

$$\hat{h}(x) = N_i(x_i) \cdot H_i = N^T \cdot H \quad i = 1, \dots, n \quad (IV.5)$$

où

$N^T = \langle N_1, N_2, \dots, N_n \rangle$ vecteur transposé, dont les N_j représentent des fonctions définies sur tout le domaine

$H^T = \langle H_1, \dots, H_i, H_n \rangle$ vecteur transposé, dont les coefficients indéterminés H_j représentent les valeurs de la fonction aux points de collocation i

x_i représente les coordonnées d'un point quelconque du domaine.

Par ces définitions, en désignant par x_{kl} les coordonnées du point de collocation k , il vient :

$$N_j(x_{kl}) = \delta_{jk} \quad (IV.6)$$

Pour respecter (IV.6) sur l'entière du domaine tout en permettant une intégration aisée des équations, le domaine d'intérêt S est partagé en éléments finis, dont les points de collocation sont les sommets.

La fonction d'interpolation N_j est identiquement nulle en tout élément qui ne possède pas le point i dans ses sommets. Ailleurs, N_j est défini par une base polynomiale, dont le degré fixe l'ordre de l'élément utilisé. Dhatt et Touzot, par exemple, donne leur expression complète pour les différents types d'éléments uni et bidimensionnels que nous utiliserons.

Explicitons l'opérateur $L(h)$ et effectuons ces différentes étapes dans un cadre unidimensionnel. L'équation générale à discrétiser s'écrit sur base de (III.1) et (III.2) :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (a h^{m+1}) = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q(h)}{\partial x} = (r - i) \cos \theta \quad (IV.7)$$

Le coefficient "a" dépend des données topographiques et est donc en toute généralité une fonction de l'abscisse, tout comme la contribution des apports et retraits.

En définissant \hat{q} , parallèlement à (IV.5), par

$$\hat{q}(x_1) = N^T \cdot Q \quad (IV.8)$$

et en appliquant la discrétisation temporelle (IV.2), on obtient par la méthode de Galerkin la forme intégrale suivante :

$$W(H^{t+\Delta t}) = \int_S P \left[N^T \cdot (H^{t+\Delta t} - H^t) + \Delta t \frac{\partial N^T}{\partial x} \cdot [\theta_t Q^{t+\Delta t} + (1 - \theta_t) Q^t] - (\tau-1) \cos \theta \right] dS = 0 \quad (IV.9)$$

Compte tenu du caractère non-linéaire de l'équation, mis en évidence par l'expression qui lie q et h , et du caractère implicite de la discrétisation temporelle dans le cas où $\theta_t \neq 0$, la résolution numérique du système (IV.9) requiert l'utilisation d'un algorithme approprié.

IV.3. RESOLUTION NUMERIQUE DU SYSTEME NON-LINEAIRE

Les méthodes de résolution de systèmes non-linéaires solutionnent par un processus itératif un système d'équations linéarisées à chaque pas.

Il n'existe pas de règle générale qui décrive la voie à suivre pour mettre en place un schéma convergent. Toutefois, certaines méthodes ont prouvé leur efficacité dans le domaine qui nous occupe, par leur convergence rapide même dans des systèmes fortement non-linéaires. Tel est le cas de la méthode de Newton-Raphson qui trouve ici une application économique à la fois en taille mémoire requise et en temps d'exécution.

Supposons qu'à l'issue d'une progression sur plusieurs pas de temps, nous possédions la solution à l'instant t .

La recherche de la solution à l'instant $(t+\Delta t)$ exige d'itérer pour obtenir des approximations successives du vecteur $H^{t+\Delta t}$.

Désignons par $H_{it-1}^{t+\Delta t}$ l'approximation obtenue après $(it-1)$ itérations et qui ne permet pas au système discrétisé (IV.9) d'annuler la forme intégrale $W(H_{it-1}^{t+\Delta t})$.

L'itération it consiste à calculer l'incrément ΔH_{it} à ajouter à la précédente approximation, de façon à tenter d'annuler le résidu évalué avec cette nouvelle solution approchée :

$$W(H_{it}^{t+\Delta t}) = W(H_{it-1}^{t+\Delta t} + \Delta H_{it}) \approx 0 \quad (IV.10)$$

Développons ce vecteur résidu en séries de Taylor exprimées en termes de chaque composante du vecteur $H^{t+\Delta t}$, au voisinage de leurs valeurs obtenues à l'itération (it-1) :

$$W(H_{it}^{t+\Delta t}) = W(H_{it-1}^{t+\Delta t}) + \left(\frac{\partial W}{\partial H_j^{t+\Delta t}} \right)_{|H^{t+\Delta t} = H_{it-1}^{t+\Delta t}} \cdot \Delta H_{it,j}^{t+\Delta t} + 0 (\Delta H_{it}^2) \quad (IV.11)$$

En négligeant les termes d'ordres supérieurs, on obtient :

$$\Delta H_{it}^{t+\Delta t} = - J_{|H^{t+\Delta t} = H_{it-1}^{t+\Delta t}}^{-1} \cdot W(H_{it-1}^{t+\Delta t}) \quad (IV.12)$$

en désignant par J la matrice jacobienne du système, dont la composante i, j s'écrit :

$$J_{i,j} = \frac{\partial W_i}{\partial H_j^{t+\Delta t}} \quad (IV.13)$$

Le calcul d'un nouvel incrément réclame donc en principe l'évaluation et l'inversion de la matrice jacobienne. Il est cependant possible d'éviter ces deux opérations à chaque itération en recourant à des méthodes de Newton-Raphson modifiées, la meilleure étant "simplement" celle qui réalise le meilleur compromis entre la vitesse de convergence et le temps de calcul ! Il est même possible d'imaginer certains artifices pour accélérer cette vitesse (Khellaf).

Nous nous en tiendrons à la méthode de base, en appliquant à l'incrément calculé un simple coefficient qui autorise une sous ou surelaxation.

Explicitons à présent le terme général de la matrice tangente (IV.13) dans le cadre de l'équation (IV.7)

$$J_{i,j} = \int_S [P_i(N_j + (m+1)\Delta t \theta_t U_k^{t+\Delta t} \frac{\partial N_j}{\partial x} \delta_{kj})] dS \quad (IV.14)$$

en définissant U_k parallèlement à (IV.5) et (IV.8) comme les composantes d'un vecteur U fixé par

$$\hat{u} = N^T \cdot U \quad (IV.15)$$

L'algorithme se présente alors sous la forme suivante :

Calcul des inconnues au temps $i\Delta t$, $i = 1, \dots, nt$

- Evaluation d'une première solution approchée par combinaison linéaire des solutions aux deux pas précédents.
- Itération $k = 1, \dots$
 - Calcul simultané de la matrice Jacobienne (IV.14) et du vecteur résidu (IV.9) évalué pour $H_{k-1}^{t+\Delta t}$ grâce à l'évaluation des intégrales dans chaque élément par intégration de Gauss en axes locaux suivi d'un assemblage.
 - Résolution du système (IV.12) pour obtenir un nouvel incrément.
 - Test de précision, basé sur la norme de l'incrément et du résidu.

Notons encore que la convergence ne fut jamais prise en défaut en progressant par sous-relaxation avec 90 % environ de l'incrément appliqué pour correction.

Cette conclusion ne vaut naturellement que pour des simulations où le pas de temps Δt adopte, dans la frange des valeurs de nombres de courant raisonnables discutés précédemment, une valeur "appropriée".

Précisons cet adjectif par une approche théorique ainsi que le coefficient θ_t qui demande également quelques précisions.

IV.4. ETUDE DE STABILITE DU SCHEMA NUMERIQUE

Procédons à l'analyse théorique du schéma de discrétisation par développement en séries de Fourier. Dans cet exercice, une linéarisation du système permet évidemment de séparer l'étude de chaque terme du développement.

Cette simplification, requise par toutes les méthodes classiques d'analyse de stabilité, élimine certains comportements caractéristiques que nous évoquons au chapitre V.

Néanmoins, les traits marquants qu'une telle étude révèle, constituent autant de tendances significatives pour le modèle non-linéaire.

La forme linéarisée de (IV.7), qui s'écrit sur pente constante en présence d'apports extérieurs spatialement et temporellement constants,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c_0 \frac{\partial h}{\partial x} = r' \quad (\text{IV.16})$$

présente une expression simple qui se prête aisément à une première application de la méthode introduite par Leenderste et étendue aux éléments finis par Gray.

Résumons les grandes lignes d'un raisonnement qui sera couramment mis en pratique au long de ce travail.

a. Nous raisonnons d'abord sur l'expression non discrétisée du système.

- La solution analytique est supposée prendre la forme suivante :

$$h(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m \exp(i l_m x + i k_m t) \quad (IV.17)$$

h_m représente un complexe fixé par les conditions initiales

$l_m = \frac{2\pi}{L_m}$ représente un entier, le nombre d'onde

k_m appartient en toute généralité au domaine des complexes

$$i = \sqrt{-1}$$

La substitution du terme générique de (IV.17) dans l'expression non discrétisée à étudier établit en toute généralité une relation entre k_m et l_m que nous écrivons sans plus de détails en séparant parties réelle et imaginaire :

$$k_m = k_{rm}(l_m) + i k_{im}(l_m) \quad (IV.18)$$

- Si nous remplaçons cette expression de k_m dans (IV.17) pour étudier l'évolution temporelle de la solution générale à l'issue de n pas de temps Δt , il vient :

$$h(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m \exp(-k_{im} \Delta t)^n \exp[i(l_m x + k_{rm} n \Delta t)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m \lambda_m^n \exp(i l_m x) \quad (IV.19)$$

- $\lambda_m = \exp(i k_{rm} \Delta t)$ est le facteur d'amplification analytique. Comme le montre (IV.19), son module évoque la réduction d'amplitude que connaît l'onde au cours d'un pas Δt tandis que son argument reflète son déplacement sur le même intervalle.
- Son expression, en fonction de l_m , nous renseigne donc complètement sur la transformation du signal au cours du temps. En particulier, une valeur du module supérieure à l'unité en l'absence de tout apport extérieur, conduirait à

l'évidence à une croissance sans limite du signal au fil du temps.

Particularisons ces étapes pour l'équation (IV.16) pour $r' = 0$. Elles rendent une expression du facteur d'amplification évidente :

$$\lambda_m = \exp(-ic_0 l_m \Delta t) \quad (IV.20)$$

puisque l'équation linéarisée décrit une simple translation de l'onde ($\|\lambda_m\| = 1$)

b. Raisonnons à présent sur la forme discrétisée de l'équation linéarisée.

Pour l'explicitier, nous convenons de travailler avec des éléments linéaires d'égale longueur Δx et d'établir la $i^{\text{ème}}$ équation obtenue par orthogonalisation de Galerkin.

L'évolution des intégrales n'étant influencée que par les 2 noeuds qui entourent le noeud i , nous obtenons finalement dans le cas de (IV.16) :

$$\frac{(H_j^{t+\Delta t} - H_i^t)}{\Delta t} \int_S N_j P_i dS + c_0 (\theta_t H_j^{t+\Delta t} + (1 - \theta_t) H_j^t) \int_S \frac{\partial N_j}{\partial x} P_i dS = \int_S r' P_i dS \quad (IV.21)$$

soit pour $P_i = N_i$:

$$\frac{1}{6 \Delta t} [(H_{i-1}^{t+\Delta t} - H_{i-1}^t) + 4(H_i^{t+\Delta t} - H_i^t) + (H_{i+1}^{t+\Delta t} - H_{i+1}^t)] + \frac{c_L}{\Delta x} [\theta_t H_{i+1}^{t+\Delta t} + (1 - \theta_t) H_{i+1}^t - \theta_t H_{i-1}^{t+\Delta t} - (1 - \theta_t) H_{i-1}^t] = 2 [\theta_t r^{t+\Delta t} + (1 - \theta_t) r^t] \quad (IV.22)$$

ou encore en utilisant les notations usuelles suivantes :

$$\delta^2 H_i = H_{i-1} - 2 H_i + H_{i+1} \quad (IV.23)$$

$$\Delta_0 H_i = \frac{1}{2} (H_{i+1} - H_{i-1}) \quad (IV.24)$$

$$n_c = \frac{c_0 \Delta t}{\Delta x} \quad \text{le nombre de courant} \quad (IV.25)$$

(IV.21) s'écrit :

$$\left(1 + \frac{1}{6} \delta^2\right) (H_i^{t+\Delta t} - H_i^t) + 2 n_c \Delta_0 (\theta_t H_i^{t+\Delta t} + (1 - \theta_t) H_i^t) = 2 (\theta_t r^{t+\Delta t} + (1 - \theta_t) r^t) \quad (\text{IV.26})$$

- Nous exprimons cette fois la solution numérique par une série discrète de Fourier qui s'écrit (Canuto et al, Bentley et al) :

$$H_k^{n\Delta t} = \sum_{m=0}^{\text{node}-1} H'_m \exp[i(l'_m k \Delta x + k'_m n \Delta t)] \quad (\text{IV.27})$$

node représentant le nombre de noeuds de la discrétisation.

- Définissons conformément au cas analytique un facteur d'amplification numérique :

$$\lambda'_m = \exp(ik'_m \Delta t) \quad (\text{IV.28})$$

L'expression de ce facteur en fonction de l'_m va nous donner, comme pour la solution analytique, une image de la façon dont le schéma numérique propage les ondes.

La stabilité du schéma dépendra du module $\|\lambda'_m\|$, dont la valeur ne doit pas excéder l'unité pour $r' = 0$.

La précision du schéma dépend de la comparaison des deux facteurs analytique et numérique concernant la réduction d'amplitude et la vitesse de déplacement.

- La substitution de (IV.27) dans l'équation discrétisée (IV.26) donne, tous calculs faits, pour la même composante :

$$\lambda'_m (a_m + i \theta_t b_m n_c) = a_m - i (1 - \theta_t) b_m n_c \quad (\text{IV.29})$$

avec

$$a_m = \frac{1}{6} (2 \cos(l'_m \Delta x) + 4)$$

$$b_m = \sin(l'_m \Delta x)$$

Evaluons le module du facteur d'amplification

$$\| \lambda'_m \|^2 = 1 + \frac{1 - 2\theta_t}{\left(\frac{a_m}{n_c b_m} \right)^2 + \theta_t^2} \quad (\text{IV.30})$$

Nous constatons immédiatement que toute discrétisation temporelle qui adopte $\theta_t < 0,5$ est instable.

Pour $\theta_t = 0,5$, nous n'avons aucune atténuation du signal, en totale conformité avec la solution analytique. Un aspect très favorable de cette situation est sa totale indépendance vis-à-vis de n_c notamment.

$\theta_t > 0,5$, enfin, introduit de la dissipation dans le système qui dépend à la fois de la longueur d'onde et du nombre de courant adopté pour la simulation. Pour ce dernier, on constate que la dissipation introduite par un θ_t donné est d'autant moins sensible que n_c est petit.

Dans cette discussion, aucune imposition n'apparaît sur le pas Δt à adopter et nous pourrions donc parler de stabilité inconditionnelle pour $\theta_t \geq 0,5$.

Evoquons à présent la propagation des ondes pour remarquer, en accord avec l'interprétation donnée de l'argument de λ'_m , qu'un facteur d'amplification qui aurait une valeur réelle mettrait en évidence une impossibilité du schéma à propager les ondes. Cette situation survient pour les ondes les plus courtes qui peuvent exister dans la solution numérique. Leur longueur d'onde, double de la dimension de la maille, annule $b_{2\Delta x}$, ce qui réduit $\lambda'_{2\Delta x}$ à l'unité, indistinctement de toute valeur de θ_t . Nous en concluons qu'une fois introduites, nous n'avons dans ce schéma aucun moyen, ni de propager, ni même d'atténuer ces ondes courtes.

IV.5. MODELISATION D'UN ECOULEMENT SUR PLAN INCLINE

L'analyse théorique n'indique aucune limite stricte à respecter sur le pas de temps pour autant que θ_t se maintienne dans les limites acceptables. Nous retrouvons là une heureuse conséquence des schémas temporels implicites largement utilisés pour les pas de temps plus larges qu'ils autorisent.

En pratique cependant, nous allons chercher à concrétiser les dangers d'un laps de temps Δt qui permet à l'onde de se propager sur de nombreuses mailles. Cette notion est incluse dans le nombre de courant qui s'écrit, compte tenu de l'expression simplifiée de la célérité :

$$n_c = \frac{c_0 \Delta t}{\Delta x} = \frac{(m+1) a h^m \Delta t}{\Delta x} \quad (\text{IV.31})$$

La première série d'essais reproduit l'écoulement suscité sur un plan incliné de 1000 m de long par une pluie de 5×10^{-6} m/s qui perdure durant 15.600 s.

Cette surface, de pente 0,05 m/m adopte $n = 0,2$ pour valeur du coefficient de frottement turbulent de Manning. Nous sommes proches des caractéristiques de terrains naturels à considérer, à la différence toutefois que nous supposons ici le plan imperméable.

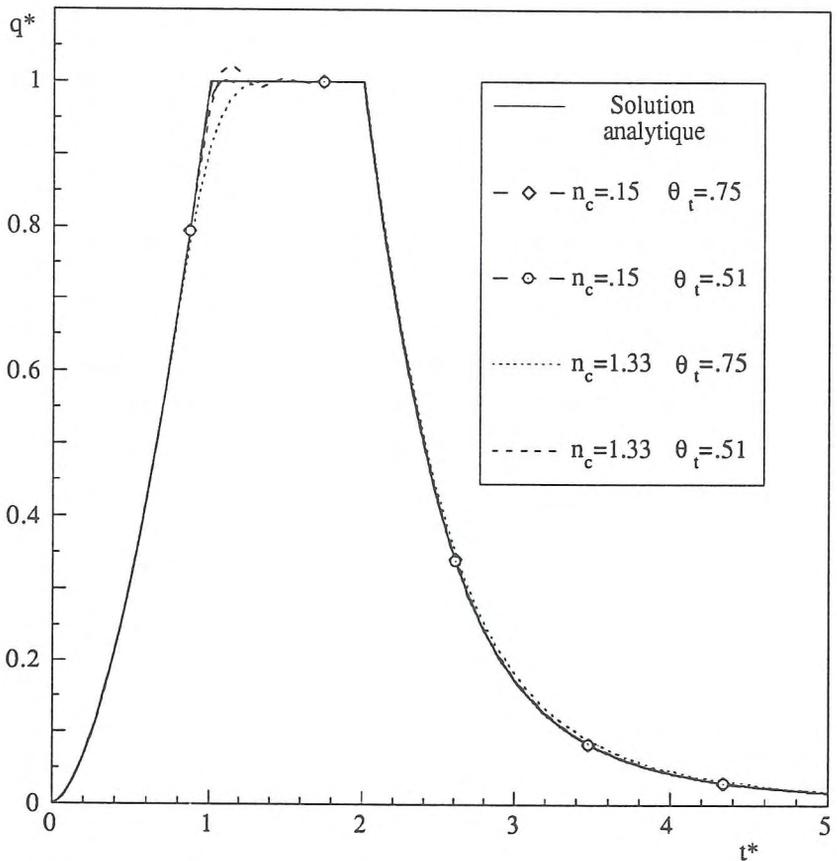


Figure IV.1.
Hydrogramme adimensionnel à l'exutoire d'un plan incliné
pour une loi turbulente de Manning. Influence du décentrage temporel
et du nombre de courant

Si nous adoptons une discrétisation spatiale de $\Delta x = 50$ m, il nous faudrait fixer Δt à 390 s pour maintenir à l'équilibre le nombre de courant à l'unité, du moins à l'aval du plan. Deux valeurs extrêmes $\Delta t = 60$ s et $\Delta t = 520$ s, combinées à deux décentrement temporels, vont donc nous donner des éléments de discussion sur les tendances futures à respecter.

Deux effets méritent d'être soulignés. Ils se manifestent dans l'allure que prend la solution pour tendre vers l'équilibre comme l'indique le "zoom" à la figure IV.2.

- Lorsque le schéma est pratiquement centré temporellement ($\theta_t = 0,51$), le choix d'un pas de temps excessif s'accompagne d'une surestimation du débit à l'équilibre qui précède une oscillation amortie d'autant plus prononcée qu'on augmente le pas.

Le bilan global n'est pas pour autant détérioré, pas plus que la convergence qui demeure rapide.

Cet effet est assez prévisible dès lors qu'on procède par interpolations temporelles excessives au voisinage d'une période où la solution doit connaître une brusque variation de pente. Il s'amenuise considérablement lorsque le nombre de courant réintègre des domaines plus usuels.

Il n'interfère pas sur une correspondance avec la solution analytique à l'équilibre que nous qualifierons d'excellente, avec tout au plus pour les n_c les plus grands, un très léger retard dans la phase de récession.

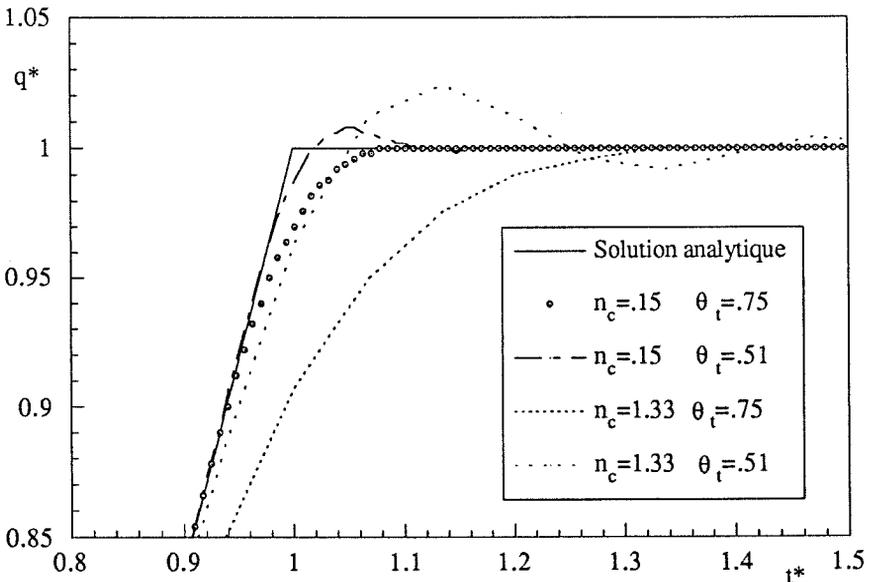


Figure IV.2. Zoom sur la phase de stabilisation de la figure IV.1.

- Plus caractéristique encore est l'aspect asymptotique qu'adoptent les solutions obtenues par décentrement temporel du schéma (On remarque à égalité de pas de temps comme la solution $\theta_t = 0,75$ tend beaucoup plus graduellement vers l'équilibre que $\theta_t = 0,51$).

Là encore, l'augmentation du pas temporel amplifie un effet dissipatif qu'avait prévu l'analyse théorique préalable.

Cette tendance semble assez positive puisque l'incurvation progressive de la courbe caractérise les solutions de théories plus complètes tout comme les résultats d'essais physiques, comme le révèle l'examen des courbes du chapitre III (III.5. ou 6.).

Un autre aspect à mettre à l'actif du décentrement temporel est qu'il étouffe les velléités oscillatoires qui viennent d'être constatées à la stabilisation.

La dissipation numérique obtenue, éliminée théoriquement des équations cinématiques, sert parfois de justification a posteriori d'avoir ignoré des termes qui créaient des effets similaires.

Mais c'est sans tenir compte d'une action sélective sur les longueurs d'onde qui n'est pas identique à celle que provoquerait, par exemple, la prise en compte de la pente réelle de surface.

En conclusion, nous n'userons de cet artifice numérique que pour provoquer un faible étouffement d'oscillations imprévisibles et pour apporter un regain de stabilité au schéma ($\theta_t = 0,55$).

Cet étouffement sera d'autant plus léger que n_C est petit, comme l'a montré la théorie. Or à pas de temps constant, correspond aux phases de croissance et de récession pratiquement toute la gamme des n_C . Son critère de limitation étant naturellement fixé sur les valeurs maximales qu'il est susceptible de prendre au point le plus défavorable à l'équilibre, l'effet d'un faible décentrement est donc imperceptible sur la majeure partie de la simulation, à l'exception des phases comme la stabilisation où nous avons précisément montré son action positive.

Nous ne souscrivons par contre pas, dans ce modèle, aux larges décentres sensés reproduire, de façon assez aveugle, des effets diffusifs qu'ont sciemment éliminés de précédentes discussions (Smith, Weinmann).

Terminons cette première application en visualisant les réponses du système pour des pluies dont l'intensité et la durée se combinent pour assurer un égal volume tombé.

La figure IV.3. rappelle quelques effets de la non-linéarité du système qui réfute des conceptions classiques comme le temps de concentration¹ considéré comme propriété

¹ temps de concentration : temps nécessaire à une goutte de pluie tombant sur le point le plus éloigné du bassin, pour parvenir à l'exutoire.

intrinsèque d'un bassin, la présence d'isochrones² et, plus généralement, les propriétés d'additivité liées à la théorie de l'hydrogramme unitaire.

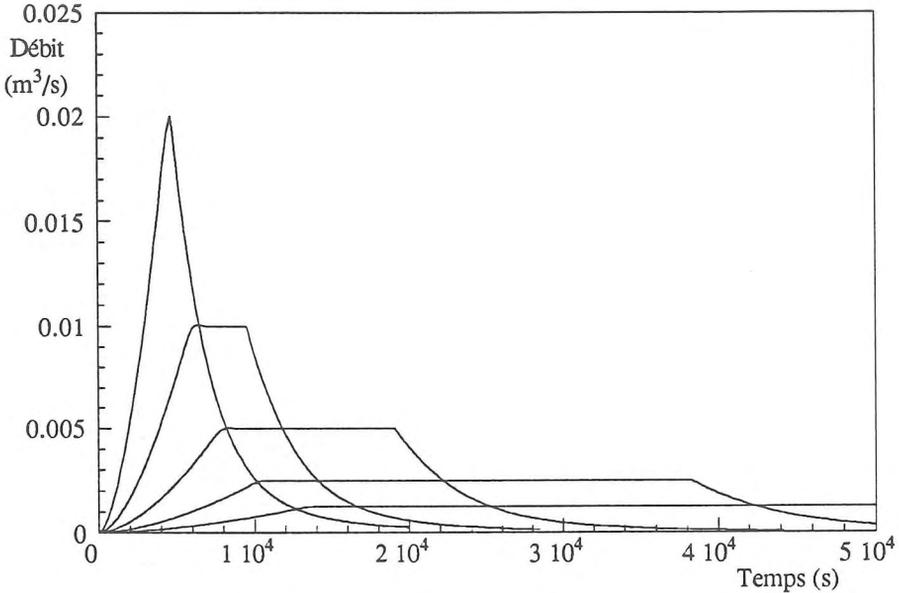


Figure IV.3.
Hydrogramme à l'exutoire d'un plan incliné pour différentes intensités et durées de pluie, et pour un même volume total tombé.

IV.6. MODELISATION DE L'ECOULEMENT SUR PENTE NON UNIFORME, DE VALEUR CROISSANTE VERS L'EXUTOIRE

L'évolution graduelle des topographies étudiées suppose que nous procédions à présent à l'extension de la théorie aux géométries moins monotones.

L'amont du bassin considéré s'étale sur 550 m en un plateau faiblement incliné (la pente aux 12 noeuds espacés de 50 m est fixée à 0,01 m/m). Il se prolonge en une pente beaucoup plus escarpée qui plonge jusqu'à l'exutoire (la pente aux 10 derniers noeuds espacés de 50 m est de 0,1 m/m). Le fini de surface de ce bassin imperméable lui assure

² ligne isochrone : lieu géométrique de tous les points d'impact des gouttes de pluie qui mettent le même laps de temps pour parvenir à l'exutoire.

une valeur du coefficient de frottement de $n = 0,2$. Les précipitations, de 5×10^{-6} m/s, sont uniformes et ininterrompues.

Nous respectons les acquis de la précédente simulation en fixant le pas temporel à 120 s et le décentrement θ_t à 0,55.

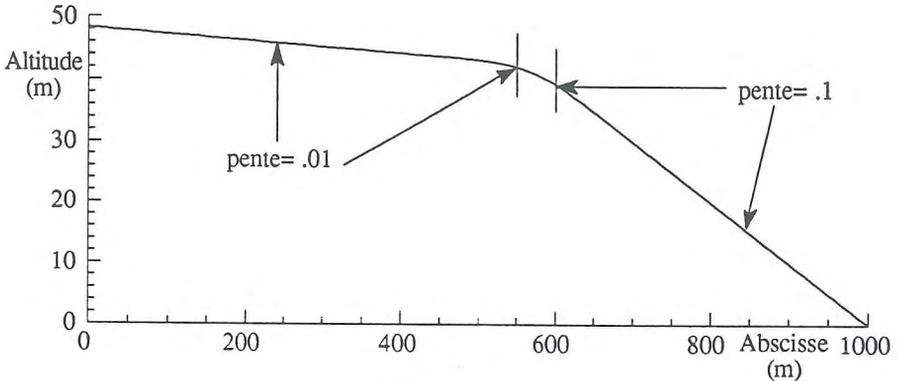


Figure IV.4. - Profil étudié.

La géométrie, par la transition prononcée qu'elle présente, est à même de mettre à jour les éventuelles imprécisions sur le débit que citait Jayawardena et al. Ces soucis, conjugués à des préoccupations topographiques, nous incitent à détailler d'emblée quelques spécificités de l'écriture discrétisée des équations cinématiques.

- Revenons d'abord aux aspects numériques qui conditionnent la précision obtenue sur les débits.

L'écriture des équations (IV.8) (IV.14), qui procèdent à l'évaluation du terme $(\bar{u}h)$ par $(N_i (\bar{u}h)_i)$ ou $(N_i (ah^{m+1})_i)$, suivant ainsi les recommandations de Smolderen ou de Wilders, tient compte des enseignements tirés de nombreux tests de vérification.

Le non-respect de cette règle qui consiste à évaluer le débit d'un seul tenant à chaque noeud donne effectivement des bilans de débit très détériorés au voisinage de toute modification sensible de pente : les sursauts répercutés dans des déficits ou des excès de volume à l'exutoire inspirent une grande prudence vis-à-vis de méthodes exprimées sous forme non conservative.

Dans la suite de l'exposé, toute formulation alternative que nous serions amenés à commenter respectera cette condition vitale. Le bilan volumique, même lorsqu'il est passé sous silence, fait systématiquement l'objet d'un contrôle et donne pleine satisfaction dans chaque simulation.

- La première particularité de l'écriture discrétisée désigne d'autant plus clairement la forme appropriée que doit prendre la description topographique. L'évolution aux noeuds de la grandeur ($ah^m + 1$) où intervient la pente topographique implique que cette dernière soit continue aux noeuds.

Cette conséquence logique d'une continuité de débit à assurer aux noeuds va à l'encontre d'une description habituelle de la topographie en termes d'altitudes (la description donnée pour cet exemple en termes de pentes semble effectivement peu coutumière).

Nous pourrions classer cette remarque au rang des singularités de la méthode, clore le sujet sans plus de détails en déclarant qu'après tout, il incombe au modélisateur de présenter les données sous une forme adéquate et que l'éventuelle "conversion" topographique sort du cadre de ce travail.

Cette difficulté a plus logiquement fait l'objet de diverses tentatives pour convertir des données exprimées en terme d'altitudes. L'approche unidimensionnelle constitue là encore un excellent terrain d'investigation qui permet une interprétation plus aisée des choix et de leurs conséquences.

Loin de prétendre synthétiser un sujet qui représente un domaine de recherche à part entière, les quelques résultats présentés sur cette topographie donnent certaines tendances dégagées de nos essais.

Avant de les aborder, nous vérifierons le bon comportement du logiciel appliqué à 20 éléments linéaires avec des données de pentes aux noeuds.

Pour ce qui concerne l'aspect instationnaire, une visualisation tridimensionnelle donne une idée globale de l'évolution temporelle de la distribution du débit et de la hauteur le long de la surface d'écoulement. La figure IV.5a. exploite ce mode de représentation pour la hauteur.

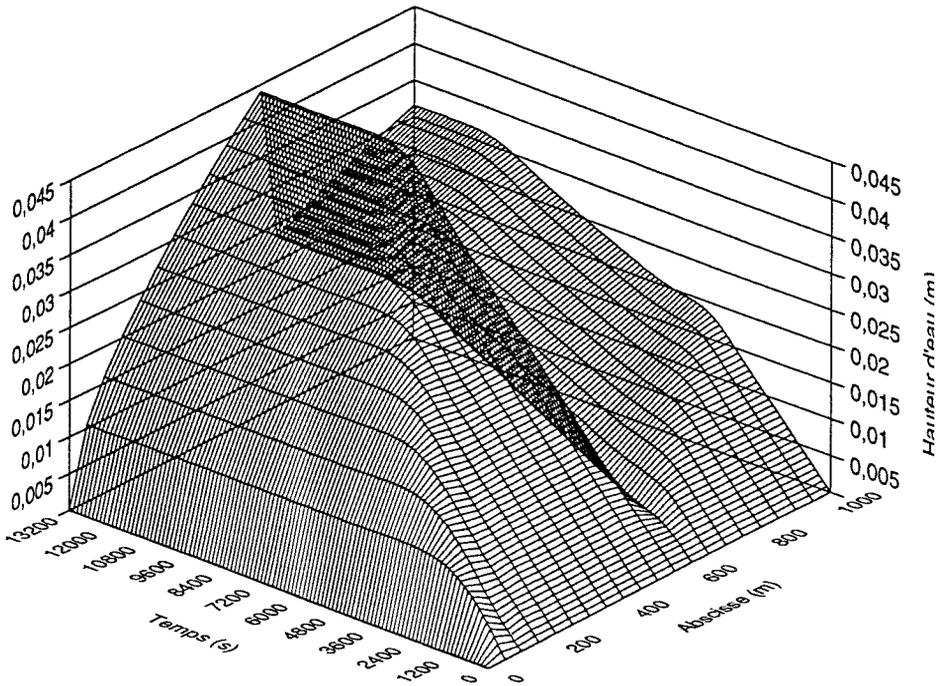


Figure IV.5a.

Evolution temporelle de la hauteur d'eau sur l'ensemble de la surface topographique

Comme l'indique la figure IV.5.b, les lignes d'eau classiques s'obtiennent par intersection de la surface résultat avec un plan perpendiculaire à l'axe des temps tandis que les évolutions temporelles en un point se lisent sur un plan perpendiculaire à l'axe des abscisses.

On distingue nettement la présence d'une seule famille de caractéristiques pour cette théorie, qui ne permet aux ondes qui se dessinent clairement que de se propager d'amont vers l'aval.

Ainsi, la perturbation générée par la transition de pente n'est pas en mesure d'influencer le plateau amont et l'évolution temporelle de la courbe en $x = 300$ m s'identifie pleinement à la première simulation de ce chapitre.

A l'aval de la transition par contre, l'arrivée de la perturbation, par exemple en $x = 800$ m, infléchit la courbe qui poursuit son évolution jusqu'à stabilisation.

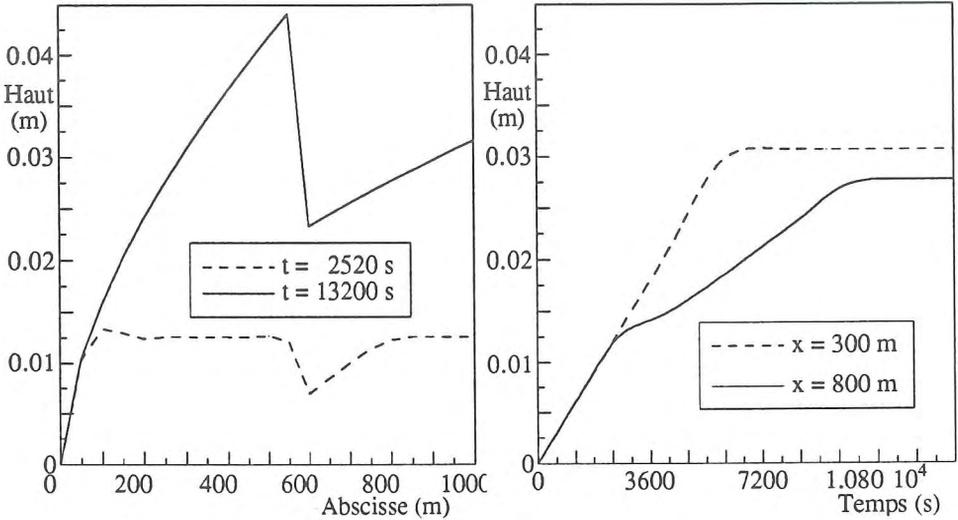


Figure IV.5b.

Courbes obtenues par intersection de la surface résultat avec des plans respectivement perpendiculaires aux axes des temps et des abscisses

Cette onde initiée par l'accroissement de pente est également détectable sur la représentation du débit à la figure IV.6.

L'hydrogramme à l'exutoire, visible sur cette représentation, montre, par l'infléchissement qu'il subit dans sa phase de croissance, les premiers atouts d'une représentation en long des irrégularités de la topographie.

On vérifie également la parfaite distribution linéaire du débit en fonction de l'abscisse à l'équilibre.

Revenons à présent aux conversions topographiques pour faire face à deux constatations préalables :

- D'abord, il est évident qu'en approche tridimensionnelle des surfaces, nous n'obtiendrons que des données exprimées par 3 coordonnées pour chaque point, expression standardisée des cartes topographiques digitalisées.

Cette formulation est d'autant plus logique que ce que nous nommerons pente virtuelle, c'est-à-dire celle prise en compte avec la discrétisation topographique adoptée, dépendra finalement de la densité de points qui définit la surface à étudier.

Il faut donc incontournableement définir la meilleure transition, meilleure au sens des conséquences sur l'écoulement bien plus que sur des seuls critères topographiques (respect des altitudes par exemple).

Cette définition est d'autant plus malaisée à préciser que la variation de la pente à l'intérieur d'un élément n'est pas définie explicitement comme l'attestent les expressions (IV.9) et (IV.14). Elle "est noyée" dans les champs définis pour le débit et la hauteur et découle en l'occurrence de leurs variations linéaires dans les éléments à 2 noeuds.

- Ensuite, on peut s'interroger sur les impositions topographiques que semble réclamer l'approche cinématique. Pourquoi faudrait-il travailler avec une topographie continue là où les équations complètes de Navier-Stokes, par exemple, n'exigent que des altitudes aux noeuds ?

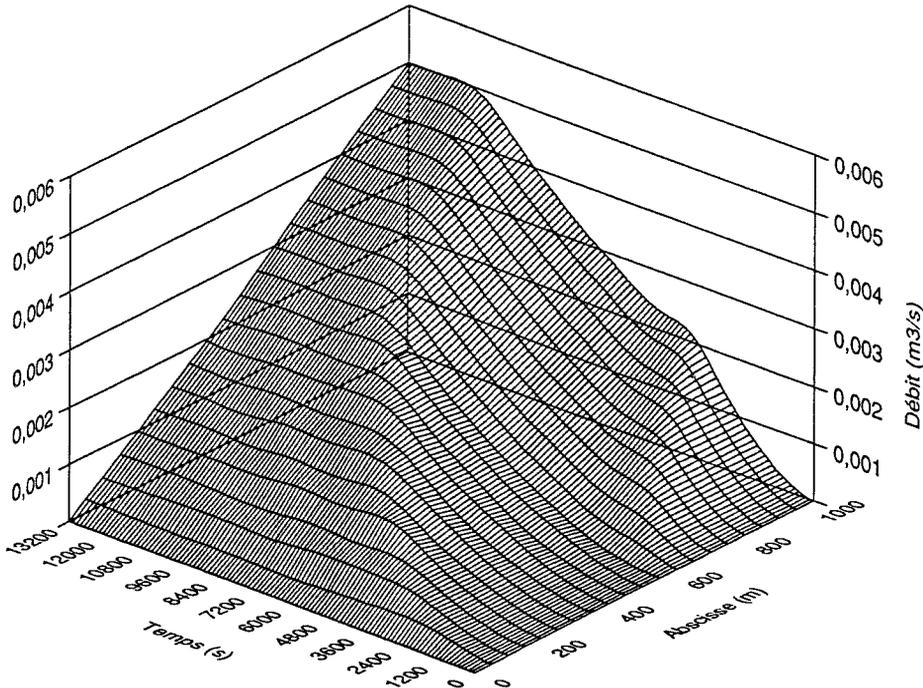


Figure IV.6.
Représentation tridimensionnelle de l'évolution temporelle du débit sur l'ensemble de la surface topographique

Une réponse purement numérique consiste à dire que la vitesse constitue, dans ces cas, une inconnue à part entière, qui fait l'objet d'une discrétisation avec inconnues nodales à calculer. Ces dernières résultent d'une évaluation des termes du système d'équations aux points d'intégration où les pentes topographiques sont complètement définies par des altitudes.

Le problème ne se pose finalement en approche cinématique qu'à partir du moment où on élimine la vitesse en lui substituant son expression explicite en termes de hauteur et des caractéristiques du système. La dégénérescence du système d'équations en une seule relation, exprimée en fonction de la seule inconnue hauteur, n'est donc pas sans inconvénients.

Cette constatation inspire une autre voie qui réglerait le problème sans opérer de manipulation préalable sur la représentation topographique. Elle consiste simplement à conserver la formulation séparée, traitant explicitement la relation qui lie hauteur et vitesse (ou hauteur et débit) par la méthode d'orthogonalisation de Galerkin, afin de dégager des valeurs nodales de vitesse.

Cette façon d'opérer, plus élégante à première vue qu'un travail direct sur la topographie, peut être réalisée sans coût excessif en matière de surcharge de calcul.

En effet, nous avons testé cette méthode en résolvant séparément et de façon alternative l'équation de continuité et la relation explicite vitesse-hauteur (débit-hauteur).

L'écriture de la matrice tangente du premier système conserve formellement la même forme que (IV.14).

A chaque évolution de la correction à porter aux valeurs nodales de la hauteur, on calcule également une nouvelle approximation des valeurs nodales de la vitesse (du débit) par la forme discrétisée suivante :

$$\int_S P \bar{u}^{t+\Delta t} dS = \int_S P a (h^{t+\Delta t})^m dS \quad (IV.32)$$

En définissant la matrice M par

$$M = \int_S P \cdot N^T dS \quad (IV.33)$$

on a immédiatement :

$$U^{t+\Delta t} = M^{-1} \int_S P a (h^{t+\Delta t})^m dS \quad (IV.34)$$

La matrice M, indépendante du temps, requiert une unique inversion préalable. Seul le second membre de (IV.32) fait l'objet d'une évaluation répétée, menée simultanément au

calcul de la matrice jacobienne et du vecteur résidu. Elle est suivie de la multiplication indispensable à l'obtention d'une nouvelle approximation des vitesses (débits).

Pour compléter notre jugement, cette approche doit être comparée avec des méthodes d'évaluation préalable de pentes à partir des altitudes.

Il convient à ce sujet de rester extrêmement prudent sur la géométrie de substitution qui est appliquée sur les points.

Nous rappellerons ici les précautions indispensables dans la définition du bassin versant, qui supporte mal l'apparition de singularités comme des cuvettes locales ! Les expressions polynomiales et les splines ont tendance à fausser les valeurs locales de pente et surtout à créer ce type de singularité.

Ces effets pervers, qui modifient complètement les superficies impliquées, incitent à se tourner vers des principes plus élémentaires qui ne donnent pas de telles manifestations pernicieuses (l'extension tridimensionnelle doit être envisagée !).

Nous avons choisi d'illustrer ici la voie la plus simple qui consiste à attribuer à chaque noeud une moyenne pondérée par les surfaces des pentes déterminées sur les éléments linéaires qui comprennent ce noeud.

Une telle conversion produit un certain lissage des transitions qui se répercute tout naturellement sur les résultats de la figure IV.7., tout en restant fiable et fidèle par rapport à la définition initiale de la surface du bassin.

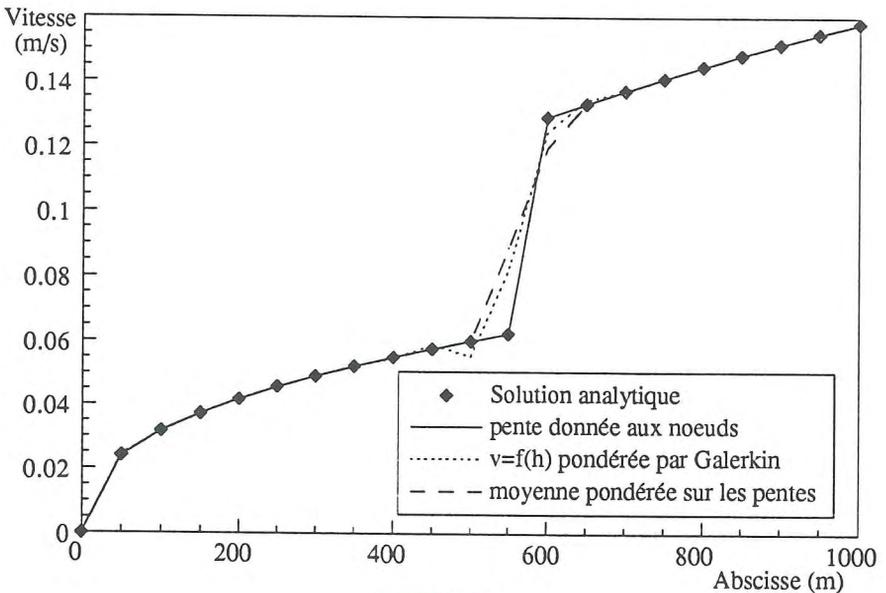


Figure IV.7.
Lignes d'eau à l'équilibre obtenues à partir de pentes ou d'altitudes données aux noeuds

La procédure suivie ici pour obtenir les données topographiques est contraire aux réalités pratiques : les données originelles de pente furent converties en altitudes aux noeuds pour posséder deux expressions d'une même géométrie. L'équivalence n'est d'ailleurs qu'approximative puisqu'on s'est basé sur une variation linéaire de pentes entre noeuds, ce qui ne correspond pas strictement, nous l'avons dit, à la définition implicite issue des définitions de débit et hauteur.

Constatons une nouvelle fois sur la figure IV.7. la totale correspondance avec la solution analytique pour la simulation qui exploite les données originelles de pente aux noeuds.

Les méthodes qui procèdent à partir d'altitudes montrent des fortunes plus diverses avec une transition moins raide. Ceci est particulièrement vrai pour celle qui effectue une moyenne pondérée des pentes avant d'entreprendre la simulation proprement dite. La solution obtenue est lissée mais sans soubresaut, ce qui n'est pas le cas de l'approche qui pondère la relation vitesse-hauteur.

Ces perturbations avant et après le choc inquiètent (les conclusions ne varient pas avec la relation débit-hauteur) lorsqu'on songe aux effets cumulés qu'elles sont susceptibles de provoquer en topographie quelconque.

Chaque résultat montre néanmoins une totale correspondance quant à l'évolution du débit à l'exutoire. Même si la présence d'une seule transition, fût-elle prononcée, aide à une telle conclusion, c'est un critère prépondérant puisque le seul résultat indispensable au bon déroulement d'une modélisation est un hydrogramme fiable qui se déverse dans chaque segment de rivière pour s'y propager.

Ces variantes d'une même simulation ne donnent pas, sur ce point, d'argument décisif, pas plus que l'éventail des tentatives unidimensionnelles ne fut en mesure de révéler des indices suffisamment déterminants pour opter exclusivement pour une philosophie au détriment des autres. Au fil des géométries abordées, il nous est simplement apparu qu'un traitement topographique préalable avait le mérite de la clarté sur l'idéalisation qu'on opérât.

Cette application pose en fin de compte une question qui fut examinée tout au long de l'évolution du travail. Elle explique que nous ayons choisi de faire coexister diverses approches dans les logiciels, d'en laisser le choix à l'utilisateur, dans l'attente d'acquis plus définitifs en simulations quasi-tridimensionnelles.

IV.7. MODELISATION DE L'ECOULEMENT SUR PENTE NON UNIFORME, DE VALEUR DECROISSANTE VERS L'EXUTOIRE

La topographie qui vient d'être étudiée peut être qualifiée de favorable dans la mesure où la vitesse au sein de la lame croît régulièrement en progressant vers l'aval. Or, il est bien connu qu'une mise en vitesse du fluide, même avec des équations complètes, se calcule aisément et sans heurt.

Contentons-nous d'inverser l'ordre de succession des pentes pour étudier une géométrie où l'eau dévale un versant pentu avant de ruisseler sur la surface faiblement inclinée d'un fond de vallée.

Si la gradation dans la difficulté n'est pas manifeste d'un point de vue topographique, il est intéressant d'observer la "remise en charge" des lignes instantanées à proximité de la transition, avec un accroissement de hauteur qui fait face à la diminution de pente et qui autorise un écoulement à vitesse plus faible.

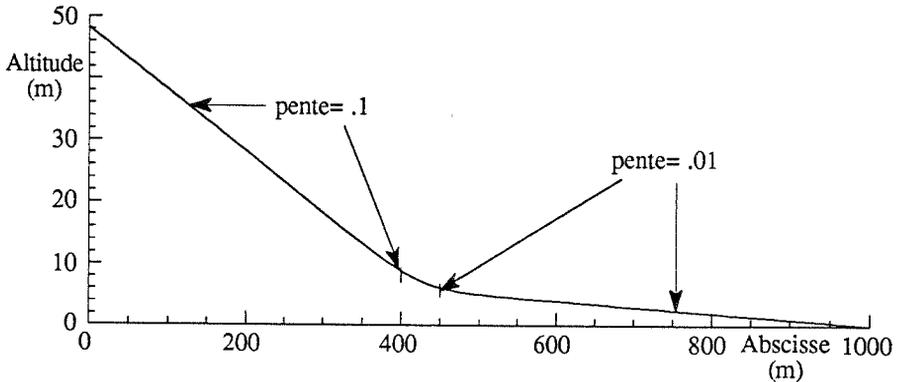


Figure IV.8. - Profil étudié

Nous conservons la même dénivellation totale qu'au cas précédent pour mieux mettre en relief la diversité des solutions obtenues selon le profil en long adopté.

La discrétisation spatiale par éléments à deux noeuds distants de 50 m est maintenue, tout comme la discrétisation temporelle fixée à 120 s et son décentrement $\theta_t = 0,55$.

Travaillons d'abord avec les pentes données aux noeuds, pour obtenir une représentation tridimensionnelle de la hauteur et du débit.

On constate immédiatement sur la figure IV.9. la présence d'ondes parasites qui s'éteignent très graduellement sous l'effet dissipatif du léger décentrement temporel.

Leur apparition ne peut être imputée au pas temporel qui maintient les nombres de courant dans des valeurs plus que raisonnables ($n_c^{\max} = 0,33$).

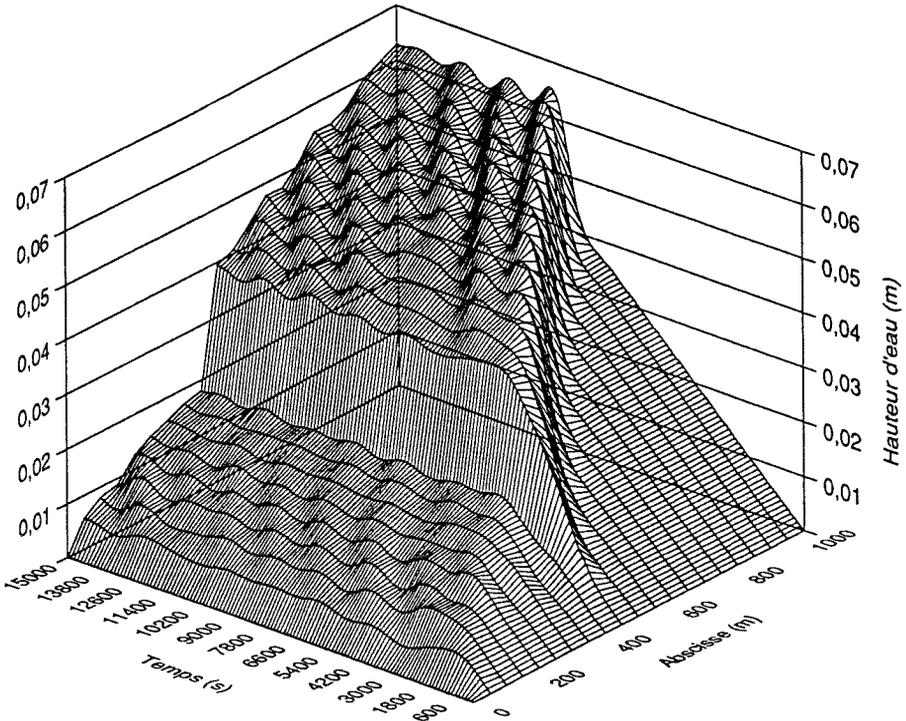


Figure IV.9.

Evolution temporelle de la hauteur d'eau sur l'ensemble de la surface topographique

Les imprécisions sont d'autant plus flagrantes à la figure IV.10. que les valeurs calculées de débit ont toujours fait preuve jusqu'ici de stabilité et d'une grande précision. Or, il faut à présent laisser perdurer la phase de stabilisation en laissant agir l'effet dissipatif pour espérer obtenir des résultats qui s'alignent approximativement sur la droite théorique de distribution en long du débit à l'équilibre.

On peut attendre des méthodes qui procèdent à partir de données d'altitudes que l'assouplissement qu'elles provoquent dans la transition contribue à applanir ces manifestations indésirables.

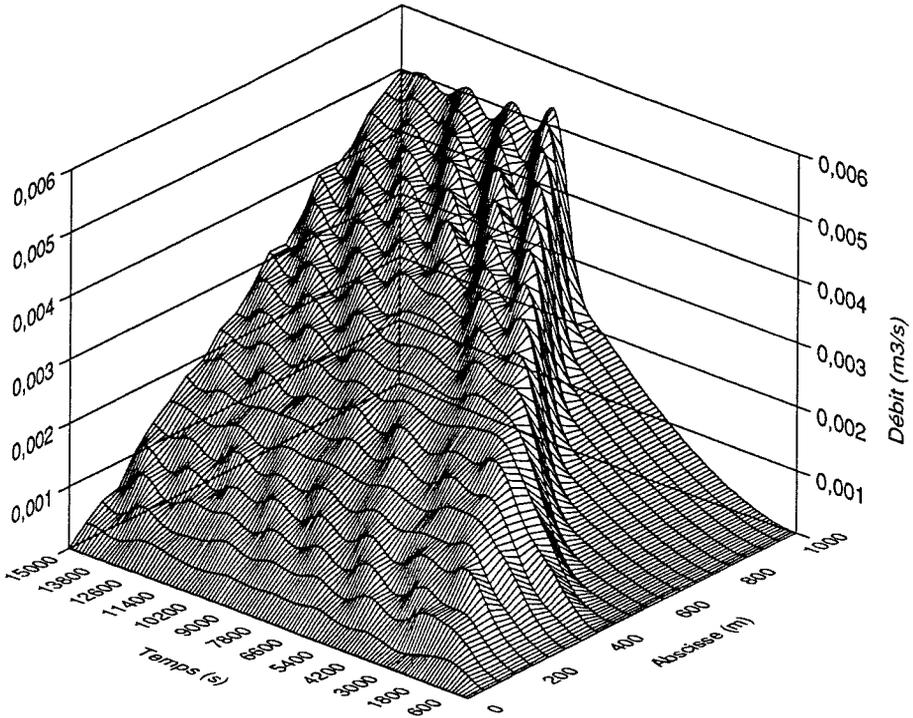


Figure IV.10.
Evolution temporelle du débit sur l'ensemble de la surface topographique

La figure IV.11., qui montre les lignes de débit à un temps où l'équilibre est censé être atteint, prouve bien que nous n'y trouverons pas malheureusement la solution à nos soucis (la solution théorique revient à tracer la diagonale du cadre qui part de l'origine).

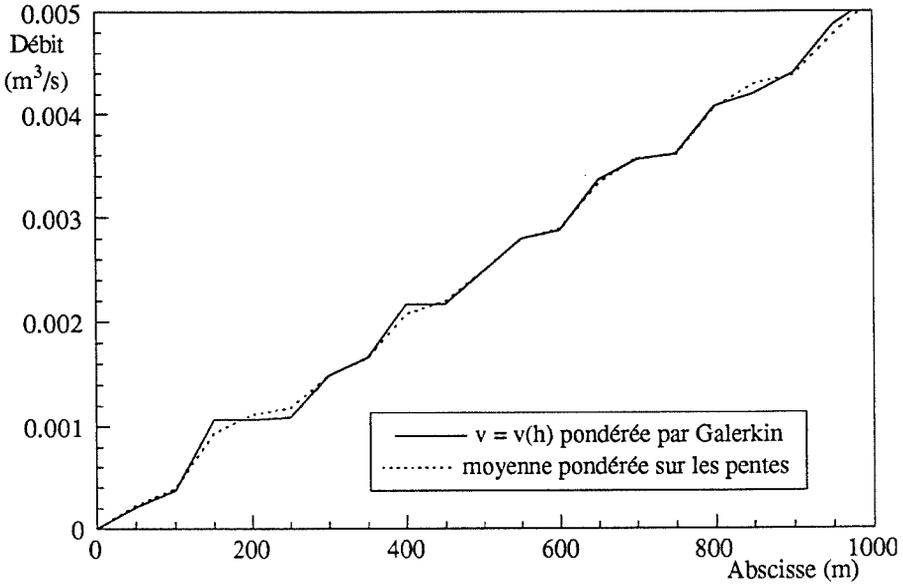


Figure IV.11.

Ligne de débit à $t = 13\,800$ s pour les deux méthodes exploitées à l'exemple précédent et qui recourent à des données d'altitude.

IV.8. CONCLUSION

Les deux premiers essais font pressentir une qualité de résultat que la dernière application remet totalement en cause.

Ce revirement complet de comportement nous incite à renoncer momentanément à d'autres tentatives tant il est difficile de croire au hasard d'un exemple inapproprié.

Plusieurs raisons justifient au contraire de s'inquiéter de ces problèmes :

- Numériquement, la comparaison de ces résultats dégradés par rapport aux premiers essais prometteurs indique la présence d'un fait nouveau.
- Les petits effets ondulatoires sur l'hydrogramme à l'exutoire peuvent engendrer des écoulements grandement perturbés dans la rivière, par un malencontreux cumul de tous les diagrammes à propager.
- Les effets peuvent être plus ravageurs encore sur des géométries plus défavorables.

- On ne peut que s'inquiéter de les laisser proliférer dans de futures géométries quasi-tridimensionnelles où nous n'aurons plus aucune chance de détecter ni leur présence ni leur amplitude relative.

Nous disposons pour unique paramètre de celui du décentrement temporel. Il n'agit visiblement que comme palliatif, incapable d'empêcher l'apparition des perturbations, à peine apte à les étouffer plus ou moins rapidement.

En dehors des réserves initiales que nous avons formulées sur un recours à de la dissipation numérique, l'acharnement à lutter aveuglément par un lissage que nous savons peu sélectif s'apparenterait d'ailleurs à une approche très malsaine pour le futur.

Sans même oser parler momentanément de généralité dans les géométries envisagées, la dégradation des résultats se produit dans des circonstances imprévisibles que nous devons définir au plus tôt.

Le chapitre V se consacre donc à élucider leur origine avant de parer, dans les chapitres ultérieurs, aux éventuels manquements qui les ont provoqués.

Chapitre V

Etude des chocs en écoulement hydrologique

SOMMAIRE

V.1. Introduction

V.2. Naissance de solutions multiples en un point

V.3. Introduction de discontinuités vérifiant l'équation de continuité

V.4. Première approche de la transition par l'hypothèse de l'onde diffusive

V.5. Seconde approche de la transition par les équations complètes d'Euler

V.6. Conclusion

V.1. INTRODUCTION

Le dernier exemple du chapitre précédent a mis en évidence le mauvais comportement du schéma numérique lorsqu'on désire s'intéresser à des géométries moins communes. C'est un constat alarmant dans la mesure où, précisément, on cherche à échapper au carcan des méthodes qui travaillent sur des topographies idéalisées à l'extrême.

Il est naturel d'imputer ces résultats peu satisfaisants à une résolution inappropriée mais l'opposition entre la précision des premiers résultats et les soubresauts des dernières courbes suggèrent une réflexion plus profonde.

L'étude de l'expression linéaire générale

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c_0 \frac{\partial h}{\partial x} = (i - r) \cos \theta \quad (\text{V.1})$$

avec

c_0 = constante

présente un caractère trivial que ne reproduit pas la formulation cinématique non linéaire. Si l'équation (V.1) décrit une simple translation, sans déformation, d'un signal à une célérité c_0 , la non-linéarité quant à elle introduit certains caractères essentiels des ondes hyperboliques avec apparition d'ondes de choc matérialisées par des sauts dans l'écoulement.

L'étude de ce type d'équation a retenu beaucoup d'attention dans la cinématique des gaz. Cependant, le traitement de ces phénomènes particuliers fait l'objet, dans le cadre de l'hydrologie de surface, d'investigations bien plus que confidentielles.

Il est légitime de penser qu'une onde de choc qui se forme en une région de la solution annonce une perte simultanée des capacités du modèle mathématique à représenter la physique du problème.

Cette réflexion détermine la chronologie de ce chapitre. Nous étudierons d'abord, au travers d'une application mathématique particulière, les conditions d'apparition de solutions multiples en un point, provoquées par l'intersection des courbes caractéristiques.

Nous chercherons alors dans les descriptions plus élaborées des chapitres précédents dans quelle mesure ces singularités peuvent être résolues.

D'un point de vue purement mathématique, la solution peut être préservée par l'introduction de discontinuités qui substituent aux solutions multiples en un point une solution unique. La valeur d'une telle solution sera appréciée à la lumière des raisonnements physiques précédents.

Cette dualité entre la physique du problème et son approximation mathématique pour le traitement des singularités constitue un préalable indispensable à la mise en place d'un schéma numérique adapté à cette extension du champ des solutions.

V.2. *NAISSANCE DE SOLUTIONS MULTIPLES EN UN POINT*

Dans l'ensemble des applications envisagées jusqu'ici, nous avons toujours considéré qu'une hauteur perpétuellement nulle à l'amont constituait la condition limite la plus acceptable physiquement. Il faut rappeler qu'on associait alors l'extrémité amont à la crête de partage du bassin considéré.

Nous allons à présent travailler avec une philosophie quelque peu différente.

Le but essentiel de ce paragraphe consiste à mieux apprécier le comportement mathématique des équations élaborées. Dans cette optique, nous travaillons avec une condition amont différente qui produit manifestement les effets que nous souhaitons examiner.

Sans s'attarder davantage sur l'équivalence physique de l'exemple proposé, signalons simplement que le point amont de notre espace pourrait constituer l'exutoire d'un autre bassin soumis à une séquence très particulière de précipitations. Cette dernière engendrerait en notre point amont précisément la forme sinusoïdale du diagramme des hauteurs que nous allons imposer.

Dans un esprit de généralisation, nous supposerons également que le système est recouvert initialement d'une lame uniforme d'eau d'épaisseur $h = b_0$.

Etudions donc un simple plan incliné qui subit invariablement dans le temps une infiltration et des précipitations uniformes (spatialement) avec $(r-i) \cos \theta = r'$. Son état évolue alors en respectant comme condition limite amont pour $h(x,t)$ l'expression mathématique suivante :

$$h'(\tau) = h(0, \tau) = b_0 \left(1 + \sin \frac{\pi \tau}{t_p} \right) \quad \text{pour} \quad 0 \leq \tau \leq t_p \quad (\text{V.2})$$

et

$$h' = h(0, \tau) = b_0 \quad \text{pour} \quad \tau \geq t_p \quad (\text{V.3})$$

τ représente comme au chapitre III le temps d'intersection des caractéristiques de la zone II avec l'axe des ordonnées (cf figure III.2.)

Suivons pour la résolution analytique la même démarche qu'au chapitre III en partageant le plan (x, t) en zone distinctes.

La zone I, balayée par les caractéristiques issues de l'axe ox , présente une solution proche des équations (III.5, 6). La présence d'une hauteur initiale introduit simplement une nouvelle constante dans la solution qui s'écrit dès lors :

$$h = r' \cdot t + b_0 \quad (V.4)$$

le long des courbes caractéristiques d'équation :

$$x = \xi + \frac{a}{r'}(h^{m+1} - b_0^{m+1}) \quad \text{pour } \xi > 0 \quad (V.5)$$

Le paramètre ξ reprend la définition donnée au chapitre III, soit l'abscisse d'intersection des caractéristiques de la zone I avec l'axe des abscisses (voir figure III.2.).

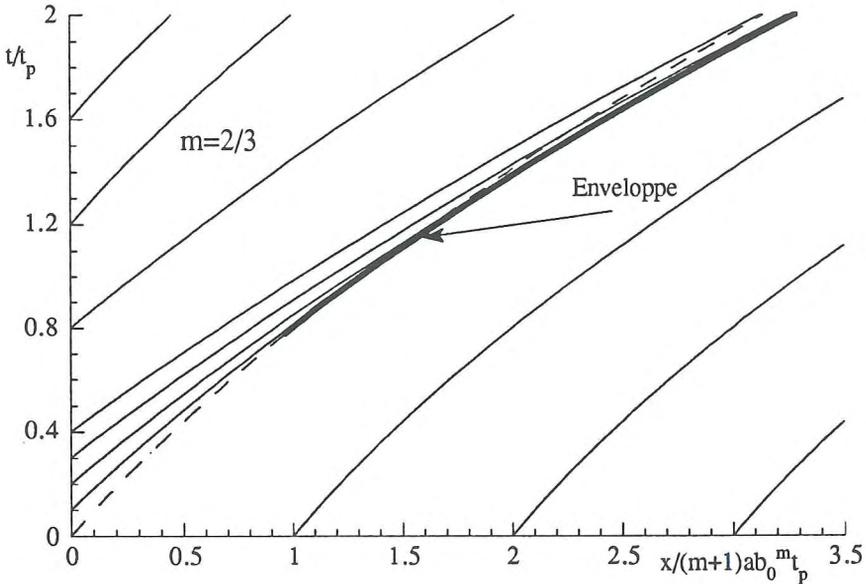


Figure V.1.

Evolution en coordonnées adimensionnelles des caractéristiques et de l'enveloppe dans le plan (x, t) pour la condition limite donnée en (V.2, 3)

L'introduction d'un état initial uniforme non nul ne modifie pas la propriété intrinsèque des caractéristiques de cette zone. Comme le constatent Croley et al, la distance horizontale entre deux caractéristiques reste constante.

La zone I ne devrait donc pas constituer, d'un point de vue numérique, une zone "à risques".

Il n'en va pas de même pour la zone II qui présente des particularités moins immédiates.

En s'inspirant du raisonnement et des notations du chapitre III, nous obtenons comme solution :

$$h = r' \cdot (t - \tau) + h' \tag{V.6}$$

le long des courbes caractéristiques d'équation :

$$x = \frac{a}{r'} (h^{m+1} - h'^{m+1}) \quad \text{pour} \quad \tau > 0 \tag{V.7}$$

Ces deux équations montrent qu'avec le temps, les caractéristiques s'infléchissent pour devenir pratiquement parallèles à l'axe des abscisses. Cette forme pourrait, en toute généralité, favoriser l'apparition d'intersections de caractéristiques.

Pour examiner cette possibilité, éliminons h entre (V.6) et (V.7) pour établir la relation qui lie x et t :

$$x = \frac{a}{r'} [r' \cdot (t - \tau) + h']^{m+1} - \frac{a}{r'} h'^{m+1} \tag{V.8}$$

Cette équation de caractéristique permet d'étudier l'évolution de la distance horizontale qui sépare deux caractéristiques issues respectivement des points (0, t) et (0, τ + δτ). Elle s'écrit :

$$x(t, \tau + \delta\tau) - x(t, \tau) \tag{V.9}$$

Comme le confirment Wintham et Schmid, la condition pour que deux caractéristiques infiniment voisines se croisent détermine, avec (V.8), la courbe enveloppe des lieux d'intersection de caractéristiques. Cette condition s'écrit :

$$\frac{\partial x(t, \tau)}{\partial \tau} = 0 \tag{V.10}$$

ou, plus explicitement :

$$(r'(t - \tau) + h')^m \left(\frac{dh'}{d\tau} - r' \right) = h'^m \frac{dh'}{d\tau} \tag{V.11}$$

Cette expression permet de tirer t pour obtenir une équation paramétrique de l'enveloppe en introduisant sa valeur dans (V.8). Tous calculs faits, on déduit la forme paramétrique suivante :

$$t_c(\tau) = \tau + \frac{h'}{r'} \left[\left(1 - \frac{r'}{\frac{dh'}{d\tau}} \right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right] \quad (V.12)$$

$$x_c(\tau) = \frac{ah'^{m+1}}{r'} \left[\left(1 - \frac{r'}{\frac{dh'}{d\tau}} \right)^{\frac{m+1}{m}} - 1 \right] \quad (V.13)$$

Ce résultat, établi pour une géométrie simple ($a \neq f(x)$), n'est aucunement particularisé à la condition amont que nous avons choisi de traiter. Il s'impose donc comme un moyen aisé pour localiser la limite de la zone à solution unique, pour une condition limite donnée.

Plus précisément, l'étude complète de la courbe permet de déterminer son origine dans le plan (x, t) . Dans la zone physiquement significative de ce dernier (x et $t > 0$), il est clair, en considérant (V.12) et (V.13), qu'une enveloppe n'apparaîtra que pour

$$\frac{dh'}{d\tau} > r' \quad (V.14)$$

Passons à présent à l'application particulière choisie. Pour provoquer les effets recherchés et pour les visualiser, nous concrétisons la solution (V.14) en choisissant :

$$\frac{r't_p}{b_0} = 1 \quad (V.15)$$

Conformément aux choix antérieurs, adoptons une loi turbulente de Manning avec $m = 2/3$.

L'étude de l'enveloppe montre dans ces conditions que son origine se situe sur la caractéristique de paramètre $\tau = 0$. Sa situation exacte dans le plan (x, t) se déduit immédiatement de (V.12) et (V.13).

Le choix (V.15) du lien entre les paramètres permet aussi de déterminer quelle sera la dernière caractéristique concernée par l'enveloppe. Si nous développons (V.14) en utilisant (V.15), nous obtenons :

$$\cos\left(\frac{\pi\tau}{t_p}\right) > \frac{1}{\pi} \quad \text{soit} \quad \frac{\tau}{t_p} < \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{\pi}\right) \quad (V.16)$$

La figure V.1. illustre la solution analytique de cette application. On soulignera le parallélisme des caractéristiques issues de l'axe des abscisses et le partage du plan pour l'enveloppe générée par les caractéristiques dont le paramètre (t/t_p) varie de 0 à 0,397.

La présentation sous forme adimensionnelle résulte du choix de t_p comme temps caractéristique et de la célérité initiale $(m + 1) b_0^m$ comme vitesse caractéristique.

La visualisation des lignes d'eau instantanées montre le caractère inéluctable de l'apparition de solutions triples.

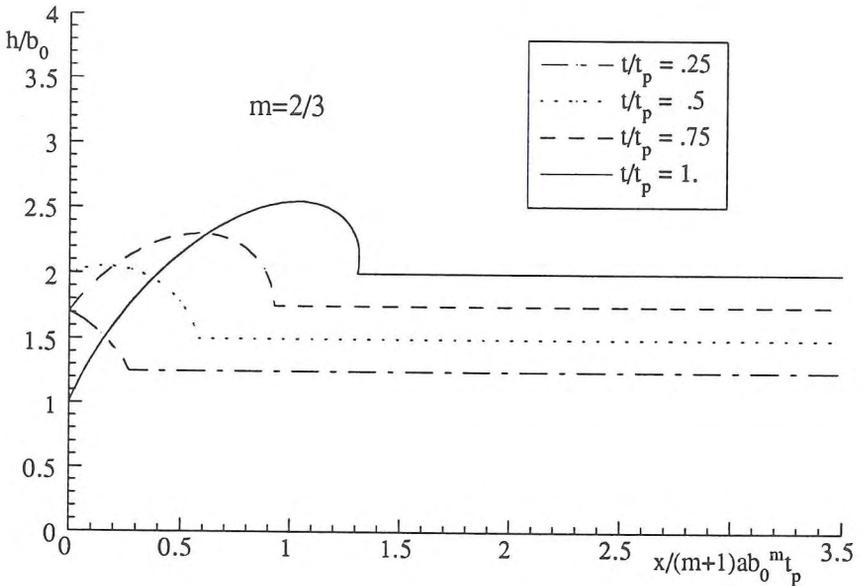


Figure V.2.
Lignes d'eau instantanées en coordonnées adimensionnelles,
solutions analytiques de l'exemple choisi en écoulement turbulent

La célérité, fonction croissante de la hauteur, permet aux grandes profondeurs de se propager plus rapidement que les hauteurs d'eau plus faibles. Elle provoque la déformation du profil initial au cours de son déplacement avec un front d'onde toujours plus accentué. Cette caractéristique essentielle de la théorie cinématique appliquée à l'hydrologie montre bien qu'un choc qui se forme impliquera inévitablement une augmentation de hauteur.

La figure V.2. suit cette propagation sous forme adimensionnelle pour $t/t_p = 0,25, 0,5, 0,75$.

L'évolution se poursuit jusqu'au moment où la pente de la surface libre devient infinie. Cet instant, qui correspond au temps d'origine de la courbe enveloppe, se situe pour notre application à

$$\frac{t}{t_p} = 0,7767 \quad (V.17)$$

A partir de là, l'onde adopte un profil déferlant très esthétique mais sans aucune correspondance physique. Pour s'en convaincre, on se souviendra que la simplification de l'équation dynamique mène à une relation univoque entre hauteur et vitesse. Une solution triple en un point pour la hauteur donnerait autant de débits correspondants !

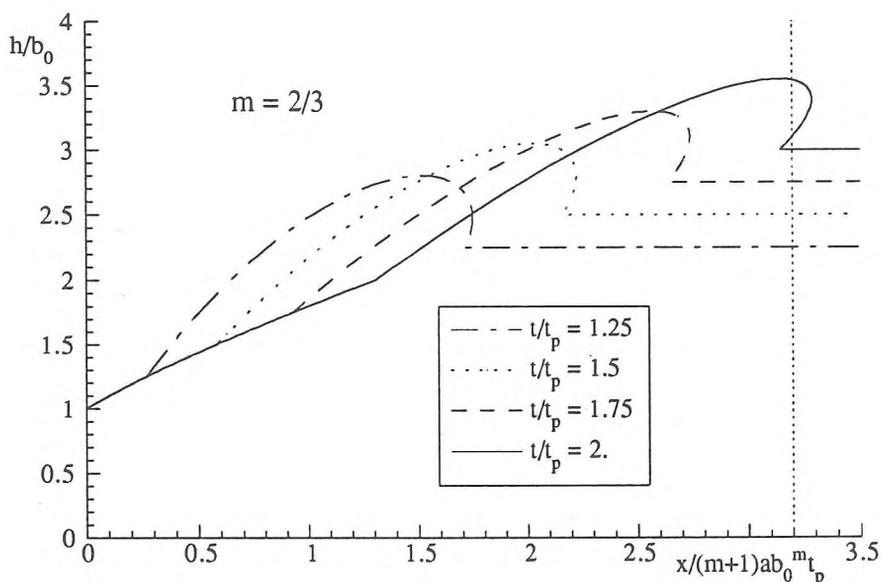


Figure V.3.
Lignes d'eau instantanées en coordonnées adimensionnelles,
solutions analytiques de l'exemple choisi en écoulement turbulent

Les figures V.2. et V.3. présentent la chronologie des lignes d'eau analytiques avec développement de solutions multiples physiquement inacceptables. Elles ne peuvent correspondre à ce stade du modèle théorique qu'à un choc qu'il conviendra de traiter de façon appropriée.

On se doute bien qu'un écoulement laminaire ne devrait pas davantage échapper à ces manifestations. La figure V.4. confirme ces craintes quand on adopte une loi de Darcy-Weisbach. Les lignes d'eau instantanées illustrent des effets plus précoces et prononcés.

Cette application fait mieux comprendre l'aspect perturbé des résultats numériques dans des applications où ces phénomènes se manifestent.

Elle inspire certaines réflexions qui conditionneront la suite de ce chapitre :

- Avant même de remettre en cause les hypothèses simplificatrices qui ont conduit au modèle mathématique, on peut s'interroger sur la nécessité d'une dérivabilité de la fonction hauteur.

Cette propriété de la solution ne doit son existence qu'à la forme différentielle de l'équation de continuité. Or le chapitre II a rappelé que cette écriture découlait d'une forme intégrale qui ne requiert pas les mêmes conditions de continuité de la solution.

Un retour à la formulation originelle s'impose pour examiner dans quelle condition elle dégénère pour une solution discontinue. Cet aspect des choses pourrait ouvrir la voie à un élargissement du champ des solutions aux discontinuités, et au remplacement des solutions multiples par une transition brusque qui préserverait la solution.

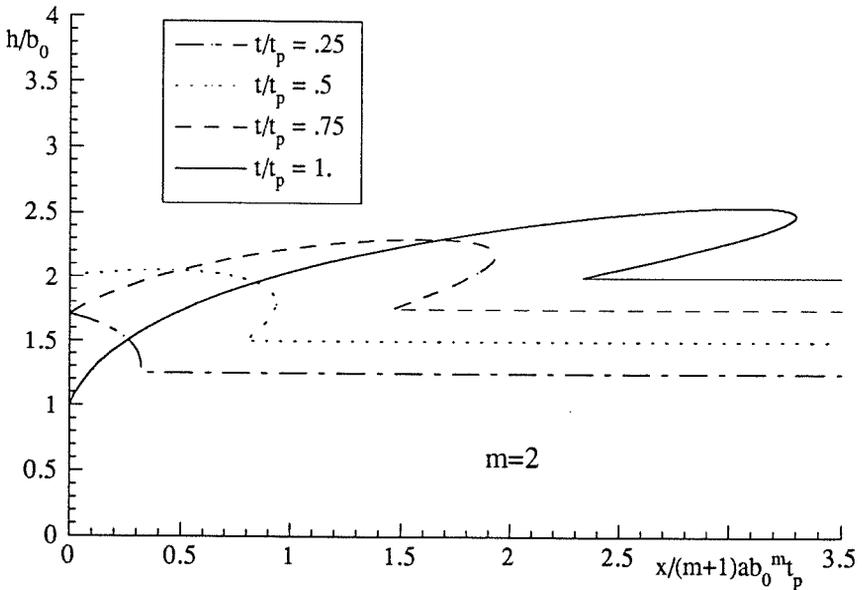


Figure V.4.
Lignes d'eau instantanées en coordonnées adimensionnelles,
solution de l'exemple choisi en écoulement laminaire

- L'hypothèse sous-jacente qui accompagne cette première réflexion est de supposer que la continuité reste valable quel que soit l'état de l'écoulement. Cette évidence nous porte, avec l'apparition de solutions multiples, à reconsidérer la seconde équation du modèle.

Certaines des hypothèses qui ont été émises lors de son élaboration sont en contradiction avec les résultats obtenus. En l'occurrence, l'apparition de pentes de surface infinies contraste, du moins localement, avec l'hypothèse d'une pente de surface assimilée à une pente de fond.

La liaison entre hauteur et vitesse cesse ponctuellement d'être une description valable du processus physique. La pente de surface, par exemple, semble créer des effets qu'il convient de considérer aux abords des déferlements analytiques.

Il faudra donc voir jusqu'à quel point ces termes supplémentaires jadis éliminés résolvent les singularités qui nous occupent.

V.3. INTRODUCTION DE DISCONTINUITES VERIFIANT L'EQUATION DE CONTINUITE

Intéressons-nous à la première remarque en revenant un instant à l'équation de continuité originelle.

L'espace concerné par le bilan volumique est limité en unidimensionnel par deux points d'abscisses respectives $x_A(t)$, $x_B(t)$. Nous supposons qu'entre ces deux points qui enserment à tout instant les mêmes particules existe une discontinuité de la surface libre, située à l'abscisse $s(t)$. La figure V.5. reprend cette disposition.

Après intégration sur la hauteur, l'expression intégrale (II.1) prend la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \int_{x_A(t)}^{s(t)} h(x, t) dx + \frac{d}{dt} \int_{s(t)}^{x_B(t)} h(x, t) dx + \int_{x_A(t)}^{s(t)} (r - i) \cos \theta dx + \int_{s(t)}^{x_B(t)} (r - i) \cos \theta dx = 0$$

(V.18)

En appliquant la formule de Leibnitz (II.45) pour entrer la dérivée sous le signe intégral, nous obtenons :

$$q_A - q_B = h(s, t) \frac{ds}{dt} - h(s^+, t) \frac{ds}{dt} + \int_{x_A}^s \frac{\partial h}{\partial t} dx + \int_s^{x_B} \frac{\partial h}{\partial t} dx + \int_{x_A}^s (r-i) \cos \theta dx + \int_s^{x_B} (r-i) \cos \theta dx$$

(V.19)

où

q désigne le débit par unité de largeur.

$h(s^-, t)$ et $h(s^+, t)$ désignent des profondeurs mesurées respectivement à gauche et à droite de la transition.

Comme le suggère cette représentation, h et q , tout comme leurs dérivées, sont des fonctions continues sur l'intervalle $[x_A, s[U]s, x_B]$. Elles sont également bornées sur l'espace fermé correspondant.

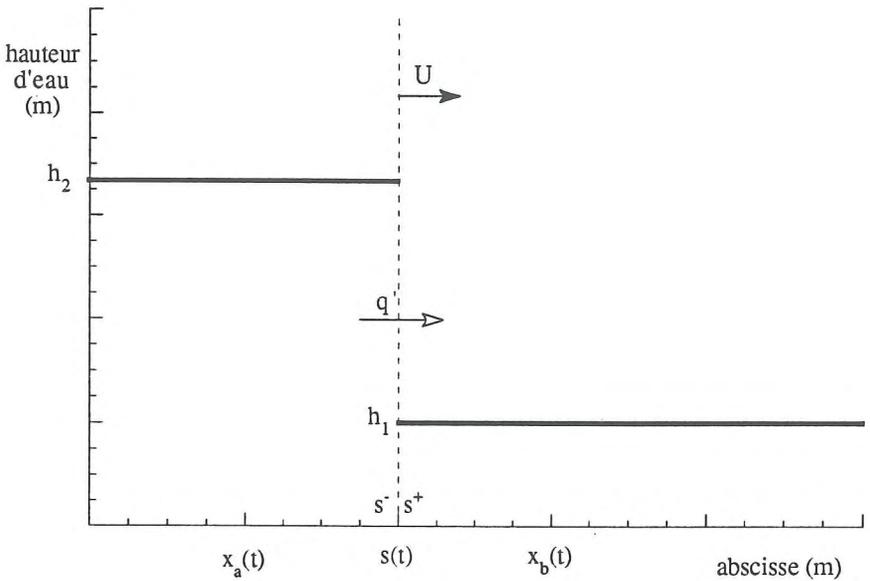


Figure V.5.
Conventions d'écriture relatives à un choc en mouvement

Pour établir la relation qui lie des variables situées de part et d'autre du saut, chaque extrémité de l'espace de contrôle doit tendre vers l'abscisse $s(t)$ en l'emprisonnant dans un espace élémentaire.

Dans ces conditions, tenant compte d'une fonction bornée pour $\partial h/\partial t$ ainsi que $(r-i) \cos \theta$, chaque intégrale de (V.15) tend vers 0 et il subsiste alors :

$$q(s^+, t) - q(s^-, t) = [h(s^+, t) - h(s^-, t)] \frac{ds}{dt} \quad (V.20)$$

Pour se référer aux notations usuelles, l'indice 1 désignera la zone en avant du choc et l'indice 2 celle derrière le choc. Représentant enfin la vitesse de déplacement du choc, $\frac{ds}{dt}$, par U , il vient :

$$q_1 - Uh_1 = q_2 - Uh_2 = q' \quad (V.21)$$

ou

$$U = \frac{q_1 - q_2}{h_1 - h_2} \quad (V.22)$$

q' représente le débit que mesure un observateur qui se déplace avec la discontinuité.

(V.22) montre que les apports et retraits extérieurs n'interviennent sur U qu'au travers d'une éventuelle instationnarité des débits et des hauteurs.

Au sens strict de la continuité, il est désormais établi qu'une discontinuité qui satisfait (V.21) fait partie intégrante des solutions acceptables et qu'elle pourrait avantageusement se substituer aux solutions triples susceptibles d'apparaître dans l'approche continue.

V.4. *PREMIERE APPROCHE DE LA TRANSITION PAR L'HYPOTHESE DE L'ONDE DIFFUSIVE*

Puisqu'il nous faut reprendre les simplifications opérées sur les équations complètes, autant examiner en premier lieu celle qui fut la dernière à être commentée : l'assimilation de la pente de surface à la pente de fond.

Dans le cadre des limitations touchant aux phénomènes reproductibles par la théorie de l'onde cinématique, les extensions que permet la prise en compte du profil réel de surface ont été déjà soulignées.

Nous nous sommes également expliqué sur la difficulté numérique de rendre ces termes significatifs par un raffinement suffisant de la discrétisation spatiale.

Examinons ce qu'apporte ce gradient de hauteur ajouté à la pente de fond lorsqu'on examine une transition. La forme dimensionnelle de (II.82) qui lie \bar{u} et h s'écrit :

$$\bar{u}^{\beta} = \frac{1}{\alpha} (\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x}) h^{\gamma} \quad (V.23)$$

Introduisons cette "meilleure expression" dans l'équation de continuité :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\gamma + \beta}{\beta} \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sin\theta - \cos\theta \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right]^{\frac{1}{\beta}} h^{\frac{\gamma}{\beta}} \frac{\partial h}{\partial x} = -h^{\frac{\gamma + \beta}{\beta}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sin\theta - \cos\theta \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right]^{\frac{1}{\beta}} + (r-i) \cos\theta \quad (\text{V.24})$$

Cette expression assez complexe laisse peu de chance à une étude générale de la solution. Ces quelques lignes n'ont d'ailleurs pas l'ambition de nous y mener. La philosophie consisterait plutôt à donner des tendances, à orienter notre recherche vers des solutions adéquates pour les singularités, quitte à entamer momentanément la généralité des applications.

D'emblée, nous procédons à l'approximation habituelle de l'expression des pentes de surface dans le seul but de ramener l'équation différentielle (V.24) à une forme plus familière :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c(h, x) \frac{\partial h}{\partial x} = \mu(h, x) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + (r - i) \cos \theta \quad (\text{V.25})$$

avec:

$$c(h, x) = \left(1 + \frac{\gamma}{\beta}\right) \left(\frac{h^\gamma}{\alpha} \sin \theta\right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (\text{V.26})$$

$$\mu(h, x) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} h^{\frac{\beta + \gamma}{\beta}} \cos \theta \sin \theta \quad (\text{V.27})$$

On retrouve une structure qui combine, à l'instar de toute équation de convection-diffusion, des tendances à raidir les profils par une convection non linéaire $c(h, x)$, avec un adoucissement de la forme du signal propre à la diffusion $\mu(h, x)$.

Reprenons l'expression générale (V.24) pour nous intéresser à l'évolution de la solution du problème décrit à la figure V.5.

Fidèle à l'état d'esprit qui prévaut dans ce paragraphe, nous supposons nulle toute contribution extérieure au système $[(r-i) = 0]$. Cette limitation ne change rien formellement à (V.22) sinon que U prend une valeur constante caractéristique de la transition considérée.

Soulignons encore qu'en accord avec les approches classiques de détermination des bassins versants, nous écartons toute possibilité de contrepenne sur la trajectoire des gouttes de pluie.

Dans le cadre de cette approche plus précise, nous cherchons l'expression de la vitesse constante U' de déplacement d'une transition qui lie deux états stationnaires situés à $\pm \infty$ (Ils sont référencés par les indices 1 et 2). Nous vérifions l'existence d'une solution dans l'hypothèse où le profil des hauteurs tend vers ces deux états avec une pente tendant vers 0.

La structure de la solution recherchée

$$h = h(x'') \quad \text{avec} \quad x'' = x - U' t \quad (\text{V.28})$$

est introduite dans l'équation (V.24) qui donne après intégration :

$$- U' h + \left[\frac{1}{\alpha} (\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x}) \right]^{\frac{1}{\beta}} h^{\frac{\beta + \gamma}{\beta}} = - e \quad (\text{V.29})$$

Pour rencontrer les conditions aux limites, la vitesse de déplacement du choc U' et la constante d'intégration e doivent satisfaire aux relations suivantes :

$$q_1 - U' h_1 + e = q_2 - U' h_2 + e = 0 \quad (\text{V.30})$$

ce qui donne en particulier :

$$U' = \frac{q_2 - q_1}{h_2 - h_1} \quad (\text{V.31})$$

Cette condition est précisément analogue à celle écrite en (V.21), ce qui nous dispense désormais de différencier U' et U .

Dans les deux dernières relations, q_1 et q_2 font bien référence à leur définition initiale, soit l'hypothèse cinématique qui lie \bar{u} et h , influence de la pente de surface non comprise.

L'expression (V.29) écrite sous la forme suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\alpha}{\cos \theta} h^{-(\beta + \gamma)} (q' + U h)^{\beta} + \text{tg} \theta \quad (\text{V.32})$$

suggère cependant un fait nouveau non négligeable : pour une topographie assez régulière, cette pente conserve généralement une valeur finie de signe constant qui permet à la solution de rallier les deux états limites par une transition continue et graduelle.

Il est plus aisé de compléter l'analyse de ce résultat en reprenant l'application avec l'équation approchée (V.25).

Par commodité, nous considérons arbitrairement μ , au terme des discussions sur l'ordre de grandeur de la contribution diffusive, comme une constante positive dont la valeur s'adapte à une hauteur caractéristique de l'écoulement et à la dimension du maillage.

Si nous reprenons un raisonnement similaire à celui mené avec l'équation complète, en restreignant l'exemple à une pente constante, nous obtenons après intégration la forme simplifiée correspondant à (V.29) qui s'écrit :

$$-U''h + \left[\frac{\sin \theta}{\alpha} \right]^{\frac{1}{\beta}} h^{\frac{\beta + \gamma}{\beta}} - \mu \frac{\partial h}{\partial x} = -e' \quad (V.33)$$

L'imposition des conditions aux limites sur les pentes de surface rend évidemment les conditions (V.30) qui donnent à U'' et e' des valeurs similaires à l'intégration précédente (U' et e). Pour procéder à une intégration simple de (V.33), nous particularisons le

coefficient de la loi hauteur-vitesse à $m = \frac{\gamma}{\beta} = 1$ pour nous intéresser à un état intermédiaire entre l'écoulement laminaire de Darcy-Weisbach et la turbulence pleinement développée de Chézy.

Nous obtenons alors pour expression du gradient de hauteur, un polygone du second degré en termes de la hauteur. Puisque les conditions aux limites lui imposent deux zéros en $h = h_1$ et $h = h_2$, l'expression (V.33) prend la forme suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \left[\left(\frac{\sin \theta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta}} h^2 - Uh + q' \right] = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\sin \theta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta}} (h - h_1)(h - h_2) \quad (V.34)$$

dont l'intégration donne :

$$x = \frac{\mu}{(h_2 - h_1)} \left(\frac{\alpha}{\sin \theta} \right)^{\frac{1}{\beta}} \ln \left(\frac{h - h_2}{h - h_1} \right) \quad (V.35)$$

Ce résultat apporte une preuve tangible de l'importance de la contribution diffusive.

Etant donné la forme de (V.34), on est assuré du signe de $\frac{\partial h}{\partial x}$ entre des racines h_1, h_2 qui

sont rejetées à $\pm \infty$. La solution monotone entre les deux états présente une transition dont la raideur dépend du coefficient μ . Pour le montrer, il nous faut définir une mesure de l'épaisseur de la transition Δx . Nous la poserons de façon abrupte comme l'espace qui assure 90 % par exemple de la transition totale $(h_2 - h_1)$.

En évaluant la distance qui sépare les abscisses correspondant respectivement à $(h_1 + 0,05(h_2 - h_1))$ et $(h_1 + 0,95(h_2 - h_1))$, on obtient finalement :

$$\Delta l = \frac{\mu}{(h_2 - h_1)} \left(\frac{\alpha}{\sin \theta} \right)^{\frac{1}{\beta}} \ln \left(\frac{0,05}{0,95} \right) \quad (\text{V.36})$$

Quel que soit le pourcentage choisi, cette mesure s'avère proportionnelle au coefficient qui précède le logarithme. Comme le montre la figure V.6., le profil se raidit lorsque μ diminue pour s'apparenter à un saut brusque lorsque μ devient très petit.

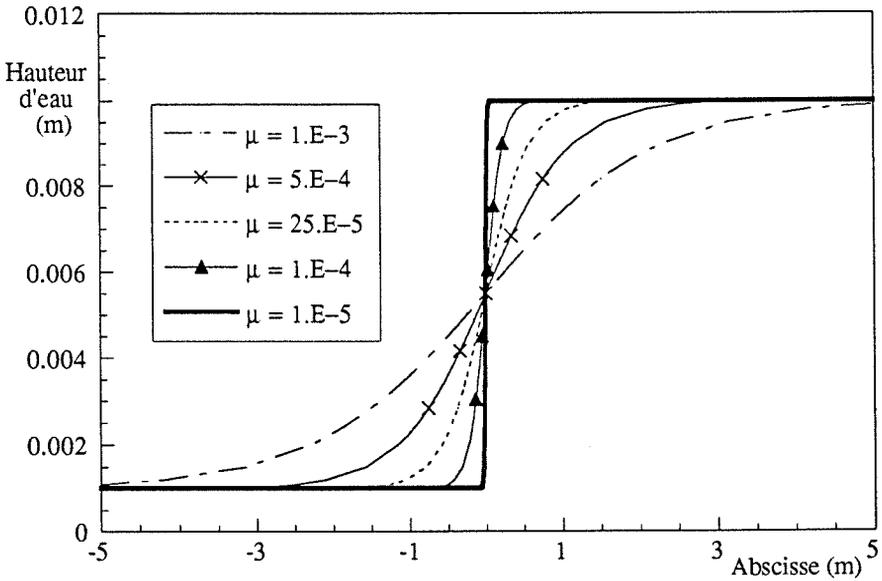


Figure V.6.
Evolution d'une transition pour différentes valeurs de μ

$$\left[h_1 = 10^{-3} \text{ m}, h_2 = 10^{-2} \text{ m}, \left(\frac{\alpha}{\sin \theta} \right)^{\beta} = 10 \right]$$

Deux tendances extrêmement importantes se dégagent des développements :

- Si petite que soit la contribution diffusive, sa seule présence assure une transition continue en lieu et place des chocs d'une théorie plus "grossière".

- Lorsque le coefficient de diffusion devient très petit, la frange des abscisses dans laquelle se produit la transition devient si étroite qu'un saut brusque constitue une approximation valable de la solution.

Il s'agit là d'une indication très encourageante pour le modèle d'écoulement très particulier que nous développons. A l'échelle spatiale des phénomènes que nous souhaitons modéliser, la théorie cinématique garderait tout son sens à condition d'introduire la possibilité de sauts dans la solution qui approximerait les profils continus d'une théorie plus précise.

A ce stade, on ne peut encore parler que d'espoir puisqu'il faut, en toute rigueur, revenir aux équations complètes d'Euler pour se forger une opinion définitive.

Cette étape paraît d'autant plus nécessaire lorsqu'on songe que des sauts font partie intégrante des solutions de la théorie classique basée sur les équations complètes. Or, notre approche consacrée de la théorie diffusive semble éliminer les discontinuités.

Voyons ce qu'il en est exactement.

V.5. *SECONDE APPROCHE DE LA TRANSITION PAR LES EQUATIONS COMPLETES D'EULER*

Dans le cadre d'une comparaison entre modèles mathématiques, nous poursuivrons tout naturellement nos recherches d'une solution liant deux états uniformes rejetés à $\pm \infty$.

Puisque nous travaillons avec des équations progressivement plus complexes, nous ne pouvons espérer sortir d'un cadre assez restrictif qu'il n'est pas inutile de rappeler pour l'exemple traité.

La transition étudiée se produit sur une topographie à pente constante, et sans apport extérieur au système. Les équations complètes utilisées sont celles du chapitre II (II.67 - II.68) qui résultent, elles aussi, de certaines simplifications.

Dans l'introduction de ce chapitre, nous avons souligné l'importance de la non-linéarité des équations qui est précisément à la base des effets étudiés dans le cas de l'onde cinématique. C'est donc sur des équations générales que nous rechercherons une solution.

Néanmoins, comme l'a souligné Wintham, une approche préliminaire des équations complètes linéarisées est en mesure d'apporter quelques éléments précieux à la discussion.

V.5.1. Linéarisation des équations complètes

Considérons un état uniforme caractérisé par les valeurs h_0 , u_0 des variables. Par définition de cet état, l'équation dynamique (II.68, 70) qui les lie prend la forme simplifiée suivante :

$$g \sin \theta = \frac{\tau_x}{h_0} = g \alpha \frac{u_0^6}{h_0^7} \quad (\text{V.37})$$

Nous linéariserons les équations en considérant de faibles perturbations autour de cet état d'équilibre. En s'en tenant au premier ordre, on obtient pour (II.67, 68)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u_0 \frac{\partial h}{\partial x} + h_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0 \quad (\text{V.38})$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} \cos \theta = T_g \quad (\text{V.39})$$

avec

$$T_g = g \left(2 \frac{h}{h_0} - \frac{\bar{u}}{u_0} \right) \sin \theta \quad (\text{V.40})$$

ou

$$T_g = g \left(\frac{h}{h_0} - 2 \frac{\bar{u}}{u_0} \right) \sin \theta \quad (\text{V.41})$$

selon que l'on considère une loi de frottement laminaire (Darcy-Weisbach) ou pleinement turbulente (Chézy).

Pour éliminer \bar{u} de (V.39), nous dérivons cette dernière selon x après multiplication par h_0 pour remplacer les dérivées de \bar{u} par des expressions tirées de (V.38) ou de ses dérivées selon x et t . Tous calculs faits, il vient :

$$k' \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) h + \left[\frac{\partial}{\partial t} + (u_0 + \sqrt{g \cos \theta h_0}) \frac{\partial}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial}{\partial t} + (u_0 - \sqrt{g \cos \theta h_0}) \frac{\partial}{\partial x} \right] h = 0 \quad (\text{V.42})$$

c_o représente, comme précédemment, la célérité non perturbée du fluide. Sa valeur, comme celle de k' , dépend de la loi adoptée avec :

$$k' = \frac{g \sin \theta}{u_o} \quad \text{et} \quad c_o = 3 u_o \quad \text{en laminaire} \quad (V.43)$$

ou

$$k' = \frac{2 g \sin \theta}{u_o} \quad \text{et} \quad c_o = \frac{3}{2} u_o \quad \text{en turbulent} \quad (V.44)$$

V.5.2. *Stabilité du système linéarisé*

Étudions d'abord les éventuels critères de stabilité de l'équation (V.42) en procédant à une décomposition de la solution en série de Fourier dont le terme générique s'écrit selon (IV.17). L'introduction de cette solution dans (V.42) va nous donner une relation qui lie k_m à l_m . L'expression générale de la solution en fonction de la seule variable l_m permet alors de dégager les conditions qui empêchent une croissance sans limite de la solution.

Le remplacement dans (V.42) de h par le terme générique de (IV.17) donne une expression du second degré en k_m qui s'écrit :

$$k_m^2 + (2u_o l_m - ik')k_m + (u_o^2 l_m^2 - ic_o k' l_m - g \cos \theta h_o l_m^2) = 0 \quad (V.45)$$

Si nous écrivons le déterminant ρ' de cette équation à coefficients complexes sous la forme:

$$\rho'^2 = (4g h_o l_m^2 \cos \theta - k'^2) - 4ik' l_m (u_o - c_o) = \rho'_r{}^2 (\cos \rho'_a + i \sin \rho'_a) \quad (V.46)$$

la solution s'écrit :

$$k_m = \frac{ik' - 2u_o l_m \pm \rho'_r \left(\cos \frac{\rho'_a}{2} + i \sin \frac{\rho'_a}{2} \right)}{2} = k_{rm} + ik_{im} \quad (V.47)$$

Replaçons cette solution dans le terme générique du développement. Il prend alors la forme finale suivante :

$$k_m e^{k_{im}t} e^{i(l_m x + k_{rm}t)} \quad (V.48)$$

On constate immédiatement que le seul moyen d'éviter une croissance exponentielle de la solution est d'imposer

$$k_{im} < 0 \quad (V.49)$$

En explicitant les $\sin(\rho'_a/2)$ et $\cos(\rho'_a/2)$ de (V.47) grâce à la relation (V.46) afin d'obtenir l'expression complète des deux valeurs possibles de k_{im} , on obtient finalement une seule condition utile pour (V.49) qui s'écrit :

$$(u_o - c_o)^2 < g h_o \cos \theta \quad (V.50)$$

ou encore :

$$u_o - \sqrt{g h_o \cos \theta} < c_o < u_o + \sqrt{g h_o \cos \theta} \quad (V.51)$$

Essayons de trouver un parallèle entre cette condition et le sens physique de l'approximation cinématique.

L'équation complète linéarisée (V.42) combine deux systèmes à comportement distinct :

- Le premier comprend tous les termes dérivées premières qui mettent en évidence une célérité c_o caractéristique de l'approche simplifiée que nous étudions.
- Le second englobe les termes de dérivées d'ordre supérieur, ceux obtenus en annulant k' et qui déterminent les équations des courbes caractéristiques du système combiné. Ces dernières résultent en effet, comme l'a montré Wintham, des termes d'ordre le plus élevé présent dans l'équation.

Leur écriture au sein de (V.42) se prête bien à la mise en évidence de deux familles caractérisées par les célérités $u_o \pm \sqrt{g h_o \cos \theta}$ qui constituent les vitesses de propagation des fronts d'onde et des premiers signaux d'une perturbation.

Adopter l'hypothèse cinématique, c'est choisir en c_o une célérité qui approxime raisonnablement la vitesse de propagation de l'essentiel d'une perturbation. Pour accorder cette seule célérité avec les célérités de la théorie complète, elle devra en quelque sorte synthétiser les influences respectives des deux familles d'ondes.

On comprendrait dès lors très difficilement que c_o puisse résoudre ces "antagonismes"

sans prendre une valeur intermédiaire entre les valeurs fixées par la théorie complète. La figure V.7. résume ce raisonnement assez imagé qui s'identifie totalement à la condition de stabilité.

A l'inverse, lorsque (V.51) n'est plus vérifié par c_0 désormais non borné par les deux valeurs caractéristiques, la naissance d'instabilités pourrait être imputée précisément à l'incapacité de c_0 dans ce cas à résumer le mélange des effets propres à chaque famille.

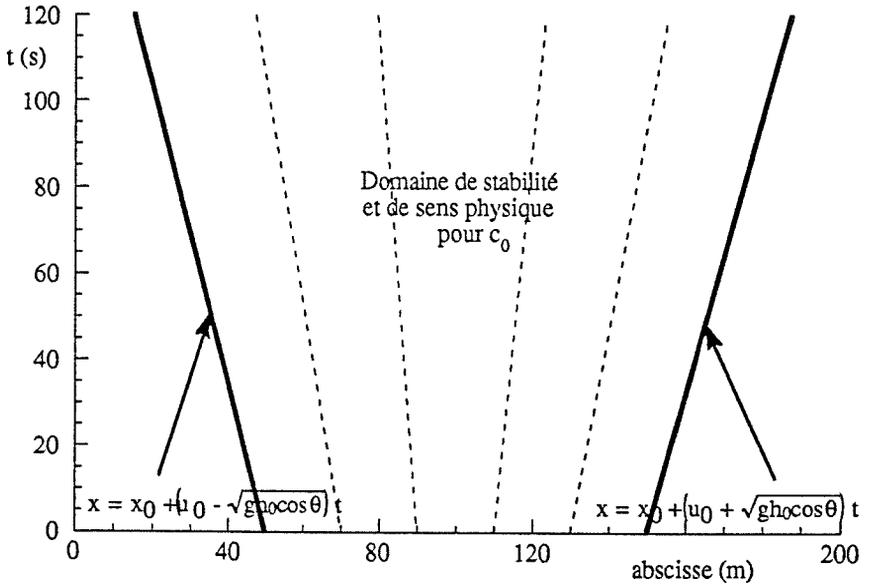


Figure V.7.a
 Choix de la célérité pour l'approche simplifiée, synthétisant la théorie complète
 à deux familles de caractéristiques de célérités $u_0 \pm \sqrt{gh_0 \cos \theta}$
 (Théorie linéarisée)

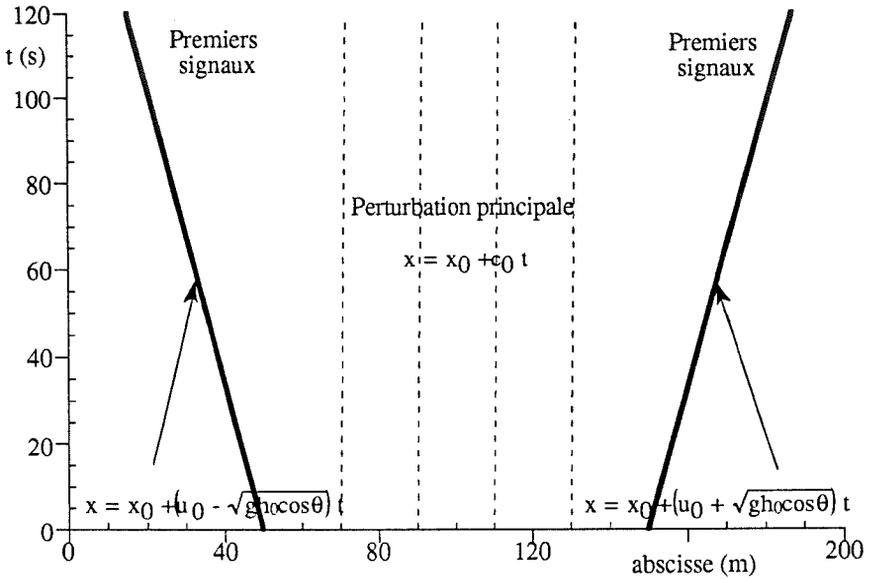


Figure V.7.b

Choix de la célérité pour l'approche simplifiée, synthétisant la théorie complète à deux familles de caractéristiques de célérités $u_0 \pm \sqrt{gh_0 \cos \theta}$ (Théorie linéarisée)

V.5.3. Structure d'une transition par la théorie générale non-linéaire

Venons-en à l'application proprement dite, rappelée en début de paragraphe, et précisons d'abord la structure de la solution à introduire dans les équations complètes (II.67, 68) définies au chapitre II.

Parallèlement aux développements antérieurs, elle prendra la forme suivante :

$$\bar{u} = \bar{u}(x'') \quad h = h(x'') \quad \text{avec} \quad x'' = x - U' t \tag{V.52}$$

Dans ces conditions, le système complet s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x''} [(\bar{u} - U') h] = 0 \tag{V.53}$$

et

$$(u - U') \frac{\partial \bar{u}}{\partial x''} + g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x''} = g \sin \theta - g \alpha \frac{\bar{u}^\beta}{h^\gamma} \quad (V.54)$$

L'intégration de l'équation de continuité est immédiate et permet d'exprimer l'équation dynamique en fonction de la seule hauteur :

$$\bar{u} = U' - \frac{e}{h} \quad (V.55)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x''} = - \frac{g \left(\alpha \frac{\left(U' - \frac{e}{h} \right)^\beta}{h^\gamma} - \sin \theta \right) h^3}{g h^3 \cos \theta - e^2} \quad (V.56)$$

e étant une constante d'intégration.

L'imposition des conditions aux limites permet de déterminer les paramètres inconnus e et U' :

$$e = h_1 h_2 \left(\frac{\bar{u}_2 - \bar{u}_1}{h_2 - h_1} \right) = \left(\frac{\sin \theta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta}} h_1 h_2 \left(\frac{h_2^{\frac{\gamma}{\beta}} - h_1^{\frac{\gamma}{\beta}}}{h_2 - h_1} \right) \quad (V.57)$$

$$U' = \left(\frac{\bar{u}_2 h_2 - \bar{u}_1 h_1}{h_2 - h_1} \right) = \left(\frac{\sin \theta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\frac{h_2^{\frac{\beta+\gamma}{\beta}} - h_1^{\frac{\beta+\gamma}{\beta}}}{h_2 - h_1} \right) \quad (V.58)$$

L'expression de U' est à nouveau analogue à la condition à vérifier pour une discontinuité (V.22). Néanmoins, comme pour l'onde de diffusion, certaines caractéristiques sur le profil qui lie les deux états à $\pm \infty$ peuvent être dégagées du système complet.

Le signe du gradient de hauteur donné en (V.56), ainsi que ses possibles évolutions en fonction de x'' , déterminent drastiquement la structure de la transition. Pour assurer une transition monotone et continue, $\frac{\partial h}{\partial x''}$ doit conserver une valeur négative puisque, comme nous l'avons vu dans la naissance de solutions multiples, la tendance aux chocs s'accompagne d'une augmentation de hauteur lorsque la célérité est une fonction croissante de la hauteur.

La figure V.8. illustre cet aspect fondamental, avec un profil discontinu consécutif à un changement de signe du gradient de hauteur.

Examinons d'abord le numérateur (NUM) de l'expression (V.56). Nous allons vérifier qu'il conserve un signe positif constant entre les états uniformes pour quelques couples remarquables de valeurs (β, γ) .

Remarquons dès à présent que l'imposition comme conditions limites de gradients nuls à $\pm \infty$ assure à h_1 et h_2 d'être racines de ce polynôme.

- hypothèse laminaire $(\beta, \gamma) = (1, 2)$

$$\text{NUM} = g(\alpha(U' h - e) - h^3 \sin \theta) = g (h_2 - h) (h - h_1) (h - h_3) \sin \theta \quad (\text{V.59})$$

La troisième racine, h_3 , s'obtient en identifiant les termes indépendants de chaque membre ce qui donne :

$$h_3 = - \frac{\alpha e}{h_1 h_2 \sin \theta} \quad (\text{V.60})$$

Cette valeur négative pour h_3 est nécessairement hors du domaine $[h_1, h_2]$. Elle ne fera jamais partie des solutions à considérer dans cet exemple.

Dans ces conditions, il est évident que NUM reste positif pour le profil recherché.

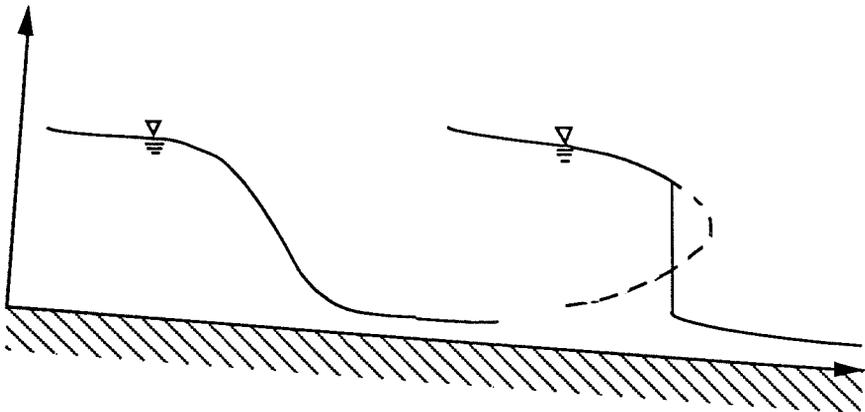


Figure V.8.
Structure d'une transition sans ou avec discontinuité

- hypothèse turbulente de Chézy $(\beta, \gamma) = (2, 1)$

$$\text{NUM} = g(\alpha(U'h - e)^2 - h^3 \sin \theta) = g (h_2 - h) (h - h_1) (h - h_3) \sin \theta \quad (\text{V.61})$$

Par un raisonnement analogue à celui qui précède, on obtient l'expression de la troisième racine h_3 :

$$h_3 = \frac{\alpha e^2}{h_1 h_2 \sin \theta} = \frac{h_1 h_2}{(h_1^{1/2} + h_2^{1/2})^2} \quad (\text{V.62})$$

A nouveau, cette racine, inférieure à h_1 et h_2 , ne fera jamais partie des solutions possibles pour notre application. Les conclusions précédentes restent d'actualité.

- hypothèse intermédiaire pour l'onde diffusive $(\beta, \gamma) = (1, 1)$

$$\text{NUM} = h(g\alpha(U'h - e) - h^2 \sin \theta) = h (h_2 - h) (h - h_1) \quad (\text{V.63})$$

Les conclusions sont naturellement reconduites sans autre commentaire.

Il ressort de ces quelques lois que le seul signe du dénominateur (DEN) de (V.56) sera déterminant dans la discussion :

$$\text{DEN} = g h^3 \cos \theta - e^2 = h^2 (g h \cos \theta - (U' - \bar{u})^2) \quad (\text{V.64})$$

Pour assurer la continuité de la solution en maintenant le dénominateur positif, il faudrait :

$$\bar{u} - \sqrt{g h \cos \theta} < U' < \bar{u} + \sqrt{g h \cos \theta} \quad (\text{V.65})$$

La première condition est toujours remplie puisque (V.55) assure à U' d'être toujours supérieur à \bar{u} avec e positif comme le montre (V.57).

Voyons comment évolue la seconde condition lorsqu'on progresse de deux états très voisins vers des transitions de plus en plus importantes.

Lorsque h_2 est dans le voisinage, de h_1 , on obtient U' par (V.58) en remplaçant h_2 par $h_1(1 + \epsilon)$ avec $\epsilon \ll \ll$:

$$U' = \left(\frac{\sin \theta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\frac{\beta + \gamma}{\beta} \right) h_1^{\frac{\gamma}{\beta}} = \left(1 + \frac{\gamma}{\beta} \right) \bar{u}_1 \quad (\text{V.66})$$

On retrouve par conséquent pour vitesse de propagation d'une faible transition la célérité de la théorie approchée cinématique. Puisque nous nous plaçons naturellement dans l'hypothèse où les conditions de stabilité sont vérifiées, (V.51) assure dans ce cas une solution continue :

$$U' = \left(1 + \frac{\gamma}{\beta} \right) \bar{u}_1 = c_1 < \bar{u}_1 + \sqrt{gh_1 \cos \theta} \quad (\text{V.67})$$

Lorsque l'onde gagne en amplitude, U' grandit et n'assure un profil continu qu'aussi longtemps que :

$$c_1 < U' < \bar{u}_1 + \sqrt{gh_1 \cos \theta} \quad (\text{V.68})$$

Au delà, c'est-à-dire quand U' prend ses valeurs dans le domaine] $\bar{u}_1 + \sqrt{gh_1 \cos \theta}$,

$\bar{u}_2 + \sqrt{gh_2 \cos \theta}$ [, il existe nécessairement un changement de signe du dénominateur qui provoque un profil discontinu similaire à celui de la figure V.8.

Dans ce cas, il faut repartir, comme nous l'avons déjà fait pour la continuité seule, des équations complètes sous leur forme intégrale pour dégager les conditions complètes qui président à un choc. Cette approche s'identifie alors à la théorie classique bien connue des hydrauliciens : celle du ressaut.

Revenons un instant sur la condition fondamentale de ce paragraphe, l'équation (V.68), pour l'interpréter physiquement :

Pour se résoudre en une transition continue, le choc peut progresser plus rapidement que les ondes issues des dérivées d'ordre inférieurs. Il ne peut cependant se mouvoir plus rapidement que celles générées par les dérivées d'ordre supérieur directement à son aval.

En termes de hauteur, elle peut encore s'écrire :

$$\left(\frac{\sin \theta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta}} \frac{h_2}{\sqrt{gh_1 \cos \theta}} \frac{h_2^{\frac{\gamma}{\beta}} - h_1^{\frac{\gamma}{\beta}}}{h_2 - h_1} < 1 \quad (\text{V.70})$$

En guise de synthèse, nous retiendrons de la théorie complète qu'elle produit une solution continue tant que l'amplitude du choc se maintient dans les intervalles qui permettent à (V.68) d'être vérifiés.

Au delà, il subsiste une discontinuité dans la solution qui requiert un retour aux formulations intégrales originelles. Nous y reviendrons au chapitre XI.

V.6. CONCLUSION

Les soucis nés des premières applications trouvent leur origine dans l'apparition inéluctable de chocs dans l'écoulement pour des topographies ou dans des conditions moins triviales.

L'étude de ces singularités ainsi que leur progressive résolution au travers des théories diversement simplifiées, inspirent deux remarques essentielles sur la théorie cinématique :

- L'utilisation d'une relation vitesse - hauteur analogue à celle du mouvement uniforme, crée inéluctablement un appauvrissement, tant dans la gamme des phénomènes aptes à être reproduits que dans la description même qu'elle donne de ces phénomènes.

Dans ce contexte, le choc apparaît comme un signal, une incitation à reconsidérer les hypothèses qui ont présidé à l'élaboration de la théorie. Il fixe également une limite qui ne peut être surmontée qu'avec un nouvel examen simultané de la théorie et de la physique du problème.

- Face à un premier constat qui semble assez pessimiste, on se réjouira assez paradoxalement de difficultés qui naissent précisément de la richesse de représentation que conserve la théorie cinématique appliquée à l'hydrologie.

Car l'examen de cette formulation dépouillée confirme qu'elle conserve la richesse caractéristique des modèles non-linéaires. Elle propage et déforme les signaux de manière complexe pour aboutir, en certaines circonstances, à des chocs que ne résolvent pas systématiquement des théories plus affûtées.

Puisque la théorie cinématique se base sur l'équation de continuité, propriété intrinsèque et donc incontournable d'un système hydrologique, il est naturel de la reconsidérer à la lumière des singularités rencontrées.

Cette analyse révèle que, théoriquement parlant, la formulation différentielle élimine un type potentiel de solutions qui peuvent satisfaire l'expression originelle : des solutions discontinues.

L'extension du champ des solutions ne signifie pas pour autant que la discontinuité est une approximation licite face aux difficultés rencontrées : seule une investigation théorique et physique peut nous éclairer à ce sujet.

L'examen successif des approximations opérées dans la théorie est assez rassurant, considéré à nouveau dans le contexte d'un modèle global à grande échelle. Certes, la théorie diffusive résout les chocs en une transition continue - la théorie complète mitigera cette conclusion - mais elle assurerait cette transition sur un espace si réduit qu'une discontinuité brusque constitue une approximation très raisonnable.

La théorie complète tempère également cette apparition impromptue de chocs pour l'hypothèse cinématique puisqu'elle parvient, dans certaines limites, à maintenir la solution continue. Mais en dehors de ces cas où nous parlerons de chocs prématurés dus aux simplifications, certaines discontinuités subsistent, qui font partie intégrale du "paysage classique" de l'hydraulique de surface.

Soulignons par ailleurs que la modélisation elle-même du ressaut, perdu dans l'écoulement au sein du bassin, importe intrinsèquement moins que le rôle que sa mauvaise résolution serait susceptible de jouer en faussant la solution à l'exutoire (Schmid).

Au terme de ces discussions, l'approche cinématique émerge renforcée. Elle s'affirme comme une alternative crédible pour un modèle hydrologique à grande échelle, à condition toutefois d'intégrer les discontinuités au champ des solutions.

Cette extension qui préserve la solution et surmonte le problème des singularités s'intègre dans la définition d'un autre concept mathématique. Il compose, avec la recherche d'un traitement numérique approprié, la matière du chapitre VI.

Chapitre VI

Intégration des chocs dans la solution

SOMMAIRE

- VI.1. *Introduction*
- VI.2. *Solution généralisée de la théorie cinématique appliquée à l'hydrologie*
- VI.3. *Méthode numérique unidimensionnelle : approche finale*
- VI.4. *Conclusion*

VI.1. INTRODUCTION

Les conclusions issues des analyses du chapitre précédent ont motivé notre décision de persévérer dans l'application de la théorie cinématique en topographie quelconque.

Elle nous confronte donc à l'intégration de discontinuités dans un écoulement par ailleurs continu.

Le contexte simplifié de l'approche cinématique n'empêche pas de situer cette difficulté au même rang qu'un ensemble d'autres discontinuités particulièrement importantes en hydraulique comme le ressaut ou la propagation de fronts raides en écoulements quasi-horizontaux.

L'analyse des difficultés essentiellement numériques qui en découlent unit, en ce travail, des phénomènes aux échelles très variées.

D'un point de vue mathématique, la solution composite qui vérifie l'équation différentielle dans ses intervalles continus et satisfait aux conditions appropriées de "saut" aux discontinuités, se définit par la notion de solution faible ou généralisée. Les considérations du chapitre IV aideront à en préciser l'expression.

Quant aux préoccupations numériques, elles sont à présent mieux circonscrites : la méthode initiale procure une précision suffisante dans la modélisation d'écoulements continus. Les instabilités ne surgissent qu'à cause des ondes parasites générées par la présence de chocs dans la solution. La méthode numérique actuelle n'est pas habilitée à les résoudre.

Ces réalités, tirées a posteriori des exemples du chapitre IV, présagent plus d'une évolution de l'approche numérique initiale que d'un bouleversement complet puisqu'il "suffit" de traiter les singularités de façon adéquate. Deux philosophies sont envisageables:

- La première consiste à localiser et à suivre les chocs grâce à des relations du type de celles qui ont été élaborées au chapitre précédent. Elles permettent également de relier les variables des zones de solution continue qui s'étalent de part et d'autre des fronts.

Cette voie suppose une évolution fondamentale de la méthode et la courte description qui vient d'en être faite annonce surtout une extension peu commode en quasi-tridimensionnel.

- La seconde, qui procède par capture numérique du choc est davantage explorée dans la littérature. Les chocs ne sont plus localisés ni pris en compte de façon spécifique, ils se trouvent adéquatement "traités" par le schéma spatial et temporel très particulier de la discrétisation utilisée.

Nous investiguerons plutôt la seconde voie, pour la généralisation plus aisée qu'elle suppose.

Le travail "automatique et aveugle" qu'elle opère sur la solution, par un étouffement dosé d'ondes parasites est particulièrement délicat puisqu'il ne peut coïncider avec un lissage exagéré de la solution. Ainsi s'expliquent la variété et l'actualité des solutions que propose la littérature en d'autres domaines.

Ce chapitre envisagera quelques approches par éléments finis et tentera d'en synthétiser les caractères communs.

Notre méthode, choisie dans la perspective d'une extension la plus aisée possible aux autres dimensions, prouvera son efficacité sur les exemples précédemment traités sans succès.

VI.2. SOLUTION GENERALISEE DE LA THEORIE CINEMATIQUE APPLIQUEE A L'HYDROLOGIE

Associons au problème la forme intégrale suivante :

$$\iint_S \left(h \frac{\partial b(x,t)}{\partial t} + q(h) \frac{\partial b(x,t)}{\partial x} + b(x,t)(r-i)\cos\theta \right) dxdt - \int_{\partial S} b(x,t) [hdx - q(h)dt] = 0 \quad (VI.1)$$

$b(x, t)$ est une fonction test différentiable et arbitraire

S est une région arbitraire du plan (x, t) , de contour ∂S .

Nous allons montrer que la solution de cette expression réunit effectivement les solutions continues et discontinues du problème initial (Smolderen).

Une inspection préalable de (VI.1) montre immédiatement qu'elle donne de plus larges possibilités pour la fonction h en n'impliquant plus dans son expression de dérivées de cette inconnue.

- Pour un domaine S où la solution est différentiable, une intégration par parties de (VI.1) par le théorème de Green-Rieman rend immédiatement :

$$\iint_S b \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q(h)}{\partial x} - (r-i)\cos\theta \right) dS = 0 \quad (VI.2)$$

Compte tenu du caractère arbitraire de b , toute solution de (VI.1) est bien solution de l'équation différentielle originelle (IV.7).

- Evoquons à présent l'extension de solution dans le cas où la solution est différentiable sur deux domaines S_1, S_2 , séparés par une discontinuité le long d'une courbe C . L'inconnue h est bornée de part et d'autre de C .

Le domaine S sera choisi comme une fine bande, d'épaisseur ϵ , qui enserre un arc de la courbe de discontinuité C .

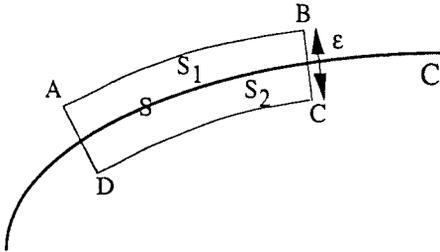


Figure VI.1.
Disposition du domaine S dans le plan (x, t)
pour une discontinuité de la solution le long de la courbe C

La contribution de l'intégrale sur S se partage en deux intégrales sur S_1 et S_2 qui sont bornées puisque h et les dérivées de la fonction test possèdent cette propriété.

Elles sont de l'ordre de grandeur de ϵ et tendent vers 0 avec celui-ci, tout comme la contribution des apports extérieurs au système.

Un raisonnement similaire conduit aux mêmes conclusions pour les intégrales curvilignes le long de BC et DA .

Désignons par h_1 et h_2 les valeurs respectives de h en des points voisins de AB et CD . Tenant compte des propriétés de $b(x, t)$, (VI.1) se réduit à :

$$\int_S b(x, t) [(h_2 - h_1)dx - (q_2 - q_1)dt] = 0(\epsilon) \quad (VI.3)$$

Pour vérifier l'équation pour tout b et pour un ε évanescant, il faut vérifier sur la courbe C :

$$U = \frac{dx}{dt} = \frac{q_2 - q_1}{h_2 - h_1} \quad (VI.4)$$

qui s'identifie bien à la condition de choc requise au chapitre V.

Les solutions qui satisfont (VI.1) portent le nom de solutions faibles ou généralisées.

Nous avons mentionné lors du chapitre V la nécessité d'une réflexion parallèle sur les équations et la physique du problème.

Nous n'en voulons pour preuve que l'ambiguïté qui subsiste dans la multiplicité des solutions généralisées possibles.

Si nous considérons par exemple l'équation

$$q \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} - (r - i) \cos \theta \right) = 0 \quad (VI.5)$$

en lieu et place de l'équation différentielle (IV.7), nous ne modifions rien aux solutions différentiables du problème. Il n'en va pas de même de la forme intégrée, élaborée sur base de l'équation conservative (VI.5)

$$\iint_S \left(\frac{qh}{(m+2)} \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial b}{\partial x} + qb(r - i) \cos \theta \right) dS - \int_{\partial S} b \left(\frac{qh}{m+2} dx - \frac{q^2}{2} dt \right) = 0 \quad (VI.6)$$

qui rend une condition aux discontinuités totalement différente de (VI.4) :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{m+2}{2} \cdot \frac{q_2^2 - q_1^2}{q_2 h_2 - q_1 h_1} \quad (VI.7)$$

On en conclut que seules les analyses du chapitre V pouvaient nous révéler que la seule forme acceptable est celle exprimée en (VI.1) (Abbott, Lee et al).

VI.3. METHODE NUMERIQUE UNIDIMENSIONNELLE : APPROCHE FINALE

Le problème numérique semble d'autant moins solutionné que notre formulation initiale

par éléments finis se présente comme une solution faible de l'équation différentielle initiale.

A l'image des tentatives fructueuses en différences finies, il "reste" à introduire dans le schéma proposé des mécanismes de "dissipation numérique" appropriés, de façon à assurer aux chocs qui se présentent spontanément dans l'écoulement une transition suffisamment graduelle sans autre perturbation.

La recherche d'une méthode apte à capturer les chocs se mêle étroitement à une réflexion très actuelle sur les éléments finis et plus précisément sur la formulation initiale de Galerkin réputée très peu dissipative.

En effet, les bons résultats obtenus par les éléments finis dans les domaines les plus divers ne peuvent cacher que leur champ d'application fut longtemps restreint en matière de modélisation de phénomènes relatifs à la convection et à la diffusion. Les résultats médiocres obtenus par l'approche classique manifestent d'inacceptables oscillations dès l'instant où ces processus deviennent prépondérants.

Même si, dans certains circonstances, l'apparition d'instabilités peut être retardée par un choix approprié de conditions aux limites (Ben-Saba et al), il est apparu que les problèmes se posent pour des systèmes non self-adjoints (Kikuchi), avec des matrices discrétisées non-symétriques pour la convection et la diffusion et surtout pour les schémas de différences finies centrées spatialement que reproduit l'approche originelle (voir la structure de IV. 21, 22 à ce sujet).

Si ces schémas sont synonymes de précision dans les cas usuels (Gupta et al), des recherches en différences finies ont établi qu'il faut leur substituer en pareille circonstance des schémas décentrés lorsque la convection devient significative.

La recherche d'une formulation idéale par cette technique reste d'actualité, comme le prouvent des publications récentes sur le sujet (Botev, Vitchnevetsky, Günther).

A l'instar de ces méthodes, diverses tentatives sont menées en éléments finis pour obtenir les mêmes effets :

- La plus générale englobe tous les procédés qui font choix de fonctions de pondération extraites d'une gamme beaucoup plus large que les classiques fonctions symétriques d'interpolation d'où le nom général de méthode de Pétrov-Galerkin. Le décentrement recherché provient de la dissymétrie des fonctions test.
- D'autres pistes sont suivies, comme celle qui consiste à évaluer la matrice convective en un seul point judicieusement choisi en lui attribuant le "volume de l'élément" (Hughes) ou à déplacer tous les points d'intégration de la contribution convective le long des lignes de courant (Peyre et al).
- En interprétant l'utilisation de fonctions dissymétriques comme l'addition d'une dissipation par dérivée spatiale du second degré, Kelly et al cherchent la valeur adéquate du coefficient diffusif à introduire et surtout l'expression générale qui l'oriente correctement vis-à-vis de l'écoulement.

Le sujet est si vaste à explorer qu'il nous faut ici nous contenter de ne particulariser à nos équations que quelques méthodes dont les résultats publiés sont prometteurs.

Dans la recherche très actuelle de la formulation la plus adaptée, le choix des fonctions ou des termes additionnels est primordial pour générer un schéma adéquatement décentré et orienté spatialement, introduisant des effets d'ordres plus élevés qui assurent une solution exempte d'effet parasite, sans étouffement excessif. Nous expliquerons ces idées dans les quelques développements qui suivent.

VI.3.1. Méthode N+1

Nous choisissons de débiter par cette méthode car elle correspond à l'idée la plus répandue pour introduire un décentrement spatial en éléments finis.

L'idée générale, qui explique cette dénomination "N+1", consiste, pour élaborer les fonctions test, à superposer aux classiques fonctions d'interpolation des fonctions d'un degré supérieur qui s'annulent à chaque noeud. Les degrés de liberté qui subsistent constituent autant de paramètres à déterminer pour optimiser l'effet escompté (Christie et al).

La figure VI.2. visualise cette idée pour des éléments linéaires unidimensionnels.

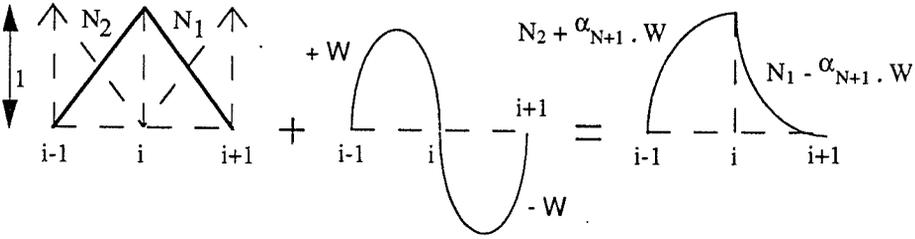


Figure VI.2.
Construction de fonctions de pondération dissymétriques pour des éléments linéaires unidimensionnels

Reprenons l'équation (IV.16) discrétisée pour le noeud i en recourant à des fonctions P_i qui s'écrivent pour chaque noeud de l'élément linéaire :

$$W_1 = \frac{3}{(\Delta x)^2} x(\Delta x - x) \tag{VI.8}$$

$$P_1(x) = N_1(x) - \alpha_{N+1} W_1(x) \tag{VI.9}$$

$$P_2(x) = N_2(x) + \alpha_{N+1} W_1(x) \tag{VI.10}$$

α_{N+1} étant un coefficient de décentrement.

Pour ne pas alourdir l'écriture, nous ne développerons pas la discrétisation temporelle pour obtenir finalement :

$$\frac{1}{6} \left[\left(1 + \frac{3}{2} \alpha_{N+1} \right) \frac{\partial H_{i-1}}{\partial t} + 4 \frac{\partial H_i}{\partial t} + \left(1 - \frac{3}{2} \alpha_{N+1} \right) \frac{\partial H_{i+1}}{\partial t} \right] + \frac{c_0}{2\Delta x} [(1 - \alpha_{N+1})H_{i+1} + 2\alpha_{N+1}H_i - (1 + \alpha_{N+1})H_{i-1}] = 2(\theta_1 r^{t+\Delta t} + (1 - \theta_1)r^t) \tag{VI.11}$$

On constate immédiatement le décentrement spatial provoqué, sans intervention toutefois sur le terme d'apport.

Le principe de la méthode autorise un développement aisé pour des éléments d'ordres plus élevés (Heinrich), ainsi qu'une extension aux autres dimensions (Heinrich et al).

L'introduction de paramètres à fixer inspire des réactions diverses dans la littérature. Certains y voient le développement de méthodes bien plus générales que leur correspondant différences finies (Heinrich et al), avec une adaptation du décentrement dans chaque élément pour s'ajuster aux conditions éventuellement variables de l'écoulement. Nous verrons par la suite comment fixer la valeur optimale de α_{N+1} .

D'autres, par contre, regrettent le manque d'automatisme de ces procédures dont les résultats peuvent manifester des imprécisions inhérentes à des valeurs mal fixées de paramètres. Ils prônent davantage des méthodes du type des deux suivantes qui ne laissent aucun choix sur d'éventuels coefficients.

Couramment utilisé pour des équations de convection-diffusion stationnaires, le type de méthode décrit présente pour principal inconvénient de réclamer un surcroît de calcul pour intégrer des fonctions d'ordres plus élevés. Cette remarque est d'autant plus vraie dans l'évolution actuelle vers des techniques N+1, N+2 proposées initialement par Dick pour remédier aux difficultés additionnelles des systèmes instationnaires.

De plus, les effets bénéfiques qu'elles offrent en symétrisant les matrices (Westerink et al) et en minimisant les erreurs de phase (étude du facteur d'amplification numérique défini au chapitre IV) sont difficilement généralisables aux autres dimensions (Cantekin et al) car l'obtention de fonctions bibimensionnelles par simple produit de fonctions unidimensionnelles doit être évitée pour les effets indésirables que provoquent certains termes croisés (Miller et al, Ortiz).

VI.3.2. Méthode de Taylor-Galerkin

Cette démarche procède d'un constat tout à fait différent. L'examen de quelques publications qui travaillent à l'établissement de fonctions de pondération particulières, (celles de Barnett et al par exemple), révèle un lien entre l'effet optimal à introduire et la discrétisation temporelle choisie.

L'amélioration de cette dernière ne peut donc que faire progresser les caractéristiques de stabilité et de précision. Elle consiste à conserver, dans les équations, quelques termes d'ordres plus élevés des développements en séries temporelles de l'inconnue, puis de résoudre le système par la méthode classique de Galerkin.

Il existe ici une certaine analogie de raisonnement avec certains schémas de différences finies (Lax-Wendroff, par exemple), dont les capacités à "capturer les chocs" par une diffusion intrinsèque sélective sont largement reconnues. Ces particularités rendent l'approche d'autant plus attractive.

Travaillons à partir du schéma explicite d'Euler ($\theta_t = 0$) dont l'étude de stabilité du schéma numérique initial (IV.2) a démontré l'instabilité caractéristique (IV.30).

Il faut en rechercher les causes dans la "différence avant" adoptée pour discrétiser temporellement la dérivée temporelle, qui se trouve ainsi décentrée par rapport à la contribution convective, évaluée au temps t .

Pour y remédier, il suffit d'exprimer la dérivée temporelle au même temps t en extrayant son expression d'un développement en séries de Taylor de $h^{t+\Delta t}$ au voisinage de t , soit :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^t = \frac{h^{t+\Delta t} - h^t}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}\right)^t - \frac{(\Delta t)^2}{6} \left(\frac{\partial^3 h}{\partial t^3}\right)^t + O(\Delta t^3) \quad (VI.12)$$

On recourt à l'équation différentielle initiale pour exprimer les dérivées temporelles en fonction des dérivées spatiales, en se limitant toutefois à celle du second ordre.

En procédant à l'approximation suivante de la dérivée troisième selon t :

$$\left(\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}\right)^t = c_0^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)^t, \quad \left(\frac{\partial^3 h}{\partial t^3}\right)^t = c_0^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)\right)^t \cong c_0^2 \frac{\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)^{t+\Delta t} - \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)^t}{\Delta t} \quad (VI.13)$$

(IV.16) s'écrit :

$$\frac{h^{t+\Delta t} - h^t}{\Delta t} + c_0 \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^t - r' = \frac{c_0^2 \Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 h^t}{\partial x^2} + \frac{c_0^2 \Delta t}{6} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{h^{t+\Delta t} - h^t}{\Delta t}\right) \quad (VI.14)$$

L'interprétation de la méthode tient à la signification donnée à chaque contribution :

- Si le membre gauche s'analyse comme une approximation de la forme différentielle originale, les contributions du membre de droite s'identifient respectivement à une dissipation et à un effet d'ordre encore plus élevé.
- Tamadori-Jahromi et al, par exemple, réfutent toute idée de diffusion numérique, pour n'y reconnaître qu'une simple discrétisation temporelle.

La méthode classique de Galerkin donne alors la forme discrétisée suivante pour le noeud i , en respectant les conventions fixées en (IV.23, 24, 25) :

$$\left[1 + \frac{1}{6} (1 - n_c^2) \delta^2 \right] (H_i^{t+\Delta t} - H_i^t) + n_c \Delta_0 H_i^t = 2 r^t + \frac{1}{2} n_c^2 \delta^2 H_i^t \quad (\text{VI.15})$$

L'étude de stabilité qu'a mené Donéa révèle que le nombre de courant ne peut excéder l'unité. Il montre également que d'autres expressions efficaces peuvent être déduites par le même procédé de schémas connus comme ceux de Leapfrog ou Crank-Nicolson.

Rappelons encore que l'expression des "termes additionnels" ne souffre d'aucun paramètre adaptatif et que l'extension de la méthode aux systèmes non-linéaires ne doit pas poser de problème particulier (Becker et al).

VI.3.3. Méthode des moindres carrés

La méthode continue des moindres carrés se présente comme une alternative à la méthode des résidus pondérés. Elle rejoint l'approche, commune en éléments finis, qui consiste à minimiser une fonctionnelle.

Dès lors que celle-ci est positive, les matrices de l'équation discrétisées par les fonctions classiques sont symétriques, définies positives et bien conditionnées, même pour un problème non self-adjoint. (Zienkiewicz et al, Idelsohn).

La fonctionnelle, dans sa formulation continue, s'exprime comme l'intégrale, sur le domaine d'intérêt, du carré du résidu de l'équation.

Reprenant la définition donnée en (IV.3), elle s'écrit par conséquent :

$$\int_S \hat{R}^2(h) \, dS \quad (\text{VI.16})$$

Nous allons développer cette fonctionnelle pour la discrétisation temporelle initialement choisie (IV.2) couplée à une classique discrétisation spatiale par éléments finis (IV.5).

Cherchons les valeurs nodales $H_i^{t+\Delta t}$ de l'inconnue qui minimisent la fonctionnelle. Nous obtenons le système suivant :

$$\int_S \hat{R}(h) \cdot \frac{\partial \hat{R}}{\partial H_i^{t+\Delta t}} \, dS = 0 \quad (\text{VI.17})$$

La comparaison de cette expression avec (IV.4) montre immédiatement la seconde interprétation qu'on peut donner de cette méthode. Elle fait partie de la famille des formulations de Pétrov-Galerkin, dont les fonctions de pondération s'expriment par :

$$\frac{\partial R}{\partial H_i^{t+\Delta t}}$$

Dans ce cas particulier :

$$\frac{\partial R}{\partial H_i^{t+\Delta t}} = N_i + c_0 \theta_t \frac{\partial N_i}{\partial x} \quad (\text{VI.18})$$

Dans la logique de l'appellation des méthodes N+1, N+2, on serait tenté de parler ici d'approche N-1, avec un coefficient de décentrement $\alpha_u = c_0 \theta_t$. En intégrant (IV.17) par parties (théorème de Gauss), on obtient :

$$\int_S \left(R + c_0 \theta_t \frac{\partial R}{\partial x} \right) N_i \, dS = 0 \quad (\text{VI.19})$$

dans le cas où R ou N_i s'annulent aux frontières. Ce n'est donc plus le résidu qu'on orthogonalise par la méthode classique de Galerkin, mais une combinaison de celui-ci avec sa pente, pondérée par le produit de la célérité c_0 et du coefficient de pondération temporelle θ_t .

On peut intuitivement attendre de la seconde contribution qu'elle ait une action beaucoup plus sélective suivant la longueur d'onde et l'assimiler à une dissipation numérique (Raymond et al).

La forme discrétisée de (IV.17) pour un noeud i s'écrit :

$$\left[1 + \left(\frac{1}{6} - \theta_t^2 n_c^2 \right) \delta^2 \right] (H_i^{t+\Delta t} - H_i^t) + n_c \Delta_0 H_i^t = 2 r' (\theta_t r^{t+\Delta t} + (1 - \theta_t) r^t) + \theta_t n_c^2 \delta^2 H_i^t \quad (\text{VI.20})$$

La comparaison avec l'équation discrétisée de la méthode Taylor-Galerkin (VI.15) est éloquente. Nous obtenons une totale correspondance pour $\theta_t = 0,5$, à l'exception du terme impliquant θ_t^2 ($\frac{1}{4}$ à la place de $\frac{1}{6}$).

L'étude de stabilité de Carey et al indique que cette seule différence suffit à assurer à la méthode une stabilité inconditionnelle pour $0,5 \leq \theta_t \leq 1$. Par ailleurs, la comparaison du facteur d'amplification pour ces deux méthodes sur des tests numériques révèle des comportements logiquement très voisins.

La généralisation de la méthode des moindres carrés présente certains inconvénients.

Citons d'abord qu'elle requiert souvent l'utilisation de fonctions d'interpolation de degré plus élevé, encore que cette objection puisse être contournée par l'introduction d'inconnues supplémentaires (Lynn, Carey et al).

Le souci le plus fréquent dans cette méthode est de faire converger rapidement le processus itératif pour des problèmes non-linéaires (Carey et al). Son application à des problèmes de convection-diffusion prouve par rapport à la théorie un lissage souvent exagéré des transitions (Bensabat et al).

Enfin, d'autres formulations ont été proposées pour remédier à ces problèmes ainsi qu'à des oscillations parasites rémanentes, par introduction, dans la fonctionnelle à minimiser, d'ordres plus élevés de dérivées, par exemple (Jiang et al) :

$$\int_S \left[R^2 + \alpha_u \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 \right] dS \quad (\text{VI.21})$$

Outre le problème de discrétisation que pose ce terme additionnel, réapparaît alors un coefficient pondérateur α_u dont l'influence sur la solution paraît considérable.

VI.3.4. Méthode N-1

Cette appellation logique reprend une idée désignée plus communément par "Streamline Upwind Procedure".

Ainsi que nous venons de l'introduire dans la méthode des moindres carrés, la conception des fonctions de pondération fait appel à la superposition des fonctions classiques d'interpolation et d'une fraction de leurs dérivées, comme l'indique la figure VI.3.

Le coefficient pondérateur α_u doit, comme pour les méthodes N+1, faire l'objet d'études théoriques afin d'en dégager la valeur optimale.

Reprenons à nouveau l'équation (IV.16) discrétisée pour le noeud i en introduisant ces fonctions test particulières.

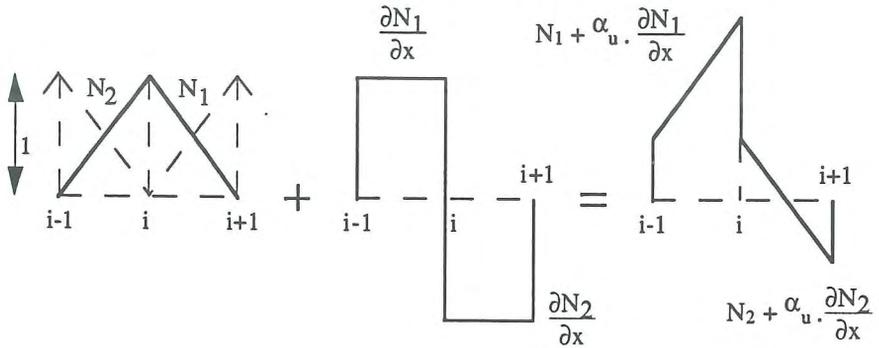


Figure VI.3.
Construction de fonctions de pondération dissymétriques et discontinues pour des éléments linéaires unidimensionnels

Sans développer la discrétisation temporelle, nous obtenons :

$$\frac{1}{6} \left[(1 + 3 \alpha'_u) \frac{\partial H_{i-1}}{\partial t} + 4 \frac{\partial H_i}{\partial t} + (1 - 3 \alpha'_u) \frac{\partial H_{i+1}}{\partial t} \right] + \frac{c_0}{2\Delta x} [(1 - 2 \alpha'_u) H_{i+1} + 4 \alpha'_u H_i - (1 + 2 \alpha'_u) H_{i-1}] = 2r' \quad (\text{VI.22})$$

avec

$$\alpha'_u = \alpha_u / \Delta x$$

L'analogie avec (VI.11) est complète pour $\alpha_{N+1} = 2 \alpha'_u$.

Cette constatation, jointe à l'interprétation des moindres carrés comme application particulière de cette théorie avec $\alpha_u = c_0 \theta_t$, finit d'établir que le bon comportement de chaque code étudié repose finalement sur des équations discrétisées très voisines : *La méthode de Taylor-Galerkin donne une expression discrétisée proche de celle des moindres carrés, elle-même application particulière des méthodes N-1 et N+1.*

Chaque méthode reprend naturellement ses spécificités en les appliquant aux systèmes non-linéaires et en procédant à leur extension en quasi-tridimensionnel.

Ces passages obligés nous poussent, avec d'autres arguments qu'expliqueront des développements futurs, à nous tourner préférentiellement vers cette dernière méthode.

En unidimensionnel, elle n'alourdit pas les procédures d'intégration numérique et réclame peu de modifications par rapport à la méthode initiale. Elle se généralise aisément aux autres dimensions (Yu et al).

VI.3.5. Détermination de la valeur optimale de α'_u

Puisque la modification porte sur une transformation des fonctions spatiales, nous suivrons les thèses de Dendy qui suggère de travailler sur l'expression (VI.22) non-discrétisée temporellement.

Nous appliquons la théorie d'étude du schéma numérique donnée au chapitre IV en introduisant le terme générique du développement non-discrétisé temporellement :

$$H'_m \exp [i (k x_m + k'_m t)] \tag{VI.23}$$

avec

$$x_m = l'_m \Delta x$$

dans l'équation (VI.22) pour obtenir, en l'absence d'apport extérieur :

$$-\frac{k'_m}{c_0 l'_m} = \frac{3}{x_m} \cdot \frac{2 \alpha'_u (1 - \cos x_m) + i \sin x_m}{3 \alpha'_u \sin x_m + i (\cos x_m + 2)} \tag{VI.24}$$

Cette expression doit équaler l'unité pour respecter la solution analytique (IV.20) d'une translation de l'onde à la vitesse c_0 .

Etudions donc le comportement du schéma spatial en développant (VI.24) en séries de Taylor selon x_m au voisinage de 0 :

$$-\frac{k'_m}{c_0 l'_m} = 1 - \frac{1}{12} \alpha'^2_u x^3_m + \frac{1}{12} \left(\alpha'^2_u - \frac{1}{15} \right) x^4_m + i \frac{\alpha'_u}{12} \left(\alpha'^2_u - \frac{1}{6} \right) x^5_m - \frac{1}{12} \left(\alpha'^4_u - \frac{\alpha'^2_u}{6} + \frac{1}{126} \right) x^6_m + O(x^7_m) \tag{VI.25}$$

Comme nous l'avons vu, les contributions réelles qui s'ajoutent à l'unité représentent l'erreur de phase et les imaginaires modifient l'amplitude de l'onde.

Pour améliorer l'erreur de phase du 4^{ème} au 6^{ème} ordre, il suffit de choisir $\alpha'_u = \frac{1}{\sqrt{15}}$.

Ce décentrement ne correspond pas à une amplitude parfaitement respectée qui impose $\alpha'_u = 0$. Mais il va précisément provoquer un étouffement dont l'action très sélective sur les longueurs d'onde correspond aux effets que nous recherchons.

La solution de (VI.22), explicitée pour cette valeur de α'_u

$$H'_m \exp \left[- \frac{c_0 (\Delta x)^3 t}{12 \sqrt{15}} (l'_m)^4 + 0 (l'_m)^6 \right] \exp [i l'_m (\Delta x - c_0 t) + 0(x_m^6)] \quad (VI.26)$$

montre cette influence de réduction de l'amplitude exprimée avec une puissance 4^{ème} de la longueur d'onde.

Lorsque Dendy effectue une étude similaire avec une pondération classique appliquée à l'équation originelle complétée d'un terme diffusif (exprimé en dérivée spatiale seconde), il montre un effet parallèle sur l'amplitude exprimé cette fois avec une puissance seconde de la longueur d'onde. L'action consécutive de lissage est donc beaucoup moins nuancée.

L'écriture des fonctions de pondération optimales à introduire

$$P_i = N_i + \frac{\Delta x}{\sqrt{15}} \frac{\partial N_i}{\partial x} \quad (VI.27)$$

montre un décentrement décroissant au fur et à mesure d'une discrétisation spatiale plus serrée. Cette conclusion rejoint une réalité souvent citée qui veut qu'un raffinement extrême du maillage contribue à améliorer les résultats de la méthode classique de Galerkin.

VI.3.6. Introduction de la discrétisation temporelle pour la méthode N-1

Nous reprenons l'expression pondérée du schéma temporel développée en (IV.2) pour discrétiser temporellement l'expression (VI.22).

La forme totalement discrétisée s'écrit pour un noeud i :

$$\left[1 + \left(\frac{1}{6} - \theta_t n_c \alpha'_u \right) \delta^2 \right] (H_i^{t+\Delta t} - H_i^t) + ((1 - \theta_t) n_c + \alpha'_u) + \alpha'_u \Delta_0 H_i^t =$$

$$2 (\theta_t r^{t+\Delta t} + (1 - \theta_t) r^t) + n_c \alpha'_u \delta^2 H_i^t + (\alpha'_u - \theta_t n_c) \Delta_0 H_i^{t+\Delta t} \quad (VI.28)$$

Elle donne une autre preuve du parallélisme des méthodes dans sa comparaison avec (VI.15) et (VI.20).

L'étude théorique du facteur d'amplification numérique pour (VI.28) donne, tous calculs faits :

$$\lambda'_m = \frac{1 + 2 \left(\frac{1}{6} - \theta_t \alpha'_u n_c \right) (\cos x_m - 1) + 2\alpha'_u n_c (\cos x_m - 1) - i [(1 - \theta_t) n_c + \alpha'_u] \sin x_m}{1 + 2 \left(\frac{1}{6} - \theta_t \alpha'_u n_c \right) (\cos x_m - 1) + i (\theta_t n_c - \alpha'_u) \sin x_m} \quad (\text{VI.29})$$

L'expression se prête mal à sa comparaison avec la valeur analytique de λ_m donnée en (IV.20). Nous les développons donc en séries de Taylor selon x_m au voisinage de 0 pour obtenir :

$$\lambda'_m = 1 - i n_c x_m - \theta_t n_c^2 x_m^2 + i \theta_t^2 n_c^3 x_m^3 + n_c (\theta_t^3 n_c^3 - \frac{\alpha'_u}{12}) x_m^4 + 0 (x_m^5) \quad (\text{VI.30})$$

à comparer avec la solution analytique de l'équation :

$$\lambda_m = \exp(-i n_c x_m) = 1 - i n_c x_m - \frac{n_c^2 x_m^2}{2} + i \frac{n_c^3 x_m^3}{6} + \frac{n_c^4 x_m^4}{24} + 0 (x_m^5) \quad (\text{VI.31})$$

L'impact de la discrétisation temporelle est manifeste puisque la précision de la méthode est du second ordre, à condition de fixer θ_t à 0,5.

On remarque bien que le paramètre de décentrement spatial n'intervient que pour les plus hauts degrés, contrairement au décentrement temporel, dont on prouve ici l'effet beaucoup plus "global" sur les longueurs d'onde. Il est par conséquent normal de n'avoir pu améliorer cette précision par rapport à la méthode classique ($\alpha_u = 0$) ou des moindres carrés ($\alpha_u = \theta_t c_0$)

A ce sujet, il est intéressant de revenir un instant sur la méthode de Taylor-Galerkin, dont les différences minimales avec l'équation donnée par les moindres carrés créaient une stabilité conditionnelle. Il faut noter que ces spécificités assurent à cette méthode une précision du troisième ordre. La méthode N+2 permet également d'y parvenir en ajustant l'effet de la fonction N+2 ajoutée en sus des fonctions de pondération dissymétriques décrites dans la méthode N+1.

Nous ne chercherons pas ces effets spécifiques puisque nous avons précédemment manifesté notre intention de décentrer légèrement le schéma temporel, échappant du même coup à une précision du second ordre.

VI.3.7. Extension de la méthode au non-linéaire

La démarche choisie ne pose pas davantage que les autres approches, de problème d'extension aux équations non-linéaires. Seule la valeur du coefficient doit faire l'objet d'une extension sur seule base des considérations précédemment établies en linéaire, sans autres caractères justificatifs que ceux donnés par l'expérimentation numérique.

De même, l'expression est reprise pour des maillages irréguliers où la longueur Δx prend, dans la détermination de α_u , une valeur localement adaptée à la maille.

De plus, pour orienter adéquatement le décentrement dans le sens de l'écoulement, nous utilisons finalement la forme générale suivante (Karamanzis) :

$$\alpha_u = \frac{u \Delta x}{|u| \sqrt{15}} \quad (\text{VI.32})$$

La mise en oeuvre de la méthode aux premières applications infructueuses des chapitres précédents va nous donner les premiers éléments d'évaluation sur les effets introduits.

Nous commencerons par l'exemple du chapitre V, qui met en relief l'apparition de solutions multiples, pour confirmer ensuite le bien-fondé des adaptations sur la dernière géométrie irrégulière du chapitre IV.

VI.3.7.1. Modélisation de l'écoulement sur plan incliné à condition amont de hauteur sinusoïdale

Il est particulièrement instructif de vérifier la solution qu'adopte le logiciel en lieu et place des solutions multiples non-physiques établies au chapitre V.

La solution donnée à la figure VI.4. se base sur une discrétisation spatiale de 97 noeuds. Le décentrement temporel est fixé à $\theta_t = 0,55$ et le décentrement spatial adopte la valeur supposée optimale donnée en (VI.32). Le pas temporel est fixé de façon à maintenir le nombre de courant maximum sous l'unité.

L'imposition instationnaire à l'amont du plan respecte les formes données en (V.2) et (V.15).

Les lignes d'eau instantanées, établies pour un écoulement de Manning, montrent un comportement exempt de tout effet parasite et une bonne précision. La transition calculée coupe la solution analytique de façon telle que les volumes soient respectés, comme le veut le choix opéré sur la solution faible à traiter.

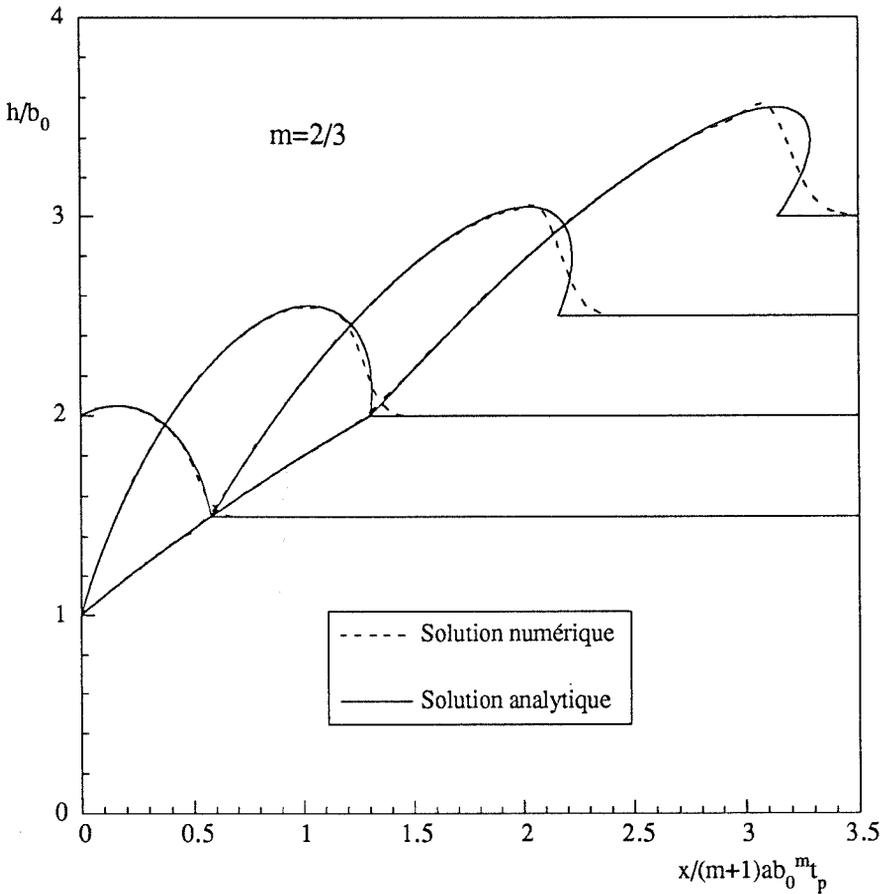


Figure VI.4.
 Comparaison avec la solution analytique des lignes d'eau instantanées,
 respectivement pour $t/t_p = 0,5, 1, 1,5, 2$

La figure VI.5. confirme l'effet sélectif du décentrement spatial qui assure une propagation nette du signal sinusoïdal, couplée aux précipitations uniformes. On distingue nettement sa déformation avec formation graduelle d'un front raide.

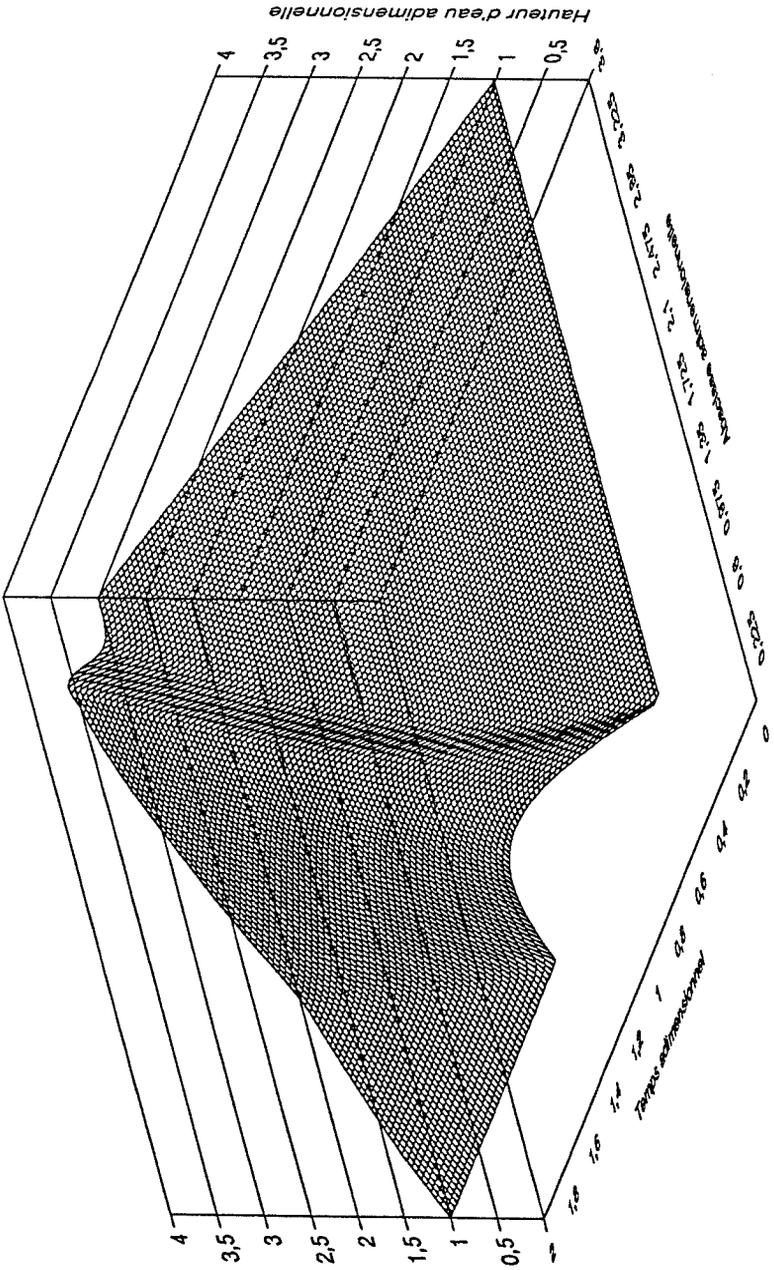


Figure VI.5.
Evolution temporelle de la hauteur d'eau sur l'ensemble du plan incliné

Nous allons profiter à présent de ce cas d'école pour illustrer les spécificités des effets de chaque coefficient de décentrement.

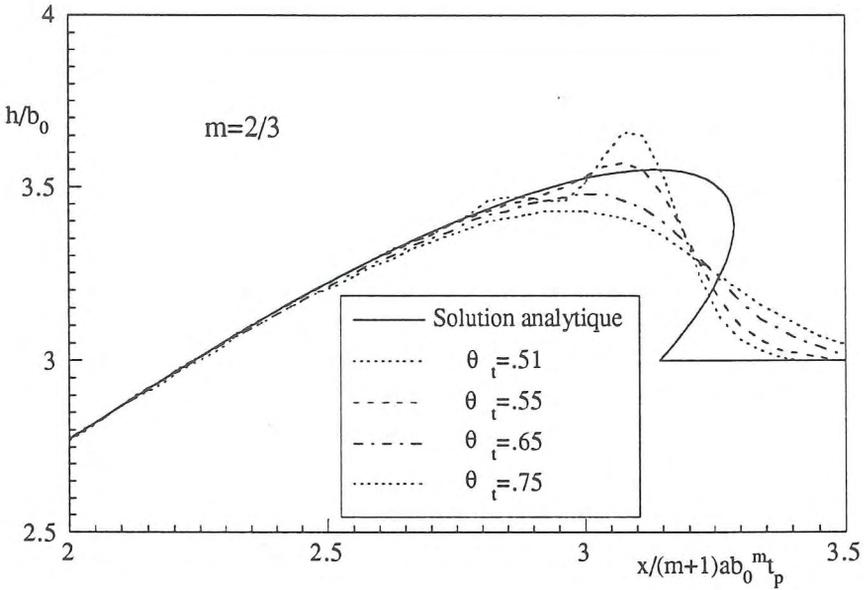


Figure VI.6.

Influence du décentrement temporel θ_t sur la ligne d'eau instantanée à $t/t_p = 2$

Examinons d'abord le décentrement temporel, dont nous avons indiqué les effets bénéfiques à la figure IV.2. lorsqu'il était modéré.

La figure VI.6. nous donne une nouvelle preuve des dangers d'un décentrement exagéré.

L'effet peu sélectif indiqué lors des développements théoriques en linéaire se confirme en gommant complètement la transition lorsque θ_t se rapproche de l'unité. Le maintien d'un front accentué, sans la présence de faibles oscillations rémanentes comme celles qui apparaissent pour $\theta_t = 0,51$, conforte le choix antérieur de $\theta_t = 0,55$.

La figure VI.7. montre le comportement tout à fait différent du décentrement spatial pour $\theta_t = 0,51$ constant.

Grâce à son action sélective sur les longueurs d'onde, le front a tendance à se redresser lorsque sa valeur tend vers des valeurs excessives. On constate également son influence sur l'amplitude des ondes.

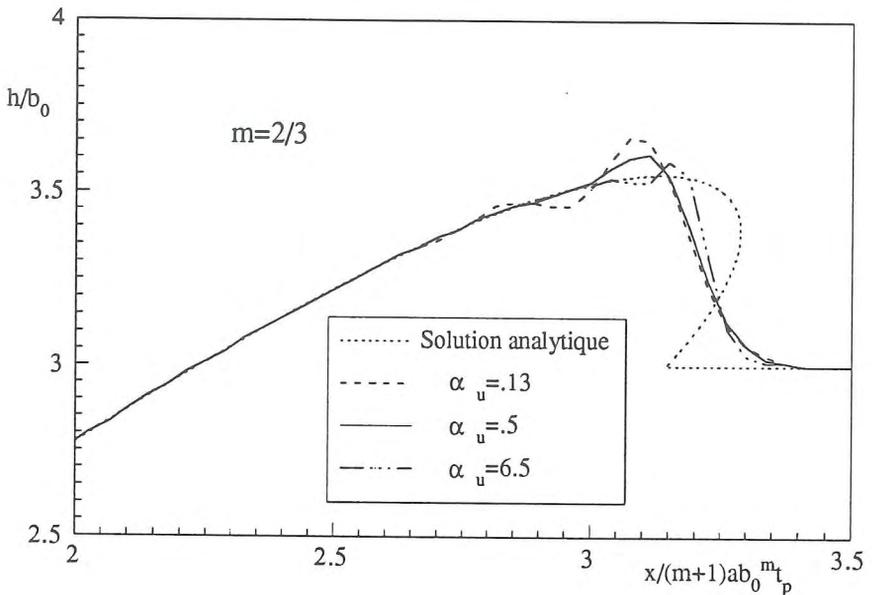


Figure VI.7.
Influence du décentrement spatial sur la ligne d'eau instantanée à $t/t_p = 2$

VI.3.7.2. Modélisation de l'écoulement sur pente non-uniforme, de valeur décroissante vers l'exutoire

Nous n'avons encore résolu qu'une application particulière, capable de générer des chocs sur une topographie élémentaire. En pratique, une succession appropriée de pentes est à même de produire ces effets, comme l'a suggéré la série d'exemples du chapitre IV, qui s'intéresse à la succession de deux pentes.

Avant d'y examiner l'effet de l'approche numérique modifiée, il n'est pas inutile de préciser les circonstances qui sont à l'origine de chocs dans de telles géométries.

Si les principales solutions analytiques sont élaborées sur des pentes uniformes, c'est que cette voie est aisée à exploiter tant que le coefficient "a" de l'équation (III.2), contenant les informations topographiques, peut être considéré comme constant. Lorsqu'il ne peut plus sortir du terme de dérivée spatiale de l'équation (IV.7), la recherche de telles solutions montre rapidement ses limites.

Nous surmonterons les difficultés analytiques pour la succession de deux pentes en supposant que la transition de la pente amont à la pente aval se produit sur une distance ϵ très petite.

Dans ces conditions, l'élément de liaison entre les deux plans est supposé n'offrir aucune capacité de stockage : il restitue instantanément à son aval le débit qui s'engouffre à sa frontière amont. Puisque cette dernière représente l'exutoire du plan incliné amont (désigné par l'indice 1), nous obtenons finalement :

$$q_1 = a_1 h_1^{m+1} = a_1 (t (r - i) \cos \theta_1)^{m+1} = a_2 h_2^{m+1} \quad (\text{VI.33})$$

En déplaçant l'origine des abscisses jusqu'à la transition, nous nous trouvons alors face à l'étude du plan incliné aval (désigné par l'indice 2) qui doit respecter la condition amont tirée de (VI.33). Elle s'écrit :

$$h'(\tau) = h_2 = \tau \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{m+1}} (r - i) \cos \theta_1 \quad (\text{VI.34})$$

Cette condition de croissance ne vaut naturellement que pour des τ inférieurs au temps de concentration du bassin amont, c'est-à-dire :

$$\tau < \left(\frac{L}{a (r-i)^m (\cos \theta_1)^m} \right)^{\frac{1}{m+1}} \quad (\text{VI.35})$$

Ce type de problème a été traité formellement au paragraphe V.2.

Par la formule (V.14), il est manifeste que l'ensemble des τ qui suivent la stabilisation de la hauteur à la transition présente peu d'intérêt pour la recherche de zones de chocs.

En particulierisant les formules (V.6) et (V.8) à notre application, la solution sur le plan aval prend la forme suivante :

$$h = (t - \tau) (r-i) \cos \theta_2 + \tau \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{m+1}} (r - i) \cos \theta_1 \quad (\text{VI.36})$$

le long de

$$x = \frac{a_2 (r - i)^m}{\cos \theta_2} \left[(\cos \theta_2 (t - \tau) + \tau \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{m+1}} \cos \theta_1)^{m+1} - \left\{ \tau \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{m+1}} \cos \theta_1 \right\}^{m+1} \right] \quad (\text{VI.37})$$

La condition (V.11) pour que deux caractéristiques se croisent s'explique comme suit :

$$\left((t - \tau) \cos \theta_2 + \tau \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{m+1}} \cos \theta_1 \right)^m \cdot \left(\left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{m+1}} \cos \theta_1 - \cos \theta_2 \right) =$$

$$\left[\tau \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{m+1}} \cos \theta_1 \right]^m \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{m+1}} \cos \theta_1 \quad (\text{VI.38})$$

Elle ne peut être vérifiée si

$$\left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{m+1}} \cos \theta_1 - \cos \theta_2 < 0 \quad (\text{VI.39})$$

qui donne pour un écoulement de Manning à coefficient de frottement constant :

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} > \left(\frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} \right)^{\frac{10}{3}} \quad (\text{VI.40})$$

Cette condition explique les lourdes conséquences de l'inversion des pentes opérée au chapitre IV. D'après (VI.40), il est manifeste qu'une diminution de pente sur la trajectoire d'une goutte de pluie doit être systématiquement analysée avec circonspection durant la phase de croissance.

Il faut enfin constater par (V.12, 13) que lorsque les conditions topographiques sont remplies pour l'existence de chocs, l'enveloppe aura son origine en (0,0) dans le cas d'un plan initialement sec.

Examinons à présent la réalité numérique des faits par une appréciation globale des figures tridimensionnelles.

La comparaison de la figure VI.8. avec la figure IV.10. confirme l'influence positive des modifications.

Nous retrouvons une allure de courbe exempte de tout effet parasite, de qualité comparable à celle que nous connaissons dans les premières applications du chapitre IV. L'équilibre s'établit sans encombre pour le débit en s'alignant à présent parfaitement sur la droite de la solution analytique.

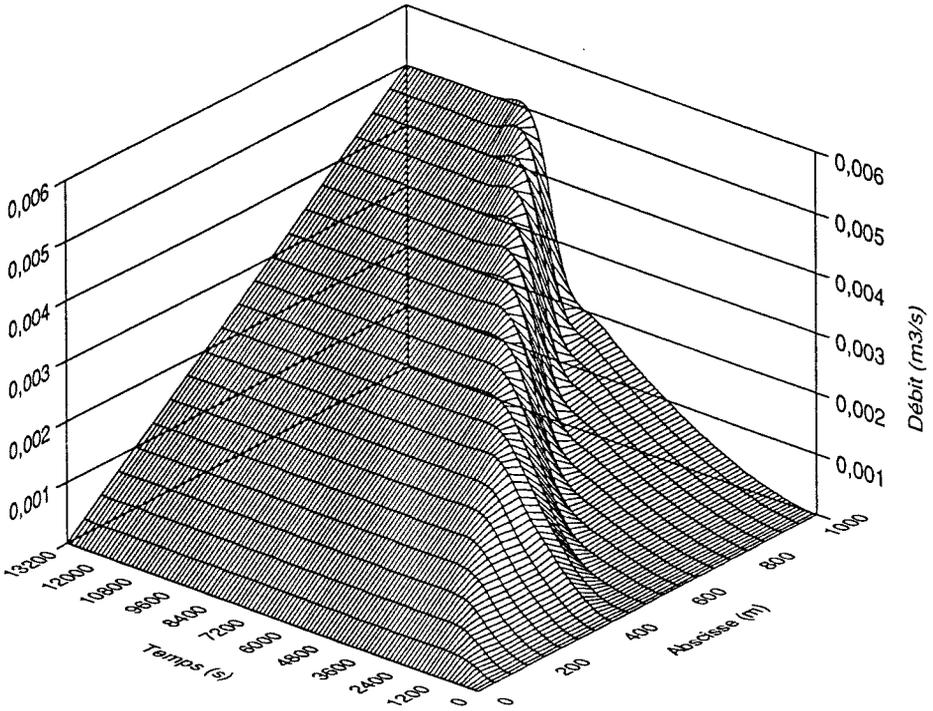


Figure VI.8.
Evolution temporelle du débit sur l'ensemble de la surface topographique.

La figure VI.9. illustre l'établissement et la stabilisation de ce que nous nommerons un ressaut simplifié au sens de la théorie cinématique.

La figure VI.10. enfin, montre la distribution de la vitesse, avec la recherche d'un équilibre à vitesse plus faible après passage de la transition de pente.

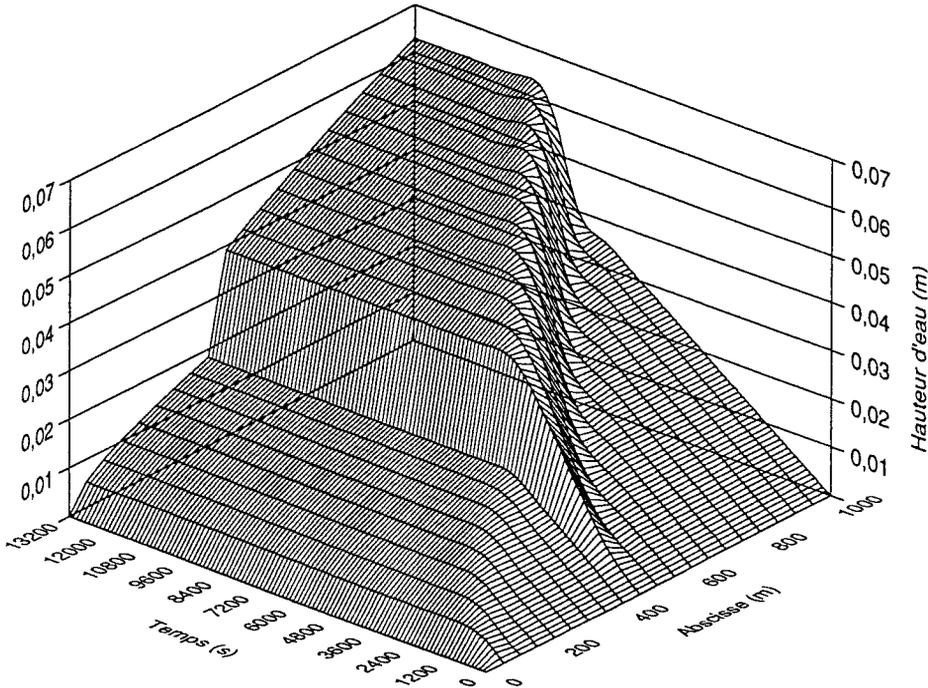


Figure VI.9. Evolution temporelle de la hauteur d'eau sur l'ensemble de la surface topographique, avec formation d'un ressaut.

VI.4. CONCLUSION

La qualité des résultats et leur amélioration par rapport aux signaux perturbés des premières tentatives prouvent que les aménagements portés à la méthode classique répondent complètement aux spécificités du problème à traiter.

Ces applications simples font également ressortir le caractère positif des approches paramétrées. Par rapport aux méthodes figées, le balayage du champ des valeurs des coefficients détermine autant de comportements différents dont l'analyse théorique et numérique comparative permet de mesurer pleinement les effets.

La variation des décentrement donne une idée claire des processus induits dans les systèmes, de la sensibilité des valeurs optimales face aux éventuelles dégénérescences consécutives à des paramètres mal fixés.

Bien plus que de disposer d'une méthode généralisable à la résolution appropriée des équations bidimensionnelles, nous avons appris dans un cadre unidimensionnel simplifié à mieux contrôler les processus dissipatifs introduits qui permettent d'y parvenir.

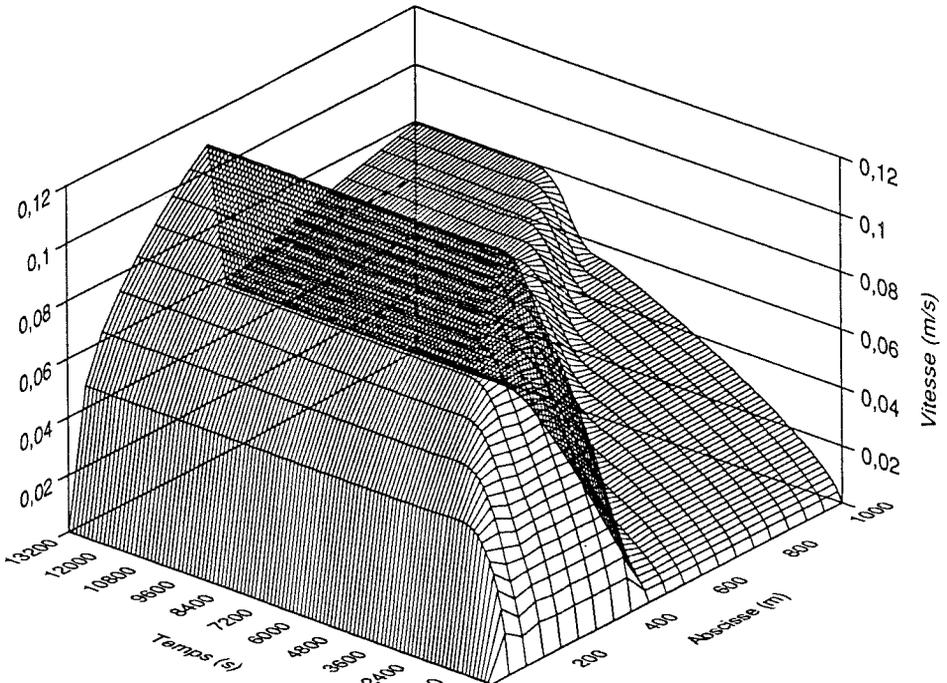


Figure VI.10.

Evolution temporelle de la vitesse sur l'ensemble de la surface topographique

La dernière figure illustrative de phénomènes unidimensionnels (figure VI.11.) donne une première confirmation de l'importance qu'il y a de traiter telle quelle une topographie quelconque.

Bien que nous ne disposions à cet instant encore que d'une liberté relative en la matière (description topographique unidimensionnelle), cette prépondérance s'impose dans la superposition d'hydrogrammes à l'exutoire des divers bassins étudiés jusqu'ici, couvrant tous 1000 m en long pour une dénivellation totale de 48 m.

Pente constante ou géométries variables analogues à celles du chapitre IV, soumises pendant 16.440 s à des pluies de 5.10^{-6} m/s, induisent une variété dans les formes possibles d'hydrogrammes élémentaires à propager en rivière.

L'extension à deux dimensions va conforter cette conclusion.

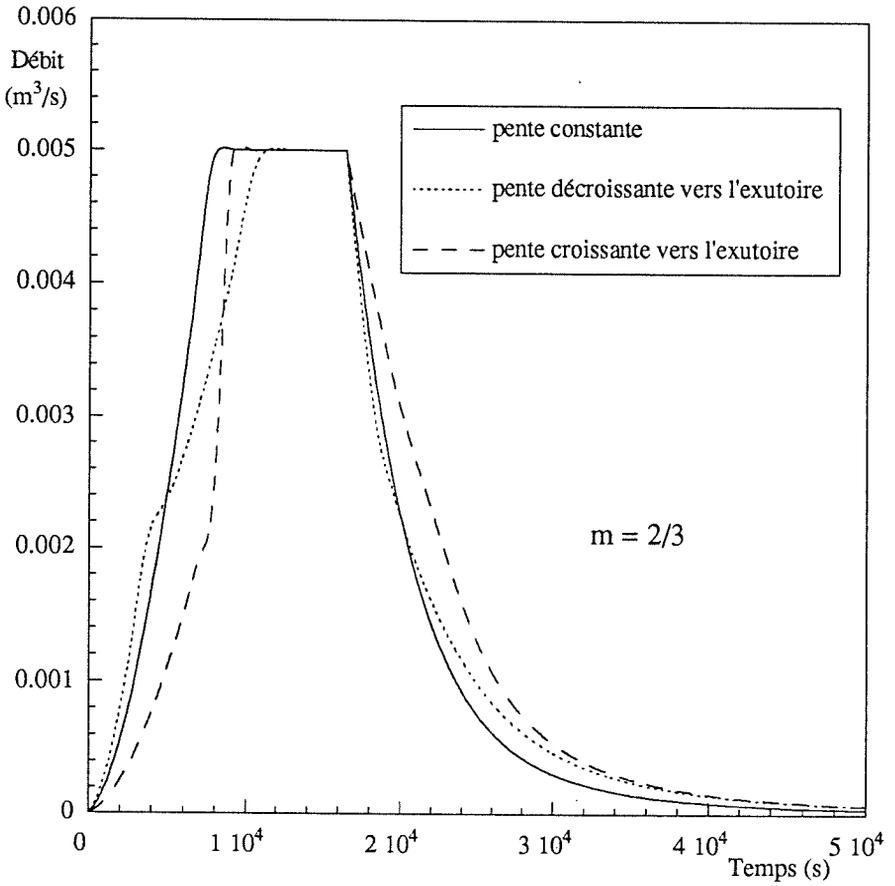


Figure VI.11.
Comparaison d'hydrogrammes à l'exutoire de bassins subissant
une même dénivellation diversement répartie sur une même longueur

Chapitre VIII

Extension de la théorie cinématique aux écoulements hydrologiques quasi-tridimensionnels

SOMMAIRE

- VII.1. Introduction*
- VII.2. Equations cinématiques quasi-tridimensionnelles*
- VII.3. Discrétisation et résolution du système*
- VII.4. Généralisation dans l'utilisation des fonctions de pondération dissymétriques*
- VII.5. Evaluation des quantités infiltrées*
- VII.6. Conclusion*

VII.1. INTRODUCTION

L'analyse unidimensionnelle a contribué à fixer notre opinion sur les points les plus fondamentaux de l'écoulement hydrologique de surface : structure de l'écoulement, loi de frottement la plus concordante aux observations, légitimité d'appliquer la théorie cinématique, étude de ses implications, ...

L'extension des dimensions du problème débutera en généralisant ces acquis théoriques et en rappelant les propriétés remarquables dont on tirera profit topographiquement et numériquement.

Sur ce dernier aspect, l'établissement d'une méthode originale de pondération cherchera à généraliser et surtout à orienter correctement les effets décrits dans la seconde approche unidimensionnelle afin d'élaborer un nouveau logiciel cette fois quasi-tridimensionnel.

La progression en matière topographique parvient alors à son terme et se profile enfin l'opportunité de premiers essais sur topographie quelconque.

Dans cet exercice, certaines données méritent un examen particulier. Si l'état du terrain a déjà fait l'objet d'analyses pour tirer certaines indications en matière de frottement, il importe à présent de préciser les processus d'échange du système avec le monde extérieur et de s'attarder tout particulièrement sur le rôle joué par le terrain dans l'infiltration.

La non-linéarité du système, ainsi que la faible part des précipitations brutes consacrées au phénomène de ruissellement, réclament une description précise de leur répartition dans le temps et l'espace. Nous y consacrerons une part de ce chapitre.

VII.2. EQUATIONS CINEMATIQUES QUASI-TRIDIMENSIONNELLES

Nous avons longuement expliqué les hypothèses qui font dégénérer les équations dynamiques en des équilibres entre composantes de frottement et de poids.

Fort des conclusions relatives au frottement, nous simplifierons les équations (II.64) et (II.65) en les exprimant avec des composantes de frottement turbulentes. Nous obtenons l'équilibre suivant :

$$-gh \sin \theta_i = g \bar{u}_i \frac{\sqrt{\bar{u}_j \bar{u}_j}}{c_f^2} \quad i = 1, 2 \text{ correspondent respectivement à } x, y \quad (\text{VII.1})$$

avec

$$\theta_i = -\arctg \left(\frac{\partial (-h_f)}{\partial x_i} \right) \text{ est l'opposé de l'angle que fait la topographie locale avec l'axe } i$$

$$\begin{aligned} c_f &= c_h && \text{pour un écoulement de Chézy} \\ &= \frac{h^{1/6}}{n} && \text{pour un écoulement de Manning} \end{aligned}$$

Considérons une trajectoire C et désignons par $(\cos \theta_s, \sin \theta_s)$ les composantes dans le plan (x, y) de la tangente à C, comme le montre la figure VII.1.

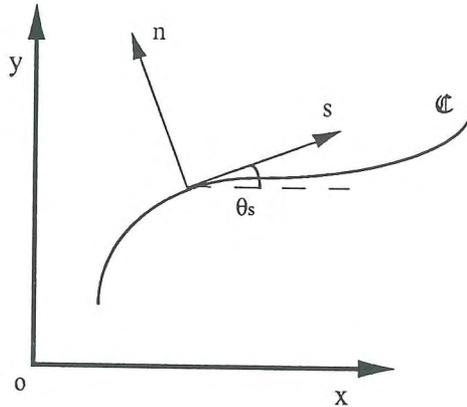


Figure VII.1.

Projection dans le plan (x, y) d'une trajectoire quelconque de goutte de pluie

Nous avons les relations suivantes :

$$\cos \theta_s = \frac{\sin \theta_x}{\sqrt{\sin \theta_j \sin \theta_j}} \quad \sin \theta_s = \frac{\sin \theta_y}{\sqrt{\sin \theta_j \sin \theta_j}} \quad (\text{VII.2})$$

qui donnent une expression généralisée pour les composantes de vitesse \bar{u}_i extraites de (VII.1) :

$$\bar{u}_x = \sqrt[4]{\sin \theta_j \sin \theta_j} c_f \sqrt{h} \cos \theta_s = a' h^m \cos \theta_s \quad (\text{VII.3})$$

$$\bar{u}_y = \sqrt[4]{\sin \theta_j \sin \theta_j} c_f \sqrt{h} \sin \theta_s = a' h^m \sin \theta_s$$

Le remplacement de \bar{u}_i par (VII.3) dans l'équation de continuité intégrée sur la hauteur (II.54) donne l'expression quasi-tridimensionnelle de l'écoulement hydrologique, de seule inconnue h :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (a' h^{m+1} \cos \theta_s) + \frac{\partial}{\partial y} (a' h^{m+1} \sin \theta_s) = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = (r - i) \cos \theta_z \quad (\text{VII.4})$$

L'heureuse conséquence de pouvoir ignorer l'influence de la pente de surface est de conserver un rapport entre les composantes de vitesse totalement déterminé par les seules caractéristiques topographiques.

L'identité des lignes de courant et des trajectoires simplifie la recherche des surfaces impliquées dans la modélisation de l'écoulement jusqu'à l'exutoire. Puisqu'il apparaît que chaque ligne fluide se développe indépendamment de ses voisines le long d'un chemin topographiquement déterminé, une analyse géométrique permet de les parcourir jusqu'à leur amont pour y fixer la seule condition limite nécessaire à un problème bien posé.

Nous possédons là toutes les indications nécessaires à la recherche du bassin versant adapté à la méthode cinématique et à la fixation des conditions aux limites requises.

L'imposition d'une hauteur nulle sur les lignes de crêtes s'impose à nouveau comme la condition la plus naturelle avec l'inutilité de devoir préciser des conditions aval décrivant le délicat mode de déversement dans la rivière.

VII.3. DISCRETISATION ET RESOLUTION DU SYSTEME

Nous ne reviendrons pas sur les notions développées au chapitre IV et qui portaient en toute généralité sur un système multidimensionnel. Travaillant avec la même discrétisation temporelle, contentons-nous de généraliser les formes (IV.9) et (IV.14) aux équations (VII.3, 4) nécessaires à la mise en place d'un système itératif de résolution par la méthode de Newton-Raphson.

Nous obtenons respectivement :

$$W(H^{t+\Delta t}) = \int_S P \left[N^T \cdot (H^{t+\Delta t} - H^t) + \Delta t \frac{\partial N^T}{\partial x} [\theta_t Q_x^{t+\Delta t} + (1 - \theta_t) Q_x^t] \right. \\ \left. + \Delta t \frac{\partial N^T}{\partial y} [\theta_t Q_y^{t+\Delta t} + (1 - \theta_t) Q_y^t] - (r - i) \cos \theta_z \right] dS = 0 \quad (VII.4)$$

et pour l'expression de la matrice jacobienne :

$$J_{i,j} = \int_S P_i \left[N_j + (m + 1) \Delta t \theta_t \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} U_{xk}^{t+\Delta t} + \frac{\partial N_j}{\partial y} U_{yk}^{t+\Delta t} \right) \delta_{kj} \right] dS \quad (VII.5)$$

Ces écritures respectent naturellement les enseignements tirés sur l'évaluation particulière des contributions convectives. Le processus de résolution du paragraphe IV.3 s'applique cette fois dans le nouveau logiciel à un choix d'éléments bidimensionnels classiquement rencontrés en éléments finis.

VII.4. GENERALISATION DANS L'UTILISATION DE FONCTIONS DE PONDERATION DISSYMETRIQUES

VII.4.1. Distribution du décentrement spatial des fonctions

Nous venons d'évoquer la propriété essentielle de la théorie cinématique concernant la trajectoire des filets fluides. Nous allons y recourir pour développer une méthode générale de pondération.

Pour ce faire, nous partons du principe qu'il n'est utile d'introduire les effets dissipatifs précédemment étudiés que dans la seule direction de l'écoulement. Par conséquent, leur distribution la plus adéquate passe nécessairement par l'examen des trajectoires au sein de chaque élément.

La conséquence tangible de ce raisonnement apparaît dans la définition qui va être donnée des deux coefficients de décentrement (α'_{ux} , α'_{uy}) utilisés dans les fonctions de pondération P_i de l'équation cinématique.

En effet, en lieu et place d'une pondération classique par des fonctions analogues aux fonctions d'interpolation, nous généralisons (VI.27) en écrivant cette fois :

$$P_i = N_i + \alpha'_{ux} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \alpha'_{uy} \frac{\partial N_i}{\partial y} \quad (\text{VII.6})$$

L'intégration numérique de la matrice jacobienne passe par l'évaluation de (VII.5) en des points d'intégration, si bien qu'il nous paraît plus opportun de nous placer en un de ces lieux pour définir plus aisément l'expression des coefficients pondérateurs α_{ui} .

La tangente à la trajectoire qui passe par le point PI est parallèle au vecteur de composantes $[(\cos \theta_s)_{PI}, (\sin \theta_s)_{PI}]$ en accord avec (VII.2). Nous allons donc supposer qu'il faut provoquer un décentrement spatial local dans cette direction. Son expression s'inspirera tout naturellement des études menées en unidimensionnel (VI.32).

A la longueur Δx de l'élément unidimensionnel, nous allons toutefois devoir substituer une longueur caractéristique de l'écoulement bidimensionnel. Malgré les deux dimensions spatiales, la logique de notre raisonnement impose bien une seule longueur (Δl_t) représentative des trajectoires que suivent les filets fluides dans cet élément.

Dans ces conditions, nous écrivons :

$$\alpha'_{ux} = \alpha'_a \frac{\Delta l_t}{\sqrt{15}} (\cos \theta_s)_{PI} \text{sign}(u_x) \quad (\text{VII.7})$$

$$\alpha'_{uy} = \alpha'_a \frac{\Delta l_t}{\sqrt{15}} (\sin \theta_s)_{PI} \text{sign}(u_y) \quad (\text{VII.8})$$

α'_a étant un coefficient d'amplification, dont la valeur est liée au choix qui sera fait pour Δl_t .

Nous allons directement vérifier le bien fondé des expressions proposées en poursuivant la constante gradation dans la difficulté des applications proposées.

La goutte de pluie qui tombe sur la ligne de crête du bassin représenté à la figure VII.2. subit sur son parcours des irrégularités topographiques qui résument les géométries étudiées jusqu'ici. En sus s'ajoute pour cette première application bidimensionnelle l'effet de convergence des trajectoires de ce bassin axisymétrique.

Nous étudierons l'évolution du système au cours d'une pluie $r = 5 \times 10^{-6}$ m/s qui arrose durant 2.10^4 s un terrain imperméable caractérisée par un coefficient de Manning $1/n = 3$. Chaque rayon connaît une alternance de pentes de 10^{-2} , 10^{-1} , 10^{-2} m/m, portant chacune sur 7 noeuds également espacés de 50 m.

Puisque l'effet résultant se concentre dans la direction radiale, l'espacement radial des noeuds, donnée commune à tous les éléments, s'inscrit complètement dans la définition associée à une longueur caractéristique ou, du moins, à un multiple de cette longueur.

Nous reviendrons sur la valeur $\alpha'_a = 2$ choisie pour facteur d'amplification, par rapport à la valeur de hauteur de triangle adoptée uniformément pour Δl_1 sur tout le domaine.

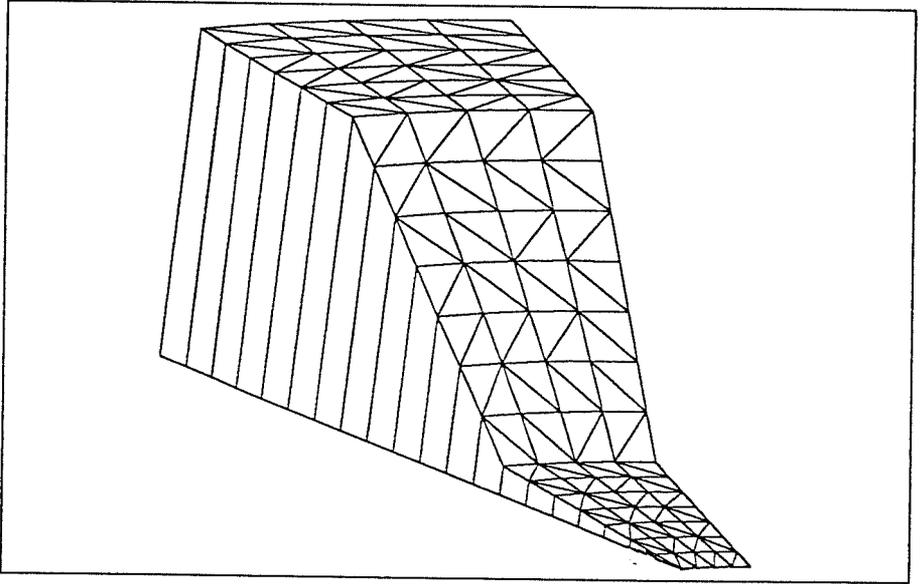


Figure VII.2.
Représentation tridimensionnelle du bassin axisymétrique étudié

Les éléments utilisés par la discrétisation sont des triangles linéaires à 3 nœuds.

La discrétisation irrégulière entre "couloirs d'écoulement" nous permet une première analyse de la sensibilité du résultat. Pour un pas de 200 s et un décentrement temporel $\theta_t = 0,55$, nous comparons quelques lignes d'eau instantanées obtenues sur chaque génératrice à la figure VII.3. L'état d'équilibre fait l'objet d'une comparaison avec la solution analytique.

On constate la persistance de la solution pour les divers rayons ainsi que la correspondance de la solution stationnaire. En particulier, nous retrouvons une formation correcte du "ressaut cinématique" causée par la diminution de pente et ce, malgré l'accentuation de l'accroissement de hauteur résultant de la convergence du bassin.

L'erreur relative de hauteur d'eau sur l'ensemble du bassin n'excède pas le pourcent à l'équilibre.

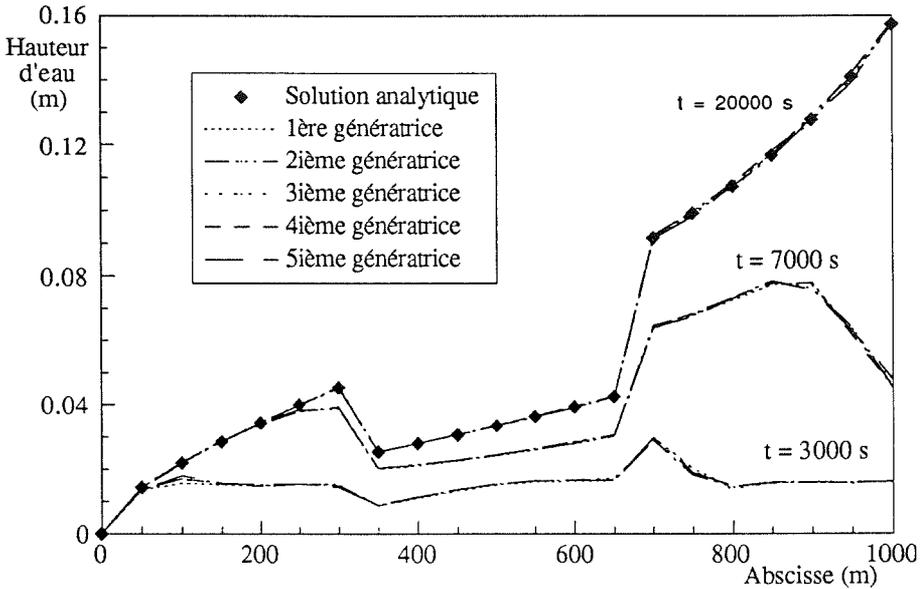


Figure VII.3.
Comparaison des lignes d'eau instantanées obtenues sur les génératrices du bassin et comparaison avec la solution analytique à l'équilibre.

Un point sensible pour la qualité globale du résultat concerne le respect des bilans volumiques. Nous avons vu les dégénérescences qu'il connaît lorsque la méthode n'est pas appropriée.

La figure VII.4. reconstitue la distribution instantanée des volumes tombés entre le volume stocké sur le bassin et le cumul des volumes passés au travers des segments aval qui symbolisent l'exutoire.

L'erreur finale, à l'instant où la décroissance est interrompue, conserve une valeur relative de 10^{-4} qui est tout à fait satisfaisante.

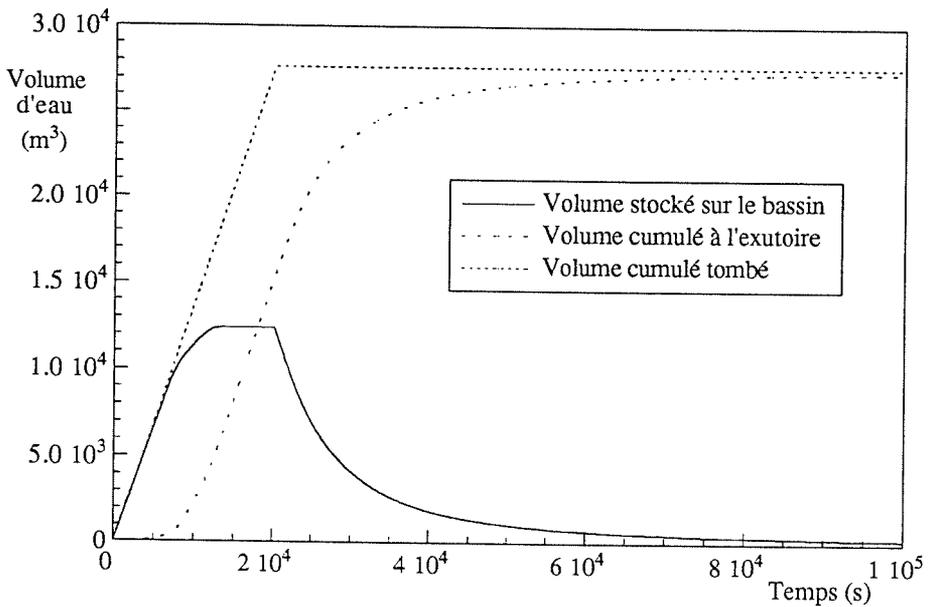


Figure VII.4.
Evolution temporelle de la distribution du volume tombé entre le volume stocké sur le bassin et celui déversé à l'exutoire du bassin axisymétrique convergent.

Cette impression favorable se confirme dans l'examen global du processus représenté à la figure VII.5. On y reconnaît la progression vers l'aval des ondes d'influence des modifications topographiques intermédiaires qui viennent infléchir in fine l'évolution temporelle de la hauteur d'eau à l'exutoire.

La mise en place progressive des équilibres sur chaque abscisse, la stabilité de la phase stationnaire, enfin la modélisation sans encombre de la décrue jusqu'à un tarissement quasi-complet prouvent que l'effet recherché a été obtenu. L'absence de toute manifestation parasite contraste, à l'instar des résultats unidimensionnels, avec les solutions perturbées d'une approche classique de Galerkin.

Pour finaliser la méthode, il reste à préciser une méthode fiable qui établit pour chaque élément une valeur représentative des trajets fluides qui s'y dessinent.

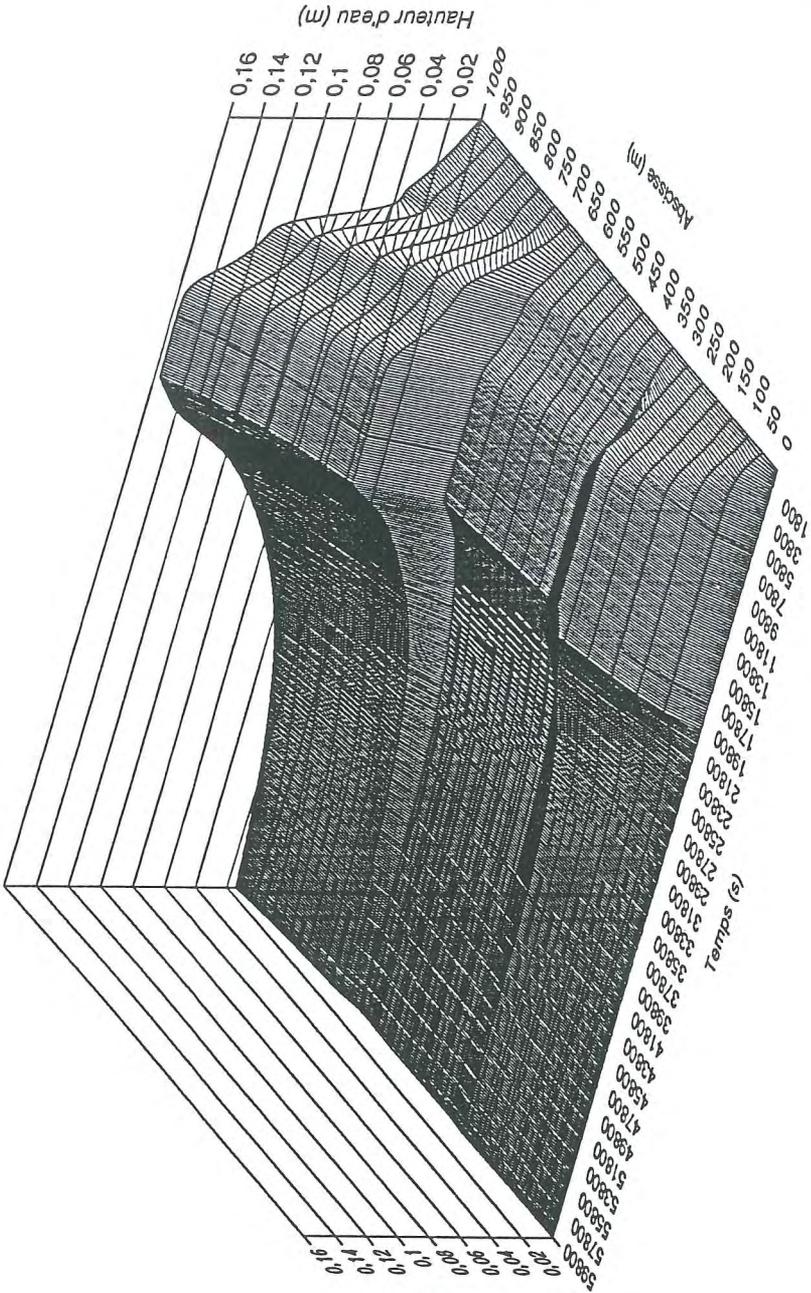


Figure VII.5.
Représentation tridimensionnelle de l'évolution temporelle des lignes d'eau
sur l'ensemble d'une génératrice

VII.4.2. Evaluation d'une longueur caractéristique pour chaque élément

Reprenons un des points caractéristiques de l'élément que constituent les points d'intégration.

Une première solution possible consisterait à évaluer pas à pas les longueurs que développent entre les frontières de l'élément les trajectoires qui passent par ces points et de moyenner l'ensemble des valeurs collectées pour l'élément.

Nous avons investigué des solutions plus économiques en temps d'évaluation.

La plus satisfaisante consiste à opérer une moyenne pondérée par les poids de Gauss de grandeurs évaluées aux points d'intégration. Nous y faisons passer des droites de même direction que la vitesse résultante en ces points. Elles intersectent les côtés de l'élément pour déterminer des segments dont la longueur moyenne pondérée sera mémorisée à la première itération du pas initial à calculer.

Il s'est avéré au cours des nombreux tests préliminaires de mise au point que cette moyenne pondérée répondait complètement à l'interprétation donnée à Δl_T .

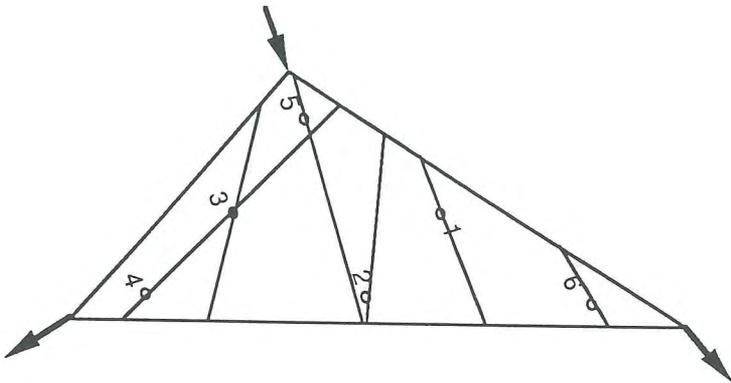


Figure VII.6.
Calcul de la longueur caractéristique Δl_T d'un élément triangulaire à 3 noeuds par évaluation des longueurs de segments en 6 points d'intégration.

La généralité du processus est manifeste puisqu'il ne connaît pas de restriction, pour l'élément de discrétisation, dans la forme géométrique et le degré d'interpolation utilisé, pas plus que dans le nombre de points d'intégration requis. Elle est, à l'image du logiciel élaboré, capable de gérer l'éventail classique des différents types d'éléments finis.

C'est pourtant dans le cadre particulier des éléments linéaires à trois noeuds que nous situons nos applications, ce qui explique également que notre démarche unidimensionnelle se soit cantonnée dans la discrétisation par éléments linéaires à deux noeuds.

Cette préférence s'explique par l'excellent comportement manifesté par ce type d'interpolation dans la modélisation des chocs et plus généralement dans tous les phénomènes où le transport convectif prédomine (Heinrich et al, Hansbo, par exemple). Ben-Sabar et al insistent particulièrement dans ce contexte général sur la stabilité accrue des éléments triangulaires face à l'apparition d'instabilités numériques.

Outre la bonne tenue numérique de cet élément simple, son aptitude et sa souplesse à discrétiser n'importe quelle géométrie constitue un autre argument décisif, puisqu'il est la forme de base incontournable d'une majorité de méthodes de maillage automatique.

Complétons la description de la pondération particulière en expliquant l'intervention d'un facteur d'amplification commun aux formules (VII.7 - VII.8).

Lorsque nous procédons à l'évaluation de Δl_T pour l'ensemble des éléments qui composent le bassin axisymétrique de la figure VII.2., elle nous rend pour chacun une même constante qui correspond au tiers de la hauteur de triangle située sur les génératrices. La comparaison de ces Δl_T calculés avec des modélisations unidimensionnelles triviales indique également la nécessité d'une remise à l'échelle uniforme des coefficients attachés aux géométries étudiées.

L'expérimentation numérique montre que le type d'élément élaboré donne un bon comportement pour des valeurs de α'_a situées entre 4 et 6. Cette constatation révèle, en concordance avec l'expérience unidimensionnelle, la relative insensibilité des effets induits lorsqu'on se maintient dans des valeurs proches des enseignements tirés en théorie linéaire. La valeur $\alpha'_a = 2$ choisie dans la dernière application s'inscrit dans cette frange si l'on considère que la valeur caractéristique Δl_T , choisie alors, correspond au triple de la valeur que nous adoptons désormais.

Les conclusions sur cette mise à l'échelle uniforme sont complètement indépendantes de l'inégale distribution même des longueurs caractéristiques calculées, qui joue un rôle prépondérant sur la qualité des résultats et contribue à l'originalité de la méthode.

En conclusion, rappelons deux caractéristiques essentielles de la procédure proposée :

- elle n'attache à chaque élément qu'une seule valeur caractéristique, distribuée adéquatement pour définir les deux effets selon les axes x et y.

Les grandeurs sont fixées une fois pour toute lors de la première analyse de la discrétisation. Elle sont mémorisées et n'exigent plus aucune surcharge postérieure de calcul, ce qui rend la méthode économique.

- Il est important d'insister à nouveau sur une conséquence remarquable de l'étude unidimensionnelle qui rendait le décentrement spatial indépendant de la vitesse, à l'exception de son orientation. La généralisation que nous venons d'établir reprend cette conclusion, dont le bien fondé fut expérimenté dans des tests préliminaires.

Mettons en pratique l'ensemble de ces considérations sur un maillage irrégulier d'éléments triangulaires à 3 noeuds.

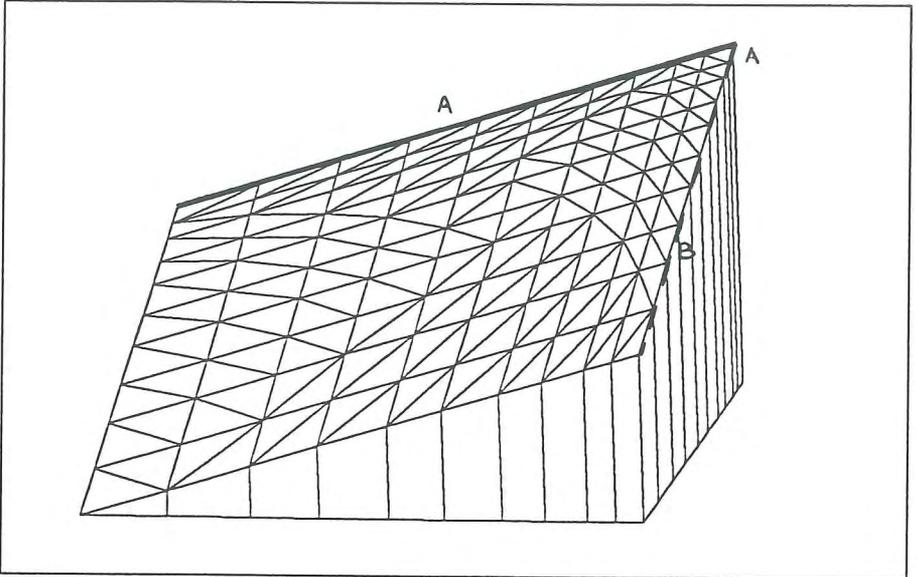


Figure VII.7.
Représentation tridimensionnelle de la topographie et du maillage irrégulier
utilisé pour la modélisation de transport convectif

Nous considérons le bassin très particulier représenté à la figure VII.7. Ce plan imperméable, caractérisée par $1/n = 3$ et qui a la forme d'un carré sur pointe de 1000 m de côté, voit sa plus grande pente de 0,014 m/m orientée selon la diagonale. La surface est initialement recouverte d'une épaisseur d'eau uniforme de 2 cm et ne subit aucune précipitation durant toute l'étude. L'état stationnaire initial est entretenu par les conditions limites adéquates qui consistent à maintenir cette hauteur d'eau sur l'ensemble des bords amont, représentés en traits renforcés sur la figure VII.7.

La perturbation de cet état provient d'une modification instantanée de la condition limite sur une fraction A de la frontière amont où se maintient désormais une hauteur de 5 cm. La condition sur la fraction restante B demeure inchangée.

Le choc doit donc se propager selon la plus grande pente en n'influençant théoriquement que les seules trajectoires rectilignes qui subissent une modification de conditions limites.

Nous nous intéresserons moins à cette propagation de choc très particulière et peu significative pour nos futures applications, qu'à l'état dans lequel subsiste le système après que le front ait atteint les limites aval.

La solution analytique du problème adopte la physionomie montrée à la figure VII.8. La totale indépendance de chaque trajectoire parallèle à la diagonale de plus grande pente explique la transition brusque entre les filets fluides, sans que la pente de surface ne puisse, dans cette théorie simplifiée, créer le moindre appel d'eau.

Dans cette application voisine du problème qu'a proposé Hughes et qui s'est imposé depuis comme un test standard de comportement des modèles convectifs, la direction convective à 45° est une direction privilégiée pour le maillage triangulaire, tant que toutes les "diagonales" tracées dans un maillage quadrilatère régulier sont parallèles à la direction de propagation du signal.

Si nous procédons à la simulation sur ce type de maillage triangulaire régulier, avec une orientation "privilégiée" des hypothénuses, la méthode développée nous rend par ailleurs exactement la solution analytique.

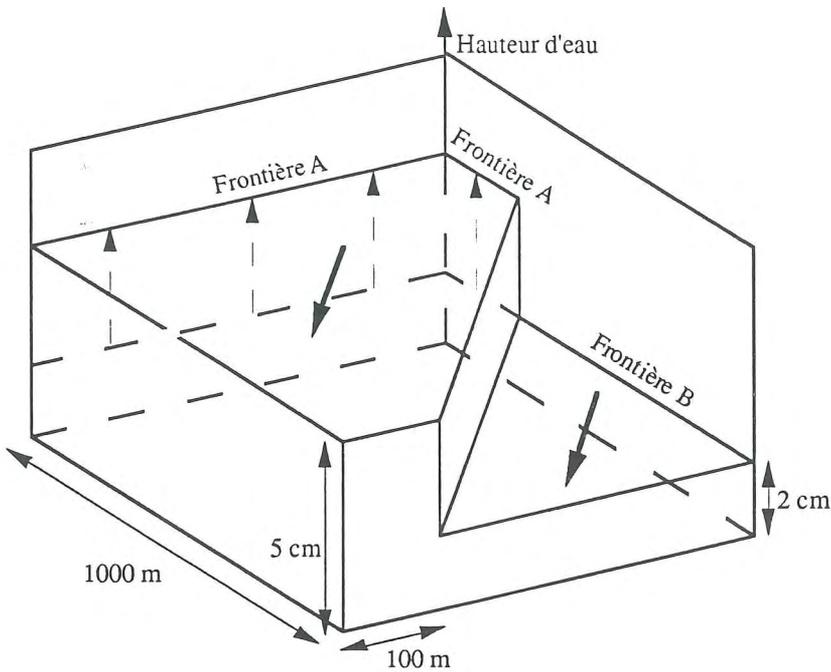


Figure VII.8.
Solution analytique du transport convectif

Nous avons voulu effectuer un test beaucoup plus exigeant vis-à-vis de la méthode en n'orientant plus toutes les hypothénuses des triangles de discrétisation selon la direction de propagation. Enfin, l'irrégularité dans les dimensions des côtés de chaque élément

achève de briser toute coïncidence bénéfique pour les résultats, en cumulant les difficultés de propagation et d'amplification d'erreur inhérentes à ce type d'application (Raymond et al).

Examinons d'abord la solution proposée au terme de 400 pas de 22 s par l'approche classique de Galerkin avec $\theta_t = 0,55$. La figure VII.9. prouve qu'il est très difficile d'exploiter cette solution pour en tirer la moindre information fiable.

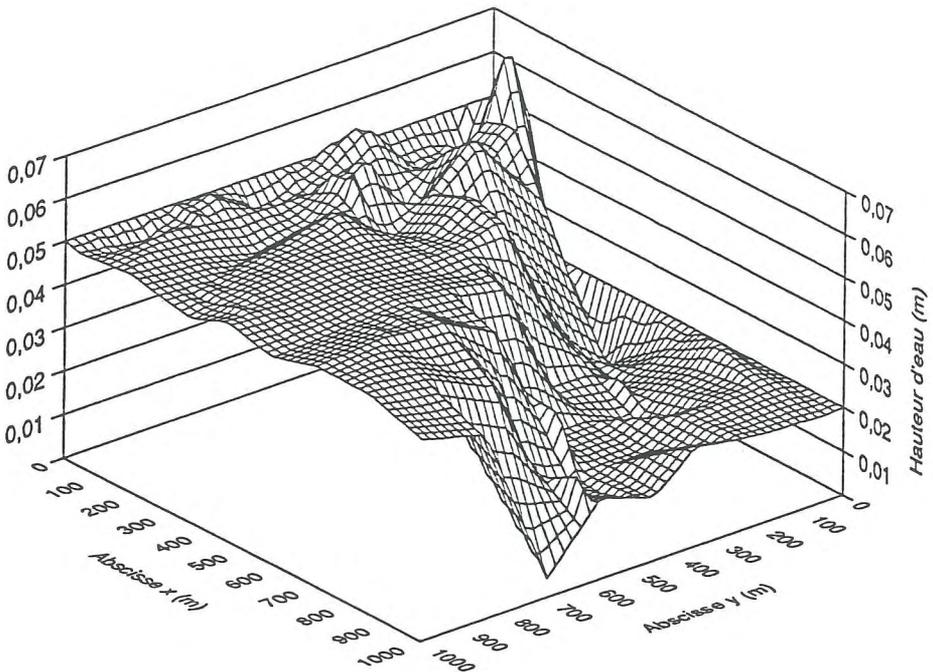


Figure VII.9.
Solution obtenue par la méthode classique de Galerkin sur un maillage irrégulier
constitué d'éléments triangulaires à 3 nœuds

La méthode proposée avec $\alpha'_a = 3$ restaure valablement la situation, dans les limites d'approximation numérique de la discrétisation utilisée. On notera l'influence bénéfique que produit l'inégal décentrement spatial d'un élément à l'autre puisqu'il efface les instabilités en maintenant une transition assez marquée (figure VII.10.).

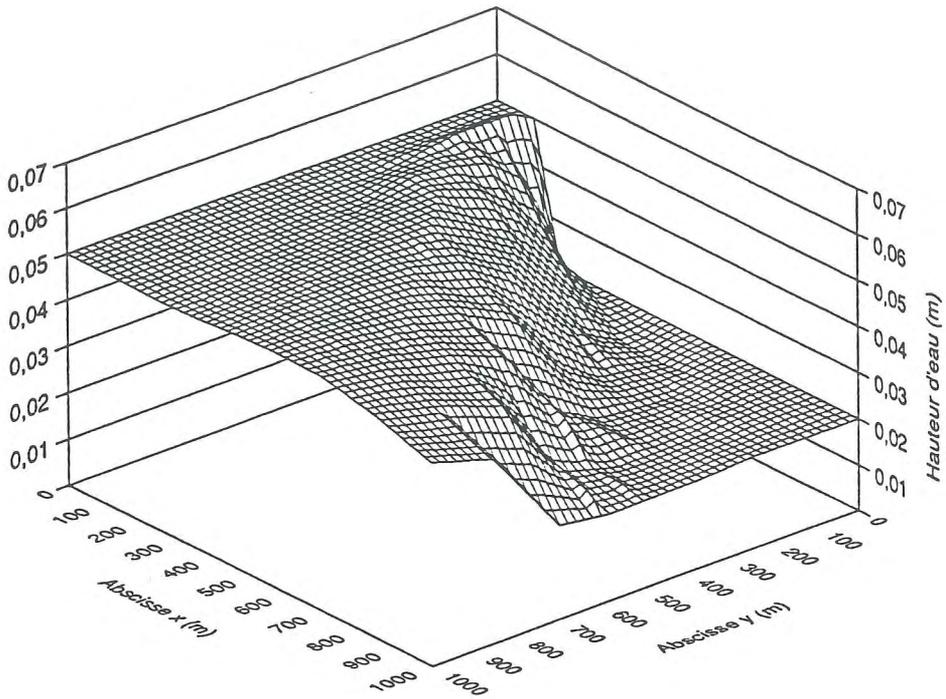


Figure VII.10.
Solution obtenue par la méthode proposée sur un maillage irrégulier
constitué d'éléments triangulaires à 3 noeuds

La qualité de l'effet sélectif est d'autant mieux mise en évidence lorsqu'on compare notre solution à celle de la méthode de Hughes et al pour un test comparable de convection pure. La figure VII.11. montre le lissage obtenu sur une discrétisation beaucoup plus favorable puisque constituée d'éléments carrés réguliers à 4 noeuds. La méthode qu'ils utilisent consiste à déplacer l'unique point d'évaluation de la matrice convective pour provoquer le décentrement.

Ces résultats encourageants indiquent également les limites de l'approximation causée par l'association de notre méthode à des éléments simples. L'indépendance des lignes fluides se réalise au mieux des degrés de liberté des éléments, ce qui explique aussi que le saut théorique ne puisse se résoudre dans ce cas limite qu'en une transition étalée sur quelques éléments contigus.

Nous tiendrons compte de ces enseignements dans la délimitation du domaine topographique qui influence un exutoire donné. En particulier, l'idée d'une bande de sécurité qui enserré le bassin étudié sera précisée lorsque nous aborderons les problèmes éventuels de taille mémoire.

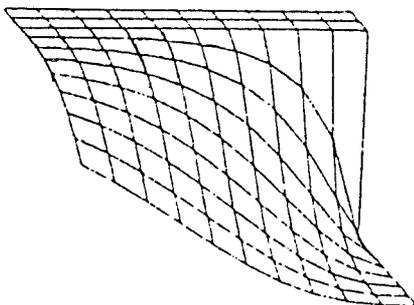


Figure VII.11.
Solution numérique obtenue par Hughes et al sur un maillage
constitué d'éléments carrés réguliers à 4 noeuds

VII.5. EVALUATION DES QUANTITES INFILTREES

Aussi longtemps qu'interviennent, en hydrologie de surface, des modèles dont la vitesse de déplacement des volumes d'eau est supposée n'être pas fonction de la hauteur de lame, le volume des apports globaux du monde extérieur à introduire dans les simulations peut correspondre au volume qui parvient à l'exutoire.

Cette situation particulière est caractéristique, par exemple, des modèles qui basent leur raisonnement sur les isochrones et dont les volumes d'eau impliqués dans la construction de l'hydrogramme final s'intègrent, se déplacent et disparaissent en toute indépendance les uns des autres.

Il n'est pas utile dans de telles circonstances de précipiter sur le modèle numérique des quantités qui s'infiltreront avant de parvenir au point étudié puisqu'elles n'influencent pas l'écoulement (Field et al).

La conséquence mathématique sur la grandeur globale $(r-i) \cos \theta_z$ est de pouvoir toujours la considérer comme une fonction positive ou nulle. A l'image de tout modèle partiel, il incombe simplement, pour le fixer, d'élaguer des pluies brutes toute contribution qu'intercepte la végétation, celle qui s'évapore ou, plus substantiellement, celle qui alimente l'écoulement souterrain.

Il est évident que cette définition de la pluie nette ne peut être maintenue dans notre modèle.

Avec cette même notion de prendre en compte toute quantité qui "intervient" dans l'écoulement, nous savons que les quantités précipitées qui vont s'infiltrer avant d'atteindre l'exutoire contribuent à alimenter momentanément la lame fluide, modifiant les équilibres de vitesse et de transport des volumes qui se maintiennent à la surface jusqu'au lieu étudié.

Il faut en toute logique intégrer une répartition temporelle et spatiale rigoureuse de l'infiltration, qui peut se manifester pour un modèle hydrologique unique sous deux présentations possibles :

- soit un diagramme global des contributions extérieures au système, qui incorpore par endroits des plages négatives lorsque l'infiltration prédomine,
- soit l'imposition d'un diagramme de pluie dégraissé des seules contributions qui ne parviennent pas jusqu'à la surface du sol, tout en conservant dans chaque élément une loi appropriée d'infiltration.

Il existe naturellement une autre variante, beaucoup exigeante en temps et en moyens, qui procéderait par couplage de deux modèles de calcul, hydrologie de surface et écoulement souterrain.

Avant d'envisager ces possibles modifications, d'en supporter les lourdes conséquences et d'en choisir la présentation la plus commode, voyons d'abord de quelle façon peut être synthétisé le processus.

VII.5.1. Approche théorique de l'infiltration

Cette étude se place dans le cadre d'un écoulement de surface Hortonien, c'est-à-dire celui qui naît d'une pluie dont l'intensité excède les capacités d'infiltration du sol.

Nous écartons par conséquent toute possibilité d'un écoulement de surface alimenté par les couches inférieures de terrain.

Lorsque la pluie débute sur un sol non-saturé d'eau, une large part s'infiltré et reconstitue le stock d'humidité du sol. Ce dernier se scinde en deux contributions qui diffèrent par leur comportement dans le temps :

- la rétention d'eau, stockage à long terme qui s'épuisera graduellement sous l'influence essentielle de l'évaporation,
- la détention d'eau, source d'alimentation des écoulements souterrains saturés ou non des couches proches de la surface, plus profondément des nappes aquifères et autres résurgences.

Le processus d'infiltration est d'autant plus délicat à appréhender qu'il implique de multiples intervenants comme la couverture de surface ou l'état du terrain (humidité, porosité, conductivité, ...).

Non seulement la valeur de certains paramètres caractéristiques est ardue à fixer dans les diverses circonstances de l'écoulement mais l'influence de certains facteurs est difficilement paramétrable.

La présence de couches diversement orientées et le manque d'homogénéité des propriétés, même au sein de volumes restreints de terrain achèvent de faire comprendre les difficultés d'une approche théorique.

Elle ne peut que refléter d'inévitables idéalizations et travailler par intégration sur des superficies raisonnables qui moyennent les propriétés utilisées dans une modélisation.

Pour notre part, ces remarques préliminaires l'inscrivent d'autant mieux dans la droite ligne de la démarche qui a prévalu lors de l'application de l'approximation cinématique à l'hydrologie de surface.

Rappelons d'abord brièvement la description de Show sur l'état du terrain qui subit le mouvement descendant de l'eau. Le profil du sol se présente comme l'empilement de quatre zones spécifiques d'humidité :

- la première jouxte la surface topographique d'écoulement superficiel et est complètement saturée,
- la deuxième est une zone de transmission qui se caractérise par une distribution assez uniforme de la teneur en humidité,
- la troisième distingue une zone d'humidification qui connaît une réduction progressive de son taux d'humidité jusqu'au front d'humidification, discontinuité marquée entre la troisième zone et le sol sec qu'elle domine.

Selon Show, cette transition brutale se situe, au gré des propriétés des sols, entre quelques centimètres et quelques mètres sous la surface. Cette succession démontre surtout la nécessité de ne faire aucune hypothèse préliminaire sur la saturation ou la non-saturation du milieu qui est le siège de l'écoulement.

Abordons le phénomène en le supposant à une profondeur suffisamment faible pour que la masse volumique de l'eau puisse être considérée comme constante et que la porosité soit indépendante de la pression exercée par le fluide.

Nous suivons un raisonnement similaire à celui du paragraphe II.3., en travaillant cette fois avec un volume de contrôle immobile V.

L'effet du différentiel de débit qui pénètre par les trois faces du volume élémentaire contribue à modifier le taux d'humidité du terrain (ϕ) qui s'y trouve imaginairement emprisonné. Pour un volume arbitraire, il vient finalement :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{VII.9})$$

Dans l'optique d'une certaine globalisation du processus, nous travaillons sur un volume de terrain V dont les dimensions excèdent largement les dimensions des vides et des grains du sol.

Dans ces conditions, Darcy a montré que la vitesse de percolation est proportionnelle à la perte de charge par unité de longueur S_f :

$$u = K_d S_f \quad (\text{VII.10})$$

K_d étant la conductivité hydraulique du sol

Plaçons-nous à présent dans les conditions très limitatives de symétrie géométrique et d'homogénéité des propriétés du système qui assurent un écoulement dans la seule direction verticale.

En désignant la charge totale par H , il vient :

$$u = -K_d \frac{\partial H}{\partial z} \quad (\text{VII.11})$$

Cette équation, qui résulte d'un équilibre de forces, inclut en sus des habituelles composantes de gravité et de frottement, une contribution caractéristique des écoulements insaturés qui porte le nom de force de succion.

Cette attraction électrostatique des particules d'eau à la périphérie des grains de sol donne un surcroît d'énergie au fluide que nous répercutons sous la forme d'une composante supplémentaire ψ à inclure dans la charge totale H .

Bear donne quelques ordres de grandeur pour la montée capillaire, qui varie depuis 2 à 5 cm pour un gros sable, 0,70 à 1,5 m pour un limon jusqu'à 2 à 4 m pour une argile.

En explicitant H par ses contributions de gravité et de succion et en introduisant l'expression de Darcy dans la continuité, on obtient la forme unidimensionnelle de l'équation de Richard :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_d \frac{\partial (\psi + z)}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_d \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} + K_d \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(D_d \frac{\partial \phi}{\partial z} + K_d \right) \quad (\text{VII.12})$$

Cette expression exploite la dépendance de la succion par rapport au taux d'humidité du sol. Cette corrélation semble naturelle lorsqu'on songe que les particules d'eau s'amoncellent autour des grains de terrain, rejetant l'air au centre des vides. Lorsque ces derniers se combent par saturation progressive du milieu, l'effet s'évanouit complètement par absence de surface libre d'attraction.

Il existe quelques expérimentations numériques basées sur la résolution de l'équation de Richard. Smith et al, par exemple, couplent cette équation à un modèle cinématique unidimensionnel. Leur méthode de résolution par différences finies donne la possibilité de traiter une cascade de plans supposés indépendants.

Les simulations qu'ils proposent s'intéressent à des plans uniformes pour une comparaison aisée avec des mesures de laboratoire. Si les résultats attestent d'une bonne correspondance générale, les auteurs mentionnent un choix malaisé des valeurs des paramètres et de l'expression de leurs interdépendances.

Lorsqu'on songe qu'ils ne se réfèrent qu'à une tranche de terrain à l'épaisseur et aux propriétés uniformisées par une reconstitution artificielle, que penser de l'utilité d'une modélisation (tridimensionnelle dans notre cas) des couches superficielles des terrains naturels que nous serions amenés à rencontrer, sinon que la précision les résultats obtenus par rapport à la réalité risque d'être disproportionnée en regard du coût numérique.

Il existe une voie beaucoup plus raisonnable à laquelle se rallie une majorité d'hydrologistes et qui consiste à recourir à une expression qui intègre l'effet des couches sous-jacentes en une loi d'infiltration au niveau de la surface.

L'approche théorique est réalisable par (VII.12) en se maintenant dans des conditions restrictives de comportement des paramètres. Ainsi, dans le cas où K_d et D_d sont considérés comme des constantes, il est possible d'intégrer (VII.12) pour obtenir l'évolution temporelle de la distribution sur la profondeur du taux d'humidité ϕ .

La reconstitution analytique de l'infiltration à la surface, en utilisant ce résultat, montre qu'on obtient une forme équivalente à celle que proposait Horton en 1933. Elle évoque une décroissance exponentielle de l'infiltration, variant d'une vitesse initiale (i_0) jusqu'à la conductivité hydraulique (K_d), selon un rythme caractéristique des propriétés du sol :

$$i = K_d + (i_0 - K_d) e^{-fHt} \quad (\text{VII.13})$$

Cette expression fait l'objet d'une utilisation assez intensive dans les modèles physiques (Motta et al, Leu et al, par exemple). La fiabilité des valeurs instantanées qu'elle donne est, bien plus que pour la méthode précédente, à la mesure des efforts numériques consentis pour l'intégrer dans la modélisation.

Il faut remarquer à ce sujet que le cadre pratique d'utilisation de cette formule dépasse nettement les restrictions successives introduites pour la rétablir sur base de l'équation de Richard.

Il existe par ailleurs une formulation plus récente et moins restrictive sur les hypothèses puisqu'elle autorise une dépendance de K_d et D_d par rapport au taux d'humidité du sol ϕ .

Philip (1969) a résolu l'équation de Richard en exprimant la solution sous forme d'une série infinie, dont on utilise traditionnellement la forme tronquée suivante :

$$i = \frac{1}{2} S_i t^{-1/2} + K_d \quad (\text{VII.14})$$

S_i porte le nom de sorptivité

Les formules (VII.13) et (VII.14) supposent que les apports extérieurs suffisent à satisfaire à tout moment les capacités d'infiltration du sol. Dans la pratique, cette

hypothèse est rarement satisfaite, particulièrement au début des précipitations.

Pour contourner cette difficulté, on opère une correction sur le temps qu'explique la figure VII.12. dans le cas d'une pluie d'intensité constante.

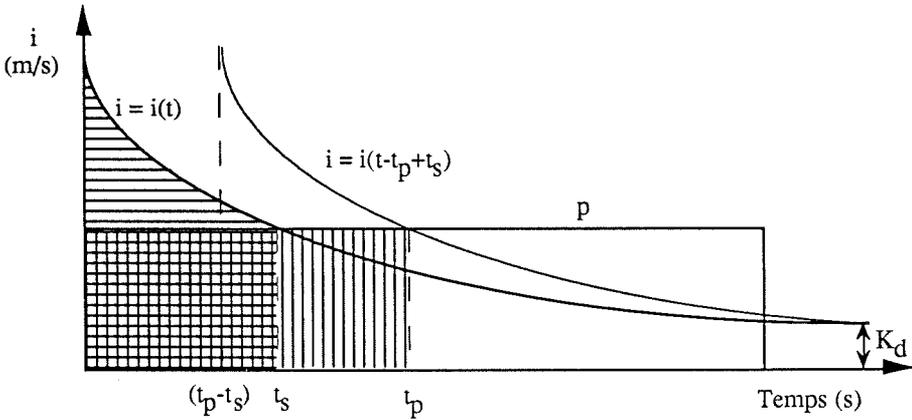


Figure VII.12.

Loi d'infiltration pour une pluie d'intensité inférieure aux capacités d'infiltration du sol

L'écoulement superficiel ne peut débuter que lorsque l'intensité des précipitations égale ou excède les capacités d'infiltration du sol. Lorsqu'il débute en $t = t_p$, on vérifie par conséquent :

$$i(t_p) = p \quad (\text{VII.15})$$

A cet instant, tout le volume précipité, qui s'est complètement infiltré, doit égaliser l'infiltration cumulée de la courbe théorique :

$$\int_0^{t_s} p \cdot dt = \int_0^{t_s} i(t) dt \quad (\text{VII.16})$$

Dans ces conditions, on obtient les lois d'infiltration généralisées suivantes :

- Pour la loi d'Horton :

$$i = K_d + (i_0 - K_d) e^{-f_H [t - (t_p - t_s)]} \quad (\text{VII.17})$$

avec

$$t_s = -\frac{1}{f_H} \ln \frac{p - K_d}{i_o - K_d} \quad (\text{VII.18})$$

et

$$t_p = \frac{1}{p} \left(K_d t_s + \frac{i_o - K_d}{f_H} (1 - e^{-f_H t_s}) \right) \quad (\text{VII.19})$$

- Pour la loi de Philip :

$$i = \frac{1}{2} S_i [t - (t_p - t_s)]^{1/2} + K_d \quad (\text{VII.20})$$

avec

$$t_s = \left(\frac{S_i}{2(p - K_d)} \right)^2 \quad (\text{VII.21})$$

et

$$t_p = K_d t_s + S_i t_s^{1/2} \quad (\text{VII.22})$$

La forme généralisée de la solution de Philip a la préférence de plusieurs auteurs (Maller et al, Cundy et al, par exemple) même s'il s'avère plus aisé de caler des valeurs sur les paramètres de la formule généralisée d'Horton, sur base d'une expérience plus significative extraite de la littérature.

Cet argument principal nous fait préférer cette formulation plus ancienne en minimisant toutefois l'importance du choix qui n'a des répercussions mineures par sa forme qu'au travers de la programmation de la matrice locale.

Notons encore que le choix d'une formule de ce type implique que nous prenions le parti d'intégrer l'infiltration à l'élément lui-même plutôt que de la retrancher des données brutes des précipitations. Cette option nous paraît préférable pour la flexibilité accrue qu'elle offre dans la modélisation de surfaces et de terrains spatialement hétérogènes, où il est beaucoup plus commode d'associer certaines propriétés à un élément topographique plutôt qu'aux contributions extérieures qui le concernent.

En prolongement des considérations sur les effets du martellement pluvieux, Foster et al ont établi que l'infiltration diminue lorsque les précipitations cessent. En examinant la microtopographie, ils ont effectivement constaté que les micropics topographiques très locaux ne contribuent plus à la surface d'infiltration en n'étant plus immergé et en ne recevant plus directement par les pluies de quantités à infiltrer.

Soulignons enfin qu'il existe une multitude d'expressions subsidiaires comme celle de Smith-Parlange (Palacios et al), celle de Green-Ampt (Marcus et al), basée sur une

approche physique plus approximative mais qui rend une solution analytique (Show), enfin les lois empiriques comme celle de Holtan et Overton (Huggins et al) et, de façon générale, toutes celles qui s'appuient sur la seule expérimentation d'échantillons de terrain correspondants (Wooding par exemple).

VII.5.2. Conséquences de l'infiltration sur l'écoulement

Nous mettrons mieux en évidence les importantes modifications à envisager en rappelant tout d'abord les conséquences implicites que nous avons exploitées aussi longtemps que les contributions extérieures au système étaient positives.

VII.5.2.1. Simulations en l'absence d'infiltration

La ligne de courant qui suit la plus grande pente d'une topographie quelconque à partir d'un point donné de la ligne de crête a toujours été supposée s'étaler au cours du temps en un long filet d'eau ininterrompu jusqu'à l'aval. Jamais ne fut évoquée la possibilité en phase instationnaire d'un appel d'eau temporaire qui viendrait à assécher un quelconque endroit à l'amont de la topographie.

La présence d'un exposant fractionnaire dans la relation vitesse-hauteur impose à cette dernière de n'être pas négative en pleine correspondance avec la réalité physique. Bien plus, l'absence de toute condition limite au sein même du bassin, qui indiquerait que l'écoulement s'y est tari et qu'on débute une nouvelle ligne d'écoulement, semble précisément indiquer qu'à l'intérieur des limites du domaine, la hauteur d'eau demeure positive.

Pour le prouver en topographie quelconque unidimensionnelle, il suffit d'écrire l'équation générale (IV.7) sous la forme suivante :

$$\frac{1}{(m+1) a h^m} \frac{\partial}{\partial t} (a h^{m+1}) + \frac{\partial}{\partial x} (a h^{m+1}) = r' \quad (\text{VII.23})$$

En bidimensionnel, l'équation (VII.4) peut être convertie en une forme similaire à (VII.23) par les considérations suivantes (Smolderen) :

$$(\text{VII.4}) \equiv \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (a' h^{m+1})}{\partial s} + a' h^{m+1} \frac{\partial \theta_s}{\partial n} = r'' \quad (\text{VII.24})$$

en se référant aux notations de la figure VII.1.

Si on définit η par la relation

$$\eta = \exp \left(\int \left\{ \frac{\partial \theta_s}{\partial n} \right\}_{n=0} ds \right) > 0 \quad (\text{VII.25})$$

il vient :

$$(\text{VII.4}) \equiv \frac{1}{(m+1) \eta a' h^m} \frac{\partial}{\partial t} (\eta a' h^{m+1}) + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial s} (\eta a' h^{m+1}) = r'' \quad (\text{VII.26})$$

L'analogie entre (VII.23) et (VII.26) est manifeste, avec l'intervention d'un paramètre η dont on peut tirer l'interprétation géométrique suivante :

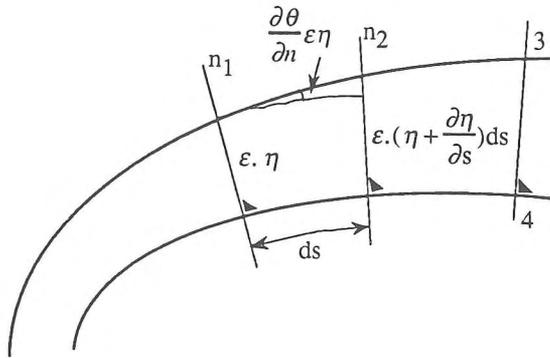


Figure VII.13.
Interprétation géométrique de η

On tire de la figure VII.13. :

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} \epsilon \eta ds = \frac{\partial \eta}{\partial s} ds \quad (\text{VII.27})$$

La fonction $\eta(s)$ est à l'image de l'évolution de la distance 3-4, ce qui explique que $\eta = 1$ nous rende l'approche unidimensionnelle (VII.23).

Nous raisonnons par conséquent dans le cadre général de l'équation (VII.26) pour la transformer le long de courbes caractéristiques du plan (s, t) en la relation :

$$\frac{d}{dt} (\eta a' h^{m+1}) = (m + 1) \eta a' h^m r'' \quad (\text{VII.28})$$

le long de

$$\frac{ds}{dt} = (m + 1) a' h^m \quad (\text{VII.29})$$

avec pour condition initiales $(\eta a' h^{m+1})|_{t=0} = 0 \quad (\text{VII.30})$

et pour conditions limites $(\eta a' h^{m+1})|_{s=0} = 0 \quad (\text{VII.31})$

La positivité des diverses fonctions η , a' (à condition naturellement de respecter les définitions habituelles d'un bassin versant), r'' , en seule présence de précipitations, assure à la grandeur $(\eta a' h^{m+1})$ de ne pas décroître sur l'ensemble du domaine du plan (s, t) balayé par le faisceau de caractéristiques (ces dernières progressent à nouveau d'amont vers l'aval pour les t croissants, comme le montre VII.30).

Cette conclusion garantit une hauteur d'eau positive aux phénomènes instationnaires qui se développent à tout moment de l'averse sur le bassin versant. L'éventuelle présence de chocs ne bouleverse en rien cette constatation puisqu'une conservation de débit est assurée au travers de ces discontinuités.

Les pluies cessent et le système entame alors sa décrue.

La caractéristique issue de la crête de partage du bassin va alors progressivement porter la valeur $\eta a' h^{m+1} = 0$ vers l'aval en restreignant du même coup les dimensions de la superficie d'écoulement. Toutefois, la progression des autres caractéristiques, supportant chacune leur constante, nécessairement positive, du produit $(\eta a' h^{m+1})$, confirme que la certitude d'une hauteur positive est sauvegardée à l'intérieur de ce bassin évolutif.

Comparons ces bases théoriques avec l'expérience numérique acquise sur bassins imperméables en insistant sur deux aspects marquants :

- D'abord, ce rappel théorique établit définitivement que la présence de hauteurs d'eau non significatives (nulles ou négatives) constitue une preuve flagrante de mauvaise qualité des résultats. Or, Il n'est pas rare de voir avorter certaines simulations d'écoulement sur topographies même peu tourmentées par apparition impromptue de solutions de ce type lorsqu'on les aborde par la théorie classique de Galerkin. Les bienfaits de l'approche modifiée sont sur ce point, plus que significatifs.
- Revenons ensuite sur la progressive réduction des dimensions du bassin concerné en phase de décrue.

Les réalités numériques des modélisations n'ont jamais imposé de déplacer progressivement les conditions amont pour en tenir compte. En réalité, la hauteur d'eau calculée sur les points situés le plus à l'amont diminue et prend des valeurs faibles sans s'annuler jusqu'au moment où la modélisation est volontairement interrompue.

En d'autres termes, la condition fixe sur la crête de partage du bassin suffit en règle générale à poursuivre la modélisation de la phase de tarissement jusqu'à un stade où la majeure partie du volume précipité s'est écoulée à l'exutoire.

L'ensemble de ces faits explique qu'avec une méthode de résolution appropriée, le problème des conditions aux limites et des questions y attenantes n'ait pas fait l'objet de beaucoup d'attention.

VII.5.2.2. Simulations sur terrains réels perméables

Cette mise au point indique d'autant mieux le type d'incident qui peut survenir en présence d'infiltration. La représentation d'une distribution quelconque des propriétés du terrain et de son sous-sol, couplée aux topographies et aux précipitations quelconques que la nature peut nous réserver, va être à l'origine de l'interruption et de la naissance de filets ruisselants au beau milieu des surfaces considérées.

Il n'est pas difficile d'imaginer un scénario où les premières gouttes percutent une surface localement imperméable pour ruisseler et s'infiltrer sur les terrains absorbants des zones aval. En un autre lieu, une forte intensité de pluie locale porte le sol d'une partie du bassin à saturation et y fait naître un écoulement superficiel. La persistance spatiale et temporelle sature progressivement l'ensemble qui retrouve son unité d'écoulement pour se briser à nouveau dans la décrue par hétérogénéité des propriétés.

Le bassin versant devient, dans ces conditions, l'ensemble des surfaces qui sont susceptibles, au sens topographique, d'alimenter le débit superficiel à l'exutoire.

Cette évolution vers une meilleure correspondance avec les réalités du terrain impose une nouvelle évolution substantielle des capacités numériques du logiciel à prendre en compte non seulement les lois d'infiltration mais surtout les effets de leur introduction.

L'expérience montre en effet qu'il est totalement exclu de laisser évoluer librement le système vers des tarissements locaux et temporaires de l'écoulement superficiel, même accompagnés de quelques artifices numériques, sans répercussions préjudiciables pour le bilan des volumes d'eau impliqués.

Nous allons plutôt infléchir le système en développant une méthode d'éléments couvrants-découvrants que nous nommerons méthode à balayages multiples.

VII.5.2. Méthode à balayages multiples

La méthode de discrétisation temporelle par pas constants empêche d'espérer faire

coïncider les instants d'évaluation aux moments précis où la combinaison instantanée de l'infiltration locale et des appels d'eau vers les zones aval parvient à assécher, ne fût-ce que temporairement, les points de discrétisation.

Considérons par exemple que la résolution du dernier système d'équations généré nous rend une ou plusieurs valeurs nodales de hauteur négatives.

Devant l'étroite relation qui lie hauteur et vitesse, nous avons choisi de ne pas laisser se découvrir partiellement l'élément et de réagir à cette situation en bloquant adéquatement certains noeuds à une hauteur nulle.

Les éléments finis concernés reportent alors leur recherche d'un bilan volumique équilibré sur les degrés de libertés rémanents. Cette opération ne peut être menée avec succès que si elle est provisoire, tant dans le temps que dans le processus itératif de résolution d'un état instantané :

- La remise en cause de l'annulation de hauteur en un point est évidente d'un pas temporel à l'autre si on considère le caractère instationnaire de l'écoulement superficiel et des lois d'infiltration.

La naissance instantanée d'une ligne d'eau en un point peut aussi être le fait d'une reprise ou d'une accalmie locale des précipitations. La condition de hauteur nulle à la limite amont de chaque ligne de courant peut donc faire l'objet d'un déplacement géographique à chaque pas calculé.

- Dans le calcul itératif mené à chaque progression temporelle, l'apparition de hauteurs négatives peut être le fait d'un "chemin de convergence" qu'emprunte une inconnue nodale qui finit par se stabiliser à une hauteur positive. Dans ces conditions, le gel d'une imposition de hauteur nulle au sein du bassin doit être évité par une perpétuelle réévaluation de l'utilité des blocages au cours de l'ensemble du processus itératif lié à l'évaluation d'un pas temporel.

En conséquence, l'infléchissement du système se voudra le moins contraignant possible et réalisé avec une constante remise en cause des impositions à chaque stade du calcul.

Voyons comment concilier ces impératifs dans la logique de résolution.

Nous nous attelons à la recherche de la solution en $t+\Delta t$, celle en t étant le fruit du $(n-1)^{\text{ème}}$ pas de temps calculé. En conformité avec la description donnée précédemment du processus itératif propre à chaque pas, $(i-1)$ itérations ont déjà été entreprises, qui ont procuré une approximation de la solution qui ne répond pas aux critères de précision imposés.

La $i^{\text{ème}}$ itération débute alors en s'aidant de cette dernière solution approchée et de la solution en t pour construire la matrice jacobienne du système. Sa résolution, qui considère pour noeuds imposés ceux des conditions aux limites perpétuelles (lignes de crête), constitue la première tentative de l'itération i en vue de déterminer la $i^{\text{ème}}$ correction à porter à l'approximation précédente du vecteur solution.

Avant d'accepter et d'appliquer cette correction, l'ensemble du champ des inconnues va subir un balayage pour tester si elle remet en cause la positivité des valeurs. Dans le cas où les noeuds névralgiques relevés n'appartiennent pas à la liste des conditions imposées à la tentative précédente, la correction est jugée inopportune.

Une nouvelle évaluation du système est entreprise, basée sur une liste d'impositions réactualisée avec les nouveaux noeuds relevés. Le processus est repris autant de fois qu'est décelée une modification dans la liste consécutive au balayage. Enfin, lorsque cette dernière se stabilise, la correction est adoptée et subit les tests usuels de convergence.

La séquence des opérations qui suivent ce terme de la $i^{\text{ème}}$ itération reprend alors le cours précédemment décrit, par une $(i+1)^{\text{ème}}$ itération ou un passage ou pas de temps suivant $(n+1)$.

VII.6. CONCLUSION

A ce stade de développement, les potentialités de la méthode englobent les buts initiaux fixés en matière de modélisation hydrologique pure (la propagation des hydrogrammes élémentaires en cours d'eau fera l'objet d'une approche spécifique ultérieure). La mise en place d'une extension appropriée de la méthode en quasi-tridimensionnel vient en effet de nous libérer des dernières contraintes restrictives en matière topographique.

Il ne faut toutefois pas perdre de vue que si cette généralisation fructueuse se base sur un examen préalable en unidimensionnel, elle en conserve et en généralise également les impératifs en matière de définition des bassins versants et de respect de la continuité de débit aux noeuds.

Si elle élimine également tout carcan en matière de prise en compte des spécificités du sol d'un élément à l'autre, on se souviendra là aussi qu'il s'agit bien de propriétés moyennées sur l'élément, parfois sans correspondance avec les hétérogénéités locales que le terrain naturel peut développer sur des échelles infiniment plus réduites.

Cette globalisation prévaut également dans le modèle évolutif mis en place pour reproduire l'action de l'infiltration sur l'écoulement de surface. Son action indissociable peut néanmoins tenir compte, à l'échelle des éléments, des caractéristiques spécifiques du sous-sol.

Enfin, la méthode exploite la flexibilité inhérente aux éléments finis pour considérer l'inégale distribution tant temporelle que spatiale des pluies, répondant ainsi à la démonstration, dans la littérature, de la prépondérance de ces facteurs sur des bassins réels (Marcus).

Nous sommes à même, théoriquement, de prendre en compte et de répercuter de façon rationnelle toute modification susceptible d'influencer la forme des hydrogrammes élémentaires qui se déversent dans la rivière.

Le dernier exemple du chapitre rappelle que la mise en évidence et la quantification des

répercussions d'une action sur le bassin constitue un des points forts de l'approche. L'application demeure cependant à ce stade purement didactique par les dimensions du bassin traité et la transformation de couverture qui y est envisagée.

Considérons la surface topographique de la figure VII.14., dont la projection en plan apparaît à la figure VII.15. Elle couvre une superficie totale d'approximativement 34 hectares, avec une dénivellation totale de 110 m, et est supposée, à ce stade du travail, alimenter une retenue qui est bordée par les segments représentés en traits renforcés sur les figures VII.14., 15.

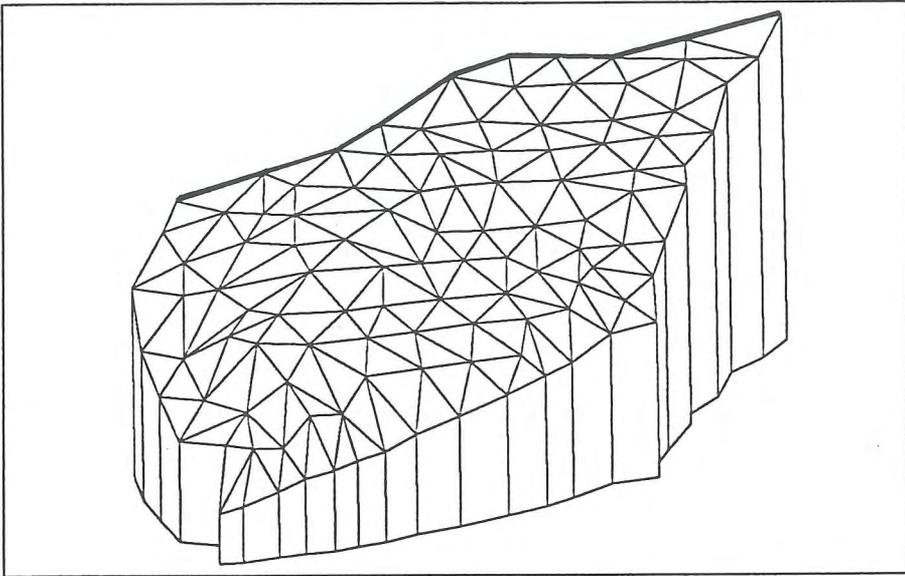


Figure VII.14.
Représentation tridimensionnelle de la topographie considérée

Nous nous proposons de répercuter l'effet sur les débits qui se déversent dans la retenue de travaux qui consisteraient à imperméabiliser, avec une couverture bitumineuse, la surface hachurée à la figure VII.15., soit approximativement 17% de la superficie prise en compte. Cet impact sera plus particulièrement étudié sur une pluie isolée de $15 \cdot 10^{-6}$ m/s qui se poursuit durant 1200 s .

Initialement, la couverture naturelle du bassin lui assure un coefficient de frottement de Manning de $n = 0,5$, tandis que l'état d'humidité du terrain, au début de l'averse, lui donne des propriétés d'infiltration qui sont répercutées par les valeurs caractéristiques suivantes de la loi d'Horton : $i_0 = 15 \cdot 10^{-6}$, $K_d = 5 \cdot 10^{-7}$, $f_H = 0,0013$.

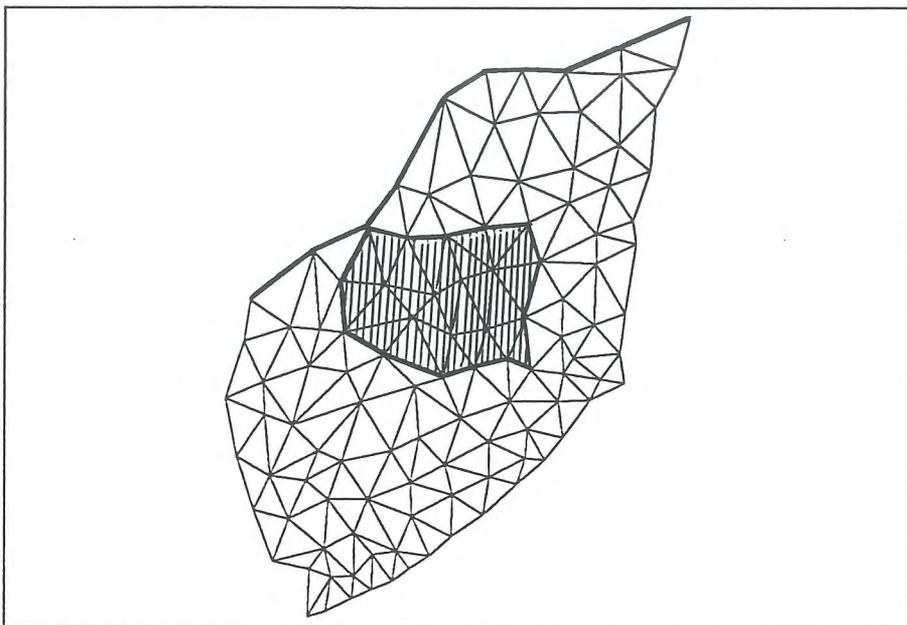


Figure VII.15.
Projection en plan de la topographie considérée et des surfaces
impliquées dans les modifications de la couverture

La surface impliquée dans les aménagements envisagés voit non seulement ses capacités d'infiltration complètement annulées ($i_0 = K_d = 0$), mais le fini de surface de la couverture artificielle diminue localement très significativement le coefficient de frottement, avec une valeur modérée de $n = 0,02$.

Conformément aux discussions précédentes sur la façon d'assurer la continuité de débit aux noeuds, nous agirons préventivement sur les données topographiques afin de disposer, avant la simulation proprement dite, d'un champ de pentes continu sur le domaine.

Remarquons encore que la délimitation du domaine étudié a été effectuée de manière à rencontrer aux frontières autres que la ligne de crête, des "pentes sortantes" par rapport aux segments frontières. Cette façon de travailler nous garantit de ne disposer, à l'intérieur du domaine, que de lignes de courant ininterrompues depuis leur origine à la ligne de crête, seul lieu d'imposition de conditions aux limites. Nous reviendrons en détails sur cet aspect primordial au chapitre VIII.

Les conséquences des précipitations sur les deux configurations envisagées sont illustrées à la figure VII.16. qui reprend l'évolution temporelle de la somme des débits normaux aux

segments bordant la retenue, c'est à dire l'ensemble des déversements instantanés dans la retenue. On constate l'effet prépondérant de l'imperméabilisation, ainsi que l'effet de la localisation, à l'amont du bassin, de la zone impliquée dans les transformations, qui provoque un déplacement temporel du pic de débit.

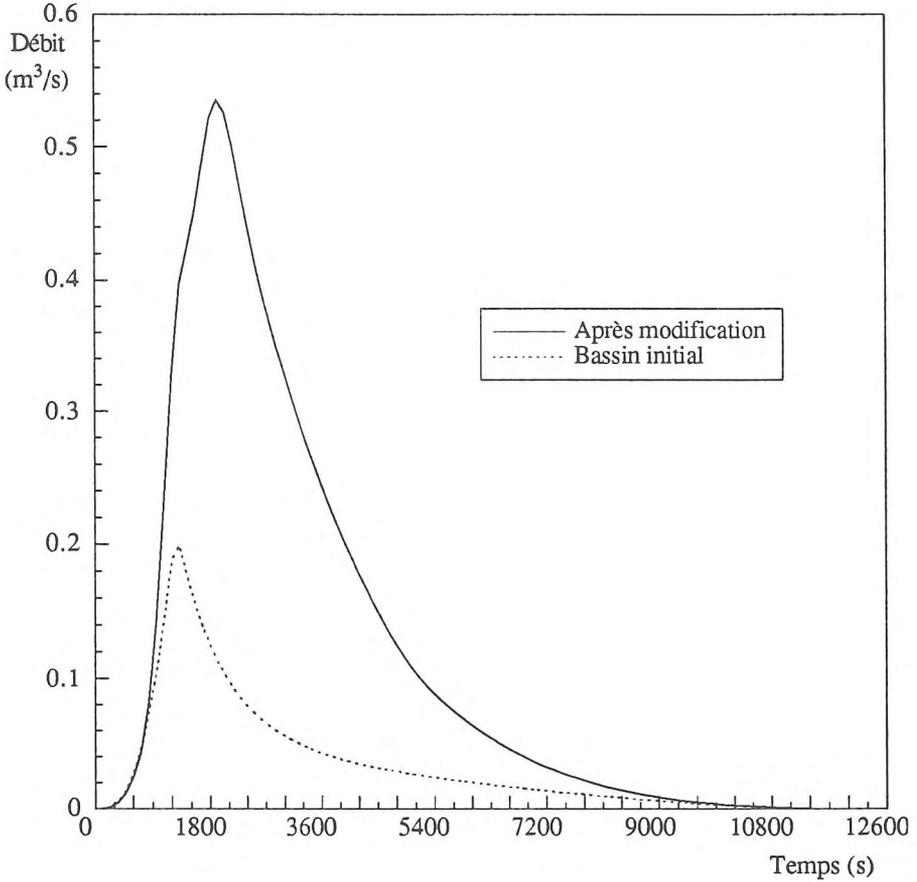


Figure VII.16.
Evolution temporelle de la somme des débits normaux aux segments bordant la retenue, déversés avant et après modification

Cet ensemble de perturbations réapparaît à la figure VII.17., qui reprend l'évolution temporelle des volumes cumulés pénétrant dans la retenue. Cette globalisation des résultats, qui sont fournis en réalité pour chaque segment frontière, fait mieux ressortir les nombreuses possibilités de quantification directe des projets étudiés. Pour peu que l'on

dispose de données réalistes sur une caractérisation initiale du bassin, le logiciel laisse une grande latitude dans l'éventail des modifications qui peuvent modélisées, dans l'optique générale d'une aide à la décision.

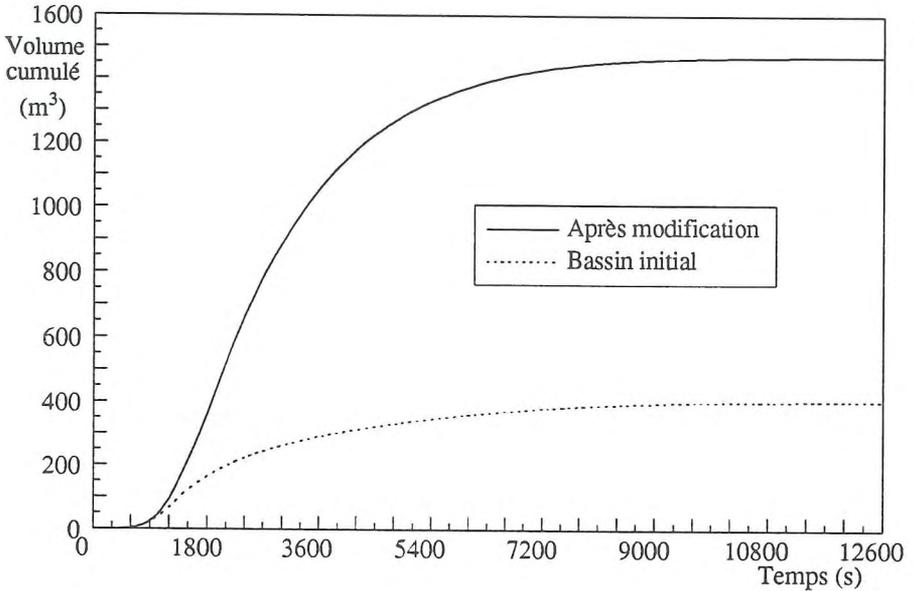


Figure VII.17.
Evolution temporelle du volume cumulé déversé dans la retenue
avant et après modification

Cette première analyse d'une topographie réelle demeure particulièrement modeste avec un nombre total de 111 noeuds, pour un maillage de 183 triangles. Quant à la caractérisation des surfaces rencontrées, elle se veut particulièrement simple avec des propriétés initiales uniformes sur l'ensemble du terrain. Enfin, nous avons choisi, par simplicité des données à introduire, de répercuter les effets d'une pluie spatialement et temporellement constante. Cet ensemble de circonstances fait dès lors mieux comprendre que la prise en compte des dimensions d'un cas réel va immanquablement rencontrer les écueils habituels à ce type d'approche :

- des exigences respectables en mémoire et temps de calcul,
- de façon peut être encore beaucoup plus flagrante pour l'utilisateur, la masse et le caractère rébarbatif des données, depuis la délimitation et le traitement éventuel des surfaces concernées jusqu'aux propriétés morphologiques à introduire.

C'est à ces tâches, annexes en théorie, mais primordiales à l'utilisation, et à ces éventuelles limitations que nous allons à présent nous intéresser.

Chapitre VIII

Ordonnancement des phases préalables aux simulations d'écoulement hydrologique

SOMMAIRE

- VIII.1. Introduction*
- VIII.2. Développement d'un mailleur automatique*
- VIII.3. Délimitation d'un bassin versant constitué de facettes planes triangulaires*
- VIII.4. Réalisation de la continuité de débit aux noeuds*
- VIII.5. Introduction optionnelle d'un fractionnement supplémentaire des simulations d'écoulement hydrologique*
- VIII.6. Conclusion*

VIII.1. INTRODUCTION

A peine les objectifs du modèle de calcul hydrologique viennent-ils d'être rencontrés, qu'il nous faut déclarer le logiciel peu habilité à traiter tel quel des applications de taille importante.

En effet, une simulation d'écoulement hydrologique (aussi générale qu'elle puisse être modélisée) n'est que l'aboutissement d'une succession de phases préparatoires que des contingences pratiques, mises en évidence par des simulations réelles, nous empêchent de passer sous silence.

Quelques applications significatives suffisent en effet pour mesurer à quel point il est illusoire d'espérer réaliser rapidement et valablement les étapes préalables sans aide graphique et autres procédures d'automatisation.

En plus de la commodité, du gain de temps et d'une réduction sensible du risque d'erreur dans l'énorme quantité de données requises, ces phases doivent prendre en compte les particularités des règles de zones d'influence liées à l'approche simplifiée, afin de lui présenter un cadre d'application approprié.

Rappelons d'abord de quelle chronologie émerge une topographie susceptible d'être soumise à l'approche hydrologique ici développée.

A l'origine, le nuage tridimensionnel de points de terrain donnés englobe nécessairement le bassin versant à étudier, même si les limites précises de ce dernier sont à ce moment totalement indéterminées.

La première opération naturelle consiste à appliquer un maillage sur les points, ne fût-ce que pour obtenir un premier aperçu du terrain à analyser. Dans le cadre, précédemment fixé, d'un maillage triangulaire, la définition consécutive de facettes planes permet accessoirement de se faire une idée approximative des zones concernées par la représentation des plus grandes pentes.

Le maillage constitue la base de travail des opérations ultérieures dont celle qui consiste à définir un champ continu de pentes lorsque cette option est choisie pour assurer la continuité de débit aux noeuds (voir chapitre IV).

Il convient ensuite de fixer précisément les frontières en amont du bassin, lieu d'imposition des conditions aux limites d'un problème bien posé.

Accompagnée des précisions indispensables à la caractérisation des terrains rencontrés, la géométrie est à même de subir une modélisation, pour autant que cette dernière ne

nécessite pas des ressources informatiques incompatibles avec les caractéristiques de la machine qui la prend en charge.

Dans cette éventualité, l'approche théorique autorise un morcellement de la simulation, dont nous précisons et automatiserons des règles compatibles avec les approximations numériques inhérentes à la méthode de résolution (voir chapitre précédent).

La suite des développements reprend chacun de ces stades pour surmonter les dernières difficultés et limiter l'intervention de l'utilisateur au contrôle des conséquences des choix possibles.

La mise en place de ces outils périphériques dote la méthode de tous les attributs indispensables pour conjuguer performance et commodité d'utilisation.

VIII.2. DEVELOPPEMENT D'UN MAILLEUR AUTOMATIQUE

L'usage de tels outils est aujourd'hui répandu en combinaison avec la technique des éléments finis afin d'alléger la tâche longue et toujours ardue de discrétisation du domaine d'intérêt.

Cet avantage est d'autant plus appréciable dans notre cas que la surface à discrétiser risque de déborder parfois considérablement des limites du domaine concerné par l'écoulement. Ajoutons par ailleurs qu'il n'est pas exclu de répéter cette opération à divers stades de la préparation (fixation des pentes ou des conditions limites).

Face à l'abondance de publications sur des méthodes efficaces et à la présence sur le marché de logiciels spécialisés dans ces tâches (tout spécialement en topographie), le développement de notre propre code se justifie par le désir de composer un ensemble homogène, constitué de modules parfaitement intégrés. Cette perspective a conditionné la recherche d'une méthode apte à répondre aux spécificités du problème.

La première concerne le travail sur un nuage de points existants, ce qui exclut bon nombre d'approches proposées. L'ajout de tout point supplémentaire pose le problème de la détermination de son altitude qui, si elle se base sur les points environnants, constitue déjà une interprétation de la géométrie étudiée.

La méthode classique de Delaunay (Correc et al, Sloan, par exemple) est très répandue dans l'exercice qui consiste à former les éléments les plus réguliers possibles sur un ensemble de points fixés.

Nous lui avons pourtant préféré une autre approche afin de conserver la possibilité d'ignorer certaines zones au sein du domaine à mailler. Cette seconde spécificité est dictée par l'obligation d'ignorer, dans certaines circonstances, des zones dont les volumes tombés ne participent pas réellement à l'écoulement, pour cause par exemple de collecte intermédiaire des débits.

Cette difficulté supplémentaire a orienté nos recherches vers une évolution de la méthode de Cavendish. L'algorithme développé donne une complète liberté par rapport aux

particularités du domaine à mailler, en ignorant les difficultés que cause souvent la découpe des "trous" et des frontières tourmentées.

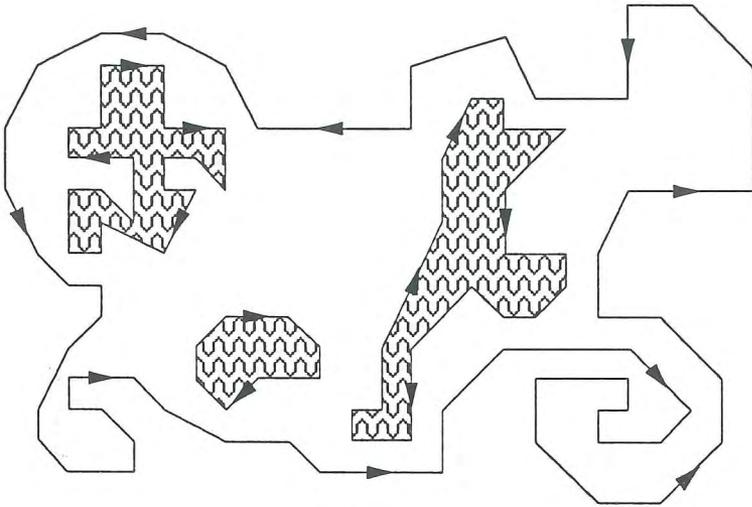


Figure VIII.1. Exemple de domaine à mailler avec zones internes à ignorer

La méthode procède par constante réactualisation de listes qui gèrent une succession de frontières fermées emprisonnant le domaine à mailler. Le sens, anti-horlogique adopté pour l'énumération des noeuds de la frontière extérieure et horlogique pour toute frontière enserrant les trous à ignorer, place toujours le domaine à mailler à la gauche des segments définis par deux noeuds consécutifs des frontières (voir figure VIII.1.).

Désignons par L_f la liste décrivant l'état instantané des points frontière. Comme le suggère la figure VIII.3., cette liste est susceptible de reprendre une succession de frontières délimitant des domaines distincts. Même lorsque le domaine initial est connexe, sa progressive réduction par la construction des mailles peut le fractionner en plusieurs zones séparées qui sont numérotées à la figure VII.3. dans l'ordre de leur positionnement instantané dans la liste L_f à l'issue de la construction de l'élément 579 (9 zones distinctes pour cet état). Dans la suite de cette description, nous désignerons par frontière active l'énumération des premiers points de la liste L_f qui délimite la première de ces zones. L_d reprend l'ensemble des points qui n'appartiennent pas à la frontière et qui n'ont pas encore été intégrés dans le maillage à l'instant considéré.

Décrivons la construction du $i^{\text{ème}}$ triangle qui adopte toujours pour base les deux premiers points instantanés ab de la liste L_f . Nous examinerons d'abord les critères de sélection du sommet η qui permet de construire le nouvel élément, pour ensuite envisager les conséquences de ce choix sur la réactualisation des listes évolutives L_f , L_d .

1. La recherche du sommet η de l'élément $ab\eta$ passe, pour l'ensemble des noeuds des deux listes, par l'examen d'une série de critères :

- Il se trouve à gauche de la base de travail ab .
- Les côtés du triangle envisagé, $b\eta$ et ηa , ne peuvent avoir d'intersection avec les segments frontière de la liste évolutive L_f . Cette vérification optionnelle, coûteuse en temps d'évaluation, ne se justifie que pour des géométries très découpées ou pour des distributions très irrégulières de points, dont certains se trouvent en dehors des limites du domaine à mailler.
- Le sommet η doit assurer une certaine qualité de forme au triangle envisagé.

Les critères à respecter n'impliquent pas seulement la prise en compte du meilleur triangle à former dans la présente itération. Il faut également pressentir les conséquences de ce choix pour les étapes ultérieures, partant du constat que la constitution d'un élément proche de la forme équilatérale est inutile si elle se solde par la formation, à la phase suivante, d'un triangle très déformé. Les critères de choix sont donc primordiaux pour la qualité finale du maillage constitué.

Les recherches bibliographiques en la matière nous ont amené à choisir ceux développés par Lo. Dans le balayage précédemment décrit de tous les points, certains noeuds η_i , dits "meilleurs", vont faire l'objet d'une compétition finale. Outre les critères précédents, ceux-ci minimisent la somme des carrés des distances des points de la base au sommet envisagé.

Les expériences de Lo, confortées par nos propres tests, confirment que la comparaison peut se limiter aux deux meilleurs noeuds.

L'originalité du test porte sur l'évaluation de la qualité de l'élément par une seule grandeur qui, pour un triangle quelconque abc , s'écrit :

$$\alpha_{abc} = \frac{\overrightarrow{ab} \wedge \overrightarrow{ac}}{\overline{ab}^2 + \overline{bc}^2 + \overline{ca}^2} \quad (\text{VIII.1})$$

Une valeur élevée de ce paramètre correspond à une qualité croissante de la forme envisagée comme l'illustre la figure VIII.2. Une valeur négative du coefficient trahit quant à elle une construction inacceptable.

Pour chaque noeud η_i en compétition, Lo propose d'évaluer d'abord la qualité du triangle envisagé, soit $\eta_{ab\eta_i}$. Quant aux conséquences prévisibles du choix de η_i vis à vis des constructions futures, elles sont prises en compte par un test de forme des triangles possibles $\eta_i b\eta_j$ et $a\eta_i \eta_j$ avec $j = 2, 1$ lorsque $i = 1,$

2. Le choix de η s'opère par comparaison des deux produits correspondant à $i = 1, 2$:

$$\alpha_{ab\eta_i} \cdot \max(\alpha_{a\eta_i\eta_j}, \alpha_{\eta_i b\eta_j}) \tag{VIII.2}$$

où $j = 2$ se conjugue à $i = 1$ et inversement.

La valeur maximale, qui désigne le noeud retenu, traduit le meilleur compromis de forme du triangle envisagé et de ceux à venir. La seconde ligne de la figure VIII.2. illustre ce test, avec une première situation de construction d'un triangle presque équilatéral, mais qui implique à la phase suivante la génération d'un élément assez déformé. Par le test final, on préférera à cette première hypothèse une seconde construction qui assure, avec ces mêmes noeuds, une construction d'éléments plus homogènes en qualité. Le rejet de toute valeur négative du produit assure en outre qu'aucun noeud perdant ne peut se trouver emprisonné dans la construction adoptée.

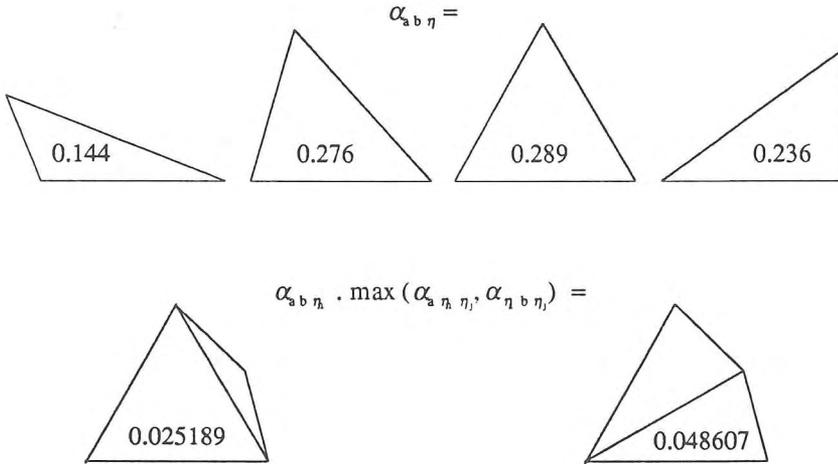


Figure VIII.2.

Exemple d'évaluation de qualité de triangle, croissante avec α et mise en évidence de la prise en compte, par le test final, des éléments futurs à construire

2. Le noeud η choisi au terme de la procédure de recherche occupe une place au sein d'une des listes L_f ou L_d qui déterminera essentiellement la mise à jour à réaliser avant d'entamer la construction suivante :

- Dans l'éventualité la plus simple où le noeud appartient aux noeuds intérieurs

de la liste L_d , il va être inclus dans la frontière active L_f et disparaîtra simultanément de la liste L_d .

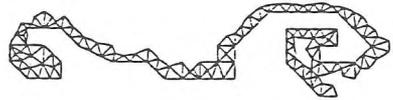
- Lorsque η est un noeud frontière, l'action adéquate dépend de la frontière en cause :
 - Lorsque le point fait partie de la frontière active, c'est à dire le premier des domaines à mailler délimités dans L_f , celle-ci va se scinder pour partager le domaine actif en deux domaines indépendants.
 - Sinon, la frontière impliquée va être intégrée à la frontière active pour fondre les deux domaines concernés en un seul.

Les détails de la procédure et des actions adaptées à chaque situation, ainsi que les tests effectués sur les longueurs des listes gérées, assurent, au terme de l'opération de maillage, une réduction de la liste frontière aux trois noeuds du dernier triangle.

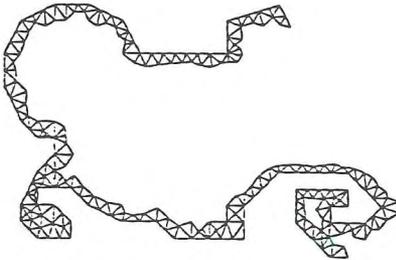
A partir des noeuds qui décrivent la succession des frontières de la figure III.1. et des noeuds intérieurs choisis comme futurs sommets, le programme AMAILGEN, écrit en fortran, procède à la construction progressive des éléments dont la figure VIII.3. rappelle quelques étapes intermédiaires.



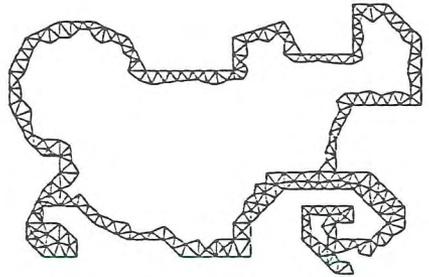
50 triangles construits



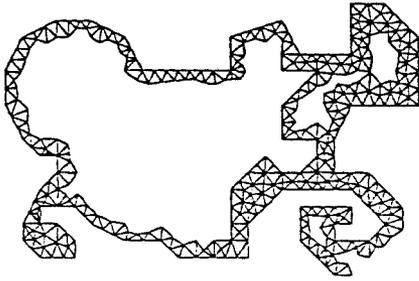
150 triangles construits



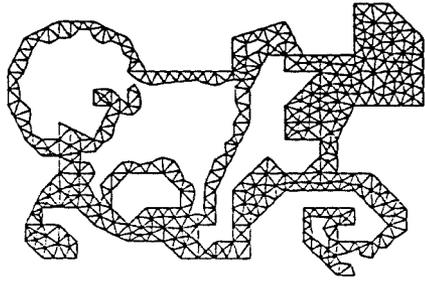
250 triangles construits



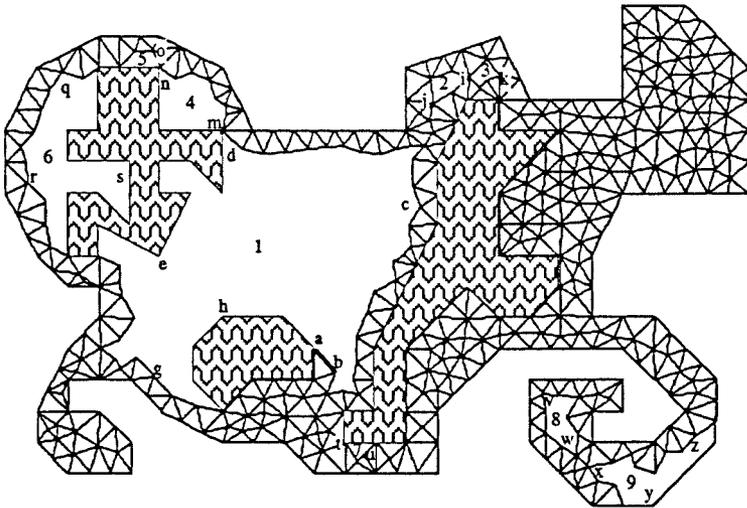
350 triangles construits



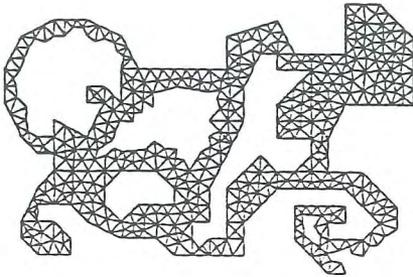
450 triangles construits



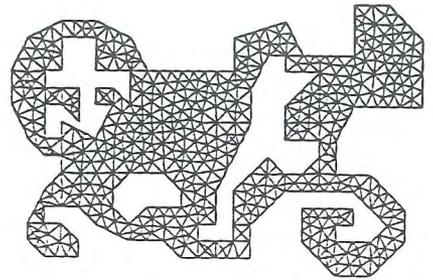
650 triangles construits



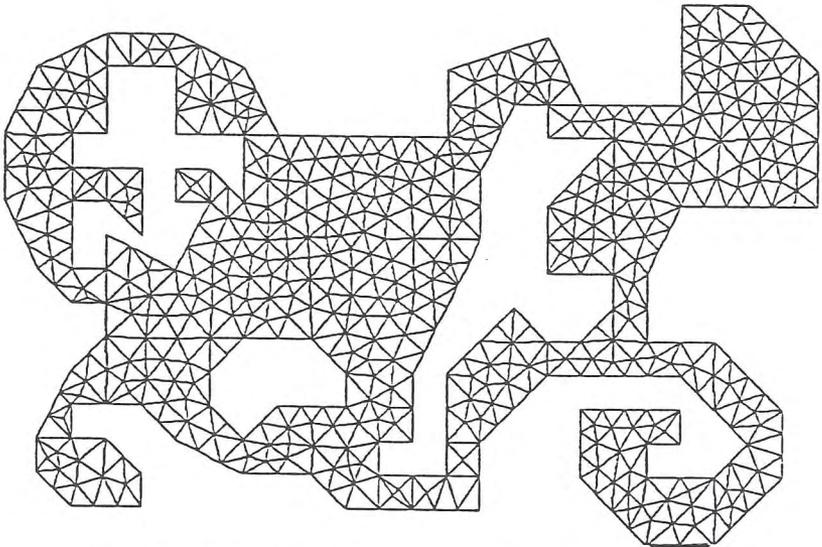
Description de l'état instantané de la frontière
avant la construction du triangle 579



750 triangles construits



850 triangles construits



Etat final du domaine après terminaison de la phase de maillage

Figure VIII.3.

Elle montre, en particulier, l'état de morcellement de la surface à considérer en 9 sous-domaines consécutifs à la construction des 578 premiers éléments. Une distribution de l'alphabet sur les noeuds repris dans la liste frontière L_f résume l'organisation séquentielle réelle de cette liste au moment d'entamer la construction du 579^{ème} triangle.

Pour en faire un outil de maillage parfaitement polyvalent et pour autoriser un contrôle permanent de chaque étape, le programme est doté de fonctions annexes et d'outils de visualisation.

Selon la provenance du fichier de points à gérer et la façon dont il a été produit, le nuage s'apparentera davantage à un canevas régulier (cartes digitalisées fournies par l'I.G.N.) ou à la plus irrégulière des distributions. Les outils de visualisation permettent d'apprécier la justesse et la qualité du maillage construit dans la perspective d'éléments finis et, le cas échéant, de décider le modélisateur à revoir certains noeuds introduits.

Dans cette étape qui n'exploite que les coordonnées x, y des points, l'alternance de vues globales du maillage et de zooms des zones d'intérêt aide, avec l'affichage des noeuds et la numérotation des triangles construits, à reconstituer la logique du maillage pour pallier d'éventuelles déficiences de données.

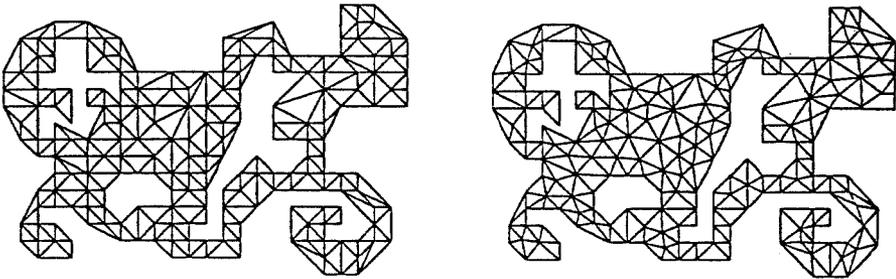
Deux types d'aide peuvent alors être envisagés et cumulés selon qu'on souhaite ajouter ou déplacer des points :

- D'entrée de jeu, il est possible d'adjoindre aux noeuds existants des noeuds additionnels, tant sur la frontière que sur le domaine, qui proviennent d'un balayage régulier d'une génératrice horizontale. Dans les limites intérieures des frontières qu'elle coupe, cette dernière introduit les noeuds supplémentaires qui n'incluent pas de noeud existant dans leur cercle d'influence (dont le rayon est à préciser).

La multiplication des sous-domaines connexes assure l'existence de zones à densité de points variable.

- Consécutivement à la phase de maillage, une autre opération optionnelle procède au déplacement de tout point n'appartenant pas aux frontières sur le barycentre de ceux qui lui sont connectés. La répétition de cette opération systématique montre une convergence rapide à l'issue de trois ou quatre balayages.

Le cumul de ces opérations réalise un maillage de qualité, composé de transitions graduelles lorsque des densités variables sont introduites, même si cet effet ne constitue pas une des priorités de la méthode.



Après génération et maillage

Après déplacement des points

Figure VIII.4.
Génération automatique de noeuds supplémentaires, maillage sur les points
et redistribution finale des noeuds

Rappelons encore que ces opérations facultatives doivent alors se doubler d'une définition simultanée de l'altitude de chaque point redéfini, opération laissée à la discrétion de l'utilisateur (par exemple par une superposition du maillage final à la carte originelle lorsqu'elle fut digitalisée manuellement).

La figure VIII.4. met en évidence ces deux possibilités additionnelles par maillage du domaine de la figure VIII.3. Cette fois, seul les points frontières strictement nécessaires pour définir les contours du domaine sont donnés. Les phases successives assurées par la méthode incluent la création de noeuds frontière intermédiaires ainsi que de noeuds intérieurs au domaine, répondant à un espacement donné, suivie de la phase de maillage proprement dite pour terminer enfin avec trois opérations successives de redistribution des noeuds créés.

VIII.3. DELIMITATION D'UN BASSIN VERSANT CONSTITUE DE FACETTES PLANES TRIANGULAIRES

L'exutoire à étudier peut être le point d'un versant de vallée qui ne connaît d'autre mouvement fluide de surface que l'écoulement hydrologique en fine lame suscité par une pluie. La méthode cinématique appliquée est à même, par l'évolution temporelle de la hauteur d'eau fournie en tous points, de reconstituer l'hydrogramme du bassin impliqué.

Cependant, la majorité des études se focalise plus logiquement sur l'hydrogramme d'un lieu traversé par un cours d'eau, lui-même alimenté par l'écoulement hydrologique du bassin impliqué.

Cette particularité ne se répercute pas seulement par une phase ultérieure de propagation d'hydrogrammes latéraux élémentaires dans le cours d'eau, elle influe également sur le processus de maillage du bassin.

Ce dernier doit reproduire, par les arêtes de ses éléments, la géométrie de l'écoulement filaire de la rivière et de ses éventuels affluents. Nous assurons le cheminement correct du cours d'eau sur le bassin qui l'alimente en incluant dans les données l'énumération des points concernés.

Le partage du domaine à mailler en sous-éléments connexes dont les frontières communes se confondent avec les bras de cours d'eau force alors le mailleur à respecter ces segments privilégiés. Cette technique de partage est d'autant plus aisée à appliquer que le mailleur sait ignorer parmi les points donnés ceux qui n'appartiennent pas au domaine considéré. On multiplie donc les phases de maillage en sous-domaines en travaillant dans tous les cas avec l'ensemble des points.

En procédant de la sorte, on obtient une représentation tridimensionnelle par facettes triangulaires planes, analogue à celle des figures VIII.5., 6. Elle reproduit la topographie du bassin du Blanc-Gravier situé dans le domaine universitaire du Sart Tilman. Les 2210 points de discrétisation résultent de la digitalisation d'une carte I.G.N. classique au 1/5000^{ème}. Un partage préalable en trois sous-domaines connexes assure un tracé filaire correct du cours d'eau et de ses deux affluents parmi les 4271 éléments construits.

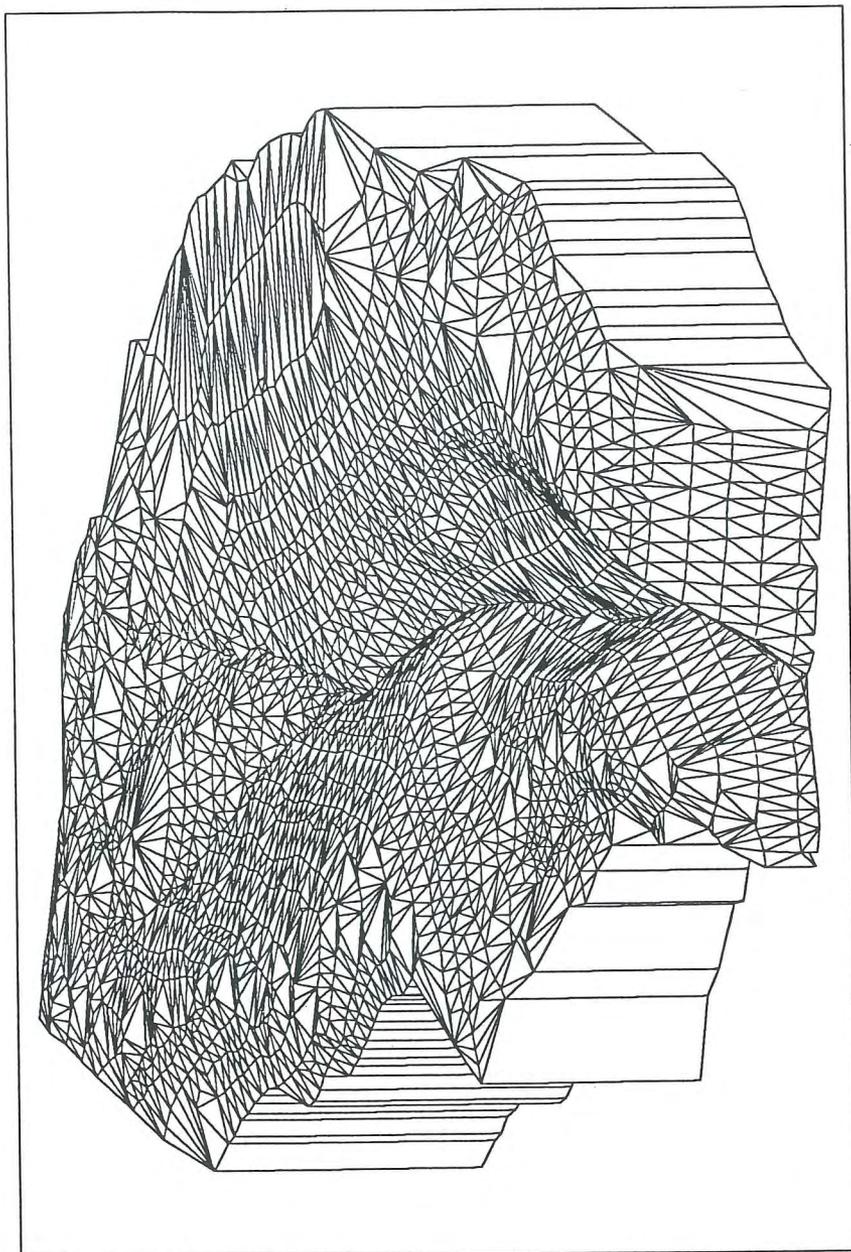


Figure VIII.5.
Représentation tridimensionnelle du maillage triangulaire
généralisé automatiquement sur les points donnés du bassin du Blanc Gravier



Figure VIII.6.
Reconstitution tridimensionnelle de la surface du bassin du Blanc Gravier
à partir du maillage triangulaire généré automatiquement. Vue depuis l'exutoire.

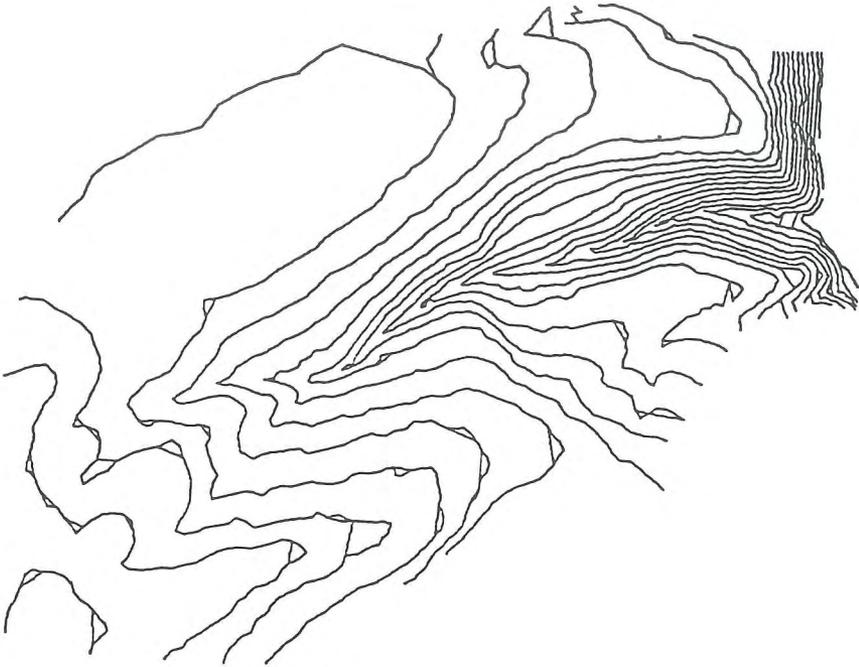


Figure VIII.7.

Visualisation des lignes de niveau reconstituées à partir du maillage triangulaire généré automatiquement sur les points donnés du bassin du Blanc Gravier

Cette exploitation brute de la troisième coordonnée autorise une représentation rapide et claire des spécificités topographiques en même temps qu'elle permet, par un simple jeu d'interpolation, une reconstitution aisée des lignes de niveau (figure VIII.7.).

Ces possibilités s'ajoutent à l'arsenal des outils graphiques développés et profitent de leur convivialité en matière de zooms notamment. Elles ont moins été élaborées pour une phase préalable de première visualisation que pour un meilleur contrôle des opérations qui limitent les zones à prendre en compte pour le calcul et pour une localisation précise des conditions limites requises.

Profitons donc en première approche de la géométrie tridimensionnelle brute issue de l'opération de maillage pour opérer une sélection des facettes entrant dans la zone d'influence.

La base de travail topographique adoptée (une succession de facettes à pentes discontinues) indique bien que nous n'établissons a priori aucun lien entre cette application et une future modélisation d'écoulement, dont le choix de résolution réclamerait éventuellement certaines impositions, notamment sur les pentes.

Nous nous contentons donc d'inclure dans la surface d'intérêt tout segment et tout élément dont l'écoulement superficiel est susceptible d'agir sur la forme et l'amplitude de l'hydrogramme étudié.

Il faut composer, dans cette géométrie discontinue, avec des directions préférentielles d'écoulement définies, sur chaque facette, par la plus grande pente, ainsi qu'avec des arêtes que nous dénommerons rigoles, formées par l'arête commune de deux triangles dont les plus grandes pentes convergent vers un même point du segment partagé. Les bases exclusivement topographiques du raisonnement vont dans le sens des conclusions établies à l'issue de l'étude de la théorie cinématique appliquée à l'hydrologie de surface.

Nous ordonnerons la construction du domaine et, par conséquent, celle de ses limites, en s'inspirant de l'idée de la méthode de maillage qui restreint progressivement la frontière du domaine à mailler. Nous inverserons cette fois la procédure par une expansion graduelle de la frontière, qui étend son emprise jusqu'à enserrer continûment le bassin, au départ d'un simple segment de cours d'eau discrétisé ou d'arête d'un élément de versant, dont le point aval s'identifie à l'exutoire à étudier.

Avant d'examiner la procédure développée, précisons d'emblée que le bassin se compose nécessairement d'éléments entiers et que la frontière n'est donc constituée que de segments joignant des noeuds existants. Ce choix délibéré n'a aucune répercussion sur la précision des futurs bilans de volume d'eau, comme le fera mieux comprendre son intégration dans la séquence d'opérations menant au calcul d'écoulement.

Par contre, inclure globalement un élément n'est pas synonyme d'exclure toute prise en compte partielle de celui-ci pour déterminer les zones actives sur les nouveaux segments frontière que l'élément vient de créer. Ceux-ci ne seront pas pris en compte, ou le seront partiellement, selon les phases précédentes qui les ont introduits dans la frontière évolutive.

Pour plus de clarté dans la description de la méthode, nous définirons un segment orienté ab complètement ouvert par ses bornes gauche et droite par $b(ab) = (g,d) = (0, 1)$, un segment limité à son seul noeud gauche ou droit respectivement par $b(ab) = (0, 0)$ ou $(1,1)$, enfin un segment totalement inactif par $b(ab) = (0,5, 0,5)$.

De façon très résumée, et sans prendre en compte les éventuelles singularités géométriques que l'organigramme VIII.11. analyse de façon détaillée, nous nous plaçons à une étape intermédiaire d'extension de la zone d'influence temporaire, limitée par les segments de la liste $F = F(w...mba)$ de longueur k . La base de travail orientée est définie par les deux derniers noeuds ab de la liste et la frange active du segment ab est fixée par ses bornes $b(ab) = (M(k-1,1), M(k-1,2))$.

- Supposons d'abord que la portion active du segment - base ne se limite pas à un noeud. On recherche alors le triangle abc dont l'énumération reprend la base étudiée.

Un test d'orientation de la plus grande pente vérifie si l'élément est susceptible de contribuer à la surface à construire. Si la pente est entrante par rapport au segment considéré, le noeud c est intégré à la frontière.

- La présence ou l'absence d'un noeud de discrétisation dans la partie active de la base va conditionner la mise à jour des bornes des nouveaux segments ac et bc introduits dans la frontière.
- Lorsque la frange active ne contient pas de noeud, des parallèles à la plus grande pente, menées par les extrémités du segment actif, délimitent les nouvelles plages

actives à analyser ultérieurement (figure VIII.8).

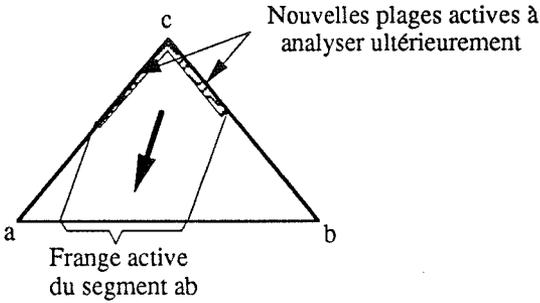


Figure VIII.8.
Délimitation des nouvelles plages actives à analyser pour une frange active initiale n'incluant pas de noeuds

- Lorsqu'elle inclut un ou deux noeuds, la procédure précédemment décrite se complète d'un traitement particulier.

Il détermine si le ou les noeuds impliqués ne constituent pas l'aval d'une rigole tracée par ac ou bc, auquel cas la ou les frontières correspondantes doivent totalement être activées (figure VIII.9. cas a). Le cas b montre l'autre éventualité d'une frontière ac limitant sa partie active au seul point a.

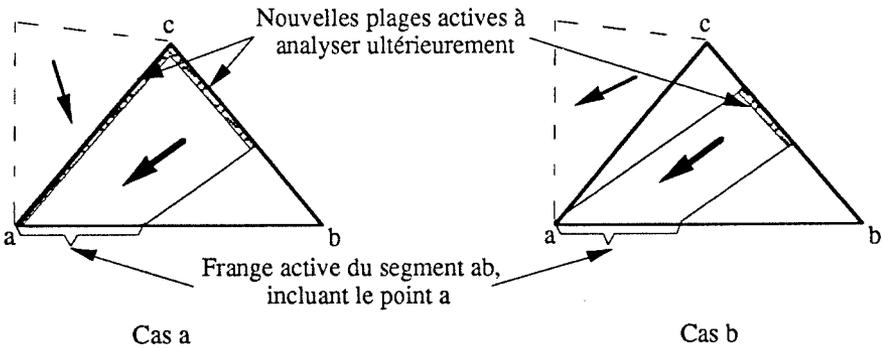


Figure VIII.9.
Délimitation des nouvelles plages actives à analyser pour une frange active initiale incluant un noeud

- Lorsqu'on est confronté à l'examen d'une portion active limitée à un noeud, la succession des tests et des actualisations de frontière vise à analyser

progressivement toute rigole potentielle qui alimenterait le point, en ouvrant de nouvelles perspectives d'éléments à intégrer.

La procédure implique qu'un segment liant deux noeuds de discrétisation peut être intégré à plusieurs reprises dans la frontière, chaque fois pour l'analyse d'une frange active spécifique.

L'impossibilité de procéder plusieurs fois à l'étude de parties identiques est liée à la mémorisation des tests effectués. Cette mémoire peut être initialisée par l'utilisateur avec certains segments dont il ne souhaite pas l'analyse. Ainsi, la recherche de la seule partie du bassin versant du point a situé côté rive droite à la figure VIII.10. exclura-t-elle tout examen des segments yx , ... fe , ... et ba .

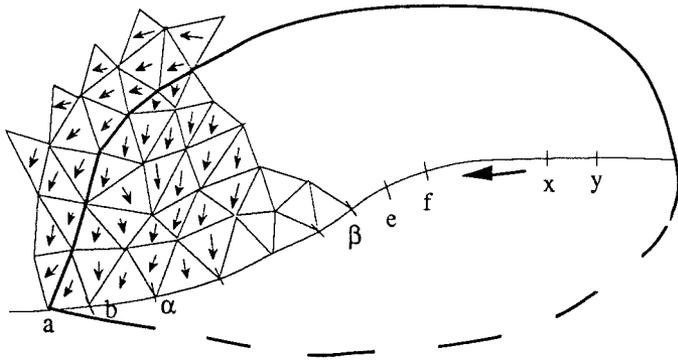


Figure VIII.10.
Limitation dans la recherche d'une fraction de bassin versant
par initialisation de la mémoire des tests effectués

Cet artifice qui consiste à soustraire certains segments à une extension possible de surface sera largement exploité dans la suite des opérations.

Par contre, en l'absence de toute limitation initiale, la logique de cet outil sur des bassins réels reconstitue l'entière des surfaces qui alimentent l'exutoire, remontant tous les segments amont des écoulements filaires impliqués et incluant leur bassin correspondant.

Il faut enfin noter que la procédure n'est en rien liée, par une quelconque référence, à des lignes de niveau (par énumération ordonnée des points de discrétisation par exemple), ce qui lui assure, en complément du maillage, une totale souplesse ainsi qu'une grande généralité d'application.

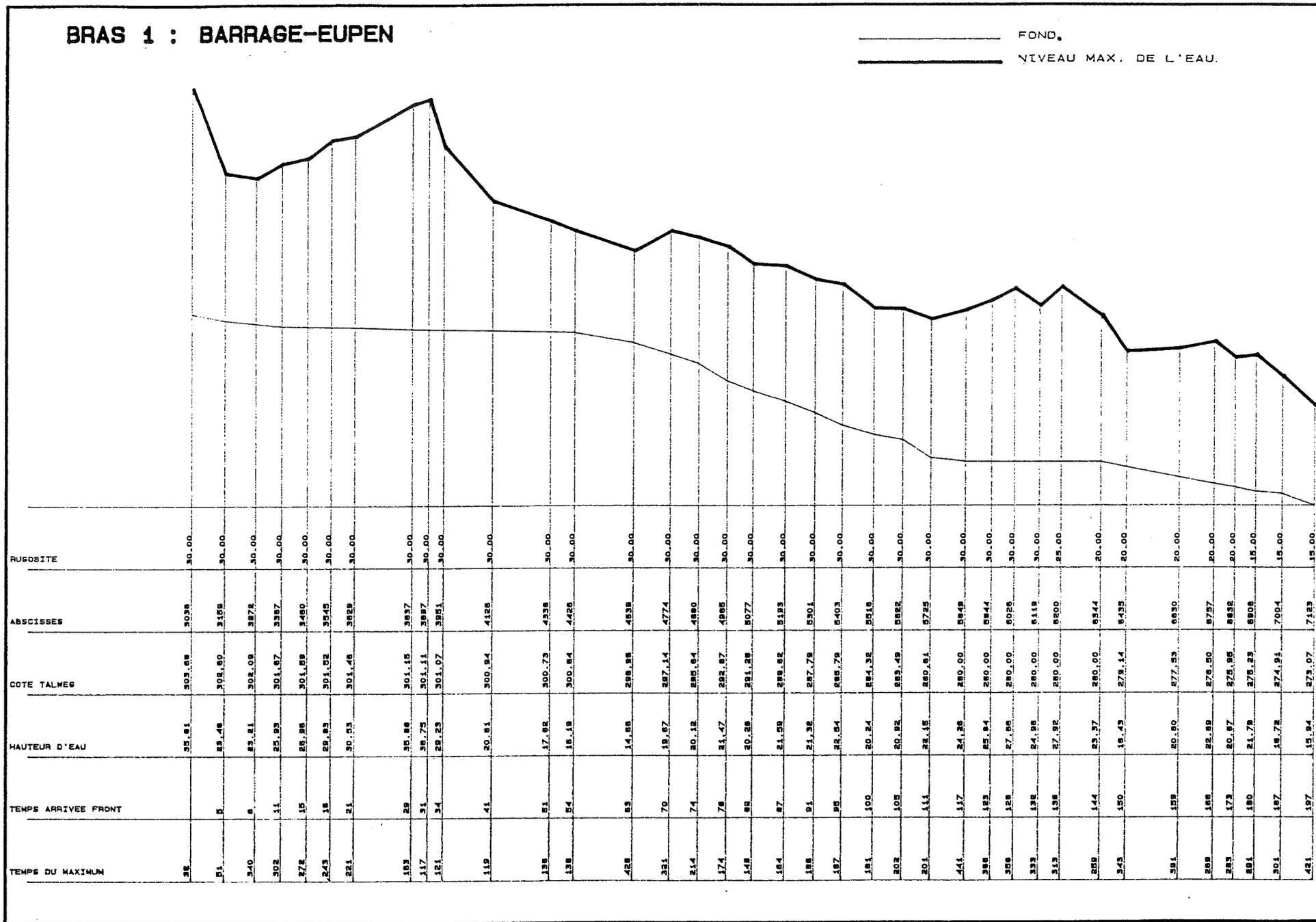


Figure XV.34.

Carte de temps d'arrivée du front, de maximum de hauteur atteinte et du temps pour l'obtenir, pour le bras 1 qui s'étend du barrage jusqu'à Eupen

VIII.4. REALISATION DE LA CONTINUITÉ DE DÉBIT AUX NOEUDS

Les considérations unidimensionnelles ont longuement motivé notre prudence dans le développement d'une résolution adéquate du système d'équations. Nous avons esquissé certaines approches qui satisfont aux critères établis en conformité avec ces raisonnements.

Aucun obstacle particulier ne s'oppose à leur extension en quasi-tridimensionnel, tant pour une résolution additionnelle par éléments finis des équations explicites qui lient les composantes de vitesse (ou débit) à la hauteur d'eau, que pour les recommandations en matière de données topographiques qui autorisent une résolution en seul terme de la hauteur.

Dans cette dernière option, l'expérience unidimensionnelle, exprimée dans les résultats d'écoulement au voisinage d'une perturbation topographique peu graduelle (chapitre IV), montre qu'une conversion préventive des données d'altitude en pentes continues aux noeuds se solde par des influences moins prononcées et un étalement des effets. L'accentuation des approximations de la solution est liée au choix de la technique de conversion.

Il est pourtant aussi manifeste, par les comparaisons établies à la figure IV.7., que l'option qui consiste à conserver la vitesse (ou le débit) comme variable intermédiaire dans le calcul d'écoulement, introduit des effets comparables dans les résultats au départ d'une géométrie discontinue.

En minimisant ces conséquences, un resserrement de la définition topographique du problème prouve logiquement que l'approximation constatée dans les résultats de chaque approche est le fait normal d'une action numérique de résolution approchée.

Les effets, plus aisément visibles, d'une action préventive sur la topographie ne s'accompagnent nullement d'une quelconque dégradation tangible des résultats par rapport aux autres techniques citées.

Cette clarté dans les conversions topographiques constitue précisément un critère déterminant dans notre choix pour traiter les exemples qui vont suivre. Car elle est prépondérante dans la recherche des zones réellement impliquées et dans la précision d'imposition des conditions aux limites, dès lors que ces opérations se basent sur la direction et l'intensité du champ des pentes.

Nous nous sommes donc tournés, dans la suite de ce travail, vers de plus larges exigences dans les données topographiques à fournir au module de calcul d'écoulement, exploitant ainsi une des diverses options exposées qui coexistent réellement au sein du logiciel.

Dans la continuité de ce choix, nous travaillerons toujours avec l'hypothèse, la plus réaliste en tridimensionnel, qui consiste à ne disposer initialement que des trois coordonnées des points de discrétisation.

L'incontournable manipulation de conversion des données en pentes aux noeuds doit être interprétée, au niveau de la méthode proposée, comme une mise en forme appropriée des données, par opposition à une transformation ou une simplification prématurée de la topographie. La méthode proprement dite ne requiert en effet aucune restriction particulière en matière d'irrégularité des surfaces traitées.

Cette interprétation de la phase préparatoire explique par ailleurs que le sujet n'occupe pas une place prépondérante dans ce travail.

Il fait appel à un domaine distinctif, vaste et très actuel, du traitement et du rendu graphique et analytique de surface, spécialité géographique et topographique d'où naissent les logiciels "pointus", capables d'approximer le plus fidèlement le nuage de points d'une surface tridimensionnelle quelconque en une surface continue complexe. De leur puissance et leur souplesse dépend la fiabilité de la conversion pour la nécessaire définition des pentes aux noeuds discrétisés.

Leur influence dans des modélisations sur les géométries les plus irrégulières ouvre sans nul doute des perspectives d'investigations futures pour un couplage de la méthode de calcul proposée et des techniques de représentation topographique les plus élaborées.

Dans la mesure où la finalité du travail consiste avant tout à prouver la pertinence de la méthode développée ainsi que le caractère général et aisé de sa mise en oeuvre, nous ne rentrerons pas dans des démarches aussi sophistiquées.

Quoi qu'il en soit, on se souviendra que la nature du traitement intermédiaire appliqué ne réduit en rien l'universalité de la méthode dans son ensemble.

En dehors du caractère ardu et exigeant en temps de calcul, la génération de surfaces complexes d'approximation pose le problème éventuel d'apparitions, très préjudiciables pour la méthode, de "bonds topographiques" qui faussent, par la définition retenue des bassins versants, la superficie totale des surfaces impliquées dans l'écoulement.

Nous avons été très attentifs à cet aspect du problème dans la recherche de conversions simples aux effets moins imprévisibles.

Une technique séduisante consiste à s'appuyer sur le premier maillage construit afin d'évaluer les composantes de pente de chaque facette. La seconde phase associe ces composantes à chaque point d'un nouveau nuage constitué des centres de gravité ou d'un autre point caractéristique des triangles correspondants.

Suit alors une étape supplémentaire de maillage sur cette nouvelle discrétisation, avant de reprendre le cours normal, explicité ultérieurement, des phases de fixation définitive des zones d'influence et de leur partage pour le calcul.

Nous n'insisterons que sur deux des désavantages qui nous détournent de cette approche.

- Elle accroît souvent drastiquement l'effort de calcul par une multiplication significative du nombre de points de la seconde discrétisation, par référence aux données initiales.
- Elle crée certaines complications dans la façon de gérer l'introduction de lignes de crête au sein d'éléments, par rapport à l'imposition de conditions limites.

Cette dernière objection marque notre volonté, dans l'approche choisie, de ne pas entrer dans des artifices de partition des éléments, mais plutôt de travailler sur une structure

relativement homogène d'éléments triangulaires.

La technique retenue conserve l'imposition des conditions limites sur des segments existants. Elle réalise, pour chaque noeud, une moyenne pondérée par les surfaces des composantes de pente des triangles qui le contiennent.

Pour mettre en oeuvre cette technique de façon efficace, nous prenons soin de partager préalablement la phase de recherche des zones impliquées afin de maintenir une discontinuité de pente au long des segments descriptifs des ramifications filaires du cours d'eau impliqué. Nous assurons ainsi le déversement latéral des contributions hydrologiques des deux versants de chaque segment.

Nous allons recourir en premier lieu à la procédure déjà décrite de limitation des bassins pour réaliser ensuite une conversion topographique séparée de chaque zone sélectionnée.

Nous ordonnons cette recherche en nous inspirant du classement des divers bras de rivière qui a été opéré préalablement (chapitre III).

Elle débute par la délimitation des zones impliquées dans l'écoulement du point le plus aval des bras d'ordre le plus élevé. Chacune de ces surfaces est scindée en deux sous-domaines dont la frontière commune décrit le bras étudié.

Cette opération est aisément réalisée en initialisant la mémoire des tests effectués avec la succession montante ou descendante des segments du bras étudié, suivant qu'on s'occupe respectivement de son versant gauche ou droit.

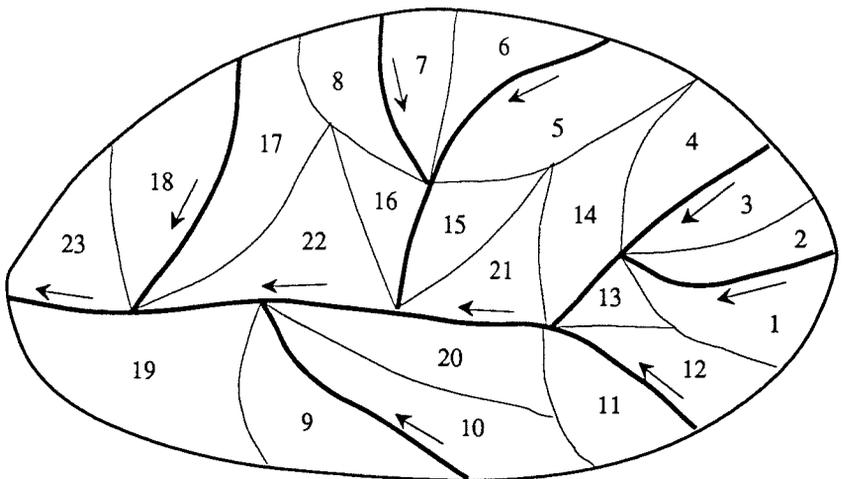


Figure VIII.12.
Délimitation automatique des sous-bassins

En cumulant progressivement les listes de tests réalisés pour les bassins d'ordre de moins en moins élevé, on répète ces opérations en progressant vers le bras principal, pour terminer avec le segment qui inclut l'exutoire à étudier.

Les sous-bassins sélectionnés se présentent alors, pour un bassin quelconque, sous la forme schématisée à la figure VIII.12., décrivant pour certains des lignes de crête secondaires qui les séparent et dessinant par leur union les frontières globales du bassin impliqué. Cette situation permet de situer les points d'imposition des conditions aux limites.

Chaque partition fait ensuite séparément l'objet du traitement topographique choisi pour rendre des pentes continues aux noeuds.

Dans cette construction étagée, certains sous-domaines peuvent partager quelques éléments communs lorsque la représentation par pentes discontinues ne permet pas de délimiter une ligne de crête intermédiaire qui est ininterrompue. Dans ce cas, la méthode choisie pour convertir les données topographiques traite les noeuds qui sont inclus dans plusieurs domaines, sans faire partie de leur frontière commune, en leur attribuant, comme tout noeud intérieur, une moyenne des pentes de tous les éléments qui l'intègrent.

Les fichiers propres à chaque domaine n'attendent plus qu'une description des propriétés morphologiques du terrain et une détermination des frontières à condition imposée, pour être pris en charge par le module de calcul hydraulique.

La description assez rébarbative de la chronologie des opérations cache en fait une mise en oeuvre à la fois simple et presque instantanée dans ses évaluations. Les différentes étapes s'effectuent sur le maillage initial pour porter tous les calculs d'écoulement à leur terme. Elles maintiennent les nécessaires discontinuités de pente topographique et simplifient l'imposition des conditions aux limites sur les segments existants.

VIII.5. INTRODUCTION OPTIONNELLE D'UN FRACTIONNEMENT SUPPLEMENTAIRE DES SIMULATIONS D'ECOULEMENT HYDROLOGIQUE

Nous avons mis au point une procédure à suivre pour présenter la structure topographique sous une forme appropriée à une modélisation d'écoulement. L'indispensable partage de l'entière du domaine d'intérêt en sous-bassins caractéristiques des versants de chaque ramification détermine un fractionnement minimal en autant de simulations autonomes.

Suivant leur nombre, elles peuvent impliquer des discrétisations dont la taille est peu adaptée aux possibilités de calcul d'un ordinateur personnel. De plus, même lorsque la capacité en mémoire de la machine est compatible avec la simulation envisagée, la résolution d'une suite de systèmes non-linéaires pour ces phénomènes évolutifs dans le temps demande la recherche du meilleur compromis entre la vitesse de calcul et la multiplication des simulations sur des sous-domaines, pour autant que cette potentialité existe.

La théorie cinématique permet, par indépendance théorique de chaque filet fluide, de

travailler de cette façon. Elle nous amène à mettre au point certaines règles qui régissent un morcellement supplémentaire automatique.

Attachons nous au fractionnement d'un sous-bassin délimité par les considérations du paragraphe précédent et, dans cette chronologie, supposons réalisée la phase de définition de pente continue aux noeuds.

L'ensemble des points $ab\dots\alpha n m \beta\dots xy\dots$ de la figure VIII.10. reproduit le cours sinueux de la ramification filaire étudiée. Suite à un morcellement des opérations, nous supposons n'être intéressés momentanément que par la construction des hydrogrammes qui se déversent latéralement dans l'ensemble des segments situés entre α et β .

Une simulation sur l'ensemble peut naturellement fournir ces résultats, mais l'indépendance théorique de chaque filet d'écoulement sur le bassin devrait permettre de ne prendre en compte que la surface comprise entre les trajectoires tracées par les deux points extrêmes des segments étudiés du bras.

Une méthode apparentée à celle qui limite un bassin versant composé de facettes planes va concrétiser cette constatation en travaillant à présent sur le champ continu des pentes.

A partir d'un raisonnement désormais classique d'extension progressive de la frontière, on s'efforcera d'intégrer au domaine en construction tout élément dont la vitesse à au moins un des noeuds de la jonction ab est entrante par rapport à ce segment - base instantané. La procédure prend fin par manque d'élément à intégrer ou par absence d'élément susceptible d'introduire une partie amont à des trajectoires déjà intégrées partiellement dans le domaine évolutif.

Il est clair que cette dernière particularité de construction tient compte des contraintes de la méthode en matière de conditions limites. Car la procédure ne se contente pas d'inclure les éléments entiers qui contiennent le domaine défini de façon théorique. Elle veille également à ce que les pentes, sur les segments du pourtour qui ne décrivent pas une ligne de crête, soient sortantes par rapport au nouveau domaine calculé. De cette façon, le domaine construit ne contient qu'un ensemble de trajectoires ininterrompues depuis la ligne de crête.

En conservant la condition limite naturelle sur tous les segments "lignes de crête", on respecte les conditions pour une modélisation correcte des phénomènes qui se produisent sur toutes les trajectoires incluses dans le nouveau domaine. Si, par contre, on ne vérifiait pas ce critère de vitesse sortante, le domaine contiendrait des tronçons de ligne d'eau certes extérieurs au strict domaine recherché, mais n'intégrant pas leur parcours depuis la ligne de crête. Nous serions alors dans une situation embarrassante pour définir un problème bien posé puisqu'il faut imposer une condition à l'amont de chaque ligne et que la seule certitude que nous ayons, concernant les hauteurs d'eau sur une trajectoire quelconque, est une hauteur nulle à son amont.

Cette précaution ne devrait théoriquement avoir aucune influence sur la solution du domaine réellement étudié puisque chaque ligne fluide est indépendante. Néanmoins, les réalités numériques tempèrent ces conclusions puisque la méthode de résolution, par une minimisation de l'erreur sur le nombre de degrés de liberté disponibles, introduit une certaine dépendance entre noeuds voisins.

Si des considérations purement théoriques permettent de procéder à l'étude des déversements latéraux par un examen successif des tronçons $ab...α$, suivis de $αn...nβ$ et de $β...xyz$, l'expérience des simulations confirme qu'un certain recouvrement des segments limites de chaque tronçon considéré est indispensable pour parvenir à une totale insensibilité des résultats vis-à-vis du processus de fractionnement.

Ce recouvrement nécessaire nous permet de parler du meilleur compromis en temps de calcul pour mener à bien une simulation. Nous serions encouragés à morceler profondément chaque sous-domaine pour travailler avec une multitude de systèmes réduits peu importants à évaluer, si la fraction excessive de recouvrement (par rapport à la surface totale de terrain à considérer) n'entraînait une perte significative d'efficacité par la redondance exagérée que cette approche poussée à l'extrême occasionne dans le calcul des lignes fluides communes.

La simulation d'un site réel donnera, dans la troisième partie, de plus amples détails sur le compromis dégagé des essais de mise au point.

VIII.6. CONCLUSION

L'indispensable recherche de l'efficacité et d'une certaine aisance dans la mise en oeuvre de la théorie d'écoulement envisagée, passe par la mise au point d'un canevas immuable de phases préparatoires, préalables au calcul proprement dit.

L'automatisation des diverses étapes est assurée par la réalisation d'algorithmes qui répondent aux spécificités des données couramment rencontrées et aux exigences liées aux simplifications introduites dans la théorie.

Dans le cadre du choix de travailler par conversion initiale des données topographiques en pentes continues, la succession des étapes se résume par l'organigramme de la figure VIII.13.

Chaque phase est complétée par des outils graphiques qui aident à mieux appréhender les particularités topographiques que l'écoulement va rencontrer. Ils assistent également le modélisateur dans la phase de caractérisation des divers terrains rencontrés.

Enfin, le caractère évolutif et non linéaire des équations ne se solde pas par des exigences rédhibitoires pour le matériel informatique, puisque les propriétés théoriques autorisent un morcellement des surfaces concernées.

Au terme de cette première partie, le dispositif est apte à contrôler aisément l'état instantané de la lame fluide en n'importe quel point d'un bassin réel. De façon plus pratique, il exploite toutes les spécificités tridimensionnelles et morphologiques du terrain pour prévoir l'ensemble des hydrogrammes qui se déversent latéralement dans les ramifications du cours d'eau, consécutivement à une pluie irrégulièrement répartie dans le temps et l'espace.

L'approche théorique qui est à sa base lui confère tous les atouts inhérents à une interprétation physique possible des résultats, avec les possibilités attenantes d'étude d'impact de modifications du bassin.

La figure VIII.13. schématise l'ensemble final obtenu qui clôt l'étude théorique purement hydrologique du travail.

La propagation proprement dite de l'ensemble des hydrogrammes élémentaires en réseau filaire va s'intégrer dans un cadre d'applications beaucoup plus général qui justifie le passage à une deuxième partie.

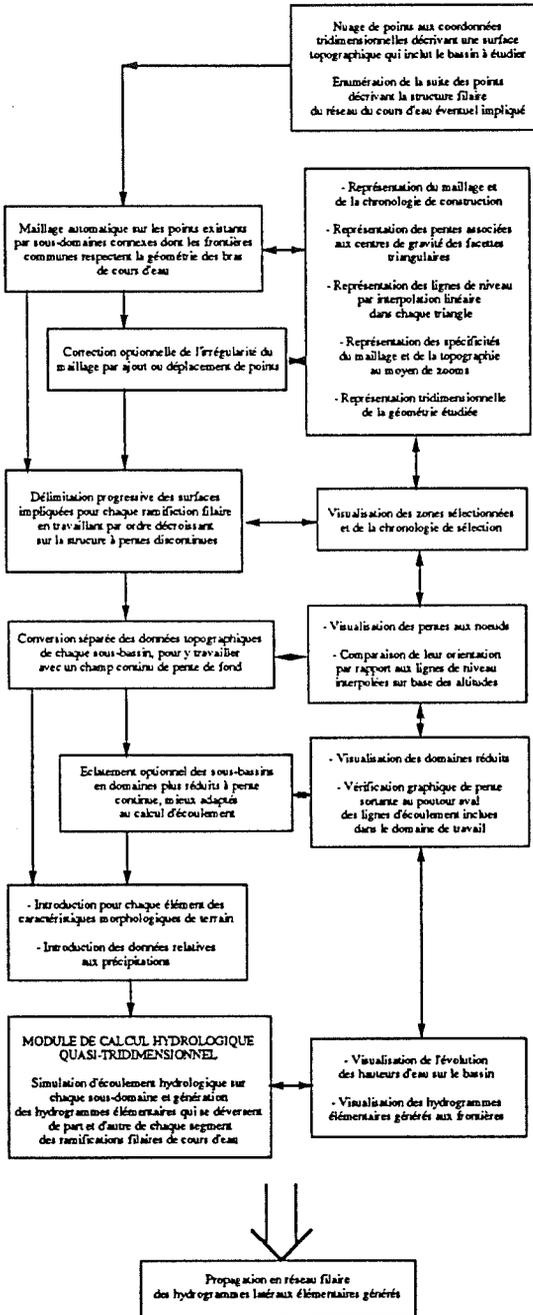


Figure VIII.13.

Organigramme de l'ensemble des phases automatisées et de leur contrôle par outils de visualisation du module de calcul d'écoulement hydrologique

Partie III

Écoulement filaire à surface libre en réseaux de cours d'eau à section quelconque

SOMMAIRE

- CHAPITRE IX** *Modèle mathématique d'écoulement filaire à surface libre en section quelconque*
- CHAPITRE X** *Modèle numérique d'écoulement filaire en l'absence de choc : Première approche*
- CHAPITRE XI** *Application de la théorie de propagation d'ondes en eau peu profonde aux écoulements consécutifs aux ruptures de barrages*
- CHAPITRE XII** *Extension du modèle numérique aux écoulements filaires intégrant des chocs : Approche finale*
- CHAPITRE XIII** *Application du modèle numérique aux écoulements discontinus en conditions réelles*

Chapitre IX

Modèle mathématique d'écoulement filaire à surface libre en section quelconque

SOMMAIRE

- IX.1. Introduction*
- IX.2. Passage en unidimensionnel*
- IX.3. Intégration des équations sur la section*
- IX.4. Coefficient d'inégale répartition de vitesse*
- IX.5. Contribution S_x des contraintes normales à la section*
- IX.6. Introduction des apports extérieurs*
- IX.7. Fermeture du système*

IX.1. INTRODUCTION

L'organigramme VIII.13 clôturant le chapitre précédent indique qu'une dernière étape s'impose pour obtenir l'hydrogramme d'un exutoire alimenté par un réseau de cours d'eau.

La propagation des contributions élémentaires qui se déversent latéralement dans ces structures ramifiées relève en toute généralité de la résolution des équations de base proposées en (II.2, 4, 5, 6).

L'analyse de la structure de l'écoulement et de ses dimensions caractéristiques conduit par ailleurs à ne travailler que sur un système composé d'équations intégrées sur la section mouillée.

Néanmoins, les variations graduelles présentes dans les hydrogrammes latéraux à propager, conjuguées à leur introduction tout au long de la structure filaire, se soldent le plus souvent à l'exutoire par des évolutions du signal suffisamment progressives pour autoriser le recours à des théories simplifiées.

La marge relativement étroite d'application dans laquelle chacune est habilitée à travailler est une logique contrepartie de la simplicité de modèles s'appuyant sur des simplifications, parfois radicales, des équations complètes intégrées (Weinmann et al). Ce désagrément ne peut nous faire renoncer à mettre en oeuvre certaines d'entre elles dans le contexte bien ciblé que nous décrivons jusqu'ici.

Dans cette éventualité, qu'on se satisfasse d'une propagation basée sur une dégénérescence du système en une seule équation constitutive ou qu'on aille jusqu'à superposer les hydrogrammes adroitement décalés dans le temps pour construire l'hydrogramme résultant, aucune des techniques disponibles ne justifie, par sa complexité, de lui consacrer une partie distincte de ce travail.

L'analyse d'une propagation en réseau filaire tend à s'inscrire dans un contexte beaucoup plus général de phénomènes utilement modélisables pour une gestion de retenue.

L'apport en eau, consécutif aux précipitations, en constitue une donnée fondamentale qui justifie amplement les efforts déployés dans la première partie en même temps qu'il représente l'intervenant sans doute le moins actif pour le gestionnaire en regard de ses possibles interventions. L'optimisation de son action se répercute bien davantage sur l'utilisation qu'il décide de ces entrées en regard des impacts qu'elle a sur son environnement.

Le cadre unidimensionnel envisagé se prête bien à la prise en compte d'un grand nombre

de ces applications importantes qui tendent à reléguer la propagation d'hydrogrammes à un rôle plus mineur en ce qui concerne le raisonnement théorique préalable.

Car il serait très dommageable, dans ce contexte élargi, de s'en tenir à des théories spécifiques à chaque cas de figure, dès l'instant où l'éventail des actions possibles du gestionnaire, encore élargi par la diversité dans le type de retenue à considérer, annonce un champ d'applications unidimensionnelles particulièrement vaste.

L'approche théorique se veut donc la plus générale possible.

Les hypothèses émises tentent de ne pas réduire préventivement des possibilités d'études d'impact qui s'intéressent de la plus routinière des actions de lâcher en cours d'eau à la plus involontaire et souvent meurtrière : celle de vidange brusque ou progressive, partielle ou totale, consécutive à un sinistre de l'ouvrage de retenue.

Le raisonnement suivi, voisin de celui du chapitre II, s'attache moins à établir la forme unidimensionnelle complète des équations qu'à rappeler les hypothèses les moins restrictives qui sont à son origine, afin de mieux cerner les potentialités du modèle futur.

IX.2. PASSAGE EN UNIDIMENSIONNEL

Revenons un instant à la démarche suivie au chapitre II pour obtenir une forme bidimensionnelle aussi générale que possible des équations d'écoulement. Nous allons suivre un raisonnement comparable en débutant, de façon plus concise, par une mise sous forme adimensionnelle du système général constitué des équations (II.8 et II.12, 13, 14). Nous omettrons à nouveau les marques "T", tout en conservant en mémoire que nous travaillons avec des moyennes de chaque variable, portant sur une période adaptée aux phénomènes à étudier.

Nous reconduisons, de façon préventive, deux conclusions générales tirées du chapitre II en soulignant que le choix de certaines grandeurs caractéristiques préfigure inévitablement le caractère unidimensionnel de l'écoulement selon une direction prédominante parallèle à l'axe x .

Les mêmes définitions de u_0 , u_0 , w_0 sont conservées pour travailler avec une largeur caractéristique de la rivière l_0 qui affirme une certaine homogénéité des propriétés géométriques, soit du lit pour une propagation usuelle, soit de la vallée dans des cas exceptionnels.

La comparaison des vitesses caractéristiques

$$\varepsilon' = 1 \quad (IX.1)$$

$$\varepsilon'_y = \frac{v_0}{u_0} \quad (IX.2)$$

$$\varepsilon'_z = \frac{w_o}{u_o} \tag{IX.3}$$

donne pour définition des longueurs caractéristiques selon les trois axes :

$$\lambda_i = \frac{l_o}{\varepsilon_i} \cdot \varepsilon_i \tag{IX.4}$$

avec $i = 1, 2, 3$ correspondant respectivement à x, y, z

ainsi qu'un temps caractéristique

$$t_o = \frac{\lambda_i}{u_i} = \frac{l_o}{v_o} \tag{IX.5}$$

Les formes adimensionnelles des coordonnées et du temps peuvent alors s'écrire sous la forme suivante :

$$x'_i = \frac{x_i}{\lambda_i} \tag{IX.6}$$

$$t' = \frac{t}{t_o} = \frac{v_o}{l_o} \cdot t \tag{IX.7}$$

L'écriture adimensionnelle des composantes de vitesse ne subit aucune modification (II.26 , II.27, II.28). Par contre, nous respectons la justification précédemment donnée de l'écriture adimensionnelle de la pression en nous orientant cette fois selon l'axe principal ox pour écrire respectivement :

$$p'' = \frac{p}{\rho u_o^2} \tag{IX.8}$$

ainsi que

$$g'' = g \frac{\lambda_z}{u_o^2} = gl_o \frac{w_o}{u_o^2 v_o} \tag{IX.9}$$

Les contraintes visqueuses adimensionnelles conservent fort logiquement leur forme initiale (II.31 à II.39).

L'introduction de ces définitions dans les équations complètes rend une équation de continuité adimensionnelle analogue à (II.40), tandis que les équations dynamiques

adoptent les formes adimensionnelles suivantes :

(II.12) s'écrit selon ox :

$$\varepsilon'_x \varepsilon'_y \left(\frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{\partial u'u'}{\partial x'} + \frac{\partial u'v'}{\partial y'} + \frac{\partial u'w'}{\partial z'} \right) = \frac{\varepsilon'_y}{\varepsilon'_x} g'' \sin \theta_x - \frac{\varepsilon'_z}{\varepsilon'_x} \frac{\partial p''}{\partial x'} + \varepsilon'_x \varepsilon'_y \left(\frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x'} + \frac{\partial \sigma'_{yx}}{\partial y'} + \frac{\partial \sigma'_{zx}}{\partial z'} \right) \quad (\text{IX.10})$$

(II.13) s'écrit selon oy :

$$\varepsilon'_y \left(\frac{\partial v'}{\partial t'} + \frac{\partial v'u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'v'}{\partial y'} + \frac{\partial v'w'}{\partial z'} \right) = \frac{\varepsilon'_y}{\varepsilon'_z} g'' \sin \theta_y - \frac{\partial p''}{\partial y'} + \varepsilon'_y \left(\frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial x'} + \frac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial y'} + \frac{\partial \sigma'_{zy}}{\partial z'} \right) \quad (\text{IX.11})$$

(II.14) s'écrit selon oz :

$$\begin{aligned} \varepsilon'_z \varepsilon'_y \left(\frac{\partial w'}{\partial t'} + \frac{\partial w'u'}{\partial x'} + \frac{\partial w'v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'w'}{\partial z'} \right) \\ = - \frac{\varepsilon'_y}{\varepsilon'_z} g'' \sin \theta_z - \frac{\varepsilon'_y}{\varepsilon'_z} \frac{\partial p''}{\partial z'} + \varepsilon'_z \varepsilon'_y \left(\frac{\partial \sigma'_{xz}}{\partial x'} + \frac{\partial \sigma'_{yz}}{\partial y'} + \frac{\partial \sigma'_{zz}}{\partial z'} \right) \end{aligned} \quad (\text{IX.12})$$

La forme particulière des équations montre la voie à suivre pour réduire les dimensions du problème.

Nous supposons les termes $\varepsilon'_z \varepsilon'_y$, ε'_y^2 , ε'_z^2 petits vis à vis de l'unité, ce qui revient à supposer négligeable tout carré de vitesses perpendiculaires à l'axe principal par rapport au carré de celle parallèle à cet axe longitudinal.

Les équations (IX.11, 12) trahissent une distribution de pression sur la section transversale uniquement influencée par l'effet gravitaire. Elles s'écrivent respectivement

$$\frac{\partial p''}{\partial y'} = 0 \quad (\text{IX.13})$$

$$\frac{\partial p''}{\partial z'} = - \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z} g'' \cos \theta \quad (\text{IX.14})$$

en reprenant la même définition unidimensionnelle de θ avec des axes x , z contenus dans un plan vertical. Cette orientation classique montre la constance de la pression sur toute horizontale tracée dans une section transversale ainsi que la classique distribution hydrostatique de pression influencée par l'inclinaison de la direction principale du lit par rapport à l'horizontale.

La présence dans la condition d'une élévation au carré renforce la validité des hypothèses.

Elles englobent aisément ces cas qui donnent lieu à l'apparition de courants transversaux d'importance secondaire, comme ceux engendrés par l'anisotropie de la turbulence entretenue par les variations de forme et de composition du fond (Tominaga et al), par un rayon de courbure de l'axe principal nettement supérieur à la hauteur d'eau (Tamaï et al) et, plus généralement, par toute variation suffisamment graduelle de la forme géométrique qu'adopte la section mouillée.

Elles peuvent faire l'objet de plus amples discussions pour des sinuosités prononcées à grande courbure et feront l'objet de quelques remarques dans le cadre particulier de propagation de fronts raides ou très prononcés.

IX.3. INTEGRATION DES EQUATIONS SUR LA SECTION

Poursuivons notre parallélisme de raisonnement avec le chapitre II pour constater que la forme simplifiée des équations (IX.10, 11, 12) ramenées sous forme dimensionnelle doit subir une intégration sur la section mouillée pour se réduire à un système unidimensionnel.

La figure IX.1. présente l'espace à prendre en compte et y définit les bornes d'intégration.

L'immédiate intégration des équations (IX.11, 12) écrites sous forme dimensionnelle permet de remplacer la pression par son expression

$$p = \rho g (h_s(x) - z \cos \theta) \quad (\text{IX.15})$$

dans l'équation dynamique selon x.

L'intégration de cette dernière et de l'équation de continuité sera menée en débutant par une intégration sur la largeur pour terminer avec la profondeur.

IX.3.1. Intégration sur la largeur locale

L'équation de continuité adopte la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-l_d}^{l_g} u \, dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-l_d}^{l_g} \omega \, dy + \left(v_{|y=l_g} - u_{|y=l_g} \frac{\partial l_g}{\partial x} - w_{|y=l_g} \frac{\partial l_g}{\partial z} \right) - \left(v_{|y=-l_d} - u_{|y=-l_d} \frac{\partial (-l_d)}{\partial x} - w_{|y=-l_d} \frac{\partial (-l_d)}{\partial z} \right) \quad (\text{IX.16})$$

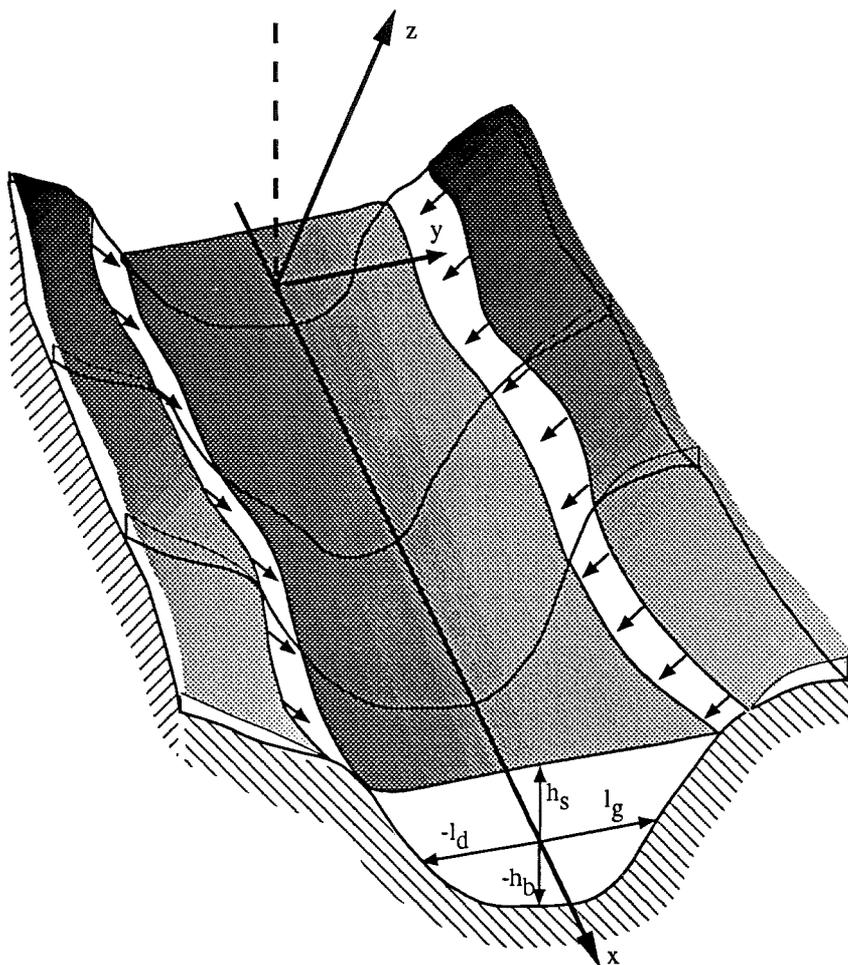


Figure IX.1.

Définition des bornes d'intégration et des échanges du système avec le monde extérieur

Quant à l'équation dynamique selon x, elle s'écrit sous sa forme intégrée sur la largeur :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-l_d}^{l_g} u \, dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-l_d}^{l_g} u \, u \, dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-l_d}^{l_g} u \, w \, dy$$

$$\begin{aligned}
 &= gl \left(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h_s}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-l_d}^{l_g} \sigma_{xx} dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-l_d}^{l_g} \sigma_{zx} dy \right) \\
 &- u_{|y=-l_d} \left(\frac{\partial(-l_d)}{\partial t} + u_{|y=-l_d} \frac{\partial(-l_d)}{\partial x} + w_{|y=-l_d} \frac{\partial(-l_d)}{\partial z} - v_{|y=-l_d} \right) \\
 &+ u_{|y=l_g} \left(\frac{\partial l_g}{\partial t} + u_{|y=l_g} \frac{\partial l_g}{\partial x} + w_{|y=l_g} \frac{\partial l_g}{\partial z} - v_{|y=l_g} \right) \\
 &+ \frac{1}{\rho} \left(\sigma_{yx|y=l_g} - \sigma_{xx|y=l_g} \frac{\partial l_g}{\partial x} - \sigma_{zx|y=l_g} \frac{\partial l_g}{\partial z} \right) \\
 &- \frac{1}{\rho} \left(\sigma_{yx|y=-l_d} - \sigma_{xx|y=-l_d} \frac{\partial(-l_d)}{\partial x} - \sigma_{zx|y=-l_d} \frac{\partial(-l_d)}{\partial z} \right) \tag{IX.17}
 \end{aligned}$$

Nous conservons la généralité d'une topographie éventuellement évolutive avec le temps, à la différence cette fois que nous supposons momentanément qu'elle n'est le siège d'aucun échange avec le monde extérieur.

Par conséquent, l'imposition va porter sur un non-décollement des particules fluides à la paroi :

$$v_{|y=-l_d} = \frac{\partial(-l_d)}{\partial t} + u_{|y=-l_d} \frac{\partial(-l_d)}{\partial x} + w_{|y=-l_d} \frac{\partial(-l_d)}{\partial z} \tag{IX.18}$$

$$v_{|y=l_g} = \frac{\partial l_g}{\partial t} + u_{|y=l_g} \frac{\partial l_g}{\partial x} + w_{|y=l_g} \frac{\partial l_g}{\partial z} \tag{IX.19}$$

Ces équations cinématiques s'accordent avec l'idée que nous nous faisons des échanges du système avec le monde extérieur. La figure IX.1. schématise la transmission de la contribution hydrologique, supposée ne pas s'opérer continûment au travers des parois mouillées mais plus proche d'un déversement à partir des berges.

Bien que ces échanges puissent être intégrés dans la contribution des apports hydrologiques qui seront introduits ultérieurement, ce raisonnement implique bien que nous ne prendrons en compte aucun effet d'infiltration au travers du lit, ni d'effet direct d'érosion sous l'action du courant.

Pour ce qui touche à la première contribution, Schrop et al ont montré que le surcroît de précision qu'elle était à même d'apporter est extrêmement sensible au bon ajustement des paramètres à la réalité.

Pour l'évolution temporelle de la géométrie sous l'action des courants, justifiable notamment dans les cas envisagés de rupture de barrage, nous verrons qu'elle fait soit partie d'un calcul séparé pour s'intéresser par exemple à l'évolution de la brèche dans un

ouvrage, soit qu'elle est supposée s'intégrer dans une certaine forme d'analyse globale du phénomène, qui répercute nombre d'intervenants dans des valeurs particulières de valeurs de frottement adaptées à des cas aussi extrêmes (Benoist et al). Nous aurons l'occasion d'y revenir ultérieurement.

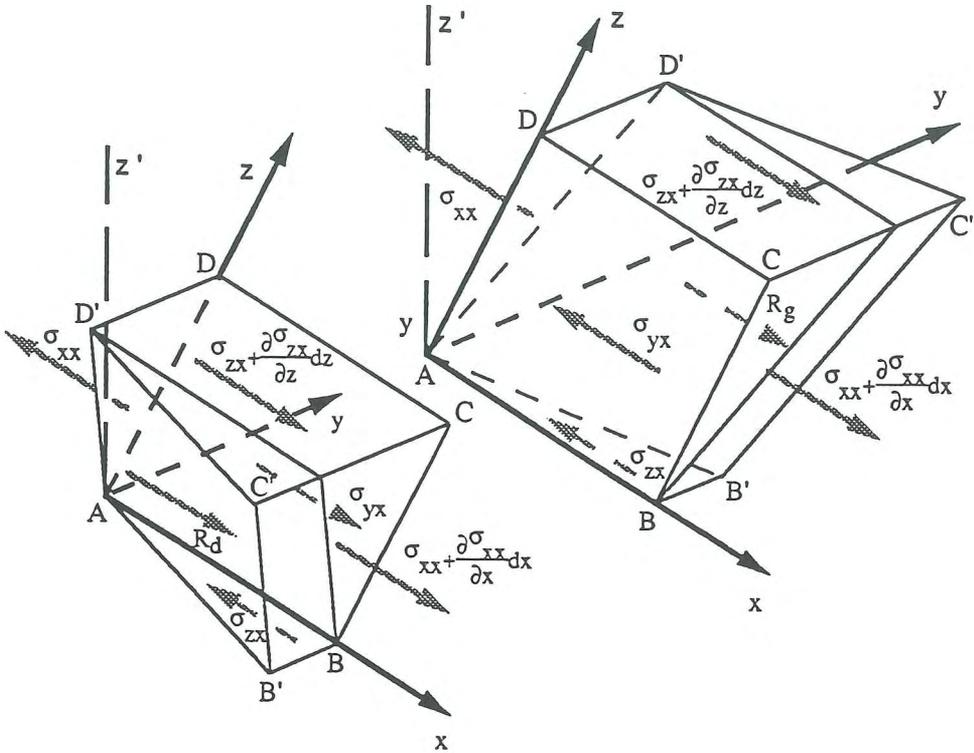


Figure IX.2.
Equilibre de volumes élémentaires à chaque paroi

Les conditions dynamiques se déduisent à nouveau des contraintes agissant sur les volumes élémentaires représentés à la figure IX.2. pour chaque berge. Leur construction correspond en tous points à celle décrite lors de l'établissement des conditions du chapitre II.

L'équilibre des contraintes agissant sur chaque facette donne la forme suivante pour le frottement sur la paroi :

$$R_g = \sigma_{yx|y=l_g} - \sigma_{xx|y=l_g} \frac{\partial l_g}{\partial x} - \sigma_{zx|y=l_g} \frac{\partial l_g}{\partial z} \quad (\text{IX.20})$$

$$-\mathbf{R}_d = \sigma_{yx|y=-l_d} - \sigma_{xx|y=-l_d} \frac{\partial(-l_d)}{\partial x} - \sigma_{zx|y=-l_d} \frac{\partial(-l_d)}{\partial z} \quad (\text{IX.21})$$

en négligeant les termes d'ordre supérieur.

L'introduction de ces relations dans les équations (IX.16, 17) simplifie substantiellement les écritures en éliminant toute contribution qui s'évalue sur les frontières.

IX.3.2. Intégration sur la profondeur locale

En introduisant la largeur totale $l(x, z)$ et en tenant compte de l'indépendance de h_b et h_s vis à vis de la coordonnée y , nous obtenons la forme suivante de l'équation de continuité :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h_b}^{h_s} l \, dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_b}^{h_s} \int_{-l_d}^{l_g} u \, dy \, dz + \int_{-l_d}^{l_g} \left(w_{|z=h_s} - u_{|z=h_s} \frac{\partial h_s}{\partial x} - \frac{\partial h_s}{\partial t} \right) dy \\ - \int_{-l_d}^{l_g} \left(w_{|z=-h_b} - u_{|z=-h_b} \frac{\partial(-h_b)}{\partial x} - \frac{\partial(-h_b)}{\partial t} \right) dy \end{aligned} \quad (\text{IX.22})$$

L'équation dynamique selon x devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h_b}^{h_s} \int_{-l_d}^{l_g} u \, dy \, dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_b}^{h_s} \int_{-l_d}^{l_g} u \, dy \, dz = \\ g (\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h_s}{\partial x}) \int_{-h_b}^{h_s} l \, dz + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_b}^{h_s} \int_{-l_d}^{l_g} \sigma_{xx} \, dy \, dz \\ + \int_{-l_d}^{l_g} u_{|z=h_s} \left(\frac{\partial h_s}{\partial t} - u_{|z=h_s} \frac{\partial h_s}{\partial x} - w_{|z=h_s} \right) dy - \int_{-l_d}^{l_g} u_{|z=-h_b} \left(\frac{\partial(-h_b)}{\partial t} - u_{|z=-h_b} \frac{\partial(-h_b)}{\partial x} - w_{|z=-h_b} \right) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\rho} \int_{-h_b}^{h_s} (R_g + R_d) dz + \frac{1}{\rho} \left[\left(\int_{-l_d}^{l_g} \sigma_{xx} dy \right) \frac{\partial(-h_b)}{\partial x} + \left(\int_{-l_d}^{l_g} \sigma_{zx} dy \right) \right]_{z=-h_b} \\
 & + \frac{1}{\rho} \left[\left(\int_{-l_d}^{l_g} \sigma_{xx} dy \right) \frac{\partial h_s}{\partial x} + \left(\int_{-l_d}^{l_g} \sigma_{zx} dy \right) \right]_{z=h_s}
 \end{aligned} \tag{IX.23}$$

L'écriture des conditions cinématiques sur ces frontières exprime à nouveau une condition de non-glissement. Tenant compte de l'ordre d'intégration pour l'expression des fonctions h_b et h_s , il vient :

$$w_{|z=-h_b} = \frac{\partial(-h_b)}{\partial t} + u_{|z=-h_b} \frac{\partial(-h_b)}{\partial x} \tag{IX.24}$$

$$w_{|z=h_s} = \frac{\partial h_s}{\partial t} + u_{|z=h_s} \frac{\partial h_s}{\partial x} \tag{IX.25}$$

Certaines contributions intégrales subsistent encore dans l'équation dynamique.

Un bilan, comparable à celui établi au chapitre II, montre que celles qui impliquent des contraintes évaluées à la surface équilibrent d'éventuelles forces qu'exercent le monde extérieur sur le système. Les phénomènes à étudier permettent de négliger ces effets.

Les contributions équivalentes au fond s'annulent également si les parois solides gauche et droite réduisent progressivement leur entredistance jusqu'à annuler au fond la largeur du lit. Sinon, elles équilibrent les frottements sur le fond du lit et complètent l'effet global de frottement qu'exerce la paroi sur l'ensemble du périmètre mouillé.

La forme classique s'obtient alors en introduisant les traditionnelles définitions de section mouillée ω et de débit q :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \tag{IX.26}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{q^2}{\omega} \right) = g \omega \left(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h_s}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} t_x + S_x \tag{IX.27}$$

en reprenant la notation t_x pour désigner cette fois l'effet global du frottement sur le

périmètre mouillé ainsi que ρ_ω pour caractériser l'inégale répartition de vitesse sur la section.

On constate l'expression générale du terme qui s'identifie à la dérivée spatiale de la cote de surface libre pour une pente de fond faible :

$$\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h_s}{\partial x} = - \frac{\partial Z}{\partial x} \quad (\text{IX.28})$$

et que nous simplifierons en une seule notation en associant à Z une interprétation adaptée à la valeur de θ pour la topographie considérée.

La notation S_x dans (IX.27) globalise à nouveau l'effet des contraintes visqueuses normales à la section transversale.

À l'instar des discussions du chapitre II, toutes ces notations simplificatrices cachent des contributions que nous sommes incapables d'évaluer sans indication supplémentaire sur la distribution des vitesses et sur le fluide considéré.

Si leur équivalent bidimensionnel a rapidement disparu dans des simplifications propres à l'hydrologie, précisons leur signification et les valeurs qu'elles sont susceptibles de prendre dans le cadre d'un modèle général unidimensionnel.

IX.4. COEFFICIENT D'INEGALE REPARTITION DE VITESSE

Le coefficient ρ_ω ne doit sa présence au sein des équations qu'au désir d'exprimer toute contribution intégrale sous une forme unidimensionnelle n'impliquant plus que les variables de débit q et de section ω . Compte tenu de l'impossibilité d'obtenir une telle expression générale pour l'intégrale sur la section du carré de la vitesse axiale, nous forçons le type d'écriture souhaité en introduisant un paramètre unidimensionnel dont nous rappelons la définition :

$$\rho_\omega = \frac{\omega}{q^2} \iint \bar{u}^2 \, d\omega \quad (\text{IX.29})$$

Il synthétise, pour les équations unidimensionnelles, certaines informations qu'elles ne sont plus à même de discerner, en l'occurrence certaines caractéristiques sur la forme de diagramme qu'adopte la vitesse axiale sur chaque section transversale.

Car il faudrait sinon conserver la généralité du système d'équations originel et faire intervenir les tensions turbulentes pour espérer reproduire les profils expérimentaux mesurés dans des situations privilégiées (Johns et al).

De telles approches ne trouvent une justification que dans des études particulières comme l'analyse des effets d'érosion par exemple, où les directions des contraintes au fond peuvent différer de l'orientation du courant moyen (Steffert et al).

Ce type d'étude tend par ailleurs à renforcer l'idée qu'il est préférable, même en rupture de barrage, de s'en tenir à des topographies fixes, puisqu'en dehors de l'incertitude qui subsiste sur le diagramme réel de vitesse dans des situations aussi tourmentées, une loi d'évolution d'érosion en fonction des variables moyennes constituerait une approche insuffisamment fiable.

Si la valeur de ρ_ω reflète la forme de surface mouillée impliquée et le profil de vitesse développé, elle ne dépend respectivement ni de sa surface, ni de son amplitude. Ce témoin d'un caractère tridimensionnel de distribution résume, par sa seule contribution, une réalité physique difficilement caractérisable mathématiquement.

Evoquons ce constat en trois stades :

IX.4.1. Profils de vitesse en mouvement permanent

En se basant sur la valeur minimale qu'est susceptible de prendre ce coefficient ($\rho_\omega = 1$), le profil idéal peut se référencer comme celui qui distribue uniformément la vitesse sur la section. Sa modification, lorsqu'il est confronté aux conditions d'un écoulement réel, tient d'abord à la présence d'une jonction paroi-fluide qui l'affecte profondément par l'imposition des conditions de non-glissement sur l'ensemble du périmètre mouillé.

Nous répercuterons l'effet de cet intervenant majeur en imaginant arbitrairement certains profils qui répondent à cette imposition dans quelques cas simples de section transversale. L'examen de la figure IX.3. révèle immédiatement l'impact de toute irrégularité du profil sur des valeurs de ρ_ω de plus en plus majorées par rapport à l'unité.

L'écoulement stationnaire est sans doute le contexte le plus adéquat pour une caractérisation simple du champ réel de vitesses. Pour sérier davantage les intervenants, bon nombre d'expérimentateurs travaillent sur de très larges sections mouillées en regard des hauteurs d'eau impliquées.

C'est dans ce cadre restreint d'un champ de vitesse unidimensionnel (selon un axe perpendiculaire à un fond régulier) qu'intervient cette courte discussion.

En séparant préalablement du diagramme la couche caractéristique des effets de parois où se développent des gradients considérables, Darcy et Bazin proposent une loi parabolique du type suivant :

$$u = u_m - e(z - z_m)^2 \quad \text{(IX.30)}$$

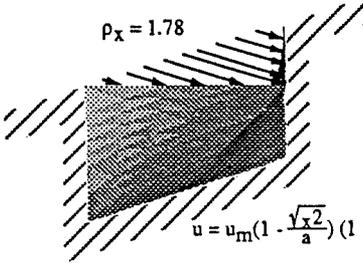
La forme suggérée indique bien que le maximum de vitesse ne se situe pas nécessairement en surface. Bazin précise ses expériences en le situant à une distance du fond qui varie entre $0,7 h_t$ et h_t .

$$\rho_x = \Omega \frac{\int_{-a}^a \int_{-b}^b u^2 dy dz}{\left(\int_{-a}^a \int_{-b}^b u dy dz \right)^2}$$

Section rectangulaire a x b

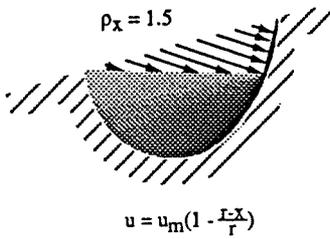
Section circulaire de rayon r

$\rho_x = 1.78$



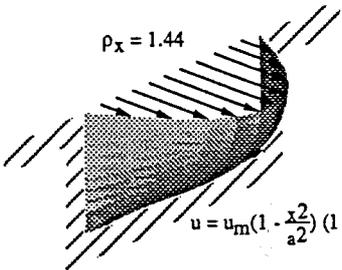
$u = u_m \left(1 - \frac{y}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right)$

$\rho_x = 1.5$



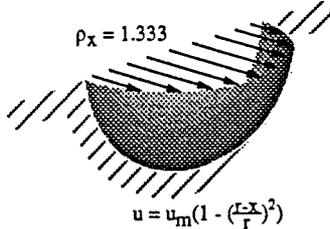
$u = u_m \left(1 - \frac{r}{r}\right)$

$\rho_x = 1.44$



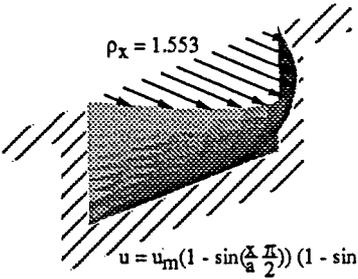
$u = u_m \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$

$\rho_x = 1.333$



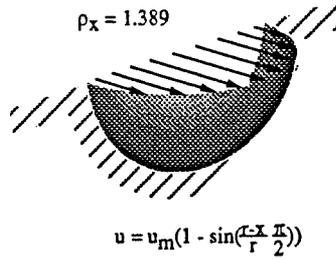
$u = u_m \left(1 - \left(\frac{r-x}{r}\right)^2\right)$

$\rho_x = 1.553$



$u = u_m \left(1 - \sin\left(\frac{x}{a} \frac{\pi}{2}\right)\right) \left(1 - \sin\left(\frac{y}{b} \frac{\pi}{2}\right)\right)$

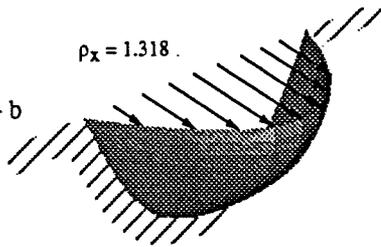
$\rho_x = 1.389$



$u = u_m \left(1 - \sin\left(\frac{r-x}{r} \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$\rho_x = 1.318$

Section parabolique $y = a x^2 - b$



$u = u_m \left(1 - \frac{a x^2}{y + b}\right) \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$

Figure IX.3. - Valeur du coefficient d'inégale répartition de vitesse pour différentes sections et fonctions de distribution de vitesse

Une autre loi simple établit une relation de puissance qui implique un maximum de vitesse à la surface (u_s) :

$$\frac{u}{u_s} = \left(\frac{z + h_b}{h_t} \right)^m \quad (\text{IX.31})$$

Une forme plus répandue de la loi de puissance fait référence à la vitesse de frottement $u^* = \sqrt{\tau^*/\rho}$ (calculée à partir de la contrainte de cisaillement mesurée à la paroi τ^*) dans une loi où interviennent la longueur caractéristique d'écoulement, des constantes tirées de l'expérimentation (dont celle de Karman $\kappa = 0,4$), enfin des paramètres liés par relations empiriques à des grandeurs caractéristiques de l'écoulement comme le nombre de Reynolds (Chen).

Cette description montre que la prise en compte d'une analyse mathématique plus respectueuse de la réalité débouche, dans les cas les plus favorables, sur une distribution qui présuppose la connaissance de la solution. On imagine aisément la lourdeur d'une procédure itérative qui tiendrait compte, section par section, d'une correction de $\rho\omega$ sur base du résultat approximé afin d'en évaluer une nouvelle approximation.

L'examen des lois logarithmiques confirme cette impression. Lorsqu'on admet une loi de ce type pour décrire la répartition de vitesse qui prévaut dans la couche turbulente proche de la paroi (elle occupe 15 à 20 % de la profondeur totale selon Zippe et al), l'expérimentation en canaux assez lisses tend à valider l'extension d'une loi du type de celle donnée en (IX.32) à l'entière du profil (Zippe et al, par exemple).

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{u^* z}{\nu} \right) + e' \quad (\text{IX.32})$$

avec

- ν la viscosité cinématique
- e' une constante à caler par expérimentation, approximée en canaux à parois hydrauliquement lisses à 5,5 par Cardoso et al (par conséquent indépendante du nombre de Reynolds) mais sujette dans la littérature à de larges variations.

Lorsqu'ils comparent cette hypothèse à la loi largement répandue de Coles pour décrire l'entière du profil (formule IX.33), Cardoso et al constatent que la première option doit essentiellement son succès à un effet retardateur proche de la surface libre (Chow) qui rapproche in fine le diagramme expérimental de la loi logarithmique censée le décrire. L'intervention de cet effet, attribué par les auteurs à de faibles courants secondaires d'amplitude réduite, montre les limites d'une loi qui amalgame une série d'intervenants.

$$\frac{u_m - u}{u^*} = - \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{z}{\delta} \right) + \frac{2\pi}{\kappa} \cos^2 \left(\frac{\pi z}{2\delta} \right) \quad (\text{IX.33})$$

avec

u_m vitesse maximale observée à $z = \delta$

π paramètre de Coles, fonction du nombre de Reynolds

Quoi qu'il en soit, leurs conclusions, synthétisées à la figure IX.4., concordent avec celles de Darcy pour ce qui concerne le maximum de vitesse et sa situation.

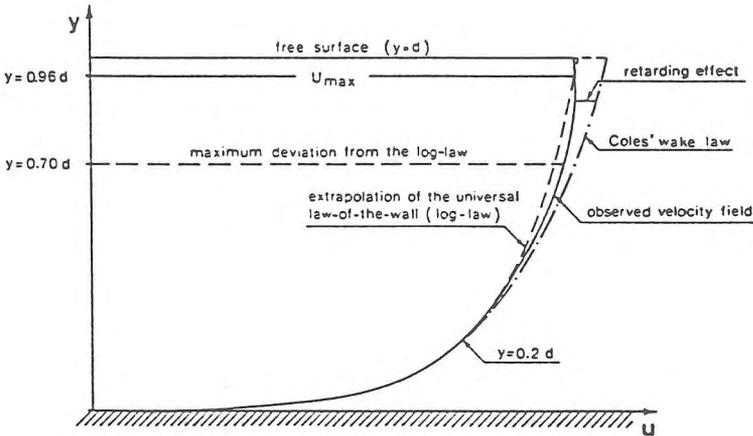


Figure IX.4.
Distribution de la vitesse sur la hauteur d'après Cardoso et al

Cette première analyse adopte des hypothèses d'écoulement peu en rapport avec l'instationnarité des phénomènes que nous souhaitons modéliser. Voyons en quels termes peuvent être maintenues les conclusions tirées jusqu'ici pour de telles circonstances.

IX.4.2. Profils de vitesse en mouvement instationnaire

La principale difficulté de ce type d'étude est de définir les termes généraux d'un signal instationnaire. Tu et al abordent cette question en observant la forme habituelle des signaux de débit. Elle leur fait adopter, comme base commune à leurs essais, une forme d'hydrogramme qui combine le profil accentué d'une crue avec une décrue beaucoup plus graduelle dans le temps. Aux simplifications géométriques de section s'ajoute encore l'incontournable particularisation du phénomène à analyser. Leurs mesures établissent néanmoins certains caractères marquants pour une section large à fond graveleux.

- Les points situés dans chaque section transversale près de la surface libre obtiennent un pic de vitesse plus précoce que ceux situés près du fond, respectant ainsi les prédominances locales des forces d'inertie ou de viscosité.

- Pour une égale hauteur d'eau, les vitesses locales sont généralement supérieures en phase de crue, à l'exception des couches voisines du fond, ce qui concorde avec l'effet d'hystérésis signalé à la figure III.13.

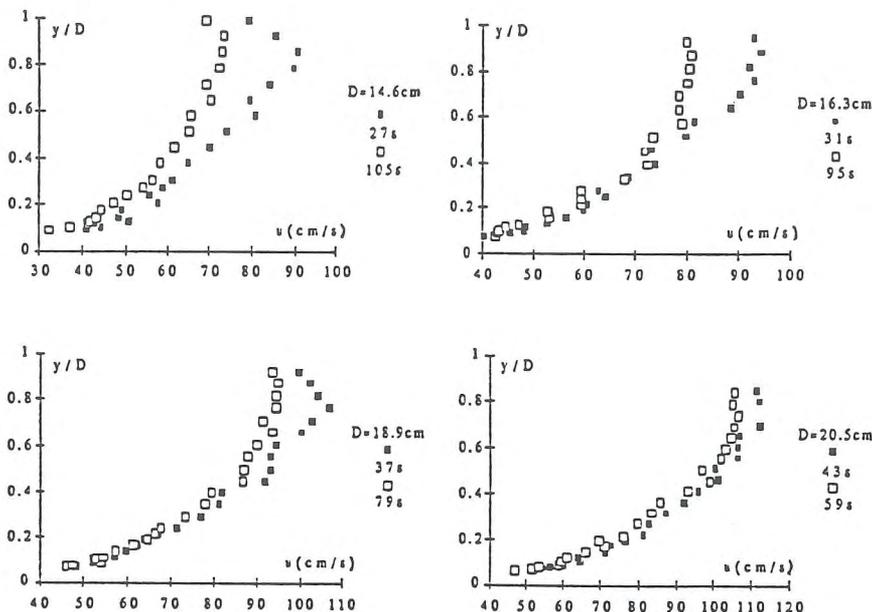


Figure IX.5.
Distribution de la vitesse sur la hauteur en phase de crue et décrue pour une même hauteur d'eau (Tu et al).

- Par contre, à égalité de vitesse moyenne, les profils des différents stades de passage de l'onde s'alignent valablement sur une courbe commune. Les abords de la surface libre font exception à cette règle, avec des vitesses en décrue généralement inférieures à leurs homologues en phase de crue.

La conclusion la plus significative de ce type d'essais est de reconduire les formulations logarithmiques déjà citées en procédant à un ajustement approprié des paramètres adapté à chaque état.

Tu et al proposent par ailleurs certaines relations empiriques qui les lient à un coefficient représentatif de l'instationnarité du phénomène étudié. Ces conclusions encourageantes ne peuvent cependant cacher qu'à cause peut être du caractère assez restrictif des hypothèses de travail sur le signal étudié, ce type d'essai reste encore fort confidentiel dans la littérature.

IX.4.3. Ondes raides à forte amplitude

Il apparaît que l'universalité apparente d'une loi mathématique s'accompagne d'une liaison des paramètres au fini de surface, à la forme de section et à l'écoulement lui-même. La recherche d'une bonne correspondance avec la réalité passe inévitablement par un paramètre à la fois variable dans le temps et l'espace.

Le surcroît de calcul qui résulterait de cette prise en compte semble d'autant moins justifié que la forme de l'hydrogramme de référence, si elle s'identifie à une majorité de diagrammes usuels, nous paraît ne pas englober suffisamment des situations exceptionnelles que nous serons amenés à rencontrer. De la distribution de vitesse au sein d'un front raide à celle des fortes crues qui remontent les bras latéraux en infléchissant puis inversant le sens naturel d'écoulement s'imagine aisément une série de situations à même de perturber fondamentalement ces conclusions.

Les prédominances locales des forces de frottement et d'inertie conduisent même à envisager l'analyse de profils où la vitesse change de signe sur la hauteur, avec une hausse significative des valeurs de $\rho\omega$.

Toutes ces considérations nous amènent finalement à ne considérer $\rho\omega$ que comme un paramètre, fixé par défaut à l'unité, sauf cas dûment mentionnés où nous évaluerons l'amplitude de ses effets.

IX.5. CONTRIBUTION S_x DES CONTRAINTES NORMALES A LA SECTION

L'intégration sur la section mouillée laisse logiquement dans l'équation un terme représentatif de l'effet extérieur global selon l'axe principal d'écoulement, qui agit sur une tranche d'épaisseur dx .

$$S_x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-l_d}^{l_g} \int_{-h_b}^{h_s} \sigma_{xx} \, dy \, dz \tag{IX.34}$$

Par sa dérivée selon cet axe, il prend en compte tant l'accroissement de contrainte que celui de la section mouillée.

Dans la continuité des conclusions du chapitre précédent, nous allons expliciter cette expression pour une répartition uniforme de vitesse sur la section ($\rho\omega = 1$). Avec l'hypothèse d'un fluide newtonien, il vient :

$$S_x = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-l_d}^{l_g} \int_{-h_b}^{h_s} 2 v \frac{\partial u}{\partial x} dy dz = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \omega \right) \quad (IX.35)$$

Nous raisonnons directement sur cette forme simplifiée pour statuer sur le sort à lui réserver dès que nous posséderons quelques ordres de grandeur significatifs sur chaque application type à modéliser.

IX.6. INTRODUCTION DES APPORTS EXTERIEURS

Par opposition au chapitre II où les influences du monde extérieur s'étaient manifestées au niveau des conditions cinématiques, nous avons volontairement écarté toute idée d'échange continu au niveau même des parois mouillées. Il s'agit là d'une conséquence de l'idéalisation du phénomène de passage d'un écoulement hydrologique en fine lame à celui en rivière que nous supposons, en accord avec la figure IX.1., se produire par déversement à partir des berges.

En supposant que ce dernier se produit perpendiculairement à la direction principale d'écoulement et, par conséquent, que le débit latéral par unité de longueur $q_L(x, t)$ n'apporte aucune contribution au bilan de quantité de mouvement selon x , nous modifions simplement l'équation de continuité (IX.26) pour écrire :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = q_L \quad (IX.36)$$

IX.7. FERMETURE DU SYSTEME

Nous nous trouvons à présent face un système de deux équations aux dérivées partielles liant deux variables indépendantes, l'abscisse x et le temps t , et trois indépendantes que sont la section ω , le débit q et l'altitude de surface libre Z .

Nous pouvons même ajouter une quatrième, le périmètre mouillé p_m , qui intervient dans l'expression de la loi de frottement. Dans ces conditions, deux équations supplémentaires sont indispensables, qui caractérisent les parois limitant l'écoulement. Nous les écrivons sous la forme générale suivante.

$$P_m = P_m [\omega(x, t), x] \quad (IX.37)$$

$$Z = Z [\omega(x, t), x] \quad (IX.38)$$

Leur connaissance dans les conditions les plus générales d'un écoulement réel et leurs propriétés de dérivabilité nous permettent d'écrire :

$$\frac{\partial Z}{\partial x_{lt}} = \frac{\partial Z}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial x_{\omega}} \quad (\text{IX.39})$$

Nous examinerons à la lumière de la discrétisation spatiale choisie dans quelle mesure les contributions du membre de droite pourraient faire l'objet d'une évaluation. Dans un premier temps, nous nous contenterons d'introduire ces relations dans (IX.26, 27) pour établir une forme d'écriture plus appropriée aux développements futurs. Dans ce même but, nous précisons d'emblée la loi de frottement utilisée, très logiquement turbulente, qui s'écrit, selon Manning :

$$\frac{t_x}{\rho g} = - \frac{n^2 q |q|}{\omega R_m^{4/3}} \quad (\text{IX.40})$$

où

R_m représente le rayon hydraulique défini comme le rapport entre la surface mouillée ω et le périmètre mouillé p_m

$1/n$ représente le coefficient de Manning

Cette loi, déduite initialement de considérations stationnaires, s'est depuis universellement imposée dans l'étude de processus instationnaires au point de servir de référence pour la définition des paramètres de frottement dans certaines législations qui régissent la modélisation d'écoulements consécutifs aux ruptures de barrage. Son introduction à ce niveau d'établissement des équations n'entame en rien des raisonnements applicables à tout autre formulation non-linéaire de la vitesse et la section.

Nous synthétiserons ces considérations sous la forme suivante du système, pour ρ , ω et v indépendants de x :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \omega \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (c^2 - \rho \omega u^2) & 2\rho \omega u \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \omega \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -q_L \\ g\omega \frac{\partial Z}{\partial x_{\omega}} + n^2 \frac{g|q|}{R_m^{4/3}} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(v \omega \frac{\partial u}{\partial x} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\equiv \frac{\partial X}{\partial t} + A(X) \frac{\partial X}{\partial x} + D(X) = 0 \quad (\text{IX.41})$$

en reprenant la notation générale classique pour la célérité des ondes en écoulement à

surface libre :

$$c^2 = \frac{g\omega}{\frac{\partial\omega}{\partial Z}|_x} \tag{IX.42}$$

ou, sous forme conservative (Katopodes et al):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\omega}{q} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{q}{q} u + g \frac{p_\omega}{\omega} \right] + \left[-g \omega \sin \theta + n^2 \frac{g}{R_m^{4/3}} \frac{u|q|}{\omega} + g p_x + 2 \left(v \omega \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \equiv \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial B(X)}{\partial x} + D'(X) &= 0 \end{aligned} \tag{IX.43}$$

avec

$$p_\omega(h) = \int_0^h (h - \xi) l(x, \xi) d\xi \tag{IX.44}$$

$$p_x(h) = \int_0^h (h - \xi) \frac{\partial l(x, \xi)}{\partial x} d\xi \tag{IX.45}$$

$$l = l_g + l_d$$

Chapitre X

Modèle numérique d'écoulement filaire en l'absence de choc : Première approche

SOMMAIRE

- X.1. *Introduction*
- X.2. *Discrétisation spatiale et temporelle*
- X.3. *Résolution numérique du système non-linéaire*
- X.4. *Etude de stabilité du schéma numérique*
- X.5. *Introduction des relations hauteur - section - périmètre*
- X.6. *Extension de la méthode numérique à la résolution de réseaux ramifiés*
- X.7. *Simulation de 10 heures de gestion d'un bief de la Meuse*
- X.8. *Conclusion*

X.1. INTRODUCTION

La méthode de résolution s'inscrit dans le même contexte de généralité que celui qui a présidé à l'établissement des équations : Elle doit propager avec la même précision chacun des hydrogrammes de la gamme envisagée, sans effet destructif d'un choix extrême de paramètres de modélisation ou de forme de signal à considérer.

Le cadre unidimensionnel que propose le système d'équations s'accorde particulièrement bien avec la mise en oeuvre d'une technique par différences finies. Ces dernières n'y subissent pas les habituelles objections d'une description plus malaisée de la géométrie et d'autres propriétés du système, qui sont les clefs de l'engouement actuel pour les éléments finis en multi-dimensionnel.

Si la préférence de bon nombre d'auteurs pour des méthodes implicites fut jadis largement controversée face à la commodité et l'économie dont font preuve les schémas explicites, il semble que l'évolution et la disponibilité des machines performantes privilégie le recours à ces techniques réputées pour leur stabilité et les pas temporels plus importants qu'elles autorisent.

Cette tendance de se détourner de la réalisation d'algorithmes simples et peu coûteux en temps de calcul, propre aux schémas explicites, est particulièrement sensible en modélisation d'écoulements consécutifs aux ruptures de barrage où la recherche d'un couplage idéal de stabilité et de dissipation sélective semble trouver des voies prometteuses dans ces techniques plus exigeantes.

Dans l'éventail des formulations explicites, la méthode des caractéristiques, directement basée sur la description de la propagation des ondes, fait partie des options les plus séduisantes, si son application aux cas limites envisagés ne mettait en lumière d'importants écueils que nous évoquerons.

La perspective de ne pas exclure du choix une technique implicite éclaire la technique des éléments finis sous un autre jour puisqu'en ressortissant de la même famille, elle en cumule également les avantages.

Son application à l'approche hydrologique unidimensionnelle a par ailleurs montré qu'elle pouvait globaliser et généraliser bon nombre de schémas différences finies connus pour leur efficacité, à condition de s'intéresser à certaines techniques de pondération particulières.

A ces quelques faits et à la liberté qu'elle offre de choisir le degré d'interpolation souhaité s'ajoute l'expérience numérique acquise dans la modélisation de l'écoulement hydrologique en fine lame.

Si les connaissances de la partie I, accumulées au fur et à mesure de la progression dans l'étude des phénomènes, peuvent se synthétiser en une résolution efficiente des équations complètes, la propagation en axe filaire ne constitue plus seulement une conséquence logique de la première partie par ses aspects hydrologiques, mais elle en poursuit la constante gradation de raisonnement par la résolution correspondante d'équations plus sophistiquées appliquées, entre autres, à la propagation de chocs.

Cette continuité de raisonnement dans l'élaboration de schémas numériques se retrouve également dans la perspective de développer une méthode de résolution indépendante du caractère unidimensionnel des équations. Elle ouvrirait alors la voie à une extension aisée aux autres dimensions, dans la perspective d'études complémentaires locales de particularités géométriques qui mettent en péril les hypothèses unidimensionnelles évoquées.

Cette perspective, qui dépasse les limites fixées pour ce travail, constitue un sujet de recherches fort motivant pour l'avenir.

En conséquence, l'identité de raisonnement qui prévalait avec le chapitre II lors des développements théoriques va se poursuivre. Nous nous efforcerons de suivre, dans l'élaboration d'une méthode de résolution, la même trame de raisonnement que dans la première partie pour mieux en exploiter tous les acquis.

Le raisonnement tiendra compte néanmoins de la multiplication des équations et de la quantité substantielle d'opérations numériques requises dans chaque modélisation de phénomène évolutif non-linéaire afin d'opter pour un processus itératif moins exigeant.

L'analyse théorique préalable du schéma sur un système linéarisé cherche à cerner ses comportements intrinsèques et plus spécifiquement sa propension à la dissipation numérique. Ses liaisons aux paramètres de la modélisation sont fondamentales dans la perspective d'une modélisation fiable de fronts raides.

La polyvalence du modèle théorique plaide également en faveur d'un mode de description très libéral de chaque section transversale rencontrée, ainsi que d'une totale indépendance de la méthode vis-à-vis des futures géométries ramifiées à prendre en compte.

Ce premier chapitre, consacré aux problèmes numériques en écoulement filaire ramifié, pose les premiers jalons d'une méthode générale dont les premiers tests s'opèrent dans le contexte de modélisation de gestion de retenues de basse chute.

X.2. DISCRETISATION SPATIALE ET TEMPORELLE

Nous reprendrons intégralement les principes de discrétisation exposés au paragraphe IV.2. La discrétisation spatiale implicite par différences finies définie en (IV.2) se combine, dans un premier temps, à des éléments finis de types usuels qui assurent la discrétisation spatiale du système. Compte tenu de l'intervention de deux fonctions inconnues, nous généraliserons les écritures de la façon suivante :

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ \hat{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_j & N_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & N_j & N_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_j \\ \Omega_n \\ Q_1 \\ Q_j \\ Q_n \end{bmatrix} = N^T \cdot Y \quad (X.1)$$

où

les fonctions N_i reprennent leur définition originelle restreinte à une dimension.

En développant les notations du paragraphe IV.2. à l'établissement, par la méthode de Galerkin, de la forme intégrale à minimiser, on obtient directement pour (IX.43) :

$$\int_S P \left[\frac{\hat{X}^{t+\Delta t} - \hat{X}^t}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial x} B[\theta_t \hat{X}^{t+\Delta t} + (1 - \theta_t) \hat{X}^t] + D'(\hat{X}^{t+\Delta t}, \hat{X}^t) \right] dS = 0 \quad (X.2)$$

où

la matrice des fonctions d'orthogonalisation P s'identifie, pour la méthode de Galerkin, à N .

Nous n'alourdirons pas davantage l'expression du système d'équations avant de décrire l'algorithme développé pour le résoudre. Soulignons simplement qu'à chaque pas, il implique, pour n noeuds de discrétisation, la résolution d'un système non-linéaire à 2 n inconnues, dans l'hypothèse adoptée pour ce travail d'un même degré d'interpolation choisi pour chaque inconnue.

X.3. RESOLUTION NUMERIQUE DU SYSTEME NON-LINEAIRE

Nous avons décrit et mis en oeuvre au chapitre IV la méthode la plus générale pour mener à bien la résolution d'un tel système non-linéaire. La convergence rapide de la méthode de Newton-Raphson, lorsqu'on débute d'une première approximation assez proche de la solution, la rend attractive dans un processus évolutif dans le temps.

Si nous avons souligné le caractère économique en taille mémoire requise par cette méthode appliquée au cadre de l'équation cinématique, c'est pour l'opposer aux tailles de matrices à mettre en jeu pour le système d'équations envisagé à présent.

La construction et l'inversion de tels systèmes a conduit depuis longtemps nombre de numériciens à développer des alternatives inspirées de cette méthode et qui ne répètent pas ces opérations à chaque étape.

Notre démarche diffère de ces méthodes dans la mesure où la recherche de l'efficacité a davantage porté sur la taille des matrices à prendre en compte. Plutôt que de s'orienter vers des artifices accélérateurs pour résoudre un système de taille $2n \times 2n$, nos efforts ont porté sur la recherche d'un schéma convergent agissant par découplage du système complet en deux systèmes de $n \times n$ équations, résolus séquentiellement :

- Le premier rassemble les équations de continuité discrétisées pour évaluer une nouvelle approximation des inconnues nodales $\Omega_j^{t+\Delta t}$.

Les débits au pas calculé y sont remplacés soit par une valeur prédite sur base de deux pas précédents lorsqu'on entame le processus itératif, soit par la valeur calculée à l'itération précédente pour la suite des évaluations. En reprenant ces approximations sous la notation Q^* , il vient :

$$\Omega_j^{t+\Delta t} \int_S P_i M_{1j} dS = \int_S P_i T_1 dS \quad (X.3)$$

avec

$$M_{1j} = \frac{N_j}{\Delta t} \quad (X.4)$$

$$T_1 = \frac{\omega^t}{\Delta t} - (1 - \theta_t) \frac{\partial q^t}{\partial x} - \theta_t \frac{\partial q^*}{\partial x} + (1 - \theta_t) q_L^t + \theta_t q_L^{t+\Delta t} \quad (X.5)$$

Nous nommerons ce premier groupe d'équations "système continuité".

- Le second système regroupe les équations dynamiques discrétisées pour en tirer une nouvelle approximation des inconnues nodales $Q_j^{t+\Delta t}$.

Cette procédure n'est possible qu'avec un traitement des termes non-linéaires qui consiste à conserver l'inconnue de débit comme telle et à remplacer l'autre par une notation étoilée, en reprenant la signification précédemment décrite de la méthode de prédiction-corrrection.

L'expérience du comportement dont fait preuve le processus itératif proposé conduit par ailleurs à ne pas user, pour ce second système, de la dernière approximation

$\Omega_j^{t+\Delta t}$ qui vient d'être calculée par le premier système mais à se baser préférentiellement sur celle de la prédiction ou de l'itération précédente pour résoudre le système suivant :

$$Q_j^{t+\Delta t} \int_S P_i M_{2j} dS = \int_S P_i T_2 dS \quad (X.6)$$

avec

$$M_{2j} = N_j \left(\frac{1}{\Delta t} + \theta_t g \frac{n^2 |u^*|}{R^{*4/3}} - \rho_\omega \theta_t \frac{u^*}{\omega^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial x} \right) + 2 \rho_\omega \theta_t u^* \frac{\partial N_j}{\partial x} \quad (X.7)$$

$$T_2 = \frac{q^t}{\Delta t} - \rho_\omega (1 - \theta_t) \frac{\partial (uq)^t}{\partial x} - (1 - \theta_t) g \omega^t \frac{\partial Z^t}{\partial x} - \theta_t g \omega^* \frac{\partial Z^*}{\partial x} - (1 - \theta_t) g \frac{n^2 q^* |u^*|}{R^{*4/3}} + 2 \theta_t \frac{\partial}{\partial x} \left(v \omega \frac{\partial u}{\partial x} \right)^* + 2(1 - \theta_t) \frac{\partial}{\partial x} \left(v \omega \frac{\partial u}{\partial x} \right)^t \quad (X.8)$$

Ce second groupe d'équation portera le nom de "système dynamique".

L'algorithme conserve en substance une forme analogue à celui décrit au chapitre IV pour l'écoulement hydrologique, aux différences près qu'on double les opérations par la résolution des 2 systèmes associés aux deux variables inconnues et que le calcul ne porte plus sur la détermination d'une correction à porter à l'approximation précédente mais bien sur l'évolution de nouvelles grandeurs complètes $\Omega_j^{t+\Delta t}$ et $Q_j^{t+\Delta t}$.

Le schéma proposé a toujours fait preuve de caractéristiques de convergence très satisfaisantes même dans les conditions les plus sévères d'écoulement perturbé, pour autant bien sûr de s'en tenir à des valeurs raisonnables du nombre de courant.

X.4. ETUDE DE STABILITE DU SCHEMA NUMERIQUE

X.4.1. Approche théorique linéaire

Nous reproduirons le raisonnement désormais classique d'étude de stabilité par l'introduction de développements en série dans le système linéarisé. Le raisonnement évolue parallèlement au nombre croissant de variables et porte sur la forme suivante des

équations particularisées à une section rectangulaire et à une pente de fond constante ($\sin \theta$) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \omega \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (c_o^2 - \rho_\omega u_o^2) & 2\rho_\omega u_o \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \omega \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -g \sin \theta & T_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ q \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{X.9})$$

avec

u_o la vitesse caractéristique

c_o la célérité caractéristique

T_f coefficient de frottement, qui intègre dans son expression la vitesse caractéristique dans le cas d'un écoulement turbulent.

Soulignons dès à présent que cette linéarisation ne reproduit pas une pratique assez courante qui consiste à éliminer purement et simplement la contribution convective de l'équation dynamique. Dans notre cas, la linéarisation de ce terme par deux contributions permet d'étendre la discussion sur son influence non négligeable pour les simulations qui nous occupent.

a. Nous analyserons d'abord le système non discrétisé en introduisant les développements suivants des inconnues :

$$\omega(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \omega_m \exp(i l_m x + i k_m t) \quad (\text{X.10})$$

$$q(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q_m \exp(i l_m x + i k_m t) \quad (\text{X.11})$$

ω_m et q_m représentent des complexes fixés par les conditions initiales, tandis que les autres notations conservent leur définition du chapitre IV.

- En travaillant avec le terme générique de chaque développement, nous obtenons le système suivant :

$$\exp(i l_m x + i k_m t) [i k_m \omega_m + i l_m q_m] = 0 \quad (\text{X.12})$$

$$\exp(i l_m x + i k_m t) \left[[(c_o^2 - \rho_\omega u_o^2) i l_m - g \sin \theta] \omega_m + (i k_m + 2 \rho_\omega u_o i l_m + T_f) q_m \right] = 0 \quad (\text{X.13})$$

- On se trouve en présence d'un système homogène en Ω_m, Q_m qui impose d'annuler le déterminant pour éviter une solution triviale. Cette condition établit une relation entre k_m et l_m qui nous ramène aux habituelles considérations sur l'étude du facteur d'amplification analytique λ_m .

La longueur des écritures nous fait renoncer à présenter in extenso l'expression générale de λ_m en fonction de l_m car elle se prête mal à une appréciation globale des caractéristiques de propagation et des facteurs qui l'influencent.

L'expression de λ_m représente surtout une référence pour son équivalent λ'_m établi sur les équations discrétisées et qui permet de statuer sur la qualité du schéma proposé.

Etablissons donc la forme de λ_m pour quelques situations particulières.

- En l'absence de terme convectif ($\rho_\omega = 0$) pour une propagation sur fond plat :

$$\lambda_m = \exp\left(-\frac{T_f \Delta t}{2}\right) \exp\left[\pm i l_m \Delta t \sqrt{c_o^2 - \left(\frac{T_f}{2l_m}\right)^2}\right] \quad (X.14)$$

On constate d'abord la présence des ondes progressive et régressive ainsi que l'effet du frottement qui réduit l'amplitude. Celui-ci exerce également son influence sur la vitesse de propagation du signal.

- Lorsque l'effet du frottement contrecarre celui de la pente de fond ($g \sin \theta = \rho_\omega u_o T_f$ comme en mouvement uniforme), on a pour une répartition uniforme de vitesse sur la section ($\rho_\omega = 1$):

$$\lambda_m = \exp\left(-\frac{T_f \Delta t}{2}\right) \exp\left[-i l_m \Delta t \left(u_o \pm \sqrt{c_o^2 - \left(\frac{T_f}{2l_m}\right)^2}\right)\right] \quad (X.15)$$

- Enfin la situation la plus idéalisée où le signal ne subit aucune réduction d'amplitude et qui, de ce fait, sera la mieux à même de faire ressortir les caractères intrinsèques du schéma numérique, une propagation de signal sur fond plat infiniment lisse pour une répartition uniforme de vitesse :

$$\lambda_m = \exp[-i l_m \Delta t (u_o \pm c_o)] \quad (X.16)$$

- b. Travaillons à présent sur la forme discrétisée du système d'équations obtenu pour un noeud i avec des éléments à 2 noeuds également espacés d'une distance Δx :

$$\left(1 + \frac{1}{6} \delta^2\right) (\Omega_i^{t+\Delta t} - \Omega_i^t) + 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_o (\theta_t Q_i^{t+\Delta t} + (1 - \theta_t) Q_i^t) = 0 \quad (X.17)$$

pour la continuité en reprenant les notations introduites en (IV.23, 24) et pour la dynamique :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{6} \delta^2\right) (Q_i^{t+\Delta t} - Q_i^t) + \left[4 \rho_\omega u_o \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_o + T_f \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(1 + \frac{1}{6} \delta^2\right)\right] [\theta_t Q_i^{t+\Delta t} + (1 - \theta_t) Q_i^t] \\ + \left[2(c_o^2 - \rho_x u_o^2) \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_o - g \sin \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(1 + \frac{1}{6} \delta^2\right)\right] [\theta_t \Omega_i^{t+\Delta t} + (1 - \theta_t) \Omega_i^t] = 0 \end{aligned} \quad (X.18)$$

- L'introduction des séries discrètes de Fourier :

$$\Omega_k^{n\Delta t} = \sum_{m=0}^{\text{node} - 1} \Omega'_m \exp [i (kx_m + k'_m n \Delta t)] \quad (X.19)$$

$$Q_k^{n\Delta t} = \sum_{m=0}^{\text{node} - 1} Q'_m \exp [i (kx_m + k'_m n \Delta t)] \quad (X.20)$$

dans (X.17) et (X.18) rend un système homogène en Ω'_m , Q'_m qui s'écrit, compte tenu des conventions d'écriture définies en (IV.29) :

$$Q_m (\lambda'_m - 1) \Omega'_m + 2 i b_m \frac{\Delta t}{2\Delta x} [(1 - \theta_t) + \theta_t \lambda'_m] Q'_m = 0 \quad (X.21)$$

$$\begin{aligned} 2[i b_m \frac{\Delta t}{2\Delta x} (c_o^2 - \rho_\omega u_o^2) - f a_m] [(1 - \theta_t) + \theta_t \lambda'_m] \Omega'_m \\ + \left[a_m (\lambda'_m - 1) + 2(2\rho_\omega u_o i b \frac{\Delta t}{2\Delta x} + k a) [(1 - \theta_t) + \theta_t \lambda'_m] \right] Q'_m = 0 \end{aligned} \quad (X.22)$$

avec

$$k = \frac{T_f \Delta t}{2}$$

$$f = \frac{g \Delta t \sin \theta}{2}$$

- Pour éviter une solution triviale, on annule le déterminant.

L'équation résultante présente la forme d'une équation du second degré en λ'_m à coefficients complexes, dont nous présentons les solutions pour certaines valeurs particulières des paramètres :

- En l'absence de terme convectif, pour une propagation sur fond plat :

$$\lambda'_m = \frac{1 - (1 - 2\theta_t)k - \theta_t(1 - \theta_t)\left(\frac{b_m n_c}{a_m}\right)^2 \pm i \sqrt{\left(\frac{b_m n_c}{a_m}\right)^2 - k^2}}{1 + 2\theta_t k + \theta_t^2 \left(\frac{b_m n_c}{a_m}\right)^2} \quad (\text{X.23})$$

Le nombre de courant n_c , utilisé dans cette formule, fait référence dans sa définition à la célérité linéarisée et se calcule classiquement par $n_c = c_o \frac{\Delta t}{\Delta x}$

Si nous particularisons le résultat pour une situation sans frottement, nous obtenons pour module :

$$\|\lambda'_m\|^2 = 1 + \frac{(1 - 2\theta_t)\left(\frac{b_m n_c}{a_m}\right)^2}{1 + \theta_t^2 \left(\frac{b_m n_c}{a_m}\right)^2} \quad (\text{X.24})$$

Dans cette situation très particulière où le module devrait évaluer l'unité, on constate immédiatement qu'une valeur de θ_t inférieure à 0,5 conduit irrémédiablement à une amplification sans limite du signal au cours de sa propagation.

Un centrage parfait de la discrétisation temporelle respecte strictement la valeur du module analytique, indépendamment de toute considération sur le nombre de courant.

Toute valeur de θ_t supérieure à 0,5 assure la stabilité de la modélisation en introduisant un étouffement du signal dépendant de la longueur d'onde et d'autant plus marqué, à valeur égale de θ_t , qu'on travaille avec des nombres de courant importants.

Revenons à la formulation générale (X.23) pour analyser le comportement de la discrétisation en présence de frottement,

L'expression peu dépouillée qu'adopte λ'_m nous contraint à mener cette étude en raisonnant sur un développement en série de puissances de x_m au voisinage de 0, ce qui donne par exemple pour l'onde négative :

$$\lambda'_m = 1 - \frac{n_c^2}{2k} x_m^2 + \frac{n_c^4}{8k^3} (2k\theta_t - 1)x_m^4 + n_c^6 \left(-\frac{1}{16k^5} + \frac{\theta_t}{8k^4} - \frac{\theta_t^2}{8k^3} + \frac{1}{180 n_c^4 k} \right) x_m^6 + O(x_m^8) \quad (X.25)$$

à comparer au développement de son correspondant analytique (X.14) qui s'écrit :

$$\lambda_m = \exp[-k - i \sqrt{(n_c x_m)^2 - k^2}] = 1 - \frac{n_c^2}{2k} x_m^2 + \frac{n_c^4}{8k^3} (k - 1)x_m^4 + n_c^6 \left(-\frac{1}{16k^5} + \frac{1}{16k^4} - \frac{1}{48k^3} \right) x_m^6 + O(x_m^8) \quad (X.26)$$

La comparaison des expressions confirme le rôle de valeur pivot pour $\theta_t = 0,5$ ainsi que la précision du 4^{ème} ordre qu'elle assure aux modélisations qui s'en tiennent à ce contexte particulier.

Elargissons ces conclusions en incluant les contributions convectives ($\rho_\omega = 1$) :

- Nous reprendrons d'abord l'hypothèse du mouvement uniforme ($f = u_0 k$) pour particulariser la solution aux ondes les plus courtes susceptibles d'apparaître dans la solution numérique.

Pour cette longueur d'onde, ($l_m \Delta x = \frac{2\pi}{L} \Delta x = \pi$), le coefficient b_m s'annule et le facteur d'amplification numérique prend la forme suivante :

$$\lambda'_m = \frac{1 + (2\theta_t - 1)k \pm 2k}{1 + 2\theta_t k} \quad (X.27)$$

Insistons ici sur le fait, pour chaque racine, d'être réelle qui suppose, par la signification que prend l'argument du nombre complexe λ'_m ,

qu'il n'y a plus de propagation possible de ces signaux, indistinctement de toute valeur de θ_t . Pour autant qu'il s'agisse d'effets parasites introduits malencontreusement dans la modélisation, ils perdurent dans la solution sans pouvoir en être extraits.

- Terminons enfin par la propagation "idéale" ($k = 0$) sur fond plat ($f = 0$). On obtient pour une répartition uniforme de vitesse sur la section ($\rho_\omega = 1$) :

$$\lambda'_m = \frac{a_m^2 - \theta_t(1 - \theta_t)b_m^2 \left[n_c^2 - \left(\frac{u_o \Delta t}{\Delta t} \right)^2 \right] - ia_m b_m \left[(1 - 2\theta_t) \left(\frac{u_o \Delta t}{\Delta x} \right) \pm n_c \right]}{a_m^2 + \theta_t^2 b_m^2 \left[n_c^2 - \left(\frac{u_o \Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right] + 2i \theta_t \frac{\Delta t}{\Delta x} a_m b_m} \quad (X.28)$$

En se référant au correspondant analytique λ_m qui donne un module unique aux deux familles d'ondes, on constate immédiatement que $\theta_t = 0,5$ est la seule valeur à même de satisfaire cette condition dans l'expression de λ'_m . Pour porter un jugement sur cette formulation assez complexe où a_m, b_m dépendent eux-même de $x_m = l_m \Delta x$, nous aurons à nouveau recours aux développements en série de puissances selon x_m pour écrire :

$$\lambda'_m = 1 - i \left(\frac{u_o \Delta t}{\Delta x} \pm n_c \right) x - \theta_t \left(\frac{u_o \Delta t}{\Delta x} \pm n_c \right)^2 x^2 + i \theta_t^2 \left(\frac{u_o \Delta t}{\Delta x} \pm n_c \right)^3 x^3 + o(x^4) \quad (X.29)$$

et le comparer avec le développement en série de λ_m donné en (X.16) :

$$\lambda_m = 1 - i \left(\frac{u_o \Delta t}{\Delta x} \pm n_c \right) x - \frac{1}{2} \left(\frac{u_o \Delta t}{\Delta x} \pm n_c \right)^2 x^2 + i \frac{1}{6} \left(\frac{u_o \Delta t}{\Delta x} \pm n_c \right)^3 x^3 + o(x^4) \quad (X.30)$$

Cette nouvelle comparaison en présence des termes convectifs conforte les conclusions précédemment tirées sur la valeur optimale de θ_t pour obtenir une précision du second ordre en x_m . L'analogie évidente entre les développements rappelle les démarches du même type entreprises au chapitre VI (VI.30, 31) où la limitation de la précision provenait également de puissances en quelques sorte inadaptées de θ_t pour coefficients des puissances de x_m .

Le caractère plus complexe de ce système ne peut nous empêcher de conclure, à l'instar des remarques du paragraphe VI.3.6., qu'un schéma plus élaboré pour la description temporelle rendrait une précision supérieure avec un choix approprié de ses coefficients pondérateurs.

Notre préoccupation immédiate ne va pas précisément dans ce sens puisque nous nous rallierons aux pratiques usuelles qui consistent à décentrer le schéma vers le pas calculé pour lui assurer un regain de stabilité largement éprouvé dans la littérature.

Si les développements simples écrits en l'absence de terme convectif ne font ressortir pour $\theta_t > 0,5$ aucune imposition particulière sur le pas à adopter, force est de constater qu'en pratique, il est peu recommandé de travailler avec des pas temporels qui impliqueraient un nombre de courant excédant largement l'unité (Cooley et al).

Cette notion doit en outre être relativisée comme l'indique le développement λ_m . Pour autant qu'il y ait limite numérique sur le pas à

choisir, la présence systématique de $\pm u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x}$ aux côtés du nombre de courant dans (X.30) justifie de se référer dorénavant à un nombre de courant maximum complet ($\max [(u - c) \frac{\Delta t}{\Delta x}, (u + c) \frac{\Delta t}{\Delta x}]$).

Nous venons de cerner le comportement numérique qu'aura le logiciel avec, en particulier, le rôle important pour les caractéristiques dissipatives du code que dicte un choix de θ_t supérieur à 0,5. Il est également démontré que l'ampleur de son effet dépend, entre autres, du nombre de courant adopté, c'est-à-dire de la conjonction choisie des pas temporels et spatiaux.

Nous confirmerons ces tendances par une première application du code non-linéaire avant de choisir une valeur judicieuse de θ_t pour la frange des nombres de courant adoptés.

X.4.2. Approche numérique non-linéaire

Reprenons le cas de la seiche que nous traitons, en 1986, avec un modèle bidimensionnel à discrétisation centrée. Les simulations d'alors cherchaient à reproduire l'effet de rotation terrestre qui transforme progressivement le mouvement unidimensionnel en une oscillation complètement bidimensionnelle.

Nous conservons cette fois un mouvement purement unidimensionnel qui permet d'analyser la propension à la dissipation énergétique consécutive au décentrement spatial et aux combinaisons des paramètres de modélisation.

L'eau d'un canal horizontal de longueur L, fermé à ses deux extrémités, possède

initialement une déformée cosinusoidale de sa surface. L'étude suit l'évolution libre du système lorsqu'il est abandonné sans vitesse initiale.

Pour peu que les conditions sur l'amplitude du mouvement relativement à la profondeur totale soient remplies de façon à justifier le recours aux équations linéarisées, Lynch a montré qu'en l'absence de terme convectif, le niveau respecte la solution suivante :

$$h_1 = A_0 \cos \frac{\pi x}{L} \left(\cos w_1 t + \frac{T_f}{2h_b w_1} \sin w_1 t \right) \exp \left(- \frac{T_f t}{2h_b} \right) \quad (X.31)$$

avec

$$w_1 = \frac{2\pi}{T} = \left(\frac{\pi^2 g h_b}{L^2} - \frac{T_f^2}{4h_b} \right)^{1/2} \quad (X.32)$$

T_f le coefficient de frottement linéarisé.

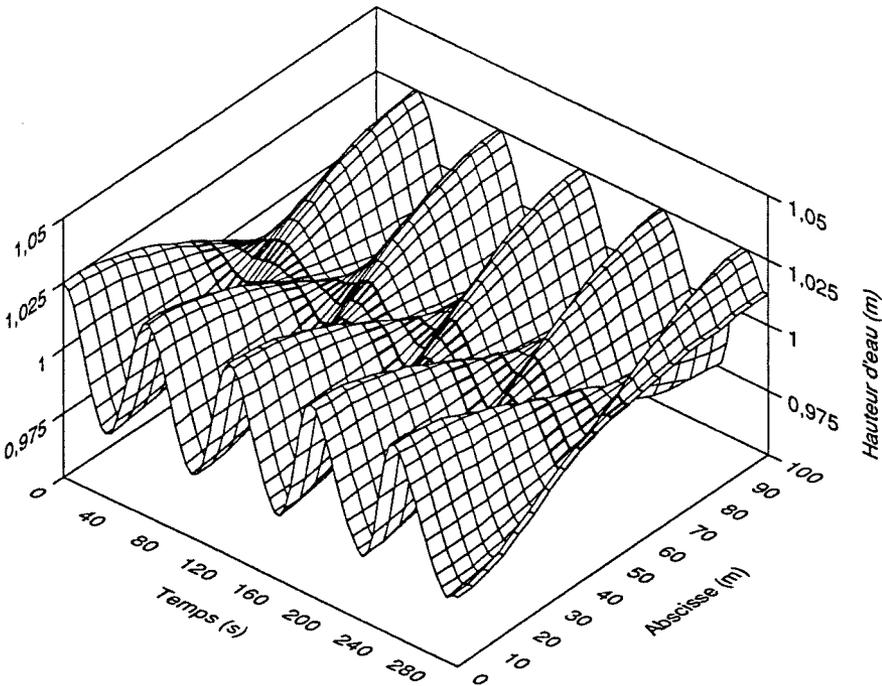


Figure X.1.
Evolution temporelle de la surface libre pour l'ensemble du bassin

Un comportement neutre du schéma numérique doit donc se traduire, dans une modélisation travaillant sur fond lisse, par une oscillation qui se poursuit indéfiniment sans le moindre amortissement.

C'est effectivement le résultat que reproduit le logiciel à la figure X.1. lorsqu'il modélise les oscillations en masse d'un canal de 100 m de long, profond de 1 m, pour une déformée initiale $A_0 = 0,025$ m. L'oscillation sans amortissement s'obtient indistinctement du nombre de courant adopté pour une discrétisation centrée ($\theta_t = 0,5$), propriété remarquable prévue par la théorie.

Par opposition à ce comportement neutre mis en évidence avec 20 éléments linéaires à 2 noeuds et un pas temporel de 1 s, la figure X.2. répercute l'impact du décentrement temporel à discrétisation égale avec, à l'extrême, la dissipation prononcée qu'introduit le schéma implicite d'Euler ($\theta_t = 1$).

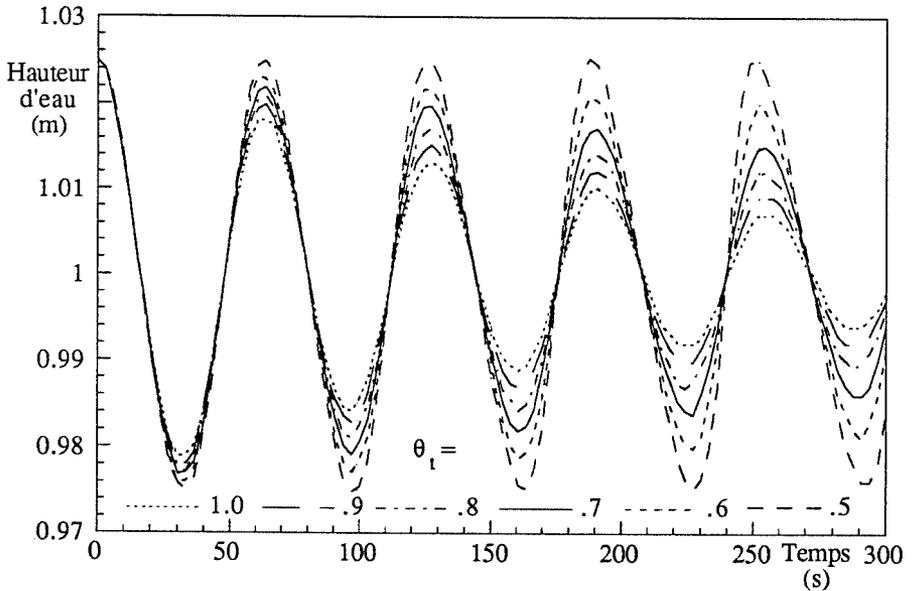


Figure X.2.

Influence du décentrement θ_t sur l'évolution temporelle de la surface libre à l'extrémité gauche du bassin en l'absence de frottement

La théorie a indiqué l'influence positive d'une réduction du nombre de courant pour contrecarrer les effets dissipatifs.

La figure X.3. résume cette tendance, soit qu'on compare, à pas spatial constant, des

La recherche d'une bonne conjonction des discrétisations à mettre en oeuvre est toujours préférable à une discrétisation exagérée.

Dans cette discussion, un autre intervenant possible concerne le degré d'interpolation des éléments adoptés. Si les courbes résultats d'éléments quadratiques à 3 noeuds n'apparaissent dans aucune figure, c'est que les différences restent imperceptibles par rapport à une discrétisation comparable constituée d'éléments à 2 noeuds.

Cette remarque, confirmée dans des simulations impliquant des variations graduelles de signaux (celles modélisant la Meuse par exemple) étaye, pour ce type de modélisation, la thèse qui conseille de multiplier, à coût numérique constant, le nombre d'éléments simples préférentiellement à un nombre restreint d'éléments à degré d'interpolation plus élevé.

L'aspect le plus positif d'un schéma de discrétisation paramétré par θ_1 réside dans le fait que le choix d'introduire de la dissipation est entièrement laissé à l'appréciation de l'utilisateur pleinement conscient des effets qu'il est susceptible d'engendrer.

De façon générale, les enseignements numériques respectent les conclusions tirées de la théorie linéaire. Pourtant, l'étude de l'évolution du point central du bassin montre qu'une amplitude d'oscillation assez faible (5 % de la profondeur au repos) permet déjà aux effets non-linéaires de se manifester.

Alors qu'il devrait théoriquement demeurer au repos, les traits renforcés qui l'emprisonnent à la figure X.1. prouvent au contraire qu'il se met à osciller de façon non négligeable avec une fréquence double de la fréquence du signal initial. La propagation de ce signal s'accompagne d'un découplage dans le temps des extréma obtenus à chaque extrémité, comme le montre la figure X.4.

Il est logique d'imputer ces phénomènes aux influences non-linéaires dans la mesure où l'annulation des contributions convectives ($\rho_{\omega} = 0$) opère une première réduction substantielle de l'amplitude d'oscillation du point central, complètement éliminée avec une linéarisation du terme impliquant l'altitude de surface libre (section remplacée dans ce terme par sa valeur au repos dans la matrice locale). Ces effets vont de pair avec la réduction des décalages temporels entre extréma pour les points extrémités, avec des courbes parfaitement symétriques lorsqu'on revient au système linéaire (Figure X.4.).

En ce qui concerne les phases, elles sont légèrement influencées par ces opérations, avec toutefois une valeur numérique en linéaire totalement correspondante à la solution analytique.

L'influence non négligeable des effets non linéaires et la relative désarticulation du mouvement qu'ils occasionnent amènent à s'interroger sur l'interprétation donnée de la réduction d'amplitude aux extrémités. Elle pourrait n'être que la manifestation d'une redistribution d'énergie due aux effets non-linéaires (matérialisée par la mise en mouvement du centre) ou de sa conjonction avec une dissipation partielle.

Le maintien des taux d'amortissement aux extrémités, dans d'autres modélisations où les influences non-linéaires ont été limitées par une réduction de l'amplitude d'oscillation A_0 , confirme que ces phénomènes sont totalement imputables à la dissipation intrinsèque du schéma.

nombre de courant progressivement réduits, soit qu'à pas temporel constant, on examine successivement les courbes calculées pour 11 noeuds avec leur équivalent à 21 noeuds et nombre de courant doublé. Dans chaque comparaison, la dissipation s'estompe significativement.

La figure X.3. suggère une autre façon logique de procéder en réduisant, à nombre de courant constant, les pas de discrétisation. L'effet escompté se produit mais à un coût numérique plus élevé puisque le gain en précision s'accompagne nécessairement d'un surcroît de calcul.

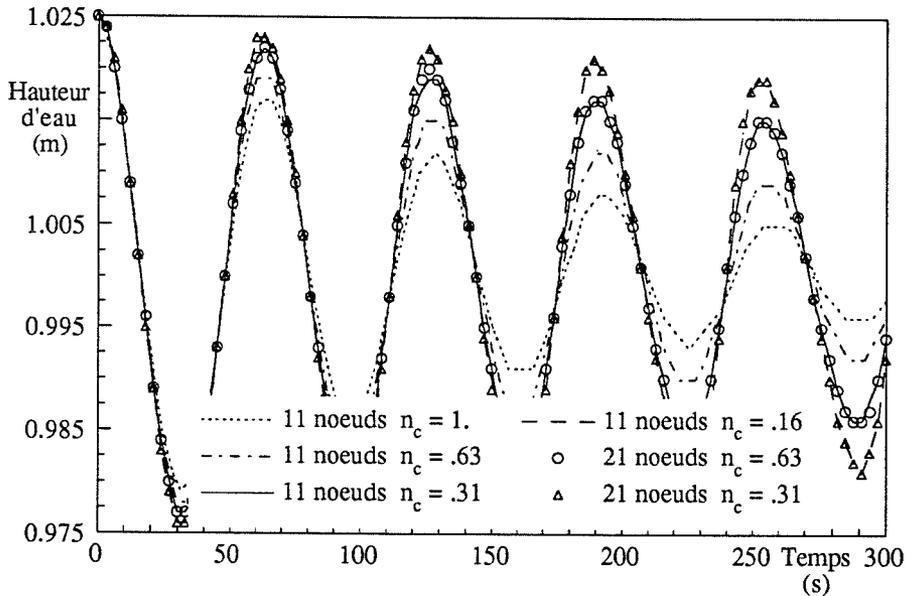


Figure X.3.
Influence des discrétisations spatiale et temporelle à l'extrémité gauche du bassin
en l'absence de frottement pour $\theta_t = 0,7$

Il est remarquable de constater qu'un choix judicieux du nombre de courant procure à une discrétisation "pauvre" une qualité de résultat supérieure à une discrétisation spatiale fine qui progresse par pas temporels plus importants.

Lorsqu'on examine par ailleurs le nombre d'itérations de chaque approche pour obtenir un résultat équivalent, il devient manifeste que les larges pas temporels, par la discrétisation fine qu'ils requièrent (par exemple 21 noeuds, $\Delta t = 2$ s pour $n_c = 0,63$) et les itérations effectuées à chaque pas, sont à proscrire (face à 11 noeuds, $\Delta t = 1$ s $n_c = 0,31$ par exemple), même lorsque la méthode s'annonce inconditionnellement stable.

En tout état de cause, il est manifeste que les influences non-linéaires significatives, constatées dans des cas où l'approximation linéaire paraissait licite, justifie pleinement les efforts consentis pour conserver une formulation complète.

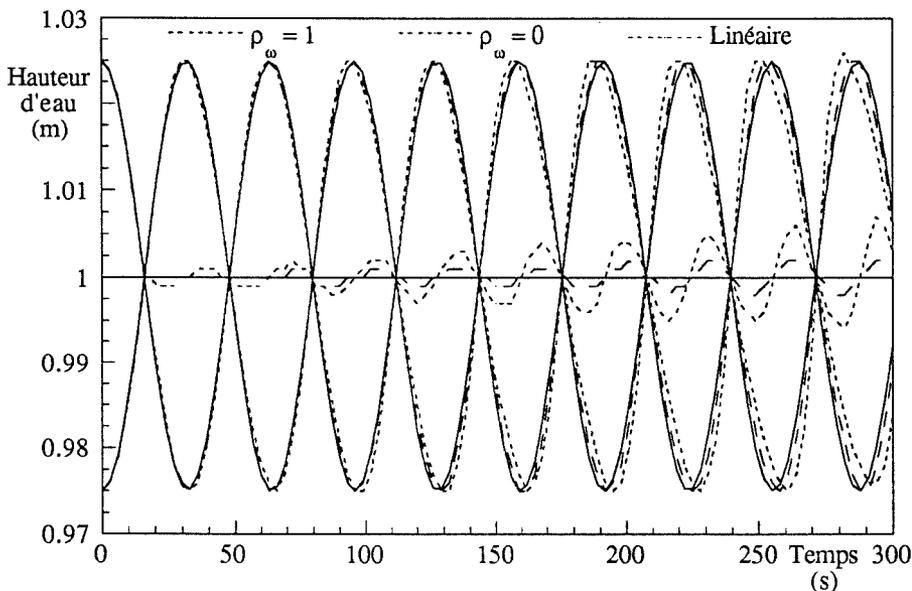


Figure X.4.
Influence de la non-linéarité sur l'évolution temporelle de la surface libre
aux extrémités et au centre du canal pour $\theta_t = 0,5$

X.4.3. Choix du pourcentage de décentrement temporel

Il reste à présent à trouver le juste compromis entre les répercussions dissipatives d'un choix $\theta_t > 0,5$ et l'effet stabilisant qu'il est à même de procurer. Si les propriétés intrinsèques de bon nombre de schémas (différences finies notamment) recèlent une dissipation savamment dosée à l'origine de leur bon comportement, nous savons aussi, par la partie I de ce travail notamment, que le décentrement temporel travaille de façon peu sélective sur les longueurs d'onde.

Ce problème fait partie de quelques questions particulières qui nous ont amené à confronter le logiciel, pendant son élaboration, à d'autres codes numériques et à évaluer ses aptitudes à s'accorder à des mesures expérimentales grandeur nature.

Loin de répercuter l'ensemble des tests effectués, nous nous attarderons dans le domaine des phénomènes instationnaires graduels sur une comparaison de notre code avec un

logiciel basé sur la méthode des caractéristiques.

Dans le cadre de ses travaux consacrés à la modélisation de la circulation sanguine, Th. Pochet a développé un logiciel de modélisation d'écoulement filaire sous pression en conduites souples basé sur les équations suivantes :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\omega) = 0 \quad (\text{X.33})$$

$$\frac{\partial(u\omega)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_{\omega} u^2 \omega) = - \frac{\omega}{\rho} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\tau}{\rho} \quad (\text{X.34})$$

Ses notations ont été volontairement transposées pour souligner l'analogie, avec cette fois

- u la vitesse axiale moyenne
- H la charge, composée comme l'indique $H = p + \rho gh$
 - de la pression p en un point caractéristique de la section
 - d'une contribution impliquant l'altitude en ce point
- ω la section du conduit déformable, considérée comme fonction connue de la pression p et de l'abscisse x
- τ le frottement à la paroi

La modélisation de plusieurs cycles cardiaques dans un réseau artériel ramifié a orienté Th. Pochet vers des techniques de résolution explicites et plus particulièrement vers les méthodes des caractéristiques, fondées sur la description de propagation d'ondes. Parmi celles-ci, des contingences pratiques de programmation, notamment pour prendre en compte les jonctions d'artères, sont à l'origine du choix de la méthode du quadrillage fixe de Hartree.

Elle est appliquée à la modélisation d'écoulements que la nature a voulu laminaires et cantonnés dans le domaine infracritique.

Il est moins paradoxal d'écrire, après comparaison du système (IX.26, 27, 28) avec (X.33, 34) qu'en dépit de la disparité apparente des domaines auxquels chaque logiciel est initialement voué, un terrain commun dans chaque sujet respectif ait pu être abordé de concert.

Pour autant qu'on ignore tout débit latéral et qu'on substitue dans l'expression de la matrice locale éléments finis une loi de frottement linéaire par rapport à la vitesse en lieu et place de la loi turbulente de Manning, nous obtenons les correspondances suivantes pour les variables principales :

- | | |
|----------------------------------|---------------------------------|
| - Altitude de la surface libre Z | - Charge H (à p.p.g près) |
| - - niveau du fond du canal | - altitude de la conduite |
| - - hauteur d'eau | ⇒ - pression (à p.p.g près) |
| - Section transversale mouillée | - Section transversale déformée |
| - Vitesse axiale moyenne | - Vitesse longitudinale moyenne |

La comparaison des deux logiciels en hémodynamique est consacrée aux effets des changements de position corporelle sur l'écoulement artériel. Elle ne sera pas abordée ici pour s'en tenir au seul volet qui correspond directement à l'objet de ce travail.

Un canal rectangulaire de 2,5 m de large est le siège sur les 100 m étudiés d'un écoulement uniforme. Le débit de 3,4 m³/s assure alors une profondeur de 0,767 m pour une pente régulière de 0,001 m/m.

Brutalement, le niveau amont chute à 0.565 m de profondeur et s'y maintient tandis que le niveau aval conserve sa valeur initiale.

Nous allons suivre l'évolution libre du système, analyser la série d'oscillations amorties du niveau ainsi que le nouvel équilibre qu'il atteint pour une loi de frottement laminaire imposée par les caractéristiques du code basé sur les caractéristiques.

Les données initiales supposent une ligne uniforme stable sur les 11 points également espacés de la discrétisation. La variation brutale est assimilée à une chute du niveau sur 1 seul pas de temps. Compte tenu des pics de vitesse escomptés, de l'ordre de 1,5 m/s, le pas spatial est limité à 2 secondes pour ramener le nombre de courant sous l'unité, influence de la vitesse comprise.

Les 600 pas temporels prévus suffisent à chaque code numérique pour obtenir leur nouvelle ligne d'eau stabilisée. Elles montrent une excellente correspondance, avec des écarts de profondeur n'excédant pas le millimètre et une différence de 1 % sur un débit inversé en sens par rapport à la ligne initiale. Il s'établit pour le module éléments finis à 1,802 m³/s.

Examinons à présent le chemin instationnaire suivi pour y parvenir. Nous l'observerons, par exemple, en un point distant de 30 m de l'extrémité amont. La figure X.5. reprend la succession d'ondes que connaît la profondeur avec une modélisation éléments finis établie sur base d'un décentrement temporel $\theta_t = 0,65$. Comparée à notre configuration que nous jugeons déjà assez dissipative, la méthode des caractéristiques présente des périodes du phénomène assez comparables, avec de légers décalages temporels, mais surtout une succession d'oscillations beaucoup plus amorties.

Un tel comportement a amené Th. Pochet à analyser numériquement les caractéristiques dissipatives de son modèle afin de définir la conjugaison optimale des paramètres de modélisation, c'est-à-dire celle qui place son logiciel dans les meilleures conditions pour limiter l'étouffement prématuré des ondes qui se propagent.

Elle conduit à reprendre l'étude du phénomène et notre comparaison avec un pas temporel plus important qui s'approche davantage d'un nombre de courant unitaire, borne supérieure du critère de stabilité de sa méthode.

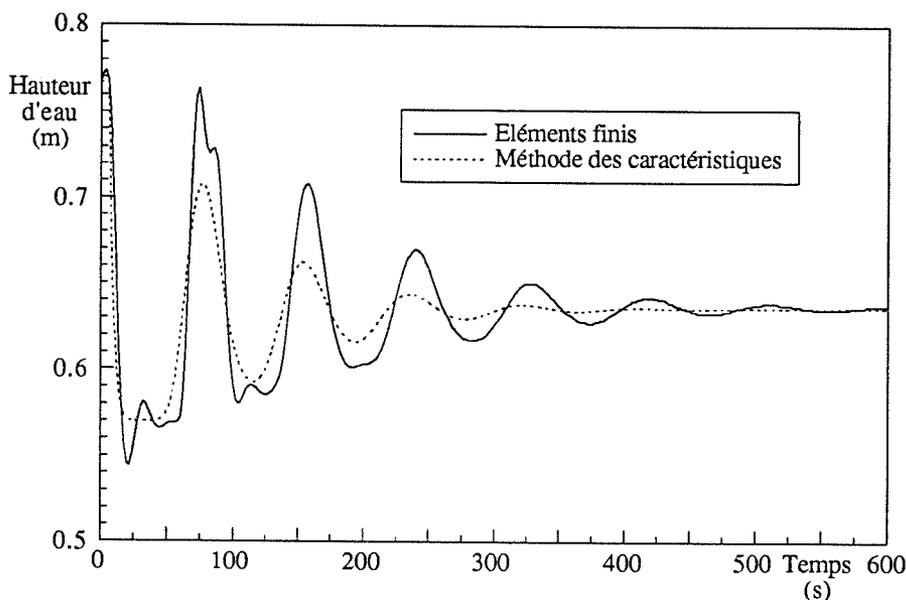


Figure X.5.
Comparaison de l'évolution temporelle de la surface libre à 30 m
de l'extrémité amont pour $\Delta t = 2s$ et $\theta_t = 0,65$

Ce choix souligne la divergence de comportement des codes puisqu'une extension du pas à 3,45 s implique inévitablement une accentuation des caractéristiques dissipatives du code éléments finis, à θ_t constant. Ces tendances opposées annoncent un rapprochement des comportements, effectivement concrétisé à la figure X.6. pour un décentrement de la discrétisation temporelle du code éléments finis maintenu à 0,65.

On assiste simultanément à un rapprochement des fréquences d'oscillations et une meilleure correspondance de l'amplitude des oscillations successives, à l'exception du premier pic de hauteur. L'analyse de signaux de débit à la figure X.7. pour la même abscisse confirme l'analogie des comportements.

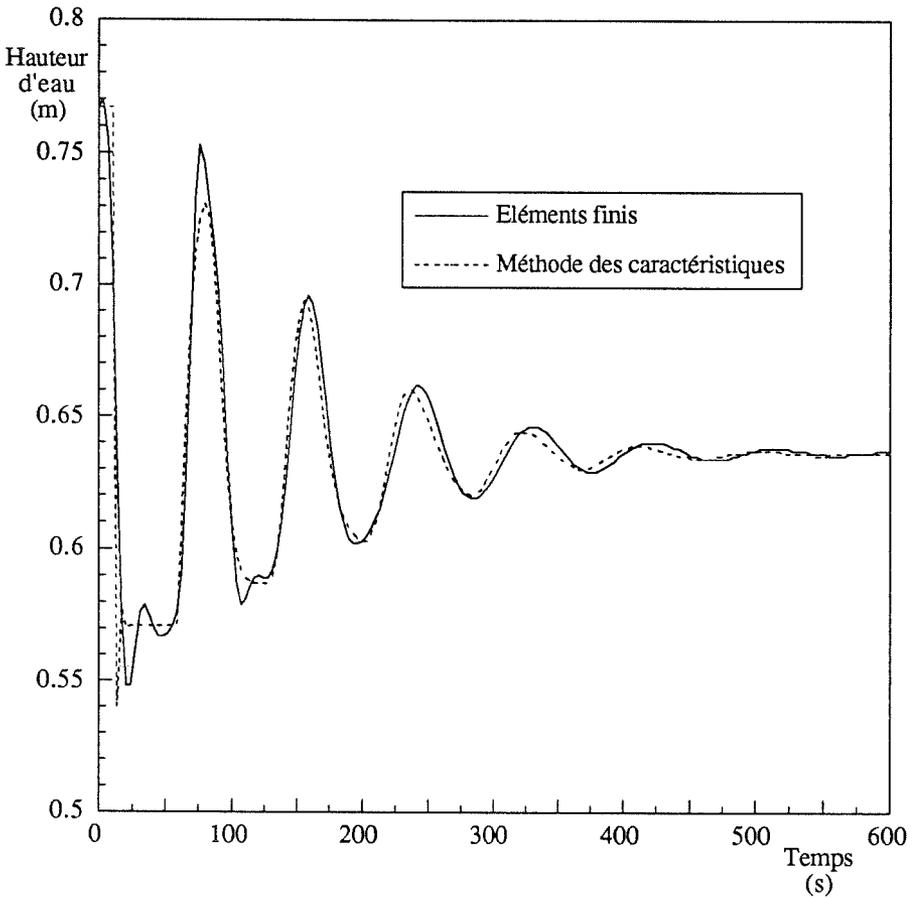


Figure X.6.
Comparaison de l'évolution temporelle de la surface libre
à 30 m de l'extrémité amont pour $\Delta t = 3,45s$ et $\theta_t = 0,65$

Cette comparaison indique que les caractéristiques dissipatives sciemment introduites dans notre modèle par l'intermédiaire de $\theta_t = 0,65$ sont très modérées puisque comparables à un comportement qui se veut le plus neutre possible pour le code explicite. Dans cette dernière discrétisation non paramétrée, la notion d'optimum est, pour cette application, d'autant plus à relativiser que le nombre de courant varie constamment et dans des proportions non négligeables.

Si cet aspect a été souhaité pour l'intérêt de la comparaison, elle constitue pour le logiciel hémodynamique un test relativement inhabituel en comparaison des phénomènes plus

graduels rencontrés en circulation sanguine. Dans cette mesure, la recherche d'un comportement neutre par allongement du pas temporel ne met pas en péril la convergence du système itératif sur les caractéristiques.

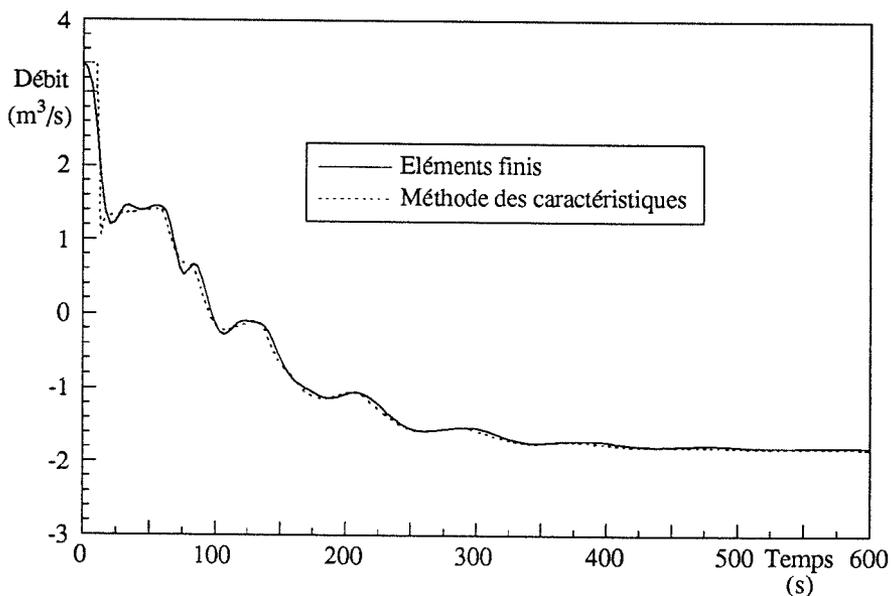


Figure X.7.
Comparaison de l'évolution temporelle du débit à 30 m de l'extrémité amont
pour $\Delta t = 3,45s$ et $\theta_t = 0,65$

Les perspectives de notre code sont tout autres puisqu'il sera impliqué dans des modélisations beaucoup plus brutales avec propagation de fronts et changements de domaines d'écoulement de l'infra au supercritique et inversement.

Dans cet état d'esprit, la résolution numérique d'états très perturbés s'accompagnera inévitablement, dans la recherche d'un nombre minimum d'itérations pour l'ensemble d'une simulation, d'une réduction du pas qui s'accorde parfaitement avec une réduction concomitante des propriétés diffusives à θ_t constant.

Nous travaillerons dorénavant avec la valeur par ailleurs courante de $\theta_t = 0,65$, avec la facilité propre aux schémas paramétrés, d'apprécier à tout moment, pour une discrétisation gelée, l'ampleur des effets d'un recentrement.

X.5. INTRODUCTION DES RELATIONS HAUTEUR - SECTION - PERIMETRE

La forme simple des sections mouillées ainsi que l'indépendance de la loi de frottement laminaire vis-à-vis du périmètre mouillé, ont été adoptées dans la comparaison pour concilier les possibilités de chaque logiciel.

Elles ne nous ont donc pas permis d'évoquer jusqu'ici la façon de prendre en compte l'irrégularité naturelle des sections d'écoulement.

L'idée émise aux premiers stades de développement du logiciel allait dans le sens d'une certaine "économie" pour prendre en compte la variété des sections rencontrées. Chacune se voyait caractérisée par deux lois polynomiales de la hauteur, une assurant la description de la section $\omega(h)$, l'autre celle du périmètre mouillé $p_m(h)$.

Dans ces conditions, la carte d'identité de chaque noeud discrétisé reprenait très économiquement les coefficients des puissances des polynômes, ajustés au besoin par une méthode de moindres carrés par exemple sur les couples de points qui composent les relevés réels.

Si cette stratégie s'avère très payante pour les cas d'école et autres modélisations en sections canalisées ou "assez géométriques" dans leurs formes, elle laisse apparaître d'importants désagréments lorsque la section mouillée est amenée, au cours de la modélisation, à connaître d'importantes variations.

Dans ces cas, un ajustement de courbe analytique peut conduire dans une tranche de hauteurs limitées, à des relations section et périmètre - hauteur d'eau sans correspondant physique. En outre, cette simplification au niveau de la gestion des données va à l'encontre de la recherche d'une exploitation maximale des mesures topographiques qui peuvent être collectées sur le terrain.

Nous avons donc évolué vers une gestion directe au sein du logiciel des données brutes disponibles pour chaque section en termes d'un nuage de triplets hauteur, section correspondante, périmètre mouillé correspondant.

A chaque abscisse discrétisée correspond désormais un fichier propre reprenant la séquence de ses mesures. Le nombre de hauteurs référencées dans chaque section est totalement libre et dépend surtout des méthodes topographiques qui sont à sa base.

Suivant ses disponibilités en mémoire, le logiciel ouvre séquentiellement chaque fichier et si possible le mémorise. Une interpolation linéaire entre les points mesurés permet alors d'établir ponctuellement les relations nécessaires au calcul des matrices locales.

Il faut signaler qu'au surcroît de complexité dans la gestion informatique de cette approche correspond de plus larges possibilités dans les phénomènes modélisables.

C'est ainsi qu'en travaillant à chaque pas temporel avec un nouveau fichier topographique pour une même section, il est possible de modéliser, par exemple, l'écoulement à travers une section évolutive dans le temps. Pour autant qu'un protocole réaliste soit élaboré sur la progression temporelle que connaît la section transversale, aucune objection informatique ne s'oppose à en tenir compte pour l'écoulement qui en dépend.

Dans le même état d'esprit, c'est l'évolution temporelle du niveau du fond qui a permis les modélisations en hémodynamique.

Nous reviendrons ultérieurement sur la technique adoptée pour collecter les informations requises sur chaque section.

X.6. EXTENSION DE LA METHODE NUMERIQUE A LA RESOLUTION DE RESEAUX RAMIFIES

Le troisième paragraphe de ce chapitre a décrit le processus itératif de résolution. Il consiste, par découplage, à construire puis à résoudre une succession de doublets de deux systèmes linéarisés, le premier fonction des sections mouillées nodales, l'autre des débits nodaux.

L'évolution des approximations successives calculées converge avec l'imposition de conditions limites adéquates (une condition amont et une aval en régime infracritique) vers la solution instationnaire d'un cours d'eau.

Il est cependant légion de rencontrer des situations où l'extrémité du cours d'eau débouche non pas sur l'extérieur du modèle, mais sur un noeud qui le lie à d'autres bras.

Nous avons déjà évoqué cette situation en hydrologie avec le classement par ordre des bras successifs qui convergent vers le bras principal alimentant l'exutoire. La figure tridimensionnelle du Blanc-Gravier (figure VIII.6.) indique clairement une telle structure ramifiée dans le bassin.

En gestion de cours d'eau, la modélisation séparée d'un simple bief canalisé peut déjà impliquer une discrétisation en réseau. Cette dernière devient d'autant moins incontournable dans les ramifications des cours naturels influencés par les opérations courantes de lâchers en aval des retenues.

En rupture de barrage enfin, les vallées entrecoupées de nos contrées, propices à l'édification d'ouvrages de retenue, dessinent en plan des tracés filaires de vallées latérales dont il serait peu réaliste d'ignorer l'existence dans le calcul de l'atténuation de l'onde de rupture.

La diversité des applications potentielles nous pousse donc à étendre la procédure numérique au traitement des réseaux.

X.6.1. Imposition des conditions aux noeuds

Devant la variété des géométries rencontrées, nous souhaitons ne pas particulariser le schéma de résolution à une configuration donnée pour traiter librement des noeuds rassemblant par l'amont ou l'aval un nombre de bras quelconque. Nous travaillerons avec l'hypothèse de n_k noeuds qui interconnectent chacun n_{b_k} ramifications de rivière.

Il faudra imposer, en infracritique, n_k relations linéaires entre débits qui expriment la continuité à chaque noeud. Les coefficients qui précèdent chaque débit impliqué à un noeud ont un signe qui fait référence au sens défini pour le segment de rivière lors de l'entrée des données. La valeur absolue du coefficient tient compte de l'éventuelle présence, au sein d'un noeud, de plusieurs bras identiques.

Nous écrivons l'ensemble de ces relations linéaires sous la forme suivante :

$$G_{mj}^2 \cdot Q_j = 0 \quad m = 1, nk \quad j = 1, n \quad (X.35)$$

Elles sont complétées par $\sum_{k=1}^{nk} nb_k$ relations qui assurent, dans une première phase, le respect de la cote de surface libre. L'écriture du système en termes de section, ainsi qu'un souci de généralisation justifié dans la suite du travail, nous donne la forme générale suivante :

$$\Omega_j \cdot G_{lj}^1(\omega, q) = g_l \quad \text{avec } l = 1, \dots, \sum_{k=1}^{nk} nb_k \quad (X.36)$$

Pour la simplicité de la procédure, nous abordons le problème en dédoublant le noeud de jonction en autant de noeuds distincts qu'il y a de bras de rivière. De cette façon, les phases de calcul des matrices locales et d'assemblage considèrent chaque tronçon comme une entité complètement autonome.

L'idée de découplage du système initial va logiquement trouver un prolongement dans l'imposition des liaisons entre inconnues. Dans cette mesure, nous compléterons la procédure itérative en résolvant une succession de doublets de systèmes linéarisés qui concernent les inconnues évaluées par chaque système.

- Ainsi pour le système continuité :

$$\Omega_j^{t+\Delta t} \int_S P_i M_{lj} dS = \int_S P_i T_1 dS \quad \text{pour } i, j = 1, \dots, n \quad (X.37)$$

avec pour conditions linéarisées

$$\Omega_j^{t+\Delta t} \cdot G_{ij}^1(\omega^t, \omega^*, q^t, q^*) = g_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, \sum_{k=1}^{nk} nb_k \quad (X.38)$$

- Pour le système dynamique

$$Q_j^{t+\Delta t} \int_s P_i M_{2j} dS = \int_s P_i T_2 dS \quad \text{pour } i, j = 1, \dots, n \quad (X.39)$$

avec pour conditions linéaires

$$Q_j^{t+\Delta t} \cdot G_{ij}^2 = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, nk \quad (X.40)$$

complétés chacun des conditions limites habituelles sur les frontières du modèle.

Dans ces conditions, la complexité dans la résolution de ces systèmes soumis à contraintes suggère l'introduction de la théorie des multiplicateurs de Lagrange (King). Elle transforme les deux étapes propres à une itération en la résolution de deux systèmes successifs qui s'écrivent :

Système continuité modifié :

$$\begin{matrix} n \\ \sum_{k=1}^{nk} nb_k \end{matrix} \left\{ \begin{array}{c|c} \int_s P_i M_{1j} dS & -(G^1)_{ij}^T \\ \hline G_{ij}^1 & 0 \end{array} \right\} \cdot \begin{bmatrix} \Omega_j \\ \lambda_1^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_s P_i T_1 dS \\ \xi_1 \end{bmatrix} \quad (X.41)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_n \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\sum_{k=1}^{nk} nb_k}$

Système dynamique modifié :

$$\begin{matrix} n \\ nk \end{matrix} \left\{ \begin{array}{c|c} \int_s P_i M_{2j} dS & -(G^2)_{im}^T \\ \hline G_{mj}^2 & 0 \end{array} \right\} \cdot \begin{bmatrix} Q_j^{t+\Delta t} \\ \lambda_m^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_s P_i T_2 dS \\ 0 \end{bmatrix} \quad (X.42)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_n \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{nk}$

λ_1^1, λ_m^2 étant des multiplicateurs de Lagrange spécifiques à une itération d'un pas de temps.

Indépendamment du contexte théorique qui sous-tend le recours à des inconnues supplémentaires λ , nous rappellerons simplement l'interprétation géométrique de l'utilisation que nous en faisons dans notre cadre particulier.

Raisonnons plus spécifiquement sur le seul système dynamique, dans l'hypothèse où la présence d'un unique noeud dans le réseau étudié limite les conditions linéaires à imposer pour ce système à une seule relation de continuité entre débits. Nous désignerons par R le résidu obtenu en injectant dans cette relation une combinaison quelconque de valeurs nodales (Q_1, \dots, Q_n).

Puisqu'à côté du problème mathématique non-linéaire initial, nous avons défini une succession de doublets de systèmes linéaires qui convergent vers la solution, nous écrivons que le système dynamique sans condition linéaire dérive de la stationnarité d'une fonctionnelle F spécifique à l'itération considérée. Elle est fonction de la seule inconnue q.

Sur base de la discrétisation adoptée, nous établissons une correspondance entre chaque nuples de valeurs (Q_1, \dots, Q_n) et un couple de valeurs composé de la valeur correspondante de la fonctionnelle F (Q_1, \dots, Q_n) et du résidu R (Q_1, \dots, Q_n).

Nous supposons que la représentation de ces couples dans le plan (x, y) délimite un ensemble convexe de points compris dans l'ellipse représentée à la figure X.8.

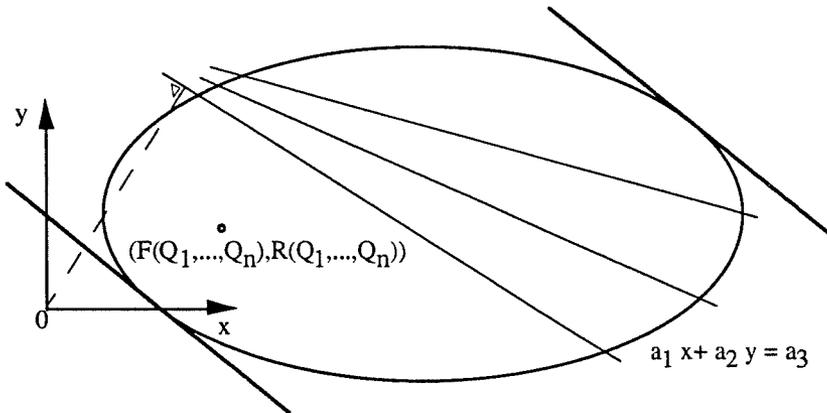


Figure X.8.
Interprétation géométrique de l'emploi d'un multiplicateur de Lagrange

La recherche d'un extrémum de la fonctionnelle F nous amène à ne nous intéresser qu'à la frontière de cet ensemble. Nous la balayerons jusqu'à respecter la condition de continuité,

c'est-à-dire jusqu'à l'annulation du résidu R. Nous effectuons ce balayage grâce à une enveloppe de tangentes (Bellman et al) que l'on obtiendra à partir du faisceau de droites dessinées sur la figure X.8. en exprimant que leur distance à l'origine des axes soit extrémale. Etant donné que le terme indépendant a_3 de l'équation est à l'image de cette distance pour a_1, a_2 fixés, nous cherchons finalement l'extrémum de la quantité :

$$\theta_1 F(Q_1, \dots, Q_n) + \theta_2 R(Q_1, \dots, Q_n) \quad (X.43)$$

Ce problème conduit mathématiquement pour $\theta_1 \neq 0$ et $\frac{\theta_2}{\theta_1} = \lambda$ à résoudre, avec les conditions linéaires imposées, le système que nous avons décrit en (X.43).

Sous cet angle, le multiplicateur apparaît donc comme un coefficient angulaire dont la variation permet d'orienter plus aisément la recherche d'une solution. Sa valeur, par ailleurs peu utile pour notre application, reflète d'une certaine manière le prix à concéder par rapport à l'extrémum absolu de F pour imposer les conditions supplémentaires.

D'un point de vue numérique, les dimensions des deux systèmes, l'introduction des nouvelles inconnues, la prise en compte du sens des débits aux noeuds, l'imposition de l'égalité des surfaces libres exprimée en terme des inconnues du système, sont entièrement gérés par le logiciel.

Il est capable en outre de s'adapter aux dimensions de la mémoire vive disponible en travaillant, si nécessaire, par blocs d'équations. Cette technique ne limite ses potentialités en matière de quantité d'inconnues nodales à traiter que par le seul excès de temps qui peut résulter d'une simulation significative en inconnues et en pas temporels sur une machine aux caractéristiques de calcul modestes.

Enfin, soulignons encore que cette nouvelle complication du processus itératif n'a pas permis, au long des tests préliminaires et applications présentées, de déceler un infléchissement particulier des caractéristiques de convergence.

X.6.2. Première application aux réseaux

Prouvons le bon comportement de la méthode en l'appliquant à un réseau composé de 8 bras distincts.

Elle fait référence au constat de tout Liégeois qui examine le cours amont de la Dérivation de la Meuse lors d'une crue de l'Ourthe.

Considérons la géométrie définie à la figure X.9. qui s'inspire de la confluence de la Meuse et de sa Dérivation, de l'Ourthe et du Canal Albert.

Si les quelques libertés prises en matière de géométrie du réseau et dans la forme des sections lui enlèvent un peu de son réalisme, c'est pour faciliter la comparaison des résultats avec ceux du code explicite basé sur les caractéristiques.

Il n'en reproduit pas moins le phénomène a priori surprenant de l'inversion du sens des débits qui se produit sur le cours supérieur de la Dérivation, à hauteur des installations de l'Union Nautique.

Lorsque les précipitations gonflent le cours de l'Ourthe et que la crue se précipite dans la Dérivation, la partie amont de cette dernière voit son sens naturel d'écoulement d'amont vers l'aval être inversé par les flots qui remontent jusqu'au partage de la Meuse et de sa Dérivation. Ils viennent y grossir l'écoulement naturel de la Meuse vers Monsin et le Canal Albert.

La figure X.9. détaille la largeur variable des sections rectangulaires. Elle définit l'évolution de la cote du fond, supposée varier linéairement entre les valeurs données. Les longueurs des différents bras y sont également reprises. La définition du problème s'inspire des conditions réelles qui prévalent aux extrémités du bief.

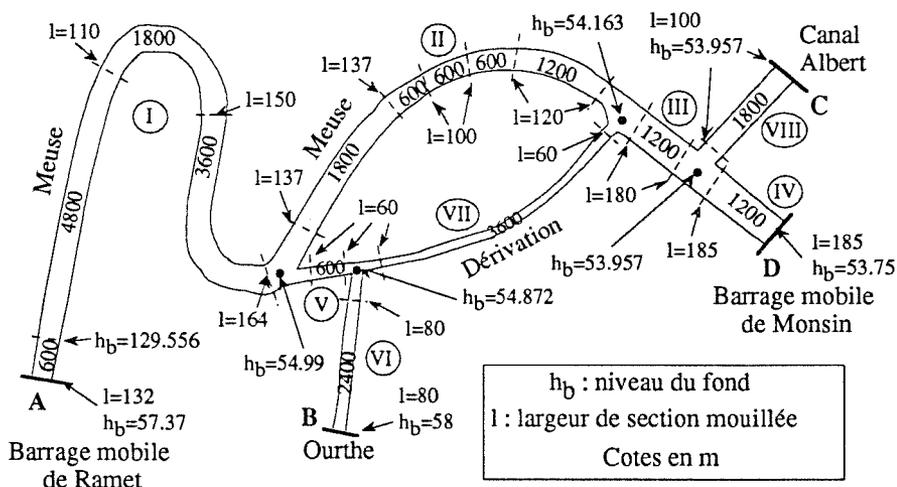


Figure X.9.
Disposition géométrique du réseau étudié

Dans un premier temps, partant d'un système au repos stabilisé à la cote uniforme de 60 m, on cherche d'abord à établir un régime plus respectueux des conditions réelles d'exploitation. Le système y est progressivement porté en supposant une introduction linéairement croissante d'un débit de 0 à 200 m³/s au point A (Ramet) et de 0 à 40 m³/s au point B (Ourthe) durant les 20 premières minutes. Le débit est ensuite maintenu à ces valeurs. Aux extrémités aval, on supposera que les opérateurs qui agissent sur le barrage du point D (Monsin) vont contrôler et stabiliser la cote à une hauteur constante $Z_D = 60$ m tandis que la présence d'écluses en aval du point C (Canal Albert) suggère d'y annuler le débit.

La crue proprement dite au niveau du point B est introduite après 200 minutes de simulation. L'onde prend la forme d'une augmentation graduelle du débit, qui évolue

linéairement de 40 à 140 m³/s en 10 minutes. Cette valeur est ensuite maintenue jusqu'au terme de la modélisation.

La comparaison porte sur un système discrétisé en segments réguliers de 600 m de long. La simulation progresse pas temporels de 30 s.

La figure X.10. reprend l'évolution temporelle du débit au point névralgique, en l'occurrence l'extrémité aval du bras V qui se trouve impliquée dans la jonction avec les bras VI et VII. Deux inversions de débit se produisent, la première consécutive à l'établissement et la stabilisation de circonstances "habituelles" d'écoulement, la seconde induite par la crue et spécifique au phénomène que nous cherchons à mettre en évidence.

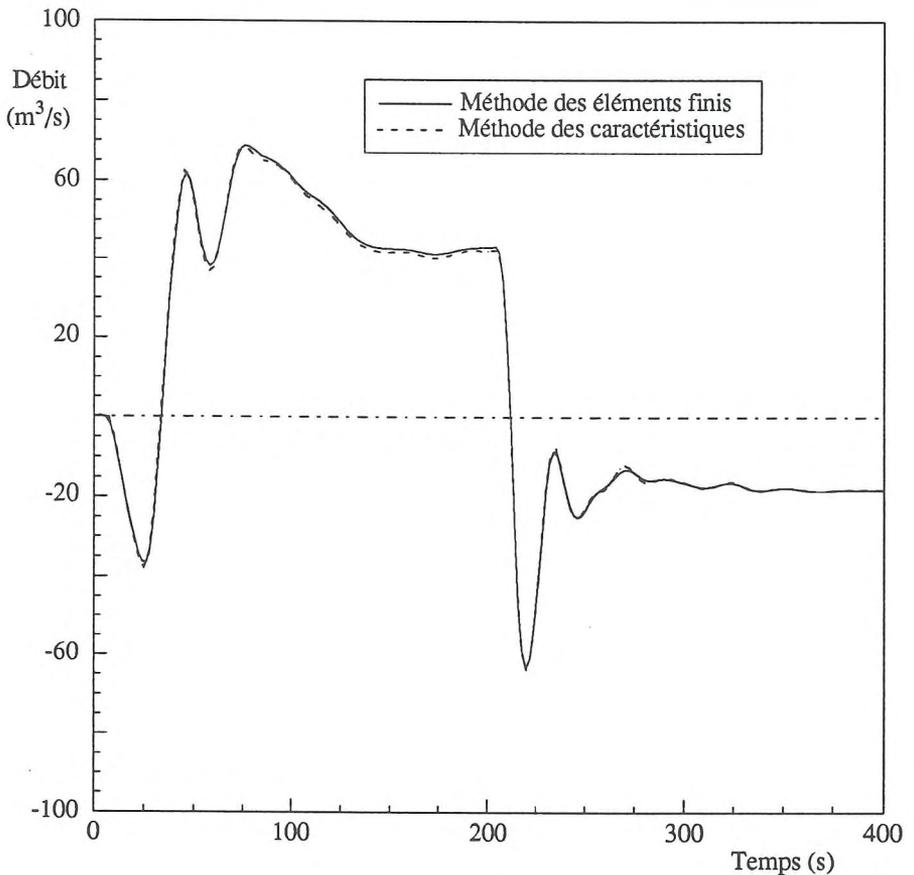


Figure X.10.
Comparaison de l'évolution temporelle du débit à l'aval du bras V

Ainsi, la crue cherche à s'évacuer dans les conditions les plus favorables au sens des pertes par frottement, ce qui pousse encore la majeure partie des flots, malgré l'allongement des dimensions du bras IV par rapport à la réalité, à rejoindre le cours principal de la Meuse en passant par l'amont de la Dérivation. Dans la configuration particulière présentée à la figure X.9., le cours aval de la dérivation prend en charge, après stabilisation, 39 % seulement de l'évacuation vers l'aval des 100 m³/s consécutifs à la crue de l'Ourthe.

Le résultat le plus significatif de cet exemple réside dans la très bonne correspondance des résultats des deux codes. On soulignera toutefois qu'elle n'a été obtenue, au niveau du logiciel basé sur les caractéristiques, qu'en le faisant travailler sur une discrétisation plus fine du bras de l'Ourthe, rendue nécessaire afin d'éviter un damping exagéré des ondes calculées.

X.6.3. Généralisation des conditions aux noeuds

Orientons davantage la discussion vers la possible modélisation future de propagation d'ondes de forte amplitude. Nous aurons tout le loisir de prouver que les vitesses induites dans le système approchent ou excèdent parfois largement la célérité des ondes. On ne peut dès lors exclure aucun régime possible d'écoulement, tant pour le front et l'écoulement principal qui parviennent à la confluence que pour ceux qui naissent dans les diverses ramifications.

Conserver la généralité d'approche initialement projetée, sans a priori sur les régimes rencontrés aux noeuds, pose le problème ardu de gérer le nombre adéquat et de choisir le type de condition à imposer dans chaque cas de figure. En rappelant que ce problème fait traditionnellement l'objet de peu d'attention, certaines études théoriques abordent la question en la particulierisant sur une géométrie simplifiée (Garcia-Navarro, Kumar). Lorsque la discussion se base sur la conservation des quantités de mouvement, elle conduit nécessairement à réclamer des indications supplémentaires sur la position respective en plan des ramifications impliquées.

L'imposition des altitudes de surface libre trouve un consentement tacite auprès des rares logiciels voués aux modélisations de rupture en réseaux filaires (Muskatirovic par exemple). Elle impose simultanément une autre condition restrictive de devoir alors préjuger d'un régime infracritique pour l'ensemble des écoulements impliqués aux noeuds.

Nous n'avons pas davantage cherché à échapper à cette restriction en conservant à l'esprit de vérifier a posteriori que l'hypothèse n'est pas infirmée dans les conditions réelles d'écoulement que nous serons amenés à rencontrer.

De cette façon, nous conservons le canevas initialement élaboré pour fixer le nombre et ordonner l'imposition des conditions pour un noeud quelconque. Néanmoins, nous avons cherché, par la formulation très générale de (X.36), à rester ouvert à une éventuelle prise en compte de pertes de charge singulières que connaissent les noeuds. En associant à la cote de surface libre de chaque bras une contribution cinétique correspondante du type

$\left(k \frac{v^2}{2g}\right)$, nous avons profité du schéma itératif initial pour pouvoir répercuter par un coefficient k tenant compte de la géométrie les pertes que fixeraient d'éventuels modèles physiques des noeuds représentés.

Nous terminerons par la position française sur le sujet, qui contraste singulièrement avec la compréhension d'un noeud au sens unidimensionnel comme une convergence d'écoulements filaires.

L'hypothèse qui prévaut en analyse de confluence s'appuie ici sur la prédominance habituelle d'une vallée sur les autres, soit qu'elle s'impose par ses dimensions plus généreuses ou sa pente principale, soit qu'elle s'inscrit dans le prolongement de l'écoulement amont.

En contournant l'épineux problème du noeud comme siège d'impositions sur les variables, ce dernier se rédéfinit comme une zone d'échange où l'écoulement revêt un caractère bidimensionnel. Le tronçon jugé prépondérant est traité par les équations unidimensionnelles en recourant, au niveau de l'équation de continuité, à la contribution des débits latéraux pour répercuter d'abord les retraits supposés se poursuivre jusqu'au maximum de l'onde incidente, ensuite les apports dans la branche principale, représentatifs des effets de chaque affluent (Groupe de Travail Français des Grands Barrages).

X.7. SIMULATION DE 10 HEURES DE GESTION D'UN BIEF DE LA MEUSE

Si le bon comportement du logiciel est désormais établi sur base de comparaisons théoriques et numériques en phénomènes graduels, nous avons vu qu'il dépend d'abord d'une bonne connaissance des effets induits par les discrétisations.

Nous allons à présent confirmer les qualités intrinsèques du modèle pour les paramètres choisis par une confrontation directe avec la réalité.

L'aménagement de la Meuse sur son cours le plus actif est l'heureuse conséquence de la crue catastrophique de l'hiver 1925-1926. Les barrages mobiles de Neuville, Ivoz-Ramet et Monsin matérialisent la nouvelle canalisation qui fut ensuite adoptée par le Fonds Spécial des Grands Travaux. Elle autorise un passage aisé des ondes de crue tout en privilégiant le développement de la navigation. Ces ouvrages, qui jouxtent chacun une centrale électrique, régulent l'écoulement dans les trois biefs étagés.

Aussi longtemps que le débit reste inférieur au débit d'équipement de la centrale, l'exploitant privé, la Socolie, est autorisé à maintenir le niveau par turbinage à l'intérieur d'une fourchette fixée par l'Office de la Navigation. Au delà de ce débit, cette gestion se complète d'une régulation aux barrages mobiles par niveaux de consigne fixés en fonction du débit.

La conduite actuelle ne comprend aucun outil numérique d'aide à la répartition optimale

sur les organes de régulation des aménagements (barrage et centrale). La coordination des opérations dans les différents biefs n'est pas davantage optimisée avec, en particulier, des décisions de démarrage et d'arrêt d'unités laissées à l'appréciation des opérateurs. De leur expérience et de leur connaissance des opérations menées en amont des biefs dépend leur anticipation à gérer au mieux chaque onde de débit.

Quelques ordres de grandeur d'abord sur les débits rencontrés, avec une valeur moyenne à Ampsin de $195 \text{ m}^3/\text{s}$ et une crue centennale de la Meuse à Visé estimée à 3000 m^3 . Comme certaines installations hydroélectriques sont par ailleurs à débit non réglable, la mise en fonctionnement des turbines peut occasionner, sur quelques dizaines de secondes, une variation de débit de l'ordre de $80 \text{ m}^3/\text{s}$.

Nous nous intéressons aux résultats expérimentaux mesurés pendant 10 heures de gestion du bief situé entre Ampsin - Neuville et Ivoz - Ramet. Le profil en long de cette portion de canal qui s'étend sur 14223 m est donné à la figure X.11.

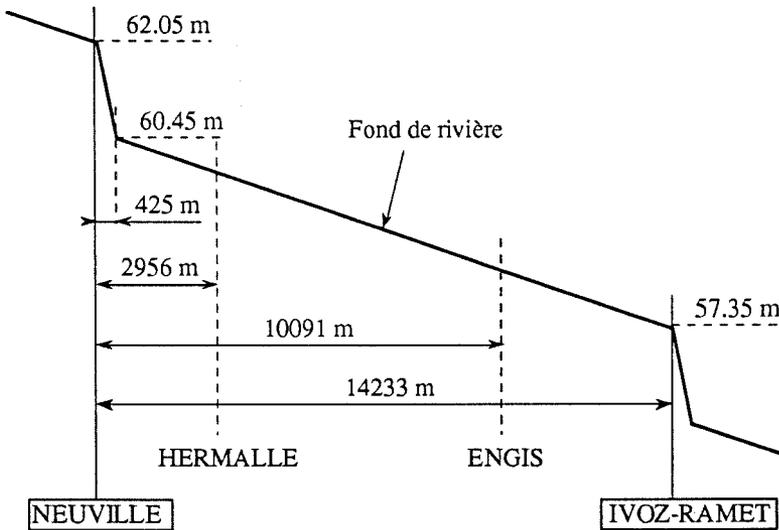


Figure X.11.
Disposition géométrique du bief étudié

Le logiciel est utilisé en tant qu'outil potentiel de gestion des ressources hydrauliques. La discrétisation adoptée respecte scrupuleusement les données sur la forme des sections transversales fournies par le Service de la Meuse Liégeoise. Ces profils en travers sont de forme rectangulaire ou trapézoïdale.

Quelques sections supplémentaires ont été intercalées de façon à mieux uniformiser les entredistances qui varient finalement de 423 à 1085 m . Compte tenu d'études traitant des mêmes zones de la Meuse (Dehousse et al), nous associons à chaque section un même coefficient de frottement de Manning $n = 0,0333$.

L'ensemble des documents fournis par la Socolie permet de reconstituer la stratégie adoptée à chaque installation pendant les 10 heures concernées. Elle se synthétise à chaque extrémité du bief en une courbe de débit qui reprend, en fonction du temps, la somme des débits turbinés et perdus au niveau du barrage.

Ces deux courbes, représentées à la figure X.12., constituent les seules conditions limites du système. Aucune imposition n'est faite sur les hauteurs d'eau.

Ces données doivent se compléter pour la définition d'un problème bien posé d'une description de l'état du système à l'instant où on entame la simulation. Il est, en toute généralité, le résultat d'une superposition d'ondes provenant de l'exploitation non précisée du bief, antérieure à la période étudiée.

A défaut d'états plus justifiables, nous adopterons une surface du plan d'eau variant linéairement entre les deux cotes mesurées à $t = 0$, à savoir 64,60 m à Ampsin et 64,62 m à Ramet. Nous choisissons également une variation linéaire du débit entre les valeurs reconstituées de $70 \text{ m}^3/\text{s}$ à Ampsin et $54 \text{ m}^3/\text{s}$ à Ramet. A partir de cet état, le système évolue par pas temporels d'une minute.

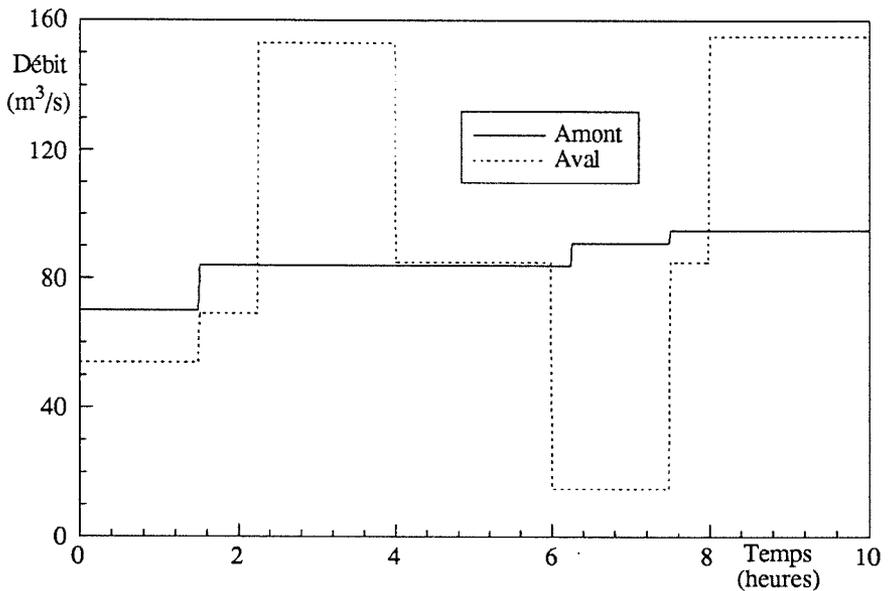


Figure X.12.
Evolution temporelle des débits imposés à Ampsin et Ramet

Les mesures expérimentales portent sur la mesure au cours du temps des altitudes de surface libre en 4 points du bief. Elles sont une à une reprises aux figures X.13.,14.,15.,16. et comparées à leur homologue numérique.

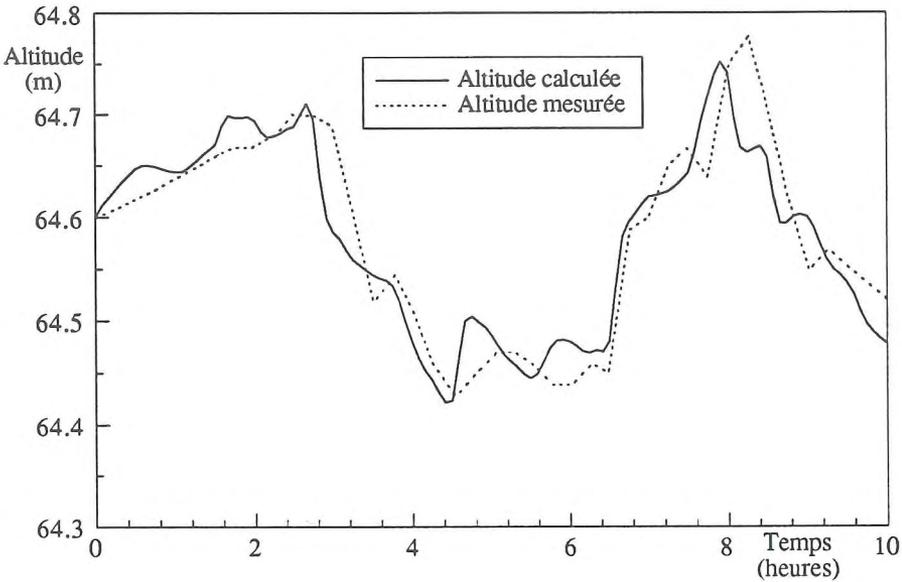


Figure X.13.
Comparaison de l'évolution temporelle de la surface libre à Ampsin

Une très bonne corrélation entre modèle et réalité en émerge avec une reproduction assez fidèle des fluctuations, tant en amplitude qu'en vitesse de propagation.

C'est un constat encourageant lorsqu'on tient compte des incertitudes inhérentes à ce type d'essais :

- sur les conditions initiales d'écoulement d'abord. Le choix arbitraire d'un état initial du bief, vraisemblablement non correspondant, se répercute nécessairement par certaines imprécisions de la courbe calculée par rapport aux mesures dans les premiers temps de la simulation.
- sur les courbes de débit imposées à chaque extrémité. La reconstitution des débits totaux pour l'ensemble de chaque installation comporte plusieurs incertitudes, depuis les débits de fuite aux barrages supposés constants et évalués sur base de l'expérience des opérateurs, jusqu'à l'heure précise et la vitesse de chaque variation de régime. Le décalage entre pics de hauteur à Ampsin aux alentours de la huitième heure en est sans doute une manifestation.
- sur la fréquence des mesures effectuées. Les relevés ont été réalisés toutes les 15 minutes, ce qui peut occulter certaines variations brusques intermédiaires des niveaux.

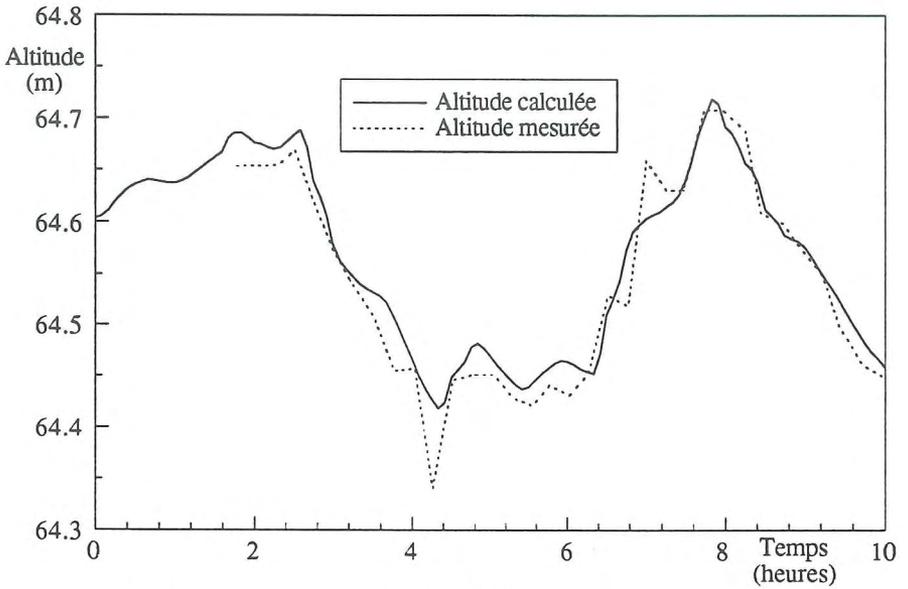


Figure X.14.
Comparaison de l'évolution temporelle de la surface libre à Hermalle

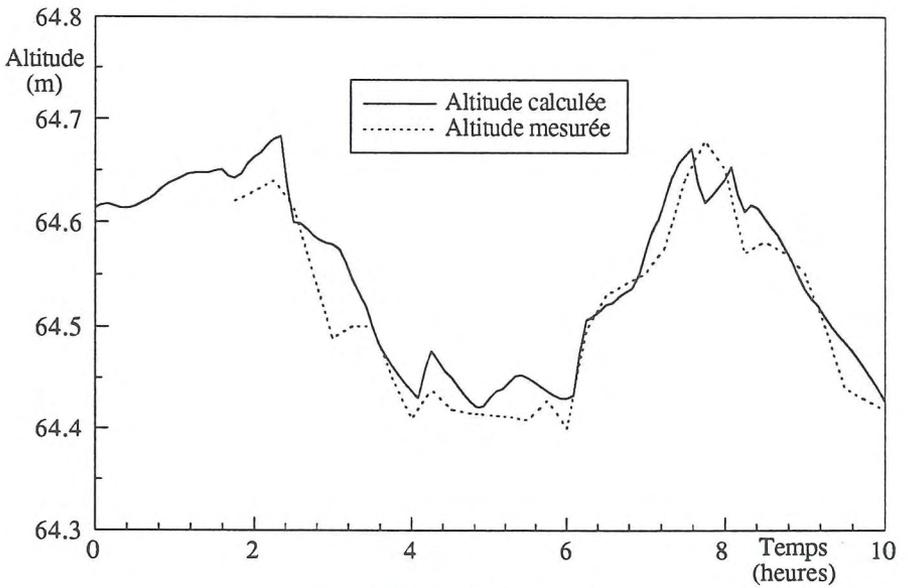


Figure X.15.
Comparaison de l'évolution temporelle de la surface libre à Engis

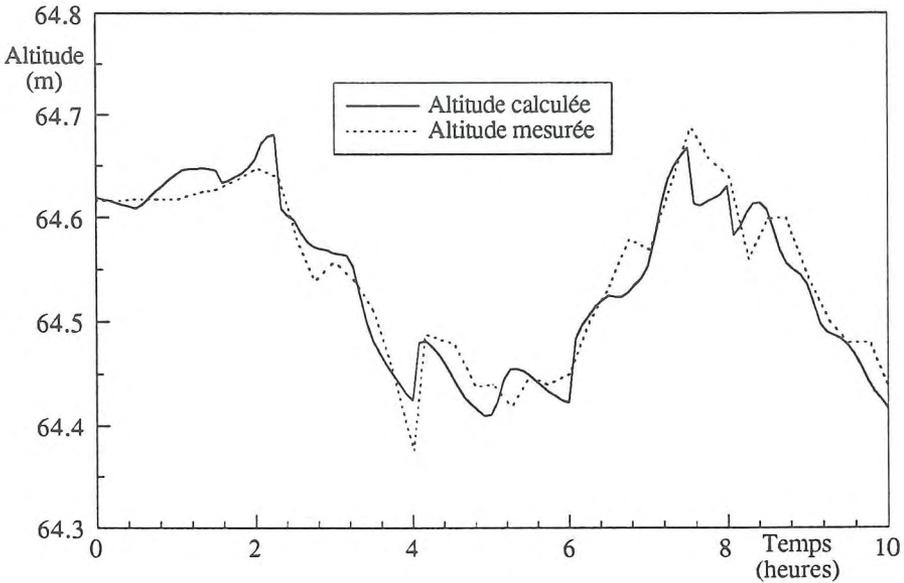


Figure X.16.
Comparaison de l'évolution temporelle de la surface libre à Ramet

Les figures X.13. et X.14. reprennent l'évolution temporelle du système sur tout le bief, d'abord pour l'altitude, enfin pour le débit. Pour cette dernière représentation, on reconnaît les variations par escaliers imposées aux extrémités. Les vagues successives de débit occasionnées au centre du bief prouvent qu'elles s'y résolvent en un état assez perturbé.

Il faut signaler que le quadrillage régulier de ces deux dernières figures ne correspond pas aux abscisses réelles de la discrétisation mais qu'il porte en chacun de ses sommets les valeurs exactement interpolées des résultats calculés.

L'ensemble de ces résultats prouve que le logiciel est habilité à contribuer utilement à la gestion de cours d'eau canalisés, traditionnellement voués à un rôle d'artère de communication. L'écrêtement des crues, l'exploitation de l'énergie hydroélectrique, la consommation en eau industrielle ou domestique, ..., sont autant de thèmes qui compliquent toujours davantage leur exploitation, lorsqu'il s'agit de concilier au mieux les attentes contradictoires des utilisateurs. Coordonner les opérations dans une chaîne d'aménagements constitue une autre source de difficultés pour la mise en place d'une stratégie de gestion optimale.

En considérant que la Meuse n'échappe pas à cette évolution, l'erreur constatée sur les hauteurs entre modèle et réalité, nettement inférieure à la fourchette dans laquelle le turbinage est autorisé, montre clairement qu'une simulation numérique de la gestion peut donner des renseignements utiles sur une coordination plus optimale des manoeuvres aux différents barrages (Garrison et al, Kivijarvi et al).

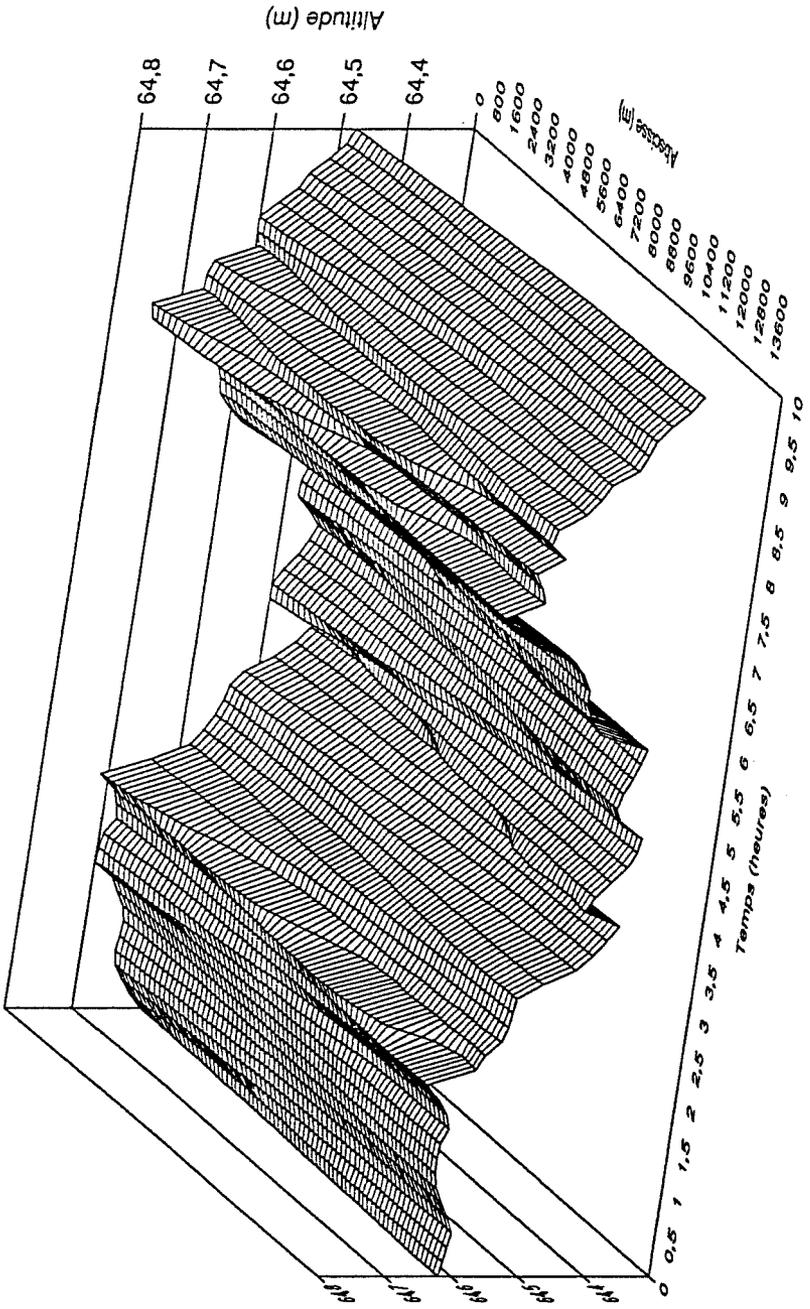


Figure X.17.
Evolution temporelle de l'altitude de la surface libre sur l'ensemble du bief Ampsin-Ramet

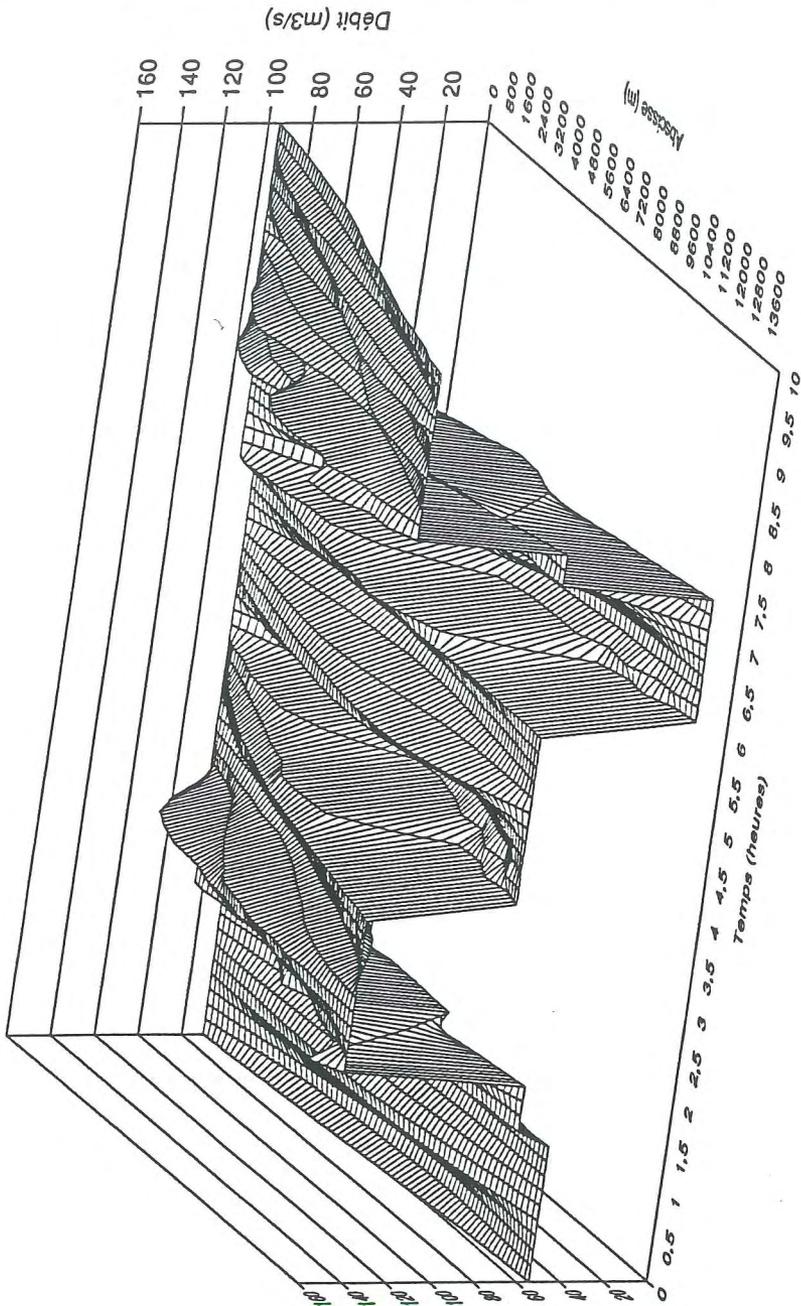


Figure X.18.
Evolution temporelle du débit sur l'ensemble du bief Ampsin-Ramet

X.8. CONCLUSION

Nous venons de développer et d'analyser les comportements intrinsèques d'un modèle instationnaire unidimensionnel, apte à gérer des réseaux à sections transversales quelconques.

A côté des priorités initiales de compléter le modèle hydrologique par un outil de propagation des hydrogrammes latéraux élémentaires, nous avons montré qu'une bonne connaissance et un choix approprié des paramètres ouvraient la voie à de multiples applications en tant qu'outil de gestion hydraulique.

Dans l'optique d'aide à des décisions routinières, il s'inscrit aussi comme un prolongement logique des premières considérations hydrologiques. Car si ces dernières sont à même de prévoir l'hydrogramme consécutif à une précipitation, il ne tient qu'au modèle unidimensionnel de l'exploiter pour mieux anticiper, in fine, certaines manoeuvres à l'aval.

La notion d'anticipation est une carte maîtresse de toute gestion optimale des ressources hydrauliques. Nous venons de le suggérer en exploitation hydraulique de basses chutes où un contrôle plus global des aménagements, par aide numérique, simplifie la recherche de meilleures combinaisons pour un turbinage accru, complémentaire à une limitation des déversements au droit du barrage mobile, grâce à des réactions adéquates d'anticipation dans les manoeuvres.

Mais elle devient carrément vitale lorsqu'elle s'adresse, pour des retenues de haute chute, à des circonstances tout à fait exceptionnelles que le Comité International des Grands Barrages invite depuis longtemps à considérer : la rupture brusque ou progressive d'un ouvrage de retenue.

Examinons dans quelle mesure l'écoulement consécutif qui s'établit peut être intégré dans notre discussion d'un modèle unidimensionnel général.

Chapitre XI

Application de la théorie de propagation d'ondes
en eau peu profonde aux écoulements consécutifs
aux ruptures de barrages

SOMMAIRE

- XI.1. Introduction*
- XI.2. Solutions théoriques d'écoulement consécutif à la rupture instantanée d'un ouvrage*
- XI.3. Conclusion*

XI.1. INTRODUCTION

"J'ai d'abord cru entendre le son d'un avion, puis il y eu ces grondements sourds qui s'amplifièrent. J'ai pensé qu'il passait le mur du son. Comme j'avais en vain cherché sa trace dans le ciel, mon inquiétude grandit et me fit me tourner vers l'amont. C'est alors que je vis les arbres qui se couchaient avec fracas et un mur d'eau dévalant la pente.

Je pris mes jambes à mon cou à la recherche d'un endroit plus élevé. Le vacarme était assourdissant. Je trébuchai, tombai, me relevai et poursuivis ma course jusqu'à un lieu plus sûr.

De là, j'assistai pétrifié à sa progression, rayant d'un trait notre camping en fauchant tout sur son passage.

Steve, hélas, n'eut pas ma chance".

C'est en ces termes que Cashman rapporte son aventure du 15 juillet 1982 dans le parc national du Colorado, U.S.A. Le tableau plutôt terrifiant d'un mur d'eau estimé par endroits à 8 m de haut, chariant troncs et galets énormes (photo XI.1.) dans un bruit de tonnerre continu, fut initié par la rupture progressive d'une brèche dans une structure en terre de 8 m de hauteur, située à 3.353 m d'altitude dans les montagnes rocheuses.

La modestie apparente des valeurs reconstituées après l'accident, avec un débit de pointe estimé à 500 m³/s au niveau du barrage (par comparaison, la rupture progressive du barrage Teton (USA), par effet de renard, a, par exemple, donné lieu à des débits de 70.000 m³/s) a cependant causé la mort de 6 personnes et la rupture par subverse d'un second ouvrage situé à l'aval.

La photo XI.1. montre l'aspect lunaire que conserve encore le paysage 10 ans après la catastrophe. Le débouché de la vallée assez étroite et à pente accentuée dans une plaine glaciaire a provoqué le dépôt d'une partie du charriage, donnant naissance à un cône d'alluvions d'un maximum de 13 m d'épaisseur pour un volume global qui, concentré sur un terrain de football, prendrait une soixantaine de mètres d'épaisseur.

La gravité des valeurs brutes et des conséquences relatées exhaustivement par Barrett et al pour cette rupture minime (par la hauteur initiale de retenue et le volume stocké) en regard des catastrophes reprises au tableau XI.1. fait d'autant mieux comprendre la position de la Commission Internationale des Grands Barrages (C.I.G.B.) vis-à-vis des grands ouvrages de retenue (cette appellation inclut tout ouvrage mesurant plus de 15 m de hauteur par rapport à sa fondation la plus basse) :

Application de la théorie de propagation d'ondes en eau peu profonde aux écoulements consécutifs aux ruptures de barrages

Année	Lieu	Type de barrage	Hauteur	Causes	Victimes
1802	Johnstown (U.S.A.)	Terre	22 m		600 morts
1864	Dale Dyke (G.B.)	Terre	29 m	glissement du talus	250 morts
1868	Inuka (Japon)	Terre			1200 morts
1892	Puentes (Espagne)	Maçonnerie Poids	69 m	Renard	608 morts
1895	Bouzey (France)	Maçonnerie Poids	15 m		86 à 100 mo
1898	South Fork River (U.S.A.)	Terre	21,5 m	Subversion	2000 à 4000 m
1911	Austin (U.S.A.)	Maçonnerie Poids	14 m		100 à 700 mo
1923	Gleno (Italie)	Béton Contreforts	22 m	Rupture de fondation	100 à 600 mo
1925	Eigion (G.B.)		10,5 m		16 morts
1928	Saint Francis (U.S.A.)	Béton Poids	62 m	Rupture des appuis	400 à 2000 m
1959	Vega de Terra (Espagne)	Contreforts	34 m	Cisaillage des contreforts	144 à 200 mo
1959	Malpasset (France)	Voûte mince	66 m	Rupture de fondation	421 morts
1960	Oros (Brésil)	Terre	36 m	Submersion pendant construction	1000 morts
1961	Hyokiri (Corée)		< 15 m		250 morts
1961	Babü Yar (URSS)		< 15 m		145 morts
1963	Variont (Italie)	Voûte	262 m	Glissement de la réserve	1925 morts
1967	Nanaksaga (Inde)	Terre	15,6 m	Renard	100 morts
1967	Shivaj i Sakar (Inde)		103 m		180 morts
1967	Sempor (Indonésie)	Enrochement	53,6 m	Chantier	200 morts
1976	Del Monte (Colombie)			Rupture de vannes	80 morts
1976	Teton (U.S.A.)	Terre	93 m	Renard	11 morts
1976	Santos Thomas (Philippine)				80 morts
1979	Machhu (Inde)	Beton et terre	26 m	Submersion	2000 morts
1985	Tesero (Italie)	Terre	20 m	Rupture de talus	200 morts
1991	Belci (Roumanie)		18 m		78 morts

Tableau XI.1. - Principales ruptures de barrage récentes, selon Dunglas (d'après les recensements de la C.I.G.B.)

Les conséquences dramatiques qu'occasionnent une rupture aux personnes et aux biens en

aval des sites, incite depuis longtemps la C.I.G.B. à recommander l'établissement de cartes des zones inondables et du temps mis par l'onde pour les submerger.

En 1962 déjà, les travaux de cette Commission insistent sur deux recensements significatifs avec 8300 grands ouvrages alors construits de par le monde et 400 barrages rompus.

Plus récemment, la C.I.G.B. a publié en 1983 une analyse détaillée sur ce même sujet primordial. Sur base d'un échantillon de 15.000 barrages parmi les 16.203 du monde (hors Chine qui en comptait à elle seule 18.595 en 1982), la fréquence globale d'approximativement 1,5 rupture par an résume assez mal la situation très différenciée dans laquelle se trouve les ouvrages selon leur âge, leur type ou encore leur situation :

- Même si les barrages anciens qui furent bien conçus restent sûrs, il est finalement assez logique et rassurant de constater, dans les statistiques de la C.I.G.B., qu'une meilleure connaissance des techniques et méthodes de calcul mises en oeuvre se répercute, au niveau des barrages plus récents, par une plus grande fiabilité.

Dans la phase jadis très critique d'édification, des précautions accrues réduisent aujourd'hui le risque de rupture.

- Le soin dans les phases d'études hydrologiques et de construction joue un rôle prépondérant dans la fiabilité, comme le prouve l'inégale répartition des risques selon la zone géographique au tableau XI.2. Aux connaissances plus longues des crues et de l'hydrologie générale des lieux concernés, correspond une situation privilégiée de l'Europe et de l'Asie face aux Etats-Unis. En outre, ces derniers disposent de zones peu peuplées qui requièrent moins de soin dans les techniques de construction.
- Si les mécanismes de rupture diffèrent radicalement pour les deux types de barrages repris dans la classification très globale du tableau XI.2., la fréquence de rupture par an montre cependant des valeurs très voisines. Aucun type de structure n'apparaît privilégié.

Les causes principales de rupture, rassemblées dans les statistiques de la C.I.G.B. sont reprises au tableau XI.3. Dunglas les résume, en terme de pourcentage d'accidents, à trois scénarios possibles après construction :

- Le barrage se rompt au premier remplissage dans 37 % des accidents. 2/3 d'entre eux ont eu lieu avant 1929. Dans les 12 ruptures recensées depuis, 10 concernaient des barrages en remblai.
- Le barrage se rompt par submersion pour 37 % également des catastrophes. 50 % de ces cas sont survenus avant 1930 et concernaient, pour la moitié, des structures de moins de 10 ans, ce qui trahit une insuffisance des connaissances hydrologiques.
- Le barrage se rompt durant l'exploitation pour 26 % des cas. Ce scénario est typique des barrages en remblai. Il traduit souvent un manque d'entretien et de surveillance.

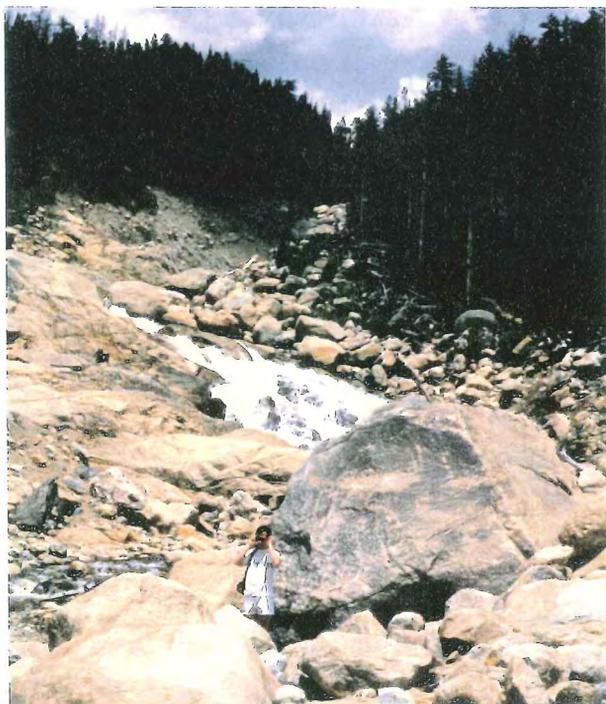


Photo XI.1. - Galets chariés et cône d'alluvions déposé suite à l'épanouissement de l'écoulement, dans la plaine glaciaire, consécutif à une rupture progressive de barrage dans le parc national du Colorado, USA

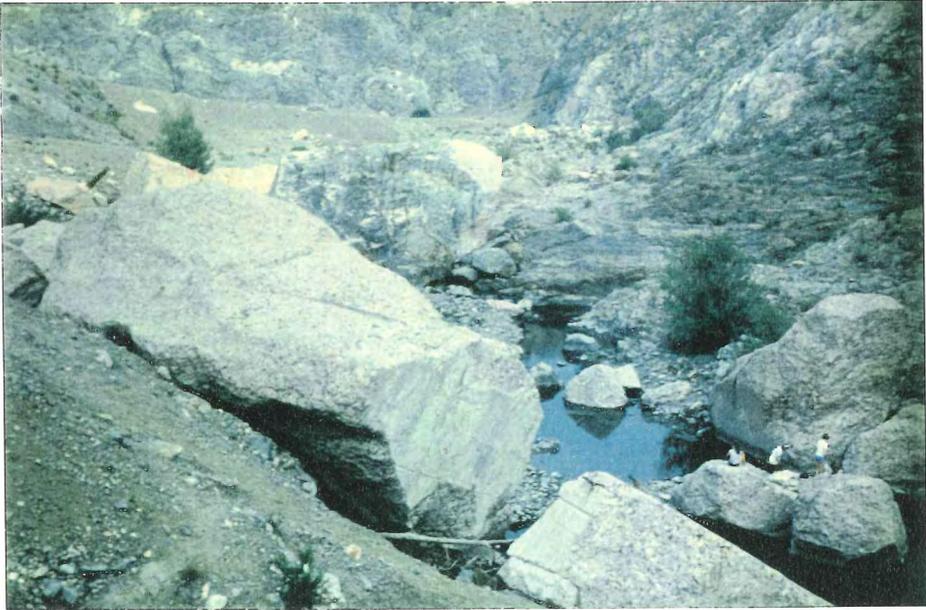
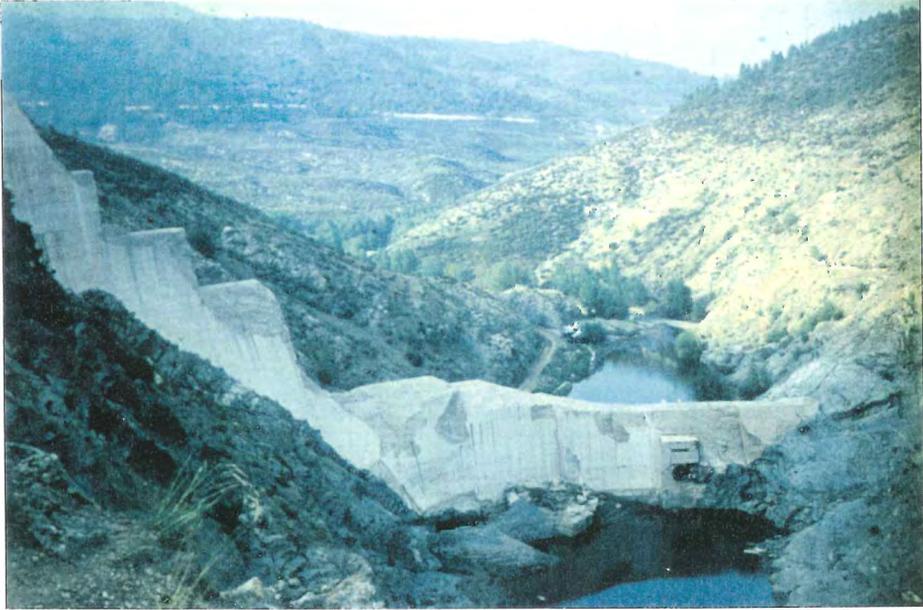


Photo XI.2. - Blocs chariés et vestiges de l'ouvrage, après la rupture instantanée du barrage de Malpasset, France

	Europe		Japon		U.S.A.		Europe + Japon + U.S.A.		
	Mis en service entre 1900 et 1974	Rompus	Mis en service entre 1900 et 1974	Rompus	Mis en service entre 1900 et 1974	Rompus	Mis en service entre 1900 et 1974	Rompus	Fréquence par an
Remblai (terre, enrochement)	715	1	851	3	2537	38 ou 39	4103	42 ou 43	1×10^{-4}
Maçonnerie (Poids, voûtes, contreforts)	1462	5	613	1	608	8 ou 9	2683	14 ou 15	8×10^{-5}
Divers					262	3	262	3	2×10^{-4}
TOTAL	2177	6	1464	4	3407	de 49 à 51	7048	de 59 à 61	1×10^{-4}
Fréquence par an	4×10^{-5}		4×10^{-5}		2×10^{-4}				

Tableau XI.2.
Ruptures dans le monde (hors Chine)
pour les barrages mis en service entre 1900 et 1974
(D'après Dunglas)

Barrages en terre et en enrochement
<ol style="list-style-type: none">1. Submersion du barrage par une crue provenant soit d'une sous-estimation de la crue de projet, soit du mauvais fonctionnement des vannes;2. Renard aux contacts barrage-fondations ou barrage-ouvrages annexes. Renards dus aux insuffisances des systèmes filtres-drains, à la présence d'argiles dispersives ou d'argiles qui se fissurent;3. Ruptures et glissements dus à des insuffisances de profil ou à des excès de pression interstitielle;4. Hétérogénéité ou insuffisance des fondations entraînant renards ou glissements;5. Terrassements excessifs avec fissuration;6. Liquéfaction d'éléments du remblai par des phénomènes mécaniques (séismes - vibrations) ou hydrauliques.
Barrages en béton
<ol style="list-style-type: none">1. Insuffisance de résistance et discontinuité dans les fondations;2. Sous-pression dans les fondations - absence ou insuffisance de drainage;3. Défaut dans les fondations;4. Renard dans les fondations;5. Tassement excessif ou différentiel des fondations;6. Gonflement du béton (qui a été à l'origine d'incidents très sérieux sur des barrages anciens)

Tableau XI.3. Principales causes de rupture, selon Dunglas (d'après les statistiques de la C.I.G.B.)

Il est remarquable de constater dans le tableau XI.3. que le séisme ne représente pas un risque significatif. Lorsqu'il provoque des désordres, ceux-ci sont souvent mineurs, plus rarement sensibles et constituent exceptionnellement la cause directe d'une rupture pour des grands barrages.

Ces derniers, par contre, peuvent induire des séismes, comme l'ont notamment relevé des mesures françaises pour le barrage de Monteynard sur le Drac.

Enfin, l'aspect stratégique ne peut être passé sous silence lorsqu'on repense à la destruction de barrages allemands par les alliés durant la dernière guerre (la mise au point sur modèle réduit d'une procédure efficace de bombardement a fait l'objet de films de guerre célèbres) et, plus récemment, aux tentatives de destruction du barrage yougoslave de Perruca.

L'analyse a posteriori d'une rupture a souvent toujours suscité une littérature technique abondante car les causes sont souvent multiples.

Elle a parfois donné lieu à d'importantes avancées dans le domaine technique comme en témoignent la loi de Lévy sur les barrages poids en maçonnerie, après la catastrophe de Bouzey, ou la mise au point du calcul de stabilité d'un massif rocheux de fondation fissurée soumis à des pressions hydrostatiques, après la rupture de Malpasset. Les enseignements tirés de l'analyse des ruptures interpellent tous les domaines de l'ingénieur des constructions.

Cependant, le fait qu'un certain nombre de ruptures relève d'erreurs humaines manifestes aux divers stades de la naissance et de la vie d'un ouvrage (reconnaissance, études, construction, exploitation et suivi) confirme qu'au delà de la mise en oeuvre d'un arsenal considérable de techniques et méthodes de calcul en constante évolution, la sécurité d'un ouvrage tient d'abord à la compétence, à l'expérience et à la conscience de responsabilité de l'intervenant humain.

Aussi longtemps qu'on s'attarde aux causes même de la catastrophe, seul l'aspect hydrologique rentre directement dans les préoccupations de ce travail. L'accident de Macchu II en 1979 avec une crue largement supérieure à celle prévue, peu de temps après l'édification du barrage, confirme qu'il reste aujourd'hui encore très difficile à appréhender dans certains coins du globe. Par ailleurs, la prévision correcte des crues durant la construction, où la capacité d'évacuation est souvent réduite, reste primordiale dans la sécurité de cette phase.

Néanmoins, le développement d'une politique complète de sécurité ne se borne pas à rencontrer toutes les conditions indispensables à l'élaboration et à la réalisation d'une structure sûre. Elle passe également par l'analyse d'un fonctionnement perturbé par des circonstances exceptionnelles et par la prise en compte de scénarios d'incidents et d'accidents de gravités diverses.

Ce type d'analyse prend une importance toujours croissante à cause des rôles multiples joués par les retenues dans le développement social et économique. Un simple dysfonctionnement qui perturbe la production d'énergie ou l'alimentation en eau induit des conséquences économiques de plus en plus dommageables tandis que l'écrêtement insuffisant des crues dans les sites exploités provoque aux personnes, aux biens et à l'environnement des stigmates jugés toujours plus catastrophiques.

L'érection chaque année de 350 nouveaux barrages dans des sites de plus en plus difficiles à tous points de vue ne fait qu'accentuer la problématique.

Dans cet état d'esprit, l'évolution des mentalités, qui a fait passer les ruptures du rang des incidents ayant un caractère de fatalité à la manifestation de managements impliquant nécessairement des responsables, influence-t-elle peut être l'élan actuel des recherches dans le domaine de la simulation de ces éléments exceptionnels.

Il est pourtant imputable avant tout aux capacités informatiques en constante évolution, qui donnent les moyens d'appréhender les nombreux écueils numériques inhérents à la modélisation des singularités que présente ce type d'écoulement extrême. Il y a près d'un siècle, Ritter a donné du phénomène une première solution théorique. Les moyens de résolution d'alors imposaient de trop lourdes simplifications pour pouvoir tirer des conclusions significatives sur des cas réels. Aujourd'hui, le problème reste d'actualité par les problèmes complexes et les limitations des méthodes de résolution.

Et si le développement des ordinateurs permet la simulation de ruptures dans des topographies réelles, la modélisation de la propagation d'un front raide à des vitesses élevées pose encore aux scientifiques d'innombrables difficultés.

Les résultats précieux qu'il sont déjà à même de fournir les imposent comme base d'élaboration de plans d'alerte et d'évacuation des populations. Ce type d'approche a notamment prouvé toute son utilité dans la remarquable organisation de l'évacuation des populations dans la rupture par renard du barrage Téton, USA.

Si l'on considère le problème d'un point de vue scientifique, deux niveaux de raisonnement définissent globalement le type de recherche, matérialisés en quelque sorte par la position que choisit l'observateur pendant l'écoulement consécutif à la rupture :

- Il examine l'écoulement au voisinage du barrage et étudie la dynamique de la phase finale qui aboutit à la ruine de l'ouvrage.

L'étude de l'interaction écoulement-structure pour un phénomène d'érosion est caractéristique des barrages en terre, pour lesquels des analyses récentes ont prouvé que la rupture ne saurait être instantanée, par opposition aux barrages en béton qui peuvent se rompre comme soufflé par une explosion (Malpasset, photo XI.2.) (Benoist).

La modélisation correcte de l'évolution temporelle d'une érosion, soit à la crête par subversion, soit par agression du corps du barrage par phénomène de renard, est cruciale pour établir les caractéristiques de l'hydrogramme à propager vers l'aval.

Dans ce type d'étude, le barrage agit comme section de contrôle et, par conséquent, section limite d'une étude d'interaction réservoir-brèche évolutive (Gozali et al).

La modélisation numérique couple modèles d'érosion, de transport sédimentaire et d'écoulement souvent en une succession de phases quasi-stationnaires, afin de dresser une évolution réaliste des débits déversés à l'aval (Singh, Betcheler et al, Chen et al).

Des modélisations de la dynamique de développement de renards et de ruptures progressives ont fait l'objet d'étalonnages et de tests sur quelques cas réels (Benoist, Jarrett et al). Quant à l'aspect expérimental correspondant, il cherche notamment à mieux connaître la structure de l'écoulement dans les zones proches de la brèche (Menendez et al).

- Il se focalise sur la propagation de l'onde vers l'aval, relevant les cotes maximales atteintes et le temps mis par le front pour les atteindre.

L'unique préoccupation consiste alors à représenter correctement l'écoulement et les singularités qu'il développe au long d'une reproduction la plus réaliste possible de la topographie de vallée.

La frontière amont de modélisation prend place au droit du barrage lorsque d'autres études ont conclu à la rupture progressive et ont caractérisé l'hydrogramme à injecter.

Dans le cas d'une rupture brusque où la section du barrage ne joue plus aucun rôle particulier, la discrétisation remonte jusqu'à l'extrémité amont du lac afin de traiter le complexe vallée-réservoir d'un seul tenant en incluant implicitement les spécificités de la vidange de la retenue dans l'onde de rupture.

Le contexte général du travail et, plus spécifiquement de la seconde partie, indique clairement que c'est à cette seconde vision que nous nous intéresserons. Il faut donc veiller à représenter correctement un écoulement très perturbé dans le cadre d'une application limite d'un modèle voué à d'autres applications.

Dans cette mesure, nous écarterons momentanément toute analyse du type de barrage concerné et de ses modes possibles de ruine pour définir les conditions les plus sévères d'un écoulement significatif de rupture.

Retenons, comme la grosse majorité des modèles présentés sur le sujet, le scénario d'un effacement instantané ou très brutal comme le mieux à même de mettre à jour des déficiences de modélisation : la structure disparaît et laisse un mur fluide raide et de hauteur importante libre de se propager sur un fond soit sec, soit couvert d'une lame très mince en regard de la profondeur initiale du lac au droit du barrage.

Une rupture progressive, par l'évolution beaucoup plus graduelle qu'elle implique pour les variables de l'écoulement, pose traditionnellement peu de problème, surtout pour un code éprouvé en rupture brusque.

Quelques caractéristiques de l'écoulement, tirées de témoignages et mesures qui suivent les grandes catastrophes, attestent de la complexité du problème lorsqu'il est abordé dans son intégralité.

On relève notamment des décalages dans les hauteurs maximales atteintes sur les deux versants d'un même profil en travers dans des vallées sinueuses et encaissées (Rajar) et une érosion sensible des sections complètement remodelées à l'aide des outils que charrie l'écoulement.

Wurbs y voit une évolution future vers des modèles d'écoulement sur fond mobile évolutif et perméable, quasi ou complètement tridimensionnels et couplés à des modèles de transport et d'érosion. Le caractère fortement stationnaire achève de montrer que des hypothèses aussi peu restrictives conduisent aujourd'hui à un modèle difficilement exploitable.

Rappelons par conséquent les hypothèses, par ailleurs très communes, dans ce type de modélisation et qui sous-tendent toutes les applications qui vont suivre :

1. - L'analyse topographique des principales vallées belges abritant des grands barrages

valide l'hypothèse de travailler avec une description topographique ramenée le long d'un axe principal.

Celle-ci suit sur ce thème l'expérience française en matière de modélisation de rupture qui axe ses efforts sur des codes unidimensionnels, incontournableement complétés de modèles bidimensionnels et d'essais physiques à l'échelle pour des débouchés semblables à celui représenté à la photo XI.1., des larges plaines alluviales à champs d'inondation important ou des analyses fines d'éventuelles bifurcations et autres singularités.

Elle prolonge enfin d'un point de vue théorique le raisonnement de la première partie de tirer tous les enseignements possibles d'une représentation filaire avant une éventuelle extension aux autres dimensions.

Signalons sur ce thème les conclusions de Hromadka et al qui concluent à une sous-estimation systématique des zones inondées en 1D, par comparaison de codes 2D. Guymon et al la justifient sur base de bilans de quantité de mouvement qui, en calcul axial, exacerbent les vitesses en diminuant les hauteurs d'eau. Leurs conclusions se fondent néanmoins sur un système d'équations tronqué avec résolution d'une équation de convection-diffusion.

2. - Le modèle travaille sur une topographie figée durant toute la propagation.

Cette hypothèse limitative n'est pas liée à l'aspect numérique du problème puisque nous avons mentionné la possibilité de faire évoluer les fichiers topographiques de pas en pas. L'organisation modulaire et totalement indépendante pour caractériser chaque profil en travers facilite la prise en compte d'une brèche évolutive par exemple. Mais le problème tient davantage à une caractérisation malaisée de l'évolution des profils qui déséquilibre le surcroît d'effort numérique en regard du gain en précision de modélisation.

L'incertitude qui subsiste sur l'évolution des obstacles à l'écoulement et leur possible distinction est un des incitants à englober ce type d'incident dans un coefficient de frottement très globalisé. Les investigations expérimentales de Sato et al vont cependant à l'encontre de cette approche, en cherchant à inclure explicitement l'effet des maisons et autres obstacles à l'écoulement dans le calcul d'un coefficient de frottement.

L'activité expérimentale spécialisée dans la prise en compte de fonds mobiles d'écoulement a par ailleurs conclu pour ce type d'application à une diminution de la célérité en propagation sur fond non stabilisé, à égalité de caractéristiques de frottement (Kenfain et al).

3. - La simulation ne porte que sur une propagation du volume d'eau qui constituait la retenue.

Par rapport à une expérience réelle comme celle du Colorado où Jarret et al concluent, pour expliquer l'importance des hauteurs atteintes ainsi que des dépôts, à un gonflement du débit assuré à 60 % par un charriage, cette hypothèse tient également aux nombreuses incertitudes inhérentes à d'autres choix.

Dans cet ordre d'idée, Mac Arthur s'est intéressé à expérimenter une rupture avec un fluide de Bingham (bentonite) sans pour autant garantir que les propriétés du fluide et son comportement général seraient plus étroitement la réalité. C'est pourtant la charge importante du fluide qui contribue à expliquer le constat classique d'une relative lenteur du front à se propager.

L'importance des coefficients de frottement adoptés pour coller aux mesures in situ avec un écoulement souvent infracritique accrédite pour cette hypothèse encore l'idée de globalisation extrême de ces phénomènes au sein du seul paramètre de frottement. L'élargissement de sa signification laisse présager d'abord de valeurs exceptionnelles à injecter dans la loi de Manning.

Mais il montre aussi qu'une information complète sur les dommages ne peut s'obtenir que par la construction de courbes enveloppe des valeurs recherchées pour une gamme significative de coefficients de frottement puisqu'ils ne reposent sur aucun étalonnage des vallées. Ces précautions s'accompagnent dans la législation française d'une majoration forfaitaire des valeurs calculées pour constituer des cartes définitives de zones inondables.

Benoist et al relatent une étude de sensibilité réalisée pour une quinzaine de cas en variant les coefficients de frottement. Il en ressort une influence sensible sur la célérité du front d'onde (variant de 70 % pour un coefficient de Manning Strickler passant de 20 à 40) mais une influence beaucoup plus réduite sur les cotes maximales atteintes (et négligeable dans 30 % des cas).

L'intervention de la loi turbulente de Manning dans la discussion nous ramène au système d'équations à utiliser pour refléter correctement le phénomène.

Les modélisations de Hunt (hypothèse cinématique) et de Hromadka (hypothèse de convection-diffusion) dans le domaine des ruptures témoignent une nouvelle fois que la transition d'échelle n'écarte pas nécessairement les modèles simplifiés que nous avons discutés dans le cadre hydrologique.

Néanmoins, par des comparaisons objectives de modèles numériques construits sur des hypothèses diverses (Muskingham, modèle diffusif, équations d'Euler, ...) et leur comparaison à la réalité des faits, Reiter et al ainsi que Würbs concluent à la nécessité d'utiliser les équations de Navier-Stokes en unidimensionnel comme base minimale pour des résultats fiables.

Nous avons vu lors de l'établissement du formalisme complet en unidimensionnel (chapitre IX) qu'aucune hypothèse ne s'opposait effectivement à la propagation d'ondes importantes, à l'exception toutefois de celle qui conduit à l'hydrostaticité de la pression sur la hauteur.

Au voisinage du front, la variation rapide de hauteur coïncide avec le développement localisé de vitesses verticales non négligeables. Dans ses études expérimentales de propagation de fronts sur lame fluide, Nakagawa impute à cette hypothèse d'hydrostaticité les plus faibles différences de hauteur mesurées par rapport à la théorie de Stoker.

Mais en procédant à une comparaison du modèle de Navier-Stokes unidimensionnel avec les équations de Boussinesq qui incluent l'effet de courbure de surface libre (Santos),

Basco et al concluent à l'inutilité de conserver les termes additionnels dans le type d'application qui nous occupe.

Ainsi, la spécificité des modélisations de rupture n'empêche-t-elle pas de poursuivre avec le même système d'équations. Celui-ci constitue d'ailleurs la base de travail la plus communément utilisée par la littérature spécialisée dans ce domaine, même s'il s'avère émerger d'hypothèses non négligeables face au phénomène à représenter.

XI.2. SOLUTIONS THEORIQUES D'ECOULEMENT CONSECUTIF A LA RUPTURE INSTANTANEE D'UN OUVRAGE

Avant d'entreprendre la moindre tentative d'évaluation ou de modélisation de ce type d'écoulement, il n'est pas inutile de préciser quelques caractéristiques fondamentales du phénomène étudié.

Le cadre théorique extrêmement simplifié qui est à la base de l'établissement de solutions théoriques explique qu'elles ne trouvent pas un large écho pour une évaluation significative des conséquences en site réel.

Cependant, elles ont le mérite de suggérer un critère de classification des phénomènes étudiés, elles fixent des bornes dans les ordres de grandeur à considérer et contiennent certaines particularités remarquables, présentes en modélisation de rupture réelle.

Débutons donc par un condensé des premières théories de propagations sur fond sec et humide, proposées originellement en section rectangulaire par Ritter et Stoker.

Nous en établissons ici une extension pour une forme de section transversale plus générale.

XI.2.1. Ecriture des équations sur deux familles de caractéristiques

Reprenons le système d'équations unidimensionnelles (IX.41) en négligeant les effets de la viscosité. En introduisant plus largement l'expression de la célérité donnée en (IX.42), en développant les termes de dérivées puis en simplifiant, on obtient :

pour la continuité

$$\frac{g\omega}{c^2} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \right) + u \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_{z=h} + \omega \frac{\partial u}{\partial x} - q_L = 0 \quad (\text{XI.1})$$

tandis que l'équation dynamique s'écrit, pour une pente de fond limitée :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (1 - \rho_\omega) \frac{gu}{c^2} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial(\rho_\omega u)}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} - g\theta + n^2 \frac{gq|u|}{R_m^{4/3}} = 0 \quad (XI.2)$$

Substituons à ces équations deux de leurs combinaisons linéaires [(XI.1) + λ_c .(XI.2)] en choisissant pour valeurs de λ_c deux expressions qui permettent d'éliminer les dérivées partielles au profit de dérivées totales.

Si nous nous plaçons sur une courbe du plan (x, t), ces deux variables perdent leur indépendance et s'établit dès lors une relation $x = x(t)$ dans l'hypothèse où on conserve t comme seule variable indépendante. Sur cette courbe où h et u ne dépendent plus que du temps, on écrit :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \quad (XI.3)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \quad (XI.4)$$

Ordonnons les dérivées partielles de h_t et u dans les combinaisons linéaires de façon à faire apparaître les seconds membres de ces relations :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_c g}{c^2} \left[\frac{\partial h}{\partial x} \left(\omega u + \frac{c^2}{\lambda_c} \right) + \frac{\partial h}{\partial t} \left(\omega + \frac{(1 - \rho_\omega)u}{\lambda_c} \right) \right] + \left[\frac{\partial u}{\partial x} (\lambda_c \omega + \rho_\omega u) + \frac{\partial u}{\partial t} \right] + u^2 \frac{\partial \rho_\omega}{\partial x} - \lambda_c q_L - \theta g \\ + n^2 \frac{gq|u|}{R_m^{4/3}} + \lambda_c u \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_{z=h} = 0 \end{aligned} \quad (XI.5)$$

Pour exploiter les relations (XI.3, 4) dans (XI.5) on imposera :

$$\frac{\omega_u + \frac{c^2}{\lambda_c}}{(1 - \rho_\omega)u} = \frac{dx}{dt} \quad (XI.6)$$

$$\omega + \frac{c^2}{\lambda_c}$$

et

$$\lambda_c \omega + \rho_\omega u = \frac{dx}{dt} \quad (XI.7)$$

ce qui donne, par égalité des premiers membres, une relation du second ordre en λ_c .

En redéfinissant les deux racines par leur propre produit avec la section, ce qui donne

$$\lambda_c = \pm c \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2} (1 - \rho_\omega) \rho_\omega} \quad (\text{XI.8})$$

on obtient deux couples d'équations, chacun caractérisé par une des racines λ_c .

Ainsi, le long de chaque famille de caractéristiques d'équation :

$$\frac{dx}{dt} = u \rho_\omega + \lambda_c \quad (\text{XI.9})$$

s'écrit l'équation correspondante suivante :

$$\frac{\lambda_c g}{c^2} \left[1 + \frac{u}{\lambda_c} (1 - \rho_\omega) \right] \frac{dh}{dt} + \frac{du}{dt} + u^2 \frac{\partial \rho_\omega}{\partial x} - \lambda_c q_L - \theta g + n^2 \frac{g q_L u}{R_m^{4/3}} + \lambda_c u \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_{|z=h} = 0 \quad (\text{XI.10})$$

Insistons, dans ces expressions exploitées en méthode des caractéristiques, sur l'omniprésence de l'effet d'inégale répartition de vitesse sur la section. Il intervient dans une généralisation de la notion de célérité avec l'expression de λ_c , créant un effet d'autant plus perceptible que les phénomènes étudiés conduiront à des nombres de Froude excédant parfois l'unité. Par ailleurs, ρ_ω marque également son empreinte sur l'équation de caractéristique en y pondérant l'influence de la vitesse.

La généralité des expressions marque d'autant mieux les lourdes hypothèses qui ont ouvert la voie aux premières résolutions analytiques :

- Le diagramme des vitesses sur la section est uniforme ($\rho_\omega = 1$).
- Les contributions latérales sont négligées ($q_L = 0$).
- La forme des sections transversales reste inchangée tout au long de la propagation

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_{|z=h} = 0$$

- L'écoulement s'établit sur un fond plat ($\theta = 0$).

- Son fini de surface permet de négliger les pertes par frottement ($n \rightarrow \infty$). Cette hypothèse très restrictive a été par la suite retravaillée par Dressler et Wintham en vue d'étendre les travaux de Ritter aux écoulements avec frottement.

Ces conditions très privilégiées permettent de travailler directement sur les faisceaux de caractéristiques d'équations

$$\frac{dx}{dt} = u \pm c \tag{XI.11}$$

pour y résoudre l'équation correspondante

$$\frac{d}{dt} (u \pm we) = 0 \tag{XI.12}$$

compte tenu de la définition suivante de la variable d'Escoffier we :

$$we(h) = \int_0^h \frac{g}{c(\xi)} d\xi \tag{XI.13}$$

XI.2.2. Propagation sur fond sec

En prélude à des essais physiques que nous décrirons dans les chapitres ultérieurs, nous allons raisonner sur un canal vitré supposé momentanément lisse et rempli d'eau sur une fraction de sa longueur.

Cette lame immobile s'étend d'une part jusqu'à l'extrémité fermée du canal et d'autre part est maintenue par une plaque verticale épousant la forme de la section de façon à éviter toute fuite. Le reste du canal présente donc des parois totalement sèches.

La logique d'une rupture brusque et totale suppose que la plaque disparaisse ou s'efface instantanément. Nous réaliserons cette opération dans le raisonnement théorique en annulant progressivement l'emprise de la plaque sur l'écoulement par trois étapes distinctes :

1. - Considérons d'abord que la plaque subit une translation parallèlement au fond en entraînant la lame vers les zones sèches. Dans cette première phase, le mouvement de la plaque est supposé conditionner complètement l'onde de dépression qui s'établit.

La mise en mouvement de la plaque s'effectue selon le diagramme abscisse-temps reporté à la figure XI.1., avec une vitesse croissante avec le temps. A partir du point d, elle stabilise sa vitesse à une valeur constante u_d .

La figure XI.1. suggère que les caractéristiques arrières C^- sont des droites parallèles dans la zone I, divergentes dans la zone II, parallèles à nouveau dans la zone III.

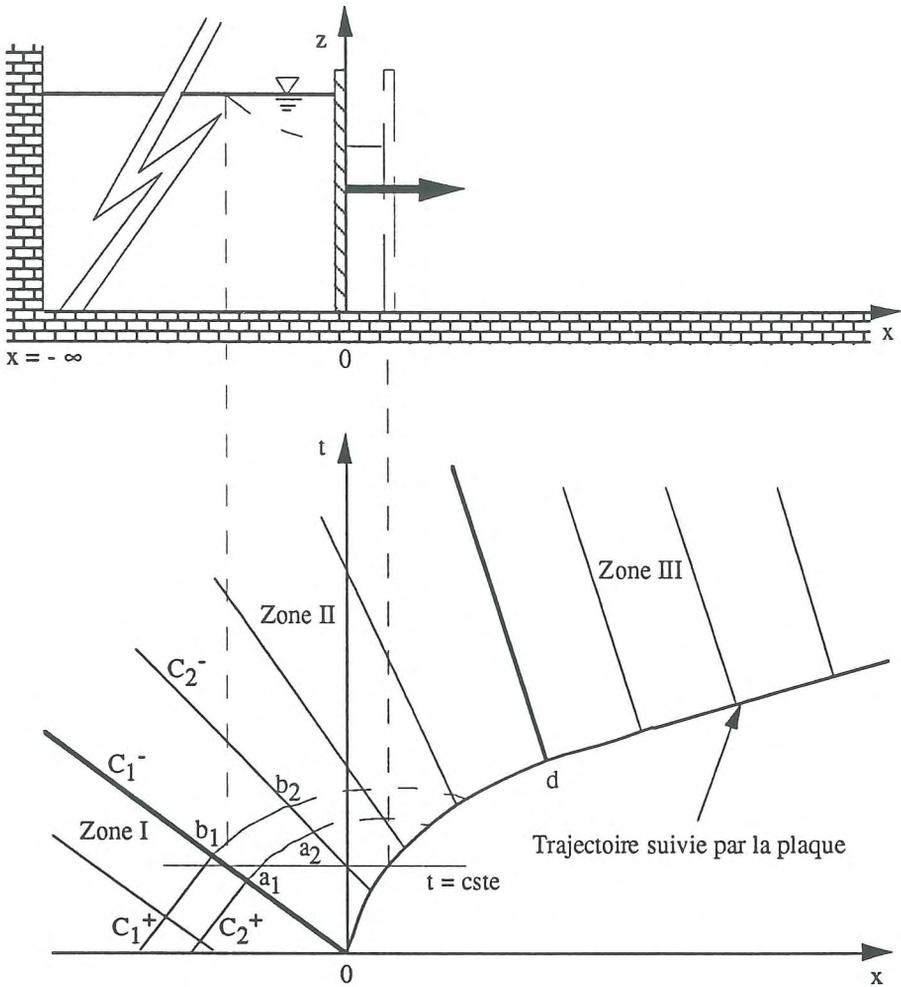


Figure XI.1.
Représentation des caractéristiques pour la propagation d'un front limité par une plaque et se propageant sur fond sec, dans le cas général d'une vitesse de plaque variable avec le temps

Avant de justifier ce tracé et de préciser clairement le partage en zones, nous définirons la forme mathématique des sections transversales envisagées par la relation qui lie la largeur de section à la hauteur correspondante :

$$l_d + l_g = l \cdot z^\alpha \tag{XI.14}$$

L'expression correspondante de la célérité s'écrit

$$c(h) = \sqrt{\frac{g}{\alpha + 1}} \cdot h \tag{XI.15}$$

tandis que la variable d'Escoffier prend la forme simplifiée suivante :

$$we(h) = 2(\alpha + 1)c(h) \tag{XI.16}$$

Zone I Cette zone reprend la partie de la retenue non encore perturbée par le mouvement de la plaque. Elle est bordée à sa droite dans le plan (x, t) par la caractéristique arrière issue de l'origine qui a pour équation, en vertu des conditions initiales :

$$\frac{dx}{dt} = -c_0 \tag{XI.17}$$

Elle porte, par l'équation (XI.12), une valeur constante de la grandeur ($u - we = -we_0$)

Comme par tout point de cette droite passe également une caractéristique avant qui porte une valeur constante ($u + we = we$), l'état au repos se confirme directement :

$$u = u_{a1} = u_{b1} = 0 \qquad we = we_{a1} = we_{b1} = we_0$$

ainsi que

$$c_{a1} = c_{b1} = c_0 \quad \text{par (XI.16)} \tag{XI.18}$$

Zone II Les limites de la zone II sont définies par la caractéristique arrière issue de l'origine et celle qui part du point d où la vitesse de la plaque est stabilisée.

Comme chaque caractéristique montante (C_1^+ , C_2^+ par exemple) porte une valeur constante de ($u + we$) il vient, avec les conditions initiales :

$$u_{a1} + we_{a1} = u_{a2} + we_{a2} = we_0 \tag{XI.19}$$

$$u_{b_1} + we_{b_1} = u_{b_2} + we_{b_2} = we_0 \quad (XI.20)$$

De même, la valeur constante, a priori inconnue, portée par chaque caractéristique descendante permet d'écrire pour C_2^- :

$$u - we = u_{a_2} - we_{a_2} = u_{b_2} - we_{b_2} \quad (XI.21)$$

La résolution du système constitué d'une part de l'égalité des seconds membres de (XI.19) et (XI.20), d'autre part de (XI.21), établit que chaque caractéristique descendante est une droite puisqu'en tout point de celle-ci, u , we , et donc c ont une valeur constante. Si nous extrayons l'expression de we de (XI.20)

$$we_{b_2} = 2(\alpha + 1)c_{b_2} = we_0 - u_{b_2} \quad (XI.22)$$

nous obtenons fort naturellement qu'une vitesse croissante de la plaque réduit la célérité au fil du temps et donc la hauteur d'eau.

Utilisons cette expression dans (XI.11) pour obtenir la pente d'une caractéristique quelconque descendante C_2^- :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2\alpha + 3}{2(\alpha + 1)} u_{b_2} - c_0 \quad (XI.23)$$

Elle prouve qu'une vitesse croissante de la plaque avec le temps assure la divergence des caractéristiques.

Zone III La zone III ne doit sa distinction par rapport à la zone II qu'à la constante de la vitesse de la plaque. Elle particularise par conséquent les raisonnements précédents avec un faisceau de droites parallèles pour caractéristique descendante ayant comme pente constante :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2\alpha + 3}{2(\alpha + 1)} u_d - c_0 \quad (XI.24)$$

2. - Nous avons montré dans la zone II que la hauteur se réduisait avec le temps en supposant implicitement qu'elle ne s'annulait jamais (XI.22). Mais si nous poussons la vitesse stabilisée de la plaque jusqu'à

$$we_0 = u_d \quad (XI.25)$$

la surface libre au niveau du front d'onde touche alors le fond du canal par (XI.22).

En d'autres termes, nous réalisons la seconde étape dans le raisonnement en annulant l'emprise de la plaque sur l'écoulement lorsqu'elle a atteint la vitesse stabilisée.

Dans cette hypothèse, la zone III disparaît totalement avec des caractéristiques arrière qui se confondent, à partir du point d, avec la trajectoire de la plaque.

Lorsqu'on dépasse cette limite avec une vitesse excessive à la stabilisation, le front perd irrémédiablement le contact avec la plaque avant stabilisation dès l'instant où la vitesse instantanée égale we_0 et que la caractéristique arrière devient tangente à la trajectoire dans le plan (x, t) .

Nous savons donc que dans son mouvement désormais autonome après stabilisation de la vitesse de la plaque, le front se propage à une vitesse égale à :

$$we_0 = 2(\alpha + 1)c_0. \quad (XI.26)$$

Reste toutefois à éliminer l'influence sur l'onde de la mise en mouvement de la plaque.

3. - Nous l'obtenons dans cette troisième phase en imaginant qu'une accélération infinie de la plaque la fait passer instantanément à sa vitesse finale. La partie courbe de la trajectoire de la plaque se réduit au point origine avec le faisceau de caractéristiques arrières de la zone II qui s'y coupent. Cet état est décrit à la figure XI.2.

Pour obtenir l'équation de la ligne d'eau instantanée dans la zone II, on sort l'expression de la vitesse de l'équation d'une caractéristique arrière C -

$$\frac{x}{c} = \frac{2\alpha + 3}{2(\alpha + 1)} u - c_0 \quad (XI.27)$$

pour la placer dans l'expression constante portée par chacune de ces caractéristiques $(u - we = -we_0)$, ce qui donne :

$$c = \frac{we}{2(\alpha + 1)} = 2c_0 \frac{\alpha + 1}{2\alpha + 3} \left(1 - \frac{1}{we_0} \frac{x}{t} \right) \quad (XI.28)$$

Tenant compte de la liaison de la célérité à la hauteur d'eau (XI.15), on a finalement

$$\frac{h}{h_0} = 4 \left(\frac{\alpha + 1}{2\alpha + 3} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{g(\alpha + 1)h_0}} \frac{x}{t} \right)^2 \quad (XI.29)$$

équation valable jusqu'au profil non perturbé limité par la droite $(x = -c_0t)$.

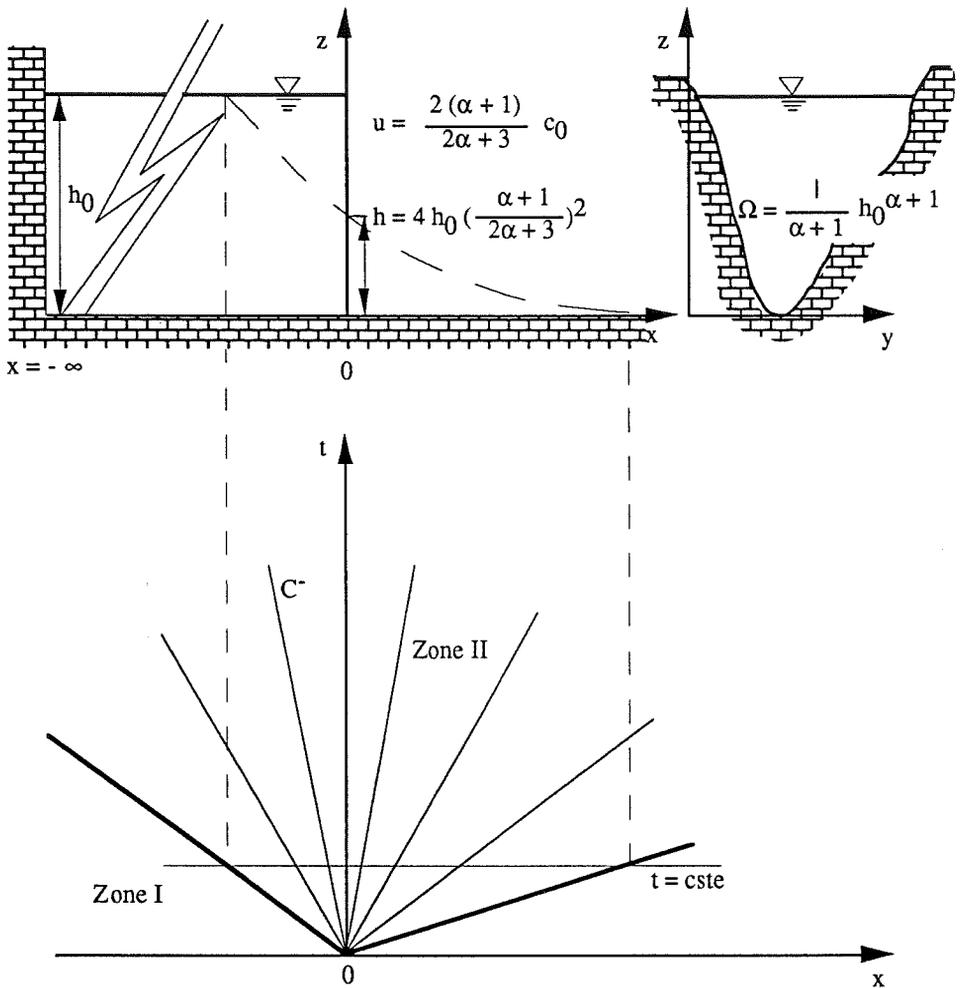


Figure XI.2.
Représentation du faisceau de caractéristiques pour la propagation d'un front raide se propageant sur fond sec

Le profil parabolique décrit par (XI.29) montre que la surface libre au niveau du front se raccorde tangentiellement au fond du canal. Au droit du barrage ($x = 0$), la hauteur (XI.29) et la vitesse (XI.26) sont constantes, comme si les lignes d'eau s'articulaient au fil du temps sur un point fixe imaginaire situé à :

$$\frac{h|_{x=0}}{h_0} = 4 \left(\frac{\alpha + 1}{2\alpha + 3} \right)^2 \quad (\text{XI.30})$$

avec

$$u|_{x=0} = \frac{2(\alpha + 1)}{2\alpha + 3} c_0 \quad (\text{XI.31})$$

Ces solutions généralisent les résultats bien connus de Ritter qui donnent en section rectangulaire ($\alpha = 0$) une vitesse de propagation du front égale au double de la célérité c_0 , et un point fixe au niveau du barrage caractérisé par :

$$h|_{x=0} = \frac{4}{9} h_0 \quad \text{et} \quad u|_{x=0} = \frac{2}{3} c_0$$

Ces valeurs constantes sont aussi celles vers lesquelles tendent en tout point, avec le temps, la hauteur d'eau et la vitesse. Il faut en effet rappeler dans cette théorie que l'onde négative remonte indéfiniment dans la retenue sans jamais trouver de berge lui permettant de se réfléchir et de venir influencer l'écoulement : le réservoir possède les capacités suffisantes pour alimenter, sans jamais se tarir, la lame qui se propage.

La caractéristique essentielle de la solution reste qu'elle décrit un phénomène continu, comme le rappelle la divergence des caractéristiques négatives de la figure XI.2. La forme parabolique de la surface libre dans la zone II, avec un raccord progressif au fond de la hauteur du front de propagation s'oppose à l'attente intuitive d'un front raide de hauteur importante.

Nous allons voir qu'il apparaît dans la solution d'une propagation sur fond humide, processus complètement différent dans sa description théorique par la présence, cette fois, d'une discontinuité dans la solution.

XI.2.3. Propagation sur fond humide

La démarche théorique pour établir la solution diffère également puisque, conformément à l'idée de Stoker, nous estimerons raisonnablement l'écoulement des diverses zones pour ensuite prouver qu'un tel mouvement peut être déterminé de façon compatible avec la théorie pour toute valeur du rapport entre h_0 , profondeur de la retenue, et h_1 , épaisseur initiale du bourrelet d'eau aval (figure XI.3.). Le raisonnement porte sur une section transversale définie comme au paragraphe précédent par la relation générale (XI.14).

- Décrivons d'abord succinctement la succession des zones envisagées en débutant par celle du front. Si nous identifions l'action de ce front vis-à-vis du bourrelet aval au

mouvement d'une plaque repoussant la lame fluide, nous nous retrouvons dans un cas comparable à celui décrit par la figure XI.1., à la différence près que la plaque repousse cette fois la lame au lieu de la libérer.

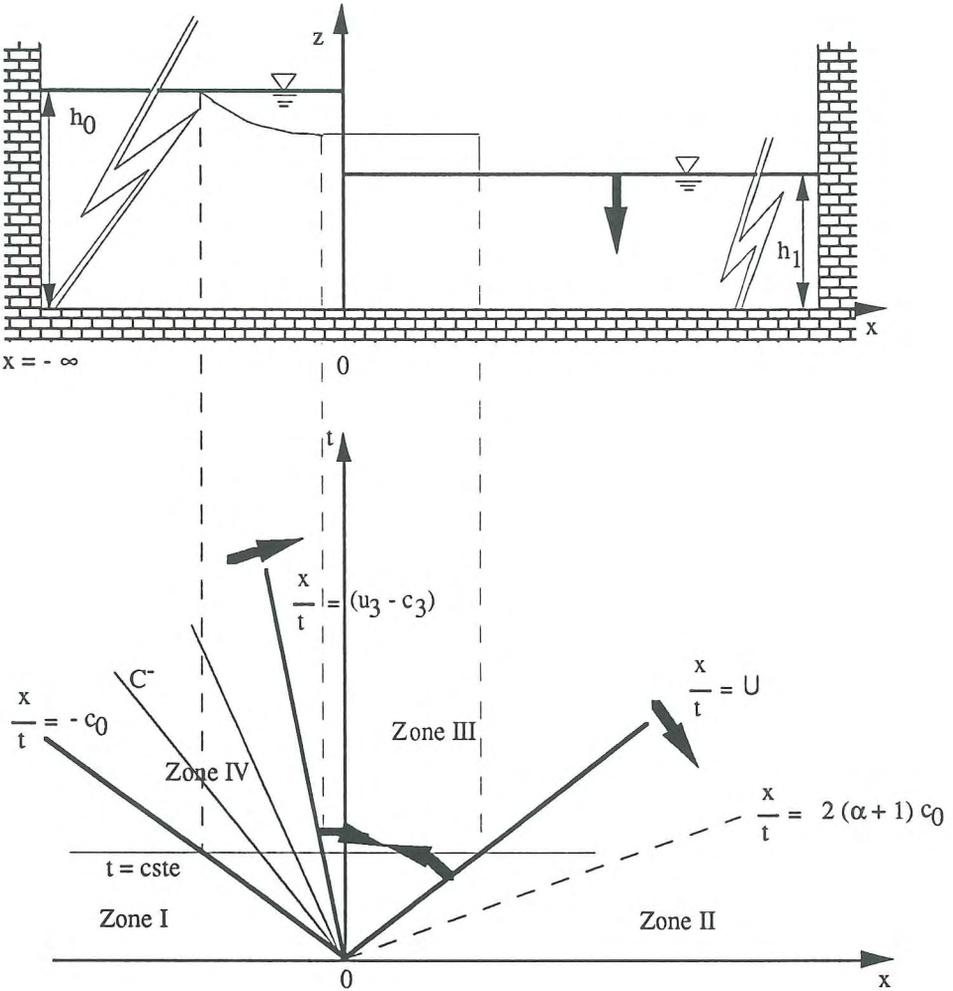


Figure XI.3.
Représentation du faisceau de caractéristiques pour la propagation d'un front raide se propageant sur fond humide

En considérant momentanément que le bourrelet d'eau se trouve à gauche de la plaque, (figure XI.4.), nous profitons alors de la relation (XI.23) pour conclure

qu'une vitesse décroissante lorsque t grandit conduit à des caractéristiques négatives convergentes dans la zone II, avec formation tôt ou tard d'un choc dans la solution. Une analyse apparentée à celle du paragraphe V.2. permet accessoirement de déterminer l'origine et la situation de la courbe enveloppe des lieux d'intersection de caractéristiques.

Dès lors que l'eau en $x = 0$ semble acquérir instantanément une vitesse non nulle, on supposera une formation instantanée du choc avec l'hypothèse la plus simple d'une vitesse de déplacement constante.

S'il en est ainsi, l'eau immédiatement en amont (zone III) se trouve dans un état constant comme l'établissent les développements mathématiques suivants pour le choc, état qui ne peut perdurer indéfiniment puisqu'il contraste avec l'état de repos (zone I) dans la retenue. Il existe par conséquent une zone IV opérant la transition entre ces deux états par une simple onde de dépression.

- Déterminons à présent la forme mathématique de la solution illustrée dans son ensemble à la figure XI.3.
 - a. Nous généraliserons d'abord l'analyse du paragraphe V.3. qui établissait la relation entre variables de part et d'autre d'un saut sur base de la seule continuité. Etendue aux sections quelconques, la relation (V.21) devient :

$$\omega_1 (u_1 - U) - \omega_2 (u_2 - U) = q' \tag{XI.32}$$

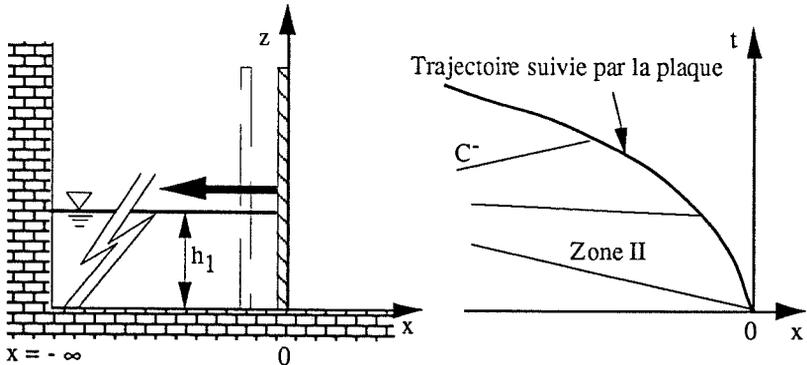


Figure XI.4.
Représentation de la propagation d'un front limité par une plaque et se propageant sur fond sec, dans le cas général d'une vitesse de plaque variable avec le temps.

- Nous nous basons à nouveau sur la figure V.5. en remplaçant h_1, h_2 par ω_1, ω_2 pour compléter le raisonnement en écrivant l'expression intégrée sur la hauteur du bilan dynamique entre les abscisses $x_A(t)$ et $x_B(t)$:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_A(t)}^{s(t)} q(x, t) dx + \frac{d}{dt} \int_{s(t)}^{x_B(t)} q(x, t) dx = \int_0^{\omega_A(t)} \frac{p}{\rho} d\Omega - \int_0^{\omega_B(t)} \frac{p}{\rho} d\Omega \quad (XI.33)$$

Si nous réduisons l'espace de contrôle en emprisonnant le saut, un raisonnement analogue au paragraphe V.3. donne, en explicitant pression hydrostatique et section en termes de hauteur d'eau :

$$q'(u_2 - u_1) = \frac{g^l}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)} (h_1^{\alpha+2} - h_2^{\alpha+2}) \quad (XI.34)$$

compte tenu d'inconnues continues avec leurs dérivées de part et d'autre de la singularité.

La quantité q' rappelle qu'un flux de particules traverse le choc. Elles progressent toujours de la zone de faible hauteur vers la zone de hauteur plus importante, comme l'établissent des considérations énergétiques (Stoker) par ailleurs inutiles à ce développement.

Puisque les relations (XI. 32, 34) peuvent s'exprimer avec des seules vitesses relatives au choc, la validité des lois de la mécanique dans tout système se déplaçant à vitesse constante nous autorise à ajouter une constante à u_1, u_2, U . En particulier, si nous choisissons d'annuler u_1 , nous modifions en conséquence les autres vitesses pour écrire (XI. 32, 34) en terme de célérité :

$$U c_1^{2(\alpha+1)} = (U - u_2) c_2^{2(\alpha+1)} \quad (XI.35)$$

$$U (U - u_2) [c_1^{2(\alpha+1)} - c_2^{2(\alpha+1)}] = \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} [c_1^{2(\alpha+2)} - c_2^{2(\alpha+2)}] \quad (XI.36)$$

- b. Appliquons directement ces relations à la détermination du front de la figure XI.3. Nous les adaptons plus précisément aux zones II (hauteur h_1) et zone III (état constant de hauteur h_3 et de vitesse u_3) en les transformant en deux

relations qui lient respectivement $\left(\frac{u_3}{c_1}\right)$ et $\left(\frac{c_3}{c_1}\right)$ à c_1 et U :

(XI.36) après remplacement de c_3 extrait de (XI.35) :

$$\frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} \left\{ 1 - \left[\frac{1}{1 - \frac{\left(\frac{u_3}{c_1}\right)}{\left(\frac{U}{c_1}\right)}} \right]^{\frac{\alpha + 2}{\alpha + 1}} \right\} + \left(\frac{u_3}{c_1}\right) \left(\frac{U}{c_1}\right) = 0 \quad (\text{XI.37})$$

tandis que (XI.35) :

$$\left(\frac{c_3}{c_1}\right) = \left[\frac{1}{1 - \frac{\left(\frac{u_3}{c_1}\right)}{\left(\frac{U}{c_1}\right)}} \right]^{\frac{1}{2(\alpha + 1)}} \quad (\text{XI.38})$$

- c. Pour fermer le système, on écrit les relations d'une onde de dépression centrée à l'origine des axes puisqu'il est supposé qu'une accélération infinie fait instantanément passer le front du repos à une vitesse finie. Nous nous trouvons alors face à un cas étudié en rupture sur fond sec, avec en particulier la relation (XI.19) qui s'écrit, dans cette situation précise :

$$2(\alpha + 1) \left(\frac{c_o}{c_1}\right) = \left(\frac{u_3}{c_1}\right) + 2(\alpha + 1) \left(\frac{c_3}{c_1}\right) \quad (\text{XI.39})$$

La zone de transition adopte par conséquent un raccord de la surface libre de forme parabolique.

- d. Le problème est complètement résolu par ces trois dernières relations (XI.37, 38, 39). Seules quelques valeurs particulières de l'exposant α permettent d'obtenir une relation explicite donnant pour $\left(\frac{h_o}{h_1}\right)$ la vitesse relative de propagation du front $\left(\frac{U}{c_1}\right)$.

Nous avons donc illustré la solution à la figure XI.5. pour 5 valeurs de α , afin de présenter la vitesse de propagation du front comparée non pas à c_1 mais plus significativement à la célérité dans le réservoir $\left(\frac{U}{c_0}\right)$ en fonction du rapport des hauteurs $\left(\frac{h_0}{h_1}\right)$.

On constate immédiatement le rôle critique joué par l'irrégularité de la forme de section comparée à la forme rectangulaire.

Il est logique d'attendre de la solution qu'elle tende, pour des grands rapports de hauteurs $\left(\frac{h_0}{h_1}\right)$, vers le cas de propagation sur fond sec. La forme des courbes de la figure XI.6. confirme ce comportement même si à fond d'échelle des abscisses, nous obtenons des valeurs de $\left(\frac{U}{c_0}\right)$ encore très différentes de celles données par (XI.26).

La figure XI.6. souligne la lenteur des courbes à tendre vers ce cas limite et prouve ainsi que l'assimilation sur fond sec n'est licite que pour un rapport de hauteurs excessivement élevé. Cette conclusion, valable pour toute valeur de α , dissocie une nouvelle fois les deux types d'applications décrites, en l'absence de tout frottement du moins.

Revenons un instant au schéma de la figure XI.3. pour examiner comment évolue la forme du profil de surface libre en fonction du rapport des hauteurs.

Lorsqu'à niveau de retenue amont constant, le niveau aval diminue, la droite caractéristique limitant les zones III et IV tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. En particulier, la vitesse dans la zone d'état constant (u_3) va dépasser puis excéder de plus en plus la célérité correspondante (c_3). Cette droite caractéristique va, au cours de cette évolution, rattraper la caractéristique qui décrit l'évolution du front, montrant ainsi que la zone III d'état constant se rétrécit lorsque le rapport des hauteurs augmente. La zone de transition quant à elle suit l'évolution inverse en s'étendant sur une longueur toujours plus grande.

Notons au passage qu'on évolue beaucoup plus rapidement vers des zones de transition petites, à rapport $\left(\frac{h_0}{h_1}\right)$ équivalent, pour des valeurs de α croissantes. La caractéristique donnant la position du front se déplace également, avec une vitesse de propagation évoluant de la célérité (c_1) pour des faibles rapports $\left(\frac{h_0}{h_1}\right)$ (on retrouve alors la vitesse de propagation des faibles perturbations) jusqu'au cas limite de vitesse $2(\alpha+1)c_0$ sur fond sec.

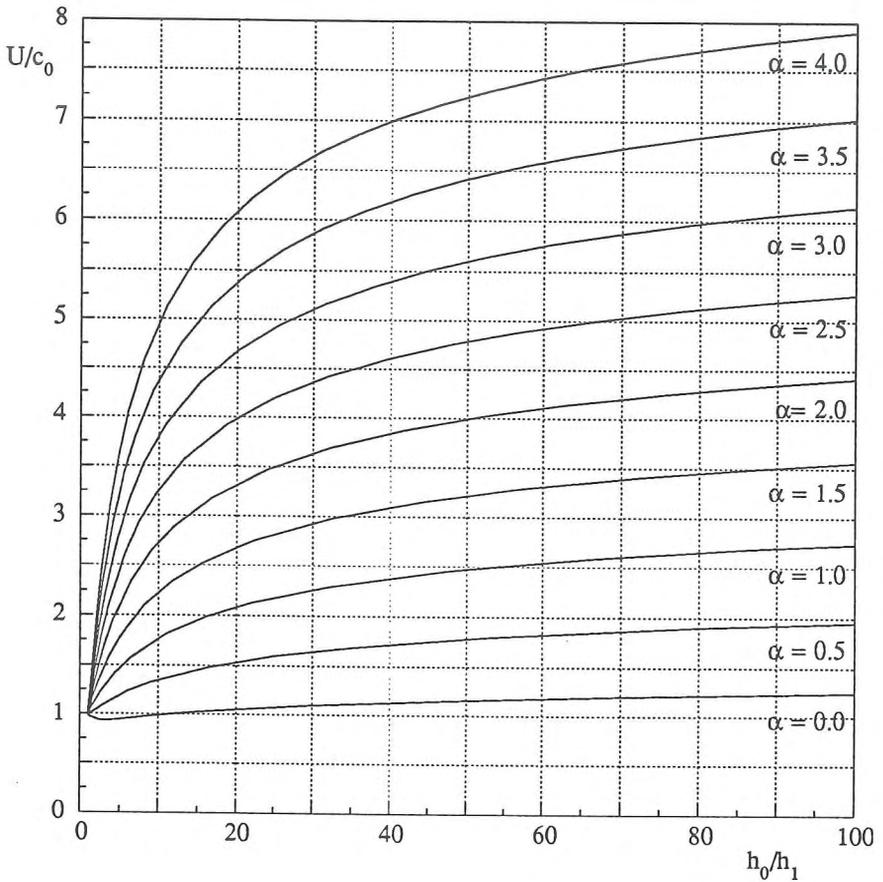


Figure XI.5.
Evolution de la vitesse de propagation adimensionnelle en fonction du rapport des hauteurs d'eau initiales

Dans ce cas, les deux caractéristiques que nous venons de citer se confondent pour donner le profil parabolique de surface libre qui vient se raccorder sur le fond sec.

Entre cette situation où nous savons qu'il n'y a pas de hauteur de front et l'autre possibilité limite où les niveaux s'égalisent et annulent par conséquent également toute transition, on peut attendre de la hauteur de front qu'elle passe par une valeur extrême pour un rapport $\left(\frac{h_0}{h_1}\right)$. On entend par hauteur de front, la différence de hauteur entre le bourrelet qui se propage (h_3) et la hauteur non perturbée à l'aval (h_1).

La figure XI.7. répond à cette question en indiquant que le front le plus marqué s'obtient, à hauteur de retenue égale, pour une section rectangulaire en atteignant plus de 30 % de cette valeur. Il se produit pour un rapport de hauteur relativement faible et peu sensible à l'exposant α considéré.

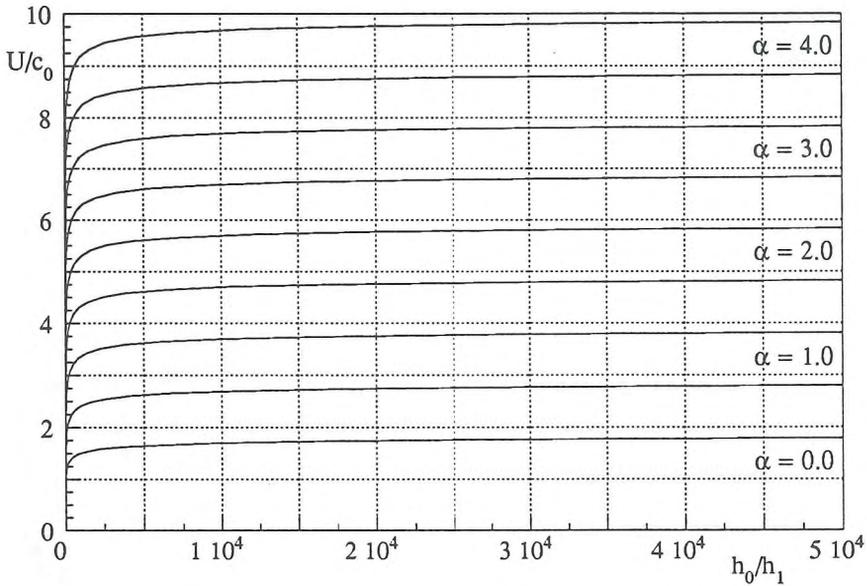


Figure XI.6.
Evolution de la vitesse de propagation adimensionnelle pour de grands rapports des hauteurs d'eau initiales

Dans le mouvement de balayage que font les caractéristiques lorsqu'on varie le rapport $\left(\frac{h_0}{h_1}\right)$, nous avons vu qu'un accroissement de hauteur faisait passer l'axe des ordonnées de la zone III à la zone IV.

Compte tenu des propriétés de la zone III, nous savons d'emblée que pour une situation où $u_3 < c_3$, nous aurons un état indépendant du temps. Toutefois, le régime en $x = 0$, abscisse du barrage, dépendra des caractéristiques aval, c'est-à-dire de la hauteur d'eau sur laquelle se propage le front. Lorsque le rapport $\left(\frac{h_0}{h_1}\right)$ augmente, u_3 finit par égaler puis excéder c_3 , décrivant par la même un écoulement supercritique uniquement influencé par les circonstances amont.

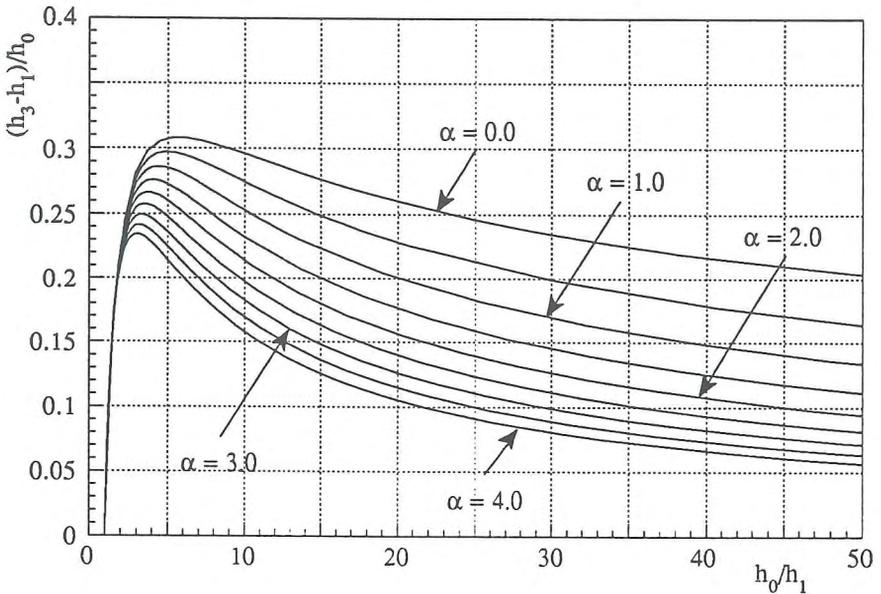


Figure XI.7.
Evolution de la hauteur adimensionnelle du front en fonction du rapport des hauteurs d'eau initiales

La zone IV de transition dans laquelle se trouve alors le barrage correspond en tous points à la zone II sur la figure XI de la rupture sur fond sec. La seule différence, qui porte sur la limite droite de la zone par la caractéristique C_2' , n'empêche nullement de reprendre les relations (XI.24, 25, 26) pour conclure une nouvelle fois à l'invariance de la hauteur et de la vitesse en fonction du temps (XI.27, 28) en $x = 0$.

La figure XI.8., qui reprend le débit adimensionnel au niveau du barrage en fonction du rapport $\left(\frac{h_0}{h_1}\right)$, résume ces considérations. Le diagramme est indépendant du temps (étendue infinie de la retenue oblige) et n'est influencé par l'aval que pour des faibles rapports de hauteurs.

Au-delà d'une certaine limite, d'autant plus précoce que α croît, on retrouve les invariants de la solution de Ritter, avec des tracés de ligne d'eau instantanés qui semblent s'articuler sur un point fixe au niveau du barrage. Le débit vaut alors :

$$\frac{q}{q_0} = \left(\frac{2(\alpha + 1)}{2\alpha + 3} \right)^{2\alpha + 3} \quad (\text{XI.40})$$

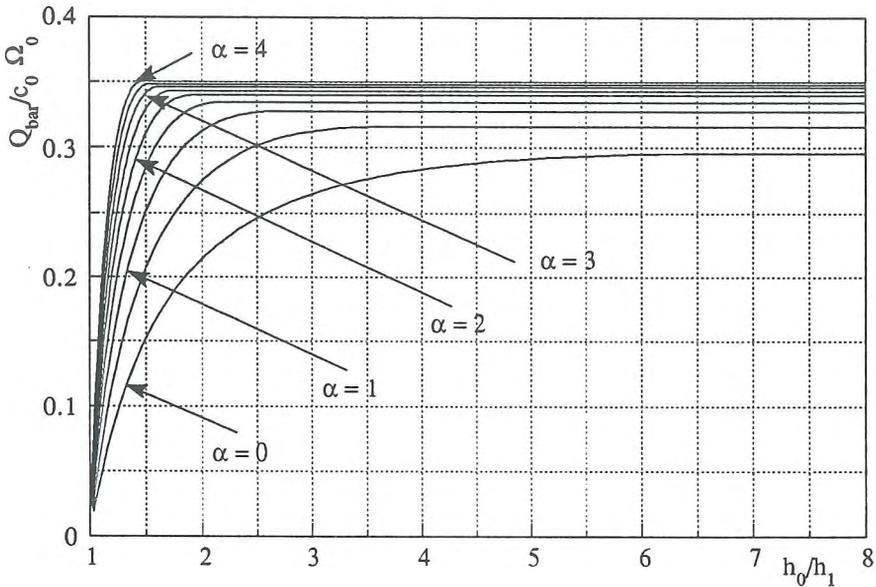


Figure XI.8.
Evolution du débit constant au droit du barrage
en fonction du rapport des hauteurs d'eau initiales

XI.3. CONCLUSION

Nous venons de procéder à l'examen d'un second changement d'échelle important dans les phénomènes hydrauliques analysés dans ce travail.

Un raisonnement critique, qui tient compte d'observations consécutives aux grandes catastrophes, aboutit, d'un point de vue théorique, à perséverer dans l'exploitation du système unidimensionnel complet développé dans la seconde partie. Ainsi, l'importante différence entre une modélisation de gestion routinière de basse chute et celle d'un écoulement consécutif à une rupture brusque d'un ouvrage de haute chute s'évanouit-elle dans l'unité apparente de deux phénomènes ressortissant d'un même système d'équations.

Nous venons pourtant de voir que cette unité dissimule d'abord une différence d'approche fondamentale entre une analyse fine et assez bien calibrée d'un phénomène parfaitement maîtrisé et une approche globalisante et volontairement simplifiée qui est dictée par l'extrême complication d'un grand nombre d'intervenants, à laquelle s'ajoutent les incertitudes inhérentes à un phénomène aussi extrême qu'exceptionnel.

Ce type d'approche trouve d'ailleurs un prolongement logique dans une interprétation nuancée des résultats, procédant par courbe enveloppe de valeurs obtenues en balayant une gamme significative des divers coefficients.

Les premières solutions théoriques établies dans des conditions aussi privilégiées que peu réalistes valent bien plus par la révélation d'une coexistence de structures très différenciées d'écoulement que pour une éventuelle transposition sur une analyse fiable d'un cas réel.

Elles nous rappellent surtout certaines particularités que nous avons dû appréhender, de façon plus simple, en théorie cinématique.

La constitution de fronts raides et l'intervention de la théorie complète des discontinuités dans l'établissement de l'écoulement sur fond humide distinguent clairement deux types de propagation. A l'image de la première partie où une connaissance croissante des spécificités du système nous a poussé à généraliser l'approche numérique afin de mieux appréhender tous les cas de figure, cette dernière analyse théorique suggère surtout que nous devons recourir à une nouvelle évolution significative par la prise en compte des notions de solution faible et procéder à la recherche d'un schéma aux propriétés de dissipation très sélectives.

En tant que système d'équations origine de l'approche cinématique simplifiée, on peut attendre que la précédente description des approches en théorie cinématique et l'expérience de la première partie sur les traitements à porter puissent être utilement reprises. Ainsi, elles nous laissent l'espoir d'englober ces nouvelles particularités dans une extension des possibilités générales de modélisation du logiciel existant par opposition à une spécialisation d'un schéma adapté aux seules ruptures.

Nous allons surtout constater que le contexte d'un système plus complet amène davantage à nuancer et compléter les artifices numériques des premiers chapitres.

Chapitre XIII

Extension du modèle numérique aux écoulements filaires intégrant des chocs : Approche finale

SOMMAIRE

- XII.1. Introduction*
- XII.2. Limites de la méthode classique de Galerkin en présence de discontinuités*
- XII.3. Application de la méthode N-1 aux équations unidimensionnelles*
- XII.4. Elaboration d'une méthode de pondération N+1*
- XII.5. Vérification théorique*
- XII.6. Vérification expérimentale en canal rectiligne*
- XII.7. Conclusion*

XII.1. INTRODUCTION

Si la forme unidimensionnelle des équations classiques émerge d'hypothèses restrictives par rapport à la réalité des faits, les difficultés pour les résoudre dans des cas de propagation en géométries naturelles rendent le problème très actuel, comme en témoignent les nouveaux schémas sans cesse proposés dans la littérature.

Botev attribue leur multiplication à l'absence d'une approche idéale, qui rend toute alternative séduisante par certaines spécificités que chacune propose. Le simple fait pour chaque auteur de dominer parfaitement le schéma qu'il développe le place nécessairement dans une position plus favorable que de recourir à une utilisation passive de schémas existants qui connaissent certaines déficiences.

Par opposition à l'utilisation de logiciels hydrauliques comme boîtes noires, la simulation d'une propagation de fronts raides constitue le domaine par excellence qui requiert une connaissance profonde des propriétés de la méthode mise en oeuvre. L'ignorance des caractéristiques intrinsèques ainsi que des limitations, dans des modélisations qui sont de nature à les exacerber, conduit inévitablement à un manque total de fiabilité.

De surcroît, les études effectuées par E.D.F. (Benoist et al) prouvent que cette connaissance numérique doit s'assortir d'une solide expérience dans le choix des sections discrétisées et de la distribution des coefficients de modélisation, ce qui achève de faire des propagations de rupture un domaine extrêmement spécialisé.

D'une façon générale, la première difficulté numérique tient au fait que le schéma doit s'accommoder, dans son domaine de modélisation, d'une coexistence de régimes infracritiques et torrentiels. Cette première imposition exclut nombre de méthodes, dont les schémas centrés qui s'avèrent inadaptés à la modélisation d'écoulements supercritiques (Di Monaco et al, Botev).

La classification des méthodes s'effectue dans la continuité de la première partie du travail. Ainsi, la présence de discontinuités au sein de l'écoulement ou à ses frontières plaide à nouveau, soit pour leur détection suivie d'un traitement distinct, soit pour leur capture numérique par des propriétés de dissipation sélectives.

Au sein de chacun des deux groupes, une autre subdivision considère le type de propagation (sur fond sec ou humide) supporté par le code.

En règle générale, la philosophie du second groupe destine plus logiquement ces schémas à des modélisations de propagation sur lame existante puisque les équations discrétisées sont appelées à s'appliquer indistinctement sur l'ensemble du domaine.

Citons, sur base de ces critères, quelques approches typiques de chaque famille :

- Les méthodes de "shock fitting" reposent sur des discrétisations souvent classiques, comme la méthode des caractéristiques. Cette dernière établit la solution en dehors des régions de chocs, zones à pression non hydrostatique et à accélération verticale non négligeable, où sont vérifiées les relations propres aux discontinuités. Cette complémentarité, mise en pratique avec la méthode des caractéristiques basée sur le schéma du maillage fixe de Hartree, autorise une modélisation de propagation sur fond humide (Hoang et al, Chen et al), ainsi qu'une extension, lourde à gérer numériquement, au quasi-tridimensionnel (Katopodes et al).

Appliquée à la propagation sur fond sec, la méthode des caractéristiques montre des imprécisions dans le calcul d'intersection des caractéristiques dans la zone du front à faible épaisseur (Sakkas et al). Elle doit alors s'accompagner d'un calcul séparé du front, basé sur le constat expérimental, pour un fond sec, de vitesses quasi constantes dans le front, qui constituent sa célérité (Benoist et al, Sakkas et al).

En schéma de différences finies, Savic et al complètent l'action sélective intrinsèque de la méthode de Godounov avec un traitement approprié des sauts.

Mais celui qui s'impose comme le plus incontournable des schémas explicites est sans doute celui de Lax-Wendroff. Les tests comparatifs d'E.D.F. ont notamment établi sa supériorité sur la méthode des caractéristiques, sur base des critères de conservativité des volumes et d'absence d'oscillation parasite.

Une variante aménagée à partir de ce schéma par pondération temporelle du terme de frottement est à la base du code unidimensionnel développé par E.D.F. Il est couplé à une recherche et un traitement spécifique des chocs, ainsi qu'à l'introduction de lois de pertes singulières aux élargissements prononcés.

Concernant le critère de conservativité des volumes, un groupe de travail du Comité Français des Grands Barrages rapporte que la supériorité du schéma de Lax-Wendroff tient au fait que l'équation de continuité n'est soumise à aucune combinaison linéaire avant résolution, à l'inverse des méthodes des caractéristiques.

Rajar rapporte la même suprématie à l'issue de sa comparaison de schémas différences finies implicites et explicites et d'une méthode des caractéristiques.

Les propriétés dissipatives du schéma de Lax-Wendroff lui permettent également de ressortir des méthodes de "shock capturing" lorsqu'on laisse oeuvrer librement ses caractéristiques sélectives en propagation sur fond humide.

- Nous avons vu en hydrologie que les méthodes de capture numérique des chocs trouvent leur légitimité dans une formulation faible de la solution. Cette dernière rend des résultats similaires à la vérification des relations de choc puisqu'elle traduit les mêmes bilans de masse et de quantité de mouvement et s'appuie sur une formulation conservative des équations.

Dans cette famille, le schéma de Lax-Wendroff joue couramment le rôle remarquable d'étalon pour la comparaison de nouveaux codes. Il sert également de base à de

multiplie variantes qui tentent d'affiner ses effets, comme celle de Botev qui surpasse les schémas sélectifs de Vasiliev ou Godounov.

Dans la perspective de futurs développements, nous rappelons sa formulation pour le système (IX.41) :

$$\begin{bmatrix} \Omega_i \\ Q_i \end{bmatrix}^{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} \Omega_i \\ Q_i \end{bmatrix}^t - A_t \frac{\Delta t}{\Delta x} A_0 \begin{bmatrix} \Omega_i \\ Q_i \end{bmatrix}^t + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 A_t^2 \delta^2 \begin{bmatrix} \Omega_i \\ Q_i \end{bmatrix}^t \quad (\text{XII.1})$$

ou, pour sa forme conservative (IX.43) :

$$\begin{bmatrix} \Omega_i \\ Q_i \end{bmatrix}^{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} \Omega_i \\ Q_i \end{bmatrix}^t - \frac{\Delta t}{\Delta x} A_0 B_t + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 A_t \delta^2 B_t \quad (\text{XII.2})$$

avec :

$$A_t = A \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_i \\ Q_i \end{bmatrix}^t \end{pmatrix} \quad B_t = B \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_i \\ Q_i \end{bmatrix}^t \end{pmatrix} \quad (\text{XII.3})$$

L'introduction de dissipation sélective dans les schémas s'assimile souvent à l'introduction de termes d'ordres plus élevés (Behnia et al), pour l'élaboration de modèles hybrides pouvant s'appliquer sur fond sec (Zhang et al).

Le schéma de Mac-Cormack prouve également ses aptitudes sélectives en modélisation de propagation soit sur fond humide (Garcia et al, Ech-Cherif El Kettani et al), soit sur fond sec lorsque Bellos et al contraignent numériquement la solution à l'aval du front, par des tests sur les hauteurs nulles notamment.

La recherche peut être également poursuivie au niveau de la forme initiale des équations, notamment par un éclatement de la matrice convective en deux contributions construites d'après le signe de ses valeurs propres (Dick). Leurs discrétisations différenciées par différences avant ou arrière engendrent des méthodes à même de traiter, sans oscillation parasite, des propagations sur fonds sec (Yang et al) ou humide (Fennema et al).

L'analyse des différentes contributions intervenant dans les équations originelles donne lieu à des couplages de méthodes différences/éléments finis et méthode des caractéristiques, soit que cette dernière se limite à l'évolution des contributions convectives (Utnes et al), soit que le calcul s'effectue en fractionnant l'évaluation des différentes contributions en plusieurs phases distinctes (Benoist et al). Ce dernier code par éléments finis présente par ailleurs la particularité de ne pas s'appuyer sur une forme conservative des équations, sans pour autant que les auteurs ne constatent de dégénérescence dans la modélisation des discontinuités.

Dans les techniques par éléments finis se retrouvent les variantes citées dans la première partie du travail pour obtenir les propriétés de dissipation sélective.

Comme le rappelle Adornato et al, elles laissent le choix entre un raffinement extrême du maillage, un déplacement dosé des points d'intégration, l'ajout d'un terme de diffusion correctement orientée ou, plus traditionnellement pour ce système, un recours aux fonctions de pondération particulières. Dans cette dernière variante, nous retiendrons des approches de Stewart et al, en méthode N+1, et de Katopodes, en méthode N-1, que le coefficient pondérateur respectif qu'ils établissent tient compte des caractéristiques de l'écoulement.

Le développement et l'application de méthodes toujours plus sophistiquées ne doivent pas exclure les résultats de leur contexte d'approche très globale du phénomène, qui donne tout son sens aux méthodes simplifiées travaillant par abaques dans l'établissement de premiers ordres de grandeur. Sur base d'approches théoriques simplifiées, ou par expérience numérique acquise sur la modélisation de nombreux sites, Colin et al, Rajar ou Unsal et al dégagent des grandeurs adimensionnelles caractéristiques du phénomène qui permettent une première évaluation très rapide.

Il faut enfin constater qu'après la résolution en conditions privilégiées, puis en géométrie simplifiée, enfin après la prise en compte de géométries et conditions réelles, le développement de nouveaux schémas doit aujourd'hui tenir compte, dans le choix d'une méthode, de futures extensions de plus en plus inéluctables aux autres dimensions spatiales, comme le suggère la multiplication d'essais expérimentaux sur modèles physiques à caractère tridimensionnel (Bell et al, Bellos et al).

Si la complexité dans la compréhension des processus à induire dans le schéma rend l'étude unidimensionnelle incontournable, la généralisation aisée de la méthode en quasi-tridimensionnel devient un argument auquel nous nous efforcerons de rester attentif.

XII.2. LIMITES DE LA METHODE CLASSIQUE DE GALERKIN EN PRESENCE DE DISCONTINUITES

La description et l'analyse des problèmes numériques rencontrés dans la première partie de ce travail, lorsque des chocs existent au sein de la solution, laissent peu d'espoir dans la capacité de la méthode classique à appréhender ce type de singularité dans un contexte plus évolué.

Quoi qu'il en soit, puisque nous disposons de solutions théoriques par ailleurs couramment utilisées comme données initiales par les codes numériques pour définir la ligne d'eau des premiers instants qui suivent la rupture, nous commencerons par fixer les idées sur l'importance des améliorations qu'il faudra obtenir par rapport à l'approche classique, en travaillant sur un cas type de rupture de barrage.

Une vallée rectangulaire aux parois lisses est entrecoupée par un barrage de 100 m de haut qui limite une retenue noyant tout l'amont. Le cadre général du code numérique développé impose nécessairement une propagation sur fond humide avec, pour cette première application, une hauteur de lame aval suffisante pour ne pas permettre aux oscillations

parasites qui se développent d'interrompre intempestivement la simulation. Nous travaillons donc avec 5 m d'eau placés uniformément sur le fond plat.

Dans cette application purement théorique, nous choisissons pour valeurs de discrétisation des pas spatiaux de 100 m ainsi qu'un pas temporel de 0,4 s. Le décentrement temporel du schéma respecte les critères précédemment établis, si bien qu'on peut compter sur les effets bénéfiques d'une légère dissipation stabilisante volontairement introduite ($\theta_t = 0,65$).

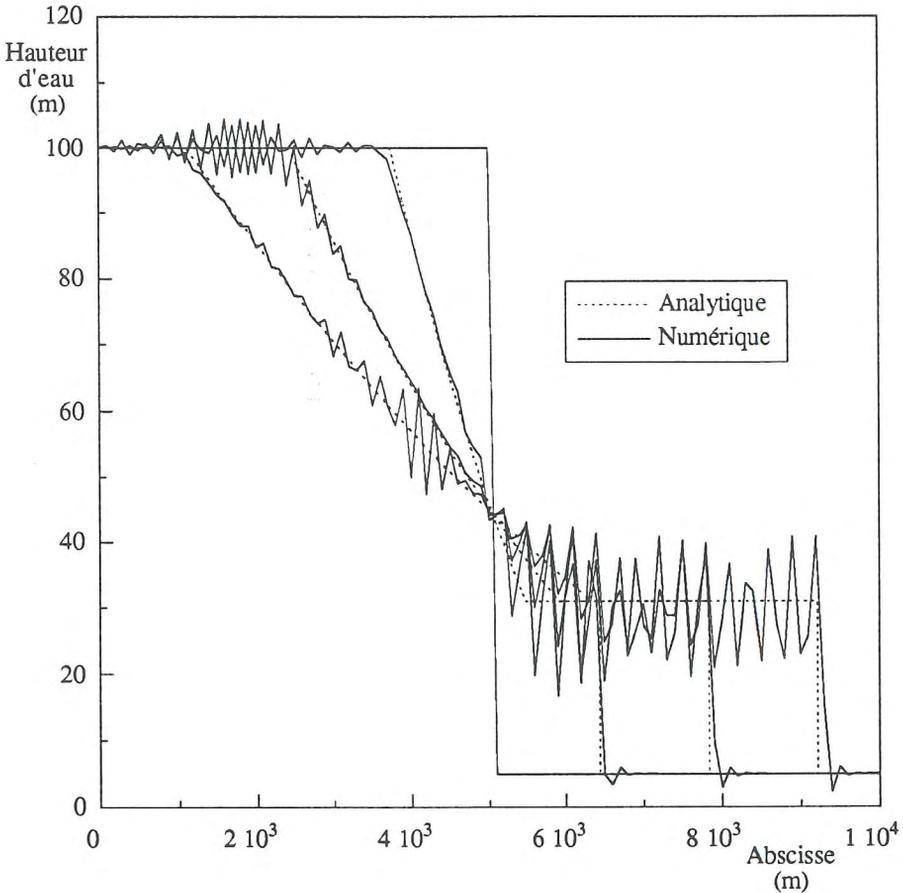


Figure XII.1.

Comparaison avec la solution analytique des lignes d'eau instantanées en $t = 42, 84, 126$ s obtenues par la méthode de Galerkin pour une propagation en l'absence de frottement avec $h_0/h_1 = 20$

La figure XII.1. reprend quelques lignes d'eau instantanées qui devraient donner des renseignements sur la propagation du front. Il est pourtant difficile d'en tirer la moindre information fiable, surtout lorsqu'on enlève les solutions analytiques qui orientent inévitablement l'interprétation de l'ensemble des oscillations parasites. Insistons encore sur le fait que la plupart des applications qui seront exposées ne peuvent même être menées à leur terme avec la technique de Galerkin.

Les signaux instantanés de débit sont plus perturbés encore comme le prouve la figure XII.2. Dans ces premiers résultats, on peut néanmoins déjà déceler sur les deux figures une tendance à afficher un point fixe au niveau du barrage.

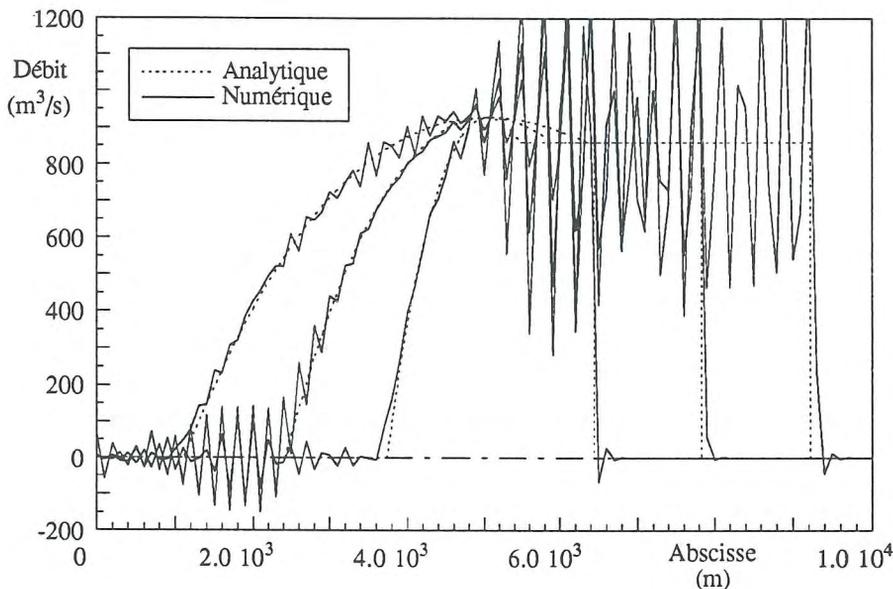


Figure XII.2.
Comparaison avec la solution analytique des lignes de débit instantanées
en $t = 42, 84, 126$ s obtenues par la méthode de Galerkin
pour une propagation en l'absence de frottement avec $h_0/h_1 = 20$

Les limites de la méthode classique sont peu gênantes en soi tant qu'on estime qu'il s'agit là d'applications extrêmement pointues et exceptionnelles. Les schémas centrés conservent leur utilité et restent synonymes de précision pour la grosse majorité des écoulements qui demeurent largement dans le domaine infracritique.

Il est par contre beaucoup plus embarrassant que la méthode montre très logiquement les mêmes lacunes dans d'autres singularités étroitement liées aux ruptures, comme l'atteste l'intervention de la théorie générale du ressaut dans l'approche théorique du paragraphe précédent.

Le ressaut est une discontinuité presque banale de l'hydraulique de surface et aménager la technique pour modéliser des apparitions imprévisibles, une persistance ou un déplacement de ce type de choc, permet d'étendre significativement le champ d'application des simulations instationnaires.

C'est pourquoi nous vérifierons également la qualité des méthodes sur une application toute autre qui se limite au déplacement d'un ressaut en canal rectangulaire horizontal lisse (reproduit et étudié expérimentalement par Vide et al).

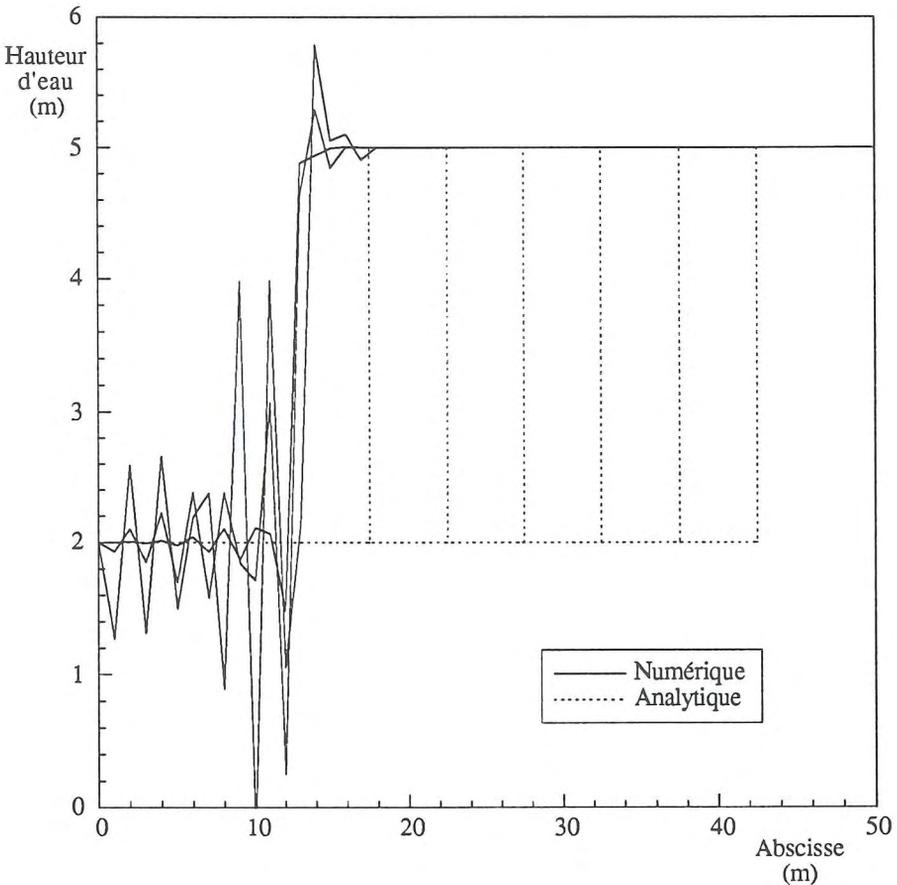


Figure XII.3.
Comparaison avec la solution analytique des lignes d'eau instantanées
en $t = 0, 2,5, 5, 7,5, 10, 12,5$ et 15 s obtenues par la méthode de Galerkin
pour une propagation de ressaut en l'absence de frottement

Sur base des relations théoriques données en (XI.36, 37, 38), nous choisissons de travailler avec 2 m et 5 m de hauteur d'eau respectivement aux extrémités gauche et droite du modèle. La discontinuité qui prend place sur une maille se déplacera à une vitesse constante U de 2 m/s. Dans ces conditions, la théorie nous donne les débits par unité de largeur à ces mêmes limites de respectivement $22,530 \text{ m}^2/\text{s}$ et $28,530 \text{ m}^2/\text{s}$.

Nous imposons toutes ces valeurs comme solution de départ, en situant le saut de hauteur et de débit à l'abscisse $x = 12,5$ m. En s'intéressant à 50 m de canal discrétisés par 50 éléments, nous vérifierons que la discontinuité se propage de façon nette avec la vitesse prescrite, lorsqu'on impose pour conditions limites du modèle $q = 22,530 \text{ m}^2/\text{s}$ et $h = 2$ m à l'extrémité gauche pour l'écoulement supercritique et $h = 5$ m à l'extrémité droite en état infracritique.

En adoptant un pas de $\Delta t = 0,005$ s, la longueur du canal devrait nous permettre de suivre la progression pendant 3000 pas. La figure XII.3., qui reprend en pointillés la base théorique de comparaison pour des temps $t = 0, 2,5, 5, 7,5, 10, 12,5$ et 15 s, montre une interruption très précoce de la simulation, à cause d'un ensemble d'oscillations parasites qui se concentrent davantage dans la partie supercritique de l'écoulement.

Ainsi, dans le contexte plus élaboré du système d'équations complet, la pondération classique de la méthode de Galerkin montre les mêmes limites, en présence de discontinuités, qu'en théorie cinématique. Le parallèle voudrait qu'on applique les mêmes remèdes en pondérant le système par des fonctions dissymétriques avec un taux de décentrage judicieusement choisi.

Vérifions l'efficacité d'une telle approche.

XII.3. APPLICATION DE LA METHODE N-1 AUX EQUATIONS UNIDIMENSIONNELLES

La première partie de ce travail nous a donné des indications sur la manière d'introduire une dissipation numérique dosée qui rend la méthode apte à capturer les chocs sans introduire d'effet secondaire perturbateur. Sur base de cette expérience acquise sur un système plus simple, nous allons tester une combinaison de fonctions de pondération classiques avec leur dérivée, en étendant la recherche d'un coefficient de décentrement optimal au système de deux équations.

Sur base des notations (X.1, 2), nous généralisons la méthode en adoptant pour fonctions de pondération

$$P = N + \alpha_u \frac{\partial N}{\partial x} \tag{XII.4}$$

α_u étant à nouveau un scalaire dont il faudra fixer la valeur adéquate.

C'est donc un décentrement uniforme pour les deux équations que nous allons analyser.

Pour cette approche, nous linéarisons le système d'équations (IX.41) en travaillant avec une matrice \tilde{A} rendue constante avec des valeurs significatives de l'écoulement (c_0, u_0). Nous adaptons le raisonnement du paragraphe VI.3.5. au système (X.2) en ne développant à nouveau que la discrétisation spatiale pour obtenir au noeud i en l'absence de viscosité, de frottement et d'apport extérieur :

- pour la continuité

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} [(1 + 3 \alpha'_u) \frac{\partial \Omega_{i-1}}{\partial t} + 4 \frac{\partial \Omega_i}{\partial t} + (1 - 3 \alpha'_u) \frac{\partial \Omega_{i+1}}{\partial t}] \\ + \frac{1}{2 \Delta x} [(1 - 2 \alpha'_u) Q_{i+1} + 4 Q_i + (1 + 2 \alpha'_u) Q_{i-1}] = 0 \quad (\text{XII.5}) \end{aligned}$$

- pour la dynamique

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} [(1 + 3 \alpha'_u) \frac{\partial Q_{i-1}}{\partial t} + 4 \frac{\partial Q_i}{\partial t} + (1 - 3 \alpha'_u) \frac{\partial Q_{i+1}}{\partial t}] \\ + \frac{c_0^2 - u_0^2}{2 \Delta x} [(1 - 2 \alpha'_u) \Omega_{i+1} + 4 \Omega_i + (1 + 2 \alpha'_u) \Omega_{i-1}] = 0 \\ + \frac{u_0}{\Delta x} [(1 - 2 \alpha'_u) Q_{i+1} + 4 Q_i + (1 + 2 \alpha'_u) Q_{i-1}] = 0 \quad (\text{XII.6}) \end{aligned}$$

avec

$$\alpha'_u = \frac{\alpha_u}{\Delta x}$$

Comme dans l'analyse du décentrement optimal pour l'équation cinématique, nous introduisons pour Ω_k et Q_k des développements en série non discrétisés dans le temps, dont les termes génériques s'écrivent :

$$\Omega_m \exp [i (k x_m + k'_m t)] \quad (\text{XII.7})$$

$$Q_m \exp [i (k x_m + k'_m t)] \quad (\text{XII.8})$$

avec

$$x_m = l'_m \Delta x$$

afin d'obtenir, pour la m^{ème} composante, un système homogène des équations en Ω_m et Q_m .

L'annulation du déterminant de ce système évite d'obtenir une solution triviale. Elle fournit une équation du second degré en k'_m dont on extrait les deux racines pour écrire finalement, tous calculs faits :

$$-\frac{k'_m}{l'_m(u_0 \pm c_0)} = \frac{3}{x_m} \cdot \frac{2 \alpha'_u (1 - \cos x_m) + i \sin x_m}{3 \alpha'_u \sin x_m + i (\cos x_m + 2)} \quad (\text{XII.9})$$

Cette expression doit égaler l'unité si on veut respecter la solution analytique donnée en (X.16). Or le second membre est identique à celui de l'expression (VI.24) qui a fait l'objet d'un développement en série selon x_m pour tirer une valeur optimale de α'_u dans le cadre de l'équation cinématique.

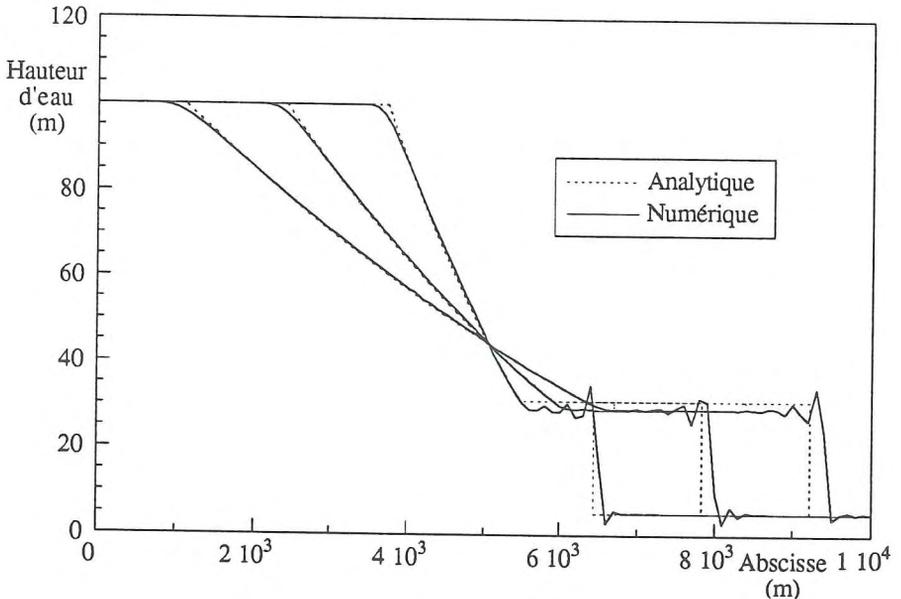


Figure XII.4.
 Comparaison avec la solution analytique des lignes d'eau instantanées
 en $t = 42, 84, 126$ s, obtenues par méthode N-1
 pour une propagation en l'absence de frottement avec $h_0/h_1 = 20$

Nous pouvons donc reprendre toute l'analyse et les remarques du paragraphe VI.3.5. pour conclure que l'effet sélectif recherché pour ce système plus complexe s'obtient avec la même valeur $\alpha'_u = \frac{1}{\sqrt{15}}$ qu'auparavant, avec un décentrement à nouveau décroissant à mesure que la discrétisation spatiale se resserre.

Testons l'effet d'un décentrement uniforme adoptant cette valeur optimale de α'_u pour les exemples significatifs sélectionnés au paragraphe précédent. En particulier, nous reprenons la rupture brusque sur fond humide en conservant les mêmes caractéristiques de discrétisation. Nous obtenons les lignes instantanées reproduites à la figure XII.4 qui témoignent de progrès très inégaux et globalement insatisfaisants.

XII.4. ELABORATION D'UNE METHODE DE PONDERATION N+1

L'amélioration qu'apporte la méthode N-1 du paragraphe précédent n'est pas décisive, puisque l'élimination partielle des oscillations s'accompagne d'une imprécision sur la hauteur du palier qui suit le front, ainsi que d'une vitesse de propagation non concordante avec la solution analytique. Mais elle inspire deux réflexions qui ont orienté la recherche de schémas plus satisfaisants :

- L'incapacité de ce schéma relativement simple à résoudre, sans effet parasite, des écoulements extrêmes au moyen du système d'équations complet justifie d'une certaine façon qu'une niche, entièrement vouée au seul écoulement de rupture, se soit constituée dans l'étude générale des écoulements à surface libre. Car une résolution fiable, sans lissage exagéré ni effet parasite rémanent, suppose la mise au point de méthodes de discrétisation beaucoup plus élaborées.
- Dans cette logique, il se confirme qu'un décentrage spatial appliqué systématiquement, sans aucune considération de l'écoulement lui-même, est peu satisfaisant. Cette conclusion s'appuie autant sur les résultats probants obtenus en schéma spatial centré pour des écoulements nettement infracritiques que sur l'amélioration inégale qu'apporte un décentrement uniforme à la figure XII.4. On sent que l'introduction d'effets sélectifs bénéfiques tels qu'étudiés dans la première partie du travail passe, cette fois, par une définition beaucoup plus circonstanciée d'après les caractéristiques d'écoulement.

XII.4.1. Choix des fonctions de pondération

Plutôt que d'utiliser des fonctions de pondération obtenues par combinaison des fonctions d'interpolation classiques et d'une fraction de leur dérivée, nous avons choisi d'axer notre recherche d'un schéma stable sur la superposition des fonctions classiques et de fonctions d'un degré supérieur qui s'annulent à chaque noeud.

Nous avons déjà décrit ce type d'approche par fonctions test continues au paragraphe VI.3.1. Rappelons que l'ajustement du décentrage s'obtient en agissant sur les degrés de liberté rémanents de ces fonctions N+1.

Dans l'optique déjà soulignée dans la première partie de pouvoir reproduire, par construction d'éléments finis particuliers, nombre de schémas différences finies distincts, le recours aux fonctions N+1 se justifie par la marge qu'elles laissent tant par la présence de paramètres d'ajustement que par l'utilisation d'artifices numériques d'évaluation tels la sur ou sous intégration.

En prolongement des travaux de Garder et Katopodes, nous proposons d'adopter pour fonctions de poids, la combinaison suivante :

$$P^T = N^T + \alpha_{N+1} G W^T \quad (XII.10)$$

avec

W la matrice des fonctions N+1 définie par

$$W^T = \begin{bmatrix} W_1 & W_i & W_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_1 & W_i & W_n \end{bmatrix} \quad (XII.11)$$

Les fonctions W_i et P_i s'expriment dans un élément linéaire unidimensionnel par (VI. 8, 9, 10)

G une matrice carrée dont la structure reste à déterminer
 α_{N+1} un scalaire, coefficient pondérateur à optimiser.

Nous procéderons en trois étapes distinctes pour arrêter la forme définitive de la fonction P :

- Une première analyse permettra de statuer sur la forme à donner à G par comparaison de la forme discrétisée à des schémas différences finies connus pour leurs propriétés dissipatives très sélectives.
- Nous procéderons alors à une étude d'optimisation du paramètre α_{N+1} par une analyse "classique" du schéma non discrétisé temporellement, analogue à celle du paragraphe précédent.
- Enfin nous généraliserons l'approche au système non-linéaire. Comme dans la majorité des raisonnements théoriques, nous travaillerons sur la forme linéarisée (X.9) du système général, soit, par (IX.40), sur :

$$\int_s P \left(\frac{\partial X}{\partial t} + A_0 \frac{\partial X}{\partial x} + D_0 X \right) dS = 0 \quad (XII.12)$$

XII.4.2. Choix de la matrice G

La structure particulière proposée par (XII.10) ne modifie en rien le schéma de découplage en deux systèmes distincts adopté dès le chapitre X pour résoudre le système discrétisé.

Sur cette base, construisons la $i^{\text{ème}}$ équation du "système continuité" ainsi que son homologue du "système dynamique". En raisonnant sur un fond plat lisse, nous voyons que (XII.12) se limite à deux contributions :

$$\int_s \left[\text{PN}^T \frac{\partial Y}{\partial t} + \text{PA}_0 \frac{\partial \text{N}^T}{\partial x} Y \right] dS = 0 \quad (\text{XII.13})$$

- Par analogie à un système dynamique, la contribution

$$M = \int_s \text{PN}^T dS = \int_s (N + \alpha_{N+1} G W) N^T dS \quad (\text{XII.14})$$

porte souvent le nom de matrice de masse (Di Monaco et al, Fennema et al, par exemple). Une particularité des approches éléments finis en dynamique est qu'elles recourent fréquemment, par efficacité numérique, à la substitution de la matrice masse consistante M par une forme diagonalisée M_d (Yang et al, Chung, par exemple).

Cette approximation s'effectue au détriment de la précision puisqu'elle ignore tout couplage entre degrés de liberté. Mais cet "appauvrissement" est largement compensé par tous les avantages inhérents à un formalisme beaucoup plus simple.

Appliquons momentanément cette approche à l'évaluation de la matrice M en retenant que l'opportunité d'une telle simplification devra être analysée a posteriori sur l'application du schéma à des exemples simples.

Les méthodes de diagonalisation appartiennent essentiellement à deux grandes familles (Grisard). La première consiste à conserver comme valeur diagonale la somme des termes de la ligne (ou de la colonne) de la matrice masse originelle correspondant à la valeur recherchée :

$$M_{ii}^d = \sum_{j=1}^n M_{ij} = \sum_{j=1}^n M_{ji} \quad (\text{XII.15})$$

La seconde consiste à ne conserver que la diagonale de la matrice initiale en multipliant chacun des termes par un coefficient permettant de respecter la masse totale de l'élément.

Ces deux techniques ont prouvé leur efficacité pour des éléments qui possèdent des degrés de liberté de même nature. Mais si leur application ne modifie pas les conclusions de la suite de ce raisonnement, elles semblent cependant peu adaptées à notre élément qui cumule dans ses inconnues débits et sections.

Nous choisirons donc plutôt de procéder momentanément à une dégénérescence de la matrice masse en lui imposant de respecter certaines solutions élémentaires au niveau de l'élément, à savoir la continuité dans le cas d'une variation opposée de sections mouillées aux extrémités, en l'absence d'apport extérieur (débits nuls), et, d'autre part, une conservation de la quantité de mouvement pour un débit uniforme, sans modification de section mouillée.

L'ensemble de ces impositions suggère finalement une approche logique qui s'apparente à la première famille de méthodes, dans la mesure où elle revient à n'ajouter sur une ligne que les contributions correspondant au même type de degré de liberté de l'élément diagonal calculé.

Ainsi la matrice masse locale diagonalisée prend la forme suivante :

$$M_d = \begin{bmatrix} \frac{\Delta x}{2} \cdot G'_{11} \Delta x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta x}{2} + G'_{11} \Delta x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta x}{2} \cdot G'_{21} \Delta x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta x}{2} + G'_{21} \Delta x \end{bmatrix} \quad (XII.16)$$

avec

$$G'_{ij} = -\frac{\alpha_{N+1}}{6} G_{ij}$$

pour un élément unidimensionnel.

- L'évaluation de la seconde contribution de (XII.13) s'effectue analytiquement pour donner la matrice locale suivante :

$$\int_S PA_o \frac{\partial N^T}{\partial x} dS = \begin{bmatrix} G'_{21} (c_0^2 \cdot u_0^2) & -G'_{21} (c_0^2 \cdot u_0^2) & -\frac{1}{2} + G'_{11} + 2u_0 G'_{21} & \frac{1}{2} \cdot G'_{11} - 2u_0 G'_{21} \\ -G'_{21} (c_0^2 \cdot u_0^2) & G'_{21} (c_0^2 \cdot u_0^2) & -\frac{1}{2} \cdot G'_{11} - 2u_0 G'_{21} & \frac{1}{2} + G'_{11} + 2u_0 G'_{21} \\ (-\frac{1}{2} + G'_{22}) (c_0^2 \cdot u_0^2) & -(-\frac{1}{2} + G'_{22}) (c_0^2 \cdot u_0^2) & G'_{12} + (-\frac{1}{2} + G'_{22}) 2u_0 & -G'_{12} - (-\frac{1}{2} + G'_{22}) 2u_0 \\ -(\frac{1}{2} + G'_{22}) (c_0^2 \cdot u_0^2) & (\frac{1}{2} + G'_{22}) (c_0^2 \cdot u_0^2) & -G'_{12} - (-\frac{1}{2} + G'_{22}) 2u_0 & G'_{12} + (-\frac{1}{2} + G'_{22}) 2u_0 \end{bmatrix} \quad (XII.17)$$

pour le même type d'élément.

La somme des contributions donne, après assemblage du système, les 2 équations suivantes pour le noeud i :

$$\Delta x \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \Omega_i \\ Q_i \end{bmatrix} + A_o \Delta_o \begin{bmatrix} \Omega_i \\ Q_i \end{bmatrix} - \frac{\alpha_{N+1}}{6} G^T A_o \delta^2 \begin{bmatrix} \Omega_i \\ Q_i \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{XII.18})$$

en reprenant pour Δ_o et δ^2 les définitions données en (IV.23, 24).

En appliquant alors la discrétisation temporelle (IV.2), il vient finalement :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Omega_i \\ Q_i \end{bmatrix}^{t+\Delta t} &= \begin{bmatrix} \Omega_i \\ Q_i \end{bmatrix}^t - A_o \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\theta_t \Delta_o \begin{bmatrix} \Omega_i \\ Q_i \end{bmatrix}^{t+\Delta t} + (1 - \theta_t) \Delta_o \begin{bmatrix} \Omega_i \\ Q_i \end{bmatrix}^t \right) \\ &+ \frac{\alpha_{N+1} \Delta t}{6} \frac{\Delta t}{\Delta x} G^T A_o \left(\theta_t \delta^2 \begin{bmatrix} \Omega_i \\ Q_i \end{bmatrix}^{t+\Delta t} + (1 - \theta_t) \delta^2 \begin{bmatrix} \Omega_i \\ Q_i \end{bmatrix}^t \right) \end{aligned} \quad (\text{XII.19})$$

A condition de décentrer complètement le schéma temporel pour le rendre explicite ($\theta_t = 0$), on constate que (XII.19) présente une analogie évidente avec la forme (XII.1) de Lax-Wendroff.

La similitude est complète pour autant qu'on choisisse la transposée de la matrice convective comme matrice de pondération $G = A_o^T$ et qu'on prenne pour valeur du coefficient $\alpha_{n+1} = 3 \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

Dès lors que la cause du succès de la méthode de Lax-Wendroff réside dans l'expression particulière de ce qui peut s'interpréter comme un terme de diffusion, nous décidons d'adopter $G = A_o^T$.

L'extension des possibilités de la méthode proposée s'effectuera ainsi à partir d'une base largement éprouvée.

Poursuivons à présent la recherche d'une valeur optimale pour α_{N+1} , la valeur $3 \frac{\Delta t}{\Delta x}$ ne constituant qu'une première indication tirée d'un schéma temporel explicite.

XII.4.3. Choix du paramètre α_{N+1}

L'introduction successive de simplifications n'est destinée qu'à faciliter l'interprétation des processus sélectifs introduits dans le schéma. Ce n'est pourtant que dans les conditions les

plus générales d'utilisation qu'on mesure pleinement la portée de leur efficacité.

Nous allons cette fois raisonner sur un système plus général toujours constitué des deux équations relatives au noeud i. Sur base d'une évaluation consistante de la matrice masse et sans opérer de discrétisation temporelle, nous obtenons avec le choix précédent de la matrice G :

$$\Delta x \left(1 + \frac{1}{6} \delta^2\right) \frac{\delta}{\delta t} \begin{bmatrix} \Omega_i \\ Q_i \end{bmatrix} + A_0 \Delta_0 \begin{bmatrix} \Omega_i \\ Q_i \end{bmatrix} + B_0 \left(1 + \frac{1}{6} \delta^2\right) \begin{bmatrix} \Omega_i \\ Q_i \end{bmatrix} - \frac{\alpha_{N+1}}{6} A_0 \left(\Delta_x \Delta_0 \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \Omega_i \\ Q_i \end{bmatrix} + A_0 \delta^2 \begin{bmatrix} \Omega_i \\ Q_i \end{bmatrix} + B_0 \Delta_0 \begin{bmatrix} \Omega_i \\ Q_i \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (\text{XII.20})$$

- Reproduisons une nouvelle fois l'analyse du schéma par développement en séries de Ω_i, Q_i non discrétisés dans le temps. L'introduction de leur terme générique rappelé en (XII.7, 8) donne, en l'absence de frottement, le système suivant :

$$\left[\left(i a_m I + \frac{\alpha_{N+1}}{6} b_m A_0 \right) \Delta x k'_m + A_0 \left(i b_m I - \frac{\alpha_{N+1}}{6} d_m A_0 \right) \right] \cdot \begin{bmatrix} \Omega'_m \\ Q'_m \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{XII.21})$$

avec

I la matrice identité

$$d_m = 2 (\cos(l'_m \Delta x) - 1)$$

- L'annulation du déterminant de ce système donne une équation du second degré en k'_m à coefficients complexes. L'expression des deux racines de k'_m qu'on peut en tirer est trop élaborée pour être exploitée telle quelle.

Puisque le but ultime consiste à comparer l'expression k'_m de ces deux racines avec

la solution analytique correspondante $k_m = \frac{x_m}{\Delta x} (u_0 \pm c_0)$, nous avons procédé à un

développement en série du rapport de ces racines $\frac{k'_m}{k_m}$ pour obtenir finalement, tous calculs faits :

$$\frac{k'_m}{k_m} = 1 - i \frac{\alpha_{n+1}}{72} (u_0 \pm c_0) x_m^3 - \frac{12 \cdot 5 \alpha_{N+1}^2 (u_0 \pm c_0)^2}{2160} x_m^4$$

$$\begin{aligned}
 & -i \frac{\alpha_{N+1}}{2592} (u_0 \pm c_0) (6 - \alpha_{N+1}^2 (u_0 \pm c_0)^2) x_m^5 \\
 & - \frac{72 + 7\alpha_{N+1}^2 (u_0 \pm c_0)^2 (\alpha_{N+1}^2 (u_0 \pm c_0)^2 - 6)}{108864} x_m^6 + O(x_m^7) \quad (XII.22)
 \end{aligned}$$

En raisonnant sur l'erreur de phase, nous choisirons donc un multiple du rayon spectral de la matrice convective linéarisée, soit :

$$\alpha_{N+1} = \sqrt{\frac{12}{5}} \frac{1}{|u_0 + c_0|} \quad (XII.23)$$

Cette valeur n'est par ailleurs pas sans correspondance avec la première valeur tirée de la comparaison avec Lax-Wendroff ($\alpha_{N+1} = 3\Delta t/\Delta x$) puisque nous savons qu'à la fois le pas de temps, le pas spatial, la vitesse et la célérité sont liés, dans les modélisations, par des impositions sur les nombres de courant.

Si nous recherchons la correspondance complète des deux expressions de α_{N+1} , il suffit de travailler avec des nombres de courant proches de 0,52, ce qui, nous le verrons, est dans la norme des applications réelles.

XII.4.4. Extension de la méthode au non-linéaire

L'extension de la méthode au non-linéaire s'effectue en tenant compte de trois facteurs essentiels :

- D'abord, la matrice convective A n'est plus constante pour établir les fonctions de pondération. Ces dernières vont donc être évaluées de la façon suivante :

$$P^T = N^T + \alpha_{N+1} A^T W^T \quad (XII.24)$$

avec

$$A = (1 - \theta'_t) A^t + \theta'_t A^* \quad (XII.25)$$

La construction des fonctions de pondération se fait donc itération par itération, élément par élément et point d'intégration par point d'intégration.

La progression graduelle dans la description des caractéristiques du logiciel élude la charge finale numériquement conséquente, ainsi que la complication croissante dans l'ordonnancement d'une procédure itérative convergente.

Aux caractéristiques fortement non-linéaires des applications qui vont être proposées se conjugue une gestion itérative des conditions aux noeuds de réseaux, complétée à présent par une pondération dépendante du résultat lui-même.

Cette dernière influence la résolution du système en accroissant le nombre de phases itératives de chaque pas. Mais cette conséquence logique, inhérente aux propriétés fortement non-linéaires du système discrétisé résultant, n'a par ailleurs jamais imposé de recourir à une réduction du pas temporel, ce qui démontre les qualités intrinsèques du découplage initialement choisi.

- Le coefficient d'upwind α_{N+1} sera généralisé comme une constante caractéristique de la modélisation. Il prendra une valeur issue de (XII.23) où les valeurs de u_0 et c_0 deviennent des valeurs significatives de l'écoulement.
- L'évaluation de la matrice convective A , qui provient d'une écriture non conservative du système d'équations, n'est utilisée que pour construire les fonctions de pondération. Par contre, dans la réalisation du schéma de résolution par découplage, la discrétisation des équations du système proprement dit est effectuée de façon conservative.

De cette manière, nous obtiendrons une capture correcte des chocs avec une solution numérique convergeant vers la solution discontinue, par opposition aux schémas non conservatifs qui s'avèrent incapables d'appréhender correctement les discontinuités (Essers). Notons encore à ce propos que E.D.F. a récemment développé un code basé sur une formulation non conservative sans pour autant déceler d'incohérence dans les résultats obtenus.

Nous allons faire la démonstration de ce dernier aspect fondamental et vérifier la bonne tenue du modèle proposé en débutant par les deux applications théoriques définies en début de chapitre.

XII.5. VERIFICATION THEORIQUE

XII.5.1. Modélisation de rupture instantanée sur fond lisse

XII.5.1.1. Confrontation aux solutions analytiques

L'avantage d'une propagation sur fond plat lisse telle que proposée au paragraphe XII.2. est qu'aucune combinaison favorable d'effets stabilisants dus au frottement ou d'effet de pente, ne saurait venir occulter les tendances fondamentales du schéma proposé.

Par ailleurs, elle étudie momentanément le problème bien réel de l'influence de la condition limite amont dans le cas d'une réserve naturelle, qui fera l'objet d'attention dans le chapitre XIV. Dans cette application, elle est rejetée suffisamment loin pour que l'imposition de

débit nul ne provoque pas de réflexion malencontreuse pour la vérification avec la solution analytique.

Reprenons toutes les caractéristiques de discrétisation précédemment données pour reproduire une rupture instantanée d'un barrage imaginaire de 100 m de haut. En respectant toutes les considérations théoriques précédentes avec, en particulier, une valeur $\alpha_{N+1} = 0,02$, nous obtenons l'ensemble des lignes d'eau instantanées de la figure XII.5.

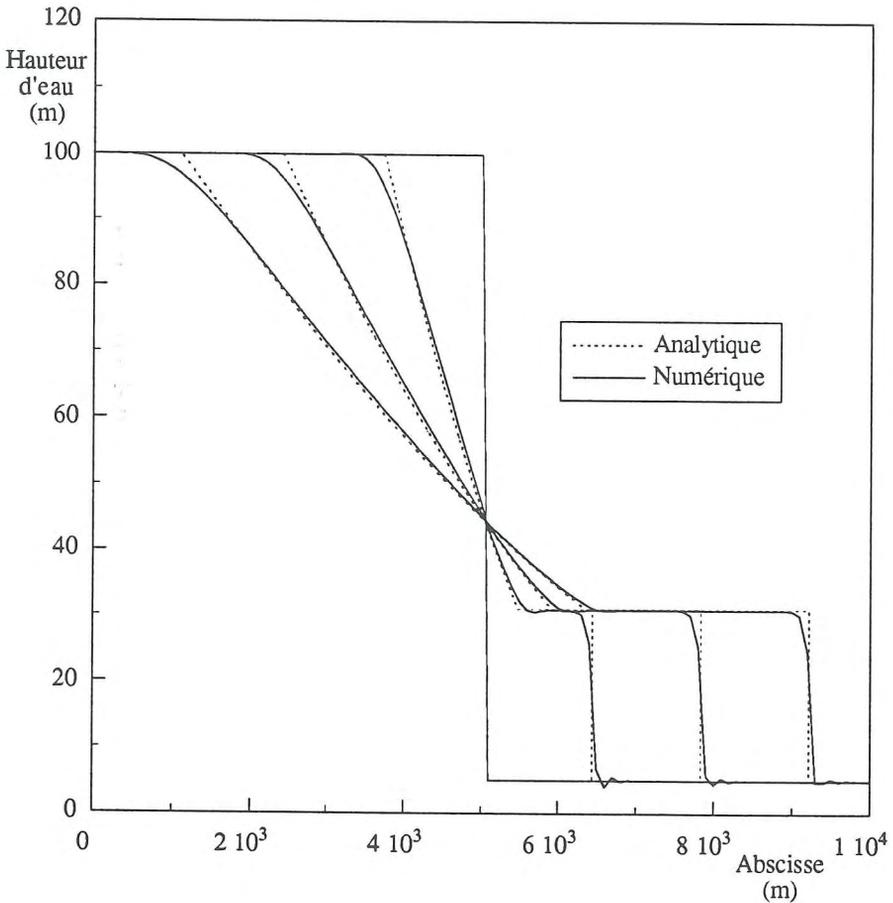


Figure XII.5.
Comparaison avec la solution analytique des lignes d'eau instantanées
en $t = 42, 84, 126$ s obtenues par la méthode proposée N+1
pour une propagation en l'absence de frottement avec $h_0/h_1 = 20$

Soulignons d'emblée l'ordre de grandeur du débit au barrage qui avoisine $900 \text{ m}^3/\text{s}$ pour une largeur unitaire et qui situe l'importance des écoulements réels aux premiers instants d'une rupture brusque en site réel, ainsi que la vitesse assez élevée de propagation d'un front de 31 m de haut, pourtant limitée à 33 m/s par la présence d'un bourrelet d'eau initial.

Dans l'amélioration décisive qui se dégage par référence aux premières tentatives de ce chapitre, plusieurs remarques s'imposent par comparaison aux lignes d'eau analytiques :

- La vitesse de propagation du front modélisé correspond pleinement à son équivalent analytique ce qui prouve une résolution correcte des discontinuités par le schéma. Ce front prend place sur une, maximum deux mailles, suivant l'instant auquel la ligne est examinée, sans soubresaut prononcé de part et d'autre du choc. La raideur du front modélisé au sein d'une ligne dépourvue d'oscillation indésirable confirme la présence d'une dissipation correctement dosée.
- La hauteur du mur d'eau qui se propage est également respectée ainsi que l'horizontalité parfaite du plateau de la zone d'état constant, qui trahit l'absence de tout frottement.
- La solution numérique reproduit et positionne correctement le point fixe au niveau du barrage. Point de transition d'un écoulement subcritique en amont à un état supercritique à l'aval, il ne s'épare dans les faits aucune différence visible de comportement du code contrairement aux premières méthodes.
- En dehors du front proprement dit, la solution analytique donne des lignes instantanées qui connaissent deux autres discontinuités de part et d'autre du point fixe à hauteur du barrage, à l'amont d'une part, au raccord avec la surface non perturbée de la retenue, à l'aval enfin du point d'articulation imaginaire, au raccord avec le plateau horizontal du front. La solution numérique se comporte diversement par rapport à ces singularités, celle de la zone supercritique étant correctement reproduite tandis que la ligne se raccorde plus graduellement à la surface libre non perturbée de la retenue, ce qui occasionne une légère surestimation apparente de la célérité de l'onde négative.

Cette dernière particularité est sans doute le point le plus commun des techniques proposées pour résoudre ces écoulements extrêmes. Elle apparaît notamment dans l'ensemble des schémas différences finies qui procèdent par capture de chocs (Savic et al, Yang et al, par exemple). Il s'agit là d'un lissage excessif de la discontinuité du raccord théorique qui est confirmé lorsqu'on prolonge asymptotiquement jusqu'à la ligne initiale de retenue le segment de ligne d'eau qui s'articule sur le point fixe du barrage.

En dehors du raccord proprement dit qui occulte finalement une célérité d'onde négative correctement reproduite, ce lissage est le plus souvent passé sous silence car sans incidence sur l'écoulement principal et significativement réduit lorsqu'il se réfléchit en extrémité amont.

L'ensemble de ces remarques se confirme à l'examen des distributions instantanées du débit sur l'ensemble du canal, reproduites à la figure XII.6. On y retrouve un débit maximum constant, à hauteur du barrage, synonyme de régime critique, et une zone d'état supercritique constant avec un plateau parfaitement horizontal qui précède un front raide.

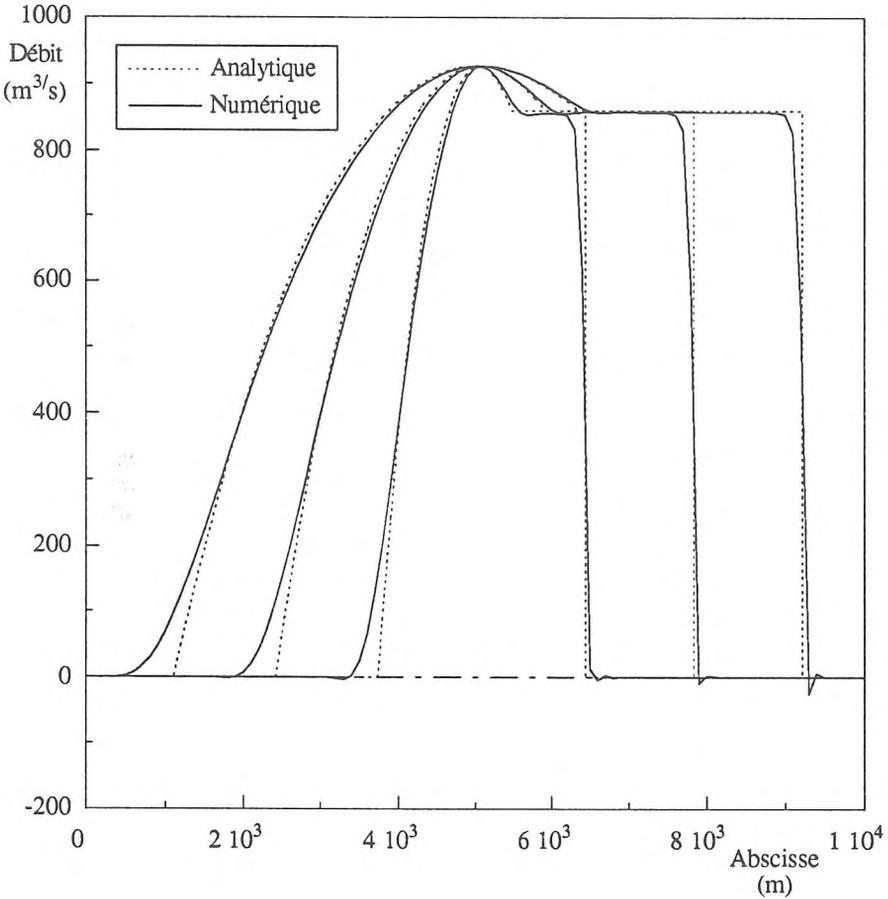


Figure XII.6.
Comparaison avec la solution analytique des lignes d'eau instantanées
en $t = 42, 84, 126$ s obtenues par la méthode proposée N+1
pour une propagation en l'absence de frottement avec $h_0/h_1 = 20$

La représentation tridimensionnelle intégrant le temps permet d'obtenir une vision globale du phénomène. La figure XII.7. montre la succession des surfaces libres instantanées avec une absence de soubresaut à n'importe quel instant de modélisation.

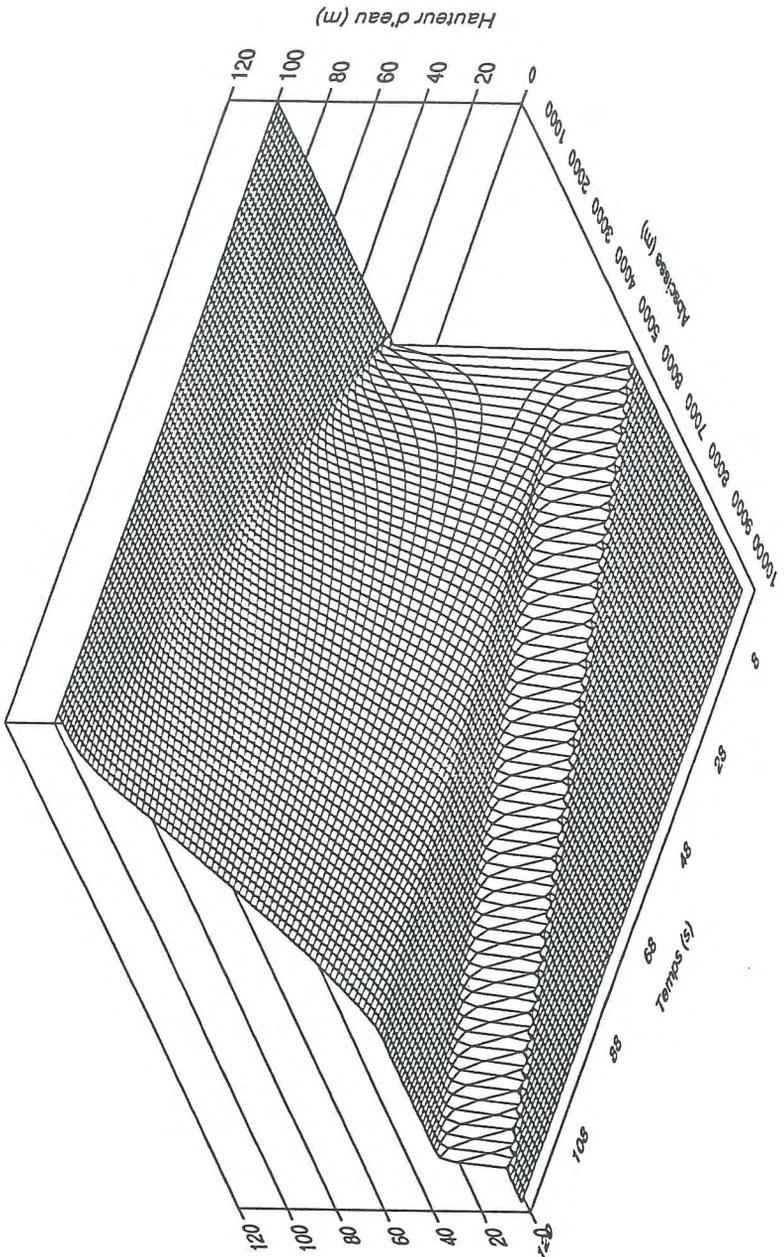


Figure XII.7.

Evolution temporelle de la ligne d'eau sur l'ensemble de la topographie obtenue par la méthode proposée N+1 pour une propagation en l'absence de frottement avec $h_0/h_1 = 20$

XII.5.1.2. Influence de l'évaluation de la matrice de masse

Les premiers résultats s'appuient, comme l'ensemble des applications futures, sur un travail numérique fondé sur la forme consistante originelle de la matrice de masse.

Nous allons néanmoins profiter de cette application particulièrement dépouillée pour illustrer l'apport de cet effort supplémentaire d'évaluation par rapport à la forme diagonalisée qui a orienté nos premières recherches théoriques. Rappelons encore que cette dernière méthode nous rapprochait du schéma de Lax-Wendroff.

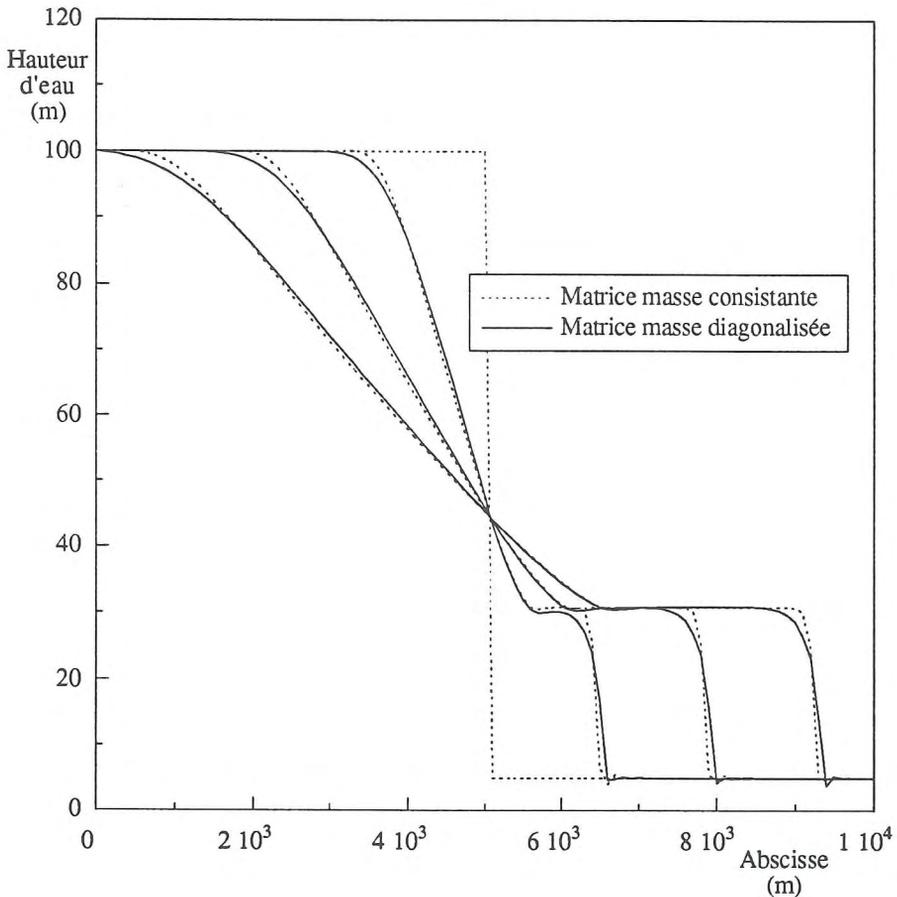


Figure XII.8.
Effet de l'évaluation de la matrice de masse, dans la méthode N+1,
sur les lignes de débit instantanées en $t = 42, 84, 126$ s
pour une modélisation de propagation en l'absence de frottement avec $h_0/h_1 = 20$

L'ensemble des paramètres de modélisation est repris tel quel pour mieux faire ressortir à la figure XII.8. l'effet d'évaluation de la matrice de masse.

On constate immédiatement l'effet moins sélectif de la dissipation introduite dans l'approche avec la matrice masse diagonalisée.

Il se représente d'abord par un lissage beaucoup plus prononcé du front qui s'étale sur 3 voire 4 mailles spatiales. De même, on obtient un raccord encore bien plus graduel de la ligne instantanée avec la surface non perturbée de la retenue, exacerbant ainsi une remarque déjà formulée à un degré bien moindre sur la méthode élaborée, par comparaison à la solution théorique.

Nous constatons par conséquent à quel point les termes non diagonaux de la matrice de masse sont en mesure de contribuer à l'obtention d'une dissipation sélective et bien dosée, et, de façon concomitante, l'importance du couplage entre degrés de liberté de l'élément fini fluide suggéré.

Ces résultats intègrent les effets les plus manifestes de la recherche d'une formulation non-linéaire optimale efficiente. Elle a trouvé de multiples prolongements notamment dans l'analyse de l'effet de décentrement spatial sur la seule matrice convective qui intervient dans la construction des fonctions de pondération, ainsi que dans l'analyse des effets d'une sous-intégration systématique de chaque contribution.

XII.5.2. Modélisation de propagation d'un ressaut

Nous avons souligné en début de chapitre que l'épaisseur du bourrelet aval dans la propagation de l'onde de rupture brusque avait été choisie afin de permettre à la simulation d'aboutir par la méthode classique de Galerkin, même de façon très dégradée.

L'augmentation du facteur $\frac{h_0}{h_1}$ est effectivement un facteur prépondérant dans l'accroissement des difficultés de modélisation. Ce type d'application peut à présent être mené à bien pour des valeurs du rapport de hauteurs largement supérieures à celle présente.

Nous n'avions par contre pas pu réagir contre l'arrêt brutal de la modélisation de propagation d'un ressaut. Reprenons à nouveau toutes les caractéristiques initiales en adoptant $\alpha_{N+1} = 0,3$, pour obtenir l'ensemble des lignes d'eau instantanées de la figure XII.9.

Non seulement la simulation se poursuit sans encombre jusqu'à son terme, mais le schéma proposé confirme son aptitude à capturer les chocs, en construisant, en des abscisses parfaitement correspondantes à la théorie, une transition presque totalement absorbée sur une maille.

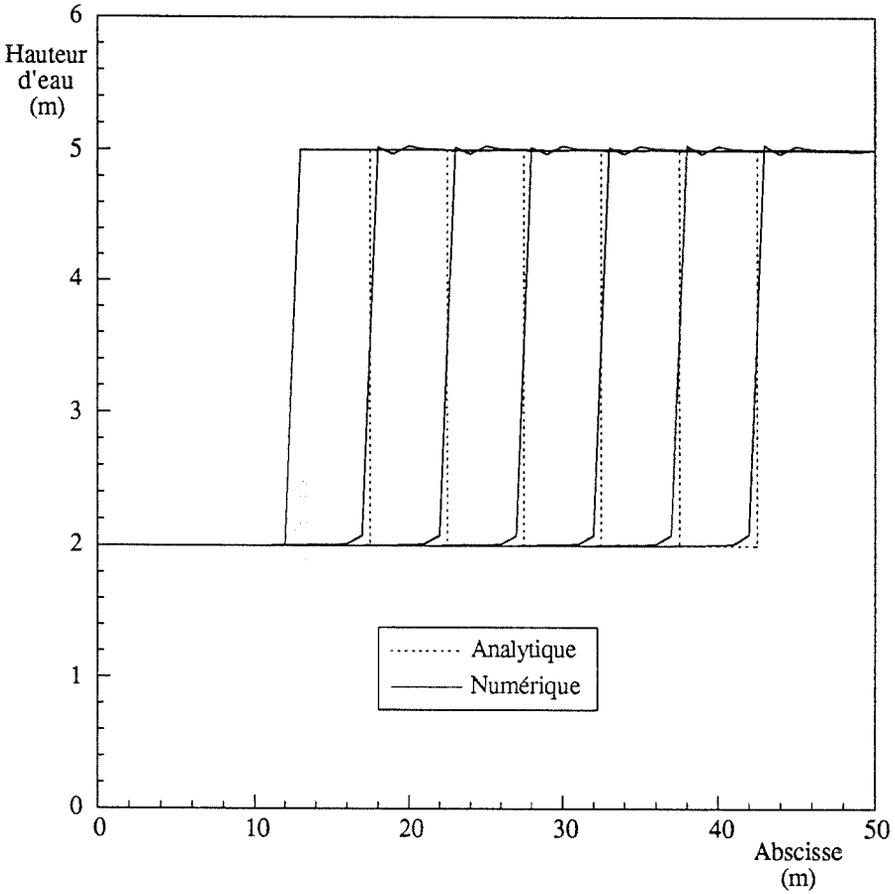


Figure XII.9.
Comparaison avec la solution analytique des lignes d'eau instantanées
en $t = 0, 2,5, 5, 7,5, 10, 12,5$ et 15 s obtenues par la méthode proposée N+1
pour une propagation de ressaut en l'absence de frottement

La démonstration est d'autant plus significative que ce déplacement correctement reproduit ne s'accompagne d'aucune dégradation ni du front ni de son voisinage direct.

La représentation tridimensionnelle incluant le temps à la figure XII.10. confirme la totale reproductibilité du phénomène qui n'amplifie aucun effet parasite.

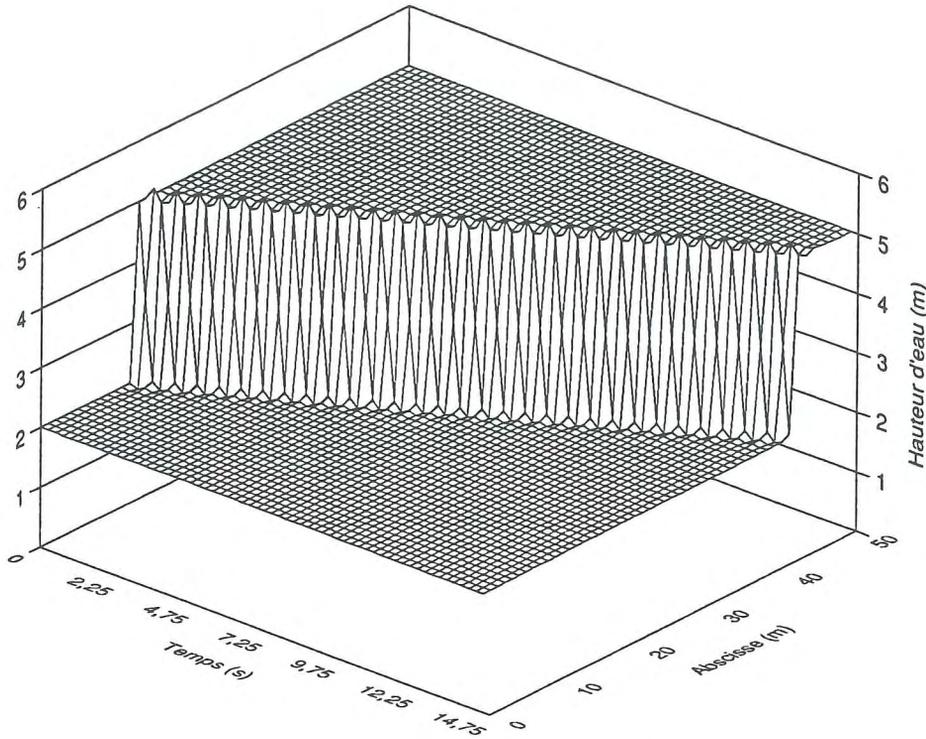


Figure XII.10.
Evolution temporelle de la ligne d'eau sur l'ensemble de la topographie,
obtenue par la méthode proposée N+1
pour une propagation de ressaut en l'absence de frottement

XII.6. VERIFICATION EXPERIMENTALE EN CANAL RECTILIGNE

La confrontation du modèle à la réalité physique a été souhaitée dès les premières phases de vérification de la méthode proposée. De plus, la réalisation d'une propagation d'onde raide contribue également à se familiariser avec le phénomène, en observant notamment la structure et la forme qu'adopte dans la réalité le front au cours de sa propagation.

Quant aux conditions de l'essai, la présence de frottement rapproche inévitablement de conditions beaucoup plus réalistes la succession des exemples proposés dans cette partie.

Cet ensemble de raisons plaide en faveur d'une vision globale d'un phénomène à la fois dépouillé de multiples intervenants et reproductible. Il justifie plusieurs options prises lors de la réalisation des essais, tant sur la géométrie, sur l'initiation du phénomène que sur la prise de mesures.

- Le modèle construit dans les Laboratoires d'Hydraulique Appliquée et des Constructions Hydrauliques et Navales de l'Université de Liège est d'abord volontairement simple pour isoler les facteurs d'influence et faciliter l'interprétation comparative tant des lignes instantanées que de la vitesse de propagation du front : section rectangulaire, canal vitré horizontal à coefficient de frottement connu.

Le canal large de 0,40 m s'étend sur 25 m. Il est obstrué à son extrémité située côté réservoir et se termine à l'extrémité opposée par un bac. La plaque représentant le barrage est placée à 11,125 m du bac déversoir. Les 13,875 m restants constituent le réservoir.

Le choix de l'emplacement du barrage est dicté par l'onde négative remontant dans la réserve. Sa réflexion sur l'extrémité amont ne peut venir perturber l'écoulement.

La profondeur dans la réserve avant rupture s'établit à 0,35 m. L'onde se propage sur une fine lame d'eau entretenue par les pertes au droit de la plaque-barrage.

- Le mode d'initiation du phénomène doit respecter au mieux les conditions d'une rupture brusque. Il faut en même temps imaginer un système simple qui garantit des conditions d'initiation inaltérables.

La solution adoptée est celle d'une plaque articulée à sa base. Une fois libérée de sa position verticale, elle pivote et se colle contre le fond sous la poussée du mur fluide qu'elle retenait. La prise de mesures a confirmé un temps de chute suffisamment faible pour reproduire le phénomène souhaité.

- Enfin, il a été jugé prioritaire de conserver des mesures globales d'un phénomène dont la durée totale n'excède pas 6 secondes et de les obtenir sans aucune perturbation d'un front qui s'avère extrêmement sensible à tout accident local même minime.

Dans cette optique, la mesure par jauges a été jugée inappropriée, notamment par les résultats parcellaires qu'elle donne dans le cas où la densité de mesures sur la longueur est insuffisante.

Nous lui avons préféré une acquisition par mesures photographiques qui rend, tous les 1/3 de seconde, une image complète des 11,125 m de canal. En colorant l'eau et en dépouillant les images projetées en grande dimension, on reconstitue aisément chaque ligne instantanée. Plutôt qu'une évolution temporelle de hauteur d'eau en quelques points, on parvient ainsi à tracer 15 lignes d'eau complètes instantanées du processus.

La dernière donnée indispensable à chaque instantané est la base de temps. Comme il est illusoire d'obtenir une parfaite simultanéité entre le débit du processus et la prise de dias, un chronomètre digital de grandes dimensions est déclenché avant toute autre manipulation. Il surmonte le modèle pour inclure dans chaque prise un temps au 1/100^{ème} de seconde.

Chaque essai donne donc lieu aux phases immuables suivantes :

La retenue est remplie d'eau mélangée à de la rhodamine jusqu'à 0,35 m de profondeur. Après cette opération, le système est autonome. Le chronomètre est déclenché, suivi de la prise automatique de vues. La plaque-barrage est enfin libérée de sa position verticale pour générer une propagation d'approximativement 5,4 s jusqu'au déversoir. Le dépouillement des résultats s'effectue par digitalisation des points relevés et correction numérique des erreurs imputables aux distorsions d'échelle.

La confrontation de ces résultats à la modélisation numérique se base sur une discrétisation des 25 m de canal par 100 éléments linéaires. Le pas spatial est limité à 0,025 s. Confirmée par des lignes d'eau préalables générées dans le canal, la valeur assez faible, $n = 0,01$, caractéristique du verre (Katopodes et al) a été adoptée pour le modèle.

Les essais successifs réalisés en laboratoire montrent d'abord que l'onde est légèrement perturbée dans les premiers instants par des remous provoqués par l'abaissement de la plaque. Ensuite, c'est une onde totalement reconstituée et à front assez raide qui parcourt le reste du canal.

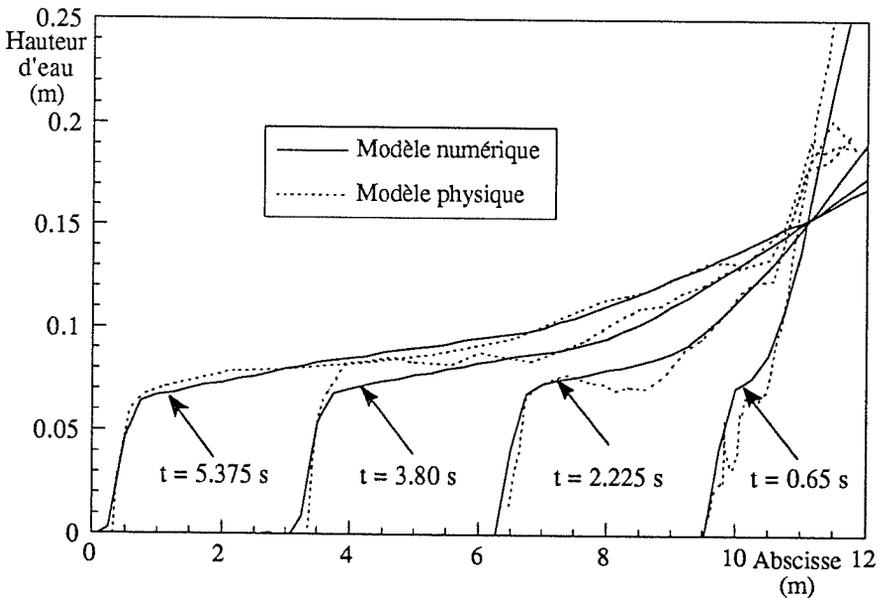


Figure XII.11.
Comparaison avec les résultats expérimentaux des lignes d'eau instantanées en $t = 0,65, 2,225, 3,80$ et $5,375$ s, obtenues par la méthode proposée N+1 pour une propagation en canal vitré

Les figures XII.11., 12., 13., 14. reprennent l'ensemble des lignes mesurées avec leur correspondant numérique. En particulier, on décèle la géométrie assez perturbée qu'adopte la mesure expérimentale en $t = 0,65$ s.

Les temps reportés sur les comparaisons sont ceux de la simulation numérique qui établit un temps apparent d'abaissement de la plaque de 0,13 s.

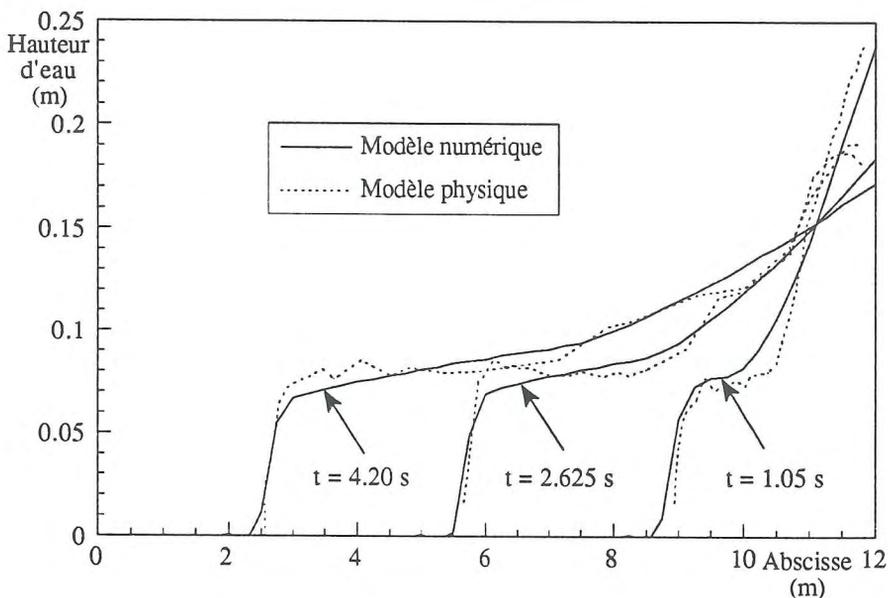


Figure XII.12.
Comparaison avec les résultats expérimentaux des lignes d'eau instantanées
en $t = 1,05, 2,625$ et $4,20$ s, obtenues par la méthode proposée N+1
pour une propagation en canal vitré

La bonne correspondance qui ressort des résultats, tant pour la vitesse de propagation que pour les hauteurs d'eau le long des lignes instantanées, démontre le bon comportement du logiciel. Tout au plus peut-on constater une légère dégradation des correspondances dans le proche aval de la plaque, imputable à l'influence sur l'écoulement de la surépaisseur métallique de la plaque couchée et de son articulation fixée sur le fond.

Un détail particulièrement rassurant de ces simulations est la bonne correspondance obtenue en travaillant avec la loi de frottement de Manning, établie originellement sur base de phénomènes stationnaires. La conservation du coefficient de frottement caractéristique du canal confirme que nous n'avons pas rencontré les mêmes difficultés, dans un même type d'essais, que Dressler qui devait varier les coefficients descriptifs d'un même canal au gré des phénomènes reproduits.

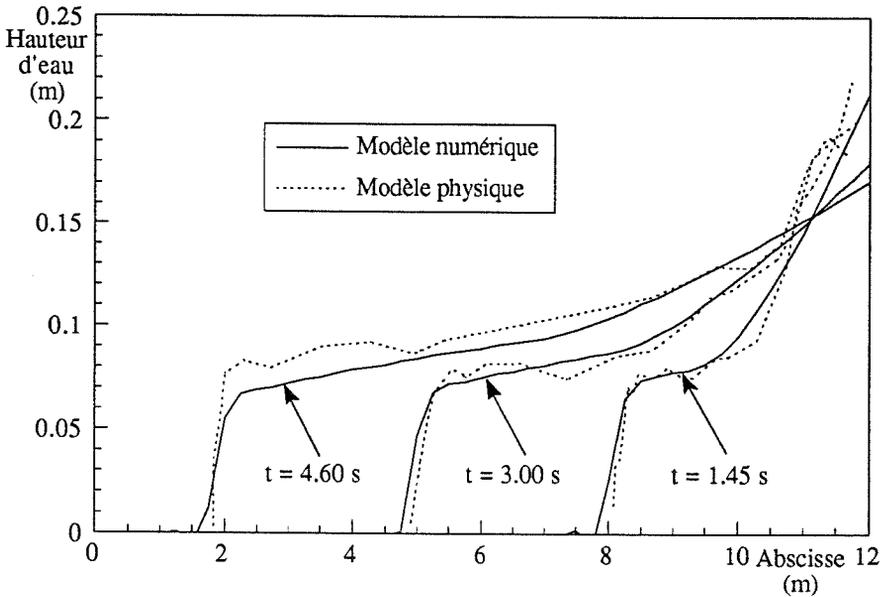


Figure XII.13.
Comparaison avec les résultats expérimentaux des lignes d'eau instantanées
en $t = 1,45, 3,00$ et $4,60$ s, obtenues par la méthode proposée N+1
pour une propagation en canal vitré

De façon plus générale, une première analyse de l'effet du frottement confirme trois modifications importantes par rapport aux premières simulations :

- La théorie du point fixe au niveau du barrage se vérifie d'autant moins que le phénomène se prolonge.
- La présence de frottement oblige les lignes d'eau à "se mettre en charge", incurvant le plateau du front précédemment horizontal.
- Le front se propage moins vite qu'en l'absence de frottement, comme le confirme l'application suivante qui reprend les mêmes circonstances de modélisation en intensifiant le frottement.

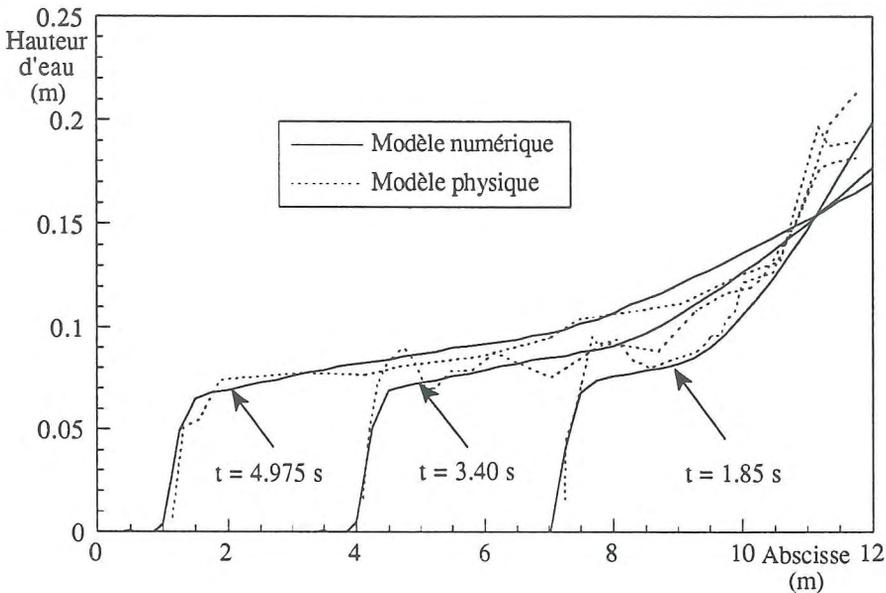


Figure XII.14.
Comparaison avec les résultats expérimentaux des lignes d'eau instantanées
en $t = 1,85, 3,40$ et $4,975$ s, obtenues par la méthode proposée N+1
pour une propagation en canal vitré

Ces caractéristiques sont mieux mises en évidence par la figure XII.15, qui reproduit numériquement l'essai dans des conditions de frottement $n = 0,033$.

Cette dernière figure revient également sur l'hypothèse adoptée jusqu'ici pour le paramètre d'inégale répartition de vitesse.

Nous nous sommes largement expliqué sur le choix de geler ρ_ω à une valeur unitaire, position d'autant plus justifiée dans des écoulements aussi extrêmes. Ce test en géométrie régulière nous donne l'occasion d'en répercuter l'influence en adoptant forfaitairement une valeur qui cadre suffisamment avec les quelques calculs du paragraphes IX.4., menés alors sur ce type de section.

Nous choisissons une distribution uniforme de $\rho_\omega = 1,3$ en insistant sur le fait que la théorie n'exclut a priori aucune autre distribution plus irrégulière.

L'effet de ρ_ω se répercute, nous l'avons vu théoriquement, sur une modification de la célérité des ondes, comme l'atteste l'abscisse d'onde négative dans la retenue ou la position du front pour les diverses lignes instantanées de la figure XII.15.

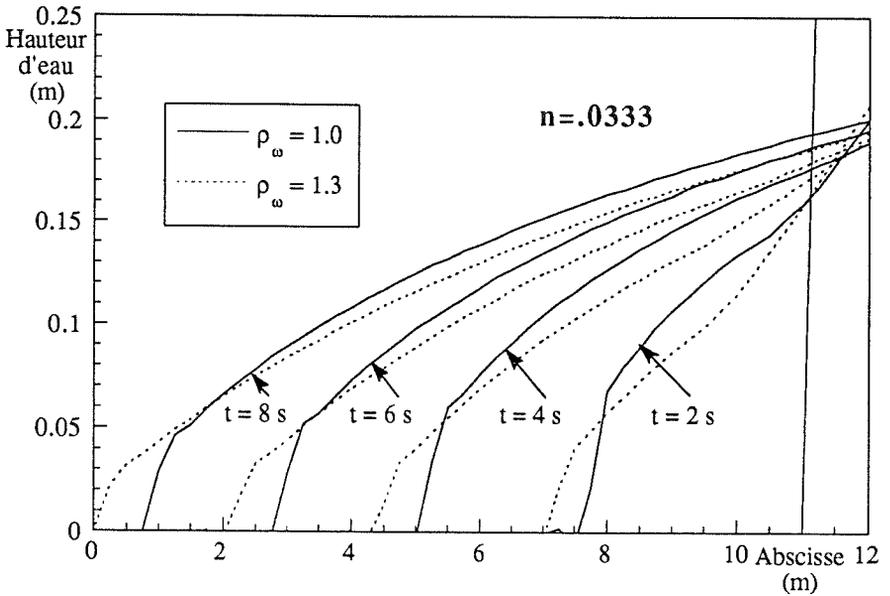


Figure XII.15.

Effet sur les lignes d'eau instantanées d'un coefficient d'inégale répartition de vitesse sur la section non unitaire, pour une propagation avec frottement où $n = 0,0333$

Le second effet manifeste est une diminution de la hauteur du front ainsi qu'une courbure plus prononcée de la surface libre pour relier le front à l'abscisse du barrage. Une modélisation de rupture sans frottement confirme ces tendances en propageant plus rapidement un front caractéristique de $\rho_{\omega} > 1,0$, dont le plateau horizontal à état constant voit sa hauteur considérablement réduite.

Lorsque nous reprenons la comparaison des lignes mesurées et la simulation avec $\rho_{\omega} = 1$, nous voyons qu'une irrégulière répartition de vitesse pourrait permettre éventuellement de mieux reproduire encore la forme incurvée de surface libre entre le front et l'abscisse du barrage, puisque des tendances similaires se dégagent pour $\rho_{\omega} > 1$.

Mais il faudrait alors, si on travaille à ρ_{ω} constant en long, compenser l'accroissement de célérité du front par une hausse des caractéristiques de frottement. Cette hausse devrait en plus tenter de rétablir une hauteur correspondante du front proprement dit qui est correctement reproduit par une valeur unitaire de ρ_{ω} . Or, l'expérience du canal d'essais, ainsi que les valeurs du coefficient de Manning tirées de la littérature, nous laissent peu de marge de manoeuvre sur ce point.

Une autre façon de caler le paramètre ρ_ω pour les essais consisterait à affiner uniquement la correspondance de la célérité de l'onde négative. Mais nous avons souligné l'impact négatif sur les mesures de la surépaisseur créée par la plaque couchée au fond du canal.

Toutes ces considérations ne travaillent néanmoins que sur une hypothèse de répartition uniforme de ρ_ω , ce qui paraît un peu restrictif. On pourrait ainsi concevoir une valeur de ρ_ω légèrement supérieure à l'unité pour la partie bien "formée" de la ligne et opérer une transition vers une autre valeur afin de conserver des caractéristiques acceptables pour la description du front.

En conséquence, nous risquons d'entrer dans une répartition très hypothétique du paramètre pour tenter d'obtenir une meilleure correspondance, sans pour autant garantir que les formes instantanées sont imputables à cet intervenant. De plus, une étude plus poussée sur le sujet ne nous donne encore que peu de possibilités d'extensions fiables aux sections réelles.

Ainsi, nous venons de constater qu'une variation de ρ_ω pourrait aider à affiner les célérités des ondes modélisées, sans pour autant qu'on dispose de mesures suffisamment exhaustives sur le sujet. Enfin, la très bonne correspondance entre modèle et réalité lorsqu'on travaille à valeur unitaire de ρ_ω nous incite à renoncer à jouer de façon générale sur la distribution de ce paramètre, particulièrement en topographie réelle.

Cette position s'accorde par ailleurs avec l'analyse assez globalisante des paramètres de modélisation, qui émergeait des premières observations du phénomène de rupture.

Nous concluons cette discussion sur l'opportunité d'agir sur le terme convectif en relatant l'expérience qu'a acquise Rajar en travaillant sur modèles physiques. Dans la reproduction de topographies réelles, il a rapidement constaté qu'une correspondance des résultats expérimentaux avec ses simulations numériques impliquait l'introduction dans les équations d'un terme supplémentaire représentatif de pertes de charge locales. C'est l'analogie de forme de ce terme avec la contribution convective lorsqu'on travaille avec u et h_t comme variables qui nous pousse à rapprocher son introduction du coefficient ρ_ω .

L'expression suggérée pour être introduite dans le bilan de quantité de mouvement s'écrit pour le système (IX.43) exprimé en terme de section, débit :

$$\frac{K}{2g} \omega \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{\omega} \right)$$

Rajar suggère de ne prendre en compte cette contribution que lorsqu'il y a réduction de l'énergie cinétique. En d'autres termes, il propose $K = 1$ pour un écoulement divergent et $K = 0$ pour un convergent. Cette approche s'accorde assez bien avec la philosophie développée par Benoist et al d'introduire une perte de charge singulière dans les zones à forte décélération, sans toutefois davantage préciser son expression formelle.

Dans la prolongation des idées développées et du raisonnement tenu pour l'analyse des effets de $\rho\omega$, nous avons momentanément estimé qu'il était prématuré d'introduire ce type de perte sans une confrontation à un modèle physique représentatif de la géométrie étudiée.

La préoccupation essentielle de développer un schéma numérique pleinement satisfaisant nous renforce dans cette idée puisque nous pressentons, par extension des simulations d'étude de $\rho\omega$, que ce terme ne doit être à la base d'aucun écueil numérique particulier, ni dans sa programmation, ni dans ses effets sur le processus itératif notamment.

C'est dans le même état d'esprit que nous envisagerons, dans les modélisations de rupture, l'intervention possible des effets spécifiques au terme de viscosité. Car si nous avons jugé son influence tout à fait négligeable dans le cadre d'applications à variation graduelle des variables, l'apparition de fronts marqués et de transitions raides implique physiquement la présence de zones perturbées à caractère turbulent. Quant à l'aspect numérique du problème, les transitions peu graduelles que connaissent les variables dans ces mêmes zones nous portent à croire que la contribution visqueuse serait susceptible de jouer très localement un rôle significatif (Strelkoff).

Avant tout autre considération, rappelons d'emblée que le type d'approche adopté ne s'intéresse pas aux détails de la structure même du front, dont nous avons rappelé qu'elle remettait très localement en cause les hypothèses d'hydrostaticité de la pression sur la verticale. La modélisation de la transition s'intègre dans une résolution du problème à l'échelle des mailles de discrétisation spatiale, ce qui justifie également le contexte numérique d'un recours à une résolution par capture numérique du choc pour le modéliser (Botev).

Si nous avons reporté la discussion de ce facteur d'influence jusqu'à ce stade, c'est pour disposer des deux arguments fondamentaux qui justifient que la majorité des modèles unidimensionnels proposés dans la littérature ne recourent pas à cette contribution.

D'une part, il faut souligner que les résultats exempts d'effets parasites dévastateurs sont obtenus par l'introduction d'effets dissipatifs très sélectifs dont certains auteurs n'hésitent pas à vanter les mérites par référence à un simple recours à de la viscosité (Katopodes). Ainsi, lorsque Garder, par exemple, compare l'effet de fonctions de pondération décentrées avec celui des influences visqueuses, il ramène implicitement la viscosité à un artifice essentiellement numérique, capable d'étouffer sélectivement certaines tendances oscillatoires. Dans le même ordre d'idée, le terme supplémentaire intervenant dans le schéma de Lax-Wendroff est couramment assimilé à une contribution visqueuse (Richtmyer et al).

Le lissage exagéré introduit par un simple recours à la viscosité telle qu'elle apparaît à l'issue des développements théoriques donne par ailleurs mauvaise presse à cette façon peu sélective d'agir sur la solution (Garcia et al).

Aussi est-il finalement très difficile de trouver des approches qui échappent totalement à un sous-entendu numérique dans la fixation des valeurs de v et qui cherchent réellement à dégager son action spécifique de mesures expérimentales notamment.

Cette justification nous ramène au second argument qui tient à nouveau à la façon globalisante d'envisager l'étude du phénomène, en concentrant nombre d'intervenants

dans une interprétation élargie des paramètres de frottement (Botev).

Les valeurs couramment référencées dans la littérature font bel et bien référence à ce type d'analyse globale, qui tranche avec une volonté de dégager, par voie expérimentale notamment, certains aspects spécifiques à la viscosité dans les profils obtenus. Comme pour le coefficient d'inégale répartition de vitesse, ce type d'essais ne nous permettrait par ailleurs pas d'étendre, sans autre raisonnement, les valeurs trouvées à des géométries très irrégulières.

En conclusion, nous n'exploiterons pas davantage cette contribution, en soulignant que les effets qu'on pourrait lui attribuer sont, d'une part numériquement pris en compte par une autre voie de pondération particulière, et, d'autre part, physiquement englobés dans des valeurs de frottement qui cadrent avec les valeurs standards de la littérature.

XII.7. CONCLUSION

L'expérience acquise lors de la première partie de ce travail sur la façon d'appréhender théoriquement et numériquement les problèmes de chocs a trouvé d'utiles prolongements en accélérant ou en permettant de passer sous silence certaines phases théoriques et numériques nécessaires à l'élaboration d'une méthode applicable aux équations complètes unidimensionnelles.

La forme définitive qu'adopte la pondération confirme que l'analyse de la structure même de l'écoulement doit interférer avec l'élaboration de fonctions de pondération aptes à introduire des effets dissipatifs très sélectifs.

Basée sur l'observation initiale de schémas connus pour leurs qualités de capture des chocs, la formulation proposée généralise, par son approche paramétrée, nombre de schémas différences finies en faisant preuve de qualités qui permettent son recours tant pour des simulations d'ondes de rupture de barrage, que des nombreuses applications hydrauliques incluant ou non des chocs et qui satisfont aux hypothèses initiales d'écoulement unidimensionnel.

Nous trouvons là un acquis important d'une politique de généralisation de l'approche numérique initiale, qui conserve ainsi les atouts d'une méthode travaillant par décomposition des systèmes sur une géométrie tout à fait générale de réseaux, qui présentent des bras à sections transversales irrégulières et quelconques. La dernière application de rupture profitera pleinement de cette possibilité en propageant une onde dans un réseau ramifié des vallées de nos contrées.

Il est impossible de reproduire ici la gradation logique des tests préliminaires qui furent effectués pour optimiser la forme finale du code proposé. Citons notamment les comparaisons concordantes (Piroton) avec les travaux de Sakkas et al, Bellos et al, Chang-lung Chen, ainsi qu'avec ceux de l'importante campagne menée par le Waterways Experiment Station, U.S. Corp. of Engineers.

Enfin, la généralité de l'approche s'est définitivement imposée par la reprise systématique de tous les exemples proposés en approche classique de Galerkin, sans qu'aucune modification sensible des résultats ne puisse être décelée.

Le type d'approche proposé présente un dernier avantage décisif en suggérant, de façon simple et automatique, une généralisation directe de la formulation aux autres dimensions spatiales. L'intervention de la matrice convective dans la formulation générale permet d'envisager des extensions futures utiles pour la mise en place d'études locales en quasi-tridimensionnel qui compléteraient judicieusement le codé unidimensionnel actuellement proposé par un échange d'informations et de conditions aux limites.

En matière de simulation d'ondes de ruptures de barrage, nous pensons notamment aux zones de confluences qui sont traditionnellement le siège d'écoulements complexes à caractère fortement bidimensionnel. Lorsque l'importance de la zone le justifie (présence d'une ville comme nous le verrons ultérieurement), ce type d'étude peut venir en complément d'une modélisation filaire qui lui fixerait des conditions limites appropriées.

Terminons cette étude en validant notamment l'approche sur une propagation d'onde en géométrie réelle qui définira la procédure à suivre pour une première analyse d'un barrage belge.

Chapitre XIII

Application du modèle numérique aux écoulements discontinus en conditions réelles

SOMMAIRE

- XIII.1. *Introduction*
- XIII.2. *Procédure automatique de déplacement des frontières de discrétisation*
- XIII.3. *Comparaison d'une rupture progressive en géométrie réelle*
- XIII.4. *Modélisation instationnaire de la formation d'un ressaut*
- XIII.5. *Conclusion*

XIII.1. INTRODUCTION

Nous venons de voir que l'atout majeur d'une méthode agissant par capture numérique des chocs réside dans l'aisance de sa mise en oeuvre pour des modélisations très variées. Elle ne requiert de recours à une quelconque analyse de l'écoulement ni pour localiser ni pour traiter le cas échéant des discontinuités qui pourraient y survenir.

Il est établi que cette facilité cache une action sélective du schéma qui nécessite, par son caractère tacite, une pleine confiance dans les effets introduits. Les discussions et tests préliminaires des chapitres précédents ont permis d'y parvenir.

Si l'on respecte totalement cette philosophie d'action, il faut la laisser oeuvrer librement en écartant tout artifice numérique qui bloquerait arbitrairement des degrés de libertés, par test de hauteurs nulles par exemple (Petrascheck et al). Dans cette logique, nous admettrons donc tout naturellement que la méthode ne s'accommode que de propagations sur fond humide.

Ainsi, sur base des conclusions théoriques du chapitre XI, s'établit a priori une limitation définitive des résultats futurs de propagations dont l'analyse et la portée devraient s'en tenir au strict contexte qui a vu leur établissement.

Il serait ainsi peu rigoureux d'argumenter l'assimilation de nos résultats à de la propagation sur fond sec, sur base de grands rapports de hauteurs entre l'amont et l'aval (désormais gérables par la méthode élaborée), puisque l'analyse théorique préalable suggère de différencier totalement les deux types d'approche.

Faut-il dès lors admettre qu'une scission irréversible prend corps entre méthodes développées sur les deux types d'approche (fond sec ou fond humide), alors que leur but ultime revient toujours à fournir des renseignements du même type sur les conséquences probables de la ruine d'un ouvrage ou d'une chaîne d'aménagements ? Etablirait-on des plans d'alerte intimement liés à l'hypothèse de propagation sur laquelle chacun fut élaboré ?

Dans ce contexte, l'impossibilité de choisir le type de propagation modélisable par notre code apparaîtrait comme une limite imputable à son caractère généraliste.

A cette question primordiale de savoir jusqu'à quel point les résultats de chaque approche pourraient être effectivement contradictoires et d'examiner plus particulièrement dans quelle mesure l'influence du frottement tempère les conclusions théoriques initiales, se superpose une seconde question, plus physique, sur les conditions qui prévalent réellement à l'aval, dès l'initiation de la catastrophe.

Le contexte d'une propagation sur fond sec s'identifie aux ruptures en vallées peu encaissées ainsi qu'aux profils en travers constitués de plaines inondables assez larges qui ne connaissent aucun écoulement à l'aval. Quand ce dernier existe, il ne concerne qu'une partie mineure du fond de vallée et est jugé totalement négligeable en regard des maxima projetés pendant la catastrophe. Par extension des propagations sur fond sec, sont prises en compte des propagations sur des filets fluides initiaux très réduits dans des vallées encaissées.

Nous avons vu jusqu'à quelle valeur devait être théoriquement porté le rapport des sections mouillées pour satisfaire, en l'absence de frottement, à une telle condition. Ce rapport est loin d'être atteint lorsqu'on enchaîne le scénario logique qui se déroule au droit d'une structure en péril. L'hypothèse d'un écoulement aval procède du constat tiré sur la plupart des ouvrages eux-mêmes avant leur ruine. Les signes avant coureurs qu'ils donnent sont le plus souvent de nature à inciter à des réactions promptes, dont celle de procéder à des lâchers préventifs.

De cette diminution des stocks implicables dans un accident potentiel, naissent des écoulements aval à même de justifier par eux-seuls les états initiaux invoqués dans les propagations sur fond humide, puisqu'ils sont caractérisés par des valeurs supérieures aux normes quotidiennes (Bellos et al).

Ainsi, et particulièrement dans le type de topographie rencontré en Belgique, la propagation sur fond humide répond-elle à une certaine logique des événements, pour autant bien sûr que les valeurs numériques initiales se cantonnent dans des valeurs tout aussi adaptées à la réalité des faits.

Ce type de justification ne nous libère par pour autant de la nécessité de mesurer l'importance de ce choix sur la modélisation. Dans cette comparaison entre types de propagation, et avant toute considération d'ordre numérique, nous relaterons l'expérience qu'a acquise Rajar sur modèle réduit.

Tout en retrouvant, dans les faits réels, la différenciation originelle de la théorie, il constate qu'elle ne s'exprime que sur la seule structure du front, et de façon très relative. Ainsi, la discontinuité se manifeste bien en propagation sur écoulement existant, mais le frottement se charge d'infléchir le front raide initial au cours de sa propagation, il le rabote jusqu'à donner l'apparence d'un mouvement graduellement varié lorsque la rugosité est très marquée.

La forme des courbes expérimentales tirées des essais en canal au L.H.C.N. corrobore cette évolution vers un écrêtement de la forme raide initiale.

Quant à la propagation sur fond sec, Rajar retrouve, aux premiers instants, une fine lame fluide assurant un raccord sur le fond, qui s'accorde bien avec la forme tangentielle de la surface libre donnée par Ritter au voisinage du front. Néanmoins, cette faible épaisseur subit l'influence la plus sensible du frottement qui retarde sa progression. Sans retenir l'option d'une discontinuité nette, Rajar reconnaît que le bourrelet qui suit le front et le "pousse" lui donne une courbure de surface libre de plus en plus marquée.

En dehors de ces constats, aucun autre fait ne différencie les processus.

Nous nous sommes attaché à l'aspect numérique du problème en confrontant une nouvelle fois notre logiciel à un autre code, spécialisé cette fois, par une de ses extensions, à la

modélisation filaire de propagation d'ondes sévères.

La différenciation très nette, tant dans la méthode numérique retenue que dans le type de propagation supportée, donne tous les atouts, par une première modélisation en géométrie réelle, pour répondre aux dernières interrogations sur la portée des résultats.

Mais avant de l'aborder puis de conclure par une dernière application de l'hydraulique générale, nous compléterons notre code avec quelques attributs indispensables au bon déroulement d'une application réelle, en nous intéressant également à la charge numérique qu'elle implique.

XIII.2. PROCEDURE AUTOMATIQUE DE DEPLACEMENT DES FRONTIERES DE DISCRETISATION

Nous avons assumé dès le départ toutes les conséquences de notre choix de travailler par méthode implicite, sans éluder le surcroît d'effort numérique qu'il risquait d'impliquer.

Tandis que nous cherchions à exploiter les avantages inhérents à une telle approche, nous avons logiquement tenté d'en limiter les désagréments en agissant essentiellement sur deux aspects principaux :

- Dans l'optique d'un travail sur machine de type P.C., le problème de mémoire vive a trouvé une solution dans un travail optionnel par blocs d'équations. Nous avons vu qu'il reculait substantiellement les limites en matière de discrétisation analysable par le logiciel.
- En matière de temps de calcul, nous avons motivé notre choix du schéma par des temps de calcul constamment révisables à la baisse par évolution des machines les plus répandues.

Nous avons mesuré cette progression rapide durant le travail puisqu'elle a autorisé des applications beaucoup plus importantes sur des machines de type P.C. sans que le temps de calcul n'évolue de façon notable.

Néanmoins, la réduction la plus drastique en temps de calcul fut obtenue, sur la propagation d'ondes de rupture, en observant la débauche initiale d'effort numérique inutile lorsque l'ensemble de la discrétisation est prise en compte durant toute la modélisation.

Partant de l'hypothèse que le(s) front(s) se propage(nt) sur une ligne d'eau initiale parfaitement stabilisée, il devient évident qu'une seule discrétisation constituée de tout l'amont jusqu'au(x) front(s) de propagation, complétée de quelques mailles "de sécurité" en aval est en mesure de répercuter, de façon beaucoup plus économique, toute l'information nécessaire à un pas de temps.

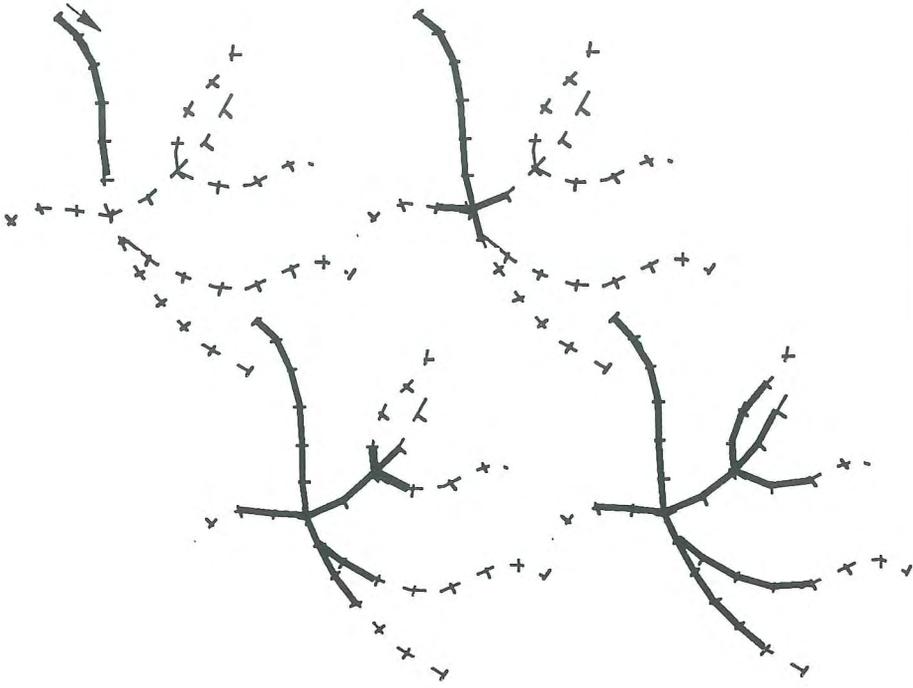


Figure XIII.1.

Schématisme de l'évolution temporelle du maillage réellement pris en compte pour le calcul (traits renforcés), par rapport à l'entière du maillage donné (traits pointillés)

La réduction au plus juste de la taille des systèmes d'équations à résoudre, révisable à chaque pas, serait particulièrement simple à mettre en oeuvre si elle ne devait s'appliquer, en toute généralité, à une propagation en réseau quelconque.

La procédure mise en oeuvre examine à chaque pas temporel la situation du système. Elle détecte le déplacement des fronts dans les ramifications par violation d'une condition pivot fixée par l'utilisateur. Dans chaque bras, elle prolonge alors le nouveau maillage potentiel, au delà de ces limites, du nombre de mailles de sécurité prescrit pour la modélisation et analyse la configuration la plus défavorable compte tenu de ces données.

La modélisation peut donc ne pas exploiter une partie de la géométrie fournie, notamment dans les bras latéraux, par exemple lorsqu'il s'avère qu'une inversion de débit se produit avant d'avoir "remonté" l'ensemble des mailles du bras concerné, comme le suggère la figure XIII.1.

Le système gère automatiquement sa numérotation d'inconnues pour le réseau retenu, détermine les conditions supplémentaires pour la gestion des bifurcations réellement impliquées et fixe les conditions limites aval pour un problème bien posé.

Dans cette dernière tâche, il s'aide notamment du régime d'écoulement qui prévaut dans chaque ligne initiale, au droit des extrémités momentanées de la discrétisation. Il ressort de l'expérimentation que 10 mailles de sécurité sont largement suffisantes pour annihiler toute influence numérique de réduction du domaine étudié.

Mais en poursuivant l'idée inverse de serrer les fronts au plus près, dans l'espoir d'éliminer les rares sursauts précédant ces fronts, ceux-là mêmes qui, dans les faits numériques, exigent la présence d'une lame initiale, on a pu approcher la philosophie qui consiste à empêcher, par le blocage systématique des hauteurs d'eau, de descendre sous une valeur fixée (Bellos et al, par exemple). En ne déplaçant les limites qu'après dépassement de cette condition pivot, nous avons bel et bien vérifié qu'un système trop conditionné pouvait infléchir sa vitesse de propagation.

Cette constatation nous a conforté dans l'idée de s'en remettre complètement à la méthode proposée, d'accepter une ligne d'eau initiale suffisante, sans faire intervenir d'autre artifice numérique.

En dehors de cette option de maillage variable, uniquement utilisable en propagation de fronts, nous avons joint deux autres commodités :

- la mémorisation des hauteurs maximales atteintes,
- la mémorisation en chaque point de l'instant initial de submersion.

Ainsi se complète toute l'information nécessaire à l'élaboration de cartes de zones inondables, dans la perspective de mise en place de systèmes adéquats d'avertissement de la population et d'élaboration de plans d'évacuation.

XIII.3. COMPARAISON D'UNE RUPTURE PROGRESSIVE EN GEOMETRIE REELLE

La France a réagi à la rupture catastrophique du barrage de Malpasset par un renforcement progressif de la réglementation en matière de sécurité des barrages.

Après l'installation, en 1966, d'un Comité Technique Permanent des Barrages, chargé de rendre un avis sur tout projet de barrage excédant 20 m de hauteur, une mise à jour de la réglementation relative à la surveillance et à l'inspection des ouvrages a eu lieu en 1970. Ces mesures ont été complétées la même année par un arrêté rendant obligatoire l'établissement de plans d'alerte et de secours aux populations pour tout ouvrage dépassant 20 m de haut et retenant 15 millions de mètres cubes au moins.

Ce contexte a valu aux spécialistes français de jouer le rôle de précurseurs en matière de modélisation numérique de propagation d'ondes raides et d'acquérir l'expérience de modèles réduits de rupture, reproduisant la topographie réelle de situations où les hypothèses des premiers modèles filaires n'étaient plus vérifiées.

L'importante société française Coyne et Bellier a participé à cette évolution en se dotant d'un code unidimensionnel apte à calculer une propagation sur fond sec.

Le module NAIADÉ-R de Coyne et Bellier s'appuie sur la formulation par différences finies de Colin et Pochat, dans l'hypothèse d'un fond initialement sec. La formulation explicite à deux étapes du schéma de Lax Wendroff s'applique à l'écoulement sain, complété, pour l'établissement de sa condition limite aval, d'un calcul séparé du front d'onde inspirés des travaux de Chervet et Dallèves (Colin et Pochat).

Les différences marquées dans les options retenues pour effectuer ce calcul nous placent dans les meilleures conditions pour juger objectivement du champ d'action de la méthode développée.

Le contexte de la comparaison est une hypothèse de rupture progressive du barrage français de Bouzey en topographie réelle. Une évaluation préalable de la situation évolutive au niveau de la brèche a conclu à un hydrogramme au droit du barrage repris à la figure XIII.2.

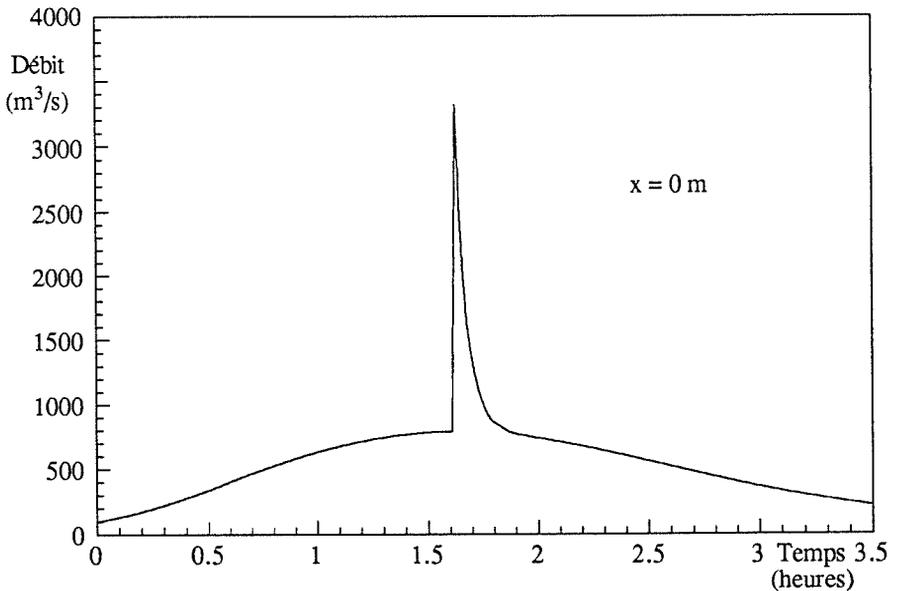


Figure XIII.2.
Evolution temporelle du débit imposé au droit du barrage ($x = 0$ m)

Ce flot doit se propager sur le fond supposé sec des 18 kilomètres de la vallée de l'Avière qui séparent le barrage de la confluence avec la Moselle.

Toutes les informations relatives à la description topographique de cette vallée furent fournies par Coyne et Bellier sous forme d'une série de doublets abscisses-cotes caractérisant chaque profil en travers.

Ce mode de définition pour les 20 sections caractéristiques laissait ainsi totale liberté à

chaque code pour établir ses propres relations utiles au calcul ainsi que pour définir par interpolation d'autres profils intermédiaires non caractérisés.

La représentation de ces données brutes à la figure XIII.3. laisse entrevoir d'importantes variations de profil avec une vallée plus encaissée qui succède aux élargissements des sections $x = 2000, 3050$ m.

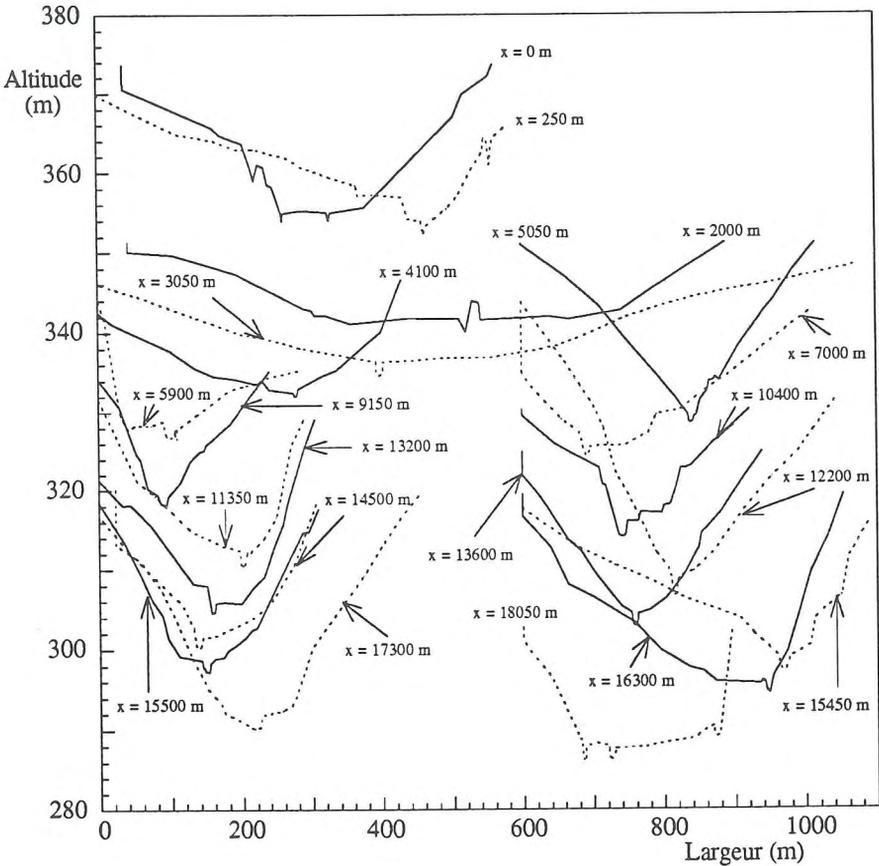


Figure XIII.3.
Coupes transversales dans la vallée de l'Avière, fournies par Coyne et Bellier

La distribution en long du coefficient de frottement repose sur une observation par Coyne et Bellier du type de couverture rencontré à chaque section. Elle s'établit par référence à une série de relations prédéfinies par un choix arbitraire, sinon empirique (puisqu'il déduit

d'aucune mesure ni observation), de critères qui lient le type de relief, la nature et densité de la végétation, la présence d'agglomérations à forte densité de constructions, à des valeurs volontairement sévères de coefficient de frottement.

Le respect de ces règles donne la répartition très différenciée de la figure XIII.4.

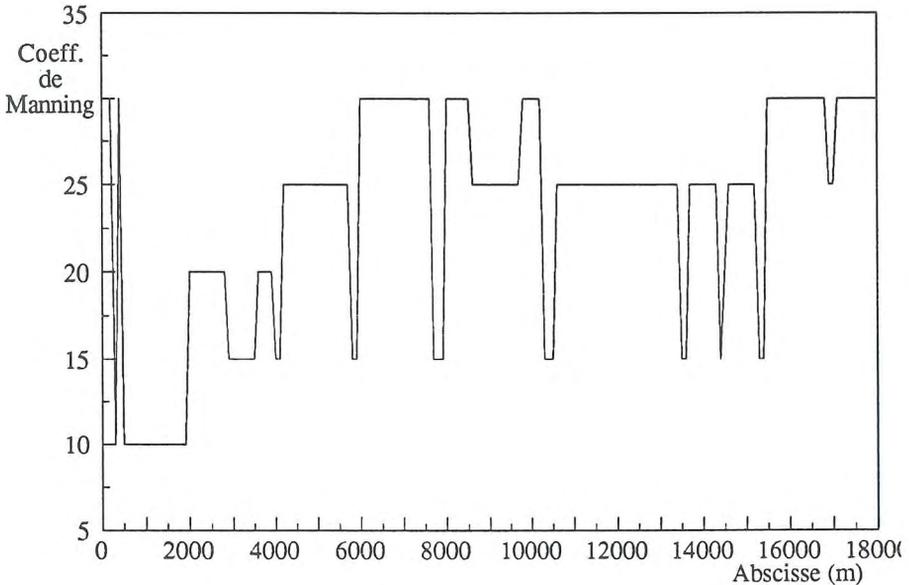


Figure XIII.4.
Répartition en long du coefficient de frottement de Manning

Coyne et Bellier a adopté pour sa simulation une maille spatiale régulière de 50 m et un pas temporel de 0,5 s. Les conditions limites se résument à l'imposition de l'hydrogramme à l'amont et au suivi instantané du front à l'aval.

Les résultats utiles à cette comparaison prennent la forme d'une cote instantanée toutes les 10 minutes de simulation aux différentes abscisses présentées aux figures XIII.8. à 11. Elles synthétisent la submersion de la vallée durant les 3,5 premières heures qui suivent le début du processus de ruine.

Le contexte limitatif dans lequel travaille la méthode proposée nous contraint à procéder à une phase préliminaire à la propagation proprement dite. Par opposition à une hauteur de lame fluide aval forfaitairement fixée et maintenue, nous avons dit notre préférence pour un calcul traditionnel de ligne d'eau stabilisée, évaluée pour un débit négligeable en regard des pics atteints.

Nous avons jugé qu'un débit initial de $5 \text{ m}^3/\text{s}$, soit un peu moins de 2 ‰ du pic au barrage répondait à cette imposition.

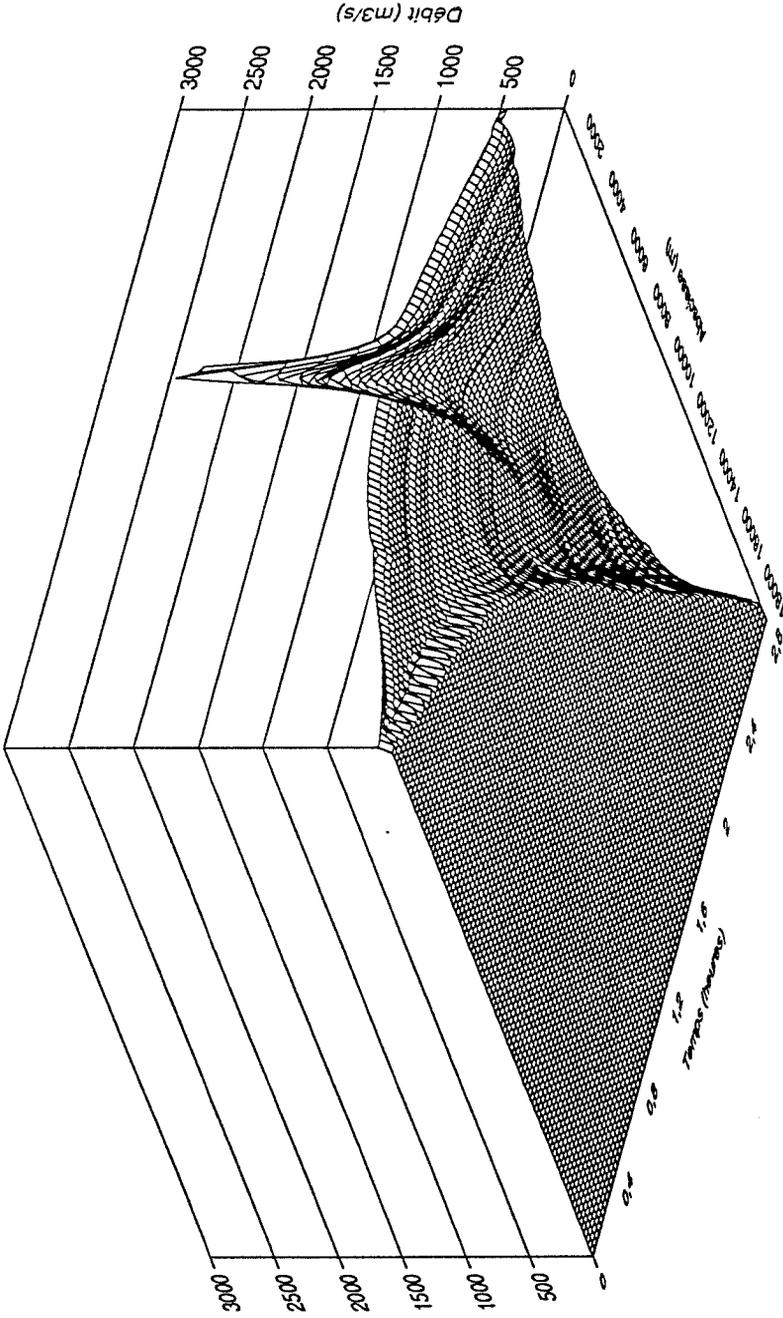


Figure XIII.5.
Evolution temporelle du débit sur l'ensemble de la topographie

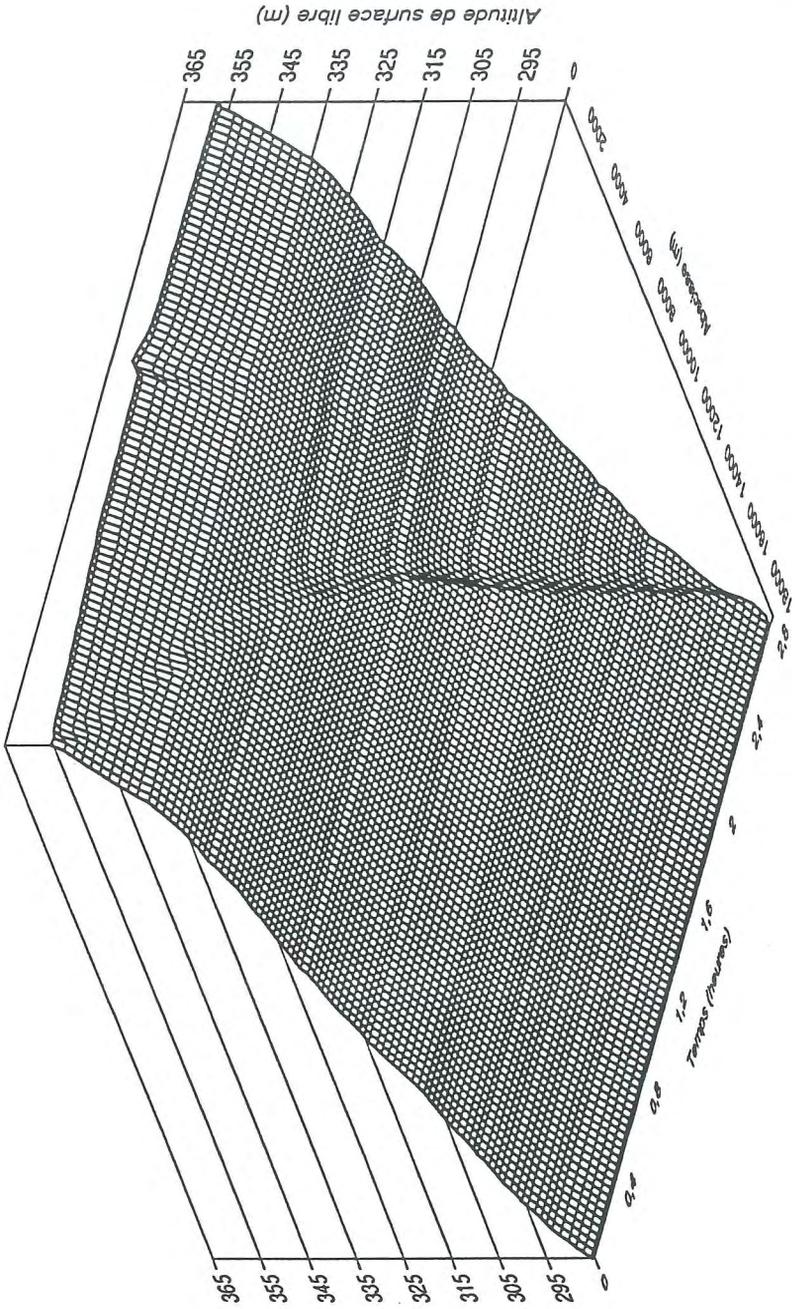


Figure XIII.6.
Evolution temporelle de l'altitude de surface libre sur l'ensemble de la topographie

Si le calcul préalable d'installation de la ligne d'eau s'effectue sur la géométrie initiale, avec des irrégularités de topographie combinées aux paramètres de frottement très différenciés, une situation stationnaire s'établit, caractérisée par des sections mouillées très variables qui n'atteignent jamais le pourcent des maxima atteints lors de la propagation.

Néanmoins, de l'étoitesse des fonds de vallée résultent, par endroits, des profondeurs locales initiales correspondantes peu utiles à l'interprétation finale de la simulation proprement dite.

Nous avons donc préféré conserver l'illusion d'une propagation sur fond sec et accélérer la phase initiale de calcul de ligne d'eau en présentant le bourrelet initial stabilisé de façon "souterraine". Un canal de section prismatique constante est alors aménagé fictivement sous le niveau bas de chaque section pour abriter la ligne initialement constituée avec ce profil. La section, négligeable en regard des maxima atteints, lui assure de ne jouer aucun rôle lors de la submersion, à l'exception peut-être des premières secondes du passage de l'onde, lorsqu'elle commence à remplir le profil réel correspondant.

Bien que nous ayons vérifié la validité de cette approche sur des simulations simplifiées, nous profiterons de cette comparaison pour confirmer qu'elle n'induit aucune conséquence visible pour l'interprétation des résultats.

De cette façon, bien que nous ayons stabilisé la situation initiale pour travailler de façon correcte avec le système de maillage progressif, aucune lame n'apparaît à l'origine des figures comparatives de hauteurs instantanées.

L'ensemble de la simulation par éléments finis a été menée sur une discrétisation spatiale plus lâche que celle utilisée avec le code explicite, afin de conserver une certaine constance du pas $\Delta x = 100$ m dans l'ensemble de nos simulations en site réel. Cette valeur correspond par ailleurs à la norme recommandée pour ce type d'étude (Groupe de Travail du Comité français des Grands Barrages).

La stabilité accrue des schémas implicites se traduit dans notre choix d'un pas temporel largement supérieur avec $\Delta t = 4$ s. Il s'est imposé comme meilleur compromis au sens du nombre total d'itérations, même si des valeurs supérieures sauvegardaient aisément les propriétés de convergence du schéma.

Examinons d'abord globalement le processus en observant les évolutions temporelles sur l'ensemble de la topographie, du débit pour la figure XIII.5., enfin de l'altitude de surface libre pour la figure XIII.6.

On constate d'abord la rapide extinction du pic de débit à la figure XIII.5. Au départ d'un débit excédant les $3000 \text{ m}^3/\text{s}$, on retrouve, à l'issue de 2 heures de propagation, des valeurs maximales ne dépassant plus les $1200 \text{ m}^3/\text{s}$.

Le tracé de quelques lignes instantanées de débit à la figure XIII.7. confirme le lissage rapide de l'onde principale qui, en se propageant plus vite que les ondes de débits lâchés à l'initiation du phénomène de rupture, rattrape et accentue le front de propagation.

Le raffermissement du front au cours de la propagation s'observe également à la figure XIII.6. Contrairement aux ruptures brusques où le front se trouve progressivement lissé sous l'action du frottement, nous constatons que le processus se trouve assez rapidement

conditionné par l'action prédominante du pic qui n'est pourtant introduit que 1h 30' après l'initiation du phénomène de ruine de l'ouvrage.

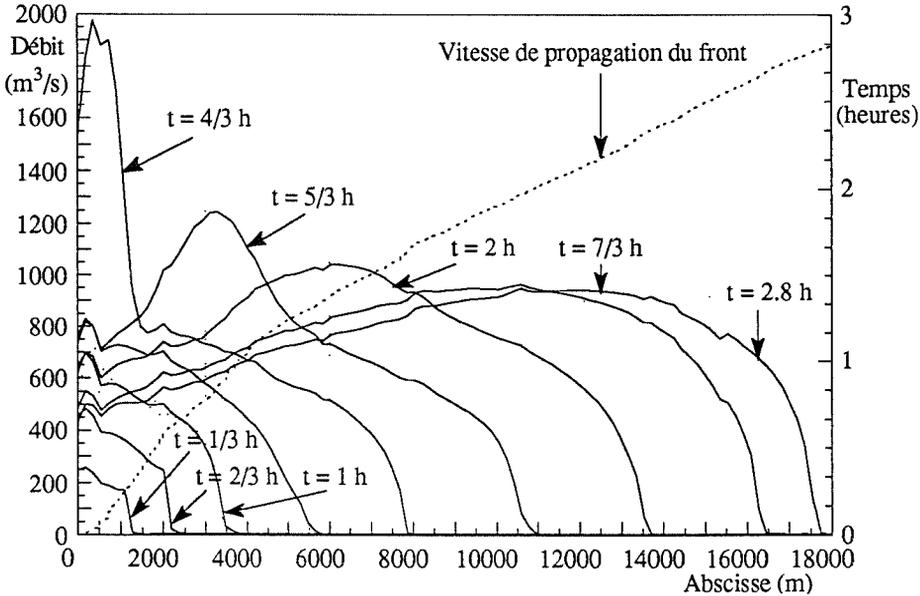


Figure XIII.7.
Lignes instantanées de débit sur l'ensemble de la topographie
et vitesse instantanée de propagation du front

L'accroissement progressif des valeurs au front joue également un rôle dans le second accroissement des vitesses de propagation du front présentées à la figure XIII.7. Cette seconde variation principale se marque imperceptiblement aux environs de la deuxième heure de propagation pour donner une vitesse moyenne sur la dernière heure d'approximativement 2,4 m/s.

Mais l'infléchissement le plus sensible de la courbe de propagation se produit au terme de la première heure de propagation. Cette évolution d'une vitesse moyenne approximative de 1 m/s à 2 m/s semble pourtant aller à l'encontre d'une pente de fond plus accentuée en amont du profil en long (figure XIII.5.) qu'à l'aval.

Elle trahit l'importante action d'un frottement très marqué sur les premiers 2000 mètres et, dans une moindre mesure, sur les 4000 premiers mètres, qui ne fait que confirmer les tests de sensibilité déjà cités de Benoist et al concernant l'influence du frottement sur la célérité du front.

Cette discussion sur la vitesse du front nous ramène au principal objet de cette application qui concerne l'influence d'une modélisation sur fond sec ou humide.

Les figures XIII.8. à 11. qui s'intéressent à l'évolution temporelle des hauteur et débit en des abscisses $x = 2000, 3000, 5900, 10400, 14500$ et 17300 m attestent de l'excellente correspondance générale des résultats.

- Elle se traduit d'abord dans des vitesses de propagation très comparables qui ne montrent aucune influence de la lame initiale dans le cas du code éléments finis. La différence de discrétisation spatiale ne joue pas davantage de rôle décisif sur ce point.
- Le travail propre à chaque logiciel pour gérer ses données topographiques n'est à l'origine d'aucune divergence marquée sur les résultats de hauteurs instantanées. Sur cette même base se trouvent validées les interpolations respectives pour reconstituer la géométrie aux abscisses non initialement caractérisées. Enfin, l'hypothèse adoptée pour l'établissement de la ligne d'eau initiale ne se solde par aucune imprécision ou modification de l'allure générale des courbes de hauteurs d'eau.

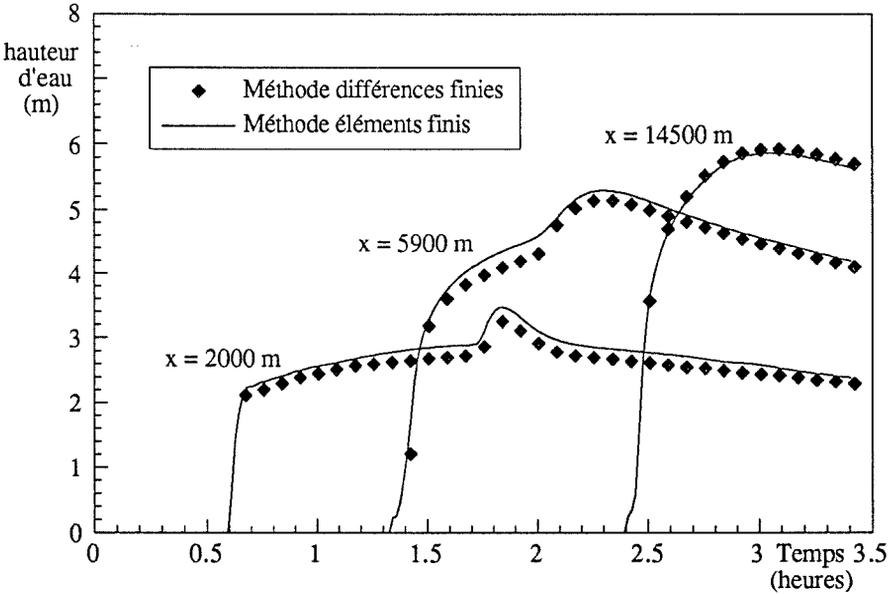


Figure XIII.8.
Evolution temporelle de la hauteur d'eau en $x = 2000, 5900, 14500$ m

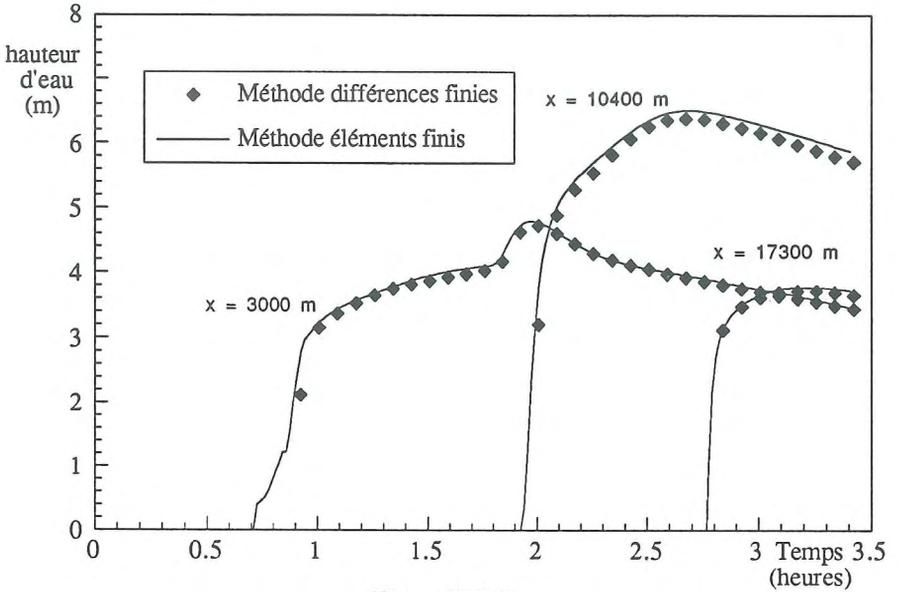


Figure XIII.9.
Evolution temporelle de la hauteur d'eau en $x = 3000, 10400, 17300$ m

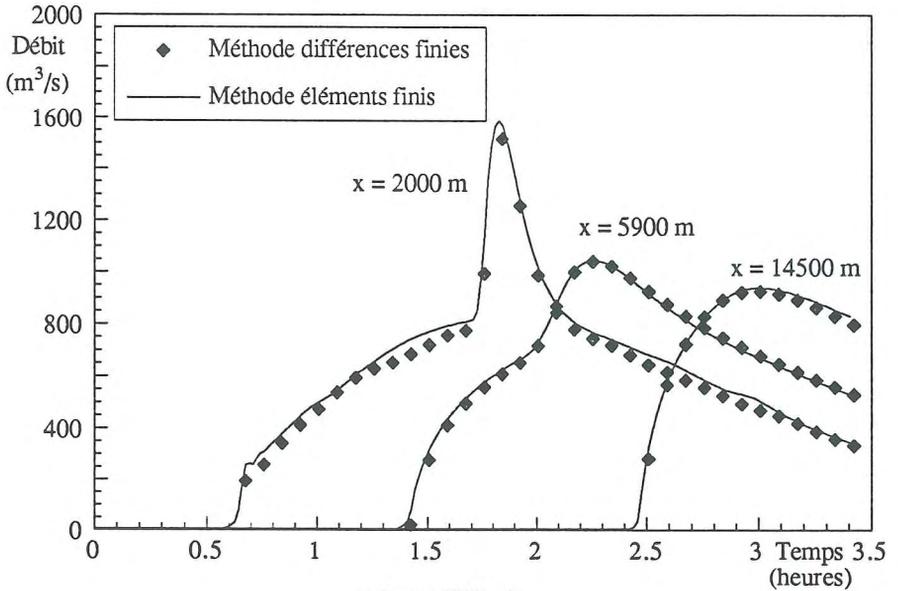


Figure XIII.10.
Evolution temporelle du débit en $x = 2000, 5900, 14500$ m

- On remarquera que les sections test choisies coïncident avec des modifications des conditions de frottement, ce qui ne fait que renforcer la valeur des comparaisons.

Néanmoins, c'est à cette conjonction de transitions plus graduelles des coefficients sur une discrétisation moins fine qu'on peut imputer les faibles écarts dans les courbes de hauteur qui apparaissent notamment en $x = 5900$ m.

Nous transposerons les propos de Colin et al à notre comparaison en constatant que ces légers écarts sont de toute manière sans aucune commune mesure avec ceux que pourraient créer des erreurs dans la fixation des paramètres physiques de la modélisation.

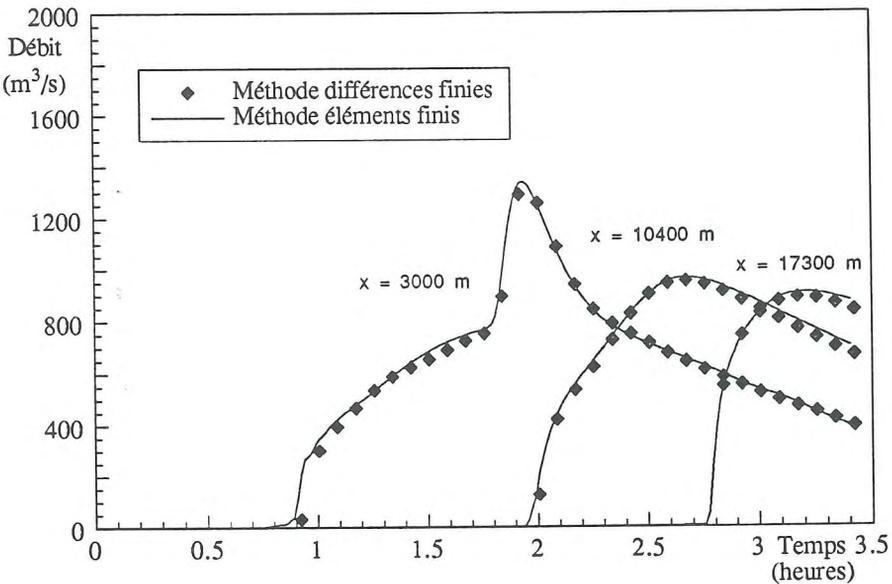


Figure XIII.11.
Evolution temporelle du débit en $x = 3000, 10400, 17300$ m

En conclusion, la comparaison avec le code éprouvé développé par Coyne et Béliier établit qu'il n'existe pas de divergence de résultats lorsqu'on propage sur une fine lame initiale stabilisée.

La solution théorique de propagation sur fond sec, donnant une vitesse de progression très rapide, ne peut être valablement adoptée que pour des laps de temps très réduits après la rupture. La forme de surface libre établie par Ritter se voit également considérablement modifiée dans la réalité par l'influence du frottement. L'expérience montre que le front se présente alors comme un bourrelet à tangente verticale progressant à une vitesse sensiblement inférieure à son correspondant théorique établi sans frottement.

C'est donc l'importance de ce dernier qui réconcilie les deux approches distinctes et permet d'étendre les résultats de notre code à l'établissement général de cartes d'inondation et de plans d'urgence. Le caractère volontairement généraliste du code développé ne se répercute ainsi que par une phase préalable supplémentaire de mise en place de ligne d'eau, dont la comparaison vient de confirmer la validité de construction.

En conséquence, l'économie réalisée d'abord avec l'utilisation du maillage progressif, enfin avec le recours à de larges pas de temps caractéristiques des méthodes implicites, rend la méthode d'autant plus séduisante pour ce type de modélisation que le bilan volumique global confirme une erreur relative infime de 4×10^{-4} par rapport au volume total injecté à l'amont.

XIII.4. MODELISATION INSTATIONNAIRE DE LA FORMATION D'UN RESSAUT

La fiabilité désormais établie de la méthode en géométrie quelconque, jointe à la portée des résultats de propagation lorsque le schéma travaille sur une fine lame initiale, destine logiquement le logiciel à une simulation originale sur site belge.

Auparavant, nous concluons sur la commodité d'utilisation de la méthode par un dernier exemple qui s'attarde sur le caractère instationnaire des discontinuités à reproduire en conditions réelles.

Certes, la propagation d'un front correctement simulée constitue une des preuves les plus tangibles d'une cohabitation bien maîtrisée numériquement de régimes infra et supercritiques avec transition évolutive. Néanmoins, on peut s'interroger sur les réactions du logiciel lorsque les particularités topographiques de la vallée sont le théâtre de créations, de déplacements ou d'extinction de discontinuités.

Les premières applications ont établi l'exactitude des résultats pour le déplacement d'un choc entretenu. Quant aux profils rencontrés sur le site français, leur combinaison avec la distribution en long du frottement n'a pu nous placer, sur ce point, dans des conditions favorables pour induire et déplacer des ressauts.

Nous profitons donc d'une situation très classique d'écoulement de surface pour compléter les investigations préalables en examinant comment se comporte le logiciel lorsqu'il est confronté, au sein de son domaine de modélisation, à des conditions variables qui impliquent des modifications locales du régime d'écoulement.

Le fond d'un canal rectangulaire large de 10 m connaît une succession de trois pentes, respectivement de 10^{-2} m/m, $5 \cdot 10^{-2}$ m/m et 10^{-2} m/m. Chaque tronçon, d'une égale longueur de 100 m, possède un fini de surface lui assurant un coefficient de frottement constant de $n = 0,04$.

Dans une première phase, nous examinerons le problème sous la forme de deux états stationnaires indépendants, sous l'emprise toutefois d'une régulation aval commune qui maintient invariablement une profondeur aval constante de 7 m. Le niveau amont ne subit quant à lui aucune imposition.

Analysons la forme de surface libre obtenue dans chaque cas en adoptant un raisonnement typique aux tracés de ligne d'eau.

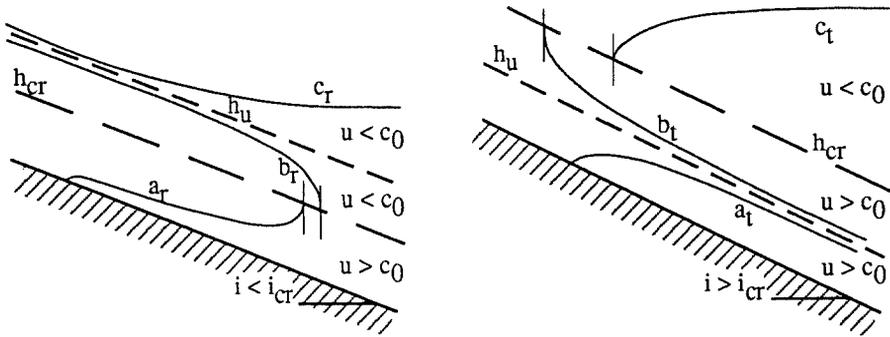


Figure XIII.12.
Lignes d'eau possibles en écoulement infracritique ou torrentiel

Dans le premier état, nous combinons la profondeur aval imposée avec un débit faible pour noyer l'ensemble de la topographie sous une ligne d'eau quasi-horizontale. Avec $5 \text{ m}^3/\text{s}$, le profil de surface libre ne s'incurve de façon visible, pour compenser l'effet du frottement, que sur le tronçon amont où les faibles profondeurs induisent des vitesses plus importantes.

Examinons l'écoulement sous l'éclairage des positions relatives qu'occupent d'une part la hauteur critique commune aux trois pentes ($h_{cr} = 0,294 \text{ m}$), les hauteurs uniformes ($h_u = 0,393 \text{ m}, 0,293 \text{ m}, 0,393 \text{ m}$), enfin la hauteur aval imposée. Par analyse des lignes d'eau possibles rappelées à la figure XIII.12., nous concluons que le tracé débute de l'aval par un segment de type c_r , se prolonge par un segment de type c_t qui sait remonter en infracritique jusqu'à la première rupture de pente où nous retrouvons à nouveau le type c_r .

L'inversion des positions relatives de h_u et h_{cr} en passant d'un tronçon à l'autre suggère une situation plus intéressante que nous forçons dans le second état. Avec un débit de $100 \text{ m}^3/\text{s}$, nous obtenons une ligne plus caractéristique de ce type de géométrie.

La position relative des nouvelles hauteurs critique ($h_{cr} = 2,168 \text{ m}$) et uniformes ($h_u = 2,735, 1,583 \text{ m}, 2,735 \text{ m}$) demeure inchangée. Mais si la hauteur aval impose à nouveau de remonter par une ligne aval de type c_r , le débit est cette fois trop important pour la voir se prolonger jusqu'à la première transition par une ligne aval de type c_t .

Repartons donc du premier tronçon qui, s'il avait une longueur "suffisante", ferait tendre sa ligne locale vers une hauteur uniforme, installant ainsi un régime infracritique avec une ligne aval. La même hypothèse transposée au second tronçon ferait tendre irrémédiablement cette fois l'écoulement vers un régime torrentiel, compte tenu de $h_u < h_{cr}$. Nous en déduisons que la seule manière d'assurer un raccord continu des lignes est

de choisir une ligne de type b_T pour le premier tronçon amont, suivie d'une ligne de type b_T pour une partie du second.

On en conclut alors que l'abscisse de la première rupture de pente est caractéristique d'un état critique ($Fr = 1$), avec une tangente à la surface libre qui est verticale, comme le suggèrent les tracés de la figure XIII.12. La confrontation des régimes différents qui prévalent dans les deux derniers tronçons implique enfin de procéder à l'examen des hauteurs conjuguées afin de positionner correctement leur transition, c'est à dire le ressaut.

Cette dernière évaluation positionne le ressaut dans le second tronçon, assurant donc d'amont vers l'aval des lignes de type b_T et c_T .

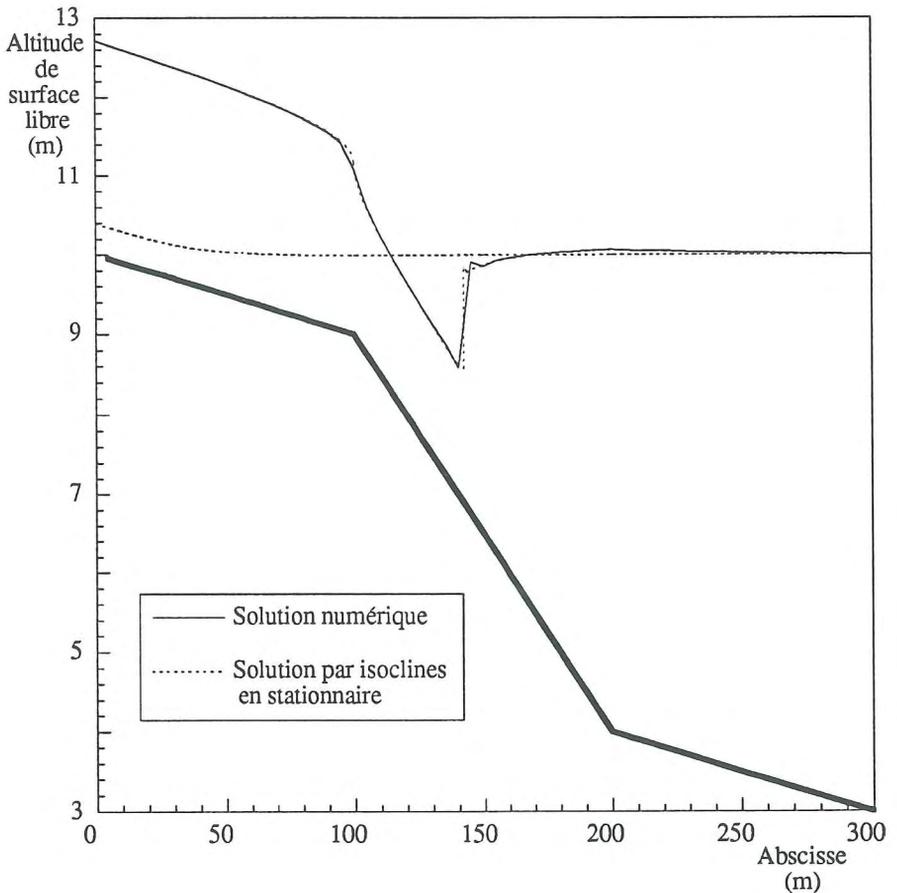


Figure XIII.13.
Lignes d'eau stabilisées à l'origine et à l'issue de la modélisation

Quel que soit leur degré d'automatisation, les logiciels de tracé de lignes d'eau par isoclines ou par simples différences finies agissent en trois étapes distinctes (de Kosinsky).

Partant de l'aval pour le tracé, ils remontent jusqu'à respecter la condition de hauteurs conjuguées avec la ligne amont tracée du point de hauteur critique, au droit de la première rupture de pente. Enfin de ce même point se trace vers l'amont le dernier segment de ligne de type aval.

Les deux états décrits sont représentés à la figure XIII.13. R.Mathieu a établi ces résultats par la méthode des isoclines, sur base d'un incrément de hauteur d'eau variant de 0,001 à 0,05 m en fonction de la courbure de la ligne d'eau.

De l'ensemble des étapes décrites pour la réalisation de ces tracés, nous retiendrons la situation volontairement introduite d'une ligne aval à chaque extrémité du modèle.

Ajoutons enfin qu'un certain bon sens doit orienter l'ordonnement du calcul, définissant des points caractéristiques internes et orientant le sens de progression suivant la ligne à construire.

Nous allons voir que l'approche instationnaire par la méthode proposée ne s'embarrasse pas de ces considérations.

Nous allons devoir choisir un premier chemin instationnaire pour installer le premier état recherché. Ainsi, nous décidons de progresser d'une surface libre parfaitement horizontale fixée à la valeur aval imposée et d'une distribution uniforme de débit imposé à la valeur recherchée.

L'état infracritique qui prévaut aux extrémités ne nous impose qu'une condition invariable de débit à l'amont du domaine et une pour la hauteur à l'aval. Nous laissons évoluer librement le système discrétisé par 60 éléments linéaires égaux par pas temporels de 0,0625 s. Les décentrement spatial et temporel respectent les critères précédemment établis.

A l'issue des 1000 pas qui servent à la mise en charge essentiellement de l'amont de la ligne comme décrit précédemment, nous obtenons la comparaison des surfaces libres donnée à la figure XIII.13. Les différences y sont si minimes qu'il est difficile de les différencier à l'échelle du dessin.

Pour le tracé des figures, nous supposons que cet état stabilisé marque réellement le départ de la modélisation et qu'il est donc représentatif du temps 0.

Sur base de ce premier état parfaitement reconstitué, nous assurons une transition vers le second état en imposant des conditions variables adéquates à l'extrémité amont. En particulier, la transition linéaire du débit par rapport au temps, de $5 \text{ m}^3/\text{s}$ à $100 \text{ m}^3/\text{s}$, sera suffisamment graduelle pour garantir qu'un état infracritique subside à tout moment à cette extrémité.

Dans le cas contraire, l'imposition d'une condition supplémentaire de hauteur, imputable à l'orientation des deux familles de caractéristiques du système, nous apparaissait comme un conditionnement du système.

C'est donc dans une liberté maximale que le système est amené à réagir à une succession de situations internes qui le contraignent tôt ou tard, pour respecter la solution théorique, à installer en son sein un ressaut.

Au terme d'une transition de débit amont assurée sur 93,75 s, suivie d'une stabilisation de 156,25 s, nous obtenons la ligne stationnaire de la figure XIII.13. qui est comparée à son homologue par isoclines.

Nous constatons que le schéma a correctement assimilé les divers régimes, en les faisant cohabiter sans manifester d'oscillation parasite prononcée. En particulier, nous noterons que la situation de hauteur critique au droit de la première rupture de pente est correctement reproduite.

Quant au principal objet d'intérêt qu'est la création d'un ressaut, nous le découvrons à la fois correctement situé en abscisse, suffisamment raide pour cantonner la transition sur une maille et l'assurer entre deux hauteurs conjuguées qui correspondent à la théorie.

Nous voyons donc qu'au sein d'un domaine limité par des conditions représentatives d'écoulements locaux infracritiques, le logiciel a pu gérer des circonstances internes menant à la formation de discontinuités correctement simulées.

Mais bien plus que d'obtenir la structure complète de la solution stabilisée, sans aucune préoccupation des phénomènes qui peuvent s'installer, la figure XIII.14. révèle toute l'information instationnaire du chemin suivi, avec notamment la réflexion de l'onde de hauteur sur l'extrémité aval. Elle remonte vers l'amont jusqu'à buter sur l'installation du régime torrentiel dans l'amont du second tronçon, pour s'évanouir progressivement sous l'effet du frottement.

Terminons cette application en rappelant d'une part que ce type de phénomène est amené à se reproduire dans les circonstances les plus générales de topographie irrégulière, de distribution de frottement ou d'inégale répartition de vitesse, ..., que lui autorise le contexte développé pour le logiciel et que, d'autre part, son comportement a également fait l'objet de tests sur des géométries irrégulières (canal divergent, Bhallamudi et al).

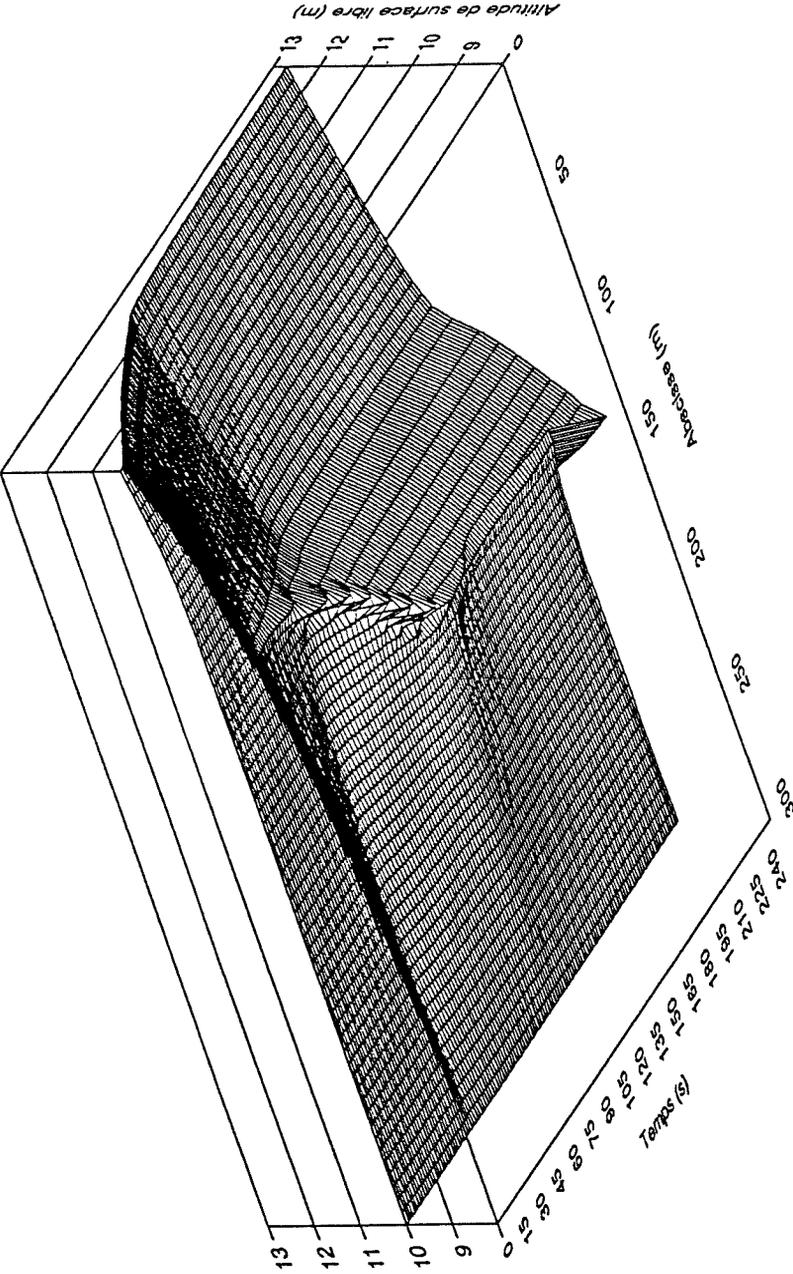


Figure XIII.14.
Evolution temporelle de l'altitude de surface libre avec formation de ressaut

XIII.5. CONCLUSION

En s'orientant vers des applications réalistes, le chapitre XIII met un terme aux développements théoriques et aux expérimentations numériques menés pour rencontrer tous les buts initialement fixés pour ce travail.

Il achève de mettre en place et de valider tous les aspects d'une approche unidimensionnelle qui ouvre, par sa mise en oeuvre aisée et générale, de larges perspectives d'utilisation. Nous en avons suggéré certaines tout au long de l'extension progressive des capacités du modèle.

A l'instar de l'approche hydrologique de la première partie, retenons que sa base théorique présente également des hypothèses dont les caractéristiques restrictives, étroitement liées au type de phénomène à représenter, doivent suggérer une interprétation adéquate des résultats.

Entre des modélisations d'opérations routinières perturbant l'écoulement d'un réseau quelconque et des propagations d'onde de rupture en topographiques réelles potentiellement ramifiées, la première raison d'être du modèle filaire, par son aspect hydrologique de propagation de déversements latéraux, n'a trouvé d'autre prolongement qu'une prise en compte théorique des apports au sein de la résolution de l'équation de continuité.

Nous allons donc, au propre comme au figuré, opérer un dernier retour aux sources et procéder à une application hydrologique complète sur une topographie quasi-tridimensionnelle drainée par des ramifications filaires.

Elle concrétisera le couplage des modèles numériques.

Partie III

Couplage des modèles et modélisation de la rupture brusque d'un grand barrage belge

SOMMAIRE

- CHAPITRE XIV* *Couplage des modèles dans une modélisation d'écoulement sur le bassin du Blanc Gravier*
- CHAPITRE XV* *Modélisation de l'écoulement consécutif à la rupture du barrage de la Vesdre à Eupen*
- CHAPITRE XVI* *Conclusion générale*

Chapitre XIV

Couplage des modèles dans une modélisation d'écoulement sur le bassin du Blanc Gravier

SOMMAIRE

- XIV.1. *Introduction*
- XIV.2. *Phases topographiques préalables aux modélisations d'écoulement sur le bassin du Blanc Gravier*
- XIV.3. *Modélisations d'écoulement en fine lame*
- XIV.4. *Propagation en réseau filaire des diagrammes de débits latéraux*
- XIV.5. *Conclusion*

XIV.1. INTRODUCTION

L'idée d'entreprendre des études hydrologique et hydrogéologique du domaine du Sart Tilman fut émise pratiquement dès son acquisition par l'Université de Liège. Elle visait à préciser ses ressources en eau, à en établir le bilan et à déterminer l'influence, sur le cycle originel de l'eau, de l'implantation du Campus Universitaire. Cette suggestion revêtait également un caractère économique par le rôle que joue la connaissance des caractéristiques hydrologiques et hydrogéologiques dans les projets de modification du site.

Elle s'est finalement concrétisée par une étude systématique du bassin versant du ruisseau du Blanc Gravier, dont l'analyse exhaustive est rapportée dans deux mémoires (Calement et al, Eskénazi).

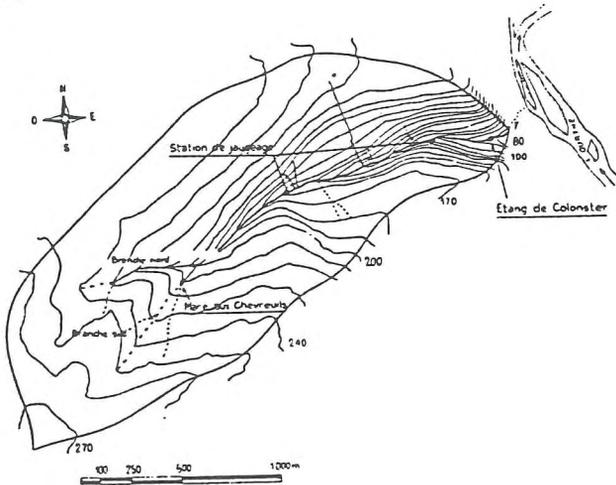


Figure XIV.1.
Réseau hydrographique du bassin versant du Blanc Gravier
(selon Eskénazi)

Le Blanc Gravier prend sa source dans le domaine universitaire à la cote approximative de 250 m et se jette dans l'Ourthe à la cote de 72 m. La superficie, projetée horizontalement, du bassin topographique de ce ruisseau et de ses affluents est estimée à 228 ha. Les études précédemment citées ont montré qu'il s'agissait d'un bassin modeste, à débits assez

faibles, imputables à la couverture végétale dense et aux pertes significatives par infiltration.

Sa bonne connaissance et la campagne prolongée de mesures dont il a fait l'objet le désignent comme site idéal d'application pour illustrer et enchaîner l'ensemble des raisonnements développés.

Plus précisément, nous suivons l'expérience de Eskénazi dans son choix d'une averse brève et isolée donnant toute garantie d'un hydrogramme résultant non influencé par les précipitations antérieures.

Le hétérogramme sélectionné (figure XIV.2.) illustre la forte intensité de pluie à précipiter sur le modèle. Il provient du dépouillement des mesures d'un pluviographe journalier placé sur le bassin. Le pic observé et son isolement dans le temps garantissent que l'hydrogramme mesuré à l'exutoire du bassin résulte en grande partie du ruissellement superficiel qui retient notre attention dans ce travail.

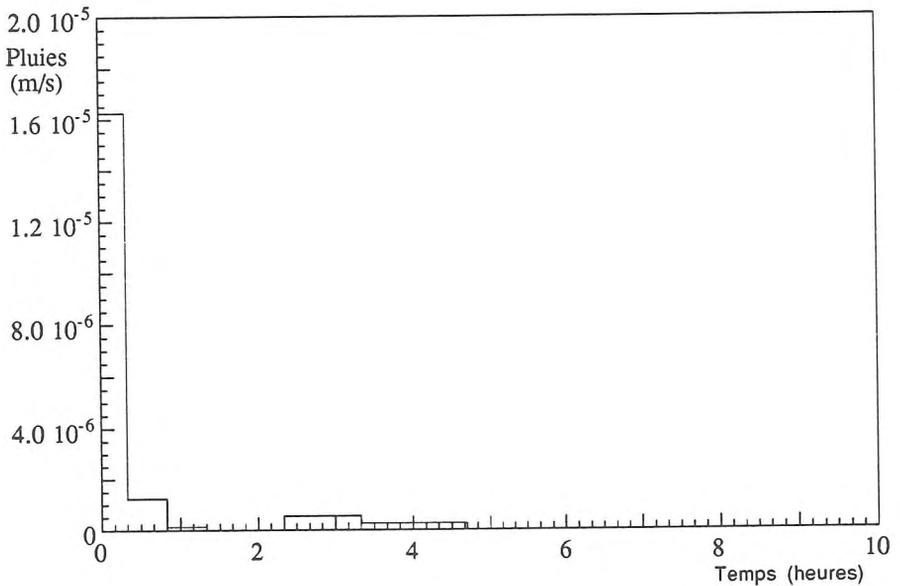


Figure XIV.2.
Hétérogramme mesuré sur le bassin du Blanc Gravier

La seconde mesure indispensable pour cette confrontation, l'hydrogramme résultant à l'exutoire, provient d'une station de jaugeage constituée d'un canal de Parshall métallique (Calembert et al). L'hydrogramme global correspondant à la pluie sélectionnée est illustré à la figure XIV.3. Pour une future comparaison avec la modélisation, nous en avons extrait la composante de ruissellement direct.

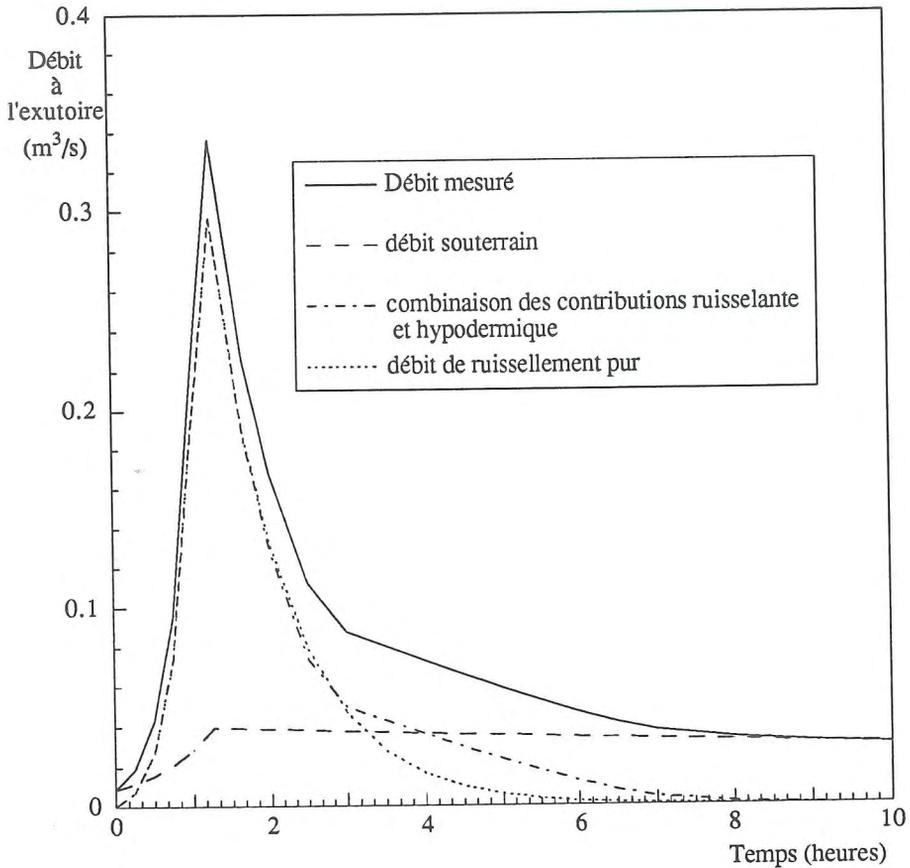


Figure XIV.3.
Hydrogramme mesuré à la station de jaugeage

Pour séparer cette fraction des écoulements hypodermique et souterrain, nous recourons à l'observation traditionnelle, en coordonnées semi-logarithmiques, d'une double rupture de pente dans la phase de récession de l'hydrogramme. La première marque la séparation du ruissellement et de l'écoulement hypodermique, la seconde indique la séparation entre ce dernier et l'écoulement de base.

Dans un premier temps, nous isolons la courbe de décroissance de l'écoulement souterrain en prolongeant vers la pointe de crue la partie terminale de l'hydrogramme global (segment de droite en coordonnées semi-logarithmiques). En admettant que la courbe de croissance de l'écoulement souterrain a également une forme exponentielle, on peut tracer un segment représentatif de la phase de croissance du débit souterrain (Eskénazi).

La différence des ordonnées de l'hydrogramme global mesuré et de celui de l'écoulement souterrain reconstitué nous donne un diagramme qui subit à nouveau un traitement analogue pour isoler la contribution hypodermique. La séparation complète, ramenée en coordonnées cartésiennes, nous rend le diagramme de la figure XIV.3.

La résultante purement ruisselante, si elle présente une incertitude inhérente au procédé de séparation, n'en donne pas moins certains ordres de grandeurs significatifs pour un jugement global du logiciel développé.

XIV.2. PHASES TOPOGRAPHIQUES PREALABLES AUX MODELISATIONS D'ÉCOULEMENT SUR LE BASSIN DU BLANC GRAVIER

L'ensemble des études publiées sur le domaine, ainsi que la proximité des lieux, nous placent nécessairement en terrain connu. Nous appliquerons cependant la méthode de la façon la plus objective possible en respectant la succession classique des différentes phases, lesquelles sont censées tout ignorer de la géométrie.

Ainsi, nous supposons ne disposer à l'origine que d'un nuage tridimensionnel de 917 points présumés englober le bassin à étudier, ainsi que d'une description du réseau filaire de ruisseaux qui le drainent, donnée par une succession de noeuds.

Suivons les différentes phases résumées dans l'organigramme XIII.13.

1. Aucune représentation significative du terrain ne peut s'obtenir sans maillage sur les points. Nous débutons par cette étape en forçant la discrétisation à respecter, avec les côtés de ses éléments, la géométrie filaire du réseau.

Ainsi, après visualisation en plan des données topographiques brutes, nous partageons l'espace en 3 surfaces connexes à mailler, comme schématisé à la figure XIV.4. Cette opération très rapide est particulièrement commode à réaliser puisque l'ensemble des points est donné pour chaque surface, le mailleur ignorant ceux qui ne se trouvent pas à l'intérieur des frontières.

2. La réunion de ces trois maillages successifs nous rend une surface constituée de facettes qui se prête bien à une analyse de la topographie, par représentation tridimensionnelle du bassin versant, comme l'illustre la figure XIV.6., ou par construction des lignes de niveau (figure XIV.7.).

Elle définit surtout le support commun à toutes les opérations futures menées sur le bassin et, en particulier, la première qui consiste en une limitation topographique des zones impliquées dans le calcul d'écoulement pour un exutoire A situé à aval du réseau de ruisseaux.

- La procédure de détermination du bassin versant peut s'appliquer sans discernement sur le segment le plus aval du réseau filaire.

En donnant comme segments de base les deux "faces" du segment AB
→ →
(AB et BA), la procédure BASVERS (procédure de détermination de bassin versant développée au paragraphe VIII.3.) va effectuer ses tests sur les pentes des facettes planes pour étendre progressivement son emprise sur l'ensemble du bassin.

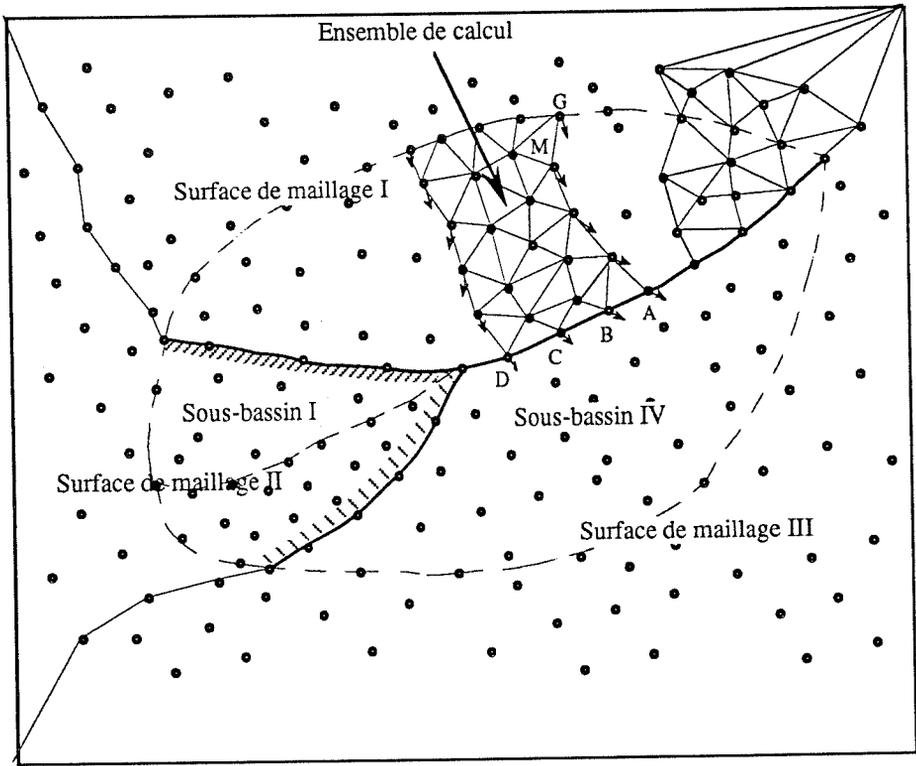


Figure XIV.4.
Schématisation des données et des différentes phases préalables aux modélisations d'écoulement hydrologique consécutif à une pluie

Cette procédure, qui travaille sur un champ discontinu de pentes, se termine lorsqu'elle ne trouve plus de triangles possédant une "pente entrante" par rapport à la frontière instantanée qu'elle a progressivement construit et qui enserre l'ensemble du bassin présenté en plan à la figure XIV.5.

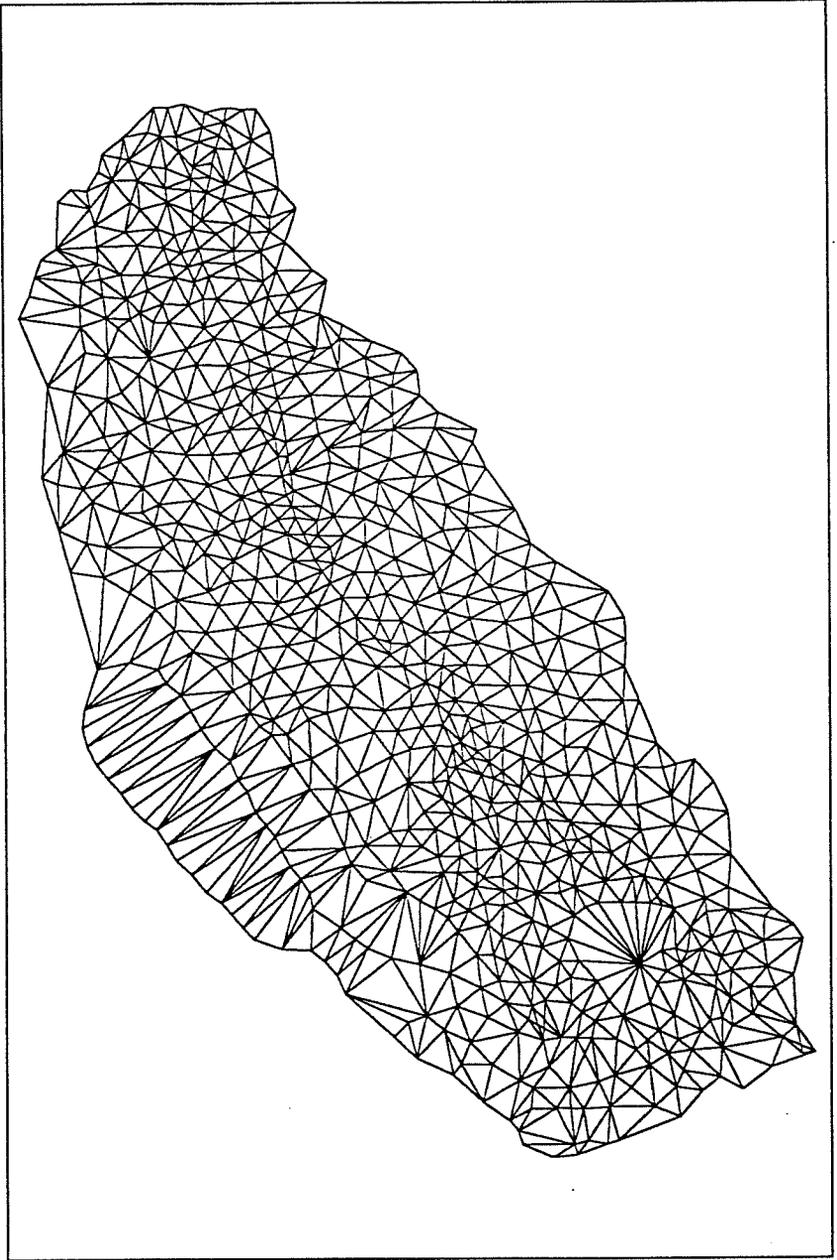


Figure XIV.5.
Projection en plan de l'ensemble du bassin versant du Blanc Gravier

En impliquant un ensemble de 1423 triangles construits sur 698 points, pour une superficie totale de 226,7 hectares, elle délimite une zone qui correspond complètement aux relevés classiques sur carte à l'échelle, puisque l'exutoire adopté pour la simulation, en l'occurrence lieu du relevé de débit dans le Blanc Gravier, se situe nettement en amont du lieu de confluence avec l'Ourthe.

Si cette façon de travailler réclame un minimum de données initiales pour suggérer instantanément les surfaces à prendre en compte pour la suite des opérations, elle n'exploite pas toutes les potentialités du logiciel puisque, notamment, elle ne donne pas d'indication sur la situation de la crête de partage dans la zone topographique comprise entre les deux affluents. Nous verrons ultérieurement qu'elle est également peu adaptée à la phase de réalisation de la continuité aux noeuds.

Ainsi, nous allons respecter la chronologie de recherche fixée au paragraphe VIII.4., afin de fractionner le bassin en sous-domaines donnant toutes les informations indispensables à la fixation future des conditions limites. Il va de soi que leur réunion rend le domaine illustré à la figure XIV.5.

- Débutons la procédure de recherche en partant de l'aval des ramifications d'ordre le plus élevé. Nous recherchons plus précisément les éléments qui influencent successivement les rives hachurées à la figure XIV.4. des deux affluents du ruisseau principal. Rappelons que le logiciel BASVERS autorise des recherches limitées à une seule rive en initialisant sa mémoire de tests de segments analysés.

Nous obtenons alors deux premiers des "sous-bassins" représentés à la figure XIV.6 . En stockant progressivement tous les tests effectués pour établir ces deux premiers domaines, la procédure BASVERS poursuit sa recherche par l'analyse successive des rives du cours d'eau principal. La phase s'achève en rendant finalement 4 sous-domaines illustrés par cette même figure.

Avant de poursuivre ces phases préalables, nous nous arrêterons sur cette représentation tridimensionnelle de la figure XIV.6. qui illustre la topographie conservée à l'issue des phases de délimitation du bassin versant.

On y voit la séparation volontaire des éléments au droit des ramifications filaires, qui rappelle leur implication incontournable dans les phases de maillage et de partage en sous-bassins. L'exagération par un facteur 3 de l'échelle verticale suggère plus clairement le type de topographie étudiée, avec des pentes faibles aux sources des ramifications qui font place à des versants plus abrupts enserrant l'aval du cours principal.

Cette disposition géométrique contribue sans doute à une réponse rapide de l'hydrogramme à l'exutoire, consécutive à une pluie donnée, puisqu'à égalité des paramètres de frottement sur l'ensemble du bassin, les segments aval du cours d'eau seront plus promptement alimentés.

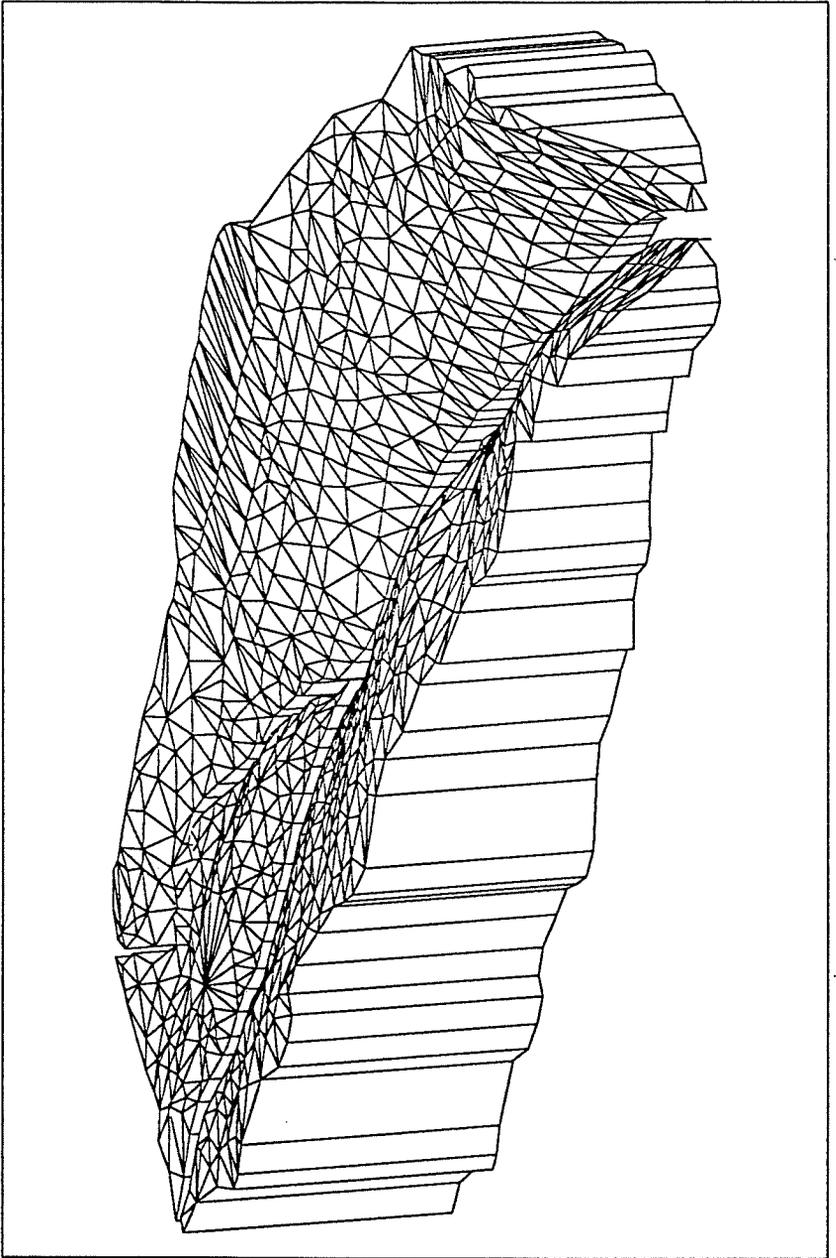


Figure XIV.6.
Représentation tridimensionnelle du bassin du Blanc Gravier avec ses 4 sous-bassins

Nous avons indiqué que le logiciel intègre à ce stade une possibilité graphique de visualisation des pentes de chaque facette, contribuant également, par la dimension et l'orientation des vecteurs tracés, à mieux appréhender la géométrie étudiée.

Néanmoins, nous lui préférons une autre représentation aussi suggestive avec la reconstitution des lignes de niveau par interpolation sur les facettes planes. Cette visualisation, illustrée à la figure XIV.7. pour le sous-bassin 4, nous permettra notamment d'évaluer la pertinence de la phase suivante de cette modélisation.

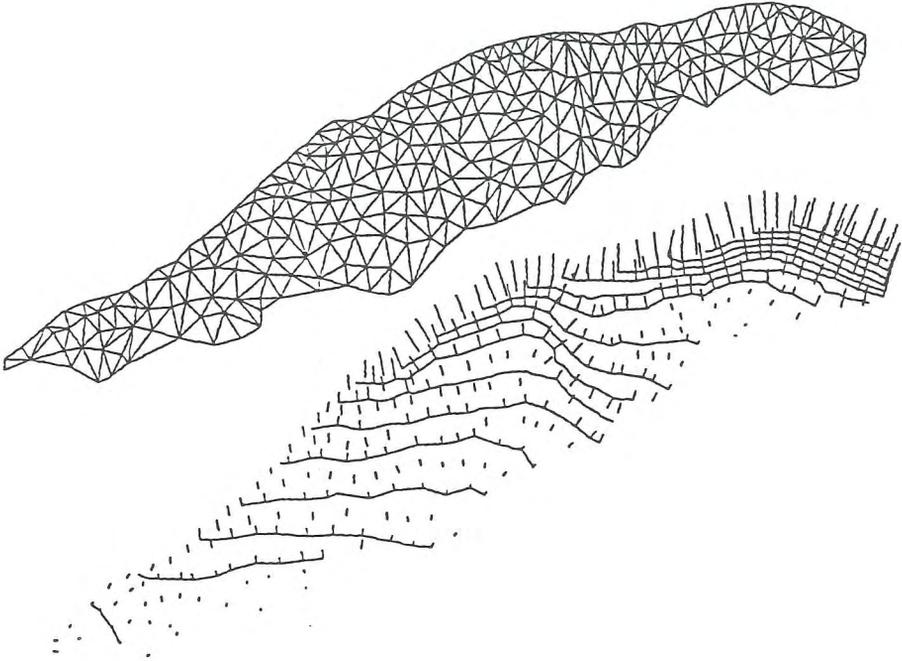


Figure XIV.7.

Comparaison des lignes de niveau reconstituées par interpolation sur les facettes planes et du champ continu des pentes définies aux noeuds de discrétisation

3. La délimitation des 4 zones influençant réellement l'hydrogramme à l'aval nous amène en effet à des préoccupations plus étroitement liées à l'aspect numérique de la modélisation d'écoulement de surface. Car si rien n'empêche a priori d'envisager une succession de simulations sur ces 4 bassins, elles ne pourront se réaliser qu'après avoir choisi une option pour réaliser la continuité des débits aux noeuds.

Nous ne reviendrons pas sur les raisons qui nous poussent, parmi les diverses possibilités existant au sein du logiciel, à choisir la voie d'une action préalable sur les données topographiques. Nous insisterons simplement sur l'importance primordiale de l'ordonnancement des phases de détermination des sous-bassins,

puisque la conversion séparée des données sur chaque sous-domaine leur assure de conserver les mêmes lieux d'imposition de condition aux limites, sans devoir modifier le maillage originel. En particulier, la ligne de crête obtenue par comparaison des frontières communes entre les sous-bassins 1 et 2 sera intégralement conservée si, sur chaque domaine, on procède, séparément pour chaque noeud, à une moyenne pondérée par la surface des pentes des triangles qui le contiennent.

Une vérification graphique de la direction résultante des vitesses aux noeuds avec les courbes de niveau établies à partir de la représentation originelle par facettes, nous montre que cette phase n'introduit pas d'incohérence manifeste et ne trahit pas la distribution initiale des irrégularités topographiques.

Elle a surtout le mérite de ne pas influencer sur les surfaces impliquées dans la modélisation, comme le vérifiera la phase ultérieure de morcellement des bassins. Rappelons encore que le modèle d'écoulement proprement dit n'est en rien lié à l'hypothèse adoptée pour cette conversion préalable et s'accommoderait de pentes obtenues par génération de surfaces complexes sur les points initiaux. La figure XIV.7. présente cette conversion pour le sous-bassin 4 du Blanc-Gravier.

Ce choix d'une préparation préalable aux simulations proprement dites nous dispense donc de travailler numériquement avec une variable supplémentaire. Il marquerait le terme des phases préalables aux simulations si chaque bassin avait une taille raisonnable pour être traité d'un seul tenant.

Si le problème ne se pose pas pour les ensembles 1 et 2, avec respectivement 99 et 71 noeuds, la taille des deux autres sous-bassins (369 noeuds pour le bassin 3 et 332 noeuds pour le 4) suggère un factionnement supplémentaire pour mieux s'accorder aux possibilités de la machine de type P.C. qui les prendra en charge.

4. Le module d'éclatement automatique d'un sous-bassin en plusieurs ensembles de calcul travaille, pour chacun d'entre eux, sur base d'un ensemble de segments de rivière imposés.

- Considérons, par exemple, la construction d'un seul ensemble élaboré sur les segments imposés AB, BC, CD de la figure XIV.4. Le logiciel délimite progressivement la zone topographique qui les influence en procédant sur le champ continu des pentes du sous-bassin considéré (par exemple le sous-bassin 1 de la figure XIV.6.). Elle s'assure que tout segment de la frontière construite qui ne s'identifie pas à une ligne de crête possède une pente normale sortante par rapport à la surface emprisonnée (voir le segment GM par exemple à la figure XIV.4.).

Ainsi s'élabore un "ensemble de calcul" qui inclut des fractions de ligne d'eau ininterrompues depuis leur limite amont. Cette précaution garantit, avec l'imposition de hauteurs nulles sur les lignes de crête, une série de problèmes numériques bien posés. La figure XIV.8. illustre l'ensemble n°5, ainsi que son champ de pentes aux noeuds.

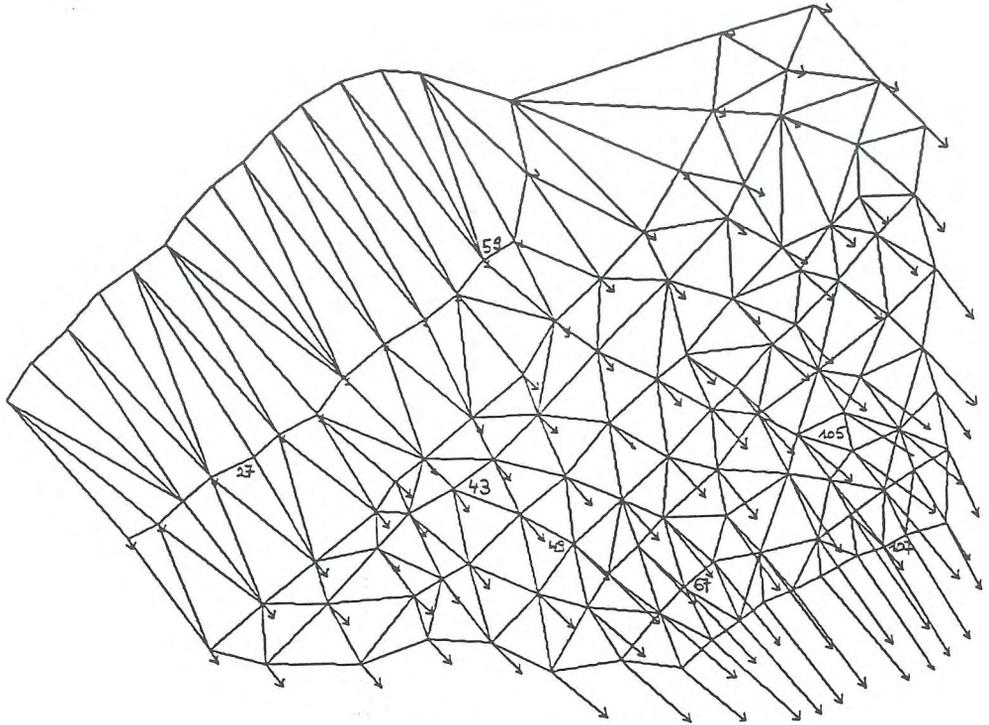


Figure XIV.8.

Projection en plan de l'élément de calcul n°5, avec son champ de pentes continues aux noeuds

- Dans chaque sous-bassin à morceler, la détermination de l'intégralité des ensembles de calcul s'effectue en considérant progressivement tous les segments de rivière par petits groupes séparés.

Deux ensembles de calcul successifs se construisent cependant au départ de deux listes de segments de rivière qui ont systématiquement deux de ces segments en commun. La nécessité du chevauchement, parfois considérable, qui en résulte, a été justifiée dans la partie théorique de ce travail. Nous nous bornerons à prouver que cette mise en commun est suffisante pour assurer une parfaite identité des résultats, dans chaque ensemble, pour le noeud central des segments partagés.

Le nombre de segments à la base de chaque construction est fixé de façon telle que le nombre d'inconnues nodales sélectionnées soit sensiblement constant pour chaque ensemble. Dans cette application, aucun d'entre eux n'implique un nombre d'inconnues supérieur à 150, choix arbitraire censé réaliser, pour la machine utilisée, un juste compromis entre une succession de modélisations brèves et le surcroît d'efforts numériques résultant du chevauchement des surfaces.

Même si cette description exhaustive des manipulations topographiques préalables apparaît longue et aride, leur réalisation informatique, complètement gérée par l'ensemble des procédures mises au point, les rend quasi-instantanées et extrêmement souples, tant dans le choix des dimensions finales que dans les possibilités de visualisations.

Du nuage de points, en passant par les sous-bassins et la conversion topographique, pour terminer par le partage final en ensembles de calcul, nous nous retrouvons finalement avec 16 ensembles autonomes présentant toutes les conditions requises pour une prise en charge correcte par le module d'écoulement hydrologique. La réunion de leurs vues en plan, reprises intégralement en annexe I, confirme le maintien de la surface d'influence initialement délimitée sur les facettes planes.

Plus rien ne s'oppose désormais à 16 modélisations séparées d'un écoulement de surface consécutif aux précipitations reprises à la figure XIV.2.

XIV.3. MODELISATIONS D'ECOULEMENT EN FINE LAME

Les différents fichiers générés n'attendent plus qu'une définition des propriétés morphologiques du terrain considéré. La fixation des valeurs adoptées résultera du sens que nous souhaitons donner à cette modélisation.

Nous avons développé un logiciel capable de répercuter n'importe quelle distribution, à l'échelle des éléments de discrétisation, tant pour les précipitations que pour les propriétés du sol. Mais l'absence de mesures de précipitations en des points variés du bassin nous empêche de revendiquer une quelconque irrégularité dans sa distribution spatiale. La description, au moment de l'événement pluvieux analysé, de la couverture végétale du terrain étudié (Calembert et al, Eskénazi) nous place dans une position similaire vis-à-vis des valeurs de frottement et d'infiltration.

Dans ce contexte, il paraît plus logique de s'attacher à prouver qu'un choix raisonnable de valeurs uniformes sur le domaine est de nature à produire des résultats concordants plutôt que d'adopter une description spatiale très différenciée des diverses données, qui ne pourrait être réellement justifiée a posteriori sur d'autres critères que la recherche d'une meilleure correspondance des résultats avec les mesures in situ. L'analyse d'un seul événement pluvieux ne fait que renforcer cette position.

Nous avons donc orienté nos choix sur base d'une description globale des propriétés d'une couverture végétale rapportée comme majoritairement boisée à cette époque (89 % de futaie résineuse, futaie feuillue et taillis sans futaie, selon Eskénazi). Nous nous sommes inspirés, pour fixer le coefficient de frottement de Manning, des valeurs données par Ross et al pour ce type de couverture. En choisissant $n = 0,5$, nous retrouvons également une valeur moyenne des résultats expérimentaux établis par Djenidi (figure III.11.). Cette valeur s'affirme enfin comme une synthèse des coefficients d'expérimentations unidimensionnelles sur modèles physiques (Izzard, Foster et al, par exemple).

Les importantes différences de grandeur, constatées dans la littérature, pour les coefficients d'infiltration, attestent à la fois de leur sensibilité et d'un nécessaire calage spécifique à chaque bassin étudié. Nous savons d'emblée, par l'étude des bilans menée

par Eskénazi, qu'on peut tabler sur une vitesse moyenne d'infiltration, au cours de l'averse, de l'ordre de 2.10^{-6} m/s. Cette valeur assez importante est imputable à la reconstitution du stock d'humidité d'un sol qui se trouve dans un état très sec au début de l'enregistrement de l'événement pluvieux considéré (mois de juillet).

Sur base de valeurs suggérées par Show ou Motta et al sur un type de terrain correspondant, nous avons tenu compte de cet état initial de sécheresse en adoptant une valeur $i_0 = 14.10^{-6}$ m/s, tandis que l'infiltration finale (K_d), lorsque le sol est saturé, a été estimée à 5.10^{-7} m/s. La caractérisation de la loi exponentielle d'infiltration a alors été complétée en choisissant $13.10^{-4} \text{ s}^{-1}$ pour valeur du coefficient f_H .

Constatons qu'avec ces circonstances initiales de sécheresse et, par conséquent, une faible part du volume total précipité consacré au ruissellement, l'ensemble de ces valeurs prend une importance prépondérante pour une évolution correcte des pics de débit. La formulation non-linéaire rend par ailleurs leur détermination d'autant plus compliquée que leur effet final se combine avec les caractéristiques topographiques et les paramètres de frottement du sol.

Le type de couverture végétale rencontrée intervient à un autre niveau de la modélisation. Nous avons en effet insisté sur le fait qu'il fallait abandonner la définition habituelle d'une pluie nette composée des seuls volumes précipités qui, au terme de l'écoulement de surface, se retrouvent à l'exutoire.

Nous allons ici réellement précipiter sur le modèle l'intégralité des pluies qui parviennent à la surface du sol. Cependant, la densité de la couverture végétale au mois de juillet nous contraint à tenir compte des volumes interceptés par la végétation avant de percuter le terrain.

Sur base des bilans moyens établis sur le bassin, la composante interceptée a été estimée à 20 % du volume précipité, en totale correspondance avec les mesures de Bultot et al sur un même type de couverture.

Soulignons immédiatement, par comparaison des valeurs d'infiltration initiale et de précipitations, que nous obtiendrons la situation réaliste d'une absence complète de ruissellement suite à l'infiltration de la totalité des apports aux premiers instants de la modélisation.

Chaque simulation sur un élément de calcul adopte une valeur commune du pas temporel de 60 s et se poursuit durant 240 pas afin d'obtenir un tarissement complet de l'ensemble des écoulements en fine lame. Le décentrement spatial des fonctions de forme respecte l'intégralité des conclusions tirées dans la première partie du travail tandis que le décentrement spatial demeure quasi-nul avec $\theta_t = 0,55$.

- En imposant une hauteur nulle sur tout segment de frontière qui coïncide avec une ligne de crête, nous avons opéré une première succession de 16 passages sur des éléments rendus volontairement imperméables.

Le but consiste à vérifier le bilan global des volumes, représentatif d'abord de la qualité à la fois du décentrement spatial adopté et de la méthode de partage en

éléments autonomes, révélateur enfin des éventuelles imprécisions introduites par les nombreux recouvrements adoptés pour chacun d'entre eux. Ces premières simulations confirment également l'aptitude de la méthode de balayages à assurer, dans chaque ensemble, un déplacement correct des frontières à condition limite imposée, lorsque l'écoulement en fine lame subit un tarissement qui progresse depuis la ligne de crête.

En sommant les contributions de chaque débit normal qui se déverse de part et d'autre des ramifications filaires de cours d'eau, nous avons pu vérifier que l'erreur relative, par rapport volume total précipité, restait inférieure au pourcent, ce qui confirme la qualité des choix numériques en topographie réelle.

- Passons à la simulation en conditions réelles d'infiltration.

La taille réduite de chaque ensemble assure une succession rapide des 16 simulations qui se focalisent, au niveau des résultats, sur l'évolution temporelle des débits normaux qui se déversent de part et d'autre des 57 segments du réseau filaire de rivières.

Il est impossible ici de reproduire l'ensemble des diagrammes de débits normaux issus des simulations et qui sont nécessaires à la phase ultérieure de propagation dans le réseau de cours d'eau. Par commodité, nous choisirons donc d'illustrer les quelques segments concernés par l'ensemble de calcul n°5, situé sur la rive gauche du cours principal du Blanc Gravier. Il est reproduit à la figure XIV.9.

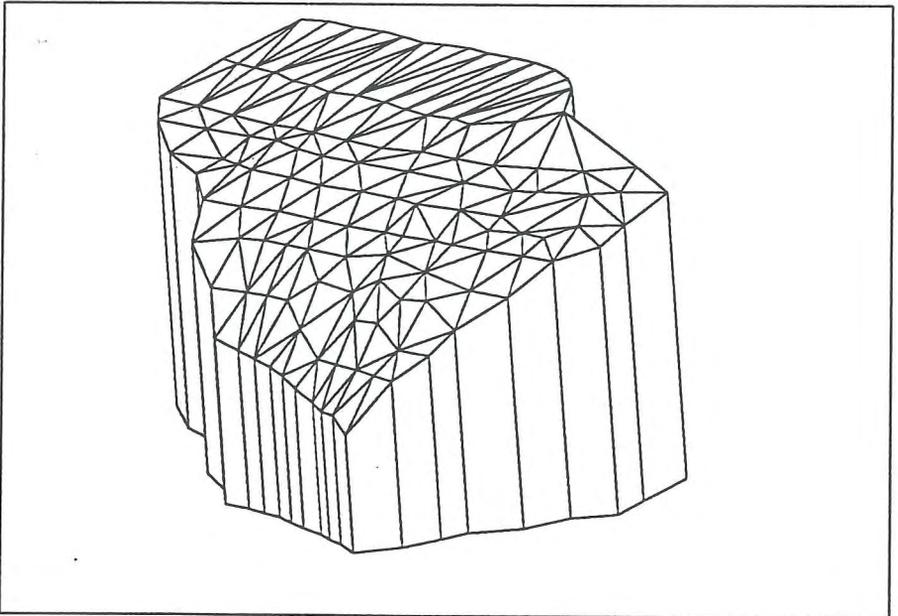


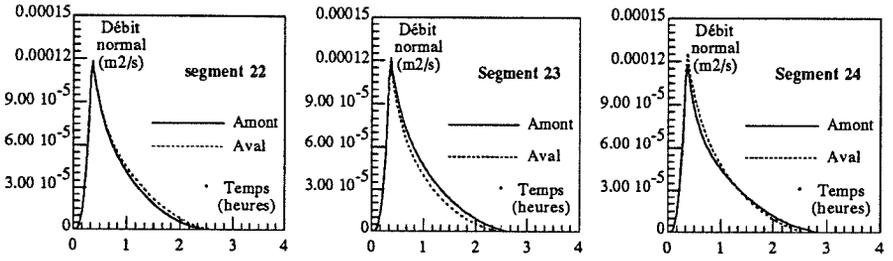
Figure XIV.9.
Représentation tridimensionnelle de l'ensemble de calcul n°5

Désignons par (AB, BC, ..., EF, ..., GH, HI) la liste des segments de rivière qui ont été impliqués dans la délimitation d'un élément de calcul considéré (segments 21, ..., 29 pour l'ensemble n°5 à la figure XIV.10.). Pour chacun de ces segments, une simulation sur l'ensemble considéré nous fournit, à chaque pas temporel, un diagramme trapézoïdal de débit normal par unité de largeur, schématisé à la figure XIV.10. Les deux valeurs nodales de chacun de ces diagrammes sont mémorisées en fonction du temps.

Néanmoins, le chevauchement de deux ensembles de calcul successifs, créé par le partage de deux segments de rivière (segments 21 et 22 partagés par les ensembles 4 et 5, segments 28 et 29 partagés par les ensembles 5 et 6 à la figure XIV.10.) nous fournit deux diagrammes pour chacun de ces segments, un pour chaque ensemble dans lequel il est intégré. Il nous faut donc décider du diagramme qui sera retenu pour chaque segment partagé.

Nous avons logiquement choisi de ne conserver, dans l'ensemble de calcul considéré, que les diagrammes qui ne concernent ni le premier ni le dernier de la liste des segments de rivière, chaque élément de calcul voisin étant censé fournir une meilleure approximation pour ces segments (la simulation sur l'ensemble n°5 ne fournit donc que les diagrammes définitifs pour la rive gauche des segments 22 à 28 inclus). Ainsi, la jonction réelle de chaque ensemble se produit au noeud central des 2 segments partagés.

Nous avons donc complété la procédure avec un test systématique des débits normaux nodaux obtenus dans chaque ensemble de calcul (dans le test de jonction des éléments 5 et 6, on compare, pour le noeud H de la figure XIV.10., la composante nodale de débit normal au segment 28, obtenue dans chaque ensemble, puis on poursuit avec la même vérification pour la composante de débit normal au segment 29) .



ENSEMBLE DE CALCUL N° 5

Vérification pour le noeud H des composantes normales aux segments 28, 29 calculées par les bassins 5 et 6

Diagramme de débit normal calculé pour chaque segment

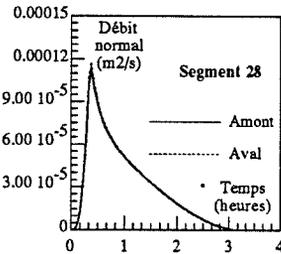
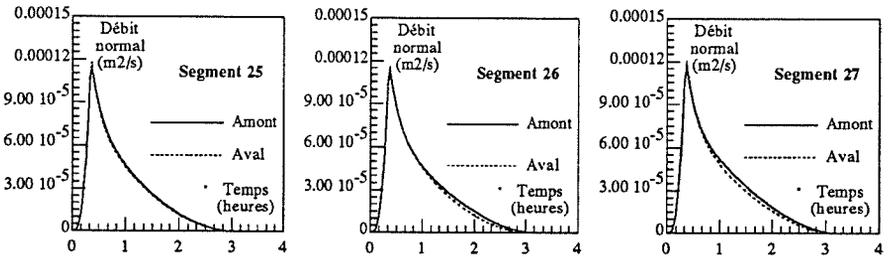
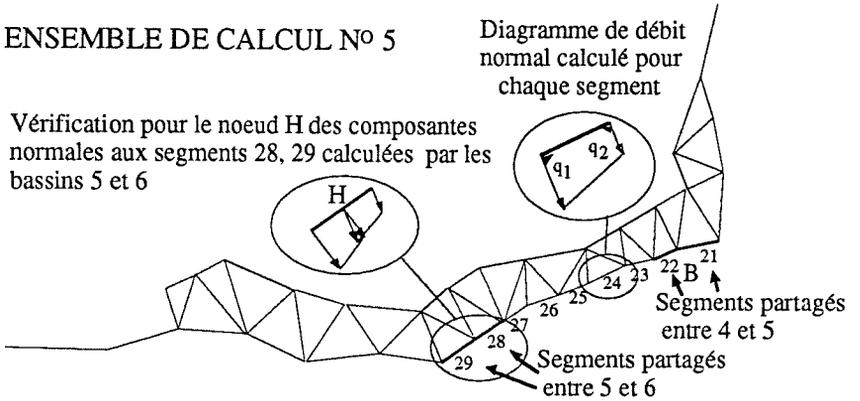


Figure XIV.10. Ensemble de calcul no 5

- La vérification des valeurs de débits normaux en ce point H de jonction, calculées dans les 2 ensembles (en l'occurrence le 5 et le 6 pour l'exemple illustré) qui l'incluent, atteste du chevauchement suffisant adopté puisque les différences restent imperceptibles. Ce type de vérification est donnée pour le même élément n°5 à la figure XIV.11., avec vérification de sa jonction avec l'ensemble 4 au niveau du point B et celle avec l'ensemble 6 au niveau du point H.

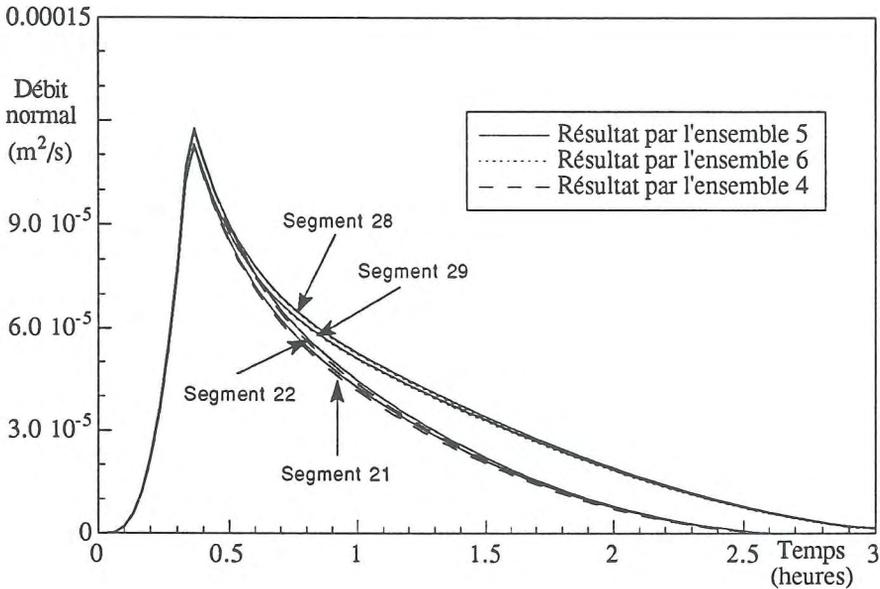


Figure XIV.11.
Vérification du chevauchement des ensembles de calcul 4, 5 et 6
par comparaison des valeurs de débit normal par unité de surface
pour le noeud central de leurs segments communs

Même si la préoccupation majeure reste l'élaboration des diagrammes de débits latéraux déversés, la figure XIV.12., avec ses évolutions de hauteur d'eau en fonction du temps en quelques points de l'ensemble n°5 qui sont situés à la figure XIV.8., rappelle à la fois que ces résultats restent disponibles sur l'ensemble du modèle et que l'action menée pour leur résolution correcte, reproduisant localement des discontinuités qui ne feront pas systématiquement l'objet d'attention particulière, est entièrement responsable de la fiabilité des diagrammes obtenus aux frontières de chaque ensemble.

En fonction de la position de ces points sur leurs trajectoires respectives, on constatera leur assèchement plus ou moins rapide, qui marque la progressive restriction du domaine de calcul par la méthode des frontières d'imposition mobiles.

Enfin, les valeurs illustrées confirment les ordres de grandeur adoptés pour les raisonnements initiaux qui ont guidé notre choix vers l'approximation cinématique.

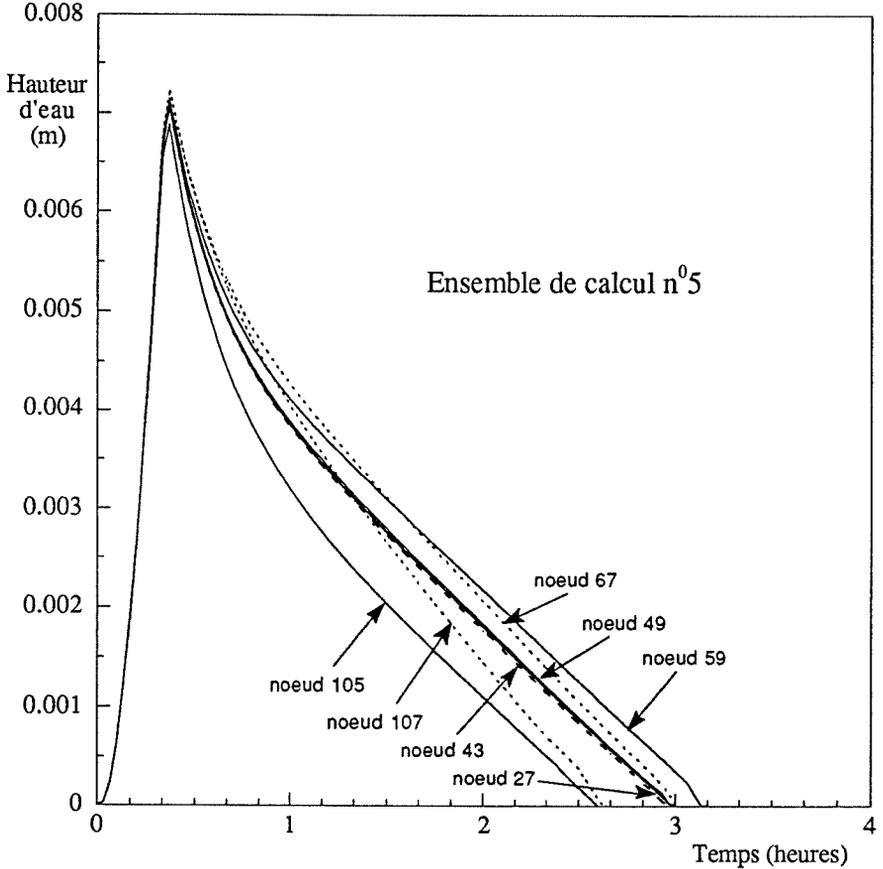


Figure XIV.12.
Evolution temporelle des hauteurs d'eau en quelques points
du bassin repris à la figure XIV.9.

- La dernière phase avant la propagation en réseau filaire est suggérée par la figure XIV.13. Elle consiste à faire le bilan, pour chaque segment de ruisseau, des contributions latérales amenées par les deux versants.

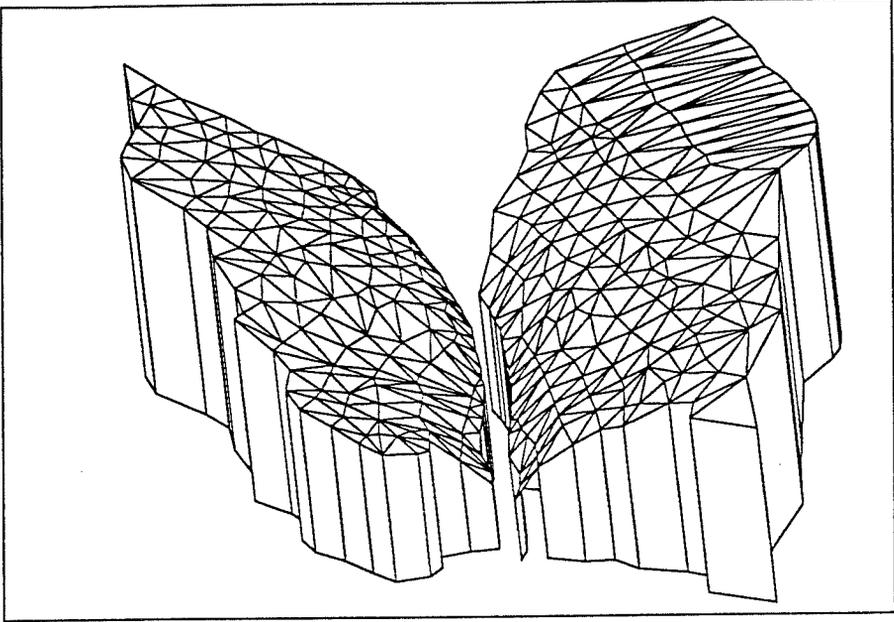


Figure XIV.13.
Représentation tridimensionnelle des ensembles de calcul 4, 5, 13 et 14, contribuant à l'alimentation d'une série de segments de rivière communs.

La simple addition des diagrammes correspondant à chaque versant d'un segment du réseau filaire rend finalement une série de contributions latérales très différenciées en amplitude comme l'atteste la figure XIV.14.

Les longueurs de chaque trajectoire, très variables selon qu'on passe du bras principal à l'un ou l'autre des affluents, mais surtout des écarts importants dans les pentes moyennes, permettent aux volumes précipités d'être plus ou moins rapidement évacués en alimentations latérales très variables, avant que l'action prépondérante de l'infiltration ne se charge des fines lames fluides qui transitent longtemps à la surface du bassin.

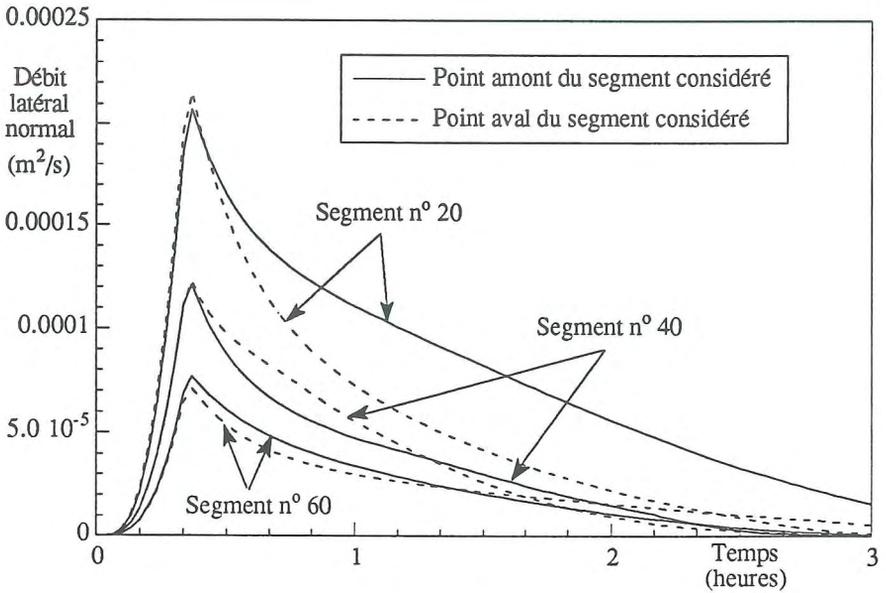


Figure XIV.14.
Evolution temporelle de quelques valeurs nodales de débits latéraux normaux se déversant dans le réseau filaire.

XIV.4. PROPAGATION EN RESEAU FILAIRE DES DIAGRAMMES DE DEBITS LATERAUX

Au terme des modélisations purement hydrologiques, le problème se présente sous forme d'une série de 72 segments de rivières composant un réseau en forme de Y et alimentés chacun par un diagramme résumant, par sa forme, toutes les particularités de l'écoulement en fine lame.

La propagation de ces signaux pour obtenir la réponse globale du bassin à l'exutoire constitue, avec l'irrégularité complète de la topographie quasi-tridimensionnelle considérée, l'originalité de cette ultime application. La combinaison des deux modèles et leur complémentarité pour la recherche de l'hydrogramme final nous confronte, pour la première fois, au problème de l'injection en unidimensionnel de débits latéraux.

La présentation d'hydrogrammes latéraux linéaires propres à chaque segment suggère la façon dont a été résolue théoriquement cette contribution tout au long des évolutions de la résolution du modèle théorique unidimensionnel.

Comme à l'accoutumée, l'impossibilité de travailler sur fond sec nous amène à envisager la construction d'une ligne d'eau initiale dans l'ensemble du système.

L'importance des débits introduits à l'amont de chaque affluent respecte, à l'exutoire, l'ordre de grandeur de l'écoulement souterrain tiré de la figure XIV.3. Nous les fixerons à une valeur commune de $0,025 \text{ m}^3/\text{s}$, ce qui définit complètement la ligne d'eau avec l'imposition d'une profondeur critique à l'aval de l'exutoire réel.

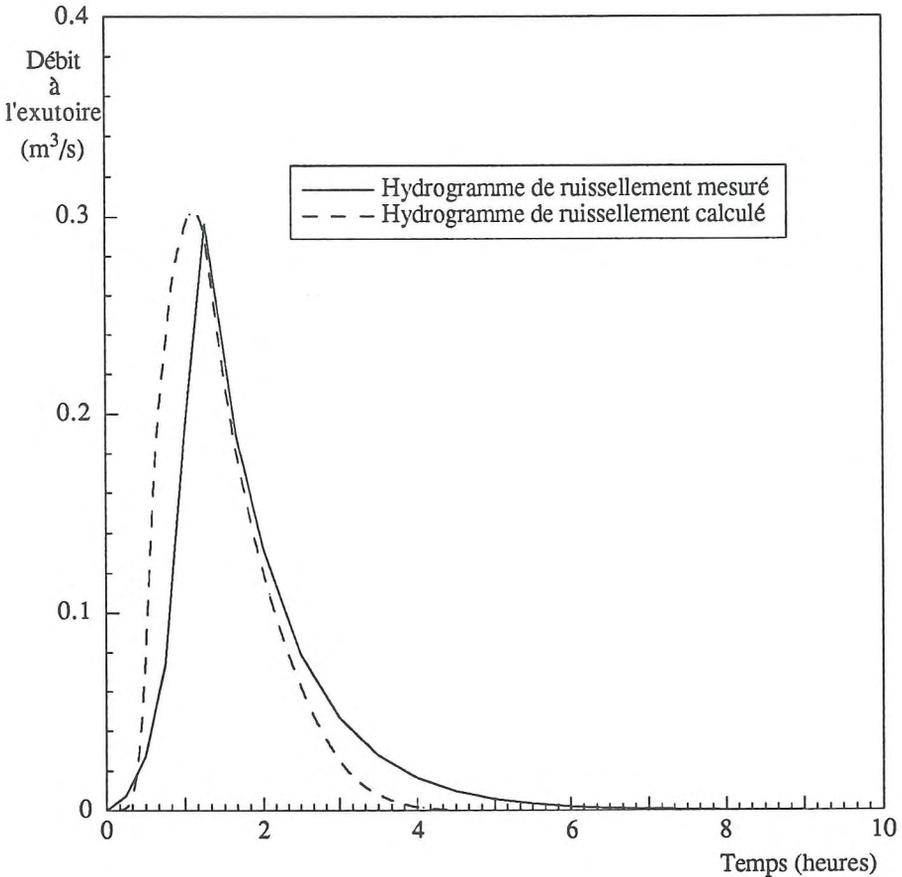


Figure XIV.15.
Comparaison des hydrogrammes calculé et mesuré à l'exutoire du bassin, consécutifs à la seule contribution ruisselante de la pluie.

Faut-il encore reproduire l'irrégularité transversale du lit principal et de ses affluents. Si la discrétisation tridimensionnelle fournit automatiquement toutes les données du profil en

long, aucun renseignement particulier ne nous décrit les spécificités locales des profils en travers rencontrés, ce qui justifie, pour des écoulements aussi faibles, d'avoir recouru à une forme trapézoïdale simplifiée, représentative des dimensions caractéristiques du ruisseau et des rus qui l'alimentent.

Avec une largeur constante de 0,3 m pour l'ensemble des bras, nous avons cherché à reproduire l'écoulement naturel du ruisseau en choisissant un coefficient de Manning $n = 0,06$ représentatif d'un frottement très marqué.

En poursuivant la simulation sur 4500 pas de 4 s, nous obtenons l'hydrogramme à l'exutoire présenté à la figure XIV.15. où il est comparé à son homologue tiré des mesures expérimentales.

XIV.5. CONCLUSION

L'hydrogramme final reproduit des amplitudes correspondant aux mesures sur le terrain, avec un pic correctement positionné temporellement.

- Le bilan positif qui en émerge concerne d'abord la fiabilité de la méthode développée lorsqu'elle travaille sur topographie réelle. Par la précision des bilans volumiques impliqués, elle légitime le modèle théorique adopté ainsi que l'ensemble des efforts consentis pour comprendre et surmonter toutes ses particularités.

Le type d'exploitation classique, qui s'intéresse davantage à l'hydrogramme résultant qu'à la destinée de la lame d'eau sur l'ensemble du bassin, souligne d'autant mieux l'indispensable cheminement théorique des premiers chapitres. Le succès global obtenu dans une seule courbe intégrant toutes les spécificités topographiques et morphologiques d'un bassin et du réseau qui le draine, passe inexorablement, nous l'avons prouvé, par une résolution correcte de tous les soubresauts temporels et locaux de la lame de surface sur la topographie.

- L'exploitation des raisonnements élaborés pour une réalisation systématique et automatisée des phases préalables donne également deux signes encourageants :
 - D'une part, en examinant les surfaces réellement impliquées, dont la sélection découle étroitement des hypothèses qui sont à la base du modèle théorique d'écoulement, il se confirme qu'aucune contradiction n'émerge par rapport aux raisonnements classiques de l'hydrologie. Il est en outre établi que les limitations du modèle mathématique n'influent pas sur la qualité des résultats, comme nous l'avions pressenti dans le cadre de lames fines sur des mailles raisonnables à l'échelle du bassin.
 - D'autre part, en confirmant leur rôle primordial pour réduire les phases préalables à un minimum de manipulations informatiques, les procédures annexes au module de calcul d'écoulement proprement dit tirent efficacement

parti des spécificités théoriques afin de contribuer à la commodité d'utilisation du logiciel ainsi qu'à sa convivialité pour expliquer les spécificités du terrain étudié et ses conséquences possibles sur l'écoulement.

- La dernière remarque nous ramène au modèle hydrologique proprement dit et, plus précisément, à l'approche physique qui est sa base. Certes, le type d'approche adopté pour fixer les valeurs caractéristiques ainsi que le nombre d'événements pluvieux significatifs qui sont disponibles pour confirmer la pertinence de la distribution choisie, indiquent clairement que le but de cette application n'est pas d'obtenir un calage fin du modèle sur le bassin étudié. Il prouve cependant, par la simplicité inhérente à la signification physique de chaque coefficient introduit, qu'une évaluation raisonnable de leurs ordres de grandeurs permet d'appréhender correctement les processus et d'en comprendre aisément les intervenants.

L'exploitation plus complète des potentialités du modèle, qui suppose une description plus fidèle des types de terrain rencontrés, requiert, pour une correspondance fiable, l'intervention de méthodes sophistiquées de calage sur une longue expérience d'événements pluvieux. Cette remarque indique clairement que l'avantage essentiel de la méthode, en comparaison de modèles classiques d'entrée-sortie, ne se situe pas dans une simplification de la phase d'identification des valeurs caractéristiques.

Mais elle présente l'avantage décisif, par opposition à l'utilisation de paramètres abstraits, de pouvoir répondre ultérieurement à toute question précise de modification locale des circonstances d'écoulement. Imperméabilisation de surfaces, actions locales sur la topographie, collectes localisées d'eaux ruisselantes ou infléchissements des conditions d'écoulement dans le réseau drainant naturel, sont autant de circonstances qui trouvent une équivalence directe en terme de valeurs de paramètres, pour une étude d'impact sans équivoque sur un système finement taré.

Dans le contexte particulier d'époque qui a suscité la campagne de mesures dont nous avons extrait un événement significatif, et plus généralement dans celui très actuel où des catastrophes attestent d'actions humaines sur la nature mal perçues dans leurs conséquences, l'approche physique dans le domaine hydrologique ouvre des voies très prometteuses.

Chapitre XV

Modélisation de l'écoulement consécutif à la rupture du barrage de la Vesdre à Eupen

SOMMAIRE

- XV.1. *Bref historique de l'alimentation en eau de la vallée de la Vesdre*
- XV.2. *Caractéristiques du barrage de la Vesdre*
- XV.3. *Hypothèses retenues pour la simulation*
- XV.4. *Résultats obtenus en hypothèse de rupture instantanée*
- XV.5. *Conclusion*

XV.1. BREF HISTORIQUE DE L'ALIMENTATION EN EAU DE LA VALLEE DE LA VESDRE

L'essor industriel de la vallée de la Vesdre a toujours été étroitement lié à son alimentation en eau. C'est à l'abondance d'une eau très pure et douce que Verviers doit sa renommée de siège belge de l'industrie de la laine. Depuis le XV^{ème} siècle, date où l'on recense l'existence de ses premières fouleries, l'alternance de ses périodes de prospérité et de dépression reflète les événements historiques du pays qui modifièrent ses possibilités d'exportation.

Mais au milieu du siècle dernier, la croissance de l'activité industrielle verviétoise est telle que la ville doit réclamer au gouvernement l'étude de travaux d'amélioration de la rivière gravement polluée. Son état lamentable résulte d'une combinaison de déversements en eaux alcalines riches en matières organiques, en savon et autres fibres de laine qui se mélangent aux eaux acides des usines de carbonisage. Les précipités résultants couvrent le lit d'une couche boueuse dont la fermentation pestentielle porte préjudice au bien-être de la population ainsi qu'à la vocation touristique de centres comme Chaufontaine.

Dès 1857, l'ingénieur Bidaut examine la situation et suggère une régularisation partielle du cours grâce à la construction d'un barrage dans la vallée de la Gileppe. La ville d'Eupen réagit par un projet alternatif d'utilisation commune d'un barrage situé à son amont. Les frais et les risques encourus lui font finalement retirer sa collaboration.

Devant les exigences de plus en plus pressantes de son activité lainière, Verviers multiplie ses démarches et propose de supporter seule les frais d'une adduction directe pour distribuer l'eau à ses usines, dans l'hypothèse où le gouvernement prendrait à sa charge les frais de construction du barrage.

C'est sur ces bases que le gouvernement décide d'ériger un ouvrage d'une capacité de 12,3 millions de m³ dans la vallée de la Gileppe, répondant à la fois aux soucis d'alimentation directe en eau industrielle et à la régularisation de la Vesdre. L'ensemble des travaux projetés est opérationnel en 1876.

Pour des raisons de vétusté, pour répondre à l'accroissement de la consommation domestique et aux exigences de nouveaux pôles industriels, sa capacité sera portée en 1971 à 26,4 millions de m³ par surhaussement du mur et métamorphose complète de l'ensemble de l'ouvrage.

Mais revenons à la fin du siècle dernier pour examiner le développement très différencié que connaît alors la vallée de la Vesdre. L'écart important dans l'évolution de la population entre Verviers et Eupen apporte une nouvelle preuve tangible de l'importance

de disposer en abondance d'une telle ressource naturelle. Cette influence très favorable incite la ville d'Eupen à se tourner vers le gouvernement allemand pour pouvoir jouir d'avantages semblables. Le projet qu'elle propose ne connaît aucune suite.

Dès 1919, elle réitère sa demande au gouvernement belge et se groupe avec d'autres communes riveraines de la Vesdre, dont quelques centres touristiques, pour intensifier ses requêtes et obtenir satisfaction. A partir de 1935, le Service Spécial de la Vesdre est chargé par le Ministère des Travaux Publics d'étudier plusieurs variantes. Il arrête son choix sur un projet de barrage d'une capacité de 24,5 millions de m³, situé en aval du confluent de la Vesdre et du Getzbach.

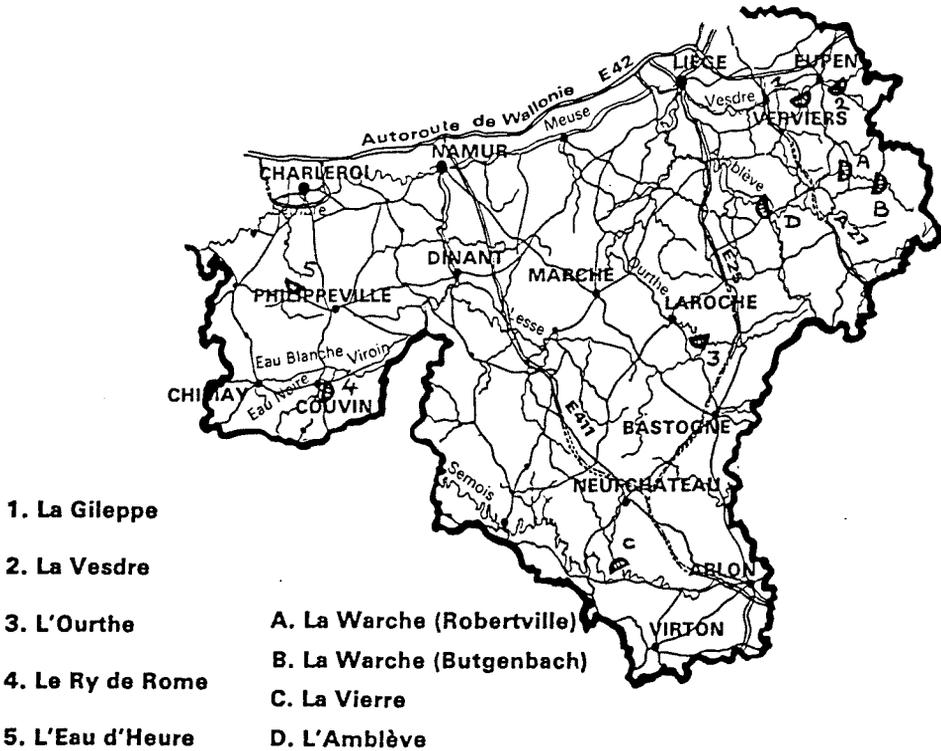


Figure XV.1. - Carte des barrages belges

XV.2. CARACTERISTIQUES DU BARRAGE DE LA VESDRE

Le lieu choisi dit "Sparbrunnen" se trouve à cinq kilomètres en amont de la ville d'Eupen. Il présente un territoire à submerger considéré comme imperméable, constitué d'alternances de quartzites et de schistes phylladeux, et offre des conditions géologiques et topographiques favorables à l'établissement d'un barrage.

En 1938 sont entrepris les premiers travaux de construction d'un barrage de type "à gravité". Interrompu en 1941, le chantier est repris après guerre pour être achevé fin 1949. Les principales dimensions caractéristiques de cet ouvrage sont reprises au tableau XV.1. et aux figures XV.2. et 3.

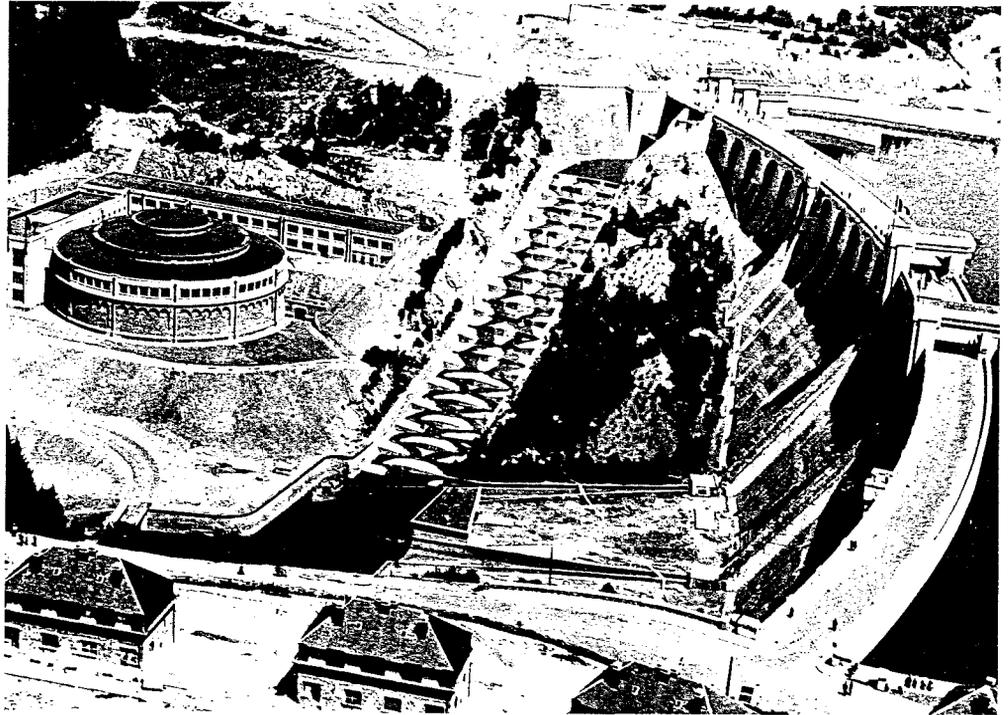


Figure XV.2. - Vue générale du site du barrage de la Vesdre à Eupen

CARACTERISTIQUES TECHNIQUES	
Type de barrage	Poids en béton
Buts	Distribution d'eau potable et industrielle Protection contre les crues
Année d'achèvement	1949
Bassin versant	6920 ha + 3675 ha (la Helle)
Pluviosité moyenne	1269 mm/an
Hauteur maximale au-dessus des fondations	66 m
Epaisseur en crête	8 m
Epaisseur en base	55 m
Déblais	300.000 m ³
Volume du barrage	450.000 m ³
Longueur en crête	410 m
Rayon de courbure	375 m
Superficie du plan d'eau	126 ha
Capacité du lac	25 millions de m ³
Evacuateur de crue	1 déversoirs à 2 pertuis (12,5 m x 3 m) et vannes wagon descendantes
Débit max du déversoir	230 m ³ /s
Vidange	2 conduites diamètre 1,50 m à vannes papillon
Débit max des vidanges	70 m ³ /s
Prises d'eau	2 conduites diamètre 0,95 m 2 m ³ /s

Tableau XV.1.
Caractéristiques principales du barrage de la Vesdre à Eupen

La solution initialement retenue pour le mur proprement dit prévoit un corps en maçonnerie de moellons bruts, avec parement amont constitué de blocs de béton façonnés

sur chantier séparé et parement aval en béton coulé sur place. Cette solution évite les joints de contraction et de retrait et contribue à résorber les soucis de chômage de l'époque.

Mais la majoration des cubages de terrassement et la difficulté de recruter en quantité suffisante une main d'oeuvre belge spécialisée oriente le choix définitif vers une solution alors originale en Europe. Elle consiste à mouler de gros blocs de 15 x 6 x 2 à 3 m d'épaisseur en béton à gros éléments. L'imbrication des blocs dans les différents plans augmente la résistance au glissement et, par ces joints alternés, contrarie le cheminement de l'eau. Les joints radiaux de dilatation prennent l'allure d'une ligne brisée dont l'étanchéité est assurée par une feuille de cuivre en forme de Z. La composition novatrice du béton conserve l'avantage de la faible teneur en ciment du projet initial. La composition du béton de masse à base de ciment métallurgique permet de réduire l'échauffement des plots durant leur prise ainsi que les retraitis qui y sont liés.

Les blocs du parement, plus riches en ciment que ceux de la masse du mur, sont imbriqués par redents horizontaux et verticaux dans ceux du corps proprement dit. Une injection de liaison entre blocs de parement et ceux de masse est prévue avec une entredistance régulière de 6 m.

Le drainage du mur se réalise par des cheminées verticales disposées respectivement à l'amont et l'aval de la galerie longitudinale supérieure. Les eaux captées sont recueillies dans la galerie longitudinale inférieure. C'est de là qu'on contrôle également, par des drains forés, l'étanchéité du voile normal situé directement dans la fondation amont du barrage.

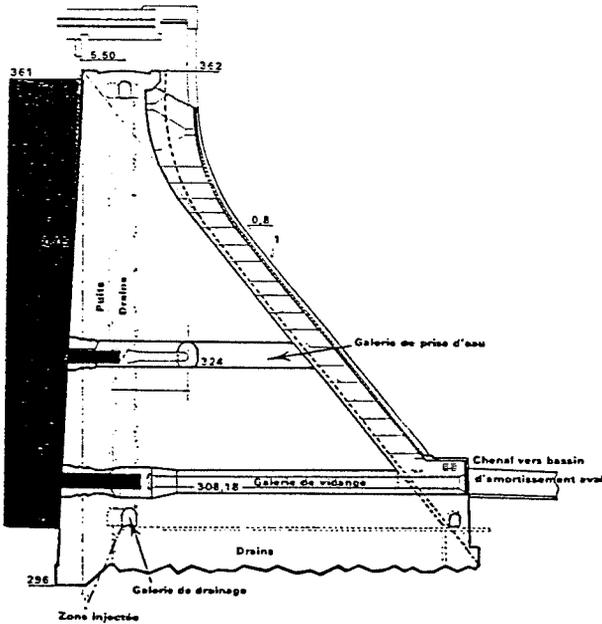


Figure XV.3. - Coupe transversale dans le barrage de la Vesdre

Par manque de données sur les crues maximales de la Vesdre, les valeurs nécessaires au dimensionnement de l'évacuateur de crue ont été extrapolées des mesures connues à la Gileppe. L'application des lois de Fuller et de Gibrat, ainsi que la proximité de l'agglomération d'Eupen, ont conduit à imposer l'évacuation possible d'une crue de $230 \text{ m}^3/\text{s}$.

Le coude brusque imposé par la configuration des lieux à la partie supérieure du déversoir a nécessité une analyse sur modèle réduit dont les incidences visibles sont le doublement des pertuis et la réalisation d'un mur guide dans la réserve. La recherche d'un amortissement efficace a abouti à la solution d'un escalier à marches profilées contrariant au maximum l'écoulement qui se déverse dans le bassin d'amortissement rempli d'un matelas d'eau.

XV.3. HYPOTHESES RETENUES POUR LA SIMULATION

La situation de ce barrage sur le cours principal de la rivière, sa vétusté comparée aux travaux récents de surhaussement du barrage de la Gileppe, enfin la proximité de la ville d'Eupen nous amène à envisager prioritairement l'hypothèse de rupture de cet ouvrage.

Il est évident cependant qu'une discussion sur les risques maxima encourus par les populations aval, notamment par la ville de Dolhain, devrait être complétée d'une hypothèse de rupture du barrage de la Gileppe, d'une capacité sensiblement équivalente.

Enfin, la recherche d'effets les plus dévastateurs, jadis envisagés en d'autres lieux à des fins stratégiques, passerait par une combinaison judicieusement décalée dans le temps des ruines des deux ouvrages.

La première démarche pour ce type d'analyse est d'adopter une hypothèse de rupture qui s'accorde avec les caractéristiques de l'ouvrage étudié. Nous orienterons notre choix en nous référant une nouvelle fois aux principes français en la matière.

Le Comité Technique Permanent des Barrages, installé en France dès 1966, distingue, dans un souci de sécurité et de réalisme, les barrages en béton des digues en remblai. Pour tous les barrages en béton, qu'ils soient de type voûte, poids-voûte, poids ou à contreforts, ..., l'hypothèse extrême d'une rupture instantanée, comme soufflée par une explosion, doit être retenue (Benoist).

Cette hypothèse paraît extrêmement sévère lorsqu'on lui oppose les cubages de béton impliqués dans un tel effacement instantané (450.000 m^3 de béton pour le corps du barrage d'Eupen).

Il faut néanmoins les replacer dans le contexte des valeurs instantanées de débit prévues au droit du barrage, qui, comme nous le verrons, avoisinent les $100.000 \text{ m}^3/\text{s}$ sur la seule hypothèse d'application des solutions théoriques.

Ainsi, nous initierons le processus en imaginant qu'à l'instant initial, un mur fluide quasi-vertical se dresse sur 57 m de hauteur.

Cette hypothèse, outre le fait qu'elle expose le logiciel aux conditions les plus sévères en matière de modélisation, suppose également que le barrage n'a plus son rôle de section de contrôle comme dans l'application précédente. C'est donc à une modélisation complète incluant réservoir et vallées, en topographie réelle, que nous nous trouvons confrontés.

La nécessité d'imposer une condition limite amont appropriée suggère d'établir d'abord quelques ordres de grandeur sur les processus à reproduire, d'autant que la polyvalence du logiciel le contraint à ne travailler que sur fond humide. Il faut là aussi trouver un compromis raisonnable pour le calcul préalable de lignes d'eau qui restent modestes en regard des maxima projetés.

Nous établirons ces références en reprenant la solution théorique de Stoker pour une propagation sur fond humide. La solution donnée par l'ensemble des relations (XI.37, 38, 39) s'appliquera sur base des considérations suivantes :

- La relation de puissance qui lie hauteur et section mouillée doit être représentative des profils rencontrés. Avant même de détailler la procédure qui les détermine, la figure XV.4. reprend cinq de ces relations pour des sections transversales réelles s'étendant sur 400 m de long de part et d'autre du barrage. La relation adoptée, avec $\alpha = 0,75$ et $1/(\alpha+1) = 15$ (formule XI.14), réalise, comme le montre la figure XV.4., un compromis raisonnable qui peut être étendu à l'intégralité de la vallée jusqu'à Eupen.

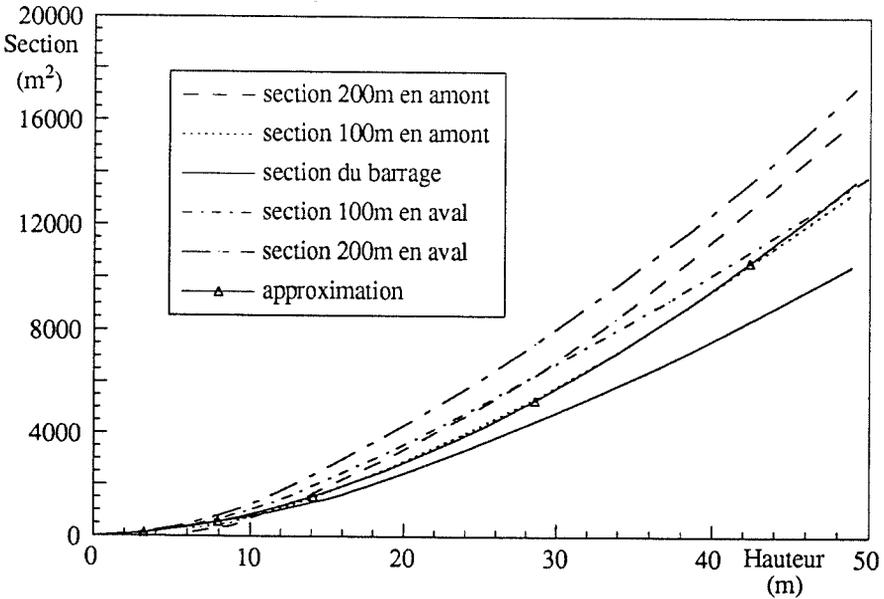


Figure XV.4.
Evolution de la section mouillée en fonction de la profondeur

- Nous travaillons sur l'hypothèse d'une lame initiale de 0,50 m de profondeur moyenne, avant de vérifier la sensibilité du système pour d'autres épaisseurs du bourrelet fluide.

La résolution nous rend immédiatement l'ensemble des valeurs synthétisées au tableau XV.2.

h_1 (m)	0,1	0,25	0,5	0,75	1
$\frac{u_3}{c_1}$	66,11	38,5	25,08	19,33	15,97
$\frac{U}{c_1}$	66,35	38,78	25,39	19,67	16,32
$\frac{c_3}{c_1}$	4,99	4,1	3,51	3,2	2,99
$\frac{c_0}{c_1}$	23,88	15,1	10,68	8,72	7,55
U (m/s)	49,68	45,91	42,51	40,32	38,65
h_3 (m)	2,49	4,2	6,17	7,67	8,92

Tableau XV.2.
Solutions de Stoker pour différentes valeurs h_1 de hauteur initiale à l'aval,
pour $h_0 = 57$ m, $\alpha = 0,75$ et $l/(\alpha+1) = 15$

Pour autant que l'épaisseur de la lame aval permette de maintenir un état critique au droit du barrage, le débit théorique en cette section s'établit à $102.323 \text{ m}^3/\text{s}$ pour une profondeur de 34,48 m et une vitesse de 13,90 m/s.

Afin de compléter l'ensemble de ces valeurs, rappelons que la propagation sur fond sec donne une vitesse U de propagation égale, pour les caractéristiques de section choisies, à 3,5 fois la célérité, soit 62,56 m/s. En adoptant la valeur centrale du tableau XV.2. comme hauteur aval, nous constatons déjà une réduction substantielle de 32 % de la vitesse de propagation du front pour un rapport de sections mouillées entre l'aval et l'amont qui avoisine seulement les 0,3 % !

Sur cette base raisonnable de $h_1 = 0,5$ m, nous obtenons une première prévision théorique quant à la submersion de la ville d'Eupen, située approximativement à 4100 m en aval de

la retenue puisqu'avec une vitesse U avoisinant les 150 km/h, on obtient un temps de propagation jusqu'à la confluence avec la Helle, considérée comme centre de la ville basse, de seulement 96 s.

Abordons à présent le problème bien réel de la condition limite adéquate à l'extrémité amont de la discrétisation.

Si nous supposons qu'il n'existe aucun apport à l'amont de la retenue, cette frontière devient mobile puisqu'elle doit suivre la vidange progressive du bassin. Pour éviter cet écueil, il suffit d'y injecter un débit constant, suffisant pour maintenir, dans l'ensemble du réservoir, des valeurs non nulles de profondeur. A l'issue de la vidange complète s'établira une ligne d'eau représentative du débit introduit. Cet apport sur lequel viennent se réfléchir les ondes négatives remontant depuis le barrage ne doit naturellement pas introduire de modification significative par rapport aux cubages réellement impliqués dans la réserve. Dans ses travaux, Sakkas et al recommandent des valeurs inférieures à 5 % du pic de débit au droit du barrage.

Nous limiterons pour notre part l'apport constant à l'amont à une valeur nettement inférieure avec $75 \text{ m}^3/\text{s}$ ($< 1 \%$ de Q_{barrage}), ce qui assure, pour une durée de modélisation projetée de 1/2 heure, un excès total du volume introduit de 0,005 % par rapport aux 25 millions de mètres cube du réservoir.

Quant au calcul préalable des lignes d'eau à l'aval, nous détaillerons les valeurs adoptées lors de l'examen du réseau filaire à prendre en compte pour la modélisation. Citons simplement la valeur maximale adoptée lors de la première partie de la modélisation, qui s'intéresse à l'obtention des maxima de hauteur dans la ville d'Eupen. Le modèle a travaillé sur base d'une ligne d'eau initiale calculée pour un débit de $250 \text{ m}^3/\text{s}$ à l'aval d'Eupen (moins de 3 % de Q_{barrage}), soit approximativement les valeurs de crue maximale adoptées lors de la conception de l'ouvrage. Il s'agit d'un extremum pour l'ensemble des lignes calculées pour le réseau sur l'ensemble de la modélisation.

XV.3.1. Définition de la topographie

Les études comparatives menées par E.D.F. (Benoist) ont conclu à l'importance primordiale de la phase de discrétisation. Il s'agit également d'un travail extrêmement considérable lorsqu'il est mené systématiquement sur base de cartes digitalisées.

L'entière des données topographiques nécessaires au logiciel a été traitée au sein des L.H.C.N. par R.Mathieu.

Pour la vallée à l'aval du barrage, le modèle numérique de terrain (DTM-DIGITAL TERRAIN MODEL) de l'I.G.N. a servi de base au calcul. Il a été établi par l'I.G.N. à partir des courbes de niveau figurant sur les cartes topographiques au 1/50.000.

La topographie est ainsi accessible sous forme de fichiers contenant les données d'un carreau de 15' de longitude et 15' de latitude. Ce carreau est subdivisé en mailles de 2" en longitude et 1" en latitude, soit 405.000 points connus par fichier.

Le système de référence des données est le suivant :

- WGS 72 pour la latitude et la longitude
 - MSL (mean sea level) pour les altitudes
(0 m en MSL = 2 m sur les cartes de l'I.G.N)
- a. - La génération des fichiers propres à chaque abscisse passe par la reconstitution préalable des lignes de niveau afin de visualiser la géométrie étudiée.
- Pour cette opération, des carreaux de dimensions réduites (± 10.000 points) sont extraits, qui suivent plus précisément le profil en long de la vallée. Cette même opération est mise à profit pour convertir les coordonnées WGS dans le système Lambert.
- b. - Sur base de mailles rectangulaires s'interpolent alors les courbes de niveau qui donnent lieu aux représentations des figures XV.29. à XV.33. pour le tronçon de la Vesdre qui s'étend entre le barrage et l'entrée de Verviers.
- c. - Elles constituent des bases de travail pour situer manuellement les profils en travers désirés. La digitalisation des points extrêmes de ces profils sur ces vues en plan permet de procéder numériquement à une reconstitution des profils en travers par intersection d'un plan vertical intégrant ces points et du maillage. En adoptant un écartement régulier d'approximativement 100 m sur l'axe du thalweg, sont ainsi définies 200 sections sur l'axe principal, 18 sections dans le bras latéral de la Gileppe remontant jusqu'au barrage du même nom, enfin 25 sections pour le bras de la Helle dont le lieu de confluence avec la Vesdre abrite la ville d'Eupen.
- d. - La base de travail digitale a donné lieu à deux difficultés consécutives à la représentation des surfaces libres d'eau sur les modèles de terrain de l'I.G.N. Ainsi, aucune information ne peut être extraite sur la forme des cuvettes de barrage puisque les retenues sont figurées par des surfaces planes.

Ce même type de représentation sur les mailles peut expliquer le décalage, pour les cours d'eau, entre les valeurs reconstituées numériquement et celles mesurées sur le terrain à partir d'une référence donnée par l'I.G.N. Nous avons en effet constaté, au-delà d'un décalage de ± 2 m par rapport à la mesure sur site de l'altitude du fond du lit mineur, que ce dernier apparaissait très nettement adouci sur les reconstitutions par rapport à la réalité.

Prenant en compte l'artifice de représentation validé notamment lors de la modélisation de la rupture progressive du barrage de Bouzey, nous avons donc décidé d'adopter, pour le tracé des lignes d'eau initiales, une section rectangulaire de 1,5 x 20 m, ce qui, ramené aux sections mouillées prévues au droit du barrage, représente moins de 0,4 %.

- e. - La topographie du fond du lac de la Vesdre a dû être reconstituée sur base de cartes établies à l'époque de la construction du barrage. Par digitalisation manuelle, un

fichier informatique semblable aux données de l'I.G.N. a été généré pour reprendre la séquence mise en place pour les profils en travers des vallées.

L'intégration numérique des profils obtenus rend une courbe de capacité en fonction de la hauteur totalement conforme à celle utilisée par le Service des Barrages du M.E.T., comme le montre la figure XV.5.

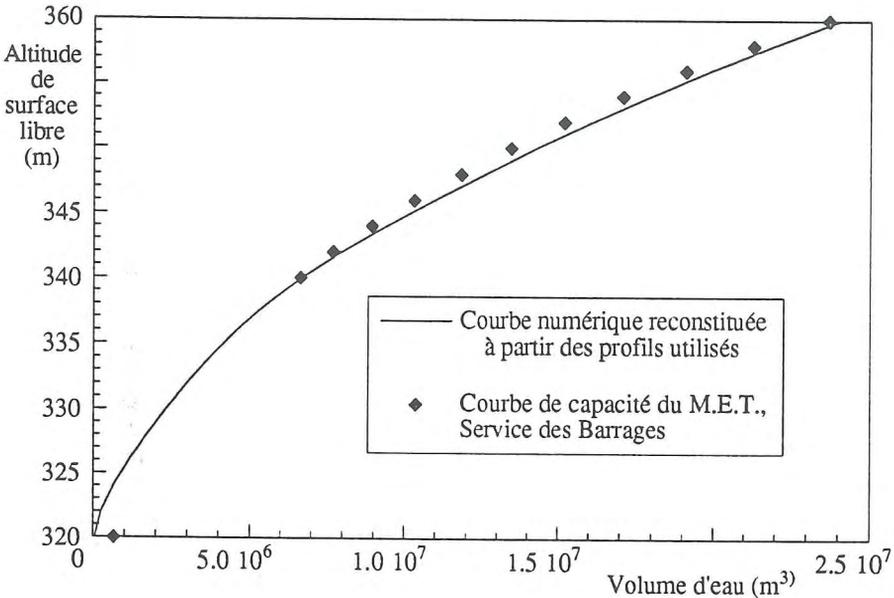


Figure XV.5.

Evolution de l'altitude de surface libre de la retenue en fonction de la profondeur

Les outils informatiques de visualisation topographique élaborés dans la première partie du travail permettent une représentation tridimensionnelle aisée de la géométrie à considérer.

En extrayant des données I.G.N. un nuage de points régulièrement espacés de ± 60 m, nous avons généré des mailles triangulaires qui donnent les représentations classiques par facettes planes des figures XV.6. à XV.10. Les abscisses limites approximatives données en légende pour situer chacune d'entre elles font référence à la distance, dans l'axe de la vallée, depuis l'extrémité du lac.

On y discerne de nombreuses vallées latérales dont la majorité présente un caractère assez pentu, qui permet de ne les prendre en compte que comme élargissement de la vallée principale. Par contre, une telle approximation n'est plus licite pour les pentes de fond beaucoup plus faibles des vallées de la Gileppe et de la Helle, qui ont par conséquent donné lieu à des discrétisations spécifiques pour figurer dans le réseau filaire en tant que bras séparé.

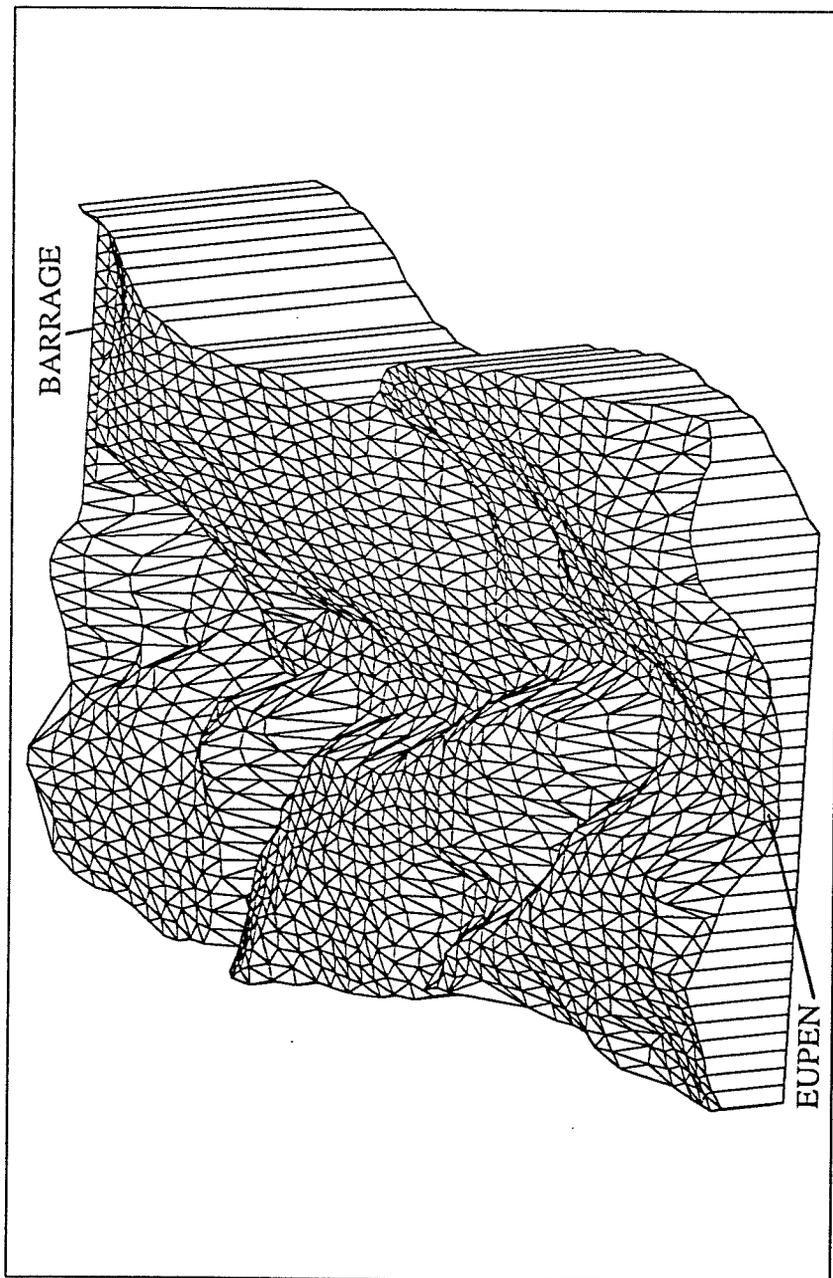


Figure XV.6.
Représentation tridimensionnelle du tronçon la vallée de la Vesdre
qui s'étend approximativement de $x = 3000$ m à $x = 7200$ m

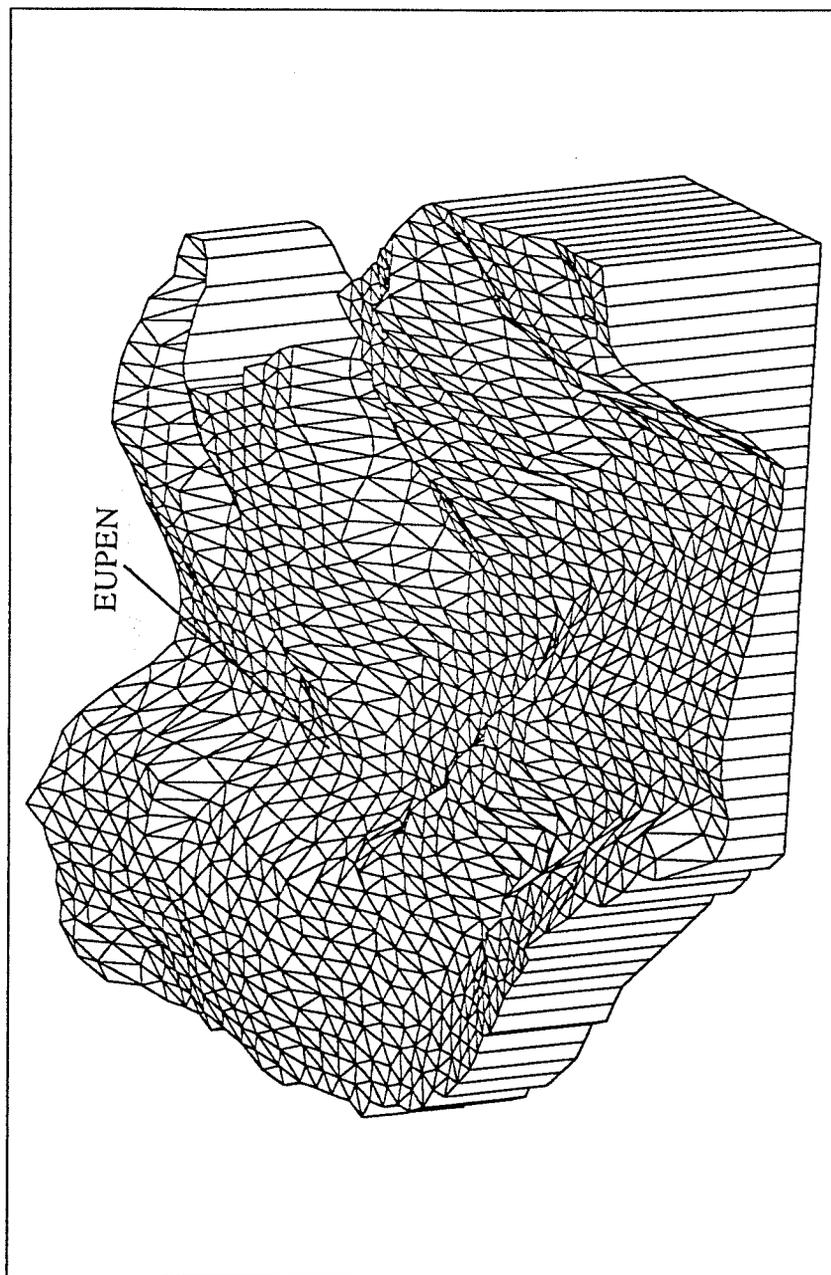


Figure XV.7.
Représentation tridimensionnelle du tronçon la vallée de la Vesdre
qui s'étend approximativement de $x = 7200$ m à $x = 10.000$ m

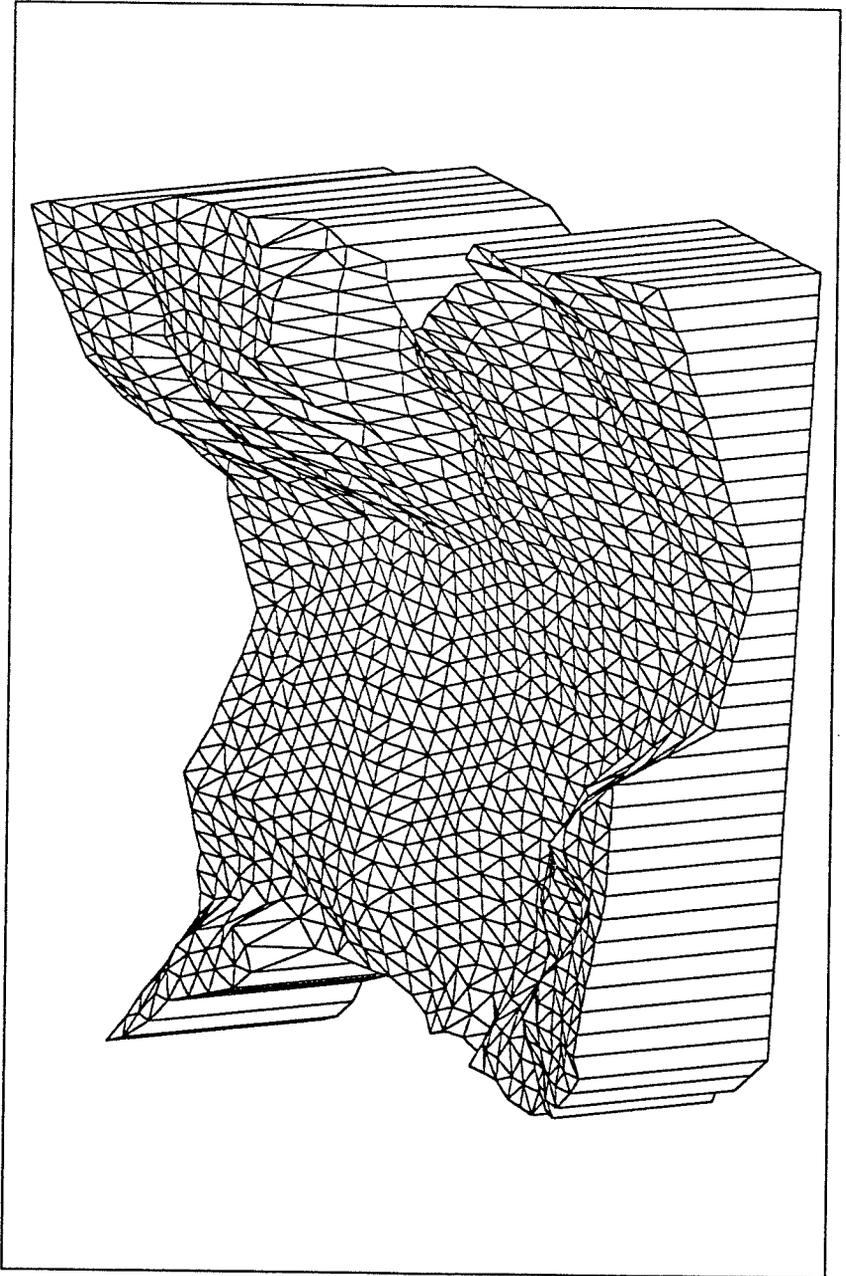


Figure XV.8.
Représentation tridimensionnelle du tronçon la vallée de la Vesdre
qui s'étend approximativement de $x = 10.000$ m à $x = 12.000$ m

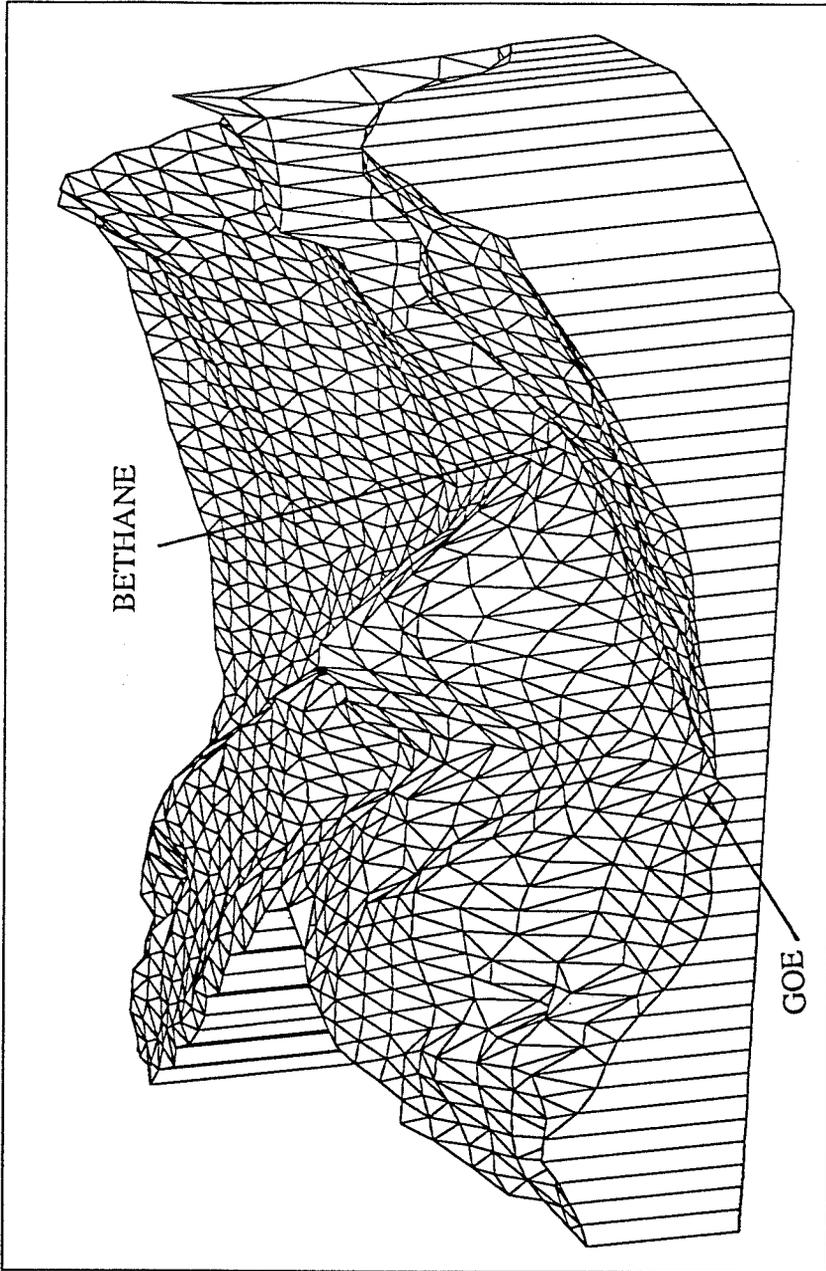


Figure XV.9.
Représentation tridimensionnelle du tronçon la vallée de la Vesdre
qui s'étend approximativement de $x = 12.000$ m à $x = 14.500$ m

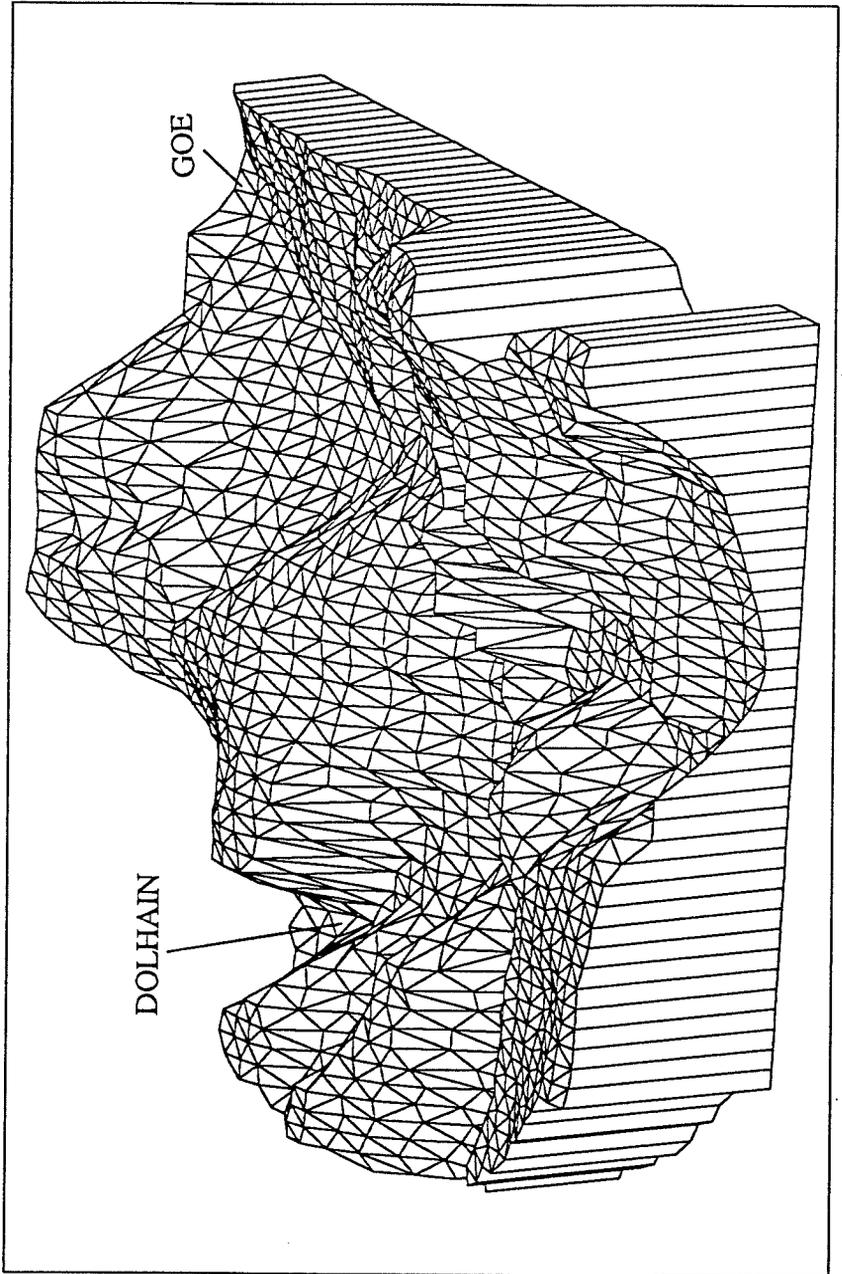


Figure XV.10.
Représentation tridimensionnelle du tronçon la vallée de la Vesdre
qui s'étend approximativement de $x = 14.500$ m à $x = 18.700$ m

L'ensemble du réseau considéré pour la modélisation se compose donc schématiquement de cinq bras qui sont représentés, avec leur longueur et quelques points caractéristiques, à la figure XV.11.

Signalons enfin que nous avons jugé la précision des données obtenues tout à fait satisfaisante pour ce type de calcul, bien qu'elle soit difficilement chiffrable. Nous disposons pour seul point de repère des pratiques françaises qui procèdent, dans ce même exercice, à partir de cartes établies au 1/25.000 (Groupe de Travail du Comité Français des Grands Barrages).

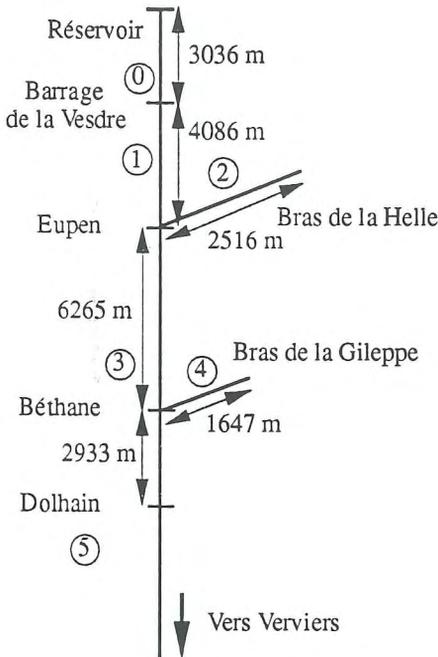


Figure XV.11.
Réseau considéré pour la modélisation

XV.3.2. Paramètres utilisés pour la simulation

Nous avons fixé la distribution des valeurs du coefficient de Manning en respectant la fourchette imposée en France pour ce type de modélisation.

La simulation du site de Bouzey a montré un exemple de distribution très irrégulière à

laquelle elle peut conduire en passant de $n = 0,033$ pour les zones inhabitées non boisées jusqu'à $n = 0,1$ pour la traversée des villes.

Les figures XV.34 à XV.38 reprennent la distribution adoptée au terme de vérifications sur le site des spécificités des sections transversales rencontrées.

Le calcul est essentiellement scindé en deux modélisations successives à cause de la situation très exposée de la ville d'Eupen, déjà soulignée par la simple approche théorique. Nous avons ainsi voulu reproduire la submersion de la ville et obtenir les cotes maximales atteintes sur ce site par une modélisation de propagation sur une topographie plus serrée de profils en travers définis approximativement tous les 50 m. Par contre, la suite de la propagation dans le réseau de vallées a été poursuivie sur un canevas plus classique de profils entredistants d'approximativement 100 m.

Ces deux définitions de discrétisation spatiale permettent d'obtenir une première idée des pas de temps à adopter. En effet, en reprenant la valeur extrême de la vitesse théorique au droit du barrage, donnée par la solution de Stocker, nous obtenons respectivement, pour un nombre de courant unitaire, $\Delta t = 0,8$ s pour la première simulation et $\Delta t = 1,7$ s pour la seconde. La réalité des simulations nous a conduit à tempérer ces conclusions en adoptant finalement $\Delta t = 1$ s pour l'origine du processus et $\Delta t = 4$ s pour la poursuite de la modélisation.

Revenons enfin aux valeurs adoptées pour le calcul préalable des lignes d'eau. Les valeurs extrêmes qui apparaissent à l'origine du processus impliquent des maxima au niveau des lignes initiales. C'est également pour cette raison que nous avons partitionné la modélisation. Ainsi, la valeur de $200 \text{ m}^3/\text{s}$ déjà suggérée pour la ligne d'eau dans le bras principal descendant du barrage jusqu'à la ville d'Eupen représente un extrémum important vis-à-vis des débits routiniers rencontrés dans la rivière mais également une valeur très réduite en regard des pics atteints pour ce premier tronçon. Ces mêmes remarques valent également pour le débit initial injecté dans le bras de la Helle avec $50 \text{ m}^3/\text{s}$.

La transition d'une discrétisation spatiale à l'autre s'est opérée après 750 s de simulation. En aval des fronts instantanés obtenus, nous avons placé une situation stabilisée de lignes d'eau impliquant des débits beaucoup plus réduits, adaptés aux valeurs nettement écrêtées des maxima, soit respectivement $50 \text{ m}^3/\text{s}$ pour le bras III, $30 \text{ m}^3/\text{s}$ pour le bras IV et $80 \text{ m}^3/\text{s}$ pour le bras V.

L'ensemble des deux modélisations s'intéresse approximativement à la première 1/2 heure qui suit l'initiation du processus.

Nous ajusterons cette durée afin d'obtenir la carte d'inondation des deux centres les plus proches, Eupen et Dolhain, ainsi que pour propager le front jusqu'à l'entrée de la ville de Verviers.

Rappelons enfin que la charge numérique a été considérablement réduite en exploitant la possibilité du maillage évolutif, qui suit la progression des fronts dans les bras du réseau, avec une sécurité de 10 mailles.

XV.4. RESULTATS OBTENUS EN HYPOTHESE DE RUPTURE INSTANTANEE

Nous décrivons les conséquences de la propagation en nous intéressant aux différents bras successivement touchés par les fronts de propagation. Mais avant d'envisager cette chronologie qui respecte la numérotation des bras de la figure XV.11., nous examinerons d'abord une première spécificité de cette modélisation qu'est la vidange du lac.

XV.4.1. Vidange de la retenue

La retenue a été assimilée, dans la modélisation, à un bras filaire s'étendant sur 3036 m de long.

Examinons d'abord globalement les mouvements engendrés par la rupture grâce à la représentation tridimensionnelle de la figure XV.12.

Comme pour l'ensemble des figures de ce type qui seront analysées, les valeurs représentées sur ce maillage régulier sont des interpolations exactes du maillage réel adopté pour la simulation. Quant à l'orientation de l'axe des temps, elle sera choisie spécifiquement pour chaque représentation de manière à visualiser le maximum des caractéristiques de l'écoulement.

On peut y examiner trois faits marquants :

- D'une part, la remontée depuis le barrage de l'onde négative qui vient se réfléchir sur la condition de débit amont. La figure XV.12. indique clairement la décroissance, en valeur absolue, de la célérité, qui répercute les profondeurs décroissantes dans lesquelles l'onde se propage. On peut raisonnablement estimer à 270 s le temps approximatif que met l'onde pour parvenir à l'extrémité amont du bassin.
- Bien que l'abscisse $x = 3000$ m ne corresponde pas strictement à celle du barrage, sa proximité eu égard à des mailles régulières de 100 m nous permet de l'y assimiler pour une première conclusion sur une certaine constance de l'altitude de surface libre durant les premiers instants du phénomène (figure XV.12.).

En s'intéressant à l'évolution temporelle de l'altitude de surface libre à l'abscisse réelle du barrage (figure XV.13.), on constate que le phénomène subsiste approximativement durant 100 à 120 s.

Il est remarquable également de constater à la figure XV.12. que la surface libre tend quasi instantanément vers cette valeur après la rupture, ce qui corrobore parfaitement les conclusions établies dans les théories simplifiées. Si nous particularisons leurs résultats à la loi de puissance proposée au paragraphe XV.3.1., nous obtenons, par (XI.29), que la surface libre devrait se stabiliser à la cote 339 m. Les valeurs numériques illustrées à la figure XV.13. sont sensiblement supérieures avec une valeur moyenne estimée à 345 m, soit 41 m de hauteur d'eau.

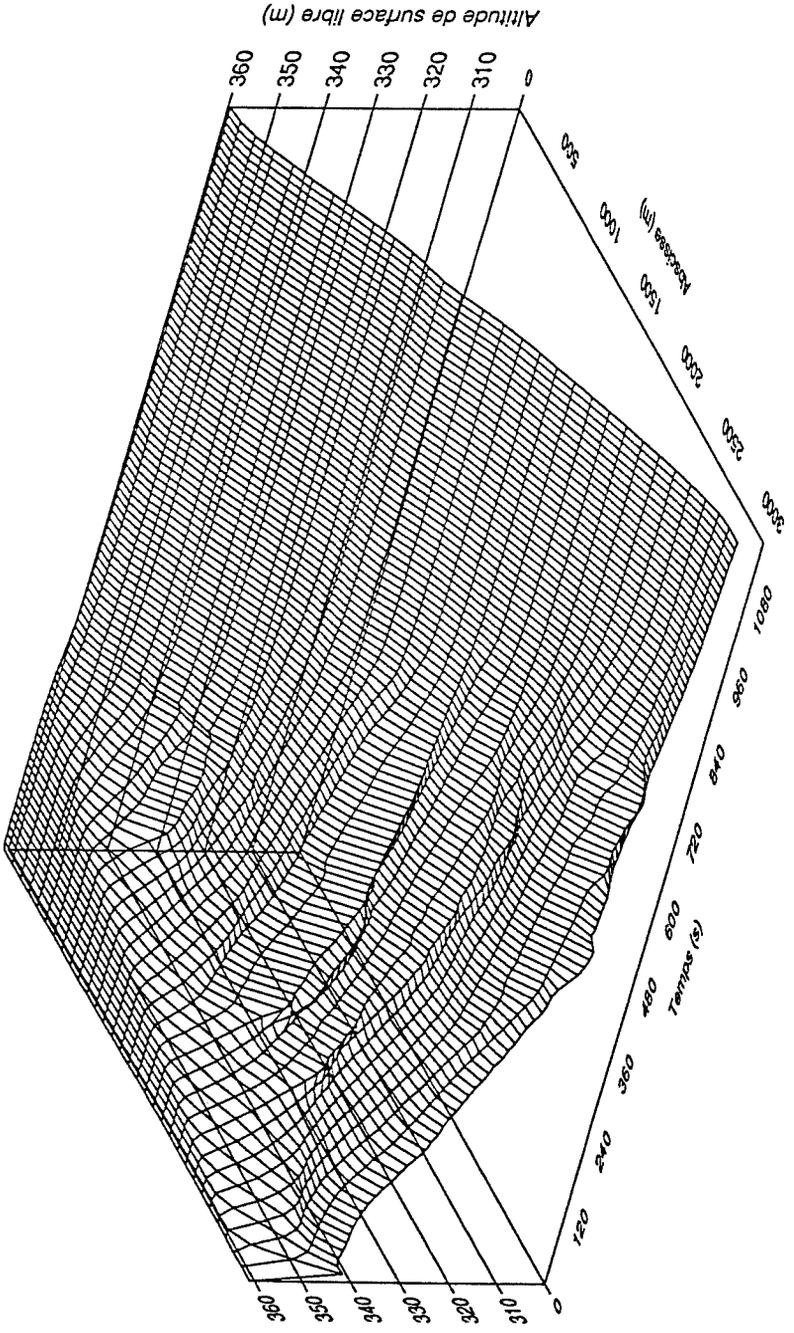


Figure XV.12.
Evolution temporelle de l'altitude de surface libre dans la retenue

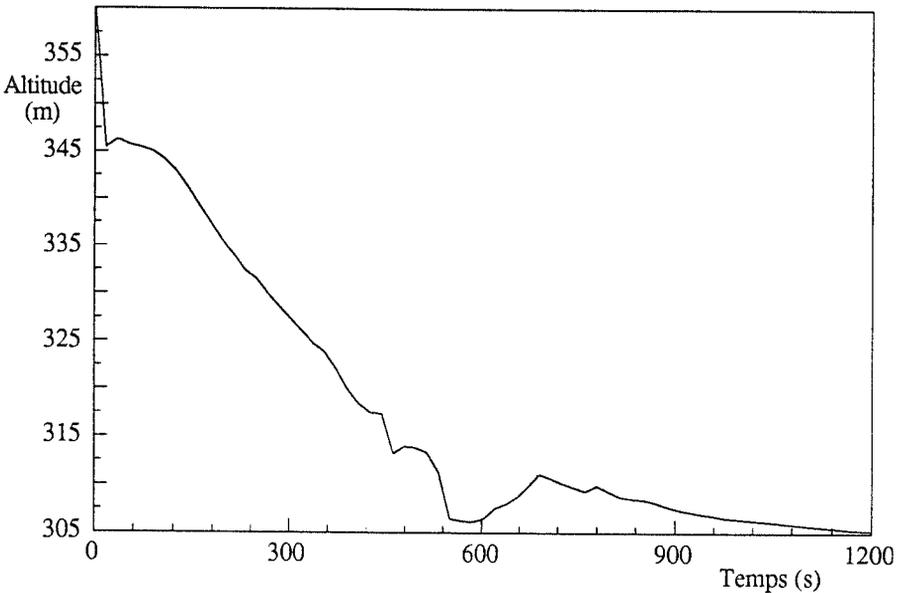


Figure XV.13.
Evolution temporelle de l'altitude de surface libre au droit du barrage

Cette analyse du comportement au droit du barrage nous amène à examiner les débits instantanés qui s'y développent. Ils sont représentés à la figure XV.14.

Le pic de débit est obtenu quasi instantanément après la rupture pour culminer à $108.000 \text{ m}^3/\text{s}$. On devine également le palier de 100 s durant lequel le débit se maintient à des valeurs proches des $100.000 \text{ m}^3/\text{s}$ avant d'entamer une décroissance qui trouve pratiquement son terme après 500 s.

- Lorsque nous reportons cette durée sur la figure XV.12., nous constatons effectivement que la vidange du réservoir est alors presque achevée, puisque 97 % du volume initial sont déjà sortis de la retenue. 1/4 heure après la catastrophe, la surface libre de la retenue ne représente plus qu'une ligne d'eau stabilisée, caractéristique de la condition amont de débit imposé.

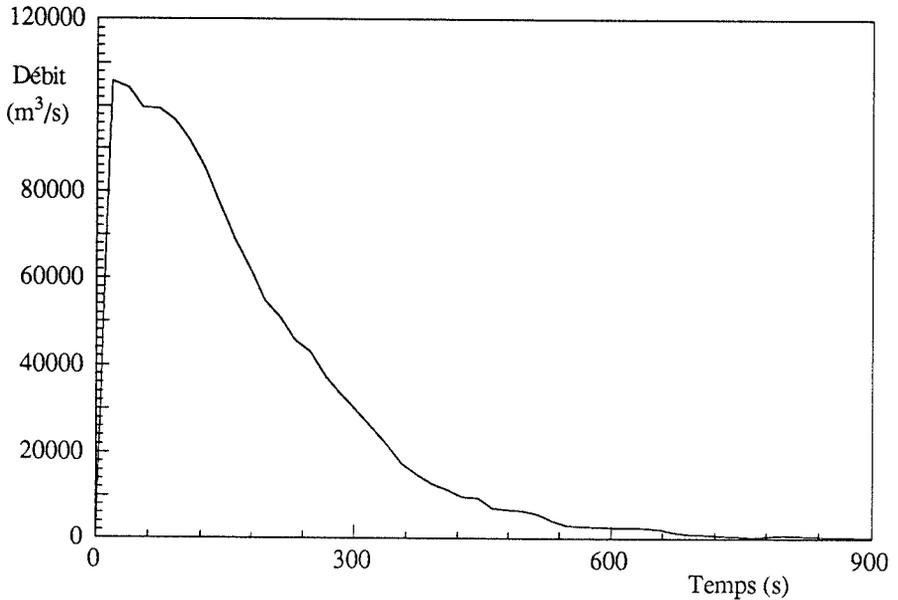


Figure XV.14.
Evolution temporelle du débit de la Vesdre au droit du barrage

XV.4.2. Propagation de l'onde entre le barrage et Eupen

Nous avons clairement indiqué qu'un des buts fondamentaux de la simulation consistait à déterminer le temps de préavis pour les Eupennois. La simulation n'introduit pas de circonstances trop favorables à une propagation très rapide puisque les coefficients de Manning répercutent l'état boisé d'une fraction du parcours, ainsi que la présence d'habitations bien en amont du centre de la ville.

Néanmoins, comme l'indique l'évolution temporelle des lignes d'eau sur ce tronçon à la figure XV.15., la propagation demeure extrêmement rapide avec un front d'onde qui se présente à la confluence avec la Helle après seulement 200 s, ce qui représente une vitesse de propagation moyenne supérieure à 20 m/s.

Ainsi, même si le frottement joue manifestement un rôle primordial en doublant la première estimation théorique, il n'en demeure pas moins que la ville est terriblement exposée, d'autant que l'onde très raide qui la submerge provoque des maxima de hauteur peu de temps après l'arrivée du front, comme le montre la figure XV.16.

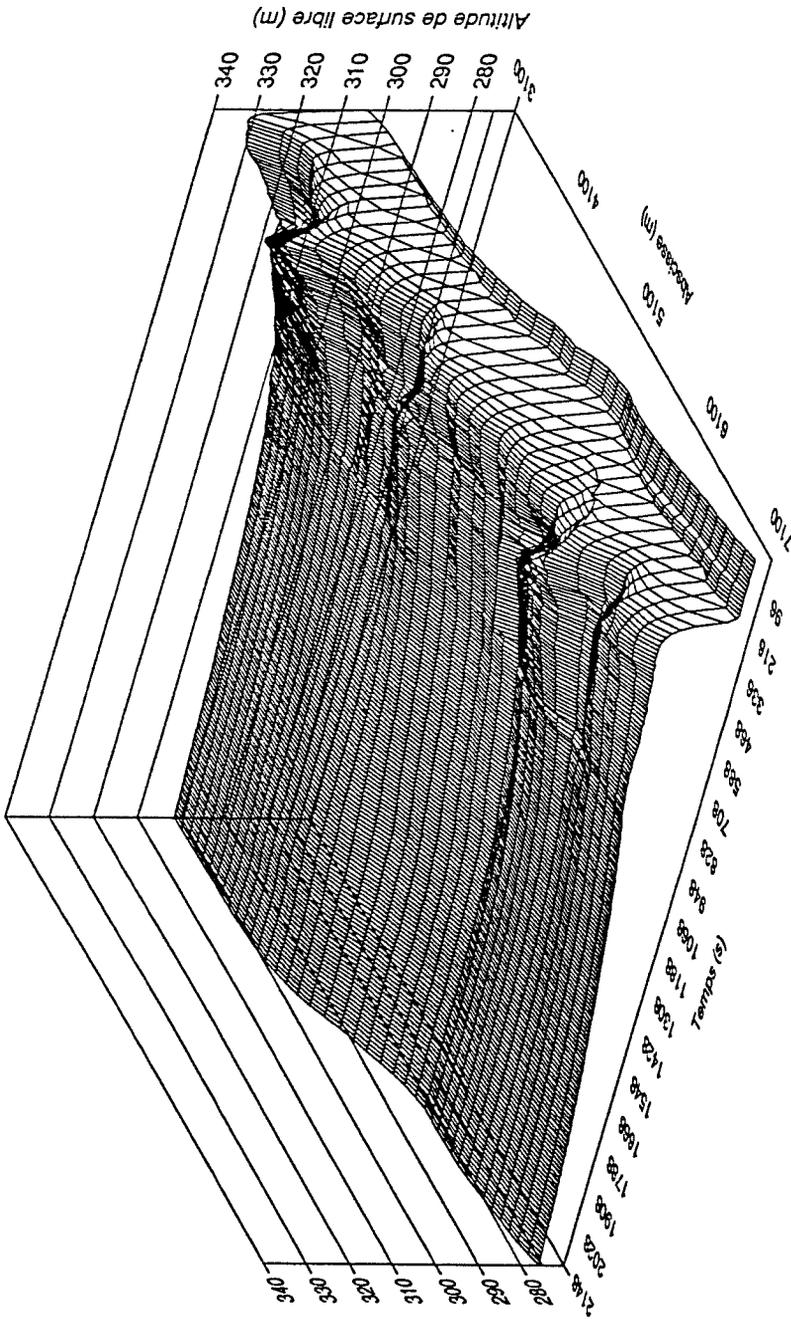


Figure XV.15.
Evolution temporelle de l'altitude de surface libre dans le bras 1,
qui s'étend du barrage jusqu'à Eupen

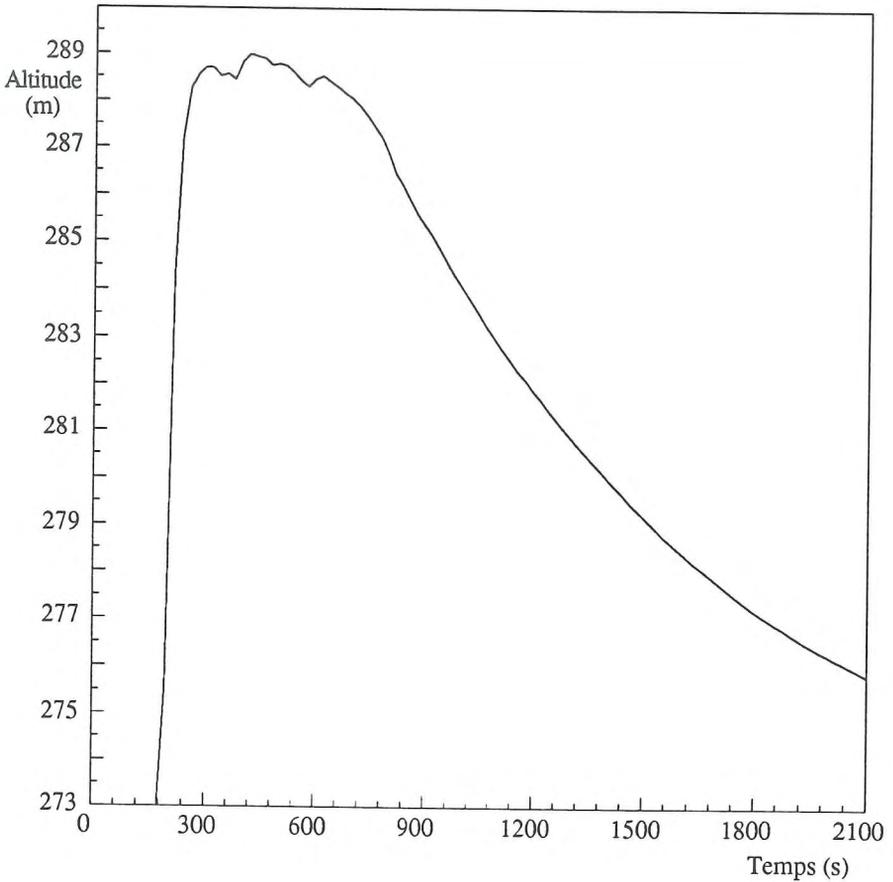


Figure XV.16.
Evolution temporelle de l'altitude de surface libre à Eupen

Cette figure indique en effet que 10 m d'eau submergent déjà la ville après 210 s, tandis que le maximum de hauteur est obtenu après 300s, avec 16 m de profondeur de lame. On constate également qu'un palier maintient des valeurs de profondeur supérieures à 15 m durant près de 500 s avant d'entamer une lente décroissance. Au terme des 36 minutes de modélisation, elle est pratiquement terminée comme le confirme la ligne d'eau stabilisée obtenue à $t = 2148$ s.

Passons à présent sur le diagramme des débits obtenus à Eupen. La figure XV.17., qui reproduit leur évolution temporelle, montre un pic obtenu après 260 s avec une valeur maximale de $54.800 \text{ m}^3/\text{s}$.

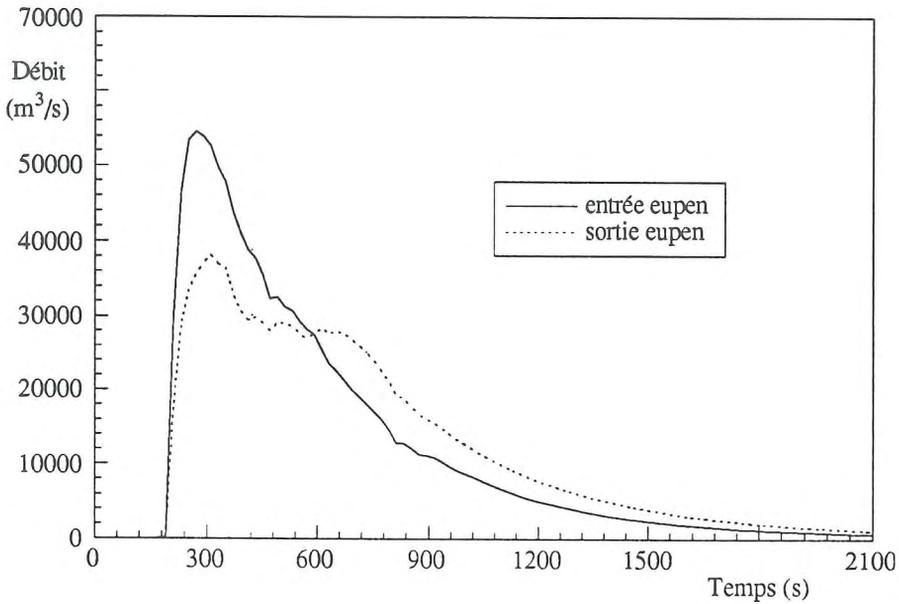


Figure XV.17.
Evolution temporelle du débit de la Vesdre à Eupen

La seule comparaison de ce signal avec celui obtenu au droit du barrage tendrait déjà à confirmer les impressions de la simulation sur le site de Bouzey, avec un écrêtement rapide des diagrammes de débit, puisque nous ne retrouvons plus que 50 % des valeurs extrémales enregistrées à l'origine après une propagation sur à peine plus de 4 kilomètres.

Néanmoins, cette section de confluence risque de ne pas être totalement révélatrice des phénomènes étudiés à cause du rôle important que joue, en cette jonction, le bras de la Helle. C'est pourquoi nous représenterons l'évolution du débit en une section amont, par exemple en $x = 5100$ m, où l'évolution temporelle, donnée à la figure XV.18., confirme bien l'effet d'atténuation pressenti.

En dehors de ces graves conséquences pour la population, déjà soupçonnées, nous l'avons rappelé, lors des péripéties historiques qui virent le refus Eupennois face à un premier projet à leur amont proche, nous pouvons nous attarder sur certaines particularités que développe l'écoulement en amont de ce point stratégique.

D'une part, nous retrouvons en $x = 3400$ m, soit légèrement en aval du barrage, une même tendance à maintenir une profondeur d'eau constante. Mais l'aspect le plus intéressant réside dans l'apparition de ressauts en plusieurs abscisses qui naissent puis se déplacent avant de disparaître très graduellement lors de la décrue.

Le plus visible à la figure XV.15. est celui qui se forme approximativement à 900 m à

l'aval du barrage. En cet endroit, on cumule effectivement un élargissement de section avec une pente de fond beaucoup plus faible qu'à son amont immédiat. La remise en charge des lignes instantanées est particulièrement marquée avec des différences de hauteur sur une maille qui dépassent les 16 m ! Ce ressaut présente en plus la particularité de remonter progressivement vers la section du barrage dont il finit, en s'éteignant, par influencer l'écoulement, comme le prouve le sursaut dans la figure XV.13., aux alentours des 600 s.

Il faut remarquer que si cette particularité tient d'abord lieu de curiosité notamment numérique, puisque son incidence sur les résultats en une région inhabitée n'est pas déterminante, elle est primordiale pour démontrer que le logiciel est à même de les prendre en charge sans que le reste de la simulation n'en soit perturbé.

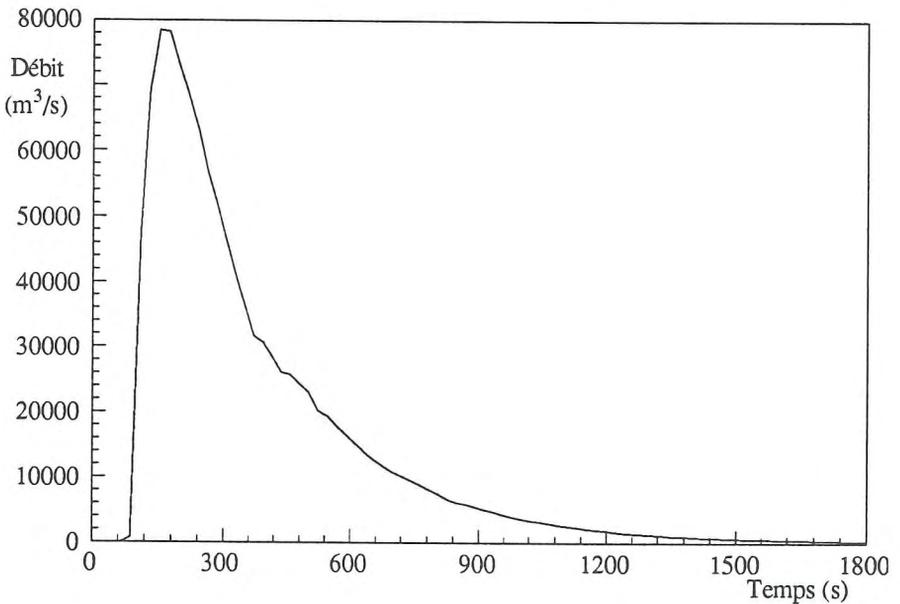


Figure XV.18.
Evolution temporelle du débit de la Vesdre en $x = 5300$ m
(soit 2100 m en aval du barrage)

XV.4.3. Remontée d'un front secondaire dans le bras latéral de la Helle

On peut intuitivement admettre que la capacité de stockage du bras latéral de la Helle ne peut que contribuer à quelque peu atténuer les effets catastrophiques de l'onde sur les maxima de hauteur atteints dans la ville.

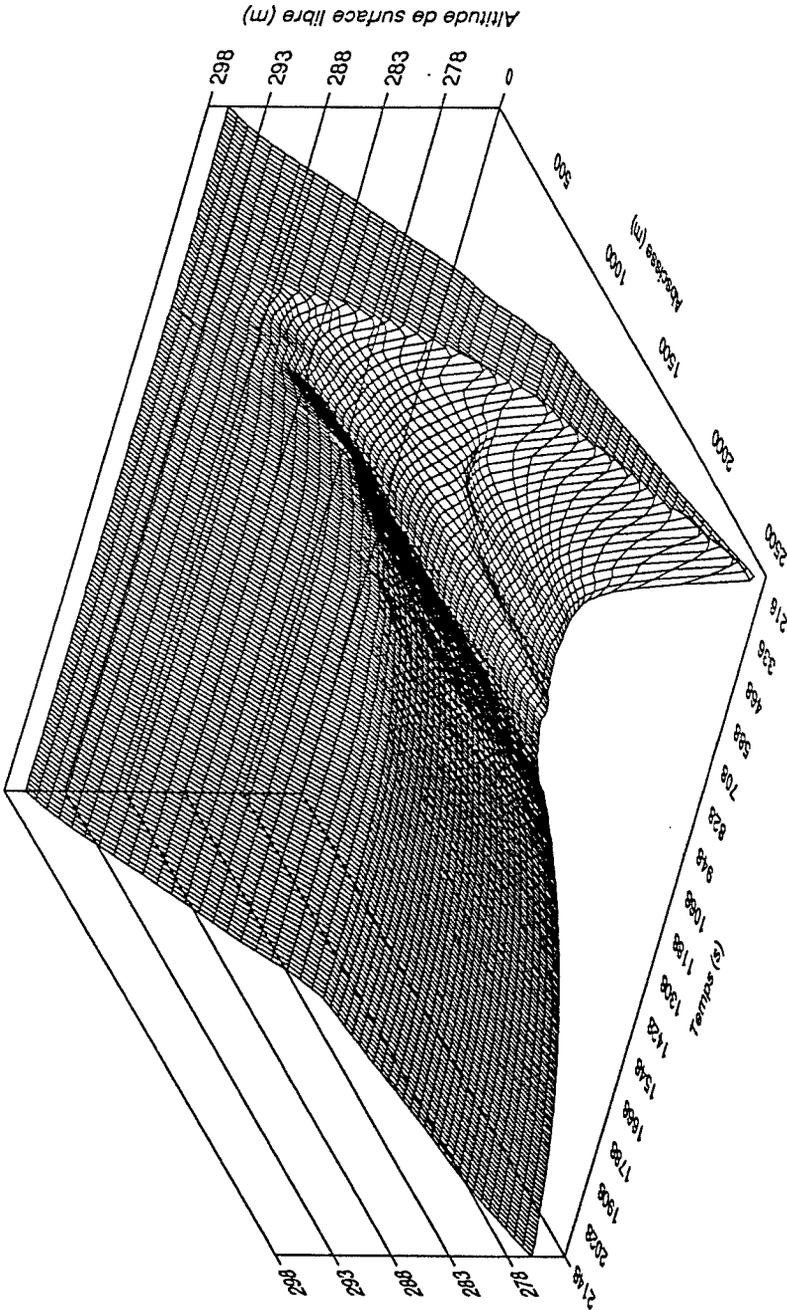


Figure XV.19. Evolution temporelle de l'altitude de surface libre dans le bras latéral 2, celui de la Helle

La figure XV.19., qui représente l'évolution temporelle des lignes d'eau de la Helle, montre effectivement qu'un front secondaire remonte sur plus de 2100 m jusqu'à venir mourir sur le relèvement progressif de la cote du fond de vallée. Rappelons que la jonction à Eupen se situe, pour ce bras, à l'abscisse locale $x = 2500$ m, tandis que la condition limite de débit à l'amont pour la ligne d'eau s'applique en $x = 0$ m.

En dehors de fronts bien plus marqués lors de la crue qu'à la décrue, une particularité de cette figure est de répercuter l'effet de changement de discrétisation spatiale, qui s'est opéré à $t = 752$ s. On décèle cet effet par un soubresaut dans le semblant de palier qu'adopte la surface libre à Eupen pour des valeurs proches de son maximum.

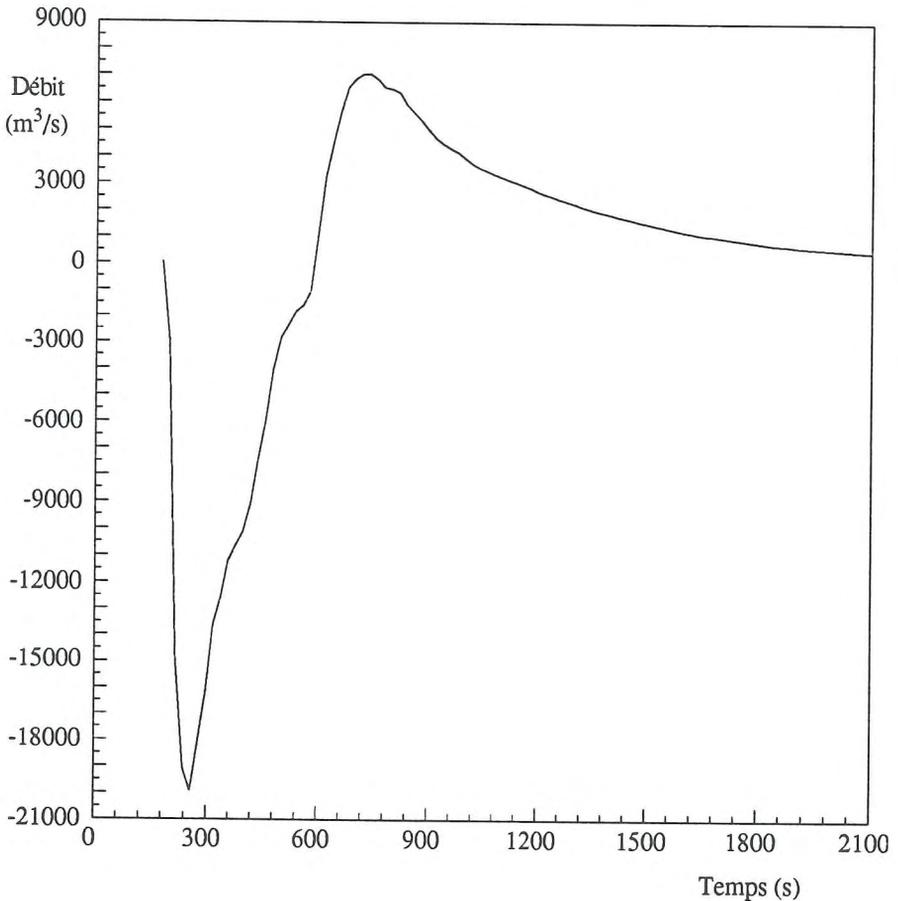


Figure XV.20.
Evolution temporelle du débit de la Helle à Eupen

Au niveau des débits dans la Helle, la courbe de leur évolution temporelle à Eupen (figure XV.20.) montre un maximum à la remontée de $20.000 \text{ m}^3/\text{s}$ ainsi qu'une annulation à $t = 590 \text{ s}$.

Cette dernière référence nous permet d'évaluer le volume maximum stocké dans cette ramification. Il s'établit à $4.049.000 \text{ m}^3$, soit 16 % du volume total de la retenue.

XV.4.4. Propagation du front principal entre Eupen et Béthane

Par ses capacités de stockage et sa lente décrue, la vallée de la Helle remanie complètement la distribution temporelle de l'onde qui se propage vers l'aval.

Ainsi, nous constatons par la figure XV.17., qui représente également l'évolution temporelle des débits à la sortie d'Eupen, que l'onde adopte, dans sa phase de croissance, une forme beaucoup plus graduelle qu'auparavant, indépendamment des maxima atteints qui connaissent une substantielle réduction.

C'est cet ensemble de faits qui, lors de la transition de discrétisation, nous a autorisé à adopter des pas temporels nettement plus importants ainsi qu'à revoir les valeurs de lignes d'eau initiales à la baisse.

Il en résulte également une évolution temporelle de lignes d'eau, représentée à la figure XV.20., beaucoup moins perturbée, avec une vitesse moyenne de propagation du front sur le tronçon qui avoisine à présent les 9.2 m/s .

Quoi qu'il en soit, les maxima de hauteur atteints sur le profil en long de ce tronçon n'indiquent pas de substantielle réduction, comme le confirme la figure XV.22. reprenant l'évolution temporelle des hauteurs d'eau à son extrémité aval, Béthane. Car si l'onde parvenant à la confluence avec la Gileppe en $t = 800 \text{ s}$ met à présent 220 s pour submerger le lieu sous 10 m , (pour 10 s à hauteur d'Eupen !), on obtient finalement une lame maximale encore supérieure à 15 m à $t = 1400 \text{ s}$.

Quant au signal de débit au même endroit, la figure XV.23. indique qu'il subit un nouvel écrêtement avec un extremum limité à $19.400 \text{ m}^3/\text{s}$ en $t = 1330 \text{ s}$.

La vallée de la Gileppe joue, à ce niveau, un rôle en tous points identique à celui du bras de la Helle.

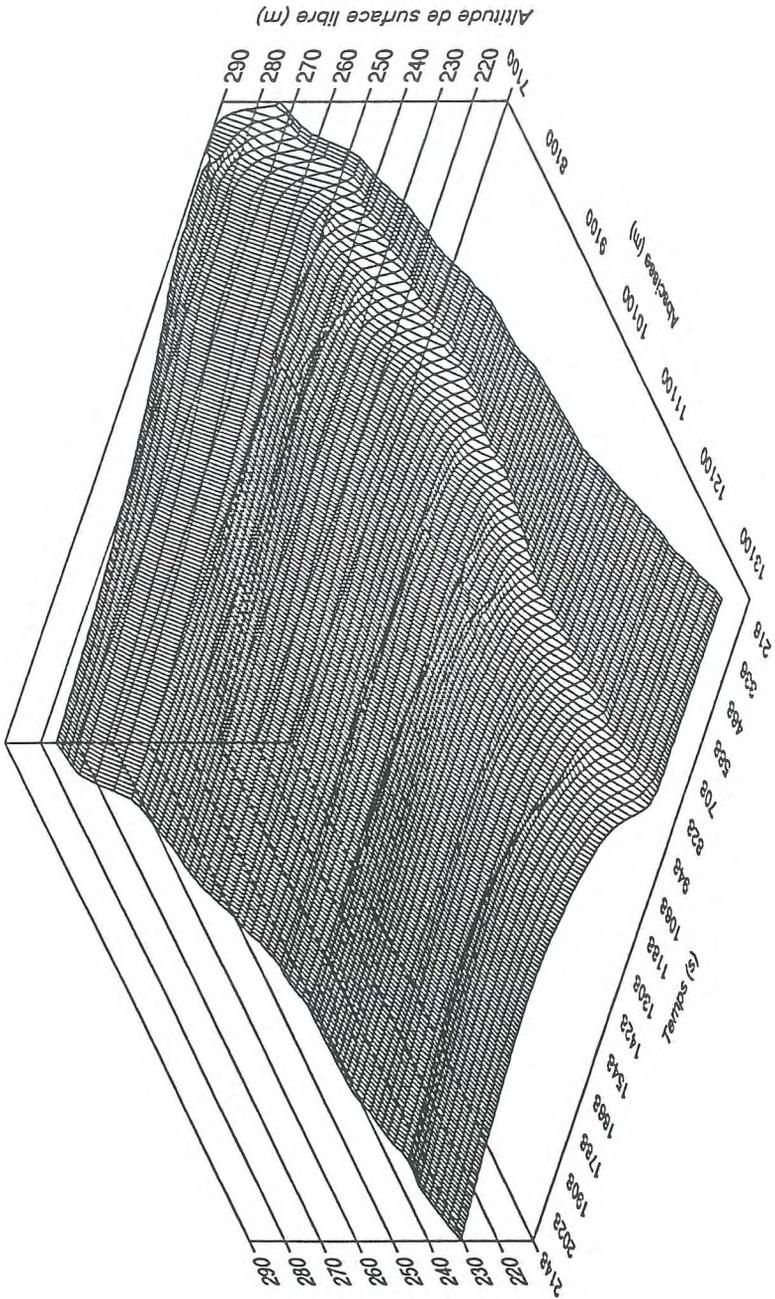


Figure XV.21.
Evolution temporelle de l'altitude de surface libre dans le bras 3,
qui s'étend d'Eupen jusque Béthane

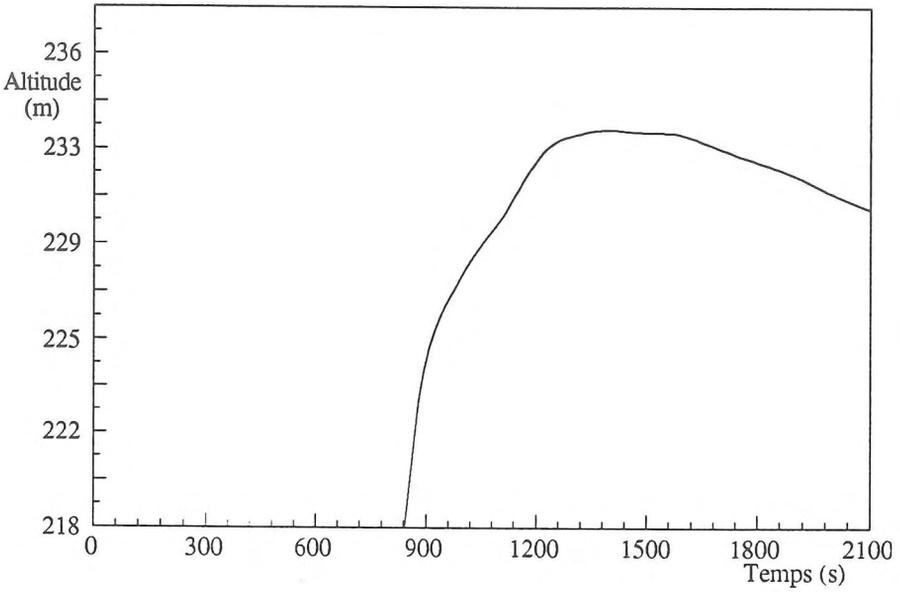


Figure XV.22. - Evolution temporelle de l'altitude de surface libre à Béthane

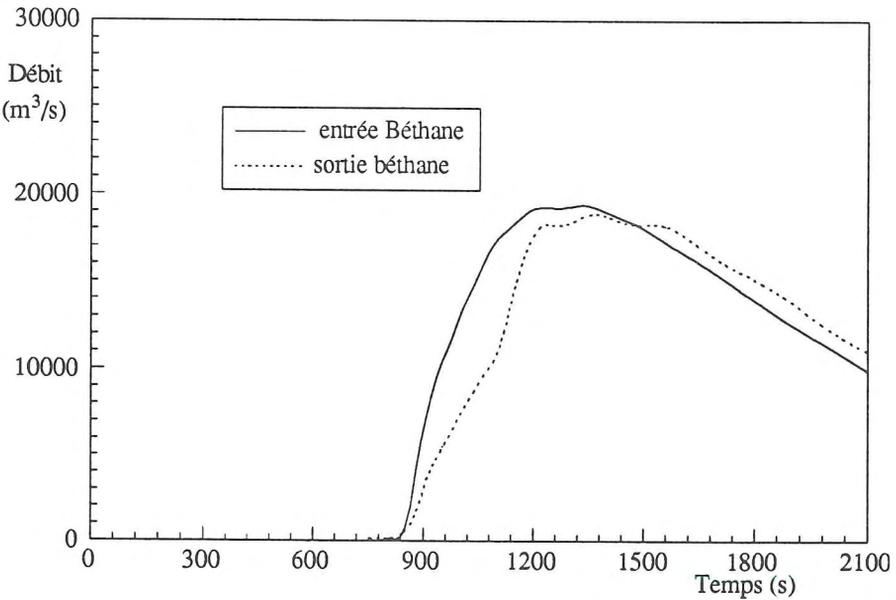


Figure XV.23. - Evolution temporelle du débit de la Vesdre à Béthane

XV.4.5. Remontée d'un front secondaire dans le bras latéral de la Gileppe

L'évolution temporelle des lignes d'eau dans ce second bras latéral, représentée à la figure XV.25., reprend une allure familière après l'examen de celle de la Helle.

On constatera cependant la différence d'aspect des fronts instantanés qui prennent la forme de transitions beaucoup plus graduelles de la surface libre. Le front remonte cette fois sur 1200 m pour venir "mouiller le pied" du barrage de la Gileppe.

Le pic absolu de débit dans ce bras ne dépasse plus les $6640 \text{ m}^3/\text{s}$, comme l'indique la figure XV.24., tandis que l'inversion du sens des débits, en $t = 1480 \text{ s}$, nous permet à nouveau une évolution des quantités maximales stockées. On obtient $1.904.000 \text{ m}^3$ accumulés, soit 7,6 % du volume de la retenue initiale.

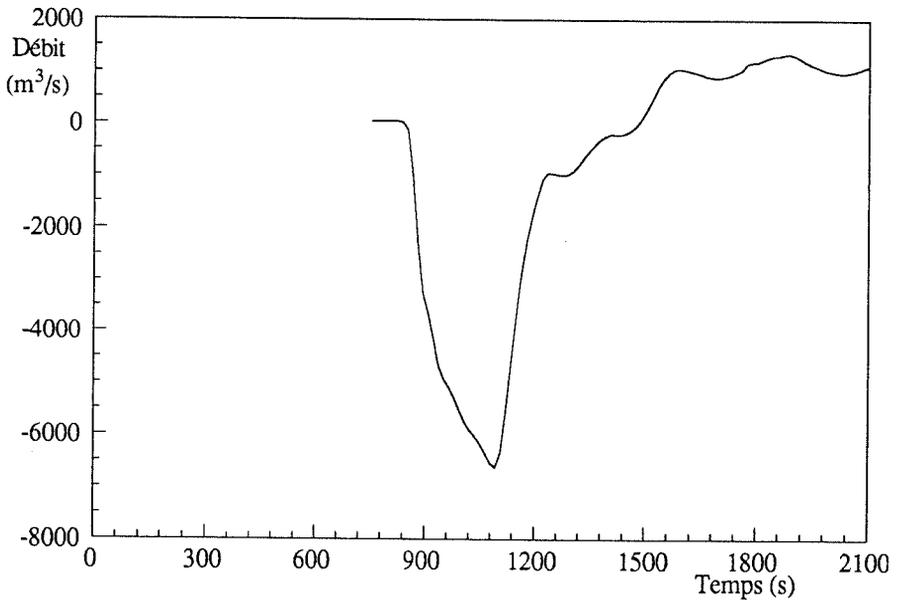


Figure XV.24.
Evolution temporelle du débit de la Gileppe à Béthane

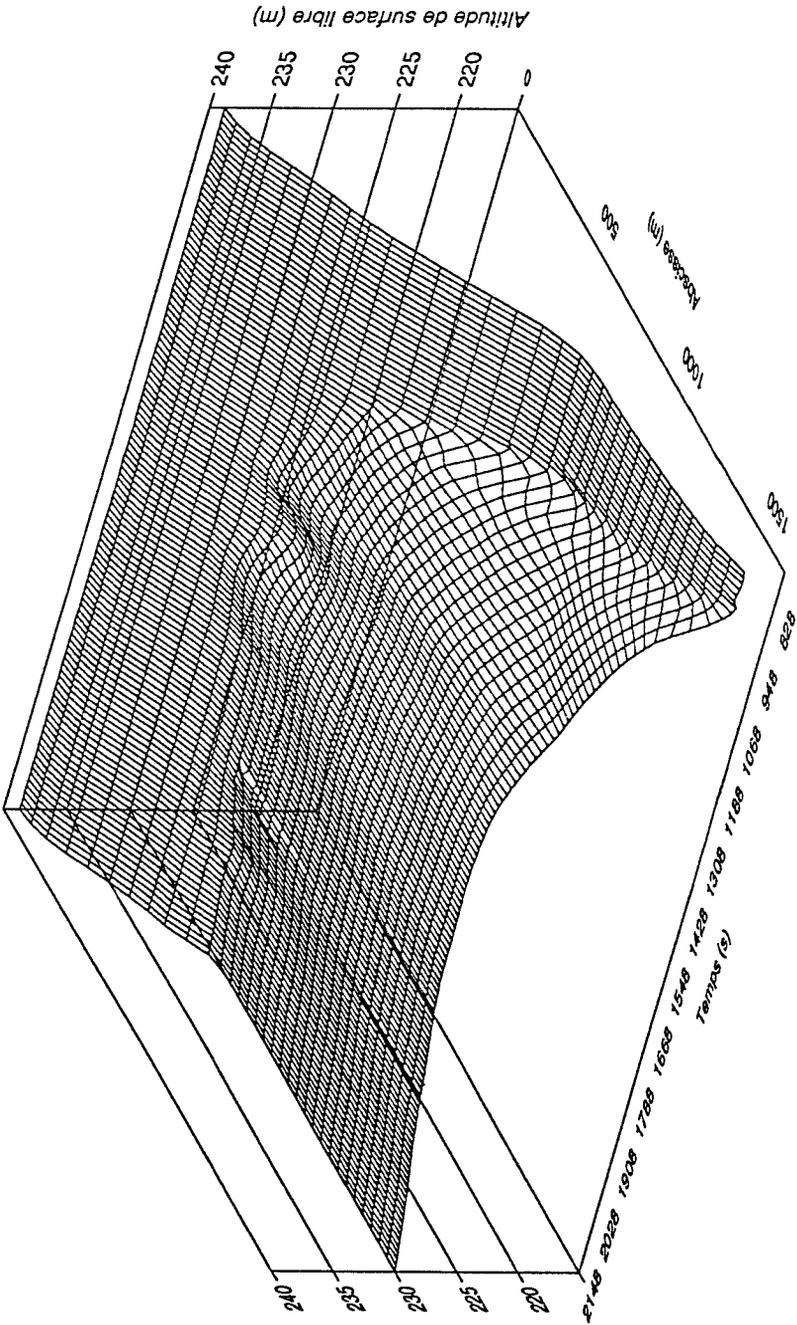


Figure XV.25. Evolution temporelle de l'altitude de surface libre dans le bras latéral 4, celui de la Gilleppe.

XV.4.6. Propagation du front principal entre Béthane et Verviers

Cette seconde confluence produit un nouvel infléchissement dans la forme des évolutions temporelles, comme le montre la figure XV.23., pour le débit calculé à la sortie de Béthane. L'action du bras latéral porte ici davantage sur un lissage de la forme du front, réduisant sensiblement la vitesse de montée des eaux, tandis que le maximum de débit conserve sensiblement la même valeur.

La propagation, interrompue au terme de 2158 s de modélisation, atteint alors les faubourgs de la ville de Verviers qui réclame, pour l'étude de sa submersion, de plus amples indications sur sa topographie.

La figure XV.26., qui reproduit l'évolution temporelle des lignes d'eau dans ce dernier tronçon, complète la démonstration d'un front très lissé, progressant de plus en plus lentement avec une vitesse moyenne de l'ordre de 5,9 m/s. Cette même figure montre l'influence prépondérante qu'exerce la pente de fond sur les variations de cette vitesse.

La présence de la ville de Dolhain dans ce tronçon nous pousse à examiner le diagramme d'évolution temporelle de hauteur obtenue. L'allure générale de la courbe de la figure XV.27., ainsi que les valeurs obtenues, laissent présager de maxima quasiment atteints à l'issue de la modélisation.

Elle indique à nouveau que si la montée des eaux se produit beaucoup plus graduellement à partir de $t = 1300$ s, avec un laps de temps de 370 s pour obtenir 10 m de profondeur, on parvient encore à une profondeur maximale supérieure à 15 m de l'issue des 2158 s de modélisation.

Quant à la courbe des débits, l'écêtement des valeurs maximales atteintes se poursuit, comme l'indique la figure XV.28., avec des valeurs désormais inférieures à $13000 \text{ m}^3/\text{s}$.

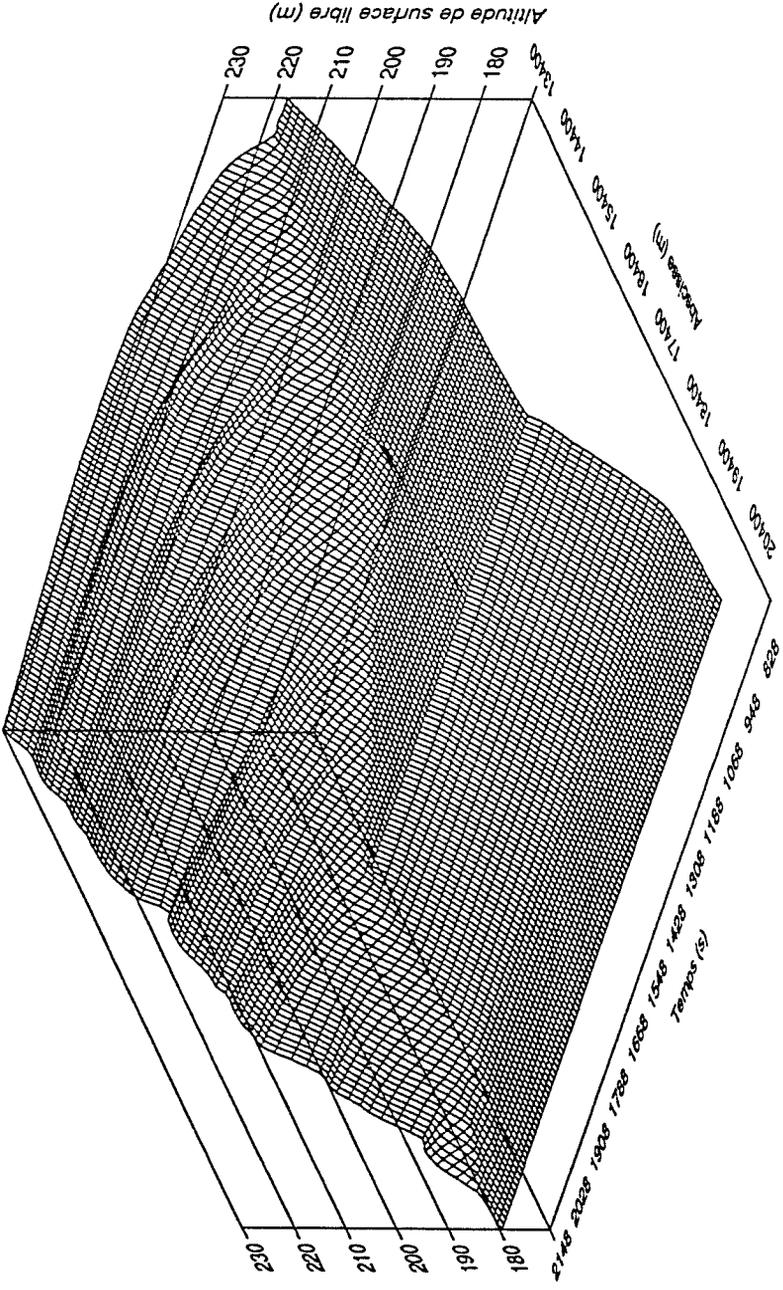


Figure XV.26.
Evolution temporelle de l'altitude de surface libre dans le bras 5,
qui s'étend de Béthane à Dolhain

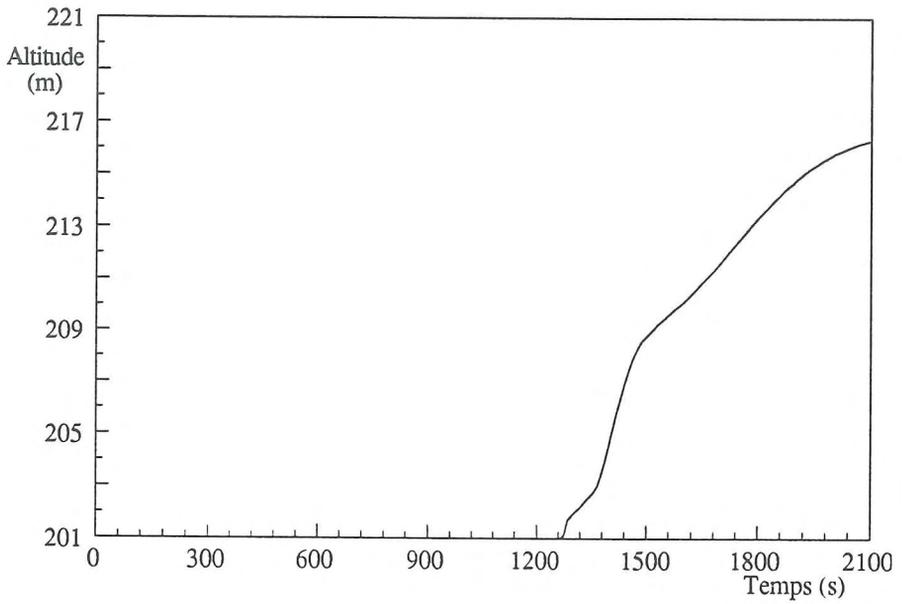


Figure XV.27. - Evolution temporelle de l'altitude de surface libre à Dolhain

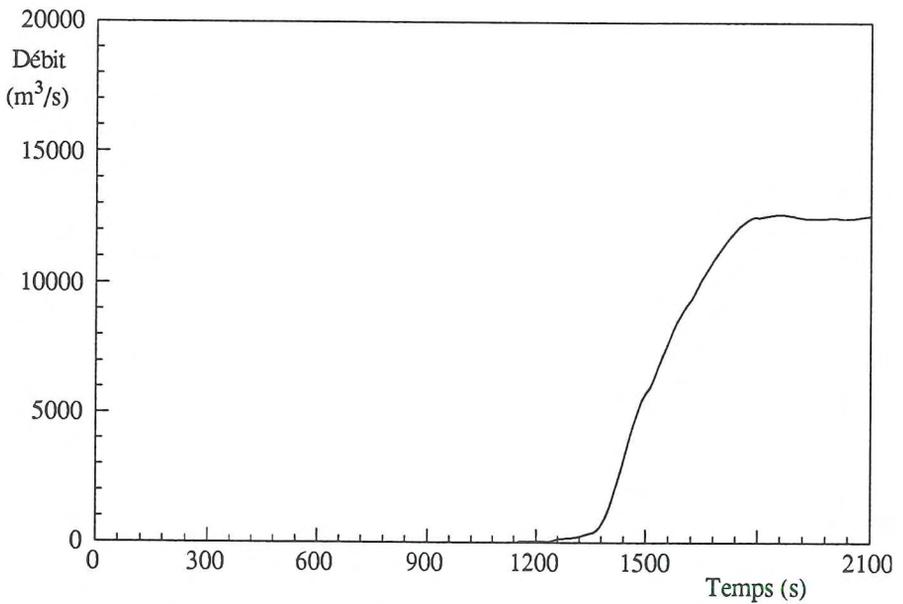


Figure XV.28. - Evolution temporelle du débit de la Vesdre à Dolhain

XV.4.7. Etablissement des cartes d'inondation dans les différents tronçons

Les figures XV.29. à XV.33. délimitent les zones inondables tandis que les figures XV.34. à XV.38. résument les grandeurs significatives de la modélisation pour chaque bras, avec notamment les temps d'arrivée du front et le temps pour atteindre le maximum de hauteur.

En particulier, elles synthétisent les indications progressivement stockées au cours de la simulation concernant le temps d'arrivée du front, la hauteur maximale atteinte ainsi que le temps correspondant depuis l'initiation du processus, et ce, pour chaque abscisse discrétisée.

Cette concentration d'informations sur le phénomène nous confirme une dernière fois que si la vitesse de propagation subit d'importantes variations au long du chemin parcouru, les hauteurs maximales font preuve quant à elles de constance dans les ordres de grandeur des maxima atteints, même si leur évolution temporelle pour y parvenir trahit un lissage significatif du front dans son parcours.

De façon très succincte, nous retiendrons la vitesse de 20 m/s pour le front dans le premier tronçon, une vitesse moyenne de 11 m/s sur l'ensemble du parcours, enfin une hauteur moyenne de submersion proche des 15 m.

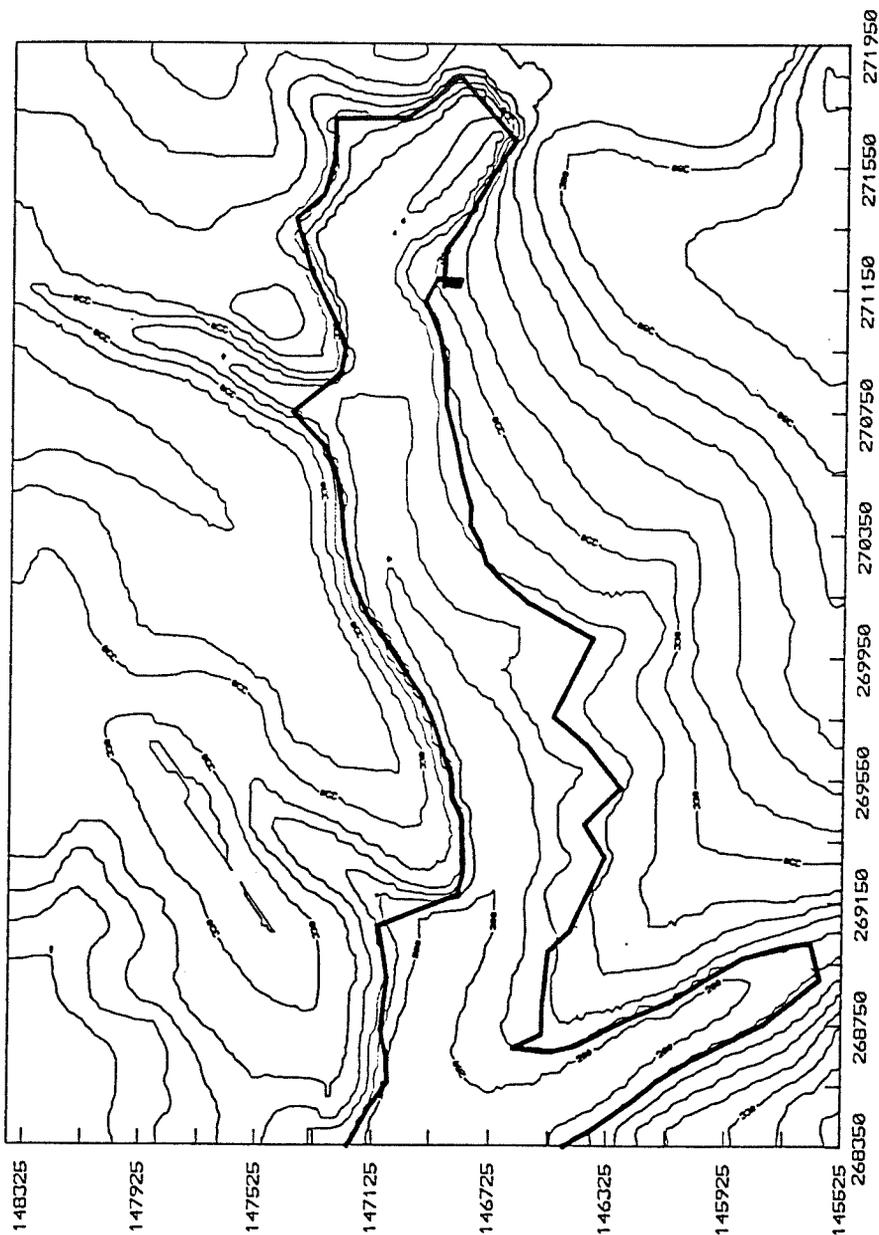


Figure XV.29.
Carte des zones immergées correspondant
à la représentation tridimensionnelle de la figure XV.6.

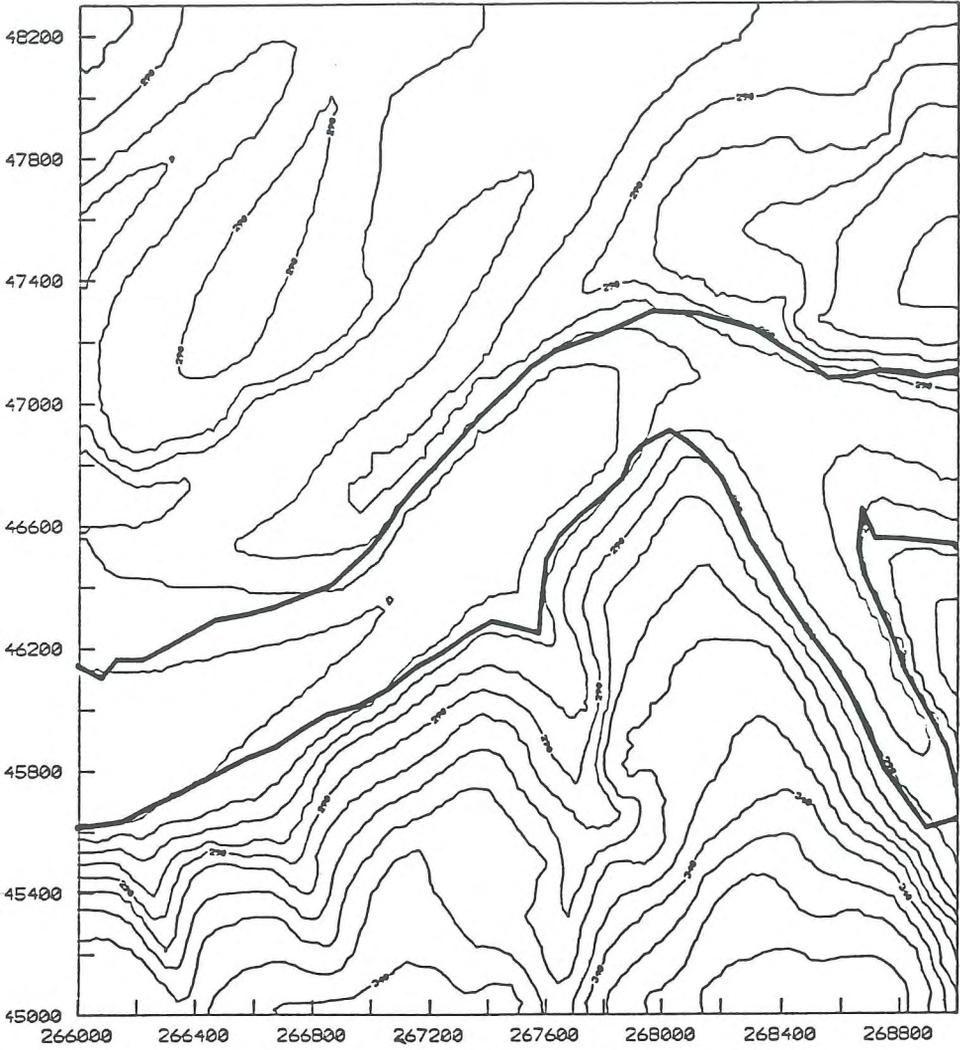


Figure XV.30.
Carte des zones immergées correspondant
à la représentation tridimensionnelle de la figure XV.7.

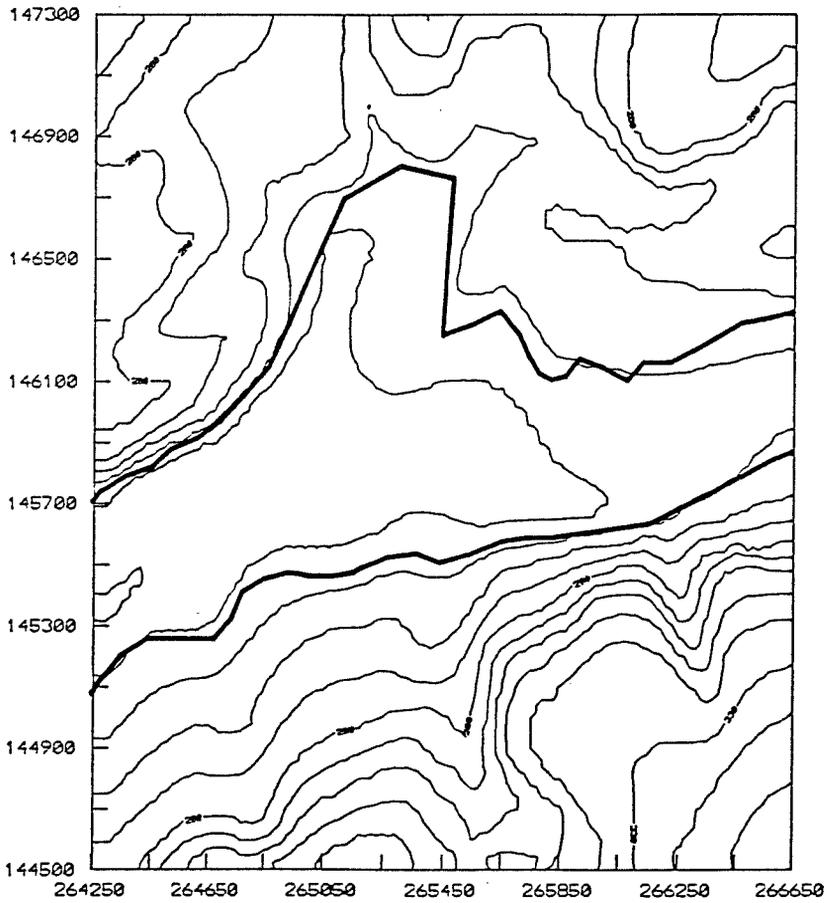


Figure XV.31.
Carte des zones immergées correspondant
à la représentation tridimensionnelle de la figure XV.8.

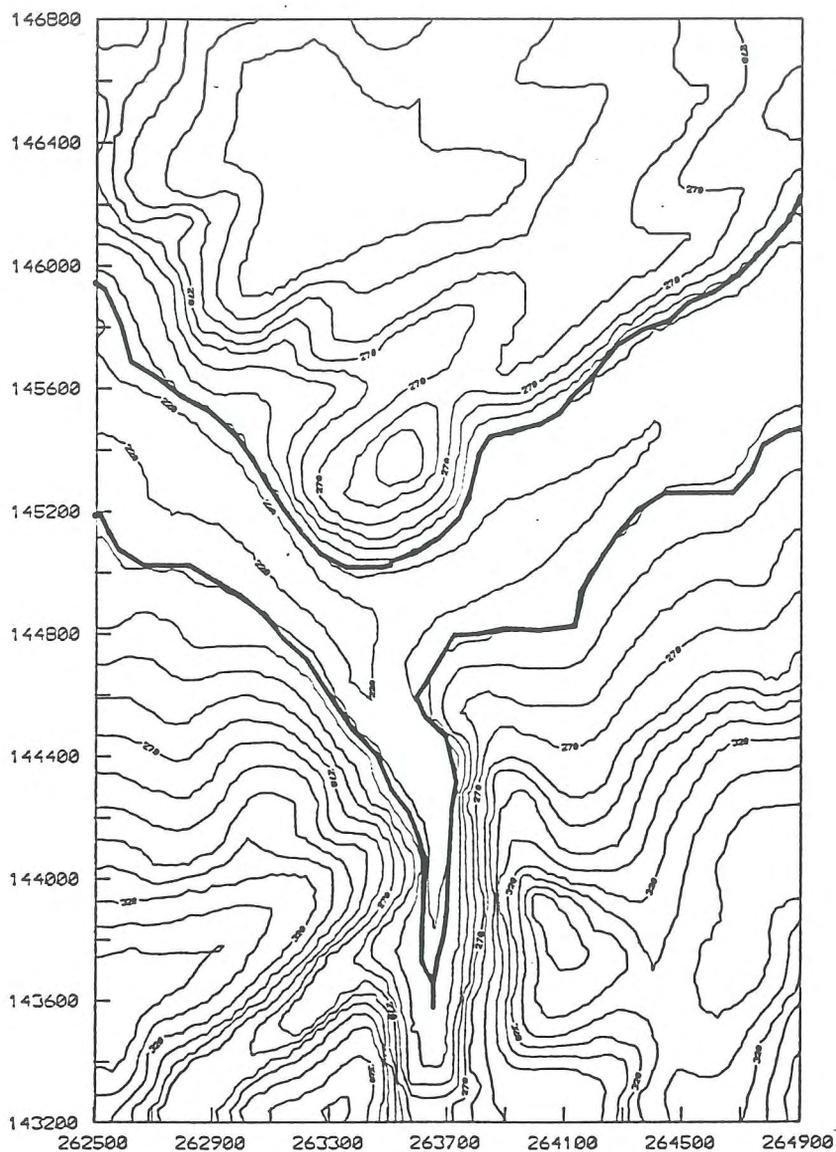


Figure XV.32.
Carte des zones immergées correspondant
à la représentation tridimensionnelle de la figure XV.9.

BRAS 2 : BRAS DE LA HELLE

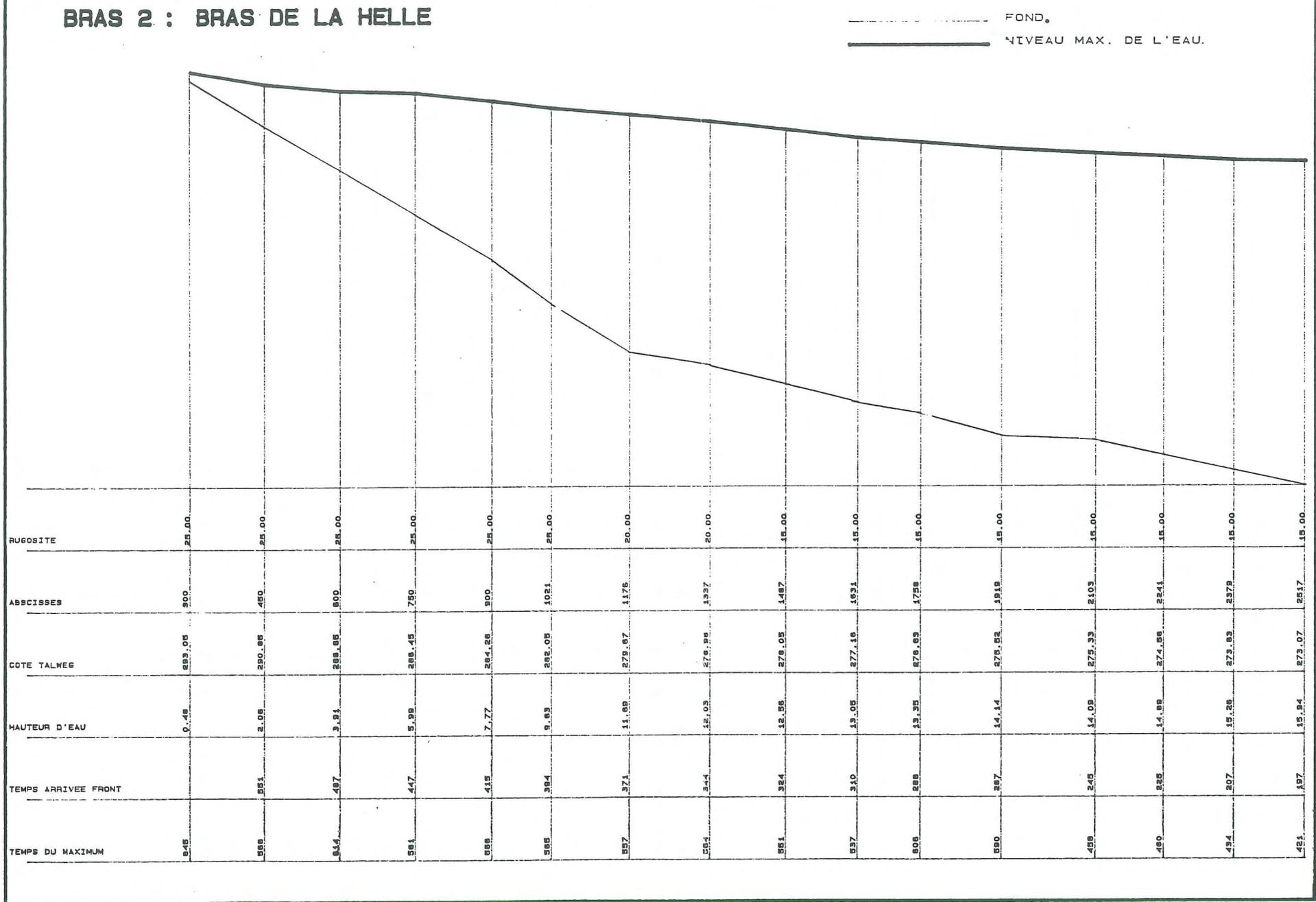


Figure XV.35.
 Carte de temps d'arrivée du front, de maximum de hauteur atteinte
 et du temps pour l'obtenir, pour le bras 2 de la Helle

BRAS 3 : EUPEN-BETHANE

— FOND.
 — NIVEAU MAX. DE L'EAU.

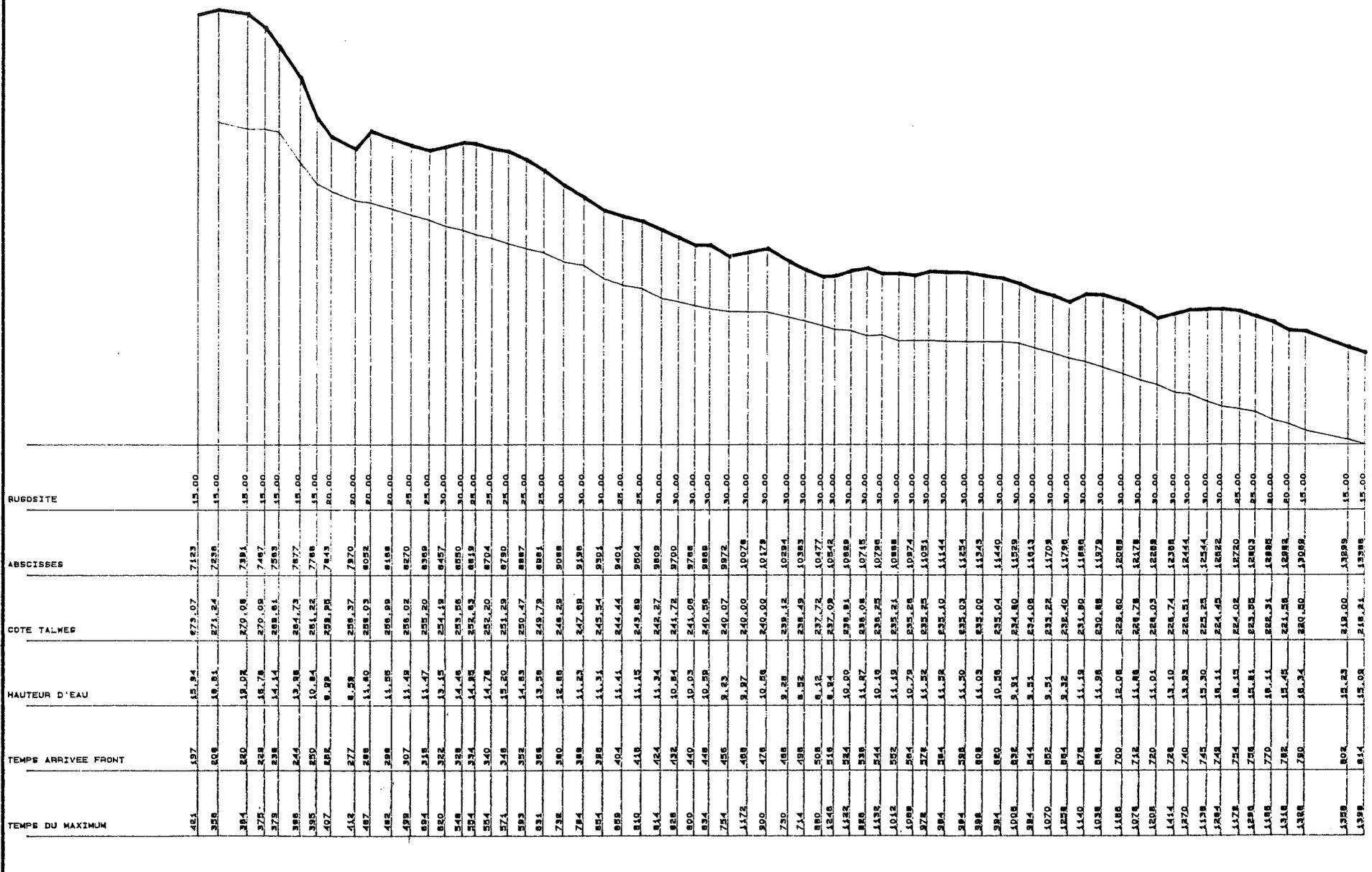


Figure XV.36.

Carte de temps d'arrivée du front, de maximum de hauteur atteinte et du temps pour l'obtenir, pour le bras 3 qui s'étend d'Eupen jusque Béthane

BRAS 4 : BRAS DE LA GILEPPE

— FOND.
 — NIVEAU MAX. DE L'EAU.

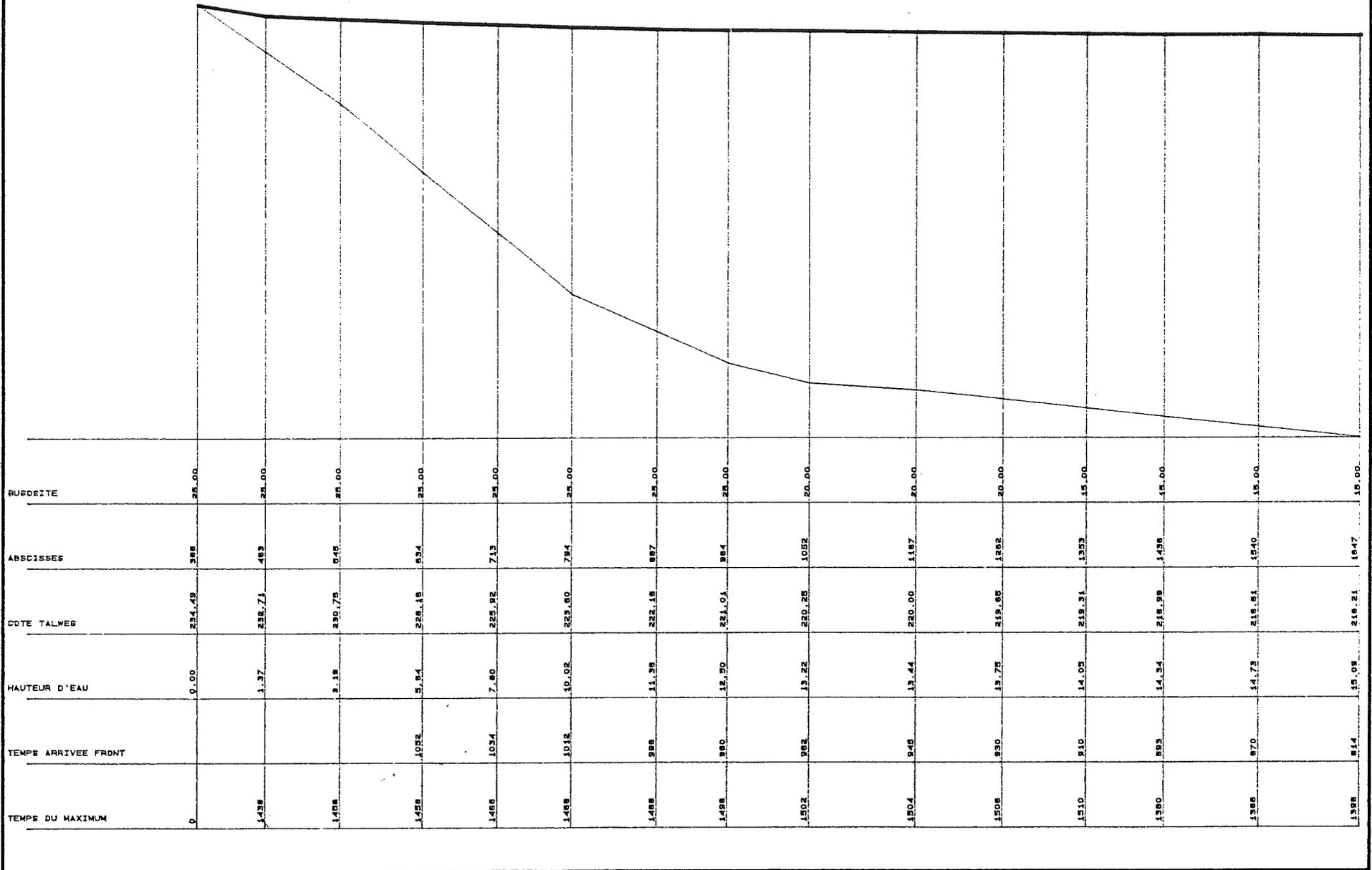


Figure XV.37.

Carte de temps d'arrivée du front, de maximum de hauteur atteinte et du temps pour l'obtenir, pour le bras 4 de la Gileppe

BRAS 5 : BETHANE-DOLHAIN

— FOND.
 — NIVEAU MAX. DE L'EAU.

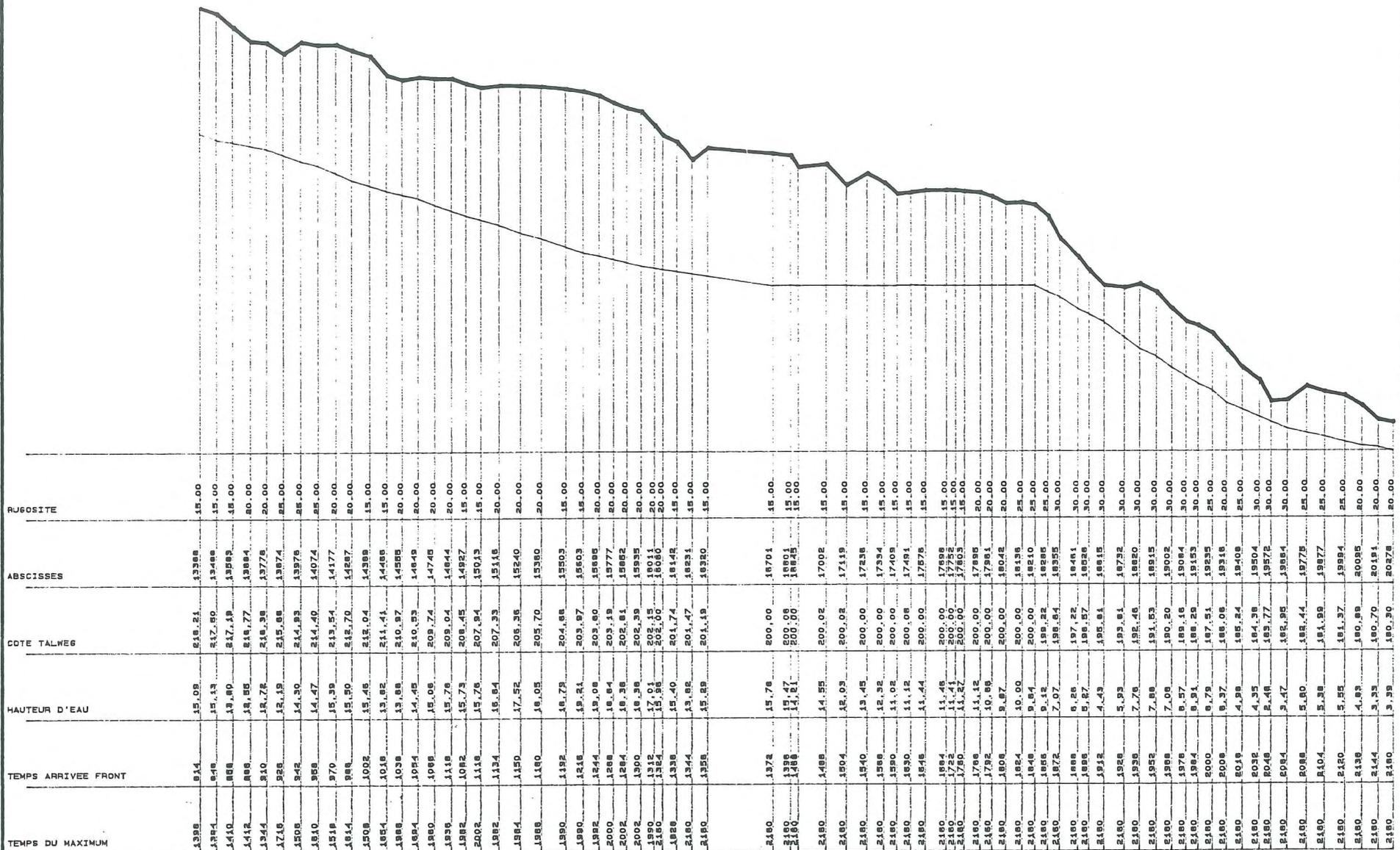


Figure XV.38.

Carte de temps d'arrivée du front, de maximum de hauteur atteinte et du temps pour l'obtenir, pour le bras 5 qui s'étend de Béthane à Dolhain

XV.5. CONCLUSION

Les conséquences dramatiques qu'occasionne une rupture d'un ouvrage de retenue à son aval incitent aujourd'hui nombre de pays à entreprendre des études poussées d'incidence pour les intégrer dans une politique de prévention et de protection des populations et des biens.

Le fait que la Belgique n'ait connu jusqu'à ce jour aucun drame de ce type ne peut totalement justifier qu'aucune analyse de ce type, en géométrie réelle, n'ait, à notre connaissance, jamais été réalisée, d'autant que la gravité de ces éventualités particularisées à nos contrées a déjà été largement soulignée (Dehousse et al).

Certes, les décisions belges face au choix du type de barrage à construire a toujours privilégié un aspect sécuritaire qui s'est concrétisé au fil des années, mais la densité croissante de population qui s'installe en aval des sites ne peut laisser indifférent, d'autant que les possibilités numériques ouvrent des perspectives intéressantes dans l'établissement, en conditions réalistes, d'ordres de grandeur du phénomène.

Ces études ne trouvent cependant leur pleine utilité qu'au travers de la mise en place d'un dispositif d'alerte efficace ainsi que de plans d'évacuation.

La simulation des conséquences d'une rupture brusque du barrage de la Vesdre s'inscrit dans ce contexte de prévention. La simulation, limitée à 1/2 heure et basée sur une seule distribution de valeurs de frottement, n'a pas pour finalité directe de définir une enveloppe définitive des valeurs maximales atteintes lors de la propagation. La volonté de n'intégrer aucun facteur de sécurité lors de l'établissement des cartes d'inondation confirme cet état d'esprit.

Il n'est pas inutile de résumer les positions françaises en cette matière, qui se fondent sur une comparaison de modèles physiques et mathématiques. Ces analyses comparatives ont révélé qu'une erreur de 10 unités sur la valeur du coefficient de frottement conduisait à des erreurs relatives moyennes de 10 % sur les hauteurs d'eau et de 30 % sur les temps.

Prenant en compte qu'à défaut d'une précision rigoureuse des résultats numériques, l'objectif fondamental demeure la protection des populations, on se base sur ces résultats pour imposer une minoration forfaitaire des temps calculés d'arrivée de l'onde et d'obtention de la cote maximale de 13 %, tandis que les cotes maximales atteintes sont majorées de 15 %, avec un minimum de 1 m. Lorsque les cotes calculées sont inférieures à cette dernière valeur, elles sont simplement doublées.

L'ensemble des valeurs consignées pour l'établissement d'un plan d'alerte ne considère la propagation que jusqu'au moment où les cotes maximales atteintes n'excèdent plus celles de la plus grande crue naturelle observée.

La philosophie de ces plans consiste en une évacuation préventive des populations menacées qui implique notamment, détail important dans le cadre de ce calcul limité, une couverture sonore de la zone qui serait sinistrée dans un délai inférieur à 15 minutes. Dans notre application, cette mesure impliquerait l'installation de sirènes capables de porter sur toute la zone immergée située approximativement jusqu'à 11 kilomètres en aval du barrage, cette valeur étant donnée sans prendre en compte les sécurités citées précédemment.

L'application du code sur la géométrie de la vallée de la Vesdre confirme la gravité d'un tel scénario, ainsi que la situation particulièrement exposée de la ville d'Eupen. Mais elle prouve également qu'en termes de submersion, les mêmes effets dramatiques persistent bien en aval, même si l'écrêtement du signal de débit entraîne des montées beaucoup plus graduelles du niveau d'eau.

Les possibilités qu'offre le logiciel de traiter des réseaux en conditions aussi extrêmes se sont avérées déterminantes pour une reproduction réaliste du phénomène, puisque nous avons pu mettre en évidence les effets primordiaux de stockage dans les bras latéraux.

Le cadre de présentation de cette modélisation nous a amené à nous intéresser davantage aux problèmes numériques posés par ce type de problème en démontrant qu'une simulation satisfaisante doit s'appuyer sur un logiciel à même de réagir adéquatement aux régimes très différenciés qui interviennent dans ces écoulements très perturbés.

Si la vocation généraliste du logiciel élaboré se reflète notamment dans l'imposition d'une propagation sur fond humide, la faculté que possède la méthode de reproduire des ressauts en instationnaire, sans afficher des tendances dissipatives exagérées, en font un outil parfaitement fiable pour ce type d'application.

L'efficacité d'une méthode de capture numérique des chocs ouverte sur une généralisation aisée aux autres dimensions spatiales, le caractère économique à la fois de la génération d'un maillage évolutif et des pas temporels plus importants liés à la discrétisation implicite, la façon très libérale de définir la géométrie des réseaux et des profils en travers rencontrés, l'efficacité de l'organisation modulaire permettant notamment de répercuter l'évolution temporelle de ces profils, tout cet ensemble de caractéristiques s'intègre dans un logiciel à même de fournir l'intégralité des informations nécessaires à l'élaboration de cartes d'inondation et du temps de submersion.

Rappelons encore que la fiabilité des résultats obtenus n'a pu être assurée qu'au terme d'un long cheminement qui nous a révélé à la fois les limitations théoriques, telle la non prise en compte de l'érodabilité des profils en travers, qui doivent être soigneusement considérées dans la définition de zones sensibles où les sécurités seront revues à la hausse, ainsi que les tendances numériques qui furent surmontées, corrigées ou volontairement exploitées, pour n'introduire dans les résultats aucune influence numérique trompeusement sécurisante, comme les effets dissipatifs caractéristiques à des degrés divers de tout schéma numérique.

Chapitre XVI

Conclusion générale

Avec l'étroite dépendance qui le lie à l'eau, il est naturel que l'homme ait de tout temps cherché à percer les secrets de la variété extraordinaire des processus qui interviennent dans le cycle hydrologique. Il tente de répercuter l'évolution des connaissances théoriques et des techniques de l'eau en incidences favorables pour les populations, tant au niveau fondamental de leurs besoins vitaux et de leurs craintes perpétuelles vis-à-vis des avatars de la nature, que dans la perspective de leurs activités industrielles au sens large.

Mais l'évolution de nos sociétés industrielles réclame une résolution plus pointue des problèmes liés à l'eau, soit que les défis fondamentaux s'inscrivent dans un contexte plus complexe de considérations économiques, sécuritaires, politiques ou écologiques, soit que "le progrès" engendre lui même de nouvelles exigences, telles le besoin croissant en eau qui la transforme en bien rare à épargner.

Ainsi, la conception et le dimensionnement d'ouvrages hydrauliques à la fois économiques et sécuritaires requièrent des connaissances plus approfondies des intervenants liés à l'eau. L'accroissement de la consommation en eau domestique ou industrielle plaide en faveur d'une exploitation plus rigoureuse des ressources disponibles en appréhendant plus finement les facteurs hydrauliques d'influence. Enfin, la multiplication des exigences à respecter et des demandes à satisfaire, en compliquant la tâche des exploitants de systèmes hydrauliques dans leur difficile recherche du meilleur compromis, implique qu'ils soient à même d'évaluer l'impact des manoeuvres envisagées sur le système à réguler.

La multitude et la complexité des problèmes posés rendent indispensable le recours aux modèles.

L'apport le plus significatif de ces dernières décennies réside sans nul doute dans l'accroissement des potentialités informatiques qui provoque la naissance de logiciels hydrauliques aptes à reproduire des situations suffisamment réalistes pour seconder efficacement l'hydraulicien aux divers stades possibles de son intervention.

A l'échelle d'une retenue ou d'un système hydraulique à gérer, ils simulent les mouvements engendrés par divers scénarios de gestion possibles pour établir des critères tangibles dans le choix d'un optimum de gestion. Ils interviennent également dans la modélisation des liens du système étudié avec le monde extérieur qui infléchit son évolution par ses apports et sur lequel il interfère par sa politique de lâchers.

Dans cet ensemble de notions repris sous le vocable très général d'optimisation de gestion, ces logiciels jouent enfin un rôle prépondérant pour prévoir les impacts sur l'aval des ouvrages gérés des conséquences d'un dysfonctionnement éventuel. Cette spécialité trouve un regain d'intérêt par les écueils numériques que pose la résolution aujourd'hui possible des systèmes d'équations pour des écoulements très perturbés en géométrie réelle.

Le travail que nous avons entrepris s'intègre dans ce contexte très général de modélisation numérique d'écoulements à surface libre.

Nous avons cherché à comprendre les processus de génération, de propagation et de déformation des ondes dans la chronologie du parcours à l'air libre que poursuit une fraction des gouttes de pluie parvenant à la surface du sol. Ces mécanismes d'écoulement de surface, prépondérants dans la formation des crues et dans l'optique d'une politique de gestion, ont été envisagés en tenant compte des échanges continuels qu'ils maintiennent avec les autres contributions du cycle hydrologique.

Nous avons logiquement débuté l'étude par une analyse de la transformation d'un signal de pluie sur un bassin versant en un signal de débit à son exutoire.

Les implications d'étude d'impact incluses dans les buts initialement fixés ont orienté nos recherches vers une compréhension de la physique du phénomène, pour les atouts incomparables que confère la signification physique inhérente à chaque paramètre de modélisation.

Nous avons d'abord examiné le bien-fondé d'une telle approche qui rompt avec les pratiques courantes de recours à des fonctions de transformation paramétrées, qui sont calées au fur et à mesure des événements pluvieux enregistrés.

L'analyse des études expérimentales et des modèles existants, en révélant la complexité et la variété des processus naturels impliqués, a démontré la nécessité d'introduire des hypothèses et simplifications scrupuleusement définies en accord avec les objectifs visés.

Le premier modèle mathématique que nous avons élaboré sur ces bases se caractérise par une équation de continuité couplée à deux relations issues d'une dégénérescence des équations dynamiques. Il n'implique aucune hypothèse sur la topographie qui est le siège de l'écoulement et permet de tenir compte de la différenciation spatiale des terrains rencontrés ainsi que de la distribution des précipitations, variable à la fois dans le temps et l'espace.

Une analyse théorique de la validité du système proposé a mis en relief des propriétés spécifiques à la théorie cinématique qui sont parfaitement adaptées au cadre hydrologique, tout en conservant une richesse de représentation des phénomènes caractéristique des formulations non-linéaires.

La confrontation de ces thèses cinématiques aux essais expérimentaux en géométrie simplifiée les a étayées concrètement et a permis d'établir la structure d'écoulement au sein de la veine fluide ainsi que les divers facteurs qui l'influencent.

Afin de s'adapter aux irrégularités potentielles des géométries rencontrées, nous avons eu recours aux éléments finis spatiaux et aux différences finies temporelles dans la méthode de résolution.

L'efficacité de cette dernière a été établie dans un cadre unidimensionnel pour une succession de plans aux pentes progressivement croissantes. L'investigation de la précision globale des modélisations nous a amené à préciser certaines précautions sur la façon d'appréhender la résolution du système.

Malgré ces précautions, d'inacceptables instabilités ont surgi pour des géométries unidimensionnelles moins communes.

Une analyse théorique de leurs causes a révélé la présence potentielle de discontinuités dans l'écoulement lorsqu'on cherche à exploiter l'irrégularité naturelle de la topographie étudiée. Leur signification a été examinée et l'introduction de ressauts simplifiés en instationnaire fut discutée à la lumière des hypothèses introduites et des buts recherchés.

Les difficultés numériques inhérentes à leur introduction impromptue au sein de la modélisation nous ont contraint à modifier la méthode originelle en proposant un traitement original par fonctions de pondération décentrées. Le bien-fondé de leur recours fut d'abord établi dans un cadre théorique avant d'étendre les conclusions par des tests numériques sur topographies irrégulières.

L'assurance d'une représentation correcte du phénomène en unidimensionnel nous a alors permis d'envisager le cadre quasi-tridimensionnel dans les meilleures conditions.

Une extension originale de la méthode unidimensionnelle a été élaborée, qui permet une résolution automatique des ressauts au sein de la solution, sans aucune opération préalable, ni de dépistage, ni de traitement particularisé. Des applications numériques significatives ont démontré son action sélective.

Les échanges qu'entretient l'écoulement de surface avec les autres contributions du cycle hydrologique ont enfin été pris en compte. Le caractère non-linéaire du modèle utilisé empêchait en effet de ne précipiter sur le modèle que les seules quantités qui se retrouvent à l'exutoire.

Ce nouveau problème nous a amené à introduire une loi évolutive d'infiltration dont les caractéristiques sont définies spécifiquement selon les types de terrain rencontrés. L'analyse théorique de l'interaction entre les quantités infiltrées et la lame qui s'écoule a mis en évidence la nécessité d'une évolution significative dans la façon de traiter les conditions limites à l'amont des trajectoires fluides.

En effet, la combinaison instantanée des contributions liées à chaque type d'écoulement est susceptible d'introduire localement des assèchements momentanés que nous avons traités numériquement par conception originale d'éléments couvrants-découvrants. Le traitement itératif proposé, qui procède par balayages successifs de la solution, s'intègre dans une procédure de résolution par méthode de Newton-Raphson pour résoudre, en conditions réelles, un problème bien posé au sens mathématique du terme.

Les simulations présentées ont confirmé le très bon comportement global du *premier modèle*, assurant des bilans volumiques fiables et faisant preuve d'une convergence rapide dans l'enchevêtrement des processus itératifs élaborés, le tout sans recourir aux potentialités dissipatives du schéma temporel dont les études théoriques démontraient le caractère déterminant.

Mais la finalité d'une application économique à la fois en temps et en moyens pour une géométrie quelconque grandeur nature a rapidement nécessité d'assurer de façon automatique toutes les phases préalables aux simulations d'écoulement proprement dit.

Sur base d'un cadre standardisé de définition d'un problème classique, précisant la géométrie par un nuage de points fixés par leurs trois coordonnées spatiales, complété des données de précipitations et d'une caractérisation des terrains rencontrés, nous avons commencé par réaliser une procédure automatique de maillage sur les points, adaptée aux spécificités du problème traité.

Les limitations du modèle théorique lui imposaient un cadre topographique d'application approprié qui a été considéré dans la phase automatique de délimitation du bassin versant topographique. Une coordination de raisonnements théoriques portant sur les hypothèses inhérentes au modèle cinématique et d'approximations numériques liées à la résolution du système a aidé à la mise au point d'une procédure facultative de partitionnement des domaines d'écoulement en zones de calcul présentant des dimensions mieux adaptées au matériel informatique disponible.

Au terme de ces raisonnements, nous disposions d'une succession d'outils numériques performants, aptes à reproduire l'écoulement en fine lame sur une topographie quelconque.

Toutefois, l'examen des réalités du terrain montre que cet écoulement alimente classiquement un réseau de drainage composés de rus, de ruisseaux ou de rivières, dont la structure d'écoulement nécessitait un raisonnement spécifique. En abordant le problème de façon plus générale, le *second modèle* envisagé pouvait voir son domaine d'application nettement élargi, notamment sur le thème plus conventionnel de modélisation des mouvements engendrés dans un système hydraulique par des conditions limites variables.

Des contingences communes aux problèmes posés ont alors orienté notre choix vers une forme unidimensionnelle des équations complètes. L'expérience numérique acquise dans la première partie du travail a trouvé d'utiles prolongements dans la résolution de ce *second système mathématique* en reprenant respectivement les mêmes schémas de discrétisation spatiale et temporelle.

Par contre, des considérations de taille et d'efficacité numérique sur les systèmes à gérer lors de la résolution itérative spécifique à chaque pas temporel ont orienté nos efforts vers la mise au point d'une procédure agissant par découplage des systèmes d'équations.

Ce *second logiciel* reproduit les écoulements instationnaires dans des réseaux quelconques à surface libre alimentés notamment par des déversements latéraux. Une très large liberté est laissée quant à la géométrie variable des profils en travers de vallée rencontrés dans chaque bras.

L'analyse théorique du système discrétisé a permis d'affiner les caractéristiques intrinsèques du modèle et de mieux en comprendre et en exploiter le cas échéant les facteurs dissipatifs.

La comparaison avec des résultats théoriques, numériques, enfin expérimentaux a établi le bon comportement du code ainsi que son adéquation à reproduire fidèlement les fluctuations des mouvements engendrés dans une retenue de basse chute soumise à des circonstances variables de gestion.

Son cadre d'application extrêmement libéral le destinait également à répondre aux conséquences sur l'aval d'une gestion routinière d'ouvrages et de systèmes hydrauliques. Par contre, les circonstances extrêmes qui prévalent lors de ruptures partielles ou totales d'ouvrages nous ont poussé à une analyse spécifique du phénomène.

Dans l'hypothèse de réseaux de vallées bien formées, conformes à celles qui abritent les barrages de nos contrées, cette analyse a montré que le modèle mathématique unidimensionnel adopté, s'il aboutit à une formulation identique au second modèle étudié, émerge d'un raisonnement beaucoup plus globalisant quant aux paramètres introduits ainsi que d'hypothèses plus importantes adaptées aux circonstances d'un phénomène aussi exceptionnel que mal connu. Formellement, rien ne s'opposait donc à poursuivre le développement du second logiciel pour l'adapter à ces situations très particulières.

Les solutions théoriques, obtenues avec des géométries et des caractéristiques de frottement trop simplificatrices pour trouver d'utiles prolongements en circonstances réelles, nous ont révélé la coexistence de structures d'écoulement très différenciées impliquant une nouvelle présence de discontinuités au sein des solutions.

En s'intégrant dans un cadre d'équations plus complexe, la résolution numérique de ces ressauts en stationnaire a poursuivi la gradation des problèmes numériques rencontrés en développant l'expérience acquise face à ce type de problème sur le premier modèle.

L'identité tout au long du travail des discrétisations adoptées pour les résolutions numériques a permis d'accélérer et d'orienter l'élaboration d'une méthode originale de résolution qui étend le champ des potentialités du modèle filaire précédemment élaboré.

Nous avons proposé une formulation originale par fonctions de poids décentrées spatialement, dont la généralité de formulation permet de conserver tous les acquis du modèle filaire en intégrant la possibilité de représenter la formation, le déplacement ou l'extinction de ressauts au sein de la solution.

Son analyse théorique a démontré la sélectivité des processus dissipatifs introduits, tandis que la confrontation du modèle à des solutions théoriques, numériques et aux mesures expérimentales tirées d'essais aux laboratoires L.H.C.N. a confirmé l'exactitude de solutions dépourvues d'effet parasite et de lissage excessif.

La conjonction des deux modèles sur la géométrie réelle du bassin du Blanc Gravier a révélé l'efficacité de la succession des modèles élaborés, maillant le nuage de points, limitant ensuite le domaine topographique d'influence, le partitionnant enfin pour procéder aux simulations proprement dites. En rendant une réponse finale du système à l'exutoire concordante aux mesures expérimentales, la propagation par le modèle filaire des évolutions temporelles des débits latéraux qui se déversent dans le réseau de drainage, a confirmé l'intérêt d'un raisonnement aisé sur les ordres de grandeur de chaque paramètre utilisé.

Au delà de l'analyse d'un évènement isolé, elle a également démontré que l'atout du modèle hydrologique, lorsqu'il est exploité dans toutes ses potentialités de représentation différenciée spatialement, ne réside pas tellement dans une détermination rapide des valeurs de coefficients utilisés, puisque leur nombre potentiel requiert un calage approprié sur une campagne complète de mesures.

Par contre, ce logiciel propose d'incomparables avantages dans les prospections ultérieures qu'il autorise. Car il devient très simple, dans des phases de prévision d'impacts, de répercuter des modifications dans les circonstances d'écoulement par les implications physiques qui les lient aux coefficients de la modélisation.

En conclusion, le couplage des modèles ouvre de très larges perspectives, d'abord en matière de prévision de crues et, consécutivement, en matière de gestion, en raison des réactions d'anticipation qu'elles doivent susciter. Il intervient également en politique d'études d'impact en permettant de mieux appréhender les conséquences d'actions sur la nature vis-à-vis de la transformation des signaux à l'aval.

Néanmoins, ces potentialités ne seront complètement exploitées que lorsqu'on sera parvenu à une caractérisation des divers terrains beaucoup plus homogène que ne le laissent supposer les valeurs très variables actuellement rencontrées dans la littérature pour des géométries simplifiant la réalité. Ce constat plaide en faveur de plus vastes investigations expérimentales en la matière ainsi qu'en faveur de la mise au point de méthodes fiables et systématiques d'ajustement et d'homogénéisation de ces résultats dans des valeurs représentatives pour les paramètres physiques (Beven, Dune). La voie reste également ouverte pour une conversion plus élaborée qui serait proposée afin de présenter les données topographiques sous une forme adéquate.

Ajoutons enfin qu'un couplage à un modèle plus complet de représentation des écoulements souterrains sera de nature à pallier les approximations assez grossières d'une seule loi paramétrée qui intègre cet effet fondamental au sein des modélisations.

Enfin, si la généralité du cadre unidimensionnel destine le logiciel d'écoulement filaire à n'importe quel calcul instationnaire de ligne d'eau, qu'il englobe ou non des ressauts, son ultime application reproduisant la géométrie réelle des vallées de la Vesdre et de ses affluents a permis, pour la première fois en Belgique, de mesurer les conséquences catastrophiques d'une rupture brusque du barrage d'Eupen.

Nous avons cité les potentialités qu'implique l'organisation modulaire du logiciel, notamment au niveau de la possible représentation d'une évolution temporelle des géométries transversales rencontrées. Signalons surtout que la formulation générale développée pour intégrer les discontinuités dans la solution ouvre la voie à une généralisation à l'autre dimension spatiale, qui permettrait l'étude de spécificités locales d'écoulement, échangeant et complétant utilement les informations fournies par le modèle unidimensionnel.

En matière de modélisation d'écoulements extrêmes, bien d'autres thèmes d'investigation demeurent, qui s'articulent notamment autour des grands sujets abordés dans les hypothèses sensibles qui ont été formulées, afin de mieux prendre en compte les effets de transport sédimentaire, d'érosion sévère à la fois des structures de retenue et des profil en travers, ou encore, afin d'exploiter beaucoup plus significativement le paramètre d'inégale répartition de vitesse sur la section, par une connaissance plus approfondie des diagrammes qui prévalent dans ces circonstances.

Au moment de conclure sur l'ensemble des modèles et applications présentés au cours de ce travail, faut-il une dernière fois revenir à la philosophie générale qui les sous-tend et que rappellent deux constantes essentielles : l'importance d'une bonne connaissance du

cadre de validité des équations théoriques et l'adéquate exploitation des comportements numériques des logiciels élaborés sur leurs bases.

Ainsi, si la théorie cinématique trouve ses adeptes dans des domaines aussi variés que l'écoulement en fine lame ou la propagation d'onde de rupture, il importe de conserver la plus grande attention sur les significatives limitations théoriques qu'elle suppose quant au champ des phénomènes modélisables. Dans le même ordre d'idée, le même modèle unidimensionnel général que nous avons développé conduit à des interprétations très différentes selon qu'il est appliqué à la modélisation d'écoulements familiers ou à des manifestations aussi exceptionnelles que dévastatrices. La signification même des coefficients de modélisation introduits trouve des prolongements spécifiques aux phénomènes modélisés.

Quant à la bonne connaissance des particularités et mécanismes intrinsèques que recèlent les schémas numériques élaborés, nous rappellerons d'abord quelques mots révélateurs qu'écrivaient Thirriot et al en préambule à une analyse des caractéristiques diffusives d'un algorithme d'écoulement transitoire à surface libre : "*...l'un des auteurs expérimentait un des premiers programmes de calcul numérique d'intumescences (C.Thirriot). Il avait la surprise de voir apparaître des ondulations secondaires en front d'onde alors que les accélérations verticales, cause physique d'un tel phénomène physique, n'étaient pas prises en compte dans le modèle mathématique. C'était le premier contact avec les artefacts numériques qui peuvent fallacieusement donner l'illusion de la réalité naturelle...*"

Cette connaissance des influences purement numériques s'est construite par l'analyse des mécanismes dissipatifs et s'est traduite par des efforts significatifs dans l'élaboration de méthodes numériques aptes à reproduire fidèlement certaines particularités de solutions connues. Elle conditionne étroitement la confiance qu'on peut accorder au numérique dans sa stricte résolution du modèle théorique adopté, ainsi que nous l'illustrerons dans deux phases de ce travail :

- La théorie cinématique s'appuie sur une simplification très significative du système d'équations initial qui conduit à quelques manifestations spécifiques. Dans ce contexte, le soin accordé à une résolution correcte, au beau milieu du bassin, de ressauts simplifiés au sens de cette théorie pourrait paraître d'autant moins justifié qu'il est manifeste que l'utilisation intensive du logiciel conduira rarement à s'intéresser spécifiquement à ces singularités d'écoulement (Schmid).

Néanmoins, à l'image du bilan de volume détérioré qu'on obtient par une approche numérique inadaptée, quelle confiance pourrait-on encore accorder aux résultats fournis à l'exutoire par un logiciel dont on douterait qu'il reproduise fidèlement les atouts et les limites d'une théorie qui fut adoptée en connaissance de cause ? L'élimination systématique de tout effet dissipatif au travers de la discrétisation temporelle a procédé de la même démarche.

- La recherche de fronts raides ou de transitions assurées sur une seule maille s'intègre dans un contexte d'approche très générale du phénomène de propagation consécutive à la rupture d'un ouvrage. Mais si la forme précise du front reproduit importe intrinsèquement peu, que penser du travail obscur et impondérable mené subrepticement par des spécificités numériques insoupçonnées, sinon qu'il peut entacher l'ensemble de la structure reproduite ?

Il importe moins de découvrir un front adouci que de connaître quels phénomènes en sont à l'origine afin d'interpréter les incidences qu'ils risquent d'avoir de façon indécélable sur le reste de la solution.

La liaison des différents modèles, beaucoup plus étroite que ce que suggère a priori l'échelle très différenciée des phénomènes étudiés, ne fait qu'ajouter aux difficultés et aux dangers de profiter de la multiplication actuelle, en hydraulique, d'offres d'outils numériques utilisables en tant que "boîtes noires".

Ce n'est pas le miracle informatique qui gommara les connaissances spécifiques de l'hydraulicien, pas plus que les logiciels ne sonneront le glas des modèles physiques qui, comme l'ont montré les applications hydrologiques ou les simulations de ruptures de barrages, contribuent à leur consécration par la complémentarité et la richesse des résultats qu'ils fournissent.

Annexes

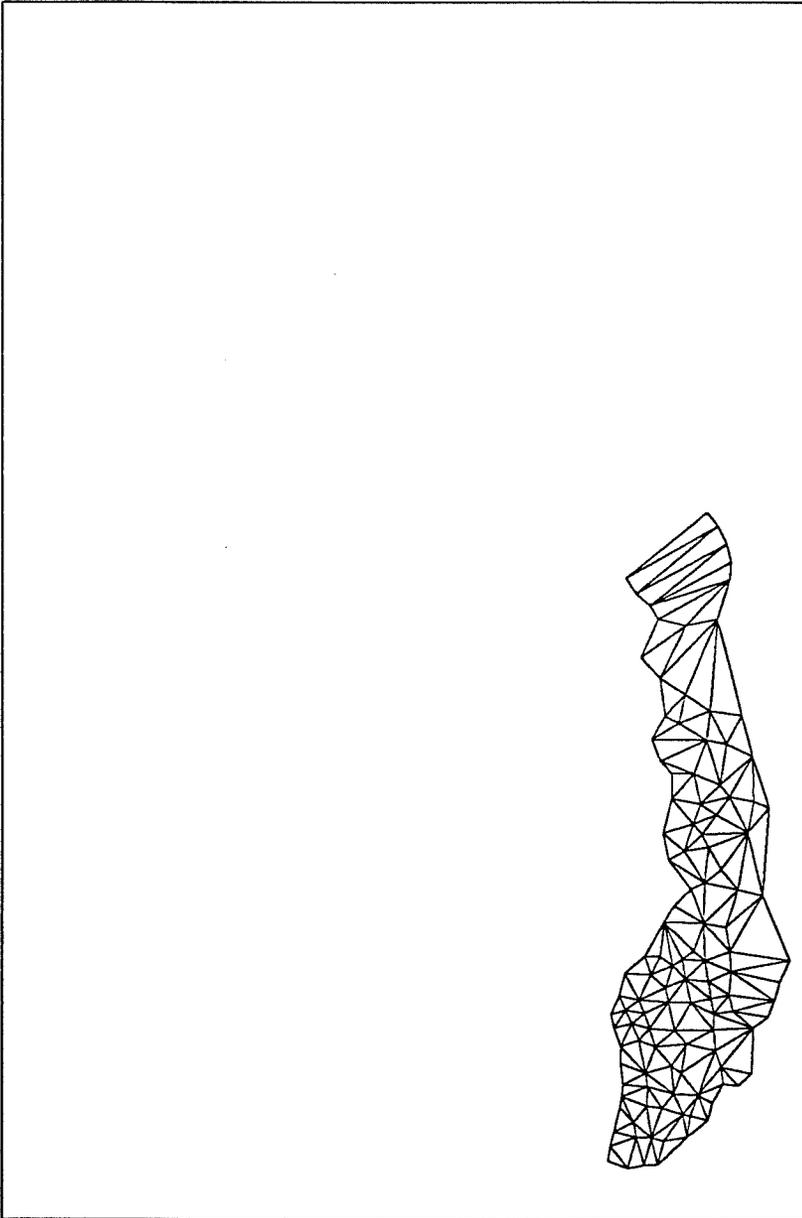


Figure A.1.
Projection en plan de l'élément de calcul n°1

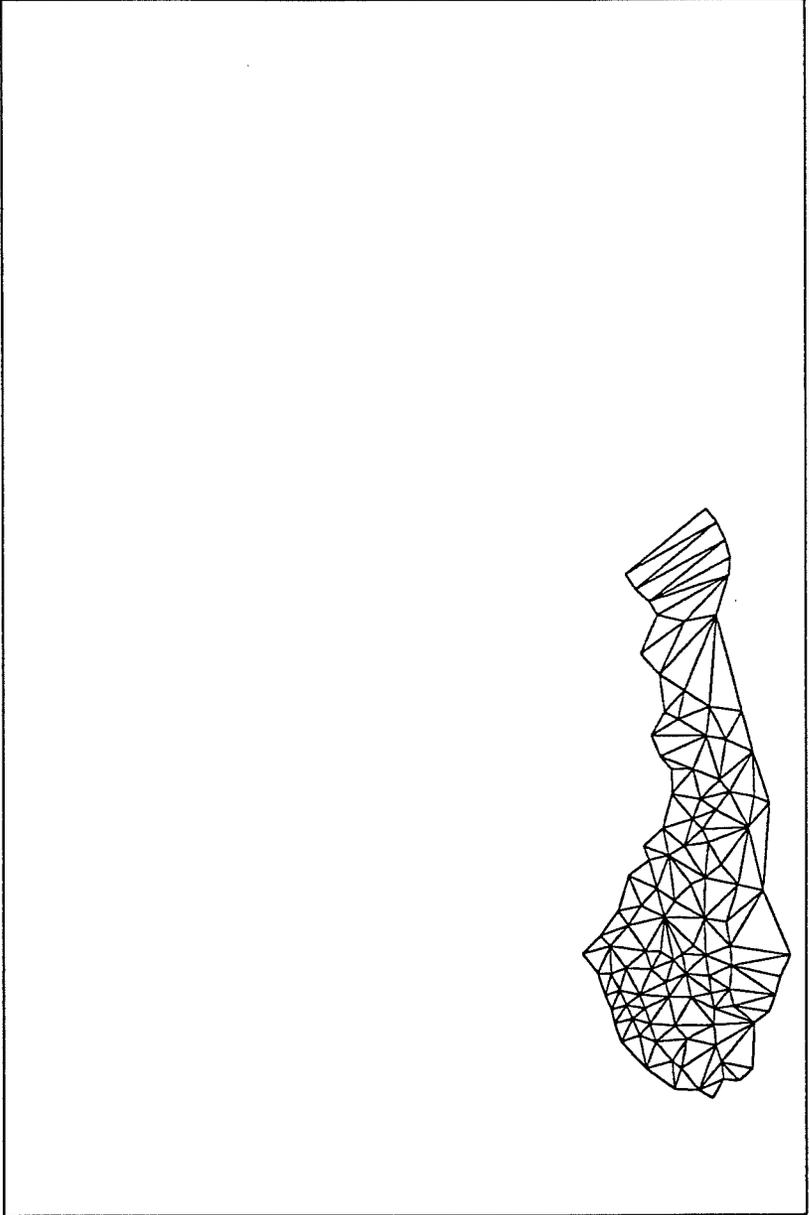


Figure A.2.
Projection en plan de l'élément de calcul n°2

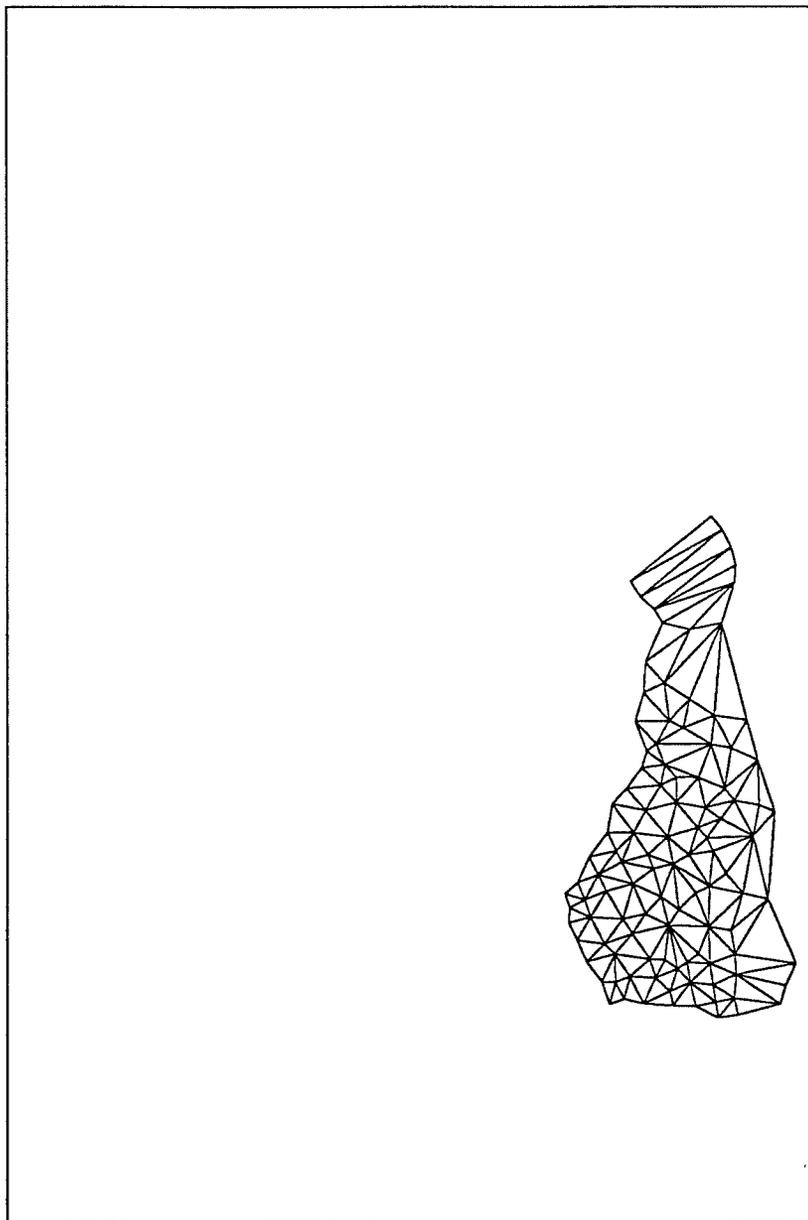


Figure A.3.
Projection en plan de l'élément de calcul n°3

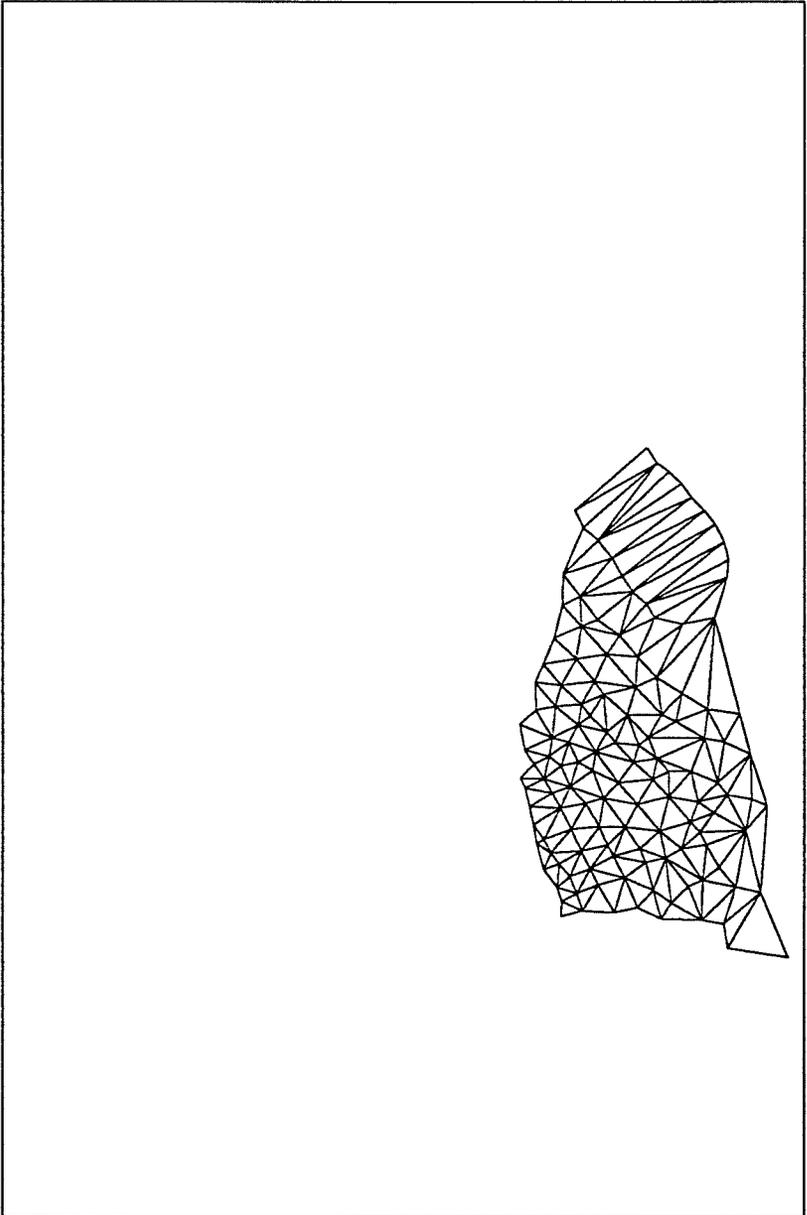


Figure A.4.
Projection en plan de l'élément de calcul n°4

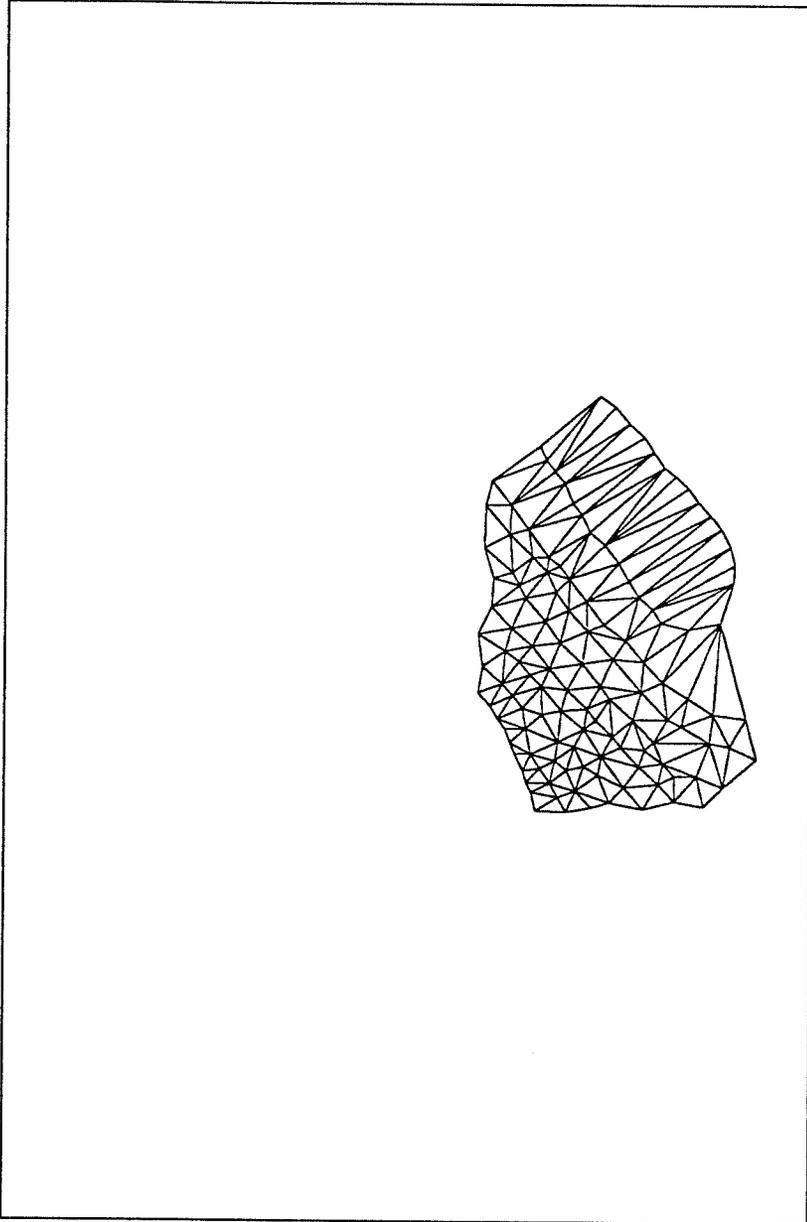


Figure A.5.
Projection en plan de l'élément de calcul n°5

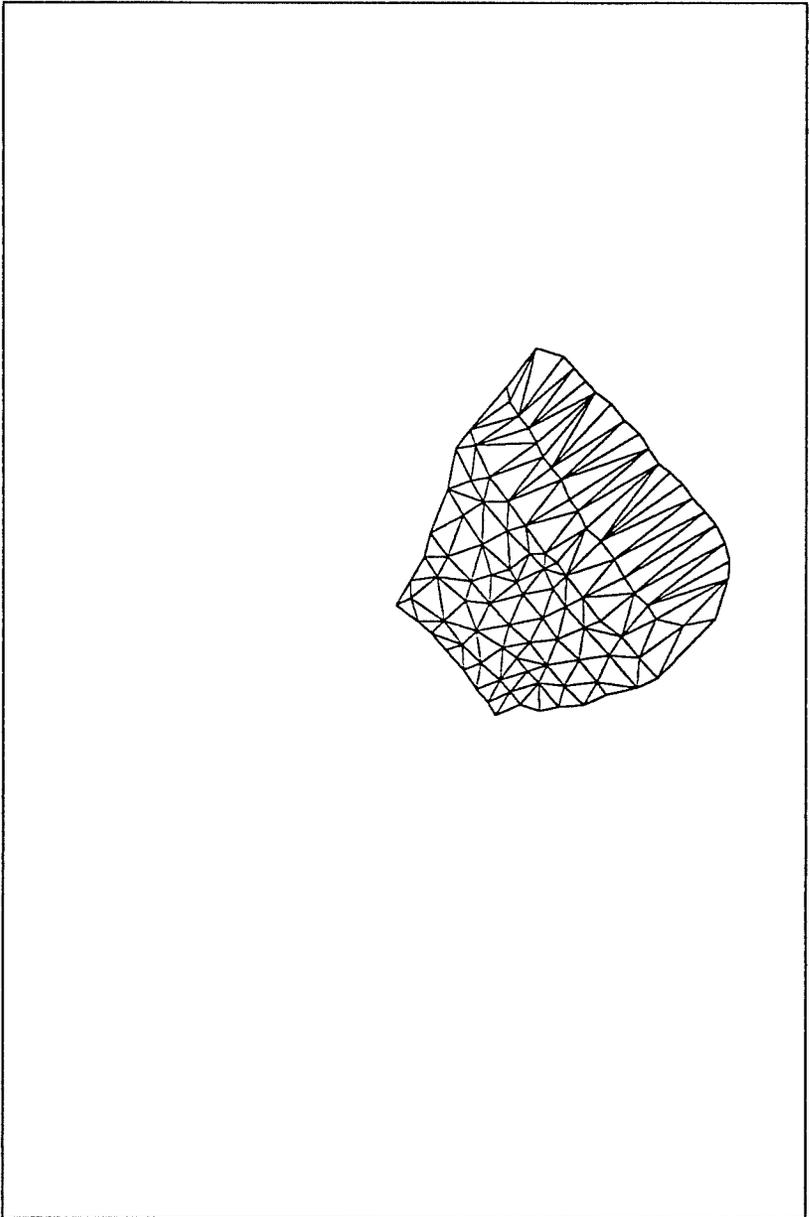


Figure A.6.
Projection en plan de l'élément de calcul n°6

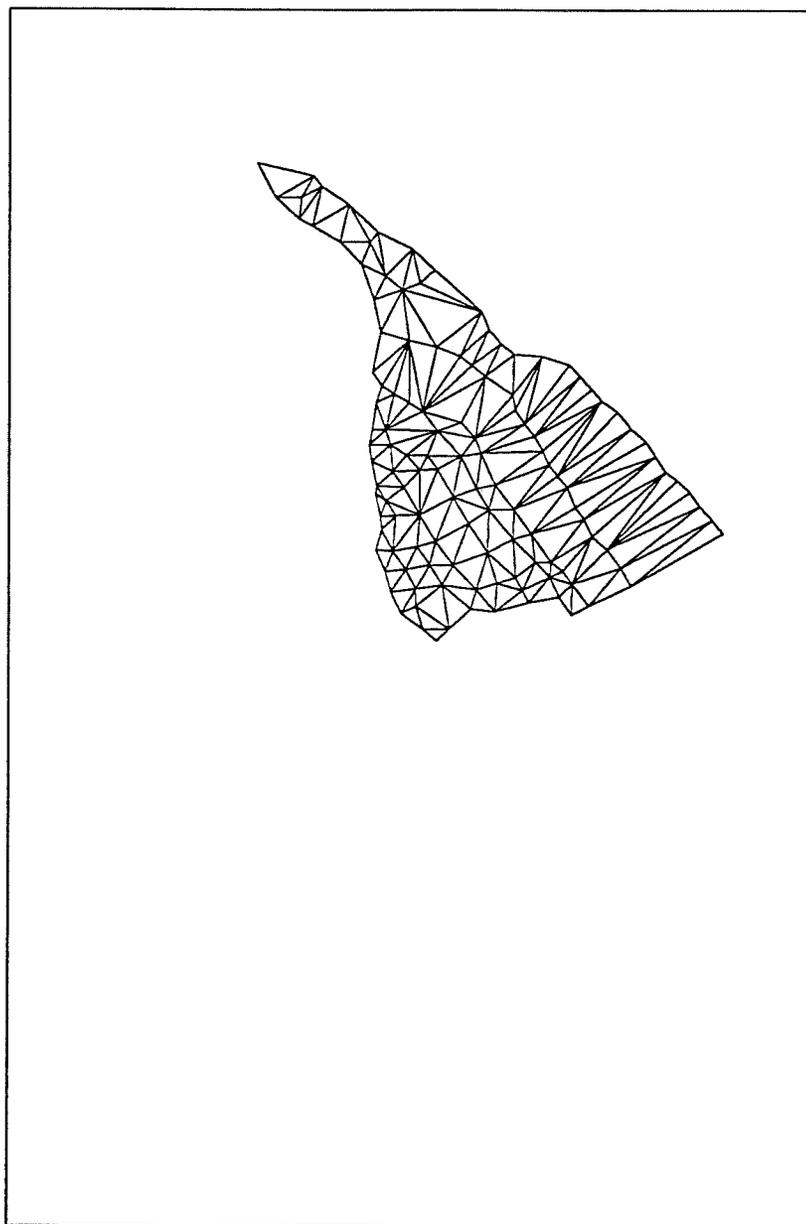


Figure A.7.
Projection en plan de l'élément de calcul n°7

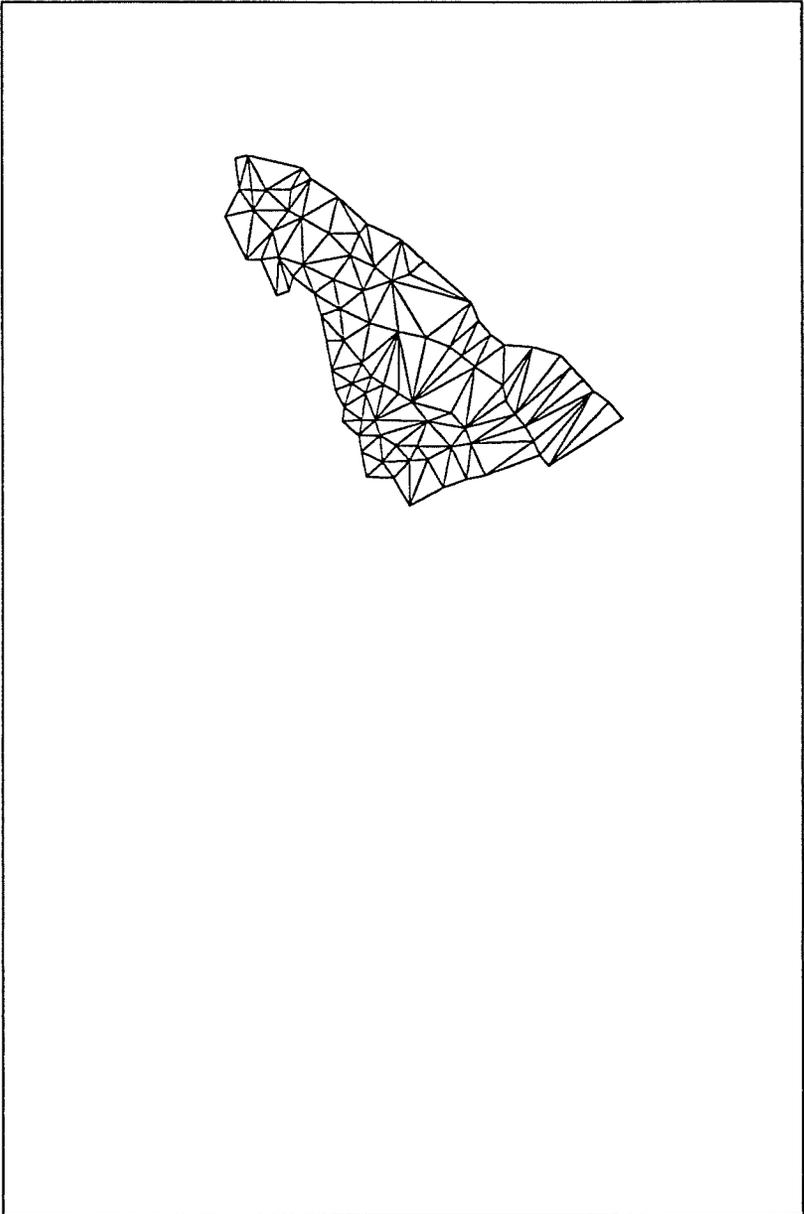


Figure A.8.
Projection en plan de l'élément de calcul n°8

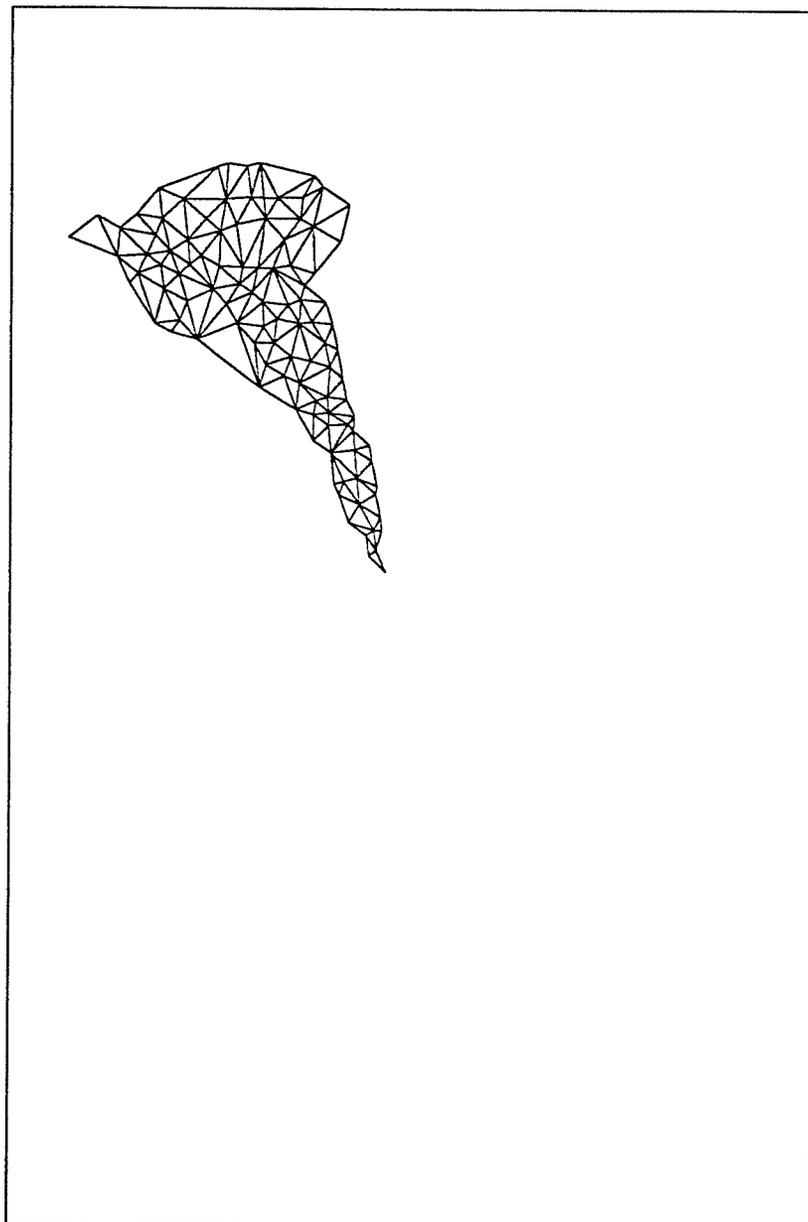


Figure A.9.
Projection en plan de l'élément de calcul n°9

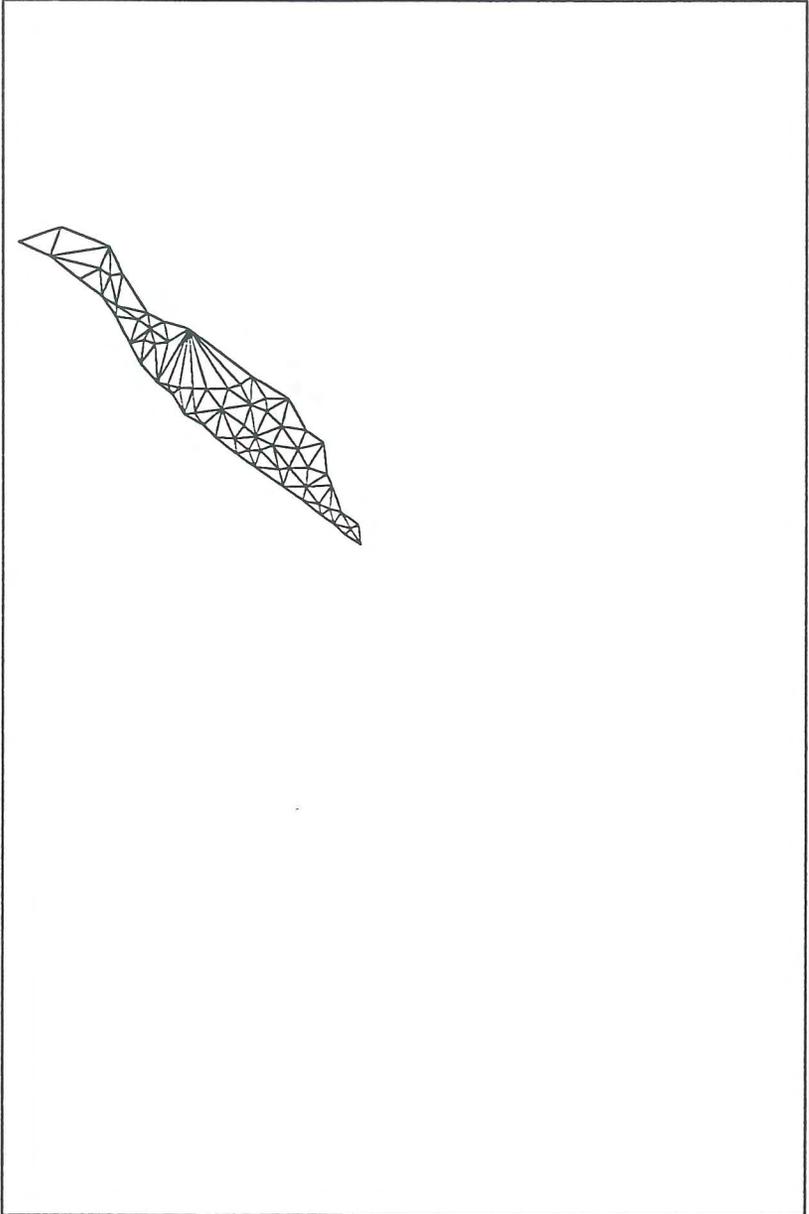


Figure A.10.
Projection en plan de l'élément de calcul n°10

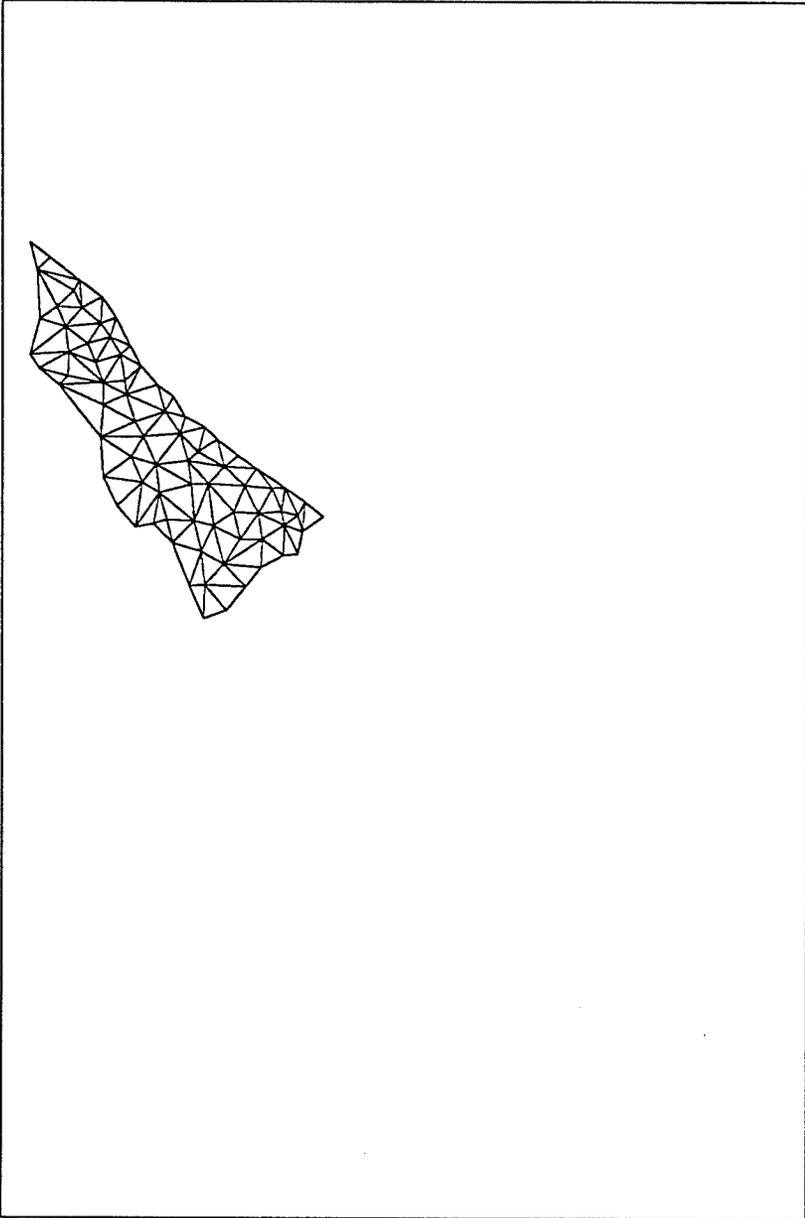


Figure A.11.
Projection en plan de l'élément de calcul n°11

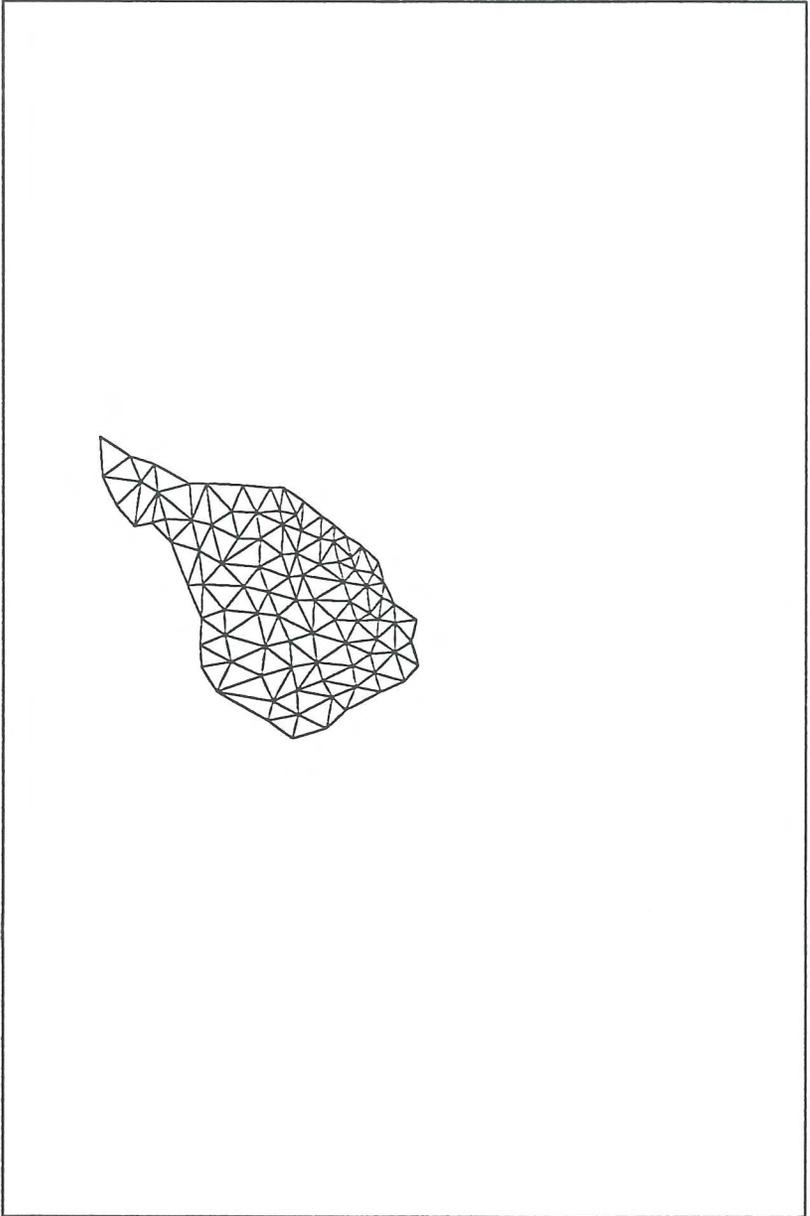


Figure A.12.
Projection en plan de l'élément de calcul n°12

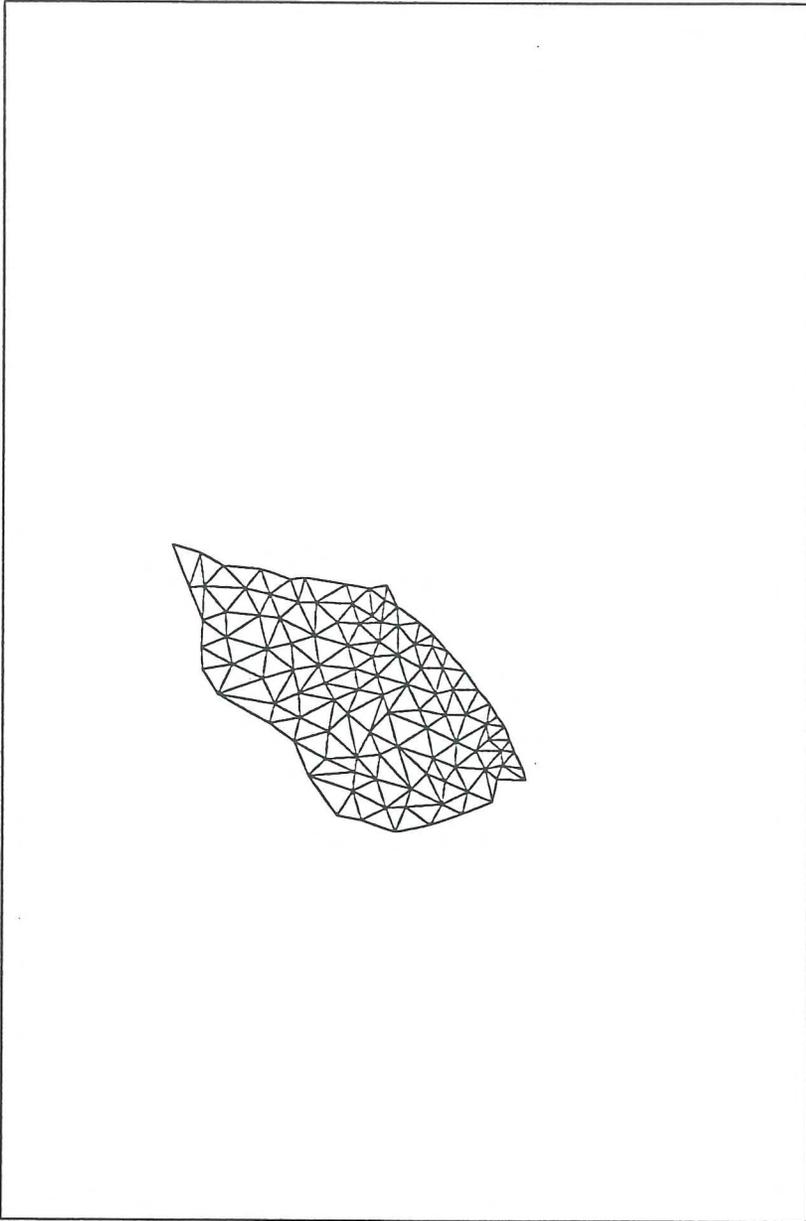


Figure A.13.
Projection en plan de l'élément de calcul n°13

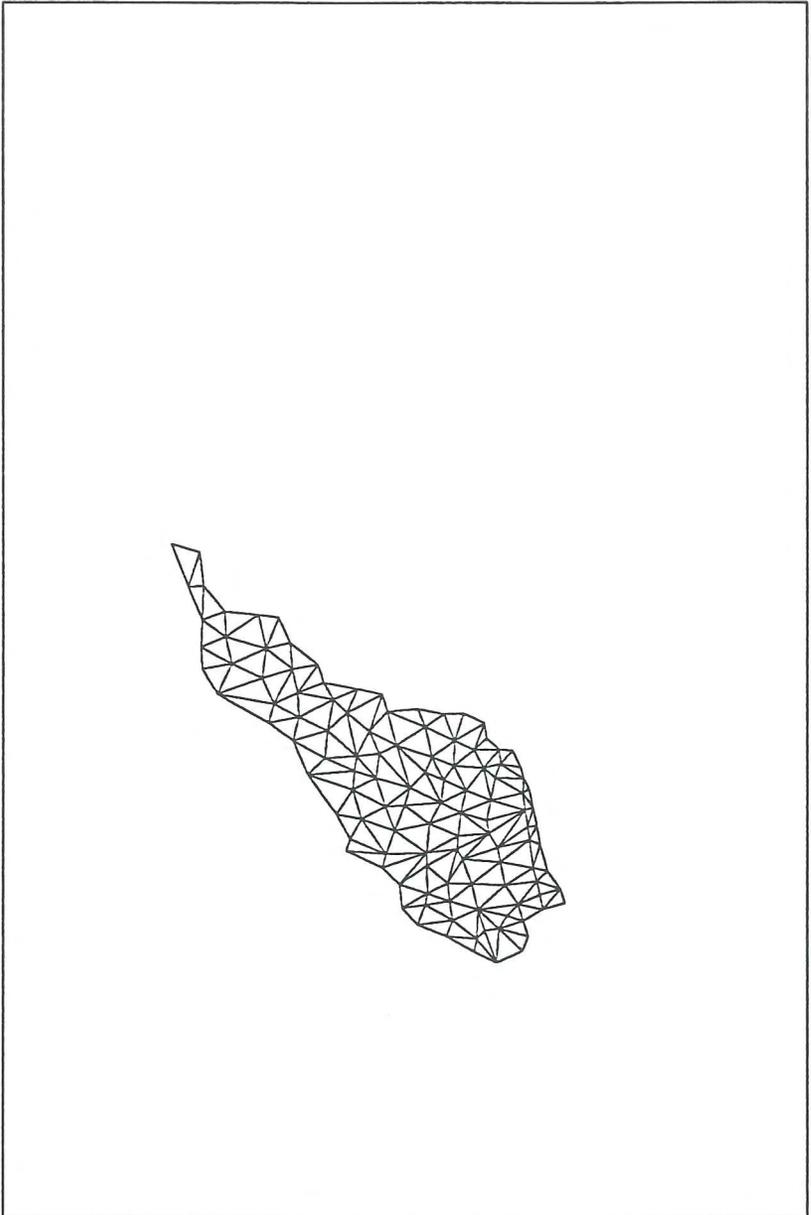


Figure A.14.
Projection en plan de l'élément de calcul n°14

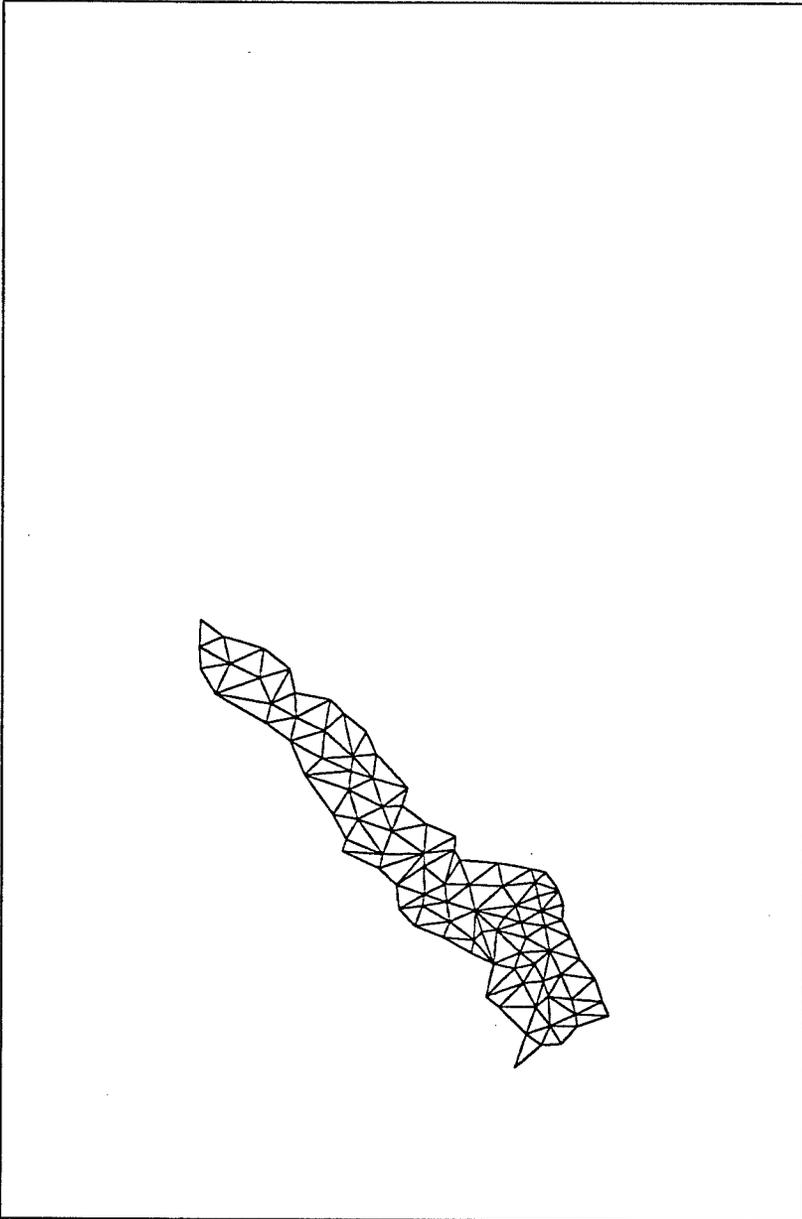


Figure A.15.
Projection en plan de l'élément de calcul n°15

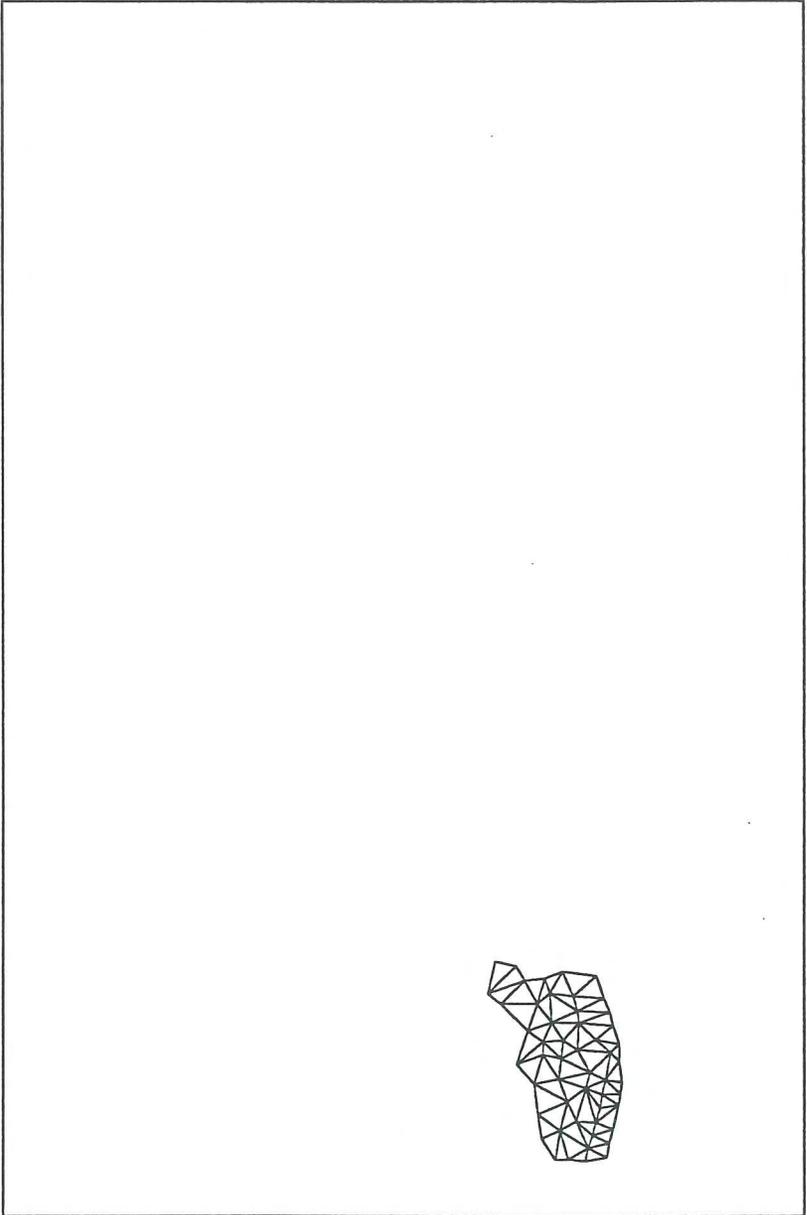


Figure A.16.
Projection en plan de l'élément de calcul n°16

Table des notations

Table des notations

a	coefficient dans la loi cinématique liant la vitesse à la hauteur	[III.3]
a'	coefficient dans la loi cinématique liant la vitesse à la hauteur en quasi-tridimensionnel	[III.3]
a_m	fonction périodique de x_m	[IV.10]
A	matrice convective non discrétisée des équations d'Euler	[IX.19]
A_0	matrice convective linéarisée des équations d'Euler	[XII.12]
b	fonction test différentiable et arbitraire	[VI.12]
b_m	fonction périodique de x_m	[IV.10]
b_0	épaisseur initiale de lame d'eau	[V.3]
B	matrice convective non discrétisée des équations d'Euler exprimées sous forme conservative	[IX.20]
c	célérité	[V.12]
c_f	coefficient de frottement	[VII.12]
c_h	coefficient de Chézy	[III.12]
c_0	célérité linéarisée	[IV.7]
C	courbe de discontinuité	[VI.3]
	ou trajectoire d'une goutte de pluie sur le sol	[VII.2]
d_m	fonction périodique de x_m	[XII.16]
D	dérivée totale	[II.7]
D(X)	matrice non discrétisée des équations d'Euler	[IX.19]

Table des notations

$D'(X)$	matrice non discrétisée des équations d'Euler exprimées sous forme conservative	[IX.20]
D_0	matrice de frottement des équations d'Euler linéarisées	[XII.12]
e	constante d'intégration	[V.13]
e'	constante d'intégration	[V.14]
f	fonction quelconque	[II.9]
	ou paramètre de calcul	[X.8]
f_D	facteur de frottement de Darcy-Weisbach	[III.11]
f_H	coefficient de la loi d'infiltration d'Horton	[VII.20]
f_m	coefficient complexe du développement en série de la fonction f	[IV.8]
f_0	nombre de Froude	[II.28]
F	fonctionnelle	[X.27]
\vec{F}	force de volume	[II.7]
g	accélération de la pesanteur	[II.8]
g'	accélération de la pesanteur adimensionnelle	[II.13]
g''	accélération de la pesanteur adimensionnelle	[IX.3]
g_i	seconds membres des conditions à imposer aux noeuds	[X.25]
G	matrice d'imposition de conditions aux noeuds	[X.25]
	ou matrice utilisée dans les fonctions de pondération décentrées	[XII.12]
h	h_f+h_s profondeur totale	[II.16]
h'	condition limite amont	[V.2]
h^*	hauteur adimensionnelle	[II.27]
\hat{h}	solution approchée de h	[IV.3]
h_e	hauteur d'eau à l'équilibre à l'exutoire	[III.6]
h_m	coefficient complexe du développement en série de la solution analytique h	[IV.8]

Table des notations

h_f	distance selon z du plan (ox, oy) au fond	[II.16]
h_0	épaisseur caractéristique de la lame selon z	[II.12]
	profondeur caractéristique de la lame à l'exutoire	[II.26]
h_s	distance selon z du plan (ox, oy) à la surface	[II.16]
H	vecteur inconnu dont les composantes H_i représentent les valeurs de \hat{h} au noeud i	[IV.4]
	ou charge totale dans l'écoulement souterrain	[VII.19]
H'_m	coefficient complexe du développement en série de la solution numérique \hat{h}	[IV.10]
i	vitesse verticale d'infiltration à la surface du sol	[II.16]
	ou imaginaire pur, racine carrée de (-1)	[IV.8]
i_0	vitesse d'infiltration initiale	[VII.20]
I	matrice identité	[XII.16]
J	matrice jacobienne de composantes $J_{i,j}$ du système à résoudre	[IV.6]
k	paramètre de calcul	[X.8]
k'	paramètre de calcul	[V.18]
k_m	coefficient complexe du développement en série de la solution analytique	[IV.8]
k_0	nombre d'onde cinématique	[II.28]
k'_m	coefficient complexe du développement en série de la solution numérique	[IV.10]
k_{im}	composante imaginaire du coefficient complexe k_m	[IV.8]
k_{m}	composante réelle du coefficient complexe k_m	[IV.8]
K	coefficient de frottement laminaire de Darcy-Weisbach	[III.11]
	ou coefficient de perte de charge locale	[XII.33]
K_d	conductivité hydraulique du sol	[VII.19]

Table des notations

K_p	coefficient de frottement additionnel dû à l'impact des gouttes de pluie	[III.17]
K_s	longueur de rugosité	[III.12]
K_{if}	rapport entre la composante selon x_i de la vitesse au fond et la vitesse moyenne \bar{u}_i	[II.23]
K_{is}	rapport entre la composante selon x_i de la vitesse à la surface et la vitesse moyenne \bar{u}_i	[II.23]
l	$= l_g + l_d$ largeur locale	[IX.9]
l_d	distance selon y du plan (ox, oz) à la rive droite	[IX.16]
l_g	distance selon y du plan (ox, oz) à la rive gauche	[IX.16]
l_m	nombre d'onde dans le développement en séries de la solution analytique	[IV.8]
l_0	longueur caractéristique d'écoulement	[II.26]
l'_m	nombre d'onde dans le développement en séries de la solution numérique	[IV.10]
L	opérateur différentiel	[IV.2]
L_d	liste évolutive de points du domaine gérée par le programme de maillage	[VIII.3]
L_f	liste évolutive de points frontières gérée par le programme de maillage	[VIII.3]
n	coefficient de frottement de Manning	[III.12]
	ou axe normal à la courbe	[VII.23]
n_c	nombre de courant	[IV.25]
n_j	composante selon x, y, z de la normale à la surface de contrôle	[II.6]
N	vecteur dont les composantes N_i représentent les fonctions d'interpolation	[IV.4]

Table des notations

m	exposant dans la loi cinématique liant la vitesse à la hauteur	[III.3]
M	matrice de calcul de la vitesse	[IV.21]
	ou matrice de masse	[XII.13]
M_d	matrice de masse diagonalisée	[XII.13]
M_{ij}	premiers membres d'équations discrétisées	[X.5]
p	pression	[II.8]
p'	pression adimensionnelle	[II.13]
p''	pression adimensionnelle	[IX.3]
p_m	périmètre mouillé	[IX.18]
P	vecteur dont les composantes P_i représentent les fonctions de pondération	[IV.3]
q	débit par unité de largeur	[II.26]
	ou débit	[IX.10]
\hat{q}	solution approchée de q	[IV.5]
q'	débit par unité de largeur passant au travers d'une discontinuité	[V.11]
q^*	débit adimensionnel	[III.7]
q_e	débit par unité de largeur à l'équilibre	[III.6]
q_L	débit latéral	[IX.18]
q_m	coefficient complexe du développement en série de la solution analytique q	[X.6]
q_0	vitesse caractéristique selon la plus grande pente	[II.12]
	ou débit uniforme à l'exutoire	[II.26]
Q	vecteur inconnu dont les composantes Q_i représentent les valeurs de \hat{q} au noeud i	[IV.5]
Q'_m	coefficient complexe du développement en série de la solution numérique \hat{q}	[X.8]

Table des notations

r	vitesse verticale de chute des précipitations	[II.16]
r'	apport total extérieur au système	[IV.7]
r''	apport total extérieur au système en quasi-tridimensionnel	[VII.23]
$R(\hat{h})$	Résidu d'équation dû à une solution approchée \hat{h}	[IV.3]
R_d	résultante de frottement sur la paroi droite	[IX.9]
Re	nombre de Reynolds	[III.11]
R_g	résultante de frottement sur la paroi gauche	[IX.8]
R_m	rayon hydraulique	[IX.19]
s	abscisse de la discontinuité de la surface libre	[V.9]
	ou axe tangent à la courbe	[VII.23]
s^-	abscisse de la discontinuité en s'approchant par la gauche	[V.10]
s^+	abscisse de la discontinuité en s'approchant par la droite	[V.10]
S	domaine d'intégration	[IV.2]
S_f	penne de frottement	[II.27]
S_i	sorptivité	[VII.20]
S_x	intégrale sur la section des tensions visqueuses et turbulentes axiales	[IX.10]
S_{ij}	intégration sur la profondeur des tensions visqueuses et turbulentes	[II.24]
t	temps	[II.7]
t'	temps adimensionnel	[II.13]
t^*	temps adimensionnel	[II.27]
t_e	temps nécessaire pour obtenir l'équilibre	[III.6]
t_0	temps caractéristique	[II.12]
t_p	demi période pour la condition limite d'amont	[V.2]
	ou temps caractéristique dans la formule de Horton ou de Philip	[VII.21]
t_s	temps caractéristique dans la formule de Horton ou de Philip	[VII.21]

Table des notations

t_x	composante selon x de la force de frottement sur le sol	[II.22]
ou	composante selon x de la force de frottement sur le périmètre mouillé	[IX.10]
t_y	composante selon y de la force de frottement sur le sol	[II.22]
\vec{T}	force de surface	[II.8]
T_f	coefficient de loi de frottement linéarisée	[X.6]
T_g	terme de frottement linéarisé	[V.17]
T_i	seconds membres d'équations discrétisées	[X.4]
u	composante selon x de la vitesse instantanée	[II.6]
u'	composante adimensionnelle de la vitesse selon x	[II.13]
u''	fluctuation aléatoire de la composante selon x de la vitesse instantanée	[II.9]
u^*	composante adimensionnelle de la vitesse selon x	[II.27]
ou	vitesse de frottement	[IX.14]
\bar{u}, \bar{u}_1	composante moyenne sur la profondeur selon x de la vitesse moyennée temporellement	[II.21]
\hat{u}	solution approchée de u	[IV.6]
u_m	vitesse axiale	[IX.14]
u_0	composante selon x de la vitesse caractéristique vitesse uniforme à l'exutoire	[II.12] [II.26]
u_s	vitesse axiale à la surface	[IX.14]
u^T	moyenne temporelle de la composante selon x de la vitesse instantanée	[II.9]
$u_1 = u$	composante selon x de la vitesse instantanée	[II.10]
$u_2 = v$	composante selon y de la vitesse instantanée	[II.10]
$u_3 = w$	composante selon z de la vitesse instantanée	[II.10]
U	vecteur inconnu dont les composantes U_i représentent les valeurs de \hat{u} au noeud i	[IV.6]
ou	vitesse de déplacement d'un choc ou d'une transition	[V.11]

Table des notations

U'	vitesse de déplacement d'une transition	[V.13]
U''	vitesse de déplacement d'une transition	[V.14]
v	composante selon y de la vitesse instantanée	[II.6]
\vec{v}	vecteur vitesse	[II.6]
v'	composante adimensionnelle de la vitesse selon y	[II.13]
v''	fluctuation aléatoire de la composante selon y de la vitesse instantanée	[II.9]
\bar{v}, \bar{u}_2	composante moyenne sur la profondeur selon y de la vitesse moyennée temporellement	[II.21]
v^T	moyenne temporelle de la composante selon y de la vitesse instantanée	[II.9]
v_0	composante selon y de la vitesse caractéristique temporellement	[II.12] [II.21]
V	volume de contrôle	[II.6]
w	composante selon z de la vitesse instantanée	[II.6]
w'	composante adimensionnelle de la vitesse selon z	[II.13]
w''	fluctuation aléatoire de la composante selon z de la vitesse instantanée	[II.9]
w_e	variable d'Escoffier	[XI.16]
w_0	composante selon z de la vitesse caractéristique	[II.12]
w_1	pulsation dans la solution de la seiche	[X.13]
w^T	moyenne temporelle de la composante selon z de la vitesse instantanée	[II.9]
W	forme intégrale à minimiser par la méthode des résidus pondérés	[IV.3]
	ou vecteur des contributions N+1 intervenant dans les fonctions de pondération unidimensionnelles	[XII.12]
W_1	composante du second degré des fonctions de pondération unidimensionnelles N+1	[VI.6]
x	axe de référence de l'écoulement	[II.7]
x'	coordonnée adimensionnelle selon x	[II.12]

Table des notations

x''	= $x - U't$, coordonnée mobile selon x	[V.13]
x^*	coordonnée adimensionnelle selon x	[II.27]
x_A	abscisse limitant l'espace de contrôle	[V.9]
x_B	abscisse limitant l'espace de contrôle	[V.9]
x_m	$l_m \Delta x$	[VI.13]
$x_1 = x$	axe de référence de l'écoulement	[II.10]
$x_2 = y$	axe de référence de l'écoulement	[II.10]
$x_3 = z$	axe de référence de l'écoulement	[II.10]
X	vecteur des fonctions inconnues	[X.3]
\hat{X}	solution approchée de X	[X.3]
y	axe de référence de l'écoulement	[II.7]
y'	coordonnée adimensionnelle selon y	[II.13]
Y	vecteur des inconnues nodales	[X.3]
z	axe de référence de l'écoulement	[II.7]
z'	axe vertical	[II.6]
	ou coordonnée adimensionnelle selon z	[II.13]
z_m	abscisse verticale de la vitesse axiale maximale	[IX.12]
Z	altitude de surface libre	[IX.11]
α	coefficient de la loi vitesse - hauteur	[II.27]
	ou coefficient de la loi largeur - hauteur	[XI.18]
α_u	coefficient d'upwind des méthodes N-1	[VI.11]
α'_a	coefficient d'amplification	[VII.5]
α'_u	$\alpha_u / \Delta x$	[VI.11]
α_{N+1}	coefficient d'upwind (décentrement spatial) des méthodes N+1	[VI.6]
$\alpha'_{ux}, \alpha'_{uy}$	coefficient d'upwind en quasi-tridimensionnel	[VII.4]
α_{abc}	facteur de qualité du triangle abc	[VIII.4]

β	coefficient de la loi vitesse - hauteur	[II.27]
$\delta_{i,j}$	symbole de kroneker	[II.8]
∂	dérivée partielle	[II.7]
δ^2	opérateur différentiel discrétisé en différences finies	[IV.9]
∂S	surface extérieure du volume de contrôle V	[II.6]
Δl	largeur de transition	[V.15]
Δ_0	opérateur différentiel discrétisé en différences finies	[IV.9]
Δt	incrément de temps	[IV.3]
Δx	pas spatial	[IV.9]
Δl_t	longueur caractéristique de l'élément en quasi-tridimensionnel	[VII.5]
ε	constante très petite	[V.24]
ε_x	rapport de vitesses caractéristiques	[II.12]
ε_y	rapport de vitesses caractéristiques	[II.12]
ε_z	rapport de vitesses caractéristiques	[II.12]
ε'_x	rapport de vitesses caractéristiques	[IX.2]
ε'_y	rapport de vitesses caractéristiques	[IX.2]
ε'_z	rapport de vitesses caractéristiques	[IX.2]
ϕ	taux d'humidité du sol	[VII.18]
γ	coefficient de la loi vitesse - hauteur	[II.27]
Γ	surface extérieure au volume de contrôle V	[II.6]
η	grandeur positive	[VII.24]
η_i	noeuds retenus pour la construction d'un nouvel élément	[VIII.4]
κ	constante de Karman	[IX.14]
λ_c	coefficient multiplicatif	[XI.4]
λ_m	facteur d'amplification analytique	[IV.8]
λ_x	longueur caractéristique selon x	[II.12]

Table des notations

λ_y	longueur caractéristique selon y	[II.12]
λ'_m	facteur d'amplification numérique	[IV.10]
λ_i^j	multiplicateur de Lagrange	[X.27]
μ	coefficient de diffusion	[V.12]
ν	viscosité cinématique ou turbulente	[III.11]
π	paramètre de Coles	[IX.15]
θ	angle d'inclinaison du terrain en unidimensionnel	[II.25]
θ_x	angle entre l'axe x et l'axe vertical z'	[II.6]
θ_y	angle entre l'axe y et l'axe vertical z'	[II.6]
θ_t	coefficient de pondération de la discrétisation temporelle	[IV.3]
θ_z	angle entre l'axe z et l'axe vertical z'	[II.6]
θ_s	angle entre l'axe x et la tangente à la trajectoire	[VII.2]
θ'_t	pondération temporelle dans la matrice A des fonctions de pondération	[XII.17]
ρ	masse volumique	[II.7]
ρ'	déterminant complexe d'une équation du second degré	[V.18]
ρ'_a	argument du déterminant complexe ρ'	[V.18]
ρ'_r	racine du module du déterminant complexe ρ'	[V.18]
$\rho_{i,j}$	coefficient adimensionnel d'inégale répartition de vitesse	[II.23]
ρ_ω	coefficient adimensionnel d'inégale répartition de vitesse	[IX.10]
σ_{ij}	somme des contraintes visqueuses et turbulentes	[II.11]
$\sigma'_{i,j}$	contraintes adimensionnelles visqueuses et turbulentes	[II.13]
τ	ordonnée en $x = 0$ de la caractéristique	[III.5]
τ^*	contrainte de cisaillement mesurée à la paroi	[IX.14]
$\tau_{i,j}$	tenseur des contraintes visqueuses du fluide	[II.8]
ω	section mouillée	[IX.10]

Table des notations

ω_m	coefficient complexe du développement en série de la solution analytique ω	[X.6]
$\hat{\omega}$	solution approchée de ω	[X.3]
Ω	vecteur inconnu dont les composantes Ω_i représentent les valeurs de $\hat{\omega}$ au noeud i	[X.4]
Ω'_m	coefficient complexe du développement en série de la solution numérique $\hat{\omega}$	[X.8]
ξ	abscisse en $t = 0$ de la caractéristique	[III.5]
ψ	suction	[VII.19]

Bibliographie

A

ABBOTT M.B., *An introduction to the method of characteristics*, American Elsevier, New York, 1966.

ABBOTT M.B., *Continuous flows, discontinuous flows and numerical analysis*, Journal of Hydraulic Research, Vol 12, n° 4, 1974, pp 417-467.

ABBOTT M.B., BATHURST J.C., CUNGE J.A., O'CONNELL P.E. and RASMUSSEN J., *An introduction to the european hydrological system - système hydrologique européen, SHE, 1 : History and philosophy of a physically-based, distributed modelling system*, Journal of Hydrology, Vol 87, 1986, pp 45-59.

ABBOTT M.B., BATHURST J.C., CUNGE J.A., O'CONNELL P.E. and RASMUSSEN J., *An introduction to the european hydrological system - système hydrologique européen, SHE, 2 : structure of a physically-based, distributed modelling system*, Journal of Hydrology, Vol 87, 1986, pp 61-77.

ADORNATO P.M. and BROWN R.A., *Petrov-Galerkin methods for natural convection in directional solidification of binary alloys*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol 7, 1987, pp 761-791.

AGIRALIOGLU N., *Estimation of the time of concentration for diverging surfaces*, Hydrological Sciences Journal, Vol 33, n° 2, 1988, pp 173-179.

AL-MASHIDANI G. and TAYLOR C., *Finite element solutions of the shallow water equations - surface runoff*, Finite Elements Methods in Flow Problems, pp 385-395.

AMOROCHO J. and BRANDSTETTER A., *Determination of non-linear functional response functions in rainfall-runoff processes*, Water Resources Research, Vol 7, n° 5, october 1971, pp 1081-1101.

B

BAKER A.J. and KIM J.W., *A Taylor weak-statement algorithm for hyperbolic conservation laws*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol 7, 1987, pp 489-520.

- BAKER A.J., *Finite element solution algorithm for viscous incompressible fluid dynamics*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 6, 1973, pp 89-101.
- BARRETT J.W. and MORTON K.W., *Optimal finite element solutions to diffusion-convection problems in one dimension*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 15, 1980, pp 1457-1474.
- BASCO D.R., *Limitations of Saint Venant equations to model flood waves*, Journal of Hydraulic Engineering, 1987, pp 758-763.
- BATHURST J.C., *Physically-based distributed modelling of an upland catchment using the système hydrologique européen*, Journal of Hydrology, Vol 87, 1986, pp 79-102.
- BEAR J., *Dynamics of fluids in porous media*, American Elsevier Publishing Company, 1972.
- BECHTELER W. and BROICH K., *Effects in dam-break modeling*, Proceedings of the IAHR Congress in Madrid, 1991, pp A-189 - A-200.
- BEHNIA M., WOLFSHTEIN M. and DE VAHL DAVIS.G., *A stable marching scheme for computational fluid mechanics*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol 10, 1990, pp 607-621.
- BELL N. C., WHEATER H.S. and JOHNSTON P. M., *Evaluation of overland flow models using laboratory catchment data - II. Parameter identification of physically based (kinematic waves) models*, Hydrological Sciences Journal, Vol 34, n° 3, June 1989, pp 289-317.
- BELL S.W. , ELLIOT R.C. and CHAUDRY M.H., *Experimental results of two-dimensional dam-break flows*, Journal of Hydraulic research, Vol 30, n° 2, 1992, pp 225-252.
- BELLMAN R.E., DREYFUS S.E., BARBIER M. and PLANCHE R., *La programmation dynamique et ses applications*, Dunod, Paris, 1965.
- BELLOS C.V. and SAKKAS J.G., *1-D dam break flood wave propagation on dry bed*, Journal of Hydraulic Engineering, Vol 113, n° 12, 1987, pp 1510-1524,.
- BELLOS C.V. , SOULIS J.V. and SAKKAS J.G., *Experimental investigation of two-dimensional dam- break induced flows*, Journal of Hydraulic research, Vol 30, n° 1, 1992, pp 47-63.
- BEN-SABAR E. and CASWELL B., *A stable finite element simulation of convective transport*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 14, 1979, pp 545-565.
- BENOIST G., *Principes du calcul de la rupture progressive d'un barrage par effet de renard*, Electricité de France, Chatou, 1979.
- BENOIST G., *Calcul de l'érosion d'une digue par subverse*, Electricité de France, Chatou, 1991.

BENOIST G., HERVOUET J.M. AND LABADIE G., *L'expérience d'EDF en matière de calcul des ondes de submersion*, Electricité de France, Chatou, 1991.

BENSABAT J. and ZEITOUN D.G., *A least-squares procedure for the solution of transport problems*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol 10, 1990, pp 623-636.

BEVEN K., *Changing ideas in hydrology - the case of physically-based models*, Journal of Hydrology, Vol 105, 1989, pp 157-172.

BEVEN K., GILMAN K. and NEWSON M., *Flow and flow routing in upland channel networks*, Hydrological Sciences Bulletin, Vol 24, n° 3, september 1979, pp 303-372.

BHALLAMUDI S.M. and CHAUDHRY M.H., *Computation of flows in open-channel transitions*, Journal of Hydraulic Research, Vol 30, 1992, n° 1, pp77-93.

BONIN J., *L'hydraulique dans l'antiquité*, La Houille Blanche, No 4, 1983, pp 285-288,

BOTEV I. B., *One-dimensional numerical modeling of dam-break wave propagation in mild sloping natural streams*, Journal of Hydrosience and Hydraulic Engineering, Vol 9, n° 1, 1991, pp 27-42.

BOTEV I.B., *One-dimensional numerical modeling of dam-break wave propagation in mild sloping natural streams*, Journal of Hydrosience and Hydraulic Engineering, Vol 9, n° 1, 1991, pp 27-42.

BRAKENSIEK D.L. and COMER G.H., *A re-examination of a flood routing method comparison*, Journal of Hydrology, Vol 3, 1965, pp 225-230.

BULTOT F., DUPRIEZ G.L., BODEUX A., *Interception potentielle journalière de la pluie par divers peuplements forestiers*, Journal of Hydrology, Vol 31, 1976, pp 381-392.

C

CALEMBERT L., PEL J., MONJOIE A. et ESKENAZI E., *Etude hydrologique et hydrogéologique du Sart Tilman. Bassin du Ruisseau du Blanc Gravier, Première partie*, Collection des publications de la Faculté des Sciences Appliquées de l'Université de Liège, 1970.

CANTEKIN M.E. and WESTERINK J.J., *Non-Diffusive N+2 Degree Petrov-Galerkin Methods for Two-Dimensional Transient Transport Computations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 30, 1990, pp 397-418.

CANUTO C., HUSSAINI M.Y., QUARTERONI A. and ZANG Th.A., *Spectral methods in fluid dynamics*, Springer - Verlag, New York, 1987.

CARDOSO A.H., GRAF W.H. and GUST G., *Uniform flow in a smooth open channel*, Journal of Hydraulic Research, Vol 27, n° 5, 1989, pp 603-616.

CAREY G.F. and JIANG B.N., *Least-squares finite element method and preconditioned conjugate gradient solution*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 24, 1987, pp 1283-1296.

CAREY G.F. and JIANG B.N., *Least-squares finite elements for first-order hyperbolic systems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 26, 1992, pp 81-93.

CAVENDISH J.C., *Automatic triangulation of arbitrary planar domains for the finite element method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 8, 1974, pp 679-696.

CHEN C.L., *Dam-break wave model: formulation and verification*, Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol 106, N° HY5, 1980, pp 747-767.

CHEN C.L., *Discharge and depth behind a partially breached dam*, Journal of Hydraulic Engineering, 1987, pp 648-654.

CHEN C.L., *Laboratory verification of a dam-break flood model*, Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol 106, N° HY4, 1980, pp 535-555.

CHEN C.L., *Momentum and energy coefficients based on power-law velocity profile*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol 118, n° 11, November 1992, pp 1571-1584.

CHEN Y.H., SIMONS D.B. and MOLINAS A., *Hydrologic and geomorphic changes in a river basin induced by a dam break*, Proceedings of the International Symposium on Risk and Reliability in Water Resources, Vol 2, 1978, pp 616-625.

CHEN C.L. and CHOW V.T., *Hydrodynamics of mathematically simulated surface runoff* A contribution to the International Hydrological Decade, Hydraulic Engineering Series n° 18, University of Illinois, 1968.

CHOW V.T., MAIDMENT D.R. and MAYS L.W., *Applied hydrology*, Mc Graw - Hill International Editions, New York, 1988.

CHOW V.T. and BEN-ZVI A., *Hydrodynamic modeling of two-dimensional watershed*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, HY11, november 1973, pp 2023-2041.

CHRISTIE I., GRIFFITH D.F., MITCHELL A .R. and ZIENKIEWICZ O.C., *Finite element methods for second order differential equations with significant first derivatives*, International Journal for Numerical methods in engineering, Vol 10, 1976, pp 1389-1396.

CHUNG T.H., KARR G.R. and KIM J.Y., *Optimal control penalty finite elements in fluid mechanics*, Finite Elements in Fluids, Vol 4, 1982, pp 319-345, chapter 16.

CHUNG T.J., *Finite Element Analysis in Fluid Dynamics*, Mc Graw - Hill International Book Company, New York, 1977.

CLARKE R.T., *A review of some mathematical models used in hydrology, with observations on their calibration and use*, Journal of Hydrology, Vol 19, 1973, pp 1-20.

COLIN E. and POCHAT R., *One -dimension open channel flow*, Proceedings of the International Symposium on Unsteady Flow in Open Channel, Newcastle-upon-Tyne, England, 1976, pp A4-39 - A4-52.

COLIN E. et POCHAT R., *Calcul d'onde de submersion due à la rupture d'un barrage*, Ministère de l'Agriculture et du Développement Rural, C.T.G.R.E.F., Division Hydrologie et Hydraulique Fluviale, France, 1978, pp 1-41.

COMOLET R., *Mécanique expérimentale des fluides*, Masson et compagnie, Paris, 1969.

COOLEY R.L. and MOIN S.A., *Finite element solution of Saint-Venant equations*, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, No HY6, june 1976, pp759-775.

CORREC Y., *Fast computation of Delaunay triangulations*, Advanced Engineering Software, Vol 9, n° 2, 1987, pp 77-83.

CHRISTIE I. and MITCHELL A.R., *Upwinding of high order Galerkin methods in conduction-convection problems*, Short Communications, Journal of Hydraulic Research, 1978, pp 1764-1771.

CROLEY T.H. and HUNT B., *Multiple-valued and non-convergent solutions in kinematic cascade models*, Journal of Hydrology, Vol 49, 1981, pp 121-138.

CUNDY T.w. and TENTO S.W., *Solution to the kinematic approach to overland flow routing with rainfall excess given by Philip's equation*, Water Resources Research, Vol 21 No 8, Augustus 1985, pp 1132-1140.

D

DALUZ VIEIRA J.H., *Conditions governing the use of approximations for the Saint-Venant equations for shallow surface water flow*, Journal of Hydrology, Vol 60, 1983, pp 43-58.

DENDY J.E., *Two methods of Galerkin-type achieving optimum L2 rates of convergence for first-order hyperbolics*, SIAM Journal of Numerical Analysis, Vol 11, 1974, pp 637-653.

DEHOUSSE N.M. et VERBRUGGE J.M., *Au sujet de la Meuse liégeoise, au droit des barrages mobiles de Monsin , Yvoz-Ramet et Neuville-sous-Huy*, Revue Universelle des Mines, n° 7, 1967.

DEHOUSSE N.M. et BONA J., *Les barrages fixes de retenue hydraulique et leur sécurité*, Livre de l'Eau, 1978.

DEHOUSSE N.M., *Les barrages en béton*, Notes de cours, Université de Liège, 1994.

- DE KOSINSKY V., *Hydraulique Appliquée*, Notes de cours, Université de Liège, 1994.
- DHATT G. and THOUZOT G., *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine S.A. éditeur, Paris, 1981.
- DICK E., *A multigrid method for steady incompressible Navier-Stokes equations based on partial flux splitting*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol 9, 1989, pp 113-120.
- DICK E., *Accurate Petrov-Galerkin methods for transient convective diffusion problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 19, 1983, pp 1425-1433.
- DJENIDI S., *Etude théorique et expérimentale de l'effet de la rugosité sur l'hydrogramme de ruissellement d'un bassin hydrologique*, travail de fin d'études, 1979.
- DONEA J., *A Taylor-Galerkin method for convective transport problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 20, 1984, pp 101-119.
- DUNGLAS M.J., *La Sécurité des barrages : une doctrine en évolution*, Bulletin de liaison du Comité interafricain d'Etudes hydrauliques, n° 77-78, Juillet-octobre 1989.
- DUNNE T., *Relation of field studies and modeling in the prediction of storm runoff*, Journal of Hydrology, Vol 65, 1983, pp 25-48.

E

- EASON E.D., *A review of least squares methods for solving partial differential equations*, International Journal for Numerical methods in engineering, Vol 10, 1976, pp 1021-1046.
- EASON E.D., *A review of least-squares methods for solving partial differential equations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 10, 1976, pp 1021-1046.
- ECH-CHERIF EL KETTANI B., BERRADA A., OUAZAR D. and AGOUZOUL M., *2D Dam break flood-wave propagation on dry beds*, tiré à part.
- ESKENAZI E., *Méthode expérimentale de prédiction des hydrogrammes de ruissellement des bassins hydrologiques par analyse numérique*, thèse de doctorat, Université de Liège, 1975.
- ESKENAZI E., *Etude hydrologique du Sart Tilman, Bassin du Ruisseau du Blanc Gravier, deuxième partie*, Mémoires C.E.R.E.S. Université de Liège, 1973.
- ESSERS J.A., *Méthodes nouvelles pour le calcul numérique d'écoulements stationnaires de fluides parfaits compressibles*, thèse de doctorat, Université de Liège, 1977.

F

FENNEMA R.J. and CHAUDHRY M.H., *Implicit methods for two-dimensional unsteady free-surface flows*, Journal of Hydraulic Research, Vol 27, n° 3, 1989, pp 321-332.

FENNEMA R.J. and CHAUDHRY M.H., *Simulation of one-dimensional dam-break flows*, Journal of Hydraulic Research, Vol 25, n° 1, 1987, pp 41-52.

FIELD W.G. and WILLIAMS B.J., *A Generalised one-dimensional kinematic catchment model*, Journal of Hydrology, Vol 60, 1983, pp 25-42.

FINLAYSON B., *Weighted residual methods and their relation to finite element methods in flow problems*, Finite Elements Methods in Flow Problems, pp 13-19.

FOSTER G.B., HUGGINS L.F., MEYER L.D., *Simulation of overland flow on short field plots*, Water Resources Research, Vol 4, n° 6, 1968, pp 1179-1188.

FREUND J. and SALONEN E.M., *A Logic for simple Petrov-Galerkin weighting functions*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 34, 1992, pp 805-822.

G

GARCIA-NAVARRO M.P., *Numerical simulation of unsteady flow at open channel junctions*, Journal of Hydraulic Research, Vol 30, n° 5, 1992, pp 595-608.

GARCIA-NAVARRO P. and SAVIRON J.M., *Mc Cormack's method for the numerical simulation of one-dimensional discontinuous unsteady open channel flow*, Journal of Hydraulic Research, Vol 30, 1992, n° 1, pp 95-105.

GARCIA-NAVARRO P., ALCRUDE F. and SAVIRON J.M., *1-D open-channel flow simulation using TVD-Mc Cormack scheme*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol 118, n°10, October 1992, pp 1359-1372.

GARRISON J.M., Grandju, J.P., Price, J.T., *Unsteady flow simulation in rivers and reservoirs*, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, n° HY5, September 1969, pp 1559-1575.

GLOWINSKI R., MANTEL B., PERIAUX J., PERRIER P. and PIRONNEAU O., *On a efficient new preconditioned conjugate gradient method. Application to the in-core solution of the Navier-Stokes equations via non-linear least-squares and finite elements method*, Finite Elements in Fluids, Vol 4, 1982, pp 365-401.

GOZALI S. and HUNT B., *Dam break solutions for a partial breach*, Journal of Hydraulic Research, Vol 31, n° 2, 1993, pp 205-214.

GRISARD L., *Modélisation dynamique de l'emboutissage par la méthode des éléments finis et le code Lagamine*, rapport interne n° 216, Université de Liège, 1993.

Groupe de Travail du Comité Français des Grands Barrages, *Bases techniques des plans d'alerte destinés à faciliter la protection des populations en aval des barrages*, Commission Internationale des Grands Barrages, Proceedings du Quatorzième Congrès des Grands Barrages, Rio de Janeiro, 1982, pp 1263-1288.

Groupe de Travail du Comité Français des Grands Barrages, *Mesures prises en France pour faciliter la protection des populations à l'aval des barrages - Règlementation et calcul des zones submergées*, Commission Internationale des Grands Barrages, Proceedings du Onzième Congrès des Grands Barrages, Madrid, 1973, pp 661-679.

GUNTHER Cl., *Conservative versions of the locally exact consistent upwind scheme of second order (Lecusso-Scheme)*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 34, 1992, pp 793-804.

GUPTA M.M. and MANOHAR R.P., *On the use of central difference scheme for Navier-Stokes equations*, International Journal for Numerical methods in engineering, Vol 15, 1980, pp 557-573.

GUPTA V.K. and WAYMIRE E., *On the formulation of an analytical approach to hydrologic response and similarity at the basin scale*, Journal of Hydrology, Vol 65, 1983, pp 95-123.

GUYMON G.L. and HROMADKA T.V., *Two-dimensional diffusion-probabilistic model of a slow dam break*, Water Resources Bulletin, American Water Resources Association, Vol 22, n° 2, 1986, pp 257-265.

H

HALL M. J., JOHNSTON P. M. and WHEATER H.S., *Evaluation of overland flow models using laboratory catchment data - I. An apparatus for laboratory catchment studies*, Hydrological Sciences Journal, Vol 34, n° 3, June 1989, pp 277-288.

HANSBO P., *The characteristic streamline diffusion method for the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations*, Computer Methods in applied Mechanics and Engineering, Vol 99, 1992, pp 171-186.

HEINRICH J.C. and STRADA M., *Penalty finite element analysis of natural convection at high Rayleigh numbers*, Finite Elements in Fluids, Vol 4, 1982, pp 319-345, chapter 14, 17.

HEINRICH J.C. and ZIENKIEWICZ O.C., *Quadratic finite element schemes for two-dimensional convective-transport problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 11, 1977, pp 1831-1844.

- HEINRICH J.C., *On quadratic elements in finite element solutions of steady-state convection-diffusion equation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 15, 1980, pp 1041-1052.
- HEINRICH J.C., HUYAKORN P.S., ZIENKIEWICZ O.C. and MITCHELL A.R., *An 'Upwind' Finite Element Scheme for Two-Dimensional Convective Transport Equation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 11, 1977, pp 131-143.
- HOANG Q.O. and TRAN G.L., *Ecoulement en rivière après une rupture de barrage - Calcul par la méthode des différences finies associées avec des caractéristiques*, La Houille Blanche, N° 6, 1990, pp 433-439.
- HROMADKA II T.V., MCCUEN R.H. and YEN C.C., *Comparison of overland flow hydrograph models*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol 113, HY11, 1987, pp 1422-1440.
- HROMADKA T.V. and DEVRIES J.J., *A two-dimensional dam-break model of the Orange County Reservoir*, Proceedings of the International Symposium on Urban Hydrology, Hydraulic Infrastructures and Water Quality Control, Lexington, Kentucky, 1985, pp 185-193.
- HROMADKA T.V. and DURBIN T.J., *Two-dimensional dam-break flood-flow analysis for Orange County Reservoir*, Water Resources Bulletin, American Water Resources Association, Vol 22, n° 2, 1986, pp 249-255.
- HROMADKA T.V., BERENBROCK C.E., FRECKLETON J.R. and GUYMON G.L., *A two-dimensional dam-break flood plain model*, Advanced Water Resources, Vol 8, 1985, pp 7-14.
- HUGGINS L.F. and MONKE E.J., *A mathematical model for simulating the hydrologic response of a watershed*, Water Resources Research, Vol 4, n° 3, june 1968, pp 529-539.
- HUGHES, T.J.R. and BROOKS A., *A theoretical framework for petrov-Galerkin methods with discontinuous weighting functions: application to the streamline-upwind procedure*, Finite Elements in Fluids, Vol 4, 1982, pp 21-45, chapter 3.
- HUGHES T.J.R., *A simple scheme for developing 'upwind' finite elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 12, 1978, pp 1359-1365.
- HUGHES T.J.R., LIU W.K. and BROOKS A., *Finite element analysis of incompressible viscous flows by the penalty function formulation*, Journal of Computational Physics, Vol 30, 1979, pp 1-60.
- HUNT B., *Dam-break solution*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol 110, n° 6, 1984, pp 675-686.

I

IDELSOHN S.R., *Upwind techniques via variational principles*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 28, 1989, pp 769-784.

IZZARD C.F., *Overland flow tests*, Bureau of Public Roads, Tabulated Hydrographs, Vol 1-3 , 1942-43.

J

JARRETT R.D. and COSTA J.E., *Hydrology, geomorphology and dam-break modeling of the july 15, 1982 Lawn Lake Dam and Cascade Lake Dam failures, Larimer County, Colorado*, United States government Printing office, Washington, 1986, pp 1-78.

JAYAWARDENA A.W. and WHITE J.K., *A finite element distributed catchement model, I. analytical basis*, Journal of Hydrology, Vol 34, 1977, pp 269-286.

JAYAWARDENA A.W. and WHITE J.K., *A finite element distribution catchement model, II. Application to real catchements*, Journal of Hydrology, Vol 42, n° 3/4, july 1979, pp 231-249.

JENSEN O.K. and FINLAYSON B.A., *Oscillation limits for weighted residual methods applied to convective diffusion equations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 15, 1980, pp 1681-1689.

JIANG B.N. and CAREY G.F., *A stable least-squares finite element method for non-linear hyperbolic problems*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol 8, 1988, pp 933-942.

JOHNS B., SOULSBY R.L. and XING J., *A comparison of numerical model experiments of free surface flow over topography with flume and field observations*, Journal of Hydraulic Research, Vol 31, n° 2, 1993, pp 215-228.

K

KARAMOUZIS D.N., *A space discontinuous Galerkin method for the one-dimensional unsteady convection-diffusion equation*, Water Resources Management, Vol 4, 1990, pp175-1851.

KATOPODES N. and STRELKOFF T., *Computing two-dimensional dam-break flood waves*, Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol 104, n° HY9, 1978, pp 1269-1288.

KATOPODES N. and STRELKOFF T., *Two-dimensional shallow water-wave models*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 105 n° EM2, April 1979, pp 317-335.

KATOPODES N.D. and SCHAMBER D.R., *Applicability of dam-break flood wave models*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol 109, n° 5, 1983, pp 702-721.

KATOPODES N.D., *A dissipative Galerkin scheme for open-channel flow*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol 110, N° 4, 1984, pp 450-466.

KATOPODES N.D., *Two-dimensional surges and shocks in open channels*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol 110, n° 6, 19, pp 794-812.

KAWAHARA M., NAKAZAWA S., OHMORI S. and TAGAKI T., *Two-step explicit finite element method for storm surge propagation analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 15, 1980, pp 1129-1148.

KAWAHARA M., TAKEUCHI N. and YOSHIDA T., *Two sep explicit finite element method for Tsunami wave propagation analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 12, 1978, pp 331-351.

KAWAHARA M. and YOKOYAMA T., *Finite element method for direct runoff flow*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, HY4, april 1984, pp 519-534.

KEEFER T.N., *Comparison of linear systems and finite difference flow-routing techniques*, Water Resources Research, Vol 12, n° 5, october 1976, pp 997-1006.

KHELLAF M., *Modélisation mathématique de l'évolution morphologique des plages*, thèse de doctorat, Université de Liège, 1991.

KELLY D.W., NAKAZAWA S., ZIENKIEWICZ O.C. and HEINRICH J.C., *A note on upwinding and anisotropic balancing dssipation in finite element approximations to convective diffusion problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 15, 1980, pp 1705-1711.

KENFAOUI M. et MARCHE C., *Comment évaluer l'érosion d'une vallée sous l'écoulement de rupture d'un barrage*, Can. J. Civ. Eng., n° 13, 1986, pp 474-484.

KEUNING D.H., *Application of finite element method to open channel flow*, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, n° HY4, april 1976, pp 459-468.

KEUNING D.H., *Application of finite eement method to open channel flow*, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, n° HY4, April 1976, pp 459-469.

KIKUCHI F., *A finite element method for non self-adjoint problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 6, 1973, pp 39-54.

KIKUCHI F. and USHIJIMA T., *Theoretical analysis of some finite element methods for convective diffusion equations*, Finite Elements in Fluids, Vol 4, 1982, pp 67-87.

KING G.W., *Mathématiques appliquées en recherche opérationnelle*, Mathématiques Modernes pour l'Ingénieur, E.F. Beckenbach, Tome I, Dunod, Paris, 1965, pp 222-255.

- KIVIJARVI M. and REITER P.H., *The interactive, dynamic river management computer model of Kemijoki river and its use for optimizing and safeguarding operations under extraordinary flood conditions*, Commission Internationale des Grands Barrages, Proceedings du Seizième Congrès des Grands Barrages, San Fransisco, 1988, pp 975-993.
- KRANENBURG C., *On the stability of gradually varying flow in wde open channels*, Journal of Hydraulic Research, Vol 28, n° 5, 1990, pp 621-628.
- KUMAR S.G., *Transitional flow in channel junctions*, Journal of Hydraulic Research, Vol 31, n° 5, 1993, pp 601-604.
- KUNDZEWICZ Z.W. and PLATE E.J., *Effect of Choice of Routing Model on Extreme Flow Statistics*, Hydrological Sciences Journal, Vol 34, n°2, 1989, pp 139-156.
- KUNDZEWICZ Z.W., *Physically based hydrological flood routing methods*, Hydrological Sciences Journal, Vol 31, n° 1, 1986, pp 237-261.
- KUNDZEWICZ Z.W. and NAPIORKOWSKI J.J., *Nonlinear models of dynamic hydrology*, Hydrological Sciences Journal, Vol 31, n° 2, 1986, pp 163-185.

L

- LANDAU L. and LIFCHITZ E., *Physique théorique, tome 6, Mécanique des fluides*, Editions Mir, Moscou, 1989.
- LANE L.J. and WOOLHISER D.A., *Simplifications of watershed geometry affecting simulation of surface runoff*, Journal of Hydrology, Vol 35, 1977, pp 173-190.
- LAPIDUS L. and PINDER G.F., *Numerical solution of partial differential equations in science and engineering*, John Wiley and Sons, New York, 1982.
- LEE R.L., GRESHO P.M., CHAN S.T., SANI R.L. and CULLEN M.J.P., *Conservation laws for primitive variable formulations of the incompressible flow equations using the Galerkin finite element method*, Finite Elements in Fluids, Vol 4, 1982, pp 21-45, chapter 2
- LEJEUNE A., *Principe de la mécanique des fluides (hydraulique - aérodynamique)*, Notes de cours, Université de Liège, 1994.
- LEU J.M. and LIU C.L., *Overland flow computation with the carcteristics method for a kinematic catchment model*, Water Resources Management, Vol 2 , 1988, pp 269-288.
- LI R.M., SIMONS D.B. and STEVENS M.A., *Nonlinear wave approximation for water routing*, Water Resources Research, Vol 11, No2, 1975, pp 245-252.
- LO S.H., *A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 21, 1985, pp 1403-1426.

LUCCHI C.W., *Improvement of Mac Cormack's scheme for Burgers' equation using a finite element method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 15, 1980, pp 537-555.

LYNN P.P. and ARYA S.K., *Use of the least squares criterion in the finite element formulation*, International Journal for Numerical methods in engineering, Vol 6, 1973, pp 75-88.

LYNN P.P. and ARYA S.K., *Use of the least squares criterion in the finite element formulation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 6, 1973, pp 75-88.

LYNCH D.R., *Finite element solution of the shallow water equations*, Thèse de doctorat, Faculty of Princeton University, 1978.

M

Mac ARTHUR R.C., SCHAMBER D.R., HAMILTON D.L. and WEST M.H., *Verification of a generalized mudflow model*, Journal of Hydraulic Engineering, 1987, pp 457-462.

MALLER R.A. and SHARMA M.L., *Aspects of rainfall excess from spatially varying hydrological parameters*, Journal of Hydrology, Vol 67, 1984, pp 115-127.

MARCUS K.B. and LAN Y., *Surface runoff from moving storm using two-dimensional finite element diffusion wave approximation*, Proceedings of the Ninth International Conference on Computational Methods in Water Resources, Denver, U.S.A., Vol 2, pp 737-7

MENENDEZ A.N. and NAVARRO F., *An experimental study on the continuous breaking of a dam*, Journal of Hydraulic Research, Vol 28, 1990, N° 6, pp 753-772.

MILLER C.T. and CORNEW F.H., *A Petrov-Galerkin method for resolving advective-dominated transport*, Proceedings of the Ninth International Conference on Computational Methods in Water Resources, Denver, U.S.A., Vol 1, pp 157-164, 1992. Computational Mechanics Publications and Elsevier Applied Science.

MORGALI J.R., *Laminar and turbulent overland flow hydrographs*, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, No HY2, February 1970, pp 441-460.

MORRIS E.M., *The propagation of waves in shallow water flow with lateral inflow*, Hydrological Sciences Bulletin, Vol 25, n° 1, 1980, pp 25-32.

MOTTA J.C. and TUCCI C.E.M., *Simulation of the urbanization effect in flow*, Hydrological Sciences Journal, Vol 29, n° 2, 1984, pp131-147.

MUSKATIROVIC J. and KAPOR R., *Analysis of the control of floods caused by the failure of a cascade system of dams*, Proceedings of the 2nd International Conference on the Hydraulics of Floods and Flood Control, Cambridge, England, 1985, pp 49-61.

N

NAEF F., *Can we model the rainfall-runoff process today ?*, Hydrological Sciences Bulletin, Vol 26, n° 3, 1981, pp 281-289.

NAIHUA R., *Analysis of an experimental arch dam failure*, Water Power and Dam Construction, July 1989, pp 30-33.

NAKAGAWA H., NAKAMURA S. and ICHIHASHI K., *Generation and development of a hydraulic bore due to the breaking of a dam*, Bull. Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto University, Vol 19, Part 2, n° 154, 1969, pp 1-17.

NAPIORKOWSKI J.J. and DOOGE J.C.I., *Analytical solution of channel flow model with downstream control*, Hydrological Sciences Journal, Vol 33, n° 3, 1988, pp 269-287.

O

ORTIZ P., *A Taylor-Galerkin implicit-explicit generalisation for convective diffusion equations*, Proceedings of the Ninth International Conference on Computational Methods in Water Resources, Denver, U.S.A., Vol 1, pp 165-172, 1992. Computational Mechanics Publications and Elsevier Applied Science.

OVERTON D.E., *Kinematic flow on long impermeable planes*, Water Resources Bulletin, Vol 8, n° 6, 1972, pp 1198-1204.

OVERTON D.E., *Muskingum flood routing of upland streamflow*, Journal of Hydrology, Vol 4, 1966, pp 185-200.

P

PALACIOS-VELEZ O.L. and CUEVAS-RENAUD B., *A PC-oriented distributed hydrologic model based on a digital terrain model formed by irregular triangular facets*, Hydraulic Engineering Software IV: Fluid Flow Modelling, pp 3-13, Computational Mechanics Publications, Elsevier Applied Science.

PAYRE G., de BROISSIA M., and BAZINET J., *An 'upwind' finite element method via numerical integration*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 18, 1982, pp 381-396.

PETRASCHECK A.W. and SYDLER P.A., *Routing of dam break floods*, Water Power and Dam construction, 1984, pp 29-32.

PIRONNEAU O., *Méthodes des éléments finis pour les fluides*, Masson, Paris, 1988.

PIROTTON M., *Résolution des équations des shallow water en bidimensionnel*, par éléments finis, travail de fin d'études, Université de Liège, 1986.

PIROTTON M., *Calcul de la propagation d'une onde de rupture de barrage*, Tribune de l'eau, vol. 44 n° 551, Mai/Juin 1991.

POCHET Th., *Contribution à la modélisation mathématique de l'hémodynamique du système cardio-vasculaire*, thèse de doctorat, Université de Liège, 1991.

PRICE R.K., *Comparison of four numerical methods for flood routing*, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, n° HY7, july 1974, pp 879-899.

R

RAJAR R., *Recherche théorique et expérimentale sur la propagation des ondes de rupture de barrage dans une vallée naturelle*, thèse de doctorat, Université de Toulouse, 1972.

RAJAR R., *Modèle mathématique et abaques sans dimensions pour la détermination de l'écoulement qui suit la rupture d'un barrage*, Commission Internationale des Grands Barrages, Proceedings du Onzième Congrès des Grands Barrages, Madrid, 1973.

RAJAR R., *Mathematical simulation of dam-break flow*, Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol 104, n° HY7, 1978, pp 1011-1026.

RAYMOND W.H. and GARDER A., *Selective damping in a Galerkin method for solving wave problems with variable grids*, Monthly Weather Review, Vol 104, 1976, pp 1583-1590.

REED D.W., JOHNSON P. and FIRSTH J.M., *A non-linear rainfall-runoff model, providing for variable lag-time*, Journal of Hydrology, Vol 25, 1975, pp 295-305.

REITER P.H., *Numerical model simulations of dam operation under extraordinary flood conditions*, Commission Internationale des Grands Barrages, Proceedings du Seizième Congrès des Grands Barrages, San Fransisco, 1988, pp 995-1007.

RIGAL A., *Stability analysis of explicit finite difference schemes for the Navier-Stokes equations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 14, 1979, pp 617-620.

RICHTMYER R.D. and MORTON K.W., *Difference methods for initial - value problems*, Interscience publishers, New York, 1967.

ROSS B.B., CONTRACTOR D.N. and SHANHOLTZ V.O., *A finite- element model of overland and channel flow for assessing the hydrologic impact of land-use change*, Journal of Hydrology, Vol 41, n° 1/2, april 1979, pp 11-30.

S

SADEK E.A., *A scheme for the automatic generation of triangular finite elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 15, 1980, pp 1813-1822.

SAKKAS J.G. and BELLOS C.V., *Mathematical model for design of border irrigation*, Water Resources Management, Vol 5, n° 3&4, 1991, pp 289-303.

SAKKAS J.G. and STRELKOFF T., *Dam-break flood in a prismatic dry channel*, Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol 99, N° HY12, 1973, pp 2195-2216.

SAKKAS J.G. and STRELKOFF T., *Dimensionless solution of dam-break flood waves*, Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol 102, N° HY2, 1976, pp 171-184.

SANTOS F.J., *Accidents and wave propagation*, Best Summer Course , DEC/FCTUC AEUC, 1993.

SATO S., IMAMURA F. and SHUTO N., *Numerical simulations of flooding and damage to houses by the Yoshida river due to typhoon n°8610*, Journal of Natural Disaster Science, Vol 11, n° 2, 1989, pp 1-19.

SAVIC, L.J. and HOLLY, F.M., *Dambreak flood waves computed by modified Godunov method*, Journal of Hydraulic Research, Vol 31, n° 2, 1993, pp 187-204.

SAVIC L. and HOLLY F.M., *Modified Godunov method for dambreak flows*, Proceedings of the IAHR Congress in Madrid, 1991, pp A-201-A-210.

SCHREIBER D.L. and BENDER D.L., *Obtaining overland flow resistance by optimization*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, HY3, March 1972, pp 429-446.

SCHROPP M. and FONTIJN H.L., *Flow profiles for steady spatially varied flow - an explorative analysis*, Journal of Hydraulic Research, Vol 27, n° 1, 1989, pp 135-147.

SCHULZE K.W., *Finite element analysis of long waves in open channel systems*, Finite Elements Methods in Flow Problems, pp 295-303.

SINGH V.P. and QUIROGA A., *A dam-break erosion model - I. Formulation*, Department of Civil Engineering, Louisiana Sate University, Baton Rouge, USA, pp 1-30.

SINGH V.P. and QUIROGA A., *A dam-break erosion model - II. Application*, Department of Civil Engineering, Louisiana Sate University, Baton Rouge, USA, pp 1-17.

SINGH V.P. and WOOLHISER D.A., *A nonlinear kinematic wave model for watershed surface runoff*, Journal of Hydrology, Vol 31, 1976, pp 221-243.

SINGH V.P., *A laboratory investigation of surface runoff*, Journal of Hydrology, Vol 25, 1975, pp 187-200.

SLOAN S.W., *A fast algorithm for constructing Delaunay triangulations in the plane*, Advanced Engineering Software, Vol 9, n° 1, 1987, pp 34-55.

SMITH A.A., *A generalized approach to kinematic flood routing*, Journal of Hydrology, Vol 45, 1980, pp 71-89.

SMITH R.E., and WOOLISER D.A., *Overland flow on an infiltrating surface*, Water Resources Research, Vol 7, n° 4, augustus 1971, pp 899-913.

SMOLDEREN J., *Partial differential equations*, notes de cours, Von Karman Institute for Fluid Dynamics.

SOROOSHIAN S and GUPTA V.K., *The analysis of structural identifiability: theory and application to conceptual rainfall-runoff models*, Water Resources Research, Vol 21, n° 4, april 1985, pp487-495.

SPALDING D.B., *A novel finite difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 4, 1972, pp 551-559.

STEWART I.B. and UNSWORTH K., *A Petrov-Galerkin method for the numerical solution of the Bradshaw-Ferriss-Atwell turbulence model*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol 8, 1988, pp 493-517.

STOKER J.J., *Water waves The mathematical theory with applications*, Interscience publishers, inc., New York, 1957.

T

TAMADDON-JAHROMI H.R., DING D., WEBSTER M.F. and TOWNSEND P., *A Taylor-Galerkin Finite Element Method for Non-Newtonian Flows*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 34, 1992, pp 741-757.

TAMAI N., IKEUCHI K., YAMAZAKI A. and MOHAMED A., *Experimental analysis on the open channel flow in rectangular continuous bends*, Journal of Hydroscience and Hydraulic Engineering, Vol 1, n° 2, 1983, pp 17-31.

TAN S.K., *Rainfall and soil detachment*, Journal of Hydraulic Research, Vol 27, n° 5, 1989, pp 699-715.

TAYFUR G., LEVENT KAVVAS M., GOVINDARAJU R.S., STORM D.E., *Applicabilty of St. Venant equations for two-dimensional overland flows over rough infiltrating surfaces*, Journal of Hydraulic Engineering, Vol 119, n°1, jan 1993, pp 51-63.

TAYLOR C., MASHIDANI G.A. and DAVIS J.M., *A finite element approach to watershed runoff*, Journal of Hydrology, Vol 21, 1974, pp 231-246.

TAYLOR R.L. and ZIENKIEWICZ O.C., *Mixed finite element solution of fluid flow problems*, Finite Elements in Fluids, Vol 4, 1982, pp 319-345, chapter 1.

THIRRIOT C. et BENAYADA L., *Essai critique sur la diffusion numérique dans un algorithme d'écoulement transitoire à surface libre* La Houille Blanche, n° 8, 1993, pp 527-537.

TOMINAGA A., NEZU I., EZAKI K. and NAKAGAWA H., *Three-dimensional turbulent structure in straight open channel flows*, Journal of Hydraulic Research, Vol 27, n° 1, 1989, pp 149-173.

TU H. and GRAF W.H., *Velocity distribution in unsteady open-channel flow over gravel beds*, Journal of Hydroscience and Hydraulic Engineering, Vol 10, n° 1, May 1992, pp 11-25.

U

UNSAI I., *Sur la propagation des ondes de submersion dans un canal en écoulement non-uniforme*, Commission Internationale des Grands Barrages, Proceedings du Onzième Congrès des Grands Barrages, Madrid, 1973, pp 13-22.

UTNES T., *Two-equation (k,ϵ) turbulence computations by the use of a finite element model*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol 8, 1988, pp 965-975.

V

VICHNEVETSKY R., *Wave Propagation Analysis of Difference Schemes for Hyperbolic Equations: A Review*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol 7, 1987, pp 409-452.

W

WEINEMANN P.E. and LAURENSEN E.M., *Approximate flood routing methods: a review*, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, No HY12, december 1979, pp 1521-1536.

WERY B., *Identification des systèmes hydrologiques Application à la prévision des crues*, thèse de doctorat, Université Catholique de Louvain, 1990.

WESTERINK J.J. and SHEA D., *Consistent higher degree Petrov-Galerkin methods for the solution of the transient convection-diffusion equation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 28, 1989, pp 1077-1101.

WHEATER H.S., BELL N. C. and JOHNSTON P. M., *Evaluation of overland flow models using laboratory catchment data - III. Comparison of conceptual models*, Hydrological Sciences Journal, Vol 34, n° 3, June 1989, pp 319-337.

WHITEHEAD D.S., *A finite element solution of unsteady two-dimensional flow in cascades*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol 10, 1990, pp 13-34.

WILDERS P., *Improving the accuracy of the least-square finite element approximation of the linearized steady Euler equations by an embedding method*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol 8, 1988, pp 977-987.

WILDERS P., *On the accuracy of least-squares finite elements for a first-order conservation equation*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol 8, 1988, pp 957-964.

WINTHAM G.B., *Linear and nonlinear waves*, A Wiley-Interscience publication, John Wiley & sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore.

WINTHAM G.B., *Linear and nonlinear waves*, John Wiley and Sons, New York.

WOODING R.A., *A hydraulic model for the catchement-stream model. I. Kinematic-wave theory*, Journal of Hydrology, Vol 3, 1965, pp 254-267.

WOODING R.A., *A hydraulic model for the catchement-stream model. III. Comparison with runoff observations*, Journal of Hydrology, Vol 4, 1966, pp 21-37.

WOOLHISER D.A. and LIGGETT J.A., *Unsteady one-dimensional flow over a plane - the rising hydrograph*, Water Resources Research, Vol 3, n° 3, 1967, pp 753-771.

WURBS R.A., *Comparative evaluation of dam-breach flood wave models*, Texas Civil Engineer, 1986, pp 13-20.

Y

YANG J.Y., HSU C.A. and CHANG S.H., *Computations of free surface flows- Part 1: one-dimensional dam-break flow*, Journal of Hydraulic Research, Vol 31, n° 1, 1993, pp 19-34.

YANG J.Y., LIEN F.S. and HSU C.A., *Non oscillatory shock-capturing finite element methods for the one-dimensional compressible Euler equations*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol 11, 1990, pp 405-426.

YU C.C. and HEINRICH J.C., *Petrov-Galerkin method for multidimensional, time-dependent, convective-diffusion equations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 24, 1987, pp 2201-2215.

YU C.C. and HEINRICH J.C., *Petrov-Galerkin methods for the time-dependent convective transport equation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 23, 1986, pp 883-901.

YU J.R. and HSU T.R., *On the solution of diffusion-convection equations by the space-time finite element method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 23, 1986, pp 737-750.

YU Y.S. and Mc NOWN J.S., *Runoff from impervious surfaces*, Journal of Hydraulic Research, Vol 2, n° 1, 1964, pp 3-24.

Z

ZHANG H., HASSANZADEH Y., LONG N.D. and KAHAWITA R., *A 1-D numerical model applied to dam-break flows on dry beds*, Journal of Hydraulic Research, Vol 30, n° 2, 1992, pp 211-224.

ZIENKIEWICZ O.C., OWEN D.R.J. and LEE K.N., *Least square-finite element for elasto-static problems. Use of 'reduced' integration*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 8, 1974, pp 341-358.

ZIENKIEWICZ O.C., *The finite element method*, Mc Graw Hill Book Company Limited Maidenhead - Berkshire, England, 1977.

ZIPPE H. and GRAF W., *Turbulent boundary-layer flow over permeable and non-permeable rough surfaces*, Journal of Hydraulic Research, Vol 21, n° 1, 1983, pp 51-65.

Table des matières

CHAPITRE I INTRODUCTION GENERALE

PARTIE I : ECOULEMENT HYDROLOGIQUE QUASI-TRIDIMENSIONNEL EN FINE LAME SUR L'ENSEMBLE D'UN BASSIN VERSANT

CHAPITRE II MODELE MATHEMATIQUE GENERAL D'ECOULEMENT HYDROLOGIQUE

II.1.	Introduction	1
II.2.	Objectif du modèle hydrologique	4
II.3.	Equations hydrauliques de base	6
II.4.	Intégration temporelle des équations	9
II.5.	Passage en bidimensionnel	11
II.6.	Intégration spatiale des équations	16
II.6.1.	Intégration suivant la profondeur locale	17
II.6.2.	Conditions cinématiques	20
II.6.3.	Conditions dynamiques	21
II.6.4.	Equations bidimensionnelles complètes	22
II.7.	Simplification des équations	25

CHAPITRE III APPLICATION DE LA THEORIE CINEMATIQUE AUX ECOULEMENTS HYDROLOGIQUES

III.1.	Introduction	1
III.2.	Ecoulement hydrologique sur modèle réduit	1
III.2.1.	Bref historique	1
III.2.2.	Solution théorique des expérimentations	3
III.2.3.	Résultats expérimentaux	8
III.3.	Applications de la théorie cinématique aux topographies réelles	20
III.4.	Avantages et limitations de la théorie cinématique	24

Table des matières

CHAPITRE IV	METHODE NUMERIQUE PREMIERE APPROCHE	UNIDIMENSIONNELLE :
IV.1.	Introduction	1
IV.2.	Discrétisation spatiale et temporelle	2
IV.3.	Résolution numérique du système non-linéaire	5
IV.4.	Etude de stabilité du schéma numérique	7
IV.5.	Modélisation d'un écoulement sur plan incliné	11
IV.6.	Modélisation de l'écoulement sur pente non uniforme, de valeur croissante vers l'exutoire	15
IV.7.	Modélisation de l'écoulement sur pente non uniforme, de valeur décroissante vers l'exutoire	23
IV.8.	Conclusion	27
CHAPITRE V	ETUDE DES CHOCS EN ECOULEMENT HYDROLOGIQUE	
V.1.	Introduction	1
V.2.	Naissance de solutions multiples en un point	2
V.3.	Introduction de discontinuités vérifiant l'équation de continuité	9
V.4.	Première approche de la transition par l'hypothèse de l'onde diffusive	11
V.5.	Seconde approche de la transition par les équations complètes d'Euler	16
V.5.1.	Linéarisation des équations complètes	17
V.5.2.	Stabilité du système linéarisé	18
V.5.3.	Structure d'une transition par la théorie générale non-linéaire	21
V.6.	Conclusion	26
CHAPITRE VI	INTEGRATION DES CHOCS DANS LA SOLUTION	
VI.1.	Introduction	1
VI.2.	Solution généralisée de la théorie cinématique appliquée à l'hydrologie	2
VI.3.	Méthode numérique unidimensionnelle : approche finale	4
VI.3.1.	Méthode N+1	6
VI.3.2.	Méthode de Taylor-Galerkin	7
VI.3.3.	Méthode des moindres carrés	9
VI.3.4.	Méthode N-1	11
VI.3.5.	Détermination de la valeur optimale de α'_1	13
VI.3.6.	Introduction de la discrétisation temporelle pour la méthode N-1	14
VI.3.7.	Extension de la méthode au non-linéaire	16
VI.3.7.1.	Modélisation de l'écoulement sur plan incliné à condition amont de hauteur sinusoïdale	16
VI.3.7.2.	Modélisation de l'écoulement sur pente non uniforme, de valeur décroissante vers l'exutoire	20
VI.4.	Conclusion	24

Table des matières

CHAPITRE VII	EXTENSION DE LA THEORIE CINEMATIQUE AUX ECOULEMENTS HYDROLOGIQUES QUASI- TRIDIMENSIONNELS	
VII.1.	Introduction	1
VII.2.	Equations cinématiques quasi-tridimensionnelles	1
VII.3.	Discretisation et résolution du système	3
VII.4.	Généralisation dans l'utilisation de fonctions de pondération dissymétriques	4
	VII.4.1. Distribution du décentrement spatial des fonctions	4
	VII.4.2. Evaluation d'une longueur caractéristique pour chaque élément	10
VII.5.	Evaluation des quantités infiltrées	16
	VII.5.1. Approche théorique de l'infiltration	17
	VII.5.2. Conséquences de l'infiltration sur l'écoulement	23
	VII.5.2.1. Simulations en l'absence d'infiltration	23
	VII.5.2.2. Simulations sur terrains réels perméables	26
	VII.5.3. Méthode à balayages multiples	26
VII.6.	Conclusion	28
CHAPITRE VIII	ORDONNANCEMENT DES PHASES PREALABLES AUX SIMULATIONS D'ECOULEMENT HYDROLOGIQUE	
VIII.1.	Introduction	1
VIII.2.	Développement d'un mailleur automatique	2
VIII.3.	Délimitation d'un bassin versant constitué de facettes planes triangulaires	10
VIII.4.	Réalisation de la continuité de débit aux noeuds	18
VIII.5.	Introduction optionnelle d'un fractionnement supplémentaire des simulations d'écoulement hydrologique	21
VIII.6.	Conclusion	23

**PARTIE II : ECOULEMENT FILAIRE A SURFACE LIBRE
EN RESEAUX DE COURS D'EAU A
SECTION QUELCONQUE**

CHAPITRE IX	MODELE MATHEMATIQUE D'ECOULEMENT FILAIRE A SURFACE LIBRE EN SECTION QUELCONQUE	
IX.1.	Introduction	1
IX.2.	Passage en unidimensionnel	2
IX.3.	Intégration des équations sur la section	5
	IX.3.1. Intégration sur la largeur locale	5
	IX.3.2. Intégration sur la profondeur locale	9
IX.4.	Coefficient d'inégale répartition de vitesse	11
	IX.4.1. Profils de vitesse en mouvement permanent	12
	IX.4.2. Profils de vitesse en mouvement instationnaire	15
	IX.4.3. Ondes raides à forte amplitude	17
IX.5.	Contribution S_x des contraintes normales à la section	17
IX.6.	Introduction des apports extérieurs	18
IX.7.	Fermeture du système	18
CHAPITRE X	MODELE NUMERIQUE D'ECOULEMENT FILAIRE EN L'ABSENCE DE CHOC : PREMIERE APPROCHE	
X.1.	Introduction	1
X.2.	Discretisation spatiale et temporelle	2
X.3.	Résolution numérique du système non-linéaire	3
X.4.	Etude de stabilité du schéma numérique	5
	X.4.1. Approche théorique linéaire	5
	X.4.2. Approche numérique non-linéaire	12
	X.4.3. Choix du pourcentage de décentrement temporel	17
X.5.	Introduction des relations hauteur - section - périmètre	23
X.6.	Extension de la méthode numérique à la résolution de réseaux ramifiés	24
	X.6.1. Imposition des conditions aux noeuds	24
	X.6.2. Première application aux réseaux	28
	X.6.3. Généralisation des conditions aux noeuds	31
X.7.	Simulation de 10 heures de gestion d'un bief de la Meuse	32
X.8.	Conclusion	40

Table des matières

CHAPITRE XI	APPLICATION DE LA THEORIE DE PROPAGATION D'ONDES EN EAU PEU PROFONDE AUX ECOULEMENTS CONSECUTIFS AUX RUPTURES DE BARRAGES	
XI.1.	Introduction	1
XI.2.	Solutions théoriques d'écoulement consécutif à la rupture instantanée d'un ouvrage	13
XI.2.1.	Ecriture des équations sur deux familles de caractéristiques	13
XI.2.2.	Propagation sur fond sec	16
XI.2.3.	Propagation sur fond humide	22
XI.3.	Conclusion	31
CHAPITRE XII	EXTENSION DU MODELE NUMERIQUE AUX ECOULEMENTS FILAIRES INTEGRANT DES CHOCS : APPROCHE FINALE	
XII.1.	Introduction	1
XII.2.	Limites de la méthode classique de Galerkin en présence de discontinuités	2
XII.3.	Application de la méthode N-1 aux équations unidimensionnelles	8
XII.4.	Elaboration d'une méthode de pondération N+1	11
XII.4.1.	Choix des fonctions de pondération	11
XII.4.2.	Choix de la matrice G	13
XII.4.3.	Choix du paramètre α_{N+1}	15
XII.4.4.	Extension de la méthode au non-linéaire	17
XII.5.	Vérification théorique	18
XII.5.1.	Modélisation de rupture instantanée sur fond lisse	18
XII.5.1.1.	Confrontation aux solutions analytiques	18
XII.5.1.2.	Influence de l'évaluation de la matrice de masse	23
XII.5.2.	Modélisation de propagation d'un ressaut	24
XII.6.	Vérification expérimentale en canal rectiligne	26
XII.7.	Conclusion	35
CHAPITRE XIII	APPLICATION DU MODELE NUMERIQUE AUX ECOULEMENTS DISCONTINUS EN CONDITIONS REELLES	
XIII.1.	Introduction	1
XIII.2.	Procédure automatique de déplacement des frontières de discrétisation	3
XIII.3.	Comparaison d'une rupture progressive en géométrie réelle	5
XIII.4.	Modélisation instationnaire de la formation d'un ressaut	16
XIII.5.	Conclusion	22

**PARTIE III : COUPLAGE DES MODELES ET
MODELISATION DE LA RUPTURE
BRUSQUE D'UN GRAND BARRAGE BELGE**

**CHAPITRE XIV COUPLAGE DES MODELES DANS UNE MODELISATION
D'ECOULEMENT SUR LE BASSIN DU BLANC GRAVIER**

XIV.1.	Introduction	1
XIV.2.	Phases topographiques préalables aux modélisations d'écoulement sur le bassin du Blanc Gravier	4
XIV.3.	Modélisations d'écoulement en fine lame	12
XIV.4.	Propagation en réseau filaire des diagrammes de débits latéraux	20
XIV.5.	Conclusion	22

**CHAPITRE XV MODELISATION DE L'ECOULEMENT CONSECUTIF A LA
RUPTURE DU BARRAGE DE LA VESDRE A EUPEN**

XV.1.	Bref historique de l'alimentation en eau de la vallée de la Vesdre	1
XV.2.	Caractéristiques du barrage de la Vesdre	3
XV.3.	Hypothèses retenues pour la simulation	6
XV.3.1.	Définition de la topographie	9
XV.3.2.	Paramètres utilisés pour la simulation	17
XV.4.	Résultats obtenus en hypothèse de rupture instantanée	19
XV.4.1.	Vidange de la retenue	19
XV.4.2.	Propagation de l'onde entre le barrage et Eupen	22
XV.4.3.	Remontée d'un front secondaire dans le bras latéral de la Helle	26
XV.4.4.	Propagation du front principal entre Eupen et Béihane	29
XV.4.5.	Remontée d'un front secondaire dans le bras latéral de la Gileppe	32
XV.4.6.	Propagation du front principal entre Béthane et Verviers	34
XV.4.7.	Etablissement des cartes d'inondation dans les différents tronçons	37
XV.5.	Conclusion	48

CHAPITRE XVI CONCLUSION GENERALE

ANNEXES

TABLE DES NOTATIONS

BIBLIOGRAPHIE

Tout droit de reproduction réservé aux Editions L.H.C.N.

Editions L.H.C.N.

1994

Liège
