



# **Communication 10**

## **Génération et transfert des crues extrêmes Le logiciel Faitou**

Jérôme Dubois  
Michel Piroton

- N° 1 1986 W. H. Hager  
Discharge measurement structures
- N° 2 1988 N. V. Bretz  
Ressaut hydraulique forcé par seuil
- N° 3 1990 R. Bremen  
Expanding stilling basin
- N° 4 1996 Dr R. Bremen  
Ressaut hydraulique et bassins amortisseurs, aspects hydrauliques particuliers
- N° 5 1997 Compte-rendu du séminaire à l'EPFL  
Recherche dans le domaine des barrages, crues extrêmes

- N° 6 1998 N. Beyer Portner  
Erosion des bassins versants alpins suisse par ruissellement de surface
- N° 7 1998 G. De Cesare  
Alluvionnement des retenues par courants de turbidité
- N° 8 1998 J. Dubois  
Comportement hydraulique et modélisation des écoulements de surface
- N° 9 2000 J. Dubois, J.-L. Boillat  
Routing System - Modélisation du routage de crues dans des systèmes hydrauliques à surface libre
- N° 10 2001 J. Dubois, M. Pirotton  
Génération et transfert des crues extrêmes - Le logiciel Faitou



# **Communication 10**

## **Génération et transfert des crues extrêmes Le logiciel Faitou**

Jérôme Dubois  
Michel Piroton

## PREFACE

La protection contre les crues est plus que jamais un thème d'actualité. Dans ce domaine, les méthodes et techniques développées par les ingénieurs ont déjà fait leurs preuves. Leur application cohérente à l'échelle d'un bassin versant repose toutefois sur la maîtrise de comportements hydrauliques complexes.

Dans la présente communication, les deux auteurs, Dr Jérôme Dubois et Professeur Michel Pirotton, décrivent les bases théoriques d'un programme de calcul nommé *Faitou* (qui, comme son nom l'indique, fait effectivement presque tout) et démontrent sa puissance à l'aide de plusieurs exemples. *Faitou* permet de simuler la formation et le transfert des crues pouvant se produire dans un bassin versant. Il effectue de manière couplée le calcul du ruissellement de surface en deux dimensions avec le calcul des écoulements unidimensionnels en rivières.

Dans le cadre de la réalisation de son travail de doctorat sous la direction de Dr Jean-Louis Boillat, M. Dubois a conçu et programmé en grande partie le logiciel *Faitou*. Lors de plusieurs visites au Laboratoire de constructions hydrauliques en tant que professeur invité, M. Pirotton de l'Université de Liège en Belgique a apporté une contribution décisive au développement de ce logiciel.

Ce programme a été développé dans le cadre du projet de recherche CRUEX, qui avait pour objectif de déterminer les crues extrêmes à l'entrée des retenues des barrages suisses. Développé spécialement dans ce contexte particulier, *Faitou* est un modèle déterministe à base physique qui calcule le transfert pluie - débit à l'échelle du bassin versant en utilisant des modèles numériques de terrain.

Nous remercions la section des grands barrages de l'Officie fédéral des eaux et de la géologie pour leur soutien financier apporté à ce projet.

Prof. Dr Anton Schleiss

# VORWORT

Hochwasserschutz ist mehr denn je ein aktuelles Thema. Zur Abschätzung von Hochwasser wurden verschiedene Methoden und Theorien entwickelt, welche sich in der Praxis bewährt haben. Ihre kohärente Anwendung im Massstab eines Einzugsgebietes setzt allerdings eine vertiefte Kenntnis der komplexen hydraulischen Vorgänge voraus.

In der vorliegenden Mitteilung beschreiben Dr. Jérôme Dubois und Prof. Dr. Michel Piroton die theoretischen Grundlagen eines Berechnungsprogramms, genannt *Faitou* (welches wie der französische Name andeutet, fast alles macht), und zeigen gleichzeitig dessen Stärke anhand von mehreren Beispielen. Das Programm *Faitou* erlaubt Entstehung und Abfluss von Hochwassern in Einzugsgebieten zu simulieren. Es berechnet den zweidimensionalen Oberflächenabfluss und den eindimensionalen Abfluss in Fliessgewässern in gekoppelter Weise.

Im Rahmen seiner Dissertationsarbeit unter der Leitung von Dr. Jean-Louis Boillat, hat Hr. Dubois das Programm *Faitou* entworfen und grösstenteils programmiert. Während mehreren Besuchen als eingeladener Professor hat Hr. Piroton, Professor an der Universität in Lüttich in Belgien, einen entscheidenden Beitrag zur Entwicklung des Programms *Faitou* geleistet.

Das Programm wurde im Rahmen des Forschungsprojektes CRUEX entwickelt, welches zum Ziele hatte, extreme Hochwasser in den direkten Einzugsgebieten der Stauseen der Talsperren in der Schweiz zu bestimmen. Für diese spezielle Fragestellung entwickelt, ist das Programm *Faitou* ein deterministisches, physikalisch begründetes Modell, welches den Übergang von Regen in Oberflächen- und Gerinneabfluss im Massstab des Einzugsgebietes unter Verwendung von digitalen Geländemodellen berechnet.

Wir danken der Sektion Talsperren des Bundesamtes für Wasser und Geologie, welche das Forschungsprojekt finanziell unterstützt hat.

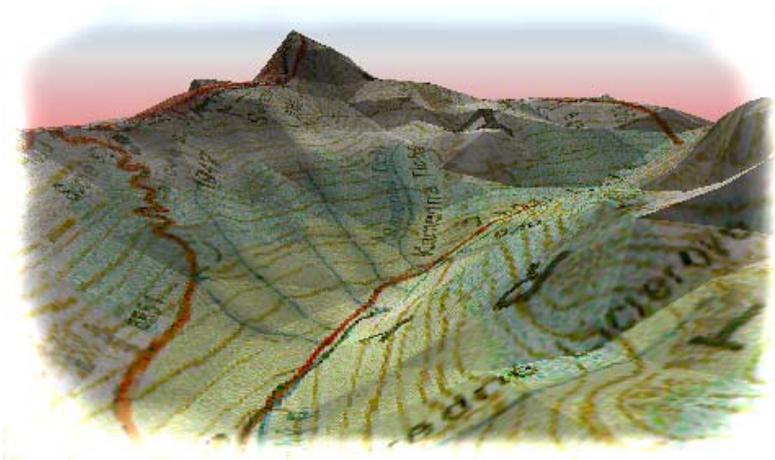
Prof. Dr. Anton Schleiss

---

# Faitou

---

Logiciel de simulation de la formation et du transfert des crues



Le programme sur CD avec Manuel d'utilisateur (Version 1.1, mars 2001)  
peut être commandé à l'adresse suivante:

EPFL-LCH  
Laboratoire de constructions hydrauliques  
CH-1015 Lausanne, Suisse  
Téléphone: +41 (0)21-693 23 85  
Téléfax: +41 (0)21-693 22 64  
<http://lchwww.epfl.ch>



# Table des matières

<b>1. ASPECTS THEORIQUES DE L'ÉCOULEMENT HYDROLOGIQUE EN FINE LAME</b>	<b>5</b>
1.1. Introduction	5
1.2. Equations hydrauliques de base	6
1.3. Equations pour les inconnues moyennes	7
1.4. Formulation adimensionnelle	8
1.5. Intégration spatiale des équations	11
1.6. Modèle d'écoulement à grande échelle	15
1.7. Limites de validité des modèles simplifiés	18
1.8. Signification physique des modèles simplifiés	20
1.9. Extension aux topographies réelles	22
<b>1.10. Solution théorique de l'approximation cinématique</b>	<b>25</b>
1.10.1. Equation de l'onde cinématique sur un plan	25
1.10.2. Solution analytique générale	27
1.10.3. Calcul de l'hydrogramme aval	32
1.10.4. Procédure de résolution et exemple	33
<b>1.11. Applicabilité des modèles simplifiés aux topographies réelles</b>	<b>36</b>
1.11.1. Introduction de discontinuités vérifiant l'équation de continuité	38
1.11.2. Première analyse par l'hypothèse de l'onde diffusive	41

1.11.3.	Seconde approche de la transition par les équations complètes d'Euler	47
1.11.4.	Conclusion	51
<b>2.</b>	<b>APPROCHE EXPERIMENTALE DU RUISSELLEMENT HYDROLOGIQUE</b>	<b>55</b>
<b>2.1.</b>	<b>Constat de la situation actuelle</b>	<b>55</b>
2.1.1.	Ecoulement laminaire	55
2.1.2.	Ecoulement turbulent	59
2.1.3.	Conclusions	66
<b>2.2.</b>	<b>Le modèle en calottes</b>	<b>67</b>
2.2.1.	Description géométrique	67
2.2.2.	Paramètres hydrauliques	69
<b>2.3.</b>	<b>Essais en écoulements stationnaires et uniformes</b>	<b>76</b>
2.3.1.	Résultats bruts	77
2.3.2.	Nouvelle formulation	81
<b>2.4.</b>	<b>Essais en écoulements non-stationnaires et non-uniformes</b>	<b>91</b>
2.4.1.	Analyse traditionnelle	94
2.4.2.	Paradoxes constatés	96
2.4.3.	Analyse à l'aide de la nouvelle loi de comportement	99
<b>3.</b>	<b>ASPECTS CONCEPTUELS ET NUMERIQUES DE LA MODELISATION DE L'ÉCOULEMENT EN FINE LAME</b>	<b>103</b>
<b>3.1.</b>	<b>Approche stochastique du traitement topographique</b>	<b>103</b>
3.1.1.	Génération stochastique de la micro-topographie	104
3.1.2.	Détermination des paramètres globaux	107
<b>3.2.</b>	<b>Discrétisation spatiale</b>	<b>112</b>

<b>3.3. Discrétisation temporelle</b>	<b>122</b>
<b>4. FAITOU : UN LOGICIEL DE SIMULATION DE LA FORMATION ET DU TRANSFERT DES CRUES</b>	<b>125</b>
4.1. Introduction	125
4.2. Description du logiciel	127
4.3. Génération du réseau de rivières	131
4.4. Génération du modèle de surface	134
<b>5. QUELQUES EXEMPLES PRATIQUES D'APPLICATION</b>	<b>137</b>
5.1. Simulation du bassin versant de Mattmark	137
5.1.1. Génération du modèle de calcul	138
5.1.2. Simulation de la crue de septembre 1993	140
5.2. Simulation du bassin versant de la Veveyse	142
5.3. Simulation du bassin versant des Toules	146
5.3.1. Simulation de la crue de septembre 1993	147
<b>6. CONCLUSIONS</b>	<b>151</b>
<b>NOTATIONS</b>	<b>155</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>157</b>



# 1. Aspects théoriques de l'écoulement hydrologique en fine lame

## 1.1. Introduction

Cette première étape est consacrée à l'établissement de la fonction de transfert des pluies jusqu'à leur déversement latéral dans le réseau drainant. Ce modèle de ruissellement doit cerner les particularités des ondes propagées sur le bassin, depuis leur initiation jusqu'à leur tarissement. Il s'agit donc d'une approche instationnaire, spatialement distribuée.

L'approche nécessairement physique, pour les avantages que lui confère la signification de ses paramètres, se base sur quelques constats fondamentaux :

- La modélisation s'intéresse à des bassins versants complets, d'une superficie potentielle de plusieurs centaines d'hectares. Sa mise en œuvre pour de telles applications doit rester raisonnable en moyens et en temps;
- Le caractère quasi-tridimensionnel d'une géométrie constitue une richesse de données à exploiter. La priorité sera par conséquent donnée à une prise en compte générale de la topographie, sans ramener le bassin à une géométrie idéalisée ou à une succession de plans d'écoulement indépendants.

Dans ce contexte, l'approche tridimensionnelle paraît complètement inappropriée.

Au départ d'une formulation générale des équations de Navier-Stokes, le modèle bidimensionnel s'obtient par une hypothèse peu restrictive sur l'importance relative des composantes de vitesse. L'impact des gouttes de pluie est négligé, encore que cet aspect soit

parfois réintroduit au niveau des termes de pertes. Aucune hypothèse ne s'impose par contre sur la forme que prend l'écoulement sur l'épaisseur de la lame fluide, pas plus que sur la forme et l'évolution temporelle des contributions évoquées sous le nom générique de pertes.

La mise sous forme adimensionnelle du système obtenu permet ensuite l'évaluation de l'importance relative des termes en présence. Cette démarche conduit aux simplifications mathématiques les moins restrictives vis-à-vis de la forme non-linéaire des équations et de la prise en compte de la géométrie.

## 1.2. Equations hydrauliques de base

Considérons un volume de fluide  $V$ , dont nous suivons le mouvement dans l'espace à trois dimensions  $ox, oy, oz$ . Les axes  $ox, oy$  définissent un plan orienté parallèlement au plan topographique moyen.  $\Gamma$  désigne la surface extérieure à  $V$  tandis que la normale extérieure à cette surface est caractérisée par ses composantes  $n_i$ .

Les angles  $\theta_i$  que font les axes du repère cartésien trirectangle avec l'axe vertical  $oz'$  passant par leur origine permettent une décomposition aisée de l'accélération de la pesanteur.

Le principe de conservation de la masse au volume  $V$  s'écrit :

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho dV = \iiint_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} \right) dV = \rho \iiint_V \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV \quad (1.1)$$

La seconde loi concerne la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho u_i dV = \iiint_V \left( \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} \right) dV = \rho \iiint_V \left( g \sin \theta_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) dV \quad (1.2)$$

en utilisant le théorème de la divergence de Green pour les forces de surface, composées des contraintes visqueuses  $\tau_{ij}$  et de la pression  $p$ . L'effet de rotation terrestre est négligé, bien que sa prise en compte dans les forces de volume ne pose aucun problème particulier.

Même si la forme différentielle est immédiate, il est important pour la suite (phénomènes discontinus) de d'insister sur la forme intégrale originelle du système.

### **1.3. Equations pour les inconnues moyennes**

En l'absence de toute hypothèse sur le type d'écoulement au travers de la veine fluide, il convient donc de considérer chaque inconnue comme une variable aléatoire de la position et du temps. Comme l'objectif du modèle n'est pas l'étude des fluctuations erratiques instantanées des variables, le système doit être moyenné sur une période  $T$  caractéristique de ces pulsations, très inférieure aux temps caractéristiques des phénomènes à étudier.

Afin d'établir les équations caractéristiques d'un mouvement moyen instationnaire, chaque inconnue  $f$  est décomposée en une partie moyenne  $f^T$  et une fluctuation aléatoire  $f''$ .

$$f = f^T + f'' \quad \text{avec } (f'')^T = 0 \quad (1.3)$$

Cette moyenne sur la continuité, en respectant les conditions de Reynolds, n'apporte aucune modification de la formulation contrairement aux équations dynamiques, dont les termes non-linéaires donnent naissance à des contributions supplémentaires : En travaillant sur une combinaison des équations plus propice à l'établissement d'une formulation conservative, il vient :

$$\frac{\partial u_i^T}{\partial t} + \frac{\partial u_i^T u_j^T}{\partial x_j} = g \sin \theta_i - \frac{\partial p^T}{\partial x_i} + \frac{\partial (\tau_{ij} + u''_i{}^T u''_j{}^T)}{\partial x_j} \quad (1.4)$$

La similarité mathématique est totale, à condition d'ajouter aux contraintes visqueuses des contraintes de turbulence qui portent le nom de tensions de Reynolds. La décomposition moyenne - fluctuation "simplifie" un système où n'intervient désormais que l'effet global des fluctuations au travers d'un tenseur symétrique inconnu à six inconnues. Ce dernier réclame d'autres relations sans nouvelle inconnue pour fermer le système. Ce tenseur symbolise ce que créent les fluctuations en cisillant l'écoulement moyen.

Pour la suite des développements, les contraintes visqueuses et turbulentes seront réunies sous une notation unique tandis que les "T" de moyenne seront ignorés, pour alléger l'écriture.

## 1.4. Formulation adimensionnelle

La première étape vers une indispensable simplification du modèle passe par une mise sous forme adimensionnelle des équations. Elle permet, par l'énoncé d'une condition peu restrictive, une simplification radicale du système indispensable au passage en deux dimensions.

Considérons une épaisseur caractéristique  $h_0$  de lame d'écoulement selon  $oz$  ainsi que des vitesses caractéristiques  $u_{i,0}$  selon chaque axe.  $W_0$  se définit comme une vitesse caractéristique selon la droite de plus grande pente, obtenue par combinaison linéaire des vitesses caractéristiques selon  $ox$  et  $oy$ .

Avec ces valeurs, construisons deux longueurs caractéristiques suivant les axes  $ox$  et  $oy$  en s'aidant du rapport des vitesses caractéristiques :

$$\lambda_i = h_0 \frac{u_i}{u_3} \quad (1.5)$$

Les rapports  $\varepsilon_i$  comparent les vitesses  $u_{i,0}$  à la vitesse caractéristique  $q_0$  :

$$\varepsilon_i = \frac{u_i}{w_0} \quad (1.6)$$

Le temps caractéristique se déduit des grandeurs définies selon chaque axe d'écoulement

$$t_0 = \frac{\lambda_i}{u_i} \quad (1.7)$$

Les coordonnées adimensionnelles s'obtiennent par comparaison avec les longueurs caractéristiques  $\lambda_i$  correspondantes

$$x_i^* = \frac{x_i}{\lambda_i} \quad (1.8)$$

tandis que les vitesses adimensionnelles et les contraintes adimensionnelles s'écrivent logiquement :

$$u_i^* = \frac{dx_i^*}{dt^*} = \frac{1}{u_{i0}} \frac{dx_i}{dt} = \frac{u_i}{u_{i0}} \quad (1.9)$$

et

$$\sigma_{ii}^* = \frac{\sigma_{ii}}{\rho u_{i0} u_{j0}} \quad (1.10)$$

Le choix de la pression et de la gravité adimensionnelle s'opère en raisonnant selon l'axe principal d'écoulement le long duquel se développent essentiellement des gradients de pression :

$$p^* = \frac{p}{\rho u_{30}^2} \quad (1.11)$$

et

$$g^* = \frac{g}{\rho u_{30}^2} \quad (1.12)$$

L'introduction de ces relations dans le système d'équation rend la forme adimensionnelle suivante :

$$\frac{\partial u_j^*}{\partial x_j^*} = 0 \quad (1.13)$$

$$\varepsilon_i \varepsilon_3 \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial t} + \frac{\partial u_i^* u_j^*}{\partial x_j^*} \right) = g^* \sin \theta_i - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_i} \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \varepsilon_i \varepsilon_3 \frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_j^*} \quad (1.14)$$

Venons-en aux hypothèses qui portent, comme le laisse entrevoir la forme particulière des équations dynamiques, sur le terme  $\varepsilon_3$ .

Si ce rapport entre la vitesse perpendiculaire à la lame et la combinaison des vitesses  $u_i$  selon la plus grande pente est petit vis-à-vis de l'unité, alors son carré est négligeable, ce qui simplifie l'équation dynamique selon oz. Cette dernière exprime alors une distribution hydrostatique de la pression selon cet axe.

$$\frac{\partial p^*}{\partial x_3^*} = -g^* \sin \theta_3 \quad (1.15)$$

Cette expression rappelle que l'hydrostaticité de la pression selon un axe vertical n'est une distribution raisonnable que dans le cas particulier d'une topographie à faible pente sur laquelle l'écoulement devient quasi-horizontale et qu'elle s'exprime beaucoup plus généralement selon une perpendiculaire au plan moyen d'écoulement.

L'hydrostaticité résulte ainsi d'équations simplifiées grâce à une hypothèse sur les vitesses qui paraît d'autant plus acceptable qu'elle se base sur le carré d'un rapport. Notons encore qu'un choix de trois longueurs caractéristiques selon les axes et d'une vitesse caractéristique selon la plus grande pente donnerait des

simplifications identiques en raisonnant cette fois directement sur le carré d'un rapport très disproportionné d'échelle d'écoulement (Piroton, 1994).

## 1.5. Intégration spatiale des équations

La réduction des dimensions s'obtient en effectuant une intégration sur la hauteur d'eau. La figure 1.2 définit l'espace physique à considérer, illustre ses frontières et présente ses échanges avec le monde extérieur.  $h_f$  désigne la distance, selon l'axe  $oz$ , du plan  $(ox, oy)$  au sol et  $h_s$  est la distance, selon le même axe, du plan  $(ox, oy)$  à la surface libre.

La distance selon  $oz$  entre les deux plans limites d'écoulement s'écrit:

$$h = h_f + h_s \quad (1.16)$$

Le système est alimenté par des précipitations  $i$  tandis que l'eau s'infiltre dans le sol à une vitesse  $r$ . Ces deux vitesses sont mesurées traditionnellement selon un axe vertical.

Intégrons les équations sur la profondeur locale  $h$  en utilisant la formule de Leibnitz qui s'écrit pour une fonction  $f$  :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h_f}^{h_s} f dz = \int_{-h_f}^{h_s} \frac{\partial f}{\partial x_i} dz + f|_{z=h_s} \frac{\partial h_s}{\partial x_i} - f|_{z=-h_f} \frac{\partial(-h_f)}{\partial x_i} \quad (1.17)$$

L'équation de continuité intégrée s'écrit, pour  $i = 1, 2$  :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h_f}^{h_s} u_i dz + \left( u_3 - u_i \frac{\partial z}{\partial x_i} \right) \Big|_{z=-h_f}^{z=h_s} = 0 \quad (1.18)$$

L'intégration des équations dynamiques selon  $ox$  et  $oy$  tient compte de la distribution hydrostatique de pression obtenue par l'équation selon  $oz$  :

$$p = \rho g(h_s - z) \sin \theta_3 \quad (1.19)$$

ce qui donne finalement

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h_f}^{h_s} u_i dz + \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h_f}^{h_s} u_i u_j dz &= gh \sin \theta_i - gh \frac{\partial h_s}{\partial x_i} \sin \theta_3 + \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h_f}^{h_s} \sigma_{ij} dz + \left( u_i (u_3 - u_j \frac{\partial z}{\partial x_j}) \right) \Big|_{z=-h_f}^{z=h_s} &+ \quad (1.20) \\ \frac{1}{\rho} \left( \sigma_{i3} - \sigma_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_j} \right) \Big|_{z=-h_f}^{z=h_s} & \end{aligned}$$

Les conditions à imposer sur les frontières extérieures (fond et surface libre) sont de deux types :

- Les conditions cinématiques précisent le comportement du fluide aux frontières, son mouvement relatif par rapport à elles. En écrivant l'équation d'une frontière quelconque, variable en toute généralité avec le temps

$$z = h(x_1, x_2, t) \quad (1.21)$$

- La condition cinématique exprime que la vitesse différentielle selon oz entre une particule qui suivrait le fond et celle du liquide au même endroit est égale à la composante de la vitesse d'infiltration ou de précipitation.
- En introduisant les composantes de la trajectoire  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  caractérisant la particule et compte tenu de la définition des composantes de la vitesse, il vient :

$$u_3 - u_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = w_{\text{Frontière}} \sin \theta_3 \quad (1.22)$$

à exploiter en  $z = h_f$  avec  $w_{Frontière} = r$  et en  $z = -h_s$  avec  $w_{Frontière} = i$ .

- Les conditions dynamiques établissent les équilibres de forces sur un volume élémentaire à ces mêmes frontières. La valeur des contraintes aux frontières est en effet liée aux forces qu'exerce le monde extérieur sur le système.

Figure 1.2 : Equilibre d'un volume élémentaire de la surface libre

Si on néglige les termes d'ordre supérieur, les contraintes sur les facettes s'équilibrent comme suit :

$$\sigma_{i3} - \sigma_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_j} = t_i \quad (1.23)$$

à exploiter en  $z = -h_f$  en tenant compte des composantes du frottement sur le sol,  $t_{i1}$ , ainsi qu'en  $z = h_s$  où le forcing du vent sera négligé en première approximation. Rappelons encore que  $t_i$  incluent l'effet d'éventuelles perturbations turbulentes.

Ces conditions introduisent dans les équations bidimensionnelles les apports, suivant l'axe intégré, du monde extérieur au système. La définition des vitesses moyennes sur la profondeur ainsi que des intégrales qui peuvent être liées à ces grandeurs moyennes:

$$\bar{u}_j = \frac{1}{h} \int_{-h_f}^{h_s} u_j dz \quad (1.24)$$

$$\rho_{ij} \bar{u}_i \bar{u}_j = \frac{1}{h} \int_{-h_f}^{h_s} u_i u_j dz \quad (1.25)$$

$$S_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h_f}^{h_s} \sigma_{ij} dz \quad (1.26)$$

donnent une forme définitive à l'équation de continuité intégrée :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j h}{\partial x_j} = (i - r) \sin \theta_3 \quad (1.27)$$

Le deux équations dynamiques contiennent encore certaines évaluations des composantes de vitesses aux extrémités ainsi que les termes  $\rho_{ij}$  et  $S_{ij}$  qui gênent l'établissement d'une formulation purement bidimensionnelle puisqu'ils dépendent de la forme des diagrammes des vitesses et de l'état du fluide (turbulence) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{u}_j h)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{ij} \bar{u}_i \bar{u}_j h)}{\partial x_i} &= gh(\sin \theta_i - \sin \theta_3) \frac{\partial h_s}{\partial x_i} + \\ \frac{1}{\rho} (S_{1i} + S_{2i}) + \sin \theta_3 (u_i |_{z=h_s} r - u_i |_{z=-h_f} i) + t_i \end{aligned} \quad (1.28)$$

Il est possible de supposer (Chen et al, Taylor et al) négligeables les vitesses verticales sur l'épaisseur de la lame à l'exception de la surface libre qui subit l'impact des gouttes de pluie. A la pression hydrostatique se superpose alors une pression dynamique d'amplitude et de distribution inconnues.

Plus généralement, l'apport en quantité de mouvement des termes d'échange aux frontières est considéré comme négligeable (Kawahara et al). Or cette hypothèse semble entrer en contradiction avec une répartition uniforme de la vitesse jusqu'à la surface. En effet, elle revient à attribuer cette même composante à la pluie considérée ici comme faisant partie d'un même milieu continu. Cette ambiguïté ne peut être levée qu'en supposant l'existence d'une fine tranche de fluide à la surface qui assure la transition rapide de vitesse.

Quand à la distribution des vitesses moyennes sur la hauteur, celle-ci reste difficilement évaluable a priori compte tenu d'une part de l'instationnarité des phénomènes ainsi que des faibles épaisseurs de lame. Bien que cet aspect puisse être reconsidéré au niveau du chapitre sur les essais expérimentaux, la littérature, par la forme usuelle adoptée, considère habituellement un diagramme uniforme, faute d'hypothèses plus fiable dans toute la gamme laminaire et turbulente des phases de crue et de décrue.

En conclusion, même si la résolution du système reste complexe, l'entreprise est numériquement envisageable. Reste à savoir si elle est raisonnable dans le contexte fixé. Se justifie-t-elle seulement dans le cadre des possibilités informatiques actuelles ?

## 1.6. Modèle d'écoulement à grande échelle

Pour apporter certains éléments de réponse sur la validité des simplifications mathématiques possibles, dans le cadre d'un écoulement hydrologique en fine lame à grande échelle, une évaluation des termes en présence s'impose, proposée ici dans un cadre unidimensionnel, plus propice à l'analyse. Compte tenu des dernières hypothèses, la forme non conservative des équations, en omettant les signes de valeur moyenne :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} = (i - r) \sin \theta \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} \cos \theta = g \sin \theta + \frac{t}{h} - (r - i) \cos \theta \quad (1.30)$$

Il est possible (Woolhiser 1975) d'écrire ces relations sous une forme adimensionnelle qui facilite leur discussion et la classification des diverses approximations possibles.

Considérons l'écoulement en fine lame sur une longueur caractéristique  $l_0$  le long de laquelle les principales caractéristiques topographiques et morphologiques ne subissent pas de modifications fondamentales. A l'issue de ce parcours, l'écoulement atteint sa hauteur  $h_0$  normale à un exutoire où le débit, par continuité s'écrit :

$$Q_0 = h_0 u_0 = (i - r) \cdot l_0 \cos \theta \quad (1.31)$$

Les grandeurs  $u_0$ ,  $h_0$  sont liées par la définition de la vitesse uniforme qui prend une forme caractéristique du type d'écoulement. En écrivant la loi de frottement sous une forme généralisée qui sera discutée au chapitre suivant :

$$J_f = \frac{t}{gh} = a \frac{u^b}{h^d} \quad (1.32)$$

ce qui s'écrit encore :

$$u = \left( \frac{J_f}{a} \right)^{\frac{1}{b}} h^{\frac{1}{d}} = \alpha \cdot h^{(m-1)} \quad (1.33)$$

En introduisant les formes adimensionnelles des coordonnées et des variables

$$x^* = \frac{x}{l_0}, \quad t^* = \frac{u_0 \cdot t}{l_0}, \quad h^* = \frac{h}{h_0}, \quad u^* = \frac{u}{u_0}$$

les équations deviennent :

$$\frac{\partial h^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(u^* h^*)}{\partial x^*} = 1 \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{gh_0 \cos \theta}{u_0^2} \frac{\partial h^*}{\partial x^*} = \frac{gl_0 \sin \theta}{u_0^2} \left( 1 - \frac{u^{*b}}{h^{*d}} \right) - \frac{u^*}{h^*} \quad (1.35)$$

L'équation dynamique met en évidence l'existence de deux paramètres : le nombre de Froude  $F_0$  ainsi que le nombre d'onde cinématique  $K_0$ , cité la première fois par Woolhizer et Liggett en 1967 :

$$F_0 = \frac{u_0^2}{gh_0 \cos \theta} \quad (1.36)$$

$$K_0 = \frac{gl_0 \sin \theta}{u_0^2} = \frac{gl_0 \sin \theta}{u_0^2} \quad (1.37)$$

Leurs valeurs relatives donnent lieu à trois approximations possibles de l'équation dynamique :

- Lorsque  $K_0$  prend une valeur importante, il existe une relation univoque entre la profondeur et la vitesse. La profondeur est alors la hauteur normale pour le débit correspondant. Elle correspond à l'approximation de l'onde cinématique et s'écrit :

$$u^{*b} = h^{*d} \quad (1.38)$$

- Par contre, si la valeur de  $K_0$  est négligeable, l'équation dynamique se réduit à l'approximation de l'onde de gravité :

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{1}{F_0^2} \frac{\partial h^*}{\partial x^*} + \frac{u^*}{h^*} = 0 \quad (1.39)$$

- Enfin, l'équation de l'onde de diffusion découle d'un nombre de Froude négligeable, avec un produit  $F_0^2 K_0$  significatif. C'est l'approximation de l'onde diffusive :

$$\frac{\partial h^*}{\partial x^*} = F_0^2 K_0 \left( 1 - \frac{u^{*b}}{h^{*d}} \right) \quad (1.40)$$

## 1.7. Limites de validité des modèles simplifiés

Les conditions d'applicabilité de chaque l'approximation ont fait l'objet de plusieurs communications dans la littérature. Sur base d'essais numériques, Woolhiser et Liggett (1967) proposent comme critère de validité de l'hypothèse cinématique que le nombre cinématique  $K$  soit plus grand que 20. Ils relèvent cependant que pour  $K = 10$ , la plus grande erreur commise ne dépasse pas 10% pour rapidement s'amenuiser lorsque le  $K$  croît.

Par comparaison entre la solution analytique et la simulation numérique d'une perturbation sinusoïdale, Ponce et al. (1978) montrent par ailleurs qu'après une longueur d'onde, l'approximation de l'onde cinématique fournit une solution à 5% près si la période d'onde adimensionnelle  $T_w$  remplit le critère suivant :

$$T_w = \frac{T \cdot S_0 \cdot V_0}{h_0} > 171 \quad (1.41)$$

où  $T$  est la période de l'onde, c'est-à-dire le double du temps de montée de la crue.

Reprenant l'étude originelle, Morris et al (1980) constatent qu'il est également indispensable, pour des petits nombres de Froude, que

$$k \cdot F_0^2 \geq 5 \quad (1.42)$$

Al-Mashidani et al entreprennent une étude similaire par éléments finis et concluent que la borne inférieure de  $K$  pour passer à l'onde cinématique est à revoir d'autant plus à la hausse que le nombre de Froude est petit.

Ils mettent également en exergue l'influence de la condition limite à l'aval, dont l'effet s'estompe d'autant plus que  $K$  grandit : plus la pente et le frottement dominant l'écoulement, plus la condition aval est rapidement évanescence (Napiorkowski et al).

Il s'agit d'ailleurs d'une conclusion heureuse tant est aigu le problème de correspondance physique avec la réalité dans la modélisation de la transition de l'écoulement hydrologique en fine lame à l'écoulement en ruisseau.

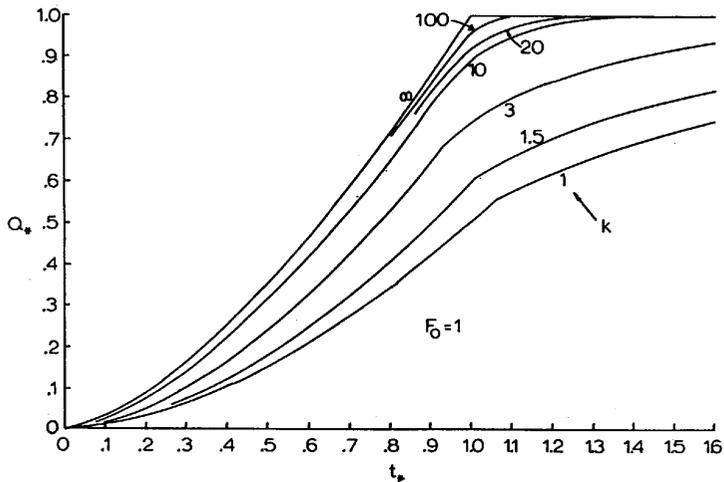


Figure 1.3: Montées en crue d'hydrogrammes adimensionnels pour différentes valeurs du paramètre  $K$  avec  $F_0$  constant. La pluie est d'intensité constante pour  $0 < t < \infty$ , d'après Woolhiser (1975).

L'effet des conditions limites doit être précisé tout comme le comportement de l'onde dissipative pour laquelle aucun résultat concret n'a encore été commenté.

Morris et al répondent à ces questions en balayant avec leurs simulations tout le champ des paramètres pour les trois

approximations possibles soumises à deux types de conditions limites aval.

La figure 1.3 confirme la synthèse de Vieira qui estime, tous effets confondus, nécessaire une valeur de  $K = 50$  au moins pour une correspondance satisfaisante entre équations complètes et approximation de l'onde cinématique.

Par une étude statistique systématique, il établit les zones de validité de chaque approximation dans le plan  $F, K$ .

L'écoulement sur des pentes naturelles situe généralement les couples de valeurs  $(F, K)$  dans des zones où l'approximation cinématique est licite. Ce n'est que sur les faibles pentes courtes et à débit latéral important que la prudence s'impose et que le choix entre l'approche cinématique ou diffusive reste ouvert.

Quoi qu'il en soit, le recours à une des deux approximations s'impose en lieu et place des équations dynamiques complètes. La résolution s'en trouve toujours grandement facilitée, tant analytiquement que numériquement.

## **1.8. Signification physique des modèles simplifiés**

En amputant l'équation dynamique générale d'une partie de ses termes, la vitesse s'exprime, tant en hypothèse cinématique que diffusive, comme une relation explicite de la hauteur d'eau. Cette fonction où interviennent certaines propriétés du système marque un appauvrissement par rapport au comportement classique en hystérésis caractéristique des systèmes complets.

Le point le plus sensible entre les deux approches concerne le choix de la pente de calcul (pente de fond en thèse cinématique, pente de surface en approche diffusive). D'un point de vue théorique, cette différence annonce de substantielles différences de comportement

sur les topographies envisageables : nous les situerons par rapport au comportement de la thèse cinématique.

- D'une part l'absence de pente exclut tout écoulement.
- A l'autre extrême, aucune formation de zones de stockage à surface libre horizontale ne peut être correctement modélisée. La bathymétrie quelconque de ces cuvettes induit inévitablement des vitesses inexistantes par des méthodes plus complètes comme l'hypothèse diffusive.
- Enfin, tout écoulement à contrepente est exclu.

Ces limitations paraissent extrêmement contraignantes puisqu'à côté d'un certain nombre de phénomènes que la théorie cinématique ne peut reconnaître, elle en introduit d'autres qui ne s'identifient à aucun équivalent physique.

La thèse diffusive permet d'éliminer ces difficultés, pour autant que le gradient de hauteur soit numériquement significatif dans les modélisations.

Il faut à nouveau examiner ces limitations plus raisonnablement à la lumière des écoulements hydrologiques forcément particuliers. Peu d'hydrologistes songent réellement à contester l'idée d'un ruissellement globalement orienté selon les droites de plus grande pente alors que cette hypothèse relève des mêmes limitations. La formation de lacs se produit difficilement à l'échelle macroscopique envisagée, à moins de prendre en compte des précipitations si prolongées et intenses qu'elles appartiennent à des phénomènes naturels aussi rares qu'exceptionnels.

La prise en compte de la surface libre ne semble donc se justifier que dans le contexte d'une modélisation de tous les accidents très locaux de la topographie, à moins qu'elle ne s'impose dans les cas précis où l'absence de pente topographique induit des accumulations locales qui créent des gradients de hauteur

prépondérants. Il s'agit d'une remarque fondamentale à examiner à la lumière des modèles numériques de terrain.

Dans tous les cas, une attention toute particulière doit ainsi être accordée à la définition du bassin versant, en parfaite connaissance de ces comportements marquants.

## **1.9. Extension aux topographies réelles**

Si les atouts d'une formulation mathématique simplifiée ne font aucun doute, il va de soi que les simplifications introduisent des limites parfois sévères. En légitimant majoritairement l'application de la thèse cinématique à l'hydrologie, la littérature illustre surtout le succès grandissant dont bénéficient les modèles conceptuels distribués.

Un point commun unit la plupart d'entre eux : la modélisation du ruissellement s'appuie sur un raisonnement unidimensionnel qui implique des phases préalables d'idéalisation du terrain pour le convertir en bandes d'écoulement unidimensionnelles indépendantes.

C'est précisément la discrétisation de ces dernières qui permet le plus aisément de sérier les méthodes, indépendamment de toute classification d'ordre numérique :

- Le premier groupe respecte strictement le contexte initial de validation de l'approche cinématique en hydrologie. Chaque bande de terrain se réduit à un seul plan incliné dont l'extrémité amont coïncide avec la crête de partage et l'extrémité aval avec un segment du cours d'eau ou d'un ru qui s'y jette. Pour parvenir à une telle décomposition, il suffit de raisonner sur la structure éventuellement ramifiée des rivières qui alimentent l'exutoire à étudier. En progressant alors par degré croissant dans la classification de Strahler du réseau drainant, le bassin versant principal se scinde en bassins propres à chaque branche qui

subissent à leur tour une décomposition en bandes de ruissellement. Les lignes de plus grande pente, qui interceptent les extrémités de chaque segment de rivière concerné, bornent une surface topographique qui s'étale depuis la ligne de faîte. Cette dernière fait l'objet d'une étude indépendante des éléments voisins dès l'instant où le ruissellement n'est supposé évoluer que perpendiculairement aux lignes de niveau (Jayawadena et al).

- Tout en jouissant déjà de la plupart des avantages fondamentaux d'une d'approche physique, une évolution s'impose vers des discrétisations unidimensionnelles plus fines, au gré de l'évolution des possibilités informatiques. Quoi qu'il en soit, l'extrême simplification en long des irrégularités topographiques de chaque bande de terrain doit avoir des incidences sur l'hydrogramme qui se déverse dans tout segment de rivière (Lane et al) : les versants très irrégulièrement conformés sortent donc du cadre d'application de ces méthodes. Dans le même ordre d'idées se pose le problème crucial du critère qui fixe la pente équivalente.
- La seconde étape consiste à progresser dans la discrétisation en long des bandes de terrain. S'il s'agit d'une évolution inéluctable, elle n'en demeure pas moins théoriquement parlant beaucoup plus audacieuse puisqu'elle étend le champ d'application des approximations à des topographies en long plus générales. La plupart des auteurs qui procèdent à cette extension en unidimensionnel la justifie sur la seule base du critère initial de Woolhizer et al qui porte sur  $K$ . Croley et al soutiennent quant à eux qu'il est peu rigoureux de l'appliquer in extenso à un "modèle en cascades".

Dans la perspective d'une totale liberté dans la représentation topographique, cette question cruciale trouve sa réponse dans le réalisme et le bon sens indispensables pour une telle simulation.

Quittons un instant le contexte théorique pour nous en tenir simplement à des ordres de grandeur : Dans l'optique clairement avouée de considérer l'évolution temporelle de l'hydrologie de surface d'un bassin qui peut couvrir des centaines voire des milliers d'hectares, il est illusoire d'espérer discrétiser une telle surface avec des mailles dont la dimension moyenne descendrait nettement sous la cinquantaine de mètres.

Compte tenu des phénomènes d'interception, d'infiltration et d'évaporation, l'épaisseur de la lame ruisselante se maintient dans des ordres de grandeur de  $10^{-2}$  m tandis qu'elle s'écoule sur les pentes naturelles à des vitesses de l'ordre de  $10^{-2}$  m/s. Ces quelques valeurs fixent les ordres de grandeur des gradients de vitesse et de hauteur susceptibles d'être développés dans une simulation numérique. Dans des discrétisations usuelles, ils ne sauront excéder  $10^{-4}$  m/m pour la hauteur et  $10^{-4} \text{ s}^{-1}$  pour la vitesse. L'introduction de ces valeurs dans chaque terme de l'équation dynamique complète permet de comparer leurs influences relatives.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} \cos \theta = g \sin \theta + \frac{t}{h} - (r - i) \cos \theta$$

$O^{(10^{-6})}$      $O^{(10^{-6})}$      $O^{(10^{-3})}$      $O^{(1)}$      $O^{(1)}$      $O^{(10^{-6})}$

L'évaluation est éloquent. Elle révèle la totale inutilité de prendre en compte les équations complètes pour des topographies globales. Seules des mailles de taille comparable à la hauteur de la lame d'eau rendraient à chaque terme la faculté d'être numériquement significatif. C'est un autre domaine, celui que Tayfur et al intitulent "écoulement sur de la microtopographie". Il se heurte à d'innombrables difficultés, tant "philosophiques" que numériques.

Les ordres de grandeur obtenus mettent en exergue le caractère homogène des simplifications possibles. Ils confirment également que la contribution du gradient de hauteur à la pente de surface demeure d'un ordre de grandeur supérieur aux termes négligeables

et que son élimination éventuelle doit faire l'objet d'un examen plus détaillé.

Cette parenthèse donne l'occasion de résumer la démarche qui prédomine dans cette étude. Les processus naturels à considérer numériquement concernent des étendues telles qu'il faut renoncer à étudier la progression de chaque filet fluide pour composer plus sagement avec une échelle de maillage très supérieure à l'épaisseur de la lame ruisselante. Ces contingences numériques préconisent une intégration topographique qui concorde avec une autre intégration, plus "philosophique", des processus naturels. En effet, les réalités de ces phénomènes sont si complexes en hydrologie et les propriétés intrinsèques si anisotropes que la seule voie raisonnable consiste à les intégrer et à les moyenner à une échelle macroscopique très supérieure à celle des accidents locaux de la topographie ou de l'écoulement. Les théories cinématique ou diffusives respectent cette démarche conceptuelle en conciliant au mieux réalité physique et impératifs numériques.

## **1.10. Solution théorique de l'approximation cinématique**

Dans un souci de simplicité, il semble judicieux de traiter dans un premier temps l'approximation de l'onde cinématique. Il est en effet possible d'obtenir la solution analytique de cette équation simplifiée et par là, d'étudier ses particularités comportementales.

### *1.10.1. Equation de l'onde cinématique sur un plan*

Pour un écoulement plan unidimensionnel, l'équation de l'onde cinématique s'écrit :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = i \quad (1.43)$$

et:

$$S_0 = S_f \quad (1.44)$$

où  $h$  = hauteur d'eau;  $t$  = temps;  $u$  = vitesse moyenne;  $x$  = coordonnée cartésienne longitudinale;  $i$  = intensité de la pluie;  $S_0$  = pente de fond et  $S_f$  = pente énergétique.

Comme déjà présenté plus haut, la relation entre la vitesse moyenne de l'écoulement  $u$  et la hauteur d'eau  $h$  peut s'exprimer sous la forme générale :

$$u = \alpha h^{m-1} \quad (1.45)$$

où  $\alpha$  et  $m$  sont deux coefficients qui dépendent du régime d'écoulement ainsi que de l'expression de perte de charge considérés.

Pour un écoulement laminaire sur un plan, la solution analytique montre que :

$$\alpha = \frac{g S_0}{3\nu}; \quad m = 3 \quad (1.46)$$

En ce qui concerne l'écoulement turbulent, un grand nombre de formules empiriques ont été établies. Les plus fréquemment utilisées sont celle de Chezy pour laquelle :

$$\alpha = C S_0^{1/2}; \quad m = \frac{3}{2} \quad (1.47)$$

avec  $C$  = coefficient de Chezy, et celle de Manning-Strickler où :

$$\alpha = K S_0^{1/2}; \quad m = \frac{5}{3} \quad (1.48)$$

avec  $K$  = coefficient de Strickler.

A l'aide de l'équation (1.45), (1.43) et (1.44) deviennent :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \alpha \frac{\partial h^m}{\partial x} = i \quad (1.49)$$

Pour une intégration plus aisée, transformons le système en éliminant les dérivées partielles au profit de dérivées totales. La méthode des caractéristiques permet d'obtenir le système d'équations différentielles suivant :

$$\frac{dh}{dt} = i \quad (1.50)$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha m h^{m-1} = m u \quad (1.51)$$

L'équation (1.51) est dénommée « équation caractéristique » et définit une courbe dans le plan espace – temps. Elle explicite le transport de l'information sur les épaisseurs de lame et laisse dès lors apparaître une célérité exprimée comme un multiple de la vitesse. L'équation (1.50) n'est définie que sur cette courbe caractéristique et décrit l'évolution temporelle de la hauteur d'eau.

### *1.10.2. Solution analytique générale*

Habituellement, la pluie est définie par une succession de blocs d'intensité constantes sur une certaine durée. Cette hypothèse concernant le hyétographe est retenue ici et constitue la base de la résolution analytique.

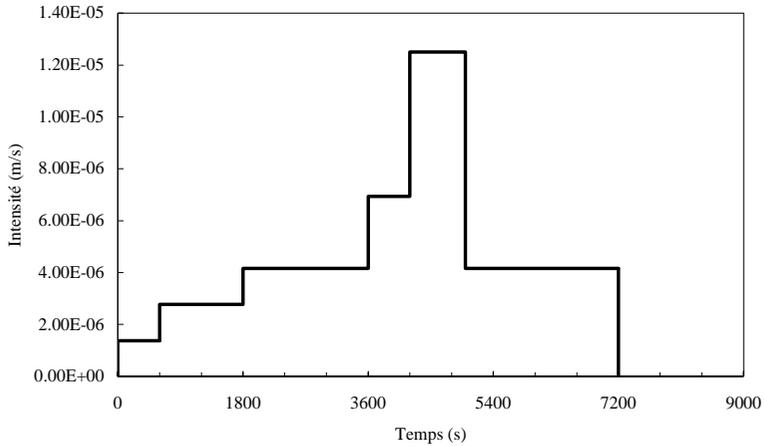


Fig. 1.4 Définition de la pluie par une succession d'intensités de pluie constantes sur des durées quelconques.

Avec cette représentation de la pluie, le temps est découpé en  $n$  intervalles de durées constante ou non. En désignant par  $t_i$  l'instant du début du bloc de pluie d'intensité  $i_i$ , un hyétographe est entièrement défini par un certain nombre de couple  $(t_i ; i_i)$ .

Pour le  $i^{\text{ème}}$  bloc de pluie, c'est-à-dire pour  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ , l'intensité de la pluie  $i_i$  est constante et l'intégration de l'équation (1.50) fournit :

$$h = i_i t + A_i \quad (1.52)$$

avec  $A_i$  une série de constantes à déterminer. Ainsi, la variation de la hauteur d'eau sur une courbe caractéristique est linéaire. En substituant l'équation (1.52) dans l'équation (1.51), l'expression de la courbe caractéristique devient :

$$x = \alpha m \int (i_i t + A_i)^{m-1} dt \quad (1.53)$$

qui possède la solution suivante :

$$x = \alpha \frac{(i_j t + A_j)^m}{i_j} + B_j \quad \text{pour } i_j \neq 0 \quad (1.54)$$

$$x = \alpha m A_j^{m-1} t + B_j \quad \text{pour } i_j = 0$$

$B_j$  est une deuxième série de constantes à déterminer.

A partir de l'hypothèse admise concernant la définition de la pluie, les équations (1.52) et (1.54) décrivent analytiquement l'évolution de la hauteur d'eau et la trajectoire de la courbe caractéristique dans le plan  $x-t$  pour chaque pas de temps  $t_i - t_{i+1}$ . Pour l'ensemble de la durée de la pluie, ces relations sont données par  $n$  segments, où pour rappel,  $n$  est le nombre de blocs de pluie donnés pour définir le hyétogramme.

Evidemment, reste encore à déterminer les valeurs des constantes d'intégration  $A_i$  et  $B_i$ . A cet effet, la continuité de la courbe caractéristique et de la hauteur d'eau fournissent les conditions nécessaires à la résolution du problème.

Pour la détermination des  $A_i$ , la continuité de la hauteur d'eau entre le bloc  $i$  et le bloc  $i+1$ , c'est-à-dire pour le temps  $t_i$ , peut s'écrire à l'aide de l'équation (10) par :

$$h_i = i_{i-1} t_i + A_{i-1} = i_i t_i + A_i \quad (1.55)$$

A partir de l'équation (1.55), il est aisé d'établir l'expression sous forme récursive des constantes  $A_i$  :

$$A_i = A_{i-1} + t_i (i_{i-1} - i_i) \quad (1.56)$$

L'expression de la première constante  $A_1$  varie selon l'origine de la caractéristique calculée. La figure 1.5 présente les 2 régions du plan  $x-t$ , une influencée par la condition initiale et l'autre influencée par la condition limite amont.

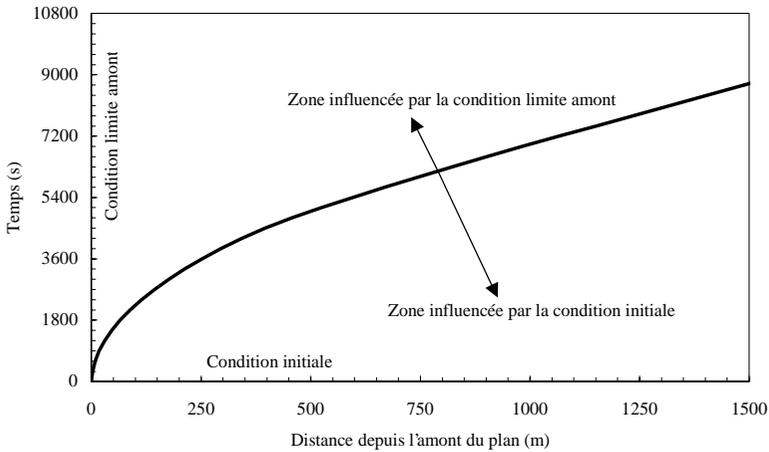


Fig. 1.5 Plan espace – temps et localisation des zones influencées par la condition initiale et la condition limite amont.

Généralement, la condition initiale est donnée sous la forme d'une relation entre la position  $x_0$  sur le plan et la hauteur d'eau  $h_0$  à cet endroit au début du calcul. La condition limite amont, quant à elle, peut être donnée par un hydrogramme résultant d'un précédent calcul et devant être routé sur le plan. En ce qui concerne les calculs, il suffit de connaître la hauteur d'eau amont  $h_a$  qui peut être obtenue à partir du débit unitaire  $q$  par la relation :

$$h_a = \left( \frac{q}{\alpha} \right)^{1/m} \quad (1.57)$$

Pour une courbe caractéristique provenant de la condition initiale, la hauteur d'eau  $h = h_0$  au temps  $t = t_1$ . A l'aide de l'équation (1.52), la première constante d'intégration  $A_1$  s'écrit donc :

$$A_1 = h_0 - i_1 t_1 \quad (1.58)$$

Dans le cas d'une caractéristique provenant de la condition limite amont, la détermination de la première constante  $A_1$  suit une

démarche similaire. Définissons  $t_d$  comme le temps auquel débute la caractéristique à l'amont du plan. A l'aide de la définition de la pluie, il est aisé de trouver le  $j^{ème}$  bloc de pluie qui contient l'instant  $t_d$ , à savoir  $t_j \leq t_d \leq t_{j+1}$ . En rappelant que pour  $t = t_d$ ,  $h = h_a$ , l'équation (1.52) permet d'écrire la première constante  $A_j$  définie pour cette caractéristique :

$$A_j = h_a - i_j t_d \quad (1.59)$$

La détermination des constantes  $B_i$  dans l'équation (1.54) se déroule de manière très semblables à ce qui précède. Pour des raisons de simplicité d'écriture, posons :

$$\begin{aligned} X_{1,i} &= \frac{(i_{i-1} t_i + A_{i-1})^m}{i_{i-1}} & i_{i-1} &\neq 0 \\ X_{1,i} &= m A_{i-1}^{m-1} t_i & i_{i-1} &= 0 \\ X_{2,i} &= \frac{(i_i t_i + A_i)^m}{i_i} & i_i &\neq 0 \\ X_{2,i} &= m A_i^{m-1} t_i & i_i &= 0 \end{aligned} \quad (1.60)$$

Pour  $t = t_i$ , la continuité de la courbe caractéristique (équation 1.54) requiert que :

$$x_i = \alpha X_{1,i} + B_{i-1} = \alpha X_{2,i} + B_i \quad (1.61)$$

Ainsi, et à nouveau sous forme récursive, les constantes d'intégrations  $B_i$  s'obtiennent par :

$$B_i = B_{i-1} + \alpha(X_{1,i} - X_{2,i}) \quad (1.62)$$

L'expression de la première constante  $B$  dépend également du type de courbe caractéristique calculée. Pour celles émergeant de la condition initiale,  $B_1$  s'obtient par :

$$B_1 = x_0 - \alpha \frac{(i_1 t_1 + A_1)^m}{i_1} \quad i_1 \neq 0 \quad (1.63)$$

$$B_1 = x_0 - \alpha m A_1^{m-1} t_1 \quad i_1 = 0$$

Tandis que pour celles provenant de la condition limite amont, la première constante définie est :

$$B_j = -\alpha \frac{(i_j t_d + A_j)^m}{i_j} = -\alpha \frac{h_a^m}{i_j} \quad i_j \neq 0 \quad (1.64)$$

$$B_j = -\alpha m A_j^{m-1} t_d \quad i_j = 0$$

### 1.10.3. Calcul de l'hydrogramme aval

Le développement théorique présenté ci-dessus n'aboutit pas à l'obtention d'une expression analytique de l'hydrogramme aval. Par contre, avec cette approche, il est possible de calculer un nombre quelconque de couples  $(t_f; Q_f)$  où  $Q_f$  est le débit sortant à l'instant  $t_f$ . De cette manière, l'hydrogramme aval est donné par un ensemble de points calculés analytiquement.

Avec ces définitions et pour un plan de longueur  $L_0$ , l'équation (1.54) donne :

$$L_0 = \alpha \frac{(i_k t_f + A_k)^m}{i_k} + B_k \quad i_k \neq 0 \quad (1.65)$$

$$L_0 = \alpha m A_k^{m-1} t_f + B_k \quad i_k = 0$$

L'indice  $k$  est celui du bloc de pluie durant lequel la courbe caractéristique sort à l'aval du plan. Cet indice peut être déterminé par l'inéquation :

$$x_{i+1} = \alpha \frac{(i_j t_{i+1} + A_j)^m}{i_j} + B_j \geq L_0 \quad i_j \neq 0 \quad (1.66)$$

$$x_{i+1} = \alpha m A_j^{m-1} t_{i+1} + B_j \geq L_0 \quad i_j = 0$$

pour  $i = 1$  à  $n$ . Dans cet ordre, la première fois que l'inéquation (1.66) est satisfaite, alors  $k = i$ .

Dès que l'indice  $k$  est déterminé, le temps de sortie  $t_f$  de la caractéristique à l'aval du plan se calcule par :

$$t_f = \frac{1}{i_k} \left[ \left( \frac{i_k (L_0 - B_k)}{\alpha} \right)^{1/m} - A_k \right] \quad i_k \neq 0 \quad (1.67)$$

$$t_f = \frac{L_0 - B_k}{\alpha m A_k^{m-1}} \quad i_k = 0$$

La hauteur d'eau  $h_f$  à l'aval et au temps  $t = t_f$  est donnée par l'équation (1.52) :

$$h_f = i_k t_f + A_k \quad (1.68)$$

et le débit unitaire  $q_f$  est calculé à l'aide de l'équation (1.45) :

$$q_f = \alpha h_f^m \quad (1.69)$$

#### 1.10.4. Procédure de résolution et exemple

Il semble judicieux de développer quelque peu l'aspect pratique de la mise en œuvre de la théorie présentée ci-dessus. A cet effet, un exemple d'application est présenté et servira de fil conducteur à la poursuite des réflexions concernant l'hypothèse cinématique.

Le principe de résolution consiste à calculer une courbe caractéristique afin d'obtenir un couple temps – débit à l'aval du plan. Pour obtenir une bonne résolution temporelle de l'hydrogramme, il est évidemment nécessaire de répéter ce processus autant de fois que nécessaire.

Pour chaque caractéristique considérée, il s'agit en premier lieu de calculer les constantes d'intégration  $A_i$  et  $B_i$  pour entièrement définir la trajectoire de la caractéristique et l'évolution de la hauteur d'eau. Puis, l'équation (1.66) fournit l'indice  $k$  du bloc de pluie durant lequel

la caractéristique calculée sort à l'aval du plan. L'instant précis de la sortie est donné par l'équation (1.67) et le débit correspondant par l'équation (1.69). Ainsi, un point de l'hydrogramme aval est analytiquement calculé.

Comme cela est souvent le cas, il est plus aisé de calculer des caractéristiques espacées d'un  $dx$  constant pour celles provenant de la condition initiale, et d'un  $dt$  constant pour celles provenant de la condition limite amont. Il faut cependant préciser que malgré cette apparente régularité, la non-linéarité des équations cinématiques entraîne un pas de temps variable pour l'hydrogramme aval.

La figure 1.6 présente le résultat de cette procédure pour un plan de 600 m de longueur et de 1000 m de largeur, de 20% de pente et de coefficient de Strickler  $K = 5 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ . Ce plan est arrosé par la pluie nette également montrée sur la figure 1.5. Dans ces conditions, le calcul de la caractéristique « frontière » entre le domaine influencé par la condition initiale et celui dépendant de la condition limite amont fournit le temps de concentration  $t_c$  de ce plan pour la pluie considérée, à savoir dans ce cas,  $t_c = 8'918 \text{ s}$ . La figure 1.6 présente de manière graphique ce point particulier.

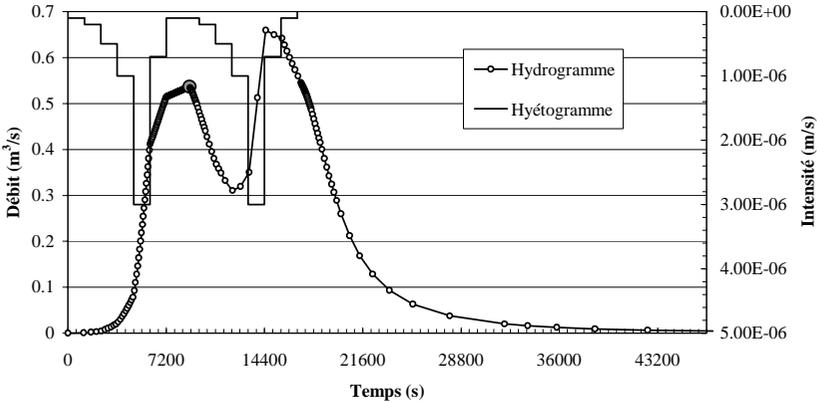


Figure 1.6 : Exemple d'hydrogramme calculé analytiquement. Cent caractéristiques ont été intégrées à partir de la condition initiale, de même que à partir de la condition limite amont. La caractéristique frontière entre ces deux domaines est marquée par un

symbole de plus grande dimension et fournit le temps de concentration du plan pour cette pluie particulière.

Dans ce premier exemple, aucune condition initiale ni hydrogramme amont n'ont été introduits. Si une condition initiale différente de  $h = 0$  au début du calcul se présente relativement rarement dans des cas concrets, il n'en est pas de même en ce qui concerne l'hydrogramme amont. En effet, il est possible de modéliser un bassin versant par une cascade de plans présentant chacun des conditions géométriques différentes. Un hydrogramme calculé sur un plan situé à l'amont devient alors la condition limite du plan aval.

Pour mesurer l'influence d'un hydrogramme amont non nul, l'hydrogramme de la figure 1.6 est injecté à l'amont d'un deuxième plan, toujours de 600 m de longueur, 1000 m de largeur et de coefficient de Strikler  $K = 5 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ , mais avec cette fois une pente plus douce de 2%. La figure 1.7 présente la crue simulée à l'aval de ce deuxième plan.

L'aspect de cette crue est plus que surprenant. Pendant une certaine durée, 3 débits différents se produisent simultanément à l'aval du plan. En d'autres termes, 3 hauteurs d'eau se produisent au même endroit et au même instant. Ce déferlement, bien qu'il soit la solution analytique au modèle mathématique de l'onde cinématique, ne trouve aucune justification dans la réalité hydrologique. Il se produit déjà lors de la succession de deux plan de pente différente. Il semble évident qu'en topographie réelle, ce problème se posera en de nombreux endroits du bassin versant.

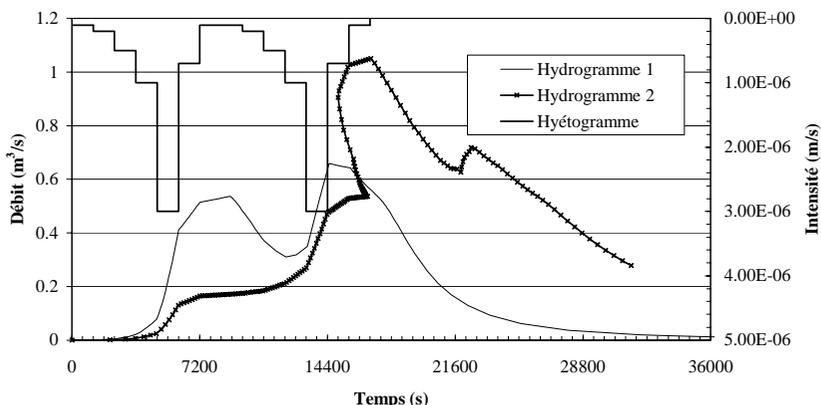


Figure 1.7 : Hydrogramme calculé analytiquement à l'aval du deuxième plan. La condition limite amont de ce calcul est l'hydrogramme 1 présenté à la figure 1.6. De toute évidence, un comportement bien original est visible dans ce cas. Trois débits, et donc également trois hauteurs d'eau apparaissent simultanément à l'aval du plan pendant une certaine durée.

## 1.11. Applicabilité des modèles simplifiés aux topographies réelles

Dans la solution analytique de la succession de pentes du chapitre précédent, l'apparition de solutions multiples pose quelques questions théoriques fondamentales.

L'aspect déferlant des solutions cache mal les difficultés d'interprétation physique par rapport à la relation biunivoque qui lie hauteur et débit. Outre la difficulté d'envisager la présence en un point de plusieurs hauteurs et débits simultanés, la différence entre la pente locale des hauteurs d'eau et la pente de fond suggère que les hypothèses d'applicabilité de la théorie cinématique sont loin d'être encore vérifiées.

S'il est démontré que ce type de problème ne peut survenir sur un plan unique (ce qui met à l'abri les premières théories de décomposition de bassin versant en une série de plans allant directement de la ligne de crête au réseau drainant), une première analyse semble le lier à l'application sans discernement des théories simplifiées aux topographies réelles, avec leur succession quelconque de pentes, de précipitations et de régimes d'écoulement au gré des terrains rencontrés.

Un retour à la théorie s'impose pour lever cette apparente aberration et poser les jalons d'une approche adaptée.

La théorie des caractéristiques explicite le transport d'informations le long de courbes du plan espace-temps. Lorsque ces caractéristiques entrent en collision, deux indications a priori contradictoires sur la hauteur (ou le débit) sont fournies au même point de cet espace : un choc apparaît dans l'écoulement. Puisque la célérité est une fonction croissante de la hauteur d'eau, les grandes profondeurs vont se propager plus rapidement que les hauteurs d'eau plus faibles. Ainsi, un hydrogramme de crue complet devrait se déplacer avec un front d'onde toujours plus accentué, finalement source de discontinuités.

Il est légitime de penser qu'une onde de choc qui se forme en une région de la solution annonce une perte simultanée des capacités du modèle mathématique à représenter la physique du problème.

Cette réflexion détermine la chronologie des développements suivants.

- La formulation mathématique d'une solution unique se substituant aux solutions multiples sera recherchée, par l'introduction de discontinuités
- Les conditions d'apparition de solutions multiples en un point seront étudiées, en recherchant dans les descriptions plus élaborées dans quelle mesure ces singularités peuvent être résolues.

- La valeur de la solution sera alors appréciée à la lumière des raisonnements physique précédents.

Cette dualité entre la physique du problème et son approximation mathématique pour le traitement des singularités constitue un préalable indispensable à la mise en place d'un schéma numérique adapté.

### *1.11.1. Introduction de discontinuités vérifiant l'équation de continuité*

La non-linéarité des formulations simplifiées introduit certains caractères essentiels des ondes hyperboliques avec apparition d'ondes de choc.

L'étude de ce type d'équation a retenu beaucoup d'attention dans la cinématique des gaz. Elle fait l'objet, dans le cadre de l'hydrologie de surface, d'investigations bien plus confidentielles.

Si une nouvelle discussion s'impose sur les hypothèses simplificatrices qui ont conduit aux modèles simplifiés, un élargissement du champ des solutions peut s'envisager de deux manières :

- En considérant la forme intégrale des équations qui ne requiert pas de conditions notamment sur dérivabilité de la fonction hauteur. En effet, la forme différentielle considérée jusqu'ici restreint implicitement le champ de solutions qui ne peuvent être que continûment dérivables.
- En analysant la dégénérescence de l'équation dynamique, par comparaison aux modèles plus complets.

Examinons d'abord dans quelle condition dégénère l'équation de continuité pour une solution discontinue, en revenant un instant à la formulation originelle.

L'espace concerné par le bilan volumique est limité en unidimensionnel par deux points d'abscisses respectives  $x_A(t)$ ,  $x_B(t)$ . Entre ces deux points qui enserrant à tout instant les mêmes particules existe une discontinuité de la surface libre, située à l'abscisse  $s(t)$ , comme expliqué à la figure 1.8.

Après intégration sur la hauteur, l'expression intégrale (1.1) prend la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \int_{x_A(t)}^{s(t)} h(x,t) dx + \frac{d}{dt} \int_{s(t)}^{x_B(t)} h(x,t) dx + \int_{x_A(t)}^{s(t)} (i-r) \cos \theta dx + \int_{s(t)}^{x_B(t)} (i-r) \cos \theta dx = 0 \quad (1.70)$$

Par la formule de Leibnitz, il vient :

$$q_A - q_B = h(s^-, t) \frac{ds}{dt} - h(s^+, t) \frac{ds}{dt} + \frac{d}{dt} \int_{x_A}^s \frac{\partial h}{\partial t} dx + \int_s^{x_B} \frac{\partial h}{\partial t} dx + \int_{x_A}^s (i-r) \cos \theta dx + \int_s^{x_B} (i-r) \cos \theta dx \quad (1.71)$$

où  $q$  désigne le débit par unité de largeur,  $h(s^-, t)$  et  $h(s^+, t)$  désignent des profondeurs mesurées respectivement à gauche et à droite de la transition.

Comme le suggère cette représentation,  $h$  et  $q$ , tout comme leurs dérivées, sont des fonctions continues sur l'intervalle  $[x_A, s[U]s, x_B]$ . Elles sont également bornées sur l'espace fermé correspondant.

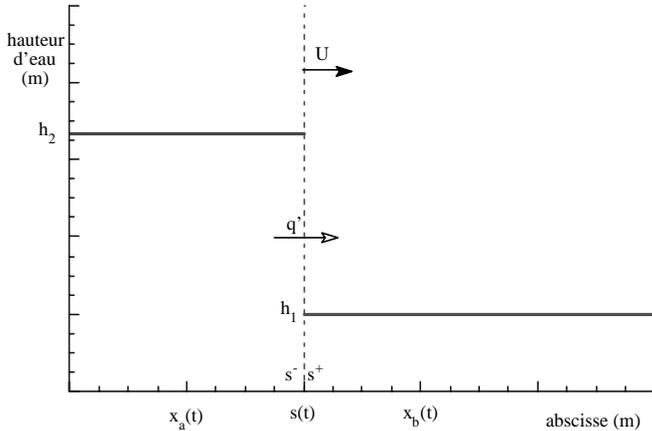


Figure 1.8 : Conventions d'écriture relatives à un choc en mouvement.

Pour établir la relation qui lie des variables situées de part et d'autre du saut, chaque extrémité de l'espace de contrôle tend vers l'abscisse  $s(t)$  en l'emprisonnant dans un espace élémentaire. Dans ces conditions, tenant compte de fonctions bornées, chaque intégrale tend vers 0 et il subsiste alors :

$$q(s^+, t) - q(s^-, t) = [h(s^-, t) - h(s^+, t)] \frac{ds}{dt} \quad (1.72)$$

l'indice 1 désignant la zone en avant du choc, l'indice 2 celle derrière le choc. Pour une vitesse de déplacement du choc,  $\frac{ds}{dt}$ , désignée par  $U$ , il vient :

$$q_1 - Uh_1 = q_2 - Uh_2 = q' \quad (1.73)$$

où  $q'$  représente le débit que mesure un observateur qui se déplace avec la discontinuité.

La discontinuité qui satisfait (1.73) fait donc partie des solutions acceptables et peut avantageusement se substituer aux solutions triples susceptibles d'apparaître dans l'approche continue.

Examinons à présent la seconde équation du modèle. Certaines hypothèses émises lors de son élaboration sont en contradiction avec les résultats obtenus. En l'occurrence, l'apparition de pentes de surface infinies contraste, du moins localement, avec l'hypothèse d'une pente de surface assimilée à une pente de fond. La liaison entre hauteur et vitesse cesse ponctuellement d'être une description valable du processus physique. La pente de surface, par exemple, semble créer des effets qu'il convient de considérer aux abords des déferlements analytiques. Examinons jusqu'à quel point les termes supplémentaires jadis éliminés résolvent les singularités.

### 1.11.2. *Première analyse par l'hypothèse de l'onde diffusive*

Quel est l'impact de l'assimilation de la pente de surface à la pente de fond ? Afin d'examiner ce qu'apporte le gradient de hauteur ajouté à la pente de fond pour la description d'une transition, rappelons la forme dimensionnelle de l'hypothèse diffusive qui lie  $u$  et  $h$  :

$$u^b = \frac{h^d}{a} (\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x}) \quad (1.74)$$

Son introduction dans l'équation de continuité donne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{b+d}{b} \left[ \frac{1}{a} (\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x}) \right]^{\frac{1}{b}} h^{\frac{d}{b}} \frac{\partial h}{\partial x} = \\ - h^{\frac{b+d}{b}} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{a} (\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x}) \right]^{\frac{1}{b}} + (i-r) \cos \theta \end{aligned} \quad (1.75)$$

Une première analyse directe résulte de l'approximation habituelle de l'expression des pentes de surface . L'équation (1.75) prend alors la forme habituelle suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c(h, x) \frac{\partial h}{\partial x} = \mu(h, x) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + (i - r) \cos \theta \quad (1.76)$$

avec:

$$c(h, x) = \frac{b+d}{b} \left( \frac{h^d}{a} \sin \theta \right)^{\frac{1}{b}} \quad (1.77)$$

$$\mu(h, x) = \frac{1}{b} \left( \frac{1}{a} \right)^{\frac{1}{b}} h^{\frac{b+d}{b}} \cos \theta \sin \theta^{\frac{1-b}{b}} \quad (1.78)$$

Comme toute équation de convection-diffusion, elle combine des tendances à raidir les profils par une convection non linéaire  $c(h, x)$ , ainsi qu'un adoucissement de la forme du signal propre à la diffusion  $\mu(h, x)$ .

Reprenons l'expression générale (1.75) pour nous intéresser à l'évolution de la solution du problème décrit à la figure 1.8.

Fidèle à l'état d'esprit qui prévaut dans ce paragraphe, nous supposons nulle toute contribution extérieure au système  $[(r-i) = 0]$ . Cette limitation ne change rien formellement à (1.73) sinon que  $U$  prend une valeur constante caractéristique de la transition considérée.

Soulignons encore qu'en accord avec les approches classiques de détermination des bassins versants, nous écartons toute possibilité de contrepente sur la trajectoire des gouttes de pluie.

Dans le cadre de cette approche plus précise, nous cherchons l'expression de la vitesse constante  $U$  de déplacement d'une transition qui lie deux états stationnaires situés à  $\pm \infty$  (Ils sont référencés par les indices 1 et 2). Nous vérifions l'existence d'une solution dans l'hypothèse où le profil des hauteurs tend vers ces deux états avec une pente tendant vers 0.

La structure de la solution recherchée

$$h = h(x'') \quad \text{avec} \quad x'' = x - U t \quad (1.79)$$

est introduite dans l'équation (1.75) qui donne après intégration :

$$-U'h + \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right]^{\frac{1}{\beta}} h^{\frac{\beta+\gamma}{\beta}} = -e \quad (1.80)$$

Pour rencontrer les conditions aux limites, la vitesse de déplacement du choc  $U$  et la constante d'intégration  $e$  doivent satisfaire aux relations suivantes :

$$q_1 - U'h_1 + e = q_2 - U'h_2 + e = 0 \quad (1.81)$$

ce qui donne en particulier

$$U' = \frac{q_2 - q_1}{h_2 - h_1} \quad (1.82)$$

Cette condition est précisément analogue à celle écrite en (1.73), ce qui nous dispense désormais de différencier  $U$  et  $U$ .

Dans les deux dernières relations,  $q_1$  et  $q_2$  font bien référence à leur définition initiale, soit l'hypothèse cinématique qui lie  $\bar{u}$  et  $h$ , influence de la pente de surface non comprise.

L'expression (1.80) écrite sous la forme suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\alpha}{\cos \theta} h^{-(\beta+\gamma)} (q' + Uh)^\beta + \tan \theta \quad (1.83)$$

suggère cependant un fait nouveau non négligeable : pour une topographie assez régulière, cette pente conserve généralement une valeur finie de signe constant qui permet à la solution de rallier les deux états limites par une transition continue et graduelle.

Il est plus aisé de compléter l'analyse de ce résultat en reprenant l'application avec l'équation approchée (1.76).

Par commodité, nous considérons arbitrairement  $\mu$ , au terme des discussions sur l'ordre de grandeur de la contribution diffusive, comme une constante positive dont la valeur s'adapte à une hauteur caractéristique de l'écoulement et à la dimension du maillage.

Si nous reprenons un raisonnement similaire à celui mené avec l'équation complète, en restreignant l'exemple à une pente constante, nous obtenons après intégration la forme simplifiée correspondant à (1.80) qui s'écrit :

$$-U''h + \left(\frac{\sin\theta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} h^{\frac{\beta+\gamma}{\beta}} - \mu \frac{\partial h}{\partial x} = -e' \quad (1.84)$$

L'imposition des conditions aux limites sur les pentes de surface rend évidemment les conditions (1.81) qui donnent à  $U''$  et  $e'$  des valeurs similaires à l'intégration précédente ( $U$  et  $e$ ). Pour procéder à une intégration simple de (1.84), nous particularisons le coefficient de la loi hauteur-vitesse à  $m = \frac{\gamma}{\beta} = 1$  pour nous intéresser à un état intermédiaire entre l'écoulement laminaire de Darcy-Weisbach et la turbulence pleinement développée de Chézy.

Nous obtenons alors pour expression du gradient de hauteur, un polygone du second degré en termes de la hauteur. Puisque les conditions aux limites lui imposent deux zéros en  $h = h_1$  et  $h = h_2$ , l'expression (1.84) prend la forme suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \left[ \left(\frac{\sin\theta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} h^2 - Uh + q' \right] = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\sin\theta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} (h - h_1)(h - h_2) \quad (1.85)$$

dont l'intégration donne :

$$x = \frac{\mu}{h_2 - h_1} \left(\frac{\alpha}{\sin\theta}\right)^{\frac{1}{\beta}} \ln\left(\frac{h - h_2}{h - h_1}\right) \quad (1.86)$$

Ce résultat apporte une preuve tangible de l'importance de la contribution diffusive.

Etant donné la forme de (1.85), on est assuré du signe de  $\frac{\partial h}{\partial x}$  entre des racines  $h_1$ ,  $h_2$  qui sont rejetées à  $\pm \infty$ . La solution monotone

entre les deux états présente une transition dont la raideur dépend du coefficient  $\mu$ . Pour le montrer, il nous faut définir une mesure de l'épaisseur de la transition  $\Delta x$ . Nous la poserons de façon abrupte comme l'espace qui assure 90 % par exemple de la transition totale ( $h_2 - h_1$ ).

En évaluant la distance qui sépare les abscisses correspondant respectivement à ( $h_1 + 0,05 (h_2 - h_1)$ ) et ( $h_1 + 0,95 (h_2 - h_1)$ ), on obtient finalement :

$$1 = \frac{\mu}{h_2 - h_1} \left( \frac{\alpha}{\sin \theta} \right)^{1/\beta} \ln \left( \frac{0,05}{0,95} \right)^2 \quad (1.87)$$

Quel que soit le pourcentage choisi, cette mesure s'avère proportionnelle au coefficient qui précède le logarithme. Comme le montre la figure 1.9, le profil se raidit lorsque  $\mu$  diminue pour s'apparenter à un saut brusque lorsque  $\mu$  devient très petit.

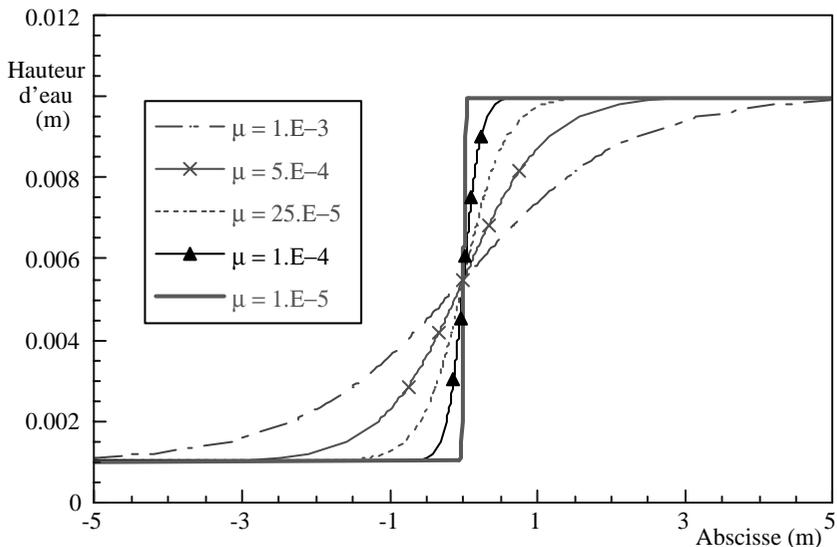


Figure 1.9 : Evolution d'une transition pour différentes valeurs de  $\mu$ .

$$h_1 = 10^{-3} m, \quad h_2 = 10^{-2} m, \quad \left( -\frac{\alpha}{\sin \theta} \right)^\beta = 10$$

Deux tendances extrêmement importantes se dégagent des développements :

- Si petite que soit la contribution diffusive, sa seule présence assure une transition continue en lieu et place des chocs d'une théorie plus "grossière".
- Lorsque le coefficient de diffusion devient très petit, la frange des abscisses dans laquelle se produit la transition devient si étroite qu'un saut brusque constitue une approximation valable de la solution.

Il s'agit là d'une indication très encourageante pour le modèle d'écoulement très particulier que nous développons. A l'échelle spatiale des phénomènes que nous souhaitons modéliser, la théorie cinématique garderait tout son sens à condition d'introduire la possibilité de sauts dans la solution qui approximeraient les profils continus d'une théorie plus précise.

A ce stade, on ne peut encore parler que d'espoir puisqu'il faut, en toute rigueur, revenir aux équations complètes d'Euler pour se forger une opinion définitive.

Cette étape paraît d'autant plus nécessaire lorsqu'on songe que des sauts font partie intégrante des solutions de la théorie classique basée sur les équations complètes. Or, notre approche consacrée de la théorie diffusive semble éliminer les discontinuités.

Voyons ce qu'il en est exactement.

### 1.11.3. *Seconde approche de la transition par les équations complètes d'Euler*

La comparaison des modèles mathématiques sera dans le cadre de la recherche d'une solution liant deux états uniformes rejetés à  $\pm \infty$ . La transition étudiée se produit sur une topographie à pente constante, et sans apport extérieur au système. Les équations utilisées sont celles du système complet (1.29 et 1.30), pour la mise en évidence de la non-linéarité qui est précisément à la base des effets étudiés dans le cas de l'onde cinématique. Parallèlement aux développements antérieurs, la solution prendra la forme suivante :

$$u = u(x - Ut) = u(x^*) \quad h = h(x - Ut) = h(x^*) \quad (1.88)$$

Dans ces conditions, le système complet s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x^*} [(u - U)h] = 0 \quad (1.89)$$

$$(u - U) \frac{\partial u}{\partial x^*} + g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x^*} = g \sin \theta - ga \frac{u^b}{h^d} \quad (1.90)$$

L'intégration de l'équation de continuité est immédiate et permet d'exprimer l'équation dynamique en fonction de la seule hauteur :

$$u = U - \frac{e}{h} \quad (1.91)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x^*} = - \frac{g \left[ a \frac{(U - \frac{e}{h})^b}{h^d} - \sin \theta \right] h^3}{gh^3 \cos \theta - e^3} \quad (1.92)$$

L'imposition des conditions aux limites permet de déterminer les paramètres inconnus  $e$  et  $U$  :

$$e = h_1 h_2 \left[ \frac{u_2 - u_1}{h_2 - h_1} \right] = \left( \frac{\sin \theta}{a} \right)^{\frac{1}{b}} h_1 h_2 \left[ \frac{h_2^{\frac{d}{b}} - h_1^{\frac{d}{b}}}{h_2 - h_1} \right] \quad (1.93)$$

$$U = \left[ \frac{u_2 h_2 - u_1 h_1}{h_2 - h_1} \right] = \left( \frac{\sin \theta}{a} \right)^{\frac{1}{b}} \left[ \frac{h_2^{\frac{b+d}{b}} - h_1^{\frac{b+d}{b}}}{h_2 - h_1} \right] \quad (1.94)$$

Cette expression de  $U$  s'identifie à la condition à vérifier pour une discontinuité (1.73). Néanmoins, comme pour l'onde diffusive, certaines caractéristiques sur le profil qui lie les deux états à  $\pm \infty$  peuvent être dégagées du système complet.

Le signe du gradient de hauteur donné en (1.92), ainsi que ses possibles évolutions en fonction de  $x^*$ , déterminent la structure de la transition. Pour assurer une transition monotone et continue,

$\frac{\partial h}{\partial x^*}$  doit conserver une valeur négative puisque, comme nous

l'avons vu dans la naissance de solutions multiples, la tendance aux chocs s'accompagne d'une augmentation de hauteur lorsque la célérité est une fonction croissante de la hauteur.

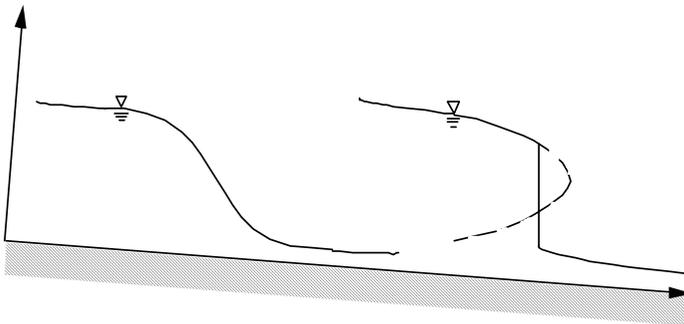


Figure 1.10 : Structure d'une transition sans ou avec discontinuité.

La figure 1.10 illustre cet aspect fondamental, avec un profil discontinu consécutif à un changement de signe du gradient de hauteur.

Montrons d'abord que le numérateur (NUM) de (1.92) conserve un signe positif constant entre les états uniformes pour quelques couples remarquables de valeurs  $(\beta, \gamma)$ . L'imposition comme conditions limites de gradients nuls à  $\pm \infty$  assure à  $h_1$  et  $h_2$  d'être racines de ce polynôme.

- hypothèse laminaire ( $\beta=1, \gamma=2$ )

$$NUM = g[a(Uh - e) - h_3 \sin \theta] = g(h_2 - h)(h - h_1)(h - h_3) \sin \theta \quad (1.95)$$

La troisième racine,  $h_3$ , s'obtient en identifiant les termes indépendants de chaque membre :

$$h_3 = -\frac{ae}{h_1 h_2 \sin \theta} \quad (1.96)$$

Cette valeur négative de  $h_3$  est nécessairement hors du domaine  $[h_1, h_2]$  et ne fera dès lors jamais partie des solutions à considérer, ce qui assure la positivité du numérateur pour le profil recherché.

- Hypothèse turbulente de Chézy ( $\beta=2, \gamma=1$ )

$$NUM = g[a(Uh - e)^2 - h^3 \sin \theta] = g(h_2 - h)(h - h_1)(h - h_3) \sin \theta \quad (1.97)$$

Par un raisonnement analogue à celui qui précède, il vient pour  $h_3$  :

$$h_3 = \frac{ae^2}{h_1 h_2 \sin \theta} = \frac{h_1 h_2}{(h_1^{\frac{1}{2}} + h_2^{\frac{1}{2}})^2} \quad (1.98)$$

Les conclusions précédentes sur  $h_3$  restent d'actualité.

- Hypothèse intermédiaire pour l'onde diffusive ( $\beta=1, \gamma=1$ )

$$NUM=h[ga(Uh-e)-h_2\sin\theta]-gh(h_2-h)(h-h)\sin\theta \quad (1.99)$$

Les conclusions sont naturellement reconduites.

Il ressort de ces quelques lois que le seul signe du dénominateur (DEN) de (1.92) sera déterminant dans la discussion :

$$DEN=gh_3\cos\theta-e_2=gh_2[gh\cos\theta-(u-u)_2] \quad (1.100)$$

La continuité de la solution est assurée en maintenant le dénominateur positif :

$$u-\sqrt{gh\cos\theta}<U<u+\sqrt{gh\cos\theta} \quad (1.101)$$

La première condition est toujours remplie par (1.91).

Voyons comment évolue la seconde condition lorsqu'on progresse de deux états très voisins vers des transitions de plus en plus importantes.

Lorsque  $h_2$  est dans le voisinage, de  $h_1$ , on obtient  $U$  par (1.94) en remplaçant  $h_2$  par  $h_2(1+\varepsilon)$  avec  $\varepsilon \ll \ll$  :

$$U=\left[\frac{\sin\theta}{a}\right]^{\frac{1}{b}}\left(\frac{b+d}{b}\right)h_1^{\frac{d}{b}}=\left(\frac{b+d}{b}\right)u_1 \quad (1.102)$$

La célérité de la théorie approchée cinématique apparaît donc comme la vitesse de propagation d'une faible transition : Dans l'hypothèse où les conditions de stabilité sont vérifiées, il vient :

$$U=\left(1+\frac{d}{b}\right)u_1=c_1<u_1+\sqrt{gh_1\cos\theta} \quad (1.103)$$

Lorsque l'onde gagne en amplitude,  $U$  grandit et n'assure un profil continu qu'aussi longtemps que :

$$c_1 < U < u_1 + \sqrt{gh_1 \cos \theta} \quad (1.104)$$

Au delà, c'est-à-dire quand  $U$  prend ses valeurs dans le domaine  $\left[ u_1 + \sqrt{gh_1 \cos \theta}, u_2 + \sqrt{gh_2 \cos \theta} \right]$ , il existe nécessairement un changement de signe du dénominateur qui provoque un profil discontinu similaire à celui de la figure 1.10. Dans ce cas, il faut repartir, comme illustré pour la continuité seule, des équations complètes sous leur forme intégrale afin de dégager les conditions complètes des chocs, bien connus des hydrauliciens, celles du ressaut.

La condition (1.104), physiquement, exprime que pour se résoudre en une transition continue, le choc peut progresser plus rapidement que les ondes issues des dérivées d'ordre inférieur. Il ne peut cependant se mouvoir plus rapidement que celles générées par les dérivées d'ordre supérieur directement à son aval. En termes de hauteur, elle s'écrit :

$$\left[ \frac{\sin \theta}{a} \right]^{\frac{1}{b}} \frac{h_2}{\sqrt{gh_1 \cos \theta}} \frac{h_2^{\frac{d}{b}} - h_1^{\frac{d}{b}}}{h_2 - h_1} < 1 \quad (1.105)$$

Ainsi, la théorie complète produit une solution continue tant que l'amplitude du choc se maintient dans les intervalles qui permettent à (1.104) d'être vérifiés. Au delà, subsiste une discontinuité dans la solution qui requiert un retour aux formulations intégrales originelles.

#### 1.11.4. Conclusion

L'apparition de chocs semble inéluctable dans l'écoulement pour des topographies ou dans des conditions quelconques. L'étude de ces singularités ainsi que leur progressive résolution au travers des théories diversement simplifiées, inspirent deux remarques essentielles sur la théorie cinématique :

- L'utilisation d'une relation explicite vitesse - hauteur crée inéluctablement un appauvrissement, tant dans la gamme des

phénomènes aptes à être reproduits que dans la description même qu'elle donne de ces phénomènes. Dans ce contexte, le choc éventuel apparaît comme un signal, une incitation à reconsidérer les hypothèses qui ont présidé à l'élaboration de la théorie. Il fixe également une limite qui ne peut être surmontée qu'avec un nouvel examen simultané de la théorie et de la physique du problème.

- Les difficultés naissent précisément de la richesse de représentation, caractéristique des modèles non-linéaires, que conservent les théories simplifiées appliquée à l'hydrologie. Elles propagent et déforment les signaux de manière complexe pour aboutir, en certaines circonstances, à des singularités que ne résolvent pas systématiquement des théories plus affûtées. L'analyse révèle que, théoriquement parlant, la formulation différentielle élimine un type potentiel de solutions qui peuvent satisfaire l'expression originelle : des solutions discontinues.

L'extension du champ des solutions ne signifie pas pour autant que la discontinuité est une approximation licite face aux difficultés rencontrées.

L'examen successif des approximations opérées dans la théorie est assez rassurant, considéré à nouveau dans le contexte d'un modèle global à grande échelle. La théorie cinématique ne peut se satisfaire que de chocs, la théorie diffusive les résout en une transition continue, la théorie complète tempère cette apparition de chocs en parvenant, dans certaines limites, à maintenir la solution continue. Mais en dehors de chocs prématurés dus aux simplifications, certaines discontinuités subsistent, qui font partie intégrale du "paysage classique" de l'hydraulique de surface. Dans tous les cas, ces transitions sont assurées sur un espace si réduit à l'échelle envisagée qu'une discontinuité brusque peut constituer une approximation très raisonnable.

Ainsi, les théories simplifiées s'affirment comme une alternative crédible pour un modèle hydrologique sur topographie quelconque considérée à grande échelle, à condition toutefois d'intégrer tout le champ potentiel des solutions dans la définition mathématique du problème. Il compose, avec la recherche d'un traitement numérique approprié, la matière du chapitre 4.



## 2. Approche expérimentale du ruissellement hydrologique

### 2.1. Constat de la situation actuelle

La littérature hydraulique a été très féconde dans le domaine du calcul des pertes de charge de l'écoulement et il paraît judicieux de s'arrêter quelques instants pour faire le point sur la situation actuelle. La question est de savoir de quoi nous disposons réellement pour un calcul fiable des pertes de charge du ruissellement de surface.

Par définition à la frontière entre un écoulement en milieux poreux et un écoulement à surface libre, ce phénomène rassemble et mélange des comportements traités habituellement de manière distincte. Il se comporte certainement comme un écoulement en milieu poreux lorsque les hauteurs d'eau sont très faibles et l'état de la surface très chaotique. Il est tantôt laminaire, tantôt turbulent, avec une transition entre ces régimes plutôt obscure. Et lorsque la hauteur d'eau augmente, il ne fait aucun doute qu'il tend vers le comportement décrit par les relations empiriques du domaine turbulent rugueux, par la théorie concernant les écoulements sur macro-rugosité et par la formulation générale de Colebrook.

#### 2.1.1. *Écoulement laminaire*

L'écoulement laminaire sur plan semble présenter une situation complètement résolue puisque la solution analytique existe.

Sous une forme générale, la vitesse de l'écoulement s'écrit :

$$u = \frac{8gJ_0 h^2}{\kappa V} \quad (2.1)$$

où  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide. Le coefficient  $\kappa$  apparaît dans l'expression du coefficient de frottement  $f$  :

$$f = \frac{\kappa}{R} \quad (2.2)$$

Le nombre de Reynolds,  $R$ , se définit dans cette approche par la relation :

$$R = \frac{uR_h}{\nu} \quad (2.3)$$

La relation de Hagen-Poiseuille conduit alors à l'obtention de la valeur théorique  $\kappa = 24$ .

Certains essais ont cependant montré un comportement fort différent, le coefficient  $\kappa$  pouvant atteindre des valeurs supérieures à 50'000 au lieu du 24 de la solution théorique.

Ce paradoxe est en partie expliqué par la théorie générale des écoulements laminaires (Dubois 1998). Dans une même section, le coefficient  $\kappa$  varie en fonction de la hauteur d'eau comme le montre la figure 1 pour un profil rectangulaire.

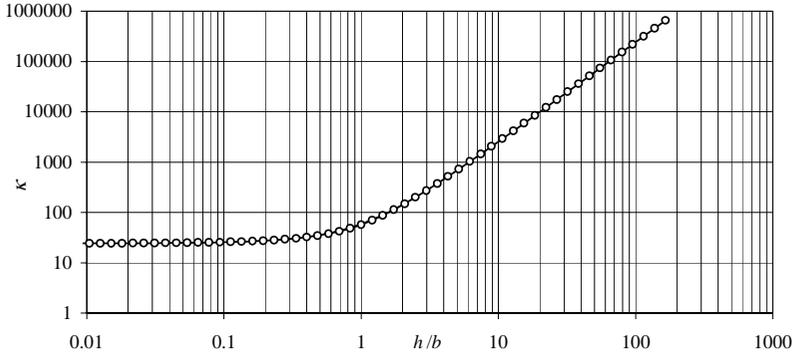


Figure 2.1 : Relation entre le coefficient  $\kappa$  et le rapport  $h/b$  pour un écoulement laminaire en profil rectangulaire,  $b$  étant la demi-largeur du profil

Si le modèle géométrique simple du plan parfait et de la lame d'eau de hauteur constante est adopté, comme cela est quasiment toujours le cas, alors la théorie est très claire et l'augmentation de plusieurs ordres de grandeurs du coefficient  $\kappa$  ne saurait jamais se justifier.

Il est toutefois évident que la surface d'un sol naturel ne présente pas l'aspect d'un miroir. Seule une modélisation de la surface tenant compte de la présence des aspérités semble être en mesure de reproduire correctement le milieu géométrique dans lequel se développe le ruissellement. Dès lors, le double effet de la variation théorique du coefficient  $\kappa$  en fonction de la hauteur d'eau et la différence entre la vitesse moyenne de type Darcy et la vitesse locale peuvent expliquer, en partie du moins, la forte augmentation observée du coefficient  $\kappa$ .

Supposons, par exemple, que pour une faible hauteur d'eau  $h$ , 80 % de la section soit occupé par les éléments de rugosité. Ne reste alors que 20 % pour l'écoulement réel. Définissons d'une manière classique la vitesse moyenne  $u$  par

$$u = \frac{Q}{A} \quad (2.4)$$

avec la surface  $A = Bh$  où  $B$  est la largeur du plan. Définissons la vitesse locale  $u_l$  par

$$u_l = \frac{Q}{\eta A} \quad (2.5)$$

où  $\eta$  est le rapport entre la surface totale  $A$  et la surface libre pour l'écoulement, à savoir  $\eta = 0.2$  dans notre exemple. En se référant au début de ce chapitre, cette vitesse locale peut être calculée par :

$$u_l = \frac{8gJ_0}{\kappa V} h^2 \quad (2.6)$$

Supposons encore que les petits canaux dans lesquels circule l'eau soient de section rectangulaire et que leur largeur vaut environ la moitié de la hauteur d'eau. Dans ce cas, à l'aide de la figure 2.1, il peut être démontré que  $\kappa \cong 96$ . Définissons encore la vitesse laminaire théorique  $u_t$  par

$$u_t = \frac{8gJ_0}{24\nu} h^2 \quad (2.7)$$

Il ressort de la comparaison entre l'équations (2.6) avec  $\kappa = 96$  et l'équation (2.7) que

$$u_l = \frac{1}{4} u_t \quad (2.8)$$

De même, en comparant (2.4) et (2.5) :

$$u = \eta u_l \quad (2.9)$$

et que finalement :

$$V = \frac{\eta}{4} V_t \quad (2.10)$$

à savoir, dans notre exemple numérique, une vitesse moyenne de type Darcy 20 fois plus petite que la vitesse théorique.

Si le calcul s'effectue selon l'approche traditionnelle de l'écoulement sur plan, l'équation (2.6) est applicable et le coefficient  $\kappa$  vaut alors, dans notre exemple numérique,

$$\kappa = \frac{4 \cdot 24}{\eta} = 480 \quad (2.11)$$

Ainsi, le simple fait de ne pas tenir compte d'une géométrie de surface différente de celle du plan parfait explique déjà l'augmentation du coefficient  $\kappa$  qui, dans notre exemple, passe de 24 à 480.

Il faut encore relever que cette valeur de 480, obtenue à partir d'hypothèses tout à fait réalistes, correspond presque à la valeur maximale recommandée par la littérature pour un sol grossier et érodé.

### 2.1.2. *Écoulement turbulent*

Dans le domaine des constructions hydrauliques, le débat entre partisans des formules empiriques comme celle de Strickler, et des formules dites modernes comme celle de Colebrook n'est toujours pas clos. Les premiers prônent la simplicité de calcul d'une relation explicite et une précision du résultat suffisante pour les cas pratiques. Les seconds argumentent en faveur des acquis scientifiques basés sur une théorie robuste. Il est vrai qu'aujourd'hui l'argument de la simplicité du calcul ne résiste plus à la critique. Mais qu'en est-il de la précision des résultats ?

Afin de répondre à cette question, comparons analytiquement les 2 types de formulation dans le cas d'une canalisation de diamètre  $D$ .

Selon la théorie « moderne », le calcul des pertes de charge en régime turbulent peut s'effectuer à l'aide des relations de Darcy-Weisbach et de Colebrook-White :

$$J_f = \frac{u^2}{2g} \cdot \frac{f}{D} \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left[ \frac{k_s}{3.7D} + \frac{2.51}{R\sqrt{f}} \right] \quad (2.13)$$

où  $k_s$  est la rugosité équivalente de sable des parois

Pour des valeurs élevées du nombre de Reynolds, l'influence de ce dernier sur la perte de charge devient négligeable. L'écoulement est défini comme turbulent rugueux et (2.13) se réduit à la formule de Nikuradse :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{k_s}{3.7 \cdot D} \right) \quad (2.14)$$

soit :

$$f = \left[ -2 \log \left( \frac{k_s}{3.7 \cdot D} \right) \right]^{-2} \quad (2.15)$$

La combinaison des équations de Darcy-Weisbach (2.12) et de Nikuradse pour un écoulement turbulent rugueux (2.14) permet d'écrire :

$$u = \frac{\sqrt{2gJ_f} \sqrt{D}}{\sqrt{f}} = \sqrt{2gJ_f} \cdot \left[ -2 \log \left( \frac{k_s}{3.7 \cdot D} \right) \right] \cdot \sqrt{D} \quad (2.16)$$

Selon l'approche empirique, les formules, appliquées à la géométrie d'une conduite de section circulaire, s'écrivent d'une manière générale :

$$V = \alpha \cdot J_f^{1/2} \cdot D^\lambda \quad (2.17)$$

Dans cette équation, le coefficient  $\alpha$  ne dépend que de la rugosité des parois et reste constant pour tous les diamètres. Si tel n'était pas le cas, cette formulation perdrait tout son intérêt.

L'égalité des vitesses d'écoulement calculées par les formules empiriques (2.17) et selon Colebrook (2.14) permet d'écrire :

$$\alpha \cdot J_f^{1/2} \cdot D^\chi = \sqrt{2gJ_f} \cdot \left[ -2 \log \left( \frac{k_s}{3.7 \cdot D} \right) \right] \sqrt{D} \quad (2.18)$$

Dans le membre de droite de l'équation (2.18), le diamètre  $D$  n'est pas sous la forme d'une simple puissance, comme dans le terme de gauche, mais apparaît également dans une fonction logarithmique. Afin de lever cette difficulté de comparaison, faisons l'hypothèse que le coefficient de frottement  $f$  peut s'exprimer, non seulement selon l'équation (2.15), mais aussi sous la forme :

$$f = \left( A \cdot \frac{k_s}{D} \right)^{1/M} \quad (2.19)$$

avec les coefficients  $A$  et  $M$  à déterminer. L'égalité des équations (2.15) et (2.19) permet d'écrire :

$$-2 \log \left( \frac{k_s}{3.7 \cdot D} \right) = \frac{1}{\left( A \frac{k_s}{D} \right)^{1/2M}} \quad (2.20)$$

Afin que l'équation (2.19) puisse être valablement substituée à l'équation (2.15), il faut non seulement qu'elle donne la même valeur de  $f$ , mais aussi que la dérivée de  $f$  par rapport à  $k_s/D$  soit respectée. Ainsi, la relation (2.20) et sa dérivée fournissent les 2 équations nécessaires à la détermination des coefficients  $A$  et  $M$  de (2.19) qui valent, tout calcul effectué

$$A = \frac{D}{k_s} \left[ -2 \log \left( \frac{k_s}{3.7D} \right) \right]^{-\ln(10) \log \left( \frac{3.7D}{k_s} \right)} \quad (2.21)$$

$$M = \frac{\ln(10)}{2} \log \left( \frac{3.7D}{k_s} \right) \quad (2.22)$$

Alors, l'équation (2.18) s'écrit, en introduisant (2.20):

$$\alpha \cdot J_f^{1/2} \cdot D^\chi = \frac{\sqrt{2gJ_f} \sqrt{D}}{\left(A \cdot \frac{k_s}{D}\right)^{1/2M}} = \frac{\sqrt{2g}}{(A \cdot k_s)^{1/2M}} J_f^{1/2} D^{1/2+1/2M} \quad (2.23)$$

La comparaison des différents termes qui apparaissent dans chaque membre de l'équation (2.23) montre que l'exposant 1/2 de la pente de frottement  $J_f$  est identique dans les deux membres. Par contre, pour que l'exposant de  $D$  soit égal, il faut que

$$\chi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2M} \quad (2.24)$$

Développons plus en détail le cas de la formule de Strickler qui préconise l'usage de  $\chi = 2/3$  et qui s'écrit, dans le cas d'une section circulaire :

$$V = \frac{K}{4^{2/3}} J_f^{1/2} D^{2/3} \quad (2.25)$$

Dans ce cas, l'équation (2.24) n'est satisfaite que si  $M = 3$ . Selon l'équation (2.22), la relation de Strickler n'est donc valable que pour :

$$\frac{k_s}{D} = 9.17 \cdot 10^{-3} \quad (2.26)$$

ce qui correspond à  $A = 5.442 \cdot 10^{-3}$  selon (18) et  $f = 3.68 \cdot 10^{-2}$  selon (2.16).

La figure 2.2 représente la relation (2.15) entre le coefficient de frottement  $f$  et la rugosité relative  $k_s/D$  en écoulement turbulent rugueux, et l'équation (2.19) calée avec les coefficients  $A = 5.442 \cdot 10^{-3}$  et  $M = 3$ , correspondant à l'équation de Strickler.

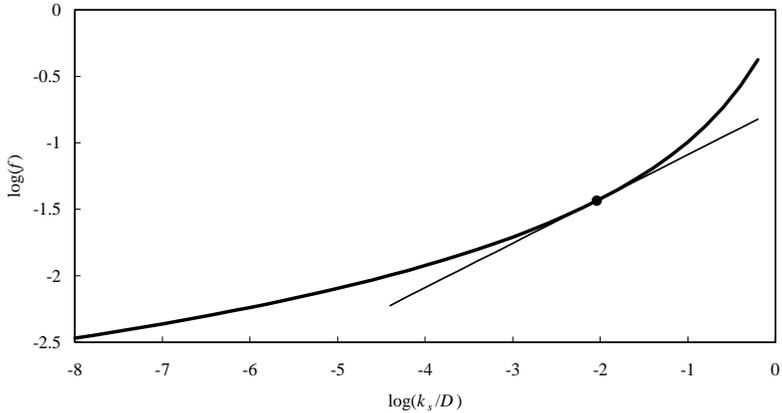


Figure 2.2 : Coefficient de frottement  $f$  en fonction de la rugosité relative  $k_s/D$  en écoulement turbulent rugueux. Comparaison entre les équations de Nikuradse (2.15) et (2.19) calée sur Strickler.

Avec la valeur des paramètres  $A$  et  $M$  définis ci-dessus, le coefficient de Strickler devient, d'après (2.23):

$$K = 4^{2/3} \frac{\sqrt{2g}}{(A \cdot k_s)^{1/6}} = \frac{26.61}{k_s^{1/6}} \quad (2.27)$$

Finalement, il est possible de représenter dans le diagramme de Moody (figure 2.3) la région décrite correctement par la relation de Strickler.

La formule de Strickler n'est donc strictement identique à la théorie « moderne » (2.12) et (2.13) que pour un écoulement turbulent rugueux et pour une valeur unique de  $k_s/D = 9.17 \cdot 10^{-3}$ . Pour  $9 \cdot 10^{-4} \leq k_s/D \leq 5 \cdot 10^{-2}$ , l'erreur sur  $J_f$  calculé selon Strickler reste inférieure à 5%.

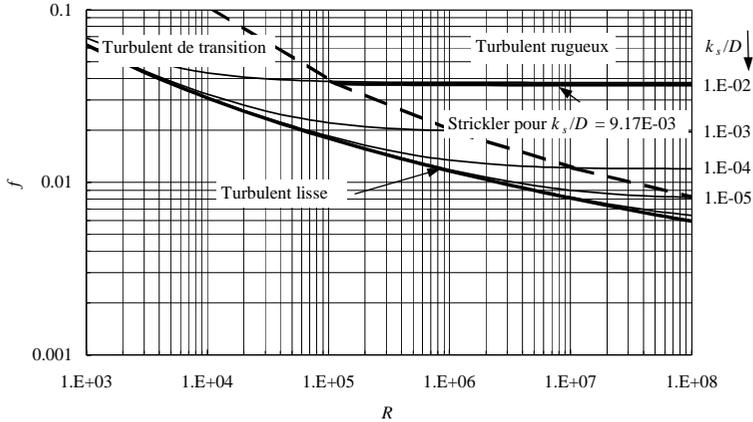


Figure 2.3 : Diagramme de Moody. Le trait horizontal épais représente le domaine correctement calculé par l'équation de Strickler avec le coefficient  $K$  correspondant à l'équation (2.27)

D'une manière générale, les équations (2.24) et (2.22) montrent que la valeur de la puissance  $\chi$  des formules empiriques ne dépend que de la rugosité relative  $k_s/D$  et que celle-ci varie donc en fonction du diamètre  $D$ , ou plus généralement de la hauteur d'eau pour les écoulements à nappe libre, comme le montre la figure 2.4.

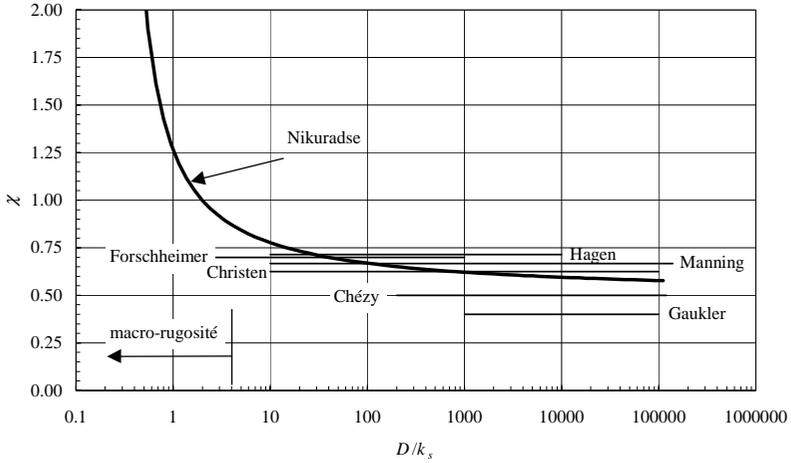


Figure 2.4 : Variation de la puissance  $\chi$  des diverses formules empiriques d'après la relation de Nikuradse.

Lorsque la rugosité devient infiniment petite, le coefficient  $M$  tend vers l'infini et la puissance  $\chi$  vers  $\frac{1}{2}$ . Il semblerait ainsi que la valeur asymptotique de cette puissance prenne la valeur proposée par Chézy dans le cas d'un écoulement turbulent lisse. Il ne faut toutefois pas perdre de vue que cette comparaison n'est valable que pour les écoulements turbulents rugueux. La valeur  $\frac{1}{2}$  de Chézy est donc à considérer comme une borne inférieure.

La figure 2.4 représente également les valeurs constantes de  $\chi$  proposées par différents auteurs. L'intersection entre ces horizontales et la courbe obtenue à partir de la formule de Nikuradse délimite un domaine  $D/k_s$  compris entre 20 et 1000 environ. Ceci montre bien que ces formules empiriques ont été calées à partir de mesures effectuées dans des rivières et des canaux dans lesquels, pour des conditions habituelles, le rapport entre la hauteur d'eau ou le rayon hydraulique et la taille des aspérités varie dans ces mêmes proportions.

Le coefficient de rugosité généralisé  $\alpha$  apparaissant dans l'équation (2.17) s'écrit selon (2.23) :

$$\alpha = \frac{\sqrt{2g}}{(Ak_s)^{1/2M}} \quad (2.28)$$

La présence dans cette expression des coefficients  $A$  et  $M$  dépendant de la rugosité relative  $k_s/D$  montrent bien que  $\alpha$  ne dépend pas uniquement de  $k_s$ , mais aussi de  $D$ .

S'il est vrai que les formules empiriques donnent des résultats suffisamment précis dans le domaine usuel de l'hydraulique fluviale, il n'en va pas de même pour le ruissellement de surface. En effet, la figure 2.3 indique une grande variation de la puissance  $\chi$  pour le domaine de la macro-rugosité dans lequel, rappelons le,  $D/k_s < 4$ .

Ainsi, seule une formule avec exposant et coefficient de rugosité variables en fonction de la hauteur d'eau, serait peut-être à même de décrire le comportement du ruissellement. Il va sans dire que si tout varie dans une formule, celle-ci perd de son intérêt.

### 2.1.3. Conclusions

L'analyse de la littérature montre qu'un important effort de recherche est encore à fournir pour autoriser un calcul fiable des pertes de charge du ruissellement. L'intérêt des hydrauliciens ne s'est pas souvent porté sur ce phénomène. Néanmoins, les travaux effectués indiquent une voie potentielle pour atteindre cet objectif.

Dans le cas d'un écoulement laminaire, seule une modélisation de la surface avec prise en compte des aspérités peut expliquer les résultats des mesures effectuées (Woolhiser 1975). De cette manière, il semble envisageable de concilier théorie et expérience, ce qui est loin d'être le cas actuellement.

En écoulement turbulent, il semble que les bien aimées formules empiriques, comme celle de Strickler, ne sont pas aptes à décrire le comportement de la lame d'eau ruisselante. Il convient sans doute

de se tourner vers les formules « modernes », liant le coefficient de frottement  $f$  à la rugosité relative  $k_s/h$ . La formule de Nikuradse et celle de Bathurst pour les écoulements sur macro-rugosité possèdent des caractéristiques prometteuses pour notre domaine d'intérêt.

Une seule méthode de travail s'impose désormais pour la suite de la recherche : l'expérimentation physique. Ce moyen devrait permettre de valider, rejeter ou adapter les approches existantes. Mais, comme justifié plus haut, l'étude expérimentale ne peut être menée que sur un modèle de la surface du sol.

La démarche choisie pour cette étude est comparable à celle de Nikuradze pour les pertes de charges dans les canalisations. Il s'agit en premier lieu de comprendre les phénomènes physiques rencontrés à l'aide d'un modèle représentant simplement la réalité du problème. Ce modèle en calottes, présenté au paragraphe suivant, considère une surface recouverte de calottes de dimensions constantes. Les essais de laboratoire doivent permettre de mettre en évidence la relation liant la vitesse moyenne de l'écoulement aux différents paramètres, comme la hauteur d'eau ou la pente pour ne citer que les plus importants.

Deux installations d'essais ont été réalisées dans ce but. La première permet l'étude des écoulement stationnaires et uniformes, tandis que la deuxième produit des écoulements non-stationnaires et non-uniformes sous un simulateur de pluie.

## **2.2. Le modèle en calottes**

### *2.2.1. Description géométrique*

Le modèle en calottes considère une plaque lisse et imperméable recouverte de calottes sphériques toutes identiques de diamètre  $2D$ . L'arrangement des calottes se fait de manière géométrique. Les calottes sont réparties sur des lignes horizontales perpendiculaires

au sens d'écoulement. Dans la configuration de densité maximale, toutes les calottes se touchent, les lignes successives étant décalées horizontalement d'un demi diamètre. Les centres des calottes sont ainsi disposés sur des triangles équilatéraux de côté  $2D$ .

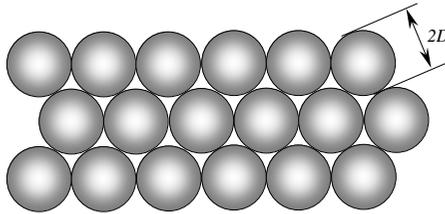


Figure 2.5 : Disposition géométrique des calottes de densité maximale

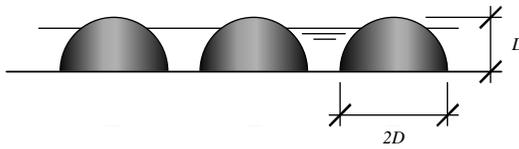


Figure 2.6 : Représentation schématisée d'une section de contrôle dans un milieu en calottes et définition du « diamètre »  $D$ .

Pour un cas général, la relation entre le nombre de calottes  $n$  par unité de surface  $A$  et la densité de couverture  $\rho$  s'écrit :

$$\rho = \frac{nA_b}{A} \quad (2.29)$$

où  $A_b$  est la surface projetée d'une calotte qui s'exprime en fonction de  $D$  par :

$$A_b = \pi D^2 \quad (2.30)$$

La relation (2.28) devient alors :

$$\rho = \frac{\pi n D^2}{A} \quad (2.31)$$

La densité maximale de couverture  $\rho_{max}$  s'obtient par le rapport entre la surface du triangle équilatéral de côté  $2D$  et la moitié de  $A_b$  :

$$\rho_{max} = \frac{\frac{\pi D^2}{2}}{\sqrt{3} D^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0.9069 \quad (2.32)$$

### 2.2.2. Paramètres hydrauliques

L'originalité du milieu en calottes nécessite une nouvelle définition des principaux paramètres utilisés en hydraulique. Vu son caractère très hétérogène et fortement non-prismatique à micro-échelle, il devient indispensable de travailler sur des valeurs moyennes de hauteur d'eau et de vitesse par exemple. Le volume d'eau réellement contenu sur une surface élémentaire doit être connu afin de respecter l'équation de continuité. De plus, la définition de la surface et du périmètre mouillés d'une section représentative constitue une étape indispensable à l'obtention de l'expression du rayon hydraulique du milieu en calottes .

Le volume d'eau  $\forall$  contenu dans ce milieu pour une hauteur d'eau moyenne  $h$  peut être défini par analyse géométrique. Soit  $\forall_t$  le volume total, sans considérer le volume occupé par les calottes, qui correspond à la définition traditionnelle du volume d'eau sur un plan. Il se calcule simplement par :

$$\forall_t = Ah \quad (2.33)$$

Le volume de la calotte sphérique immergée  $\forall_c$  vaut, pour une hauteur d'eau  $h$  inférieure au diamètre  $D$  :

$$\forall_c = \pi h D^2 \left( 1 - \frac{h^2}{3D^2} \right) \quad (2.34)$$

Le volume  $\nabla$  réellement occupé par l'eau s'obtient alors par la relation :

$$\nabla = \nabla_t - n\nabla_c = Ah \left[ 1 - \rho + \frac{\rho h^2}{3D^2} \right] \quad (2.35)$$

Définissons un coefficient de porosité du milieu  $\phi$  par l'expression :

$$\phi = \frac{\nabla}{\nabla_t} \quad (2.36)$$

Ainsi, pour les hauteurs d'eau inférieures au diamètre de la bille, la porosité volumique  $\phi$  pour le milieu en calottes s'écrit

$$\phi = 1 - \rho + \frac{\rho h^2}{3D^2} \quad (2.37)$$

Pour une hauteur d'eau supérieure au diamètre  $D$  et selon la même démarche, le coefficient  $\phi$  vaut :

$$\phi = 1 - \frac{2\rho D}{3h} \quad (2.38)$$

Avec ces définitions, l'équation (2.35) s'écrit simplement :

$$\nabla = \phi Ah \quad (2.39)$$

Cette relation montre que le volume d'eau contenu sur un plan recouvert de calottes n'est qu'une fraction du volume de la lame d'eau généralement considérée pour les écoulements sur plan. Le coefficient  $\phi$  est toujours inférieur à l'unité. La figure 2.6 présente la relation  $\phi - h/D$  pour différentes densités de couverture  $\rho$ .

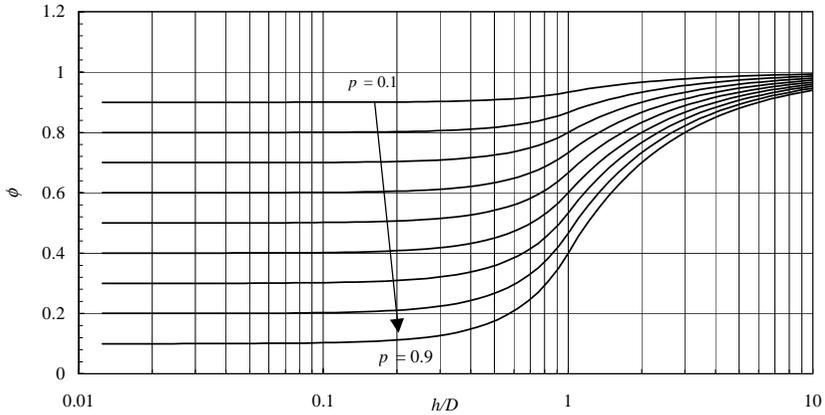


Figure 2.6 : Relation  $\phi - h/D$  pour différentes densités de couverture  $p$ .

Dans ce milieu en calottes, la surface mouillée  $A_m$ , le périmètre mouillé  $P$  et ainsi le rayon hydraulique  $R_h$  varient constamment d'une section à l'autre. Définissons alors une fonction géométrique,  $\eta(x, h)$ , exprimant le rapport entre la section mouillée  $A_m(x, h)$  et la surface totale  $A_{tot} = Bh$ , où  $B$  est la largeur du plan :

$$\eta(x, h) = \frac{A_m(x, h)}{A_{tot}} \quad (2.40)$$

Pour des raisons de continuité, la fonction,  $\eta(x, h)$  est liée à la porosité volumique  $\phi$  par la relation :

$$\phi(h) = \frac{1}{L_0} \int_0^{L_0} \eta(x, h) dx \quad (2.41)$$

L'équation (2.41) indique que la porosité volumique  $\phi$  est la moyenne, sur la longueur du plan  $L_0$ , de la porosité de section  $\eta(x)$ .

Les écoulements hydrauliques dépendent souvent des sections les plus « étroites », qui pourraient être désignées par l'appellation « sections de contrôle », bien qu'il n'est pas certain que la hauteur

critique s'y établisse. Ces sections de contrôles sont localisées là où la fonction  $\eta(x)$  présente ses minimums. Désignons simplement par  $\eta$  le minimum de la fonction  $\eta(x)$  pour la suite du développement.

Pour le milieu en calottes, il est évident que ces sections de contrôle coïncident avec les plans passant par le centre de gravité des calottes. Elles ont l'aspect montré à la figure 2.6.

L'équation (2.31) permet le calcul du nombre  $n$  de calottes par unité de surface :

$$n = \frac{\rho}{\pi D^2} \quad (2.42)$$

Les centres des calottes sont disposés selon la perpendiculaire à l'écoulement sur des points distants de  $2D$ . Selon la ligne de plus grande pente, par contre, chaque rangée est séparée par une distance  $d$  qui vaut :

$$d = 2D \cos 30^\circ = \sqrt{3}D \quad (2.43)$$

Le nombre de calottes  $n^*$  dans une section de largeur unitaire vaut alors :

$$n^* = \sqrt{n \frac{d}{D}} = \sqrt{\frac{\rho}{\pi D^2} \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2D} \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\pi}} \rho \quad (2.44)$$

Le coefficient numérique apparaissant sous la racine n'est autre que  $\rho_{\max}$  défini par l'équation (2.32), ce qui permet de simplifier l'équation (2.44) :

$$n^* = \frac{1}{2D} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{\max}}} \quad (2.45)$$

La porosité de section  $\eta$  s'écrit d'une manière générale sous la forme :

$$\eta = \frac{A_m}{h} = \frac{h - n^* A_r}{h} = 1 - \frac{n^* A_r}{h} \quad (2.46)$$

où  $A_r$  est la surface du segment circulaire de hauteur  $h$ . Lorsque la hauteur d'eau est inférieure à la hauteur  $D$  de la calotte, cette surface s'écrit :

$$A_r = \frac{D^2}{8}(\theta - \sin\theta - \pi) \quad (2.47)$$

L'angle  $\theta$ , se calcule par :

$$\cos \frac{\theta}{2} = -\frac{h}{D} \quad (2.48)$$

Lorsque la hauteur d'eau est inférieure au diamètre des calottes, le coefficient  $\eta$  s'écrit finalement sous la forme :

$$\eta = 1 - \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{\max}}} \frac{D}{4h} (\theta - \sin\theta - \pi) \quad (2.49)$$

Si la hauteur d'eau est supérieure au diamètre, alors :

$$\eta = 1 - \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{\max}}} \frac{\pi D}{4h} \quad (2.50)$$

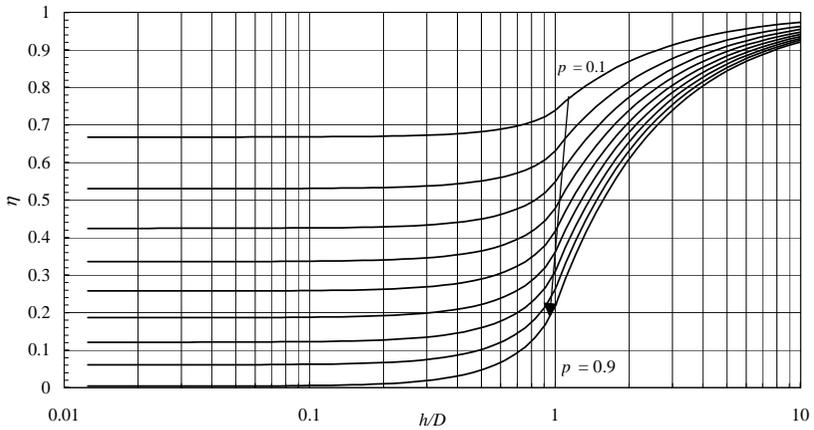


Figure 2.9 : Relation  $\eta - h/D$  pour différentes densités de couvertures  $\rho$ .

Par définition, la section mouillée s'écrit :

$$A_m = \eta Bh \quad (2.51)$$

où  $B$  est la largeur du plan. Il ressort de cette dernière équation que la surface mouillée de l'écoulement dans un milieu en calottes est une fraction de la surface mouillée habituelle des écoulements sur plan calculée par le produit de la largeur d'écoulement et de la hauteur d'eau. Le coefficient de porosité de section  $\eta$  détermine cette fraction.

Définissons finalement un troisième coefficient géométrique  $\Omega$  par le rapport entre le périmètre mouillé  $P$  de la section de contrôle et sa largeur  $B$  :

$$\Omega = \frac{P}{B} \quad (2.52)$$

Le périmètre mouillé s'obtient par sommation des distances séparant chaque calottes sur le plan et du périmètre des calottes. Par des considérations purement géométriques, il peut être démontré que :

$$\Omega = 1 + \sqrt{\frac{p}{\rho_{\max}}} \frac{\theta - \pi - 2}{2} \quad (2.53)$$

pour  $h < D$  et :

$$\Omega = 1 + \sqrt{\frac{p}{\rho_{\max}}} \frac{\pi - 2}{2} \quad (2.54)$$

pour  $h \geq D$ . La relation  $\Omega-h/D$  est représentée graphiquement à la figure 2.10.

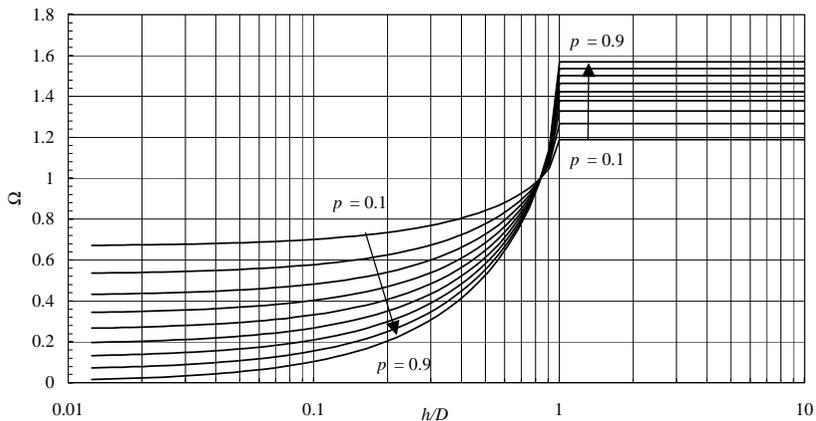


Figure 2.10 : Relation  $\Omega-h/D$  pour différentes densités de couverture  $p$ .

Enfin, le rayon hydraulique  $R_h$  se définit d'une manière classique par :

$$R_h = \frac{A_m}{P} \quad (2.55)$$

A l'aide des définitions des coefficients  $\eta$  et  $\Omega$ , l'équation (2.55) devient :

$$R_h = \frac{\eta}{\Omega} h \quad (2.56)$$

Ainsi, la hauteur d'eau  $h$  doit être multipliée par le rapport  $\eta/\Omega$  pour obtenir le rayon hydraulique  $R_h$  du milieu en calottes. Ce rapport est représenté graphiquement à la figure 11 en fonction de  $h/D$ .

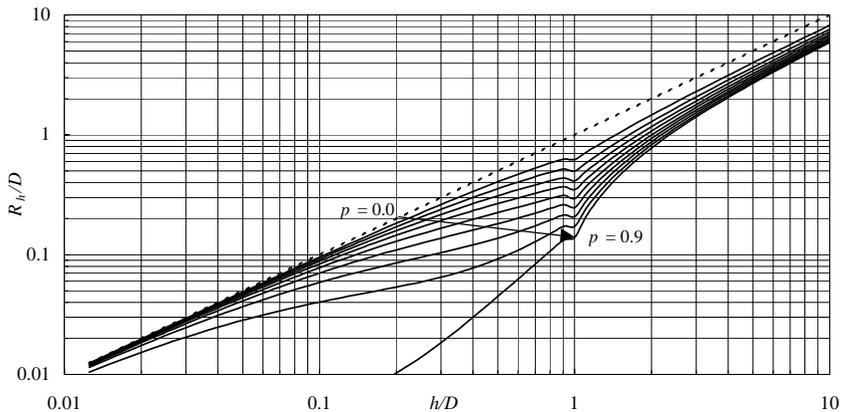


Figure 2.11 : Relation  $\eta/\Omega$ - $h/D$  pour différentes densités de couverture  $p$ .

La géométrie du milieu en calottes n'a ainsi plus de secret. La phase expérimentale peut débuter sur de bonnes bases.

### 2.3. Essais en écoulements stationnaires et uniformes

Le modèle en calottes, tel que décrit au chapitre précédent, doit servir de base géométrique à l'élaboration d'une nouvelle loi de comportement censée décrire le ruissellement de surface. Ce modèle, très simple en comparaison de la complexité de la surface d'un terrain naturel, ne saurait toutefois prétendre à une représentation parfaite de la réalité. Il s'agit bien d'une approche conceptuelle comparable à celle de Nikuradse collant des grains de sable de diamètre uniforme à l'intérieur de canalisations pour modéliser la rugosité naturelle des tuyaux. Une approche directe de l'étude du ruissellement sur un sol quelconque ne peut être que

vouée à l'échec si elle ne peut s'appuyer sur l'étude fondamentale d'un modèle géométrique plus simple, comme celui en calottes. La représentativité de ce modèle devra ensuite être confirmée par des essais ou des simulations numériques sur des terrains naturels.

Une étude expérimentale semble indispensable à l'établissement des tendances comportementales d'un écoulement en lame mince dans et sur une macro-rugosité. Par tendance comportementale, il faut entendre l'établissement d'une loi liant la hauteur d'eau à la vitesse de l'écoulement, ceci dans le cas simple d'un écoulement uniforme et stationnaire. L'installation réalisée dans ce but ainsi que son système de mesure est décrite en détail dans Dubois (1998).

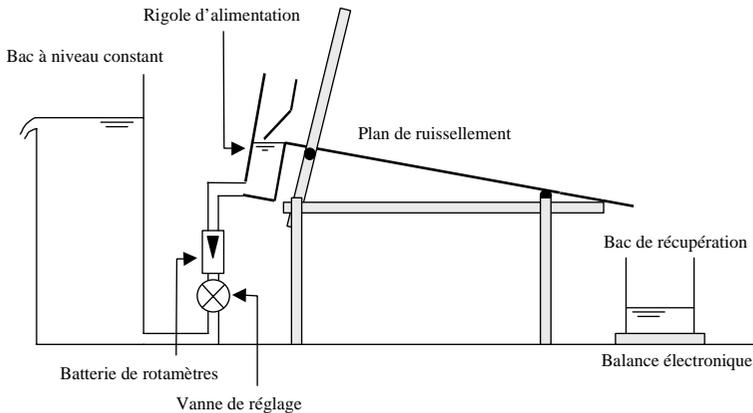


Figure 2.12 : Représentation schématique de l'installation d'essais.

### 2.3.1. Résultats bruts

Afin de se soustraire à l'influence de la pente qui varie entre les différents essais, il est indispensable de l'inclure dans une représentation graphique de la vitesse. Si l'écoulement est laminaire, alors la vitesse est directement proportionnelle à la pente. Par contre, si l'écoulement est turbulent, la relation de Darcy-Weisbach ou la formule empirique généralisée montrent que la vitesse est proportionnelle à la racine de la pente.

La figure 2.13 représente la relation mesurée entre le rapport  $V/J_0$  et la hauteur d'eau adimensionnelle  $h/D$ , alors que la figure 2.14 montre les mêmes mesures, mais avec la vitesse divisées par la racine de la pente.

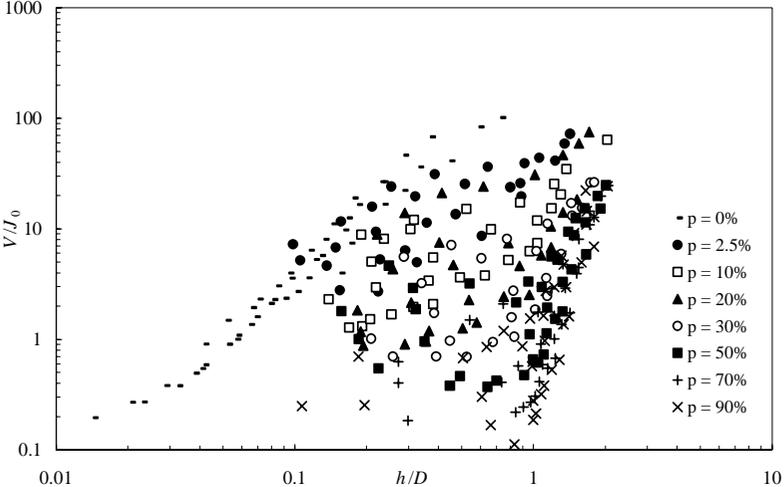


Figure 2.13 : Relation entre le rapport  $V/J_0$  et la hauteur d'eau adimensionnelle  $h/D$ .

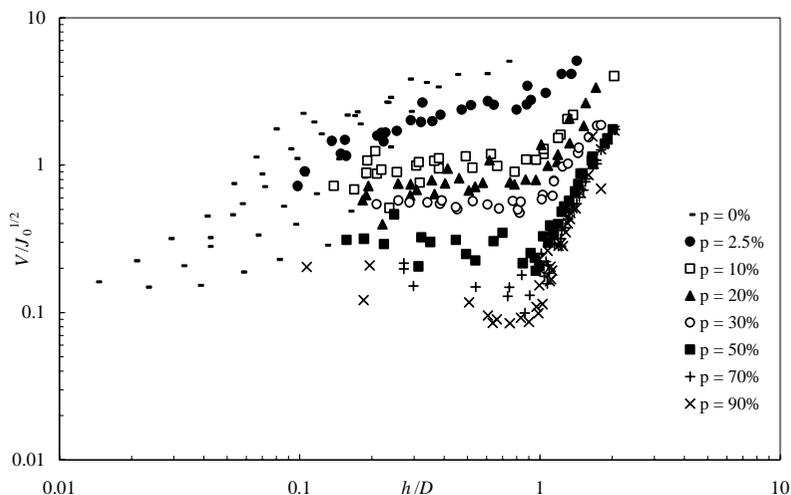


Figure 2.14 : Relation entre le rapport  $V/J_0^{1/2}$  et la hauteur d'eau adimensionnelle  $h/D$ .

Ces deux graphiques sont en doubles échelles logarithmique car si la théorie des écoulements laminaires sur plan se vérifie, les points devraient être alignés sur une droite dans la figure 2.13. Par contre, si les formules empiriques sous forme de puissance s'avèrent correctes, les points devraient s'aligner sur une droite à la figure 2.14.

Qu'en est-il du laminaire ? Les mesures effectuées sur le plan lisse, où  $p = 0$ , s'alignent approximativement selon une droite, particulièrement pour les faibles hauteurs d'eau et les faibles vitesses. Cela n'a rien d'étonnant car dans ces situations, l'écoulement est réellement laminaire et la théorie est confirmée par l'expérience. Le « bruit » constaté sur ces valeurs s'explique en partie par le fait que l'écoulement sur le plan lisse était souvent instable. Ces instabilités de l'écoulement uniforme, appelées ondes en cascades (Graf 1993) ou *roll waves* en anglais, apparaissent dès que le nombre de Froude dépasse  $\frac{1}{2}$  environ et engendrent une dissipation d'énergie supplémentaire dans l'écoulement. Par contre, pour les essais effectués en présence de calottes, l'aspect nébuleux

des points de mesures contredit fortement la théorie de l'écoulement laminaire sur plan.

La situation semble s'améliorer dans la figure 2.14 où, rappelons-le, les points devraient s'aligner sur des droites si l'écoulement est turbulent. Les résultats d'essais sur plan lisse présentent cette fois une forte dispersion, car ils correspondent au régime laminaire, comme expliqué plus haut. Par contre, une certaine continuité apparaît sur les familles de points attachées aux différentes densités de couverture  $p$  testées. Pour  $p = 2.5\%$ , les points s'alignent relativement bien sur une droite. Mais au fur et à mesure que la densité  $p$  augmente, les tendances s'incurvent vers le bas et révèlent des comportements tout à fait originaux pour des écoulements à nappe libre.

Le fait de constater une diminution de la vitesse lorsque le nombre d'éléments de rugosité augmente n'est pas surprenant. Par contre, l'ampleur de cette diminution l'est beaucoup plus. En effet, il ne s'agit pas de quelques pour-cent, mais bien de facteurs allant jusqu'à 50 entre les vitesses mesurées pour  $p = 2.5\%$  et celles pour  $p = 90\%$ , ceci pour les hauteurs d'eau correspondant environ à la hauteur des aspérités.

Un autre phénomène est également surprenant : celui de la constance de la vitesse en fonction de la hauteur d'eau. Pire encore, pour les densités  $p$  supérieures à 50%, il apparaît que la vitesse diminue lorsque la hauteur d'eau augmente. Cette originalité, pour ne pas parler d'extravagance, n'est décrite par aucune loi de l'hydraulique fluviale. Elle se produit pour les hauteurs d'eau inférieures à celle des aspérités. Lorsque l'écoulement submerge ces dernières, il a comme l'envie de rattraper son retard et l'augmentation de la vitesse en fonction de la hauteur d'eau est spectaculaire.

Si la relation de Strickler est supposée valable, alors les points devraient s'aligner sur une droite de pente 2/3. Une puissance calée sur la famille des points  $p = 2.5\%$  est proportionnelle à  $h^{0.533}$ , valeur

proche de la proposition de Strickler. Par contre, le même exercice effectué sur les points de la famille  $p = 90\%$  avec  $h/D > 1$ , abouti à un résultat du type  $h^{3.81}$ . Et il va sans dire que la zone où la vitesse est indépendante de la hauteur d'eau est décrite par  $h^{0.0}$ . Les essais confirment donc les craintes déjà exprimées concernant la possibilité d'utiliser une formule empirique, comme celle de Strickler, pour le calcul des pertes de charge des écoulements en lame mince sur macro-rugosité.

### 2.3.2. Nouvelle formulation

Le constat établi au chapitre précédent n'est guère encourageant. Sur une même relation hauteur-vitesse se distinguent simultanément des comportements laminaires, parfois une indépendance de la vitesse par rapport à la hauteur d'eau, signe apparent d'un écoulement en milieu poreux et de très brusques augmentations de la vitesse lorsque l'écoulement submerge les aspérités. Les phénomènes physiques susceptibles de se développer, dans les écoulements de surface sont donc extrêmement variés et habituellement décrits par des lois de comportement fort différentes.

Cependant, une relation semble posséder à la fois les qualités de simplicité et de fiabilité souhaitées : la loi généralisée des écoulements laminaires et turbulents en milieu poreux (Li et al. 1998). Cette loi, découlant d'une analogie entre milieu poreux et réseau de tuyaux en charge, propose le calcul du coefficient de frottement  $f$  sous la forme suivante :

$$f = \frac{a_1}{R} + a_2 \quad (2.57)$$

avec  $a_1$  et  $a_2$ , 2 coefficients.

La relation entre la vitesse moyenne (vitesse de Darcy) et le rayon hydraulique peut alors être mise sous la forme polynomiale suivante :

$$i = \frac{a_1 \nu}{8gR_h^2 n} V + \frac{a_2}{8gR_h n^2} V^2 \quad (2.58)$$

où  $n$  est la porosité du milieu et  $i$  le gradient hydraulique.

Cette approche est centrée sur les écoulements en milieu poreux homogène, dans lequel la porosité  $n$  et le rayon hydraulique  $R_h$  restent constant. Dans ce cas, la vitesse est indépendante de la hauteur d'eau et ne varie que par la gradient  $i$ . Adaptons la aux écoulements dans le milieu en calottes en remplaçant le rayon hydraulique  $R_h$  par son expression  $h \cdot \eta / \Omega$  et la porosité du milieu poreux  $n$  par la porosité de section du milieu en calottes  $\eta$ . La relation (2.58) devient alors :

$$J_0 = \frac{a_1 \nu \Omega^2}{8g\eta^3 h^2} V + \frac{a_2 \Omega}{8g\eta^3 h} V^2 \quad (2.59)$$

Lorsque la vitesse est faible, le terme en  $V^2$  devient négligeable par rapport au terme en  $V$  et cette relation se réduit à :

$$J_0 = \frac{a_1 \nu \Omega^2}{8g\eta^3 h^2} V \quad (2.60)$$

En réarrangeant les termes de l'équation (9), elle peut se mettre sous la forme plus courante :

$$V = \frac{8gJ_0 \eta^3}{a_1 \nu \Omega^2} h^2 \quad (2.61)$$

Cette formulation est identique à l'expression théorique obtenue pour un écoulement laminaire sur plan à condition de remplacer le coefficient  $\kappa$  par :

$$\kappa = a_1 \frac{\Omega^2}{\eta^3} \quad (2.62)$$

Pour être en accord avec la théorie générale des écoulements laminaires (Dubois 1998), il est judicieux de remplacer l'expression (2.62) par l'équation :

$$\kappa = 6 \left( 3 + \frac{\Omega^2}{\eta^3} \right) \quad (2.63)$$

Lorsque la hauteur d'eau  $h$  ou la densité de couverture  $p$  tendent vers 0, les coefficients  $\Omega$  et  $\eta$  tendent tous les deux vers 1 et ainsi, le coefficient  $\kappa$  tend bien vers 24, ce qui correspond à la solution théorique pour un écoulement laminaire sur plan lisse. Le terme laminaire de (2.60) prend donc la forme :

$$J_0 = \frac{3 \left( 3 + \frac{\Omega^2}{\eta^3} \right) \nu}{4gh^2} V^2 \quad (2.64)$$

A l'inverse, lorsque la vitesse est grande, le terme en  $V^2$  domine et l'équation (2.60) tend vers :

$$J_0 = \frac{a_2 \Omega}{8g\eta^3 h} V^2 \quad (2.65)$$

En posant :

$$C = \sqrt{\frac{8g\eta^3}{a_2 \Omega}} \quad (2.66)$$

la relation (2.66) est identique à la formule de Chézy proposée pour les écoulements turbulents. La formule (2.59) est donc capable de décrire à la fois le comportement des écoulements laminaires et turbulents, avec une transition entre ces deux types assurée par la forme polynomiale.

Au vu des représentations graphiques des relations hauteur-vitesse obtenues dans le milieu en calottes, il serait fort étonnant que cette loi soit encore capable de modéliser correctement le comportement

du ruissellement pour des hauteurs d'eau dépassant le diamètre des calottes. Limitons donc son usage au seul domaine des écoulements entièrement contenus à l'intérieur des calottes.

Reste alors à déterminer la valeur du coefficient  $a_2$  qui, au vu de la formule (2.57), est la valeur asymptotique prise par le coefficient de frottement  $f$  lorsque le nombre de Reynolds augmente. Il est certain que cette valeur doit dépendre de la densité de couverture  $p$ . Par optimisation numérique sur l'ensemble des essais pour lesquels la hauteur d'eau ne dépasse pas le sommet des calottes, il a été trouvé :

$$a_2 = 0.345p^{0.545} \quad (2.67)$$

En résumé, la nouvelle formulation liant la hauteur d'eau à la vitesse moyenne de l'écoulement s'écrit, pour des hauteurs d'eau inférieures à la hauteur  $D$  des calottes :

$$J_0 = \frac{3 \left( 3 + \frac{\Omega^2}{\eta^3} \right) \nu}{4gh^2} V + \frac{0.345p^{0.545}\Omega}{8g\eta^3 h} V^2 \quad h < D \quad (2.68)$$

Ainsi, connaissant la hauteur d'eau  $h$  de l'écoulement et en définissant :

$$A = \frac{0.345p^{0.545}\Omega}{8g\eta^3 h} \quad (2.69)$$

$$B = \frac{3 \left( 3 + \frac{\Omega^2}{\eta^3} \right) \nu}{4gh^2} \quad (2.70)$$

$$C = -J_0 \quad (2.71)$$

la vitesse moyenne de l'écoulement s'obtient simplement par :

$$V = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad h < D \quad (2.72)$$

Occupons-nous à présent des écoulements qui submergent les calottes. Ce cas correspond bien à un écoulement sur macro-rugosité, domaine dans lequel la formule de Bathurst semble s'être imposée :

$$\sqrt{\frac{8}{f}} = 5.62 \log \left( \frac{h^*}{d_{84}} \right) + 4 \quad (2.73)$$

où  $d_{84}$  est le diamètre considéré des éléments de rugosité et  $h^*$  la hauteur d'eau. D'une manière générale, cette équation est de la forme :

$$\sqrt{\frac{8}{f}} = c \log \left( \frac{h^*}{d_{84}} \right) + e \quad (2.74)$$

avec  $c$  et  $e$  deux coefficients à déterminer.

Le symbole  $^*$  associé à la hauteur d'eau signifie que cette dernière n'a pas son origine à la surface du plan, comme cela est considéré dans le modèle en calottes. La littérature spécialisée a été très prolifique quant à la détermination de l'origine des hauteurs d'eau sur des parois rugueuses. Evitons ce débat en choisissant une approche compatible avec les développements précédents.

Un critère permettant de définir l'origine de ce nouveau repère est imposé par la continuité des vitesses calculées lorsque la hauteur d'eau égale le diamètre des calottes. Désignons par  $V_0$  la vitesse calculée par la relation (2.59) pour  $h = D$ . Par l'équation (2.74) et avec  $h^* = \Delta h$ , cette même vitesse s'exprime par

$$V_s = \sqrt{\frac{8gJ_0}{f} \Delta h^{1/2}} \quad (2.75)$$

avec  $f$  exprimé par :

$$f = \frac{8}{\left( c \log \frac{\Delta h}{D} + e \right)^2} \quad (2.76)$$

La continuité de la relation hauteur-vitesse fourni la condition nécessaire à la détermination de la nouvelle origine des hauteurs, localisée par  $\Delta h$  :

$$V_s = V_0 \quad (2.77)$$

soit :

$$\sqrt{gJ_0} \left( c \log \frac{\Delta h}{D} + e \right) \Delta h^{1/2} = V_0 \quad (2.78)$$

La présence simultanée du logarithme et de la puissance de  $\Delta h$  exige une résolution itérative pour trouver l'inconnue  $\Delta h$ .

Lorsque la hauteur d'eau est supérieure au diamètre des calottes, la vitesse moyenne de l'écoulement s'obtient en sommant le débit « interne » et le débit « supérieur » indicé s, et en divisant cette valeur par la hauteur moyenne :

$$Q = V_0 D + V_s (h^* - \Delta h) = V_0 D + V_s (h - D) \quad (2.79)$$

$$V = \frac{Q}{h} = V_0 \frac{D}{h} + V_s \left( 1 - \frac{D}{h} \right) \quad (2.80)$$

Ainsi, sous sa forme complète, la vitesse moyenne d'un écoulement submergeant les calottes s'écrit :

$$V = V_0 \frac{D}{h} + \sqrt{\frac{8gJ_0}{f}} (h - D + \Delta h)^{1/2} \left( 1 - \frac{D}{h} \right) \quad (2.81)$$

où  $\Delta h$  est défini par l'équation (2.78) et  $f$  par l'équation générale (2.76).

Reste encore à exprimer les coefficients  $c$  et  $e$  apparaissant dans l'équation (2.76) pour permettre le calcul du coefficient de frottement

$f$  . Pour cela, une optimisation numérique a été effectuée sur l'ensemble des essais avec la méthode des moindres carrés. Il a été constaté alors que le coefficient  $c$  représentant la pente de la relation entre  $f$  et  $h/D$ , montre une grande variabilité et que pour des valeurs de  $c$  fort différentes, le calage présentait quasiment la même qualité. Ce fait est certainement dû à la faible amplitude de variation du rapport  $h/D$  qui a pu être réalisée sur le banc d'essais.

Dans ces conditions, il a été choisi de faire confiance à la valeur originale du coefficient  $c$  tel que proposé par Bathurst et qui peut se justifier par des considérations théoriques, à savoir :

$$c = 5.62 \quad (2.82)$$

Par contre, le terme constant  $e$  subit une grande influence de la densité de couverture  $p$ . Le calage permet de proposer :

$$e = 3.13p^{-0.613} \quad (2.83)$$

Ainsi, la loi de frottement pour un écoulement sur macro-rugosité composée par le milieu en calottes s'écrit :

$$\sqrt{\frac{8}{f}} = 5.62 \log \frac{h^*}{D} + 3.13p^{-0.613} \quad (2.84)$$

Par souci de synthèse, présentons la nouvelle relation pour le calcul du ruissellement de surface, modélisé par le milieu en calottes :

- Pour  $h < D$  et avec

$$A = \frac{0.345p^{0.545}\Omega}{8g\eta^3h} \quad B = \frac{3\left(3 + \frac{\Omega^2}{\eta^3}\right)\nu}{4gh^2} \quad C = -J_0$$

la vitesse s'écrit :

$$V = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

- Pour  $h = D$  et avec

$$A = \frac{0.345\rho^{0.545}\Omega_D}{8g\eta_D^3h} \quad B = \frac{3\left(3 + \frac{\Omega_D^2}{\eta_D^3}\right)\nu}{4gh^2} \quad C = -J_0$$

la vitesse s'écrit :

$$V_0 = \frac{-B_0 + \sqrt{B_0^2 - 4A_0C}}{2A_0}$$

- Pour  $h > D$  et avec

$$\sqrt{\frac{8}{f}} = 5.62 \log \frac{h - D + \Delta h}{D} + 3.13\rho^{-0.613}$$

$$\sqrt{gJ_0} \left( 5.62 \log \frac{\Delta h}{D} + 3.13\rho^{-0.613} \right) \Delta h^{1/2} = V_0$$

la vitesse s'écrit :

$$V = V_0 \frac{D}{h} + \sqrt{\frac{8gJ_0}{f}} (h - D + \Delta h)^{1/2} \left( 1 - \frac{D}{h} \right)$$

Le calage sur l'ensemble des essais effectués conduit à l'obtention d'un coefficient de corrélation entre valeurs de vitesses mesurées et calculées de 0.981. Cette valeur, bien qu'elle ne constitue pas une preuve de la qualité du modèle, peut tout de même être considérée

comme un indice encourageant. La figure 6.7 présente graphiquement les vitesses calculées par rapport aux vitesses mesurées.

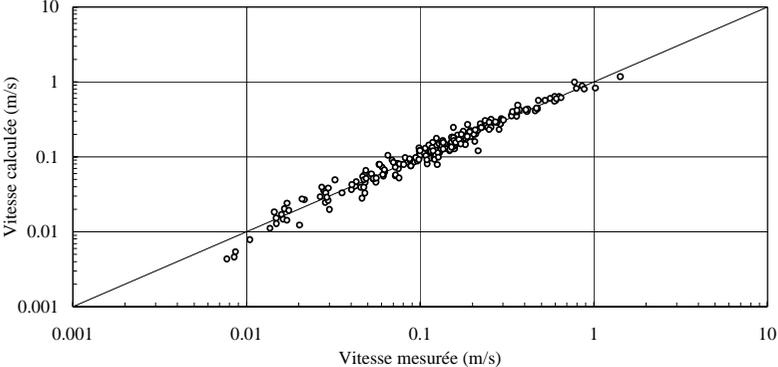


Figure 2.15 : Comparaison graphique entre vitesses mesurées et calculées. Le coefficient de corrélation est ici de 0.981.

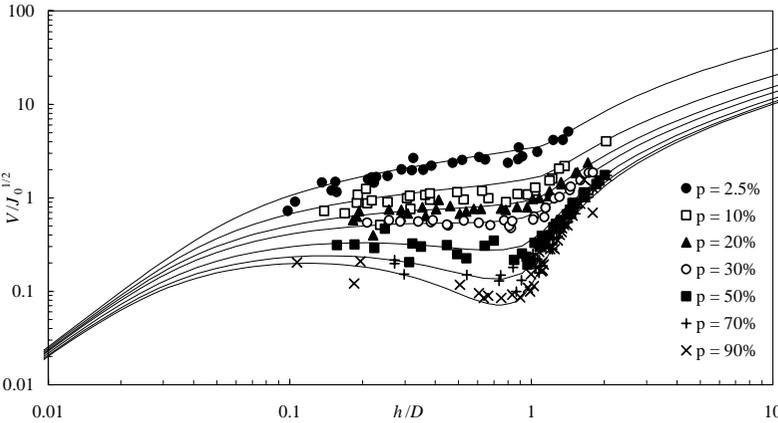


Figure 2.16 : Comparaison entre les vitesses mesurées et celles résultant de la nouvelle formulation. La vitesse est divisée par la racine de la pente.

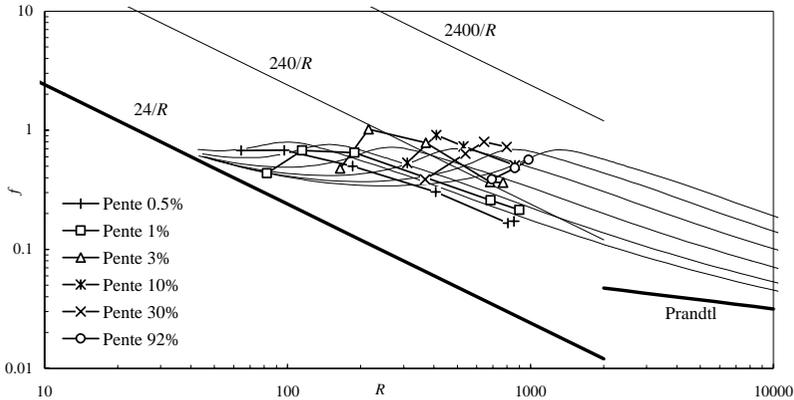


Figure 2.17 : Comparaison entre le coefficient de frottement  $f$  mesuré et celui obtenu à partir de la nouvelle formulation pour les essais correspondant à  $p = 30\%$ .

La figure 2.16 montre tout d'abord une concordance très satisfaisante entre les vitesses mesurées et calculées. Il faut cependant relever que cette représentation graphique n'est parlante que pour les écoulements turbulents, situation dans laquelle une certaine partie des points visibles ne se trouvent pas.

La figure 2.17 présente ensuite la relation  $f - R$  pour les essais correspondant à une densité de couverture  $p = 30\%$ . Les différentes courbes qui se superposent ont été obtenues à partir des relations hauteur-vitesse calculées à l'aide de la nouvelle formulation pour les différentes pentes. Le décollement très original se produisant à partir de faibles nombres de Reynolds est fidèlement reproduit. Il peut tout au plus être remarqué que les mesures présentent une montée plus brusque que le modèle, en particulier pour les pentes comprises entre 1 et 10%.

La comparaison entre cette nouvelle formulation et les théories existantes des pertes de charge a été effectuée par Dubois (1998). Il ressort de cette analyse que la nouvelle relation tend vers les formulations reconnues de l'hydraulique fluviale lorsque la hauteur d'eau devient beaucoup plus grande que celle des aspérités créant

la rugosité. Elle est identique à la formule de Bathurst pour une densité de couverture  $p = 67\%$  et identique à celle de Strickler pour  $h/D \cong 100$ . Par contre, dans le domaine des écoulements hydrologiques pour lesquels l'ordre de grandeur du rapport  $h/D$  est de 1, elle reproduit fidèlement le comportement particulier observé, ce que ne saurait faire aucune autre formulation. Son domaine de validité est ainsi très large, couvrant aussi bien les domaines laminaire que turbulent rugueux, tout en assurant une transition continue entre eux.

## **2.4. Essais en écoulements non-stationnaires et non-uniformes**

Les essais en écoulement uniforme dans le milieu en calottes ont permis l'élaboration d'une nouvelle loi décrivant le comportement observé. Ces essais possèdent cependant un caractère de « laboratoire » plutôt théorique. Il constituent toutefois la première étape indispensable dans l'étude du phénomène très complexe du ruissellement de surface sur terrains naturels.

Mais plusieurs pas supplémentaires sont encore indispensables avant d'acquérir la certitude de validité de cette théorie sur les terrains naturels, à l'échelle du bassin versant. Dans un premier temps, il est indispensable d'effectuer une série d'essais sous simulateur de pluie et sur des surfaces s'approchant davantage de la réalité. Ainsi, la nouvelle loi de comportement pourra être validée dans des situations d'écoulements non-stationnaires et non-uniformes.

Le simulateur de pluie de l'institut fédéral de recherche sur la forêt, la neige et le paysage à Birmensdorf a été utilisé pour la réalisation de cette série d'essais (voir figure 2.18).

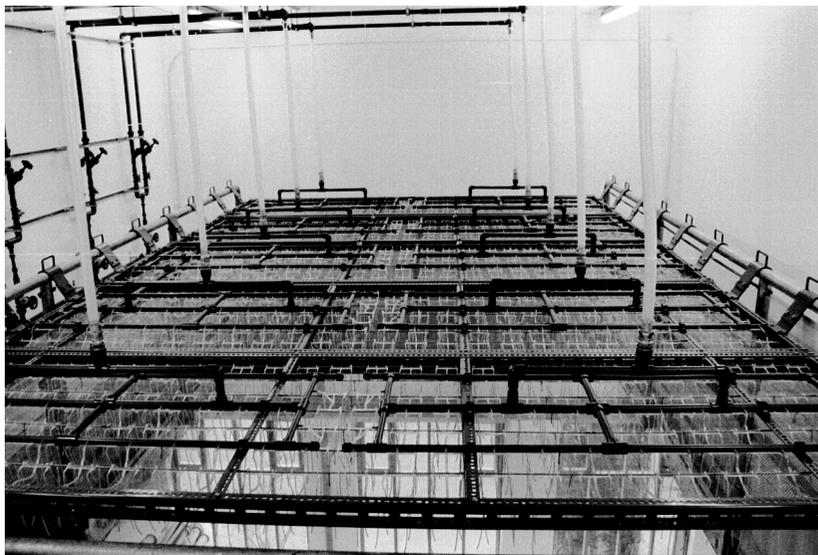


Figure 2.18 : Le simulateur de pluie de l'Institut Fédéral de Recherche sur la Forêt, la Neige et le Paysage (WSL – FNP) à Birmensdorf (ZH).

Cette installation permet de créer une pluie uniforme dans l'espace et constante dans le temps, avec un début et une fin d'averse aussi rapides que possible. La surface de ruissellement est plane, imperméable et de pente constante sur toute la longueur de l'écoulement, mais modifiable. Le système de mesure du débit permet de suivre l'évolution temporelle du débit à l'aval du plan de ruissellement avec une grande précision (Dubois 1998). La surface utilisable possède une largeur de 2 mètres et une longueur de 4.30 mètres. La pente peut varier en continu entre 0 et 45 degrés. Un entonnoir fixé à l'aval récolte les eaux de ruissellement et les concentre dans une cuve pour la mesure du débit. La figure 2.19 présente une vue d'ensemble de cette installation.



Figure 2.19 : Plan inclinable disposé sous le simulateur de pluie de Birmensdorf

Les surfaces de rugosité artificielle doivent présenter des caractéristiques aisément mesurables. Il a été choisi de les créer avec des grains de sable de diamètre presque constant, disposés uniformément sur une plaque étanche. Comme pour les essais de Nikuradze, la densité des grains de sable est maximale, c'est-à-dire que chaque grain touche ses voisins.

Du sable de quartz, offrant une distribution granulométrique étroite, a été collé avec de la résine époxy sur des plaques de PVC. 80 essais ont été réalisés en faisant varier la granulométrie des éléments de rugosité, la pente du plan inclinable et l'intensité de la pluie.

---

Granulométrie (mm)	0.7-1.2	2.0-3.0	5.0-8.0	7.0-15.0	
Pente (%)	1	3	10	30	60

Intensité (mm/h)	30	70	100	140
------------------	----	----	-----	-----

Tableau 2.1 : Valeurs paramétriques utilisées pour le programme des essais.

### 2.4.1. Analyse traditionnelle

Dans une approche classique, le nombre de Reynolds est défini comme :

$$R = \frac{Vh}{\nu} = \frac{q}{\nu} \quad (2.85)$$

où  $q$  est le débit unitaire en  $\text{m}^3/\text{s} / \text{m}$ . Sur l'ensemble des 80 essais effectués, le plus grand nombre de Reynolds calculé selon (2.85) n'excède pas  $R = 167$ . Cela signifie que l'ensemble des essais présentent un écoulement laminaire. Rappelons que la solution théorique de l'écoulement laminaire sur plan donne  $\kappa = 24$ , mais que des essais rapportés dans la littérature ont conduit à l'obtention de valeurs largement plus élevées, pouvant atteindre  $\kappa = 40'000$ . Le coefficient  $\kappa$  permet le calcul du coefficient de frottement  $f$  par rapport au nombre de Reynolds  $R$  par :

$$f = \frac{\kappa}{R} \quad (2.86)$$

La discussion essentielle porte évidemment sur la valeur du coefficient  $\kappa$ .

Par optimisation numérique, ce coefficient a été déterminé pour tous les essais effectués. Il est représenté graphiquement en fonction de la pente, de l'intensité de la pluie et du diamètre moyen des grains sur la figure 2.20.

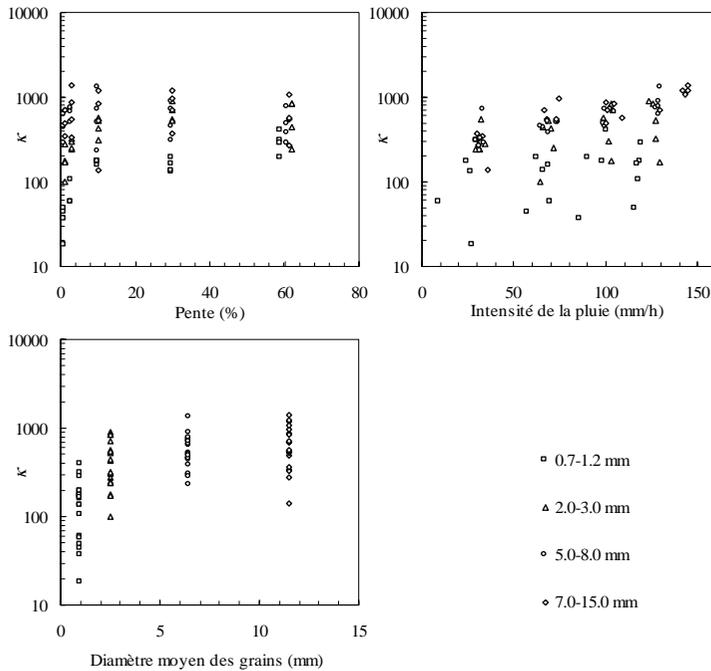


Figure 2.20 : Relations entre le coefficient  $\kappa$  et la pente, l'intensité de la pluie et le diamètre moyen des grains.

Il n'est pas vraiment possible de conclure à une relation évidente entre  $\kappa$  et la pente. Tout au plus, le coefficient  $\kappa$  semble montrer, pour la pente de 1%, des valeurs sensiblement inférieures à celles obtenues avec des pentes plus grandes.

Par contre, il apparaît que  $\kappa$  a tendance à augmenter avec l'intensité de la pluie, comme cela a déjà été suggéré par plusieurs auteurs. Mais la dispersion des mesures est telle qu'il n'est pas raisonnable de tenter le calage d'une quelconque relation mathématique.

Le dernier graphique de la figure 2.20 présente la relation  $\kappa$  - diamètre moyen des grains. Il n'est pas étonnant de constater une certaine augmentation de  $\kappa$  avec la taille des rugosités. Mais à

nouveau, la dispersion est très importante comme le synthétise le tableau 12.1.

Classe granulométrique (mm)	$\kappa_{\min}$ (-)	$\kappa_{\max}$ (-)
0.7-1.2	18	394
2.0-3.0	100	897
5.0-8.0	229	1291
7.0-15.0	139	1392

Tableau 2.2 : Valeurs mesurées minimales et maximales du coefficient  $\kappa$  pour chaque classe granulométrique.

Ainsi, l'approche traditionnelle ne saurait aboutir à un résultat plus précis que celui présenté dans ce tableau.

#### 2.4.2. *Paradoxes constatés*

En regard des résultats peu satisfaisant obtenus par l'approche traditionnelle, il serait intéressant de mettre en doute l'hypothèse selon laquelle tous ces hydrogrammes sont en écoulement laminaire. Cette analyse du régime d'écoulement peut s'effectuer par une étude de la montée de l'hydrogramme.

Toujours avec l'hypothèse de validité de l'équation (1.45), la solution analytique de la montée en crue s'écrit :

$$q = \alpha (i t)^m \quad (2.87)$$

Ainsi, si les montées en crue sont représentées dans un graphique en double échelle logarithmique, les points doivent s'aligner sur une droite de pente  $m$ . Si l'écoulement est laminaire, cette pente vaut alors  $m = 3$ . Par contre, si il est turbulent et qu'il peut être décrit par la formule de Strickler, il est aisé de montrer que cette pente vaut  $m = 5/3$ .

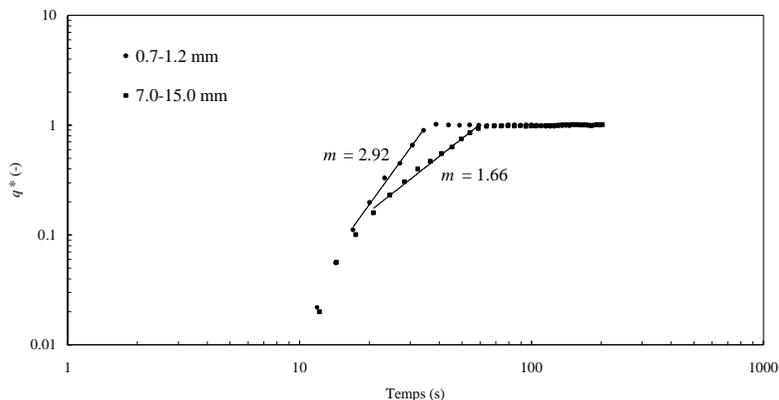


Figure 2.21 : Montée en crue de deux hydrogrammes mesurés au bas d'un plan de 30% de pente, en double échelle logarithmique.

La figure 2.21 présente la montée en crue de deux hydrogrammes adimensionnalisés par rapport à leur débit constant en palier. Ces deux hydrogrammes ont été produit par une pluie de 140 mm/h sur un plan à 30% de pente. Le premier a été mesuré pour la classe granulométrique 0.7-1.2 mm, et le deuxième pour la classe 7.0-15.0 mm.

Comme l'intensité de la pluie est la même pour les deux essais, le débit est en tout lieu du plan également identique. Ainsi, le nombre de Reynolds calculé par l'équation (2.3) est partout le même. Dans ces conditions, tous les livres d'hydraulique diront que le régime d'écoulement est identique dans les deux cas puisque le nombre de Reynolds est identique. Or, il n'en n'est rien ! La figure 2.21 montre également la fonction de puissance calée sur les points de mesure. Dans les deux cas, le coefficient de corrélation de ces ajustements est supérieur à 0.99, mais la pente de ces « droites » est fort différente. Il a été trouvé, pour le sable fin,  $m = 2.92 \cong 3.00$ , ce qui indique que l'écoulement est laminaire. Par contre, pour le gravier,  $m = 1.66 \cong 5/3$ . L'écoulement est donc turbulent et la formule de Strickler est valable.

Le titre de ce paragraphe utilise le terme « paradoxe ». Le fait qu'un écoulement puisse être soit laminaire, soit turbulent pour un même nombre de Reynolds constitue un phénomène difficilement explicable à l'aide de la théorie classique.

La confusion et le doute s'installent définitivement dans nos esprits d'hydrauliciens en observant la figure 2.22. Par rapport à la figure précédente, seule la pente du plan à été modifiée de 30 à 1%, tous les autres paramètres d'essai restant inchangés. Deux comportements bien distincts sont visibles sur chaque hydrogramme. Pour les faibles débits, tout d'abord, l'ajustement d'une fonction de puissance fournit  $m \cong 1.25$ , avec un coefficient de corrélation toujours impressionnant. Il apparaît donc que la vitesse est proportionnelle à  $h^{0.25}$ . Même les formules empiriques les plus farfelues n'ont jamais proposé une telle relation.

A partir d'une certaine valeur du débit, dépendant de la taille des aspérités, le comportement montré par ces hydrogrammes change brutalement et le coefficient  $m$  prend des valeurs aussi originales que diverses pour atteindre même  $m = 3.47$ , valeur supérieure à celle du laminaire !

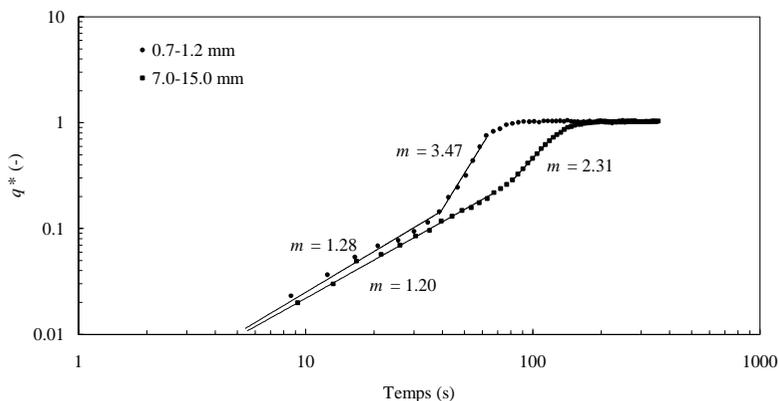


Figure 2.22 : Montée en crue de deux hydrogrammes mesurés au bas d'un plan de 1% de pente, en double échelle logarithmique.

Sous l'unique éclairage de la théorie classique de l'hydraulique fluviale, les figures ci-dessus mettent en évidence des paradoxes bien embarrassants. Mais il ne faut voir ici que l'expression du comportement original observé dans le milieu en calottes lors des essais stationnaires et uniformes.

En effet, les deux tendances comportementales montrées à la figure 2.22 correspondent bien à la relative indépendance de la vitesse en fonction du débit lorsque l'écoulement s'effectue dans le milieu en calottes, et à la très brusque augmentation de la vitesse par rapport à la hauteur d'eau lorsque l'écoulement submerge les éléments de rugosité.

### 2.4.3. *Analyse à l'aide de la nouvelle loi de comportement*

Le premier test de validité de la nouvelle loi de comportement consiste simplement à simuler numériquement, à l'aide des techniques numériques présentées au chapitre suivant, les 80 essais en écoulements non-uniformes et non-stationnaires avec leurs paramètres bruts, c'est-à-dire sans calage ou optimisation. Pour le



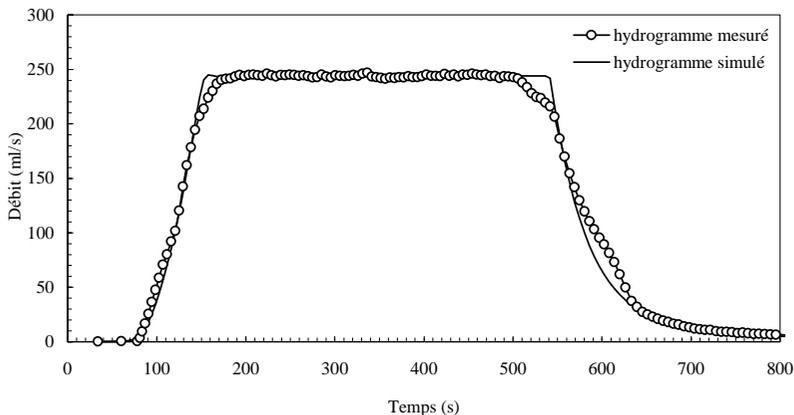


Figure 2.24 : Hydrogrammes mesuré et simulé avec le modèle en calottes pour une intensité de pluie de 102 mm/h, une pente de 10% et la classe granulométrique 5.0-8.0 mm.

La mesure présente quelques particularités, comme à l'amorce de la décroissance. Ces « imperfections » sont à mettre sur le compte de la pression d'alimentation du simulateur de pluie, particulièrement capricieuse au moment de l'enclenchement des systèmes d'arrosage automatique de la WSL<sup>1</sup>. Mis à part ce phénomène plutôt particulier, qui illustre également la précision des mesures, il peut être admis que la nouvelle loi de comportement permet de reproduire fidèlement les hydrogrammes mesurés.

Sur l'ensemble des résultats (Dubois 1998), il faut cependant signaler qu'une partie des faibles débits sont encore sous estimés par la simulation numérique. Ils correspondent principalement aux essais effectués avec une forte intensité de pluie et une faible pente. Il ne serait pas judicieux de tenter une modification de la nouvelle relation de pertes de charge pour ces quelques cas. En effet, ils

---

<sup>1</sup> Wald, Schnee und Landschaft, Birmensdorf. Institut Fédéral de Recherche sur la Forêt, la Neige et le Paysage

correspondent plutôt aux limites d'application des hypothèses cinématiques admises pour la simulation numérique. Lorsque la pente est faible et que la hauteur d'écoulement est importante, le nombre cinématique devient petit et les limites de validité du modèle de l'onde cinématique présentées sous 1 ne sont plus respectées.

### **3. Aspects conceptuels et numériques de la modélisation de l'écoulement en fine lame**

#### **3.1. Approche stochastique du traitement topographique**

Les processus naturels à considérer numériquement concernent des étendues telles qu'il faut renoncer à étudier la progression de chaque filet fluide pour composer plus sagement avec une échelle de maillage très supérieure à l'épaisseur de la lame ruisselante. Ces contingences numériques préconisent une intégration topographique qui concorde avec une autre intégration, plus "philosophique", des processus naturels. En effet, les réalités de ces phénomènes sont si complexes en hydrologie et les propriétés intrinsèques si anisotropes que la seule voie raisonnable consiste à les intégrer et à les moyenner à une échelle macroscopique très supérieure à celle des accidents locaux de la topographie ou de l'écoulement.

Les théories cinématique ou diffusives respectent cette démarche conceptuelle en conciliant au mieux réalité physique et impératifs numériques. Comme cela a déjà été montré plus haut, il n'est pas envisageable de traiter des mailles d'une dimension inférieure à 25 ou 50 mètres. Mais comment intégrer les phénomènes physiques se développant entre cette échelle topographique et celle des aspérités formant la rugosité ?

Face à l'anisotropie de l'écoulement des filets fluides sur une maille, seule une approche stochastique de ce phénomène semble raisonnable. A l'heure actuelle, il ne saurait être envisagé de disposer d'un modèle numérique de terrain intégrant une information altimétrique à l'échelle du décimètre.

### 3.1.1. *Génération stochastique de la micro-topographie*

Un modèle numérique de terrain nous renseigne sur la topographie générale ainsi que sur la pente moyenne d'une cellule. Mais l'échelle décimétrique lui échappe complètement. Or, cette échelle est particulièrement importante pour le ruissellement de surface car c'est précisément elle qui conditionne les propriétés de rétention en eau à la surface du sol et celles de section mouillée disponible à l'écoulement des filets fluides. Le générateur stochastique de micro-topographie sert précisément à créer un petit modèle numérique de terrain à l'intérieur d'une maille pour en extraire des relations géométriques globales indispensables aux modèles cinématiques ou diffusifs.

Le principe de génération de cette surface aléatoire, mais d'aspect réel, est schématisé sur la figure 3.1.

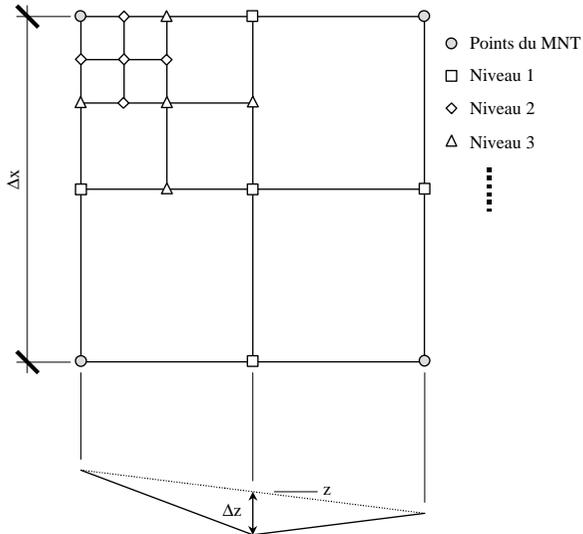


Figure 3.1 : Principe de génération stochastique de la micro-topographie à l'intérieur d'une cellule de modèle numérique de terrain.

Le processus consiste à interpoler linéairement l'altitude  $z$  du point situé au milieu de chaque côté et au centre de la cellule, de générer aléatoirement une correction d'altitude  $\Delta z$  et de l'ajouter à  $z$ . Ce processus se répète autant de fois que souhaité pour obtenir une bonne résolution spatiale. 6 niveaux récursifs permettent d'obtenir une matrice composée de  $2^6 = 64$  lignes et colonnes pour un total de  $64^2 = 4096$  cellules.

La génération aléatoire de la correction d'altitude  $\Delta z$  suit une distribution normale dont la fonction de densité s'écrit :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{\frac{-(x-\mu)}{2\sigma^2}} \quad (3.1)$$

où  $\mu$  représente la moyenne et  $\sigma$  l'écart-type. A l'aide du changement de variable :

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (3.2)$$

la fonction de densité standard de la loi normale devient :

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (3.3)$$

La fonction de distribution standard est l'intégrale de  $f(z)$  :

$$F(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (3.4)$$

qui ne connaît pas de solution analytique.

La loi normale possède deux paramètres, à savoir la moyenne et l'écart-type. Comme le but recherché est de générer un « bruit » altimétrique autour d'une topographie moyenne donnée par le modèle numérique de terrain, la moyenne statistique  $\mu$  de la loi normale est fixée à 0. Le seul paramètre restant est l'écart-type  $\sigma$ .

Il n'est guère aisé d'estimer l'écart-type des hors-profils  $\Delta z$  de la surface du terrain. De plus, celui-ci dépend de la dimension  $\Delta x$  de la cellule à interpoler, à chaque niveau de récursivité. Pour ces raisons, définissons l'écart-type par :

$$\sigma = \frac{\Delta x}{\beta} \quad (3.5)$$

avec  $\beta$  un nouveau paramètre du modèle qui mesure l'amplitude des variations altimétriques au sein d'une cellule du MNT. Lorsque  $\beta$  prend une grande valeur, alors l'écart-type tend vers zéro et aucune micro-topographie n'est généré. Ce cas correspond à un plan parfait. Par contre, lorsque la valeur de  $\beta$  est petite, le « plan » est fortement chiffonné et présente de profondes dépressions et collines, comme représenté sur la figure 3.2.

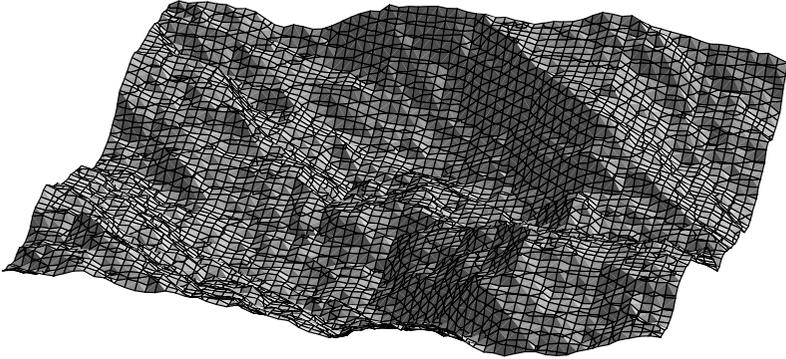


Figure 3.2 : Représentation 3-D de la micro-topographie générée aléatoirement sur une cellule de MNT.

### 3.1.2. *Détermination des paramètres globaux*

A partir de cette information micro-topographique, les paramètres globaux, compatibles avec les thèses cinématiques ou diffusives, doivent être déterminés. Il s'agit de la relation hauteur – volume de la cellule qui intervient dans l'équation de continuité, et de la relation hauteur – section mouillée sur les bords nécessaire à tout calcul d'échange de flux entre les éléments.

Comme la pente de fond de la cellule est fournie par le modèle numérique de terrain et que l'hypothèse cinématique suppose une pente de la ligne d'eau parallèle à celle du fond, il est plus aisé d'effectuer une rotation de repère pour se mettre à l'horizontale. De cette manière, les pentes de l'élément et de la ligne d'eau sont nulles. Dans cette configuration, la micro-topographie générée se couvre progressivement de flaques lors d'un apport en eau, comme cela est schématisé sur la figure 3.3.

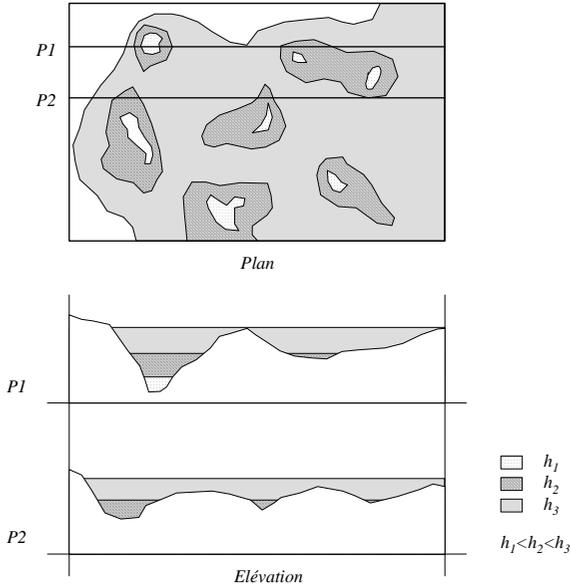


Figure 3 : Représentation schématique de l'évolution des flaques d'eau en fonction de la hauteur sur la micro-topographie.

Désignons par  $A_f(z)$  la surface des flaques d'eau à la cote  $z$ . Le volume d'eau  $\forall(z)$  contenu sur l'élément s'obtient alors par :

$$\forall(z) = \int_{z_0}^z A_f(\zeta) d\zeta \quad (3.6)$$

où  $\zeta$  est une variable d'intégration. La borne inférieure de l'intégrale  $z_0$  correspond à  $\text{MIN}(z_{i,j})$  où  $z_{i,j}$  représente toutes les altitudes générées de la micro-topographie. A l'aide du changement de variable :

$$h = z - z_0 \quad (3.7)$$

la relation hauteur – volume de l'élément devient simplement :

$$V(h) = \int_0^h A_f(\zeta) d\zeta \quad (3.8)$$

Cette intégrale est effectuée numériquement sur chaque élément du domaine de calcul pour fournir la relation hauteur – volume recherchée et montrée sur la figure 3.4.

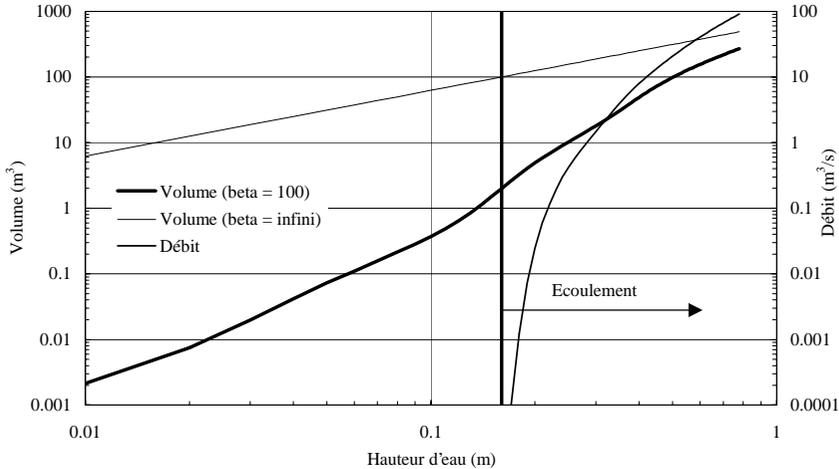


Figure 3.4 Exemple de relations hauteur – volume et hauteur – débit obtenues sur la micro-topographie d'une cellule de 25 m de côté avec  $b = 100$ .

La deuxième relation à calculer à partir de la micro-topographie concerne les échanges de flux entre cellules. Conformément au concept volume fini décrit plus bas, les flux ne sont calculés que sur les bords des cellules. Chaque bord présente l'aspect montré sur la figure 3.5.

La nouvelle formulation des pertes de charge a été développée pour un écoulement plan, sans tenir compte de la géométrie du profil en travers. Elle pose donc quelques difficultés pour son application à des profils quelconques. La solution retenue consiste à établir la relation hauteur – débit au moyen de l'intégrale :

$$Q(h) = \int_0^{\Delta x} V(h)h dx \quad (3.9)$$

où  $\Delta x$  est la longueur du bord de la cellule et  $V(h)$  la vitesse calculée à l'aide de la nouvelle formulation. La figure 3.4 présente également un exemple de relation hauteur – débit calculée numériquement de cette manière. Il faut encore relever que le point bas du bord ne correspond pas forcément avec le point bas  $z_0$  de la microtopographie. Il faut donc une certaine hauteur d'eau sur l'élément pour qu'un écoulement se produise sur son bord.

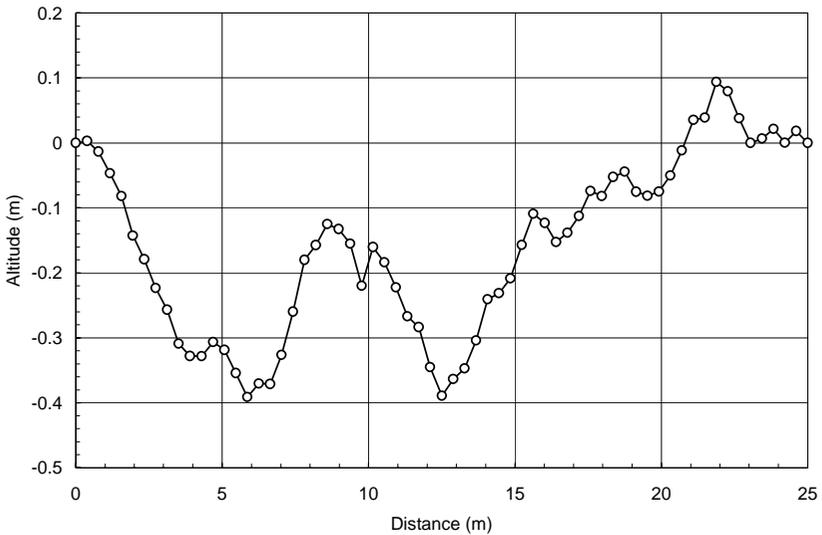


Figure 3.5 Exemple de profil en travers sur un bord de cellule.

Comme représenté sur la figure 3.6, le modèle Faitou considère 3 échelles spatiales différentes. La plus petite concerne les aspérités formant la rugosité. Elle est modélisée par le milieu en calottes et intégrée à la nouvelle loi de comportement des écoulements en lame mince. La hauteur des calottes  $D$  et leur densité de couverture  $p$  sont les deux paramètres qui décrivent la surface du sol à cette échelle.

L'échelle intermédiaire est la micro-topographie de surface générée de manière stochastique. Elle assure de manière cohérente le lien entre les dimensions de la rugosité et celle du modèle numérique de terrain. Le concept de micro-topographie stochastique permet la prise en compte du stockage de l'eau et de son regroupement en filets à l'échelle du décimètre et du mètre. Le seul paramètre requis ici est  $\beta$  qui permet de moduler l'ampleur de la micro-topographie.

La troisième échelle spatiale considérée par Faitou est bien entendu celle du modèle numérique de terrain sur laquelle se plaque le schéma numérique. Elle est abondamment commentée dans la suite de ce chapitre.

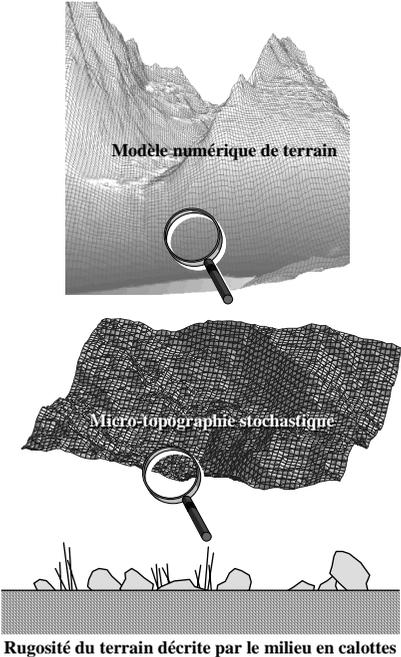


Figure 3.6 : Représentation schématique des différentes échelles spatiales prises en compte dans le modèle Faitou.

## 3.2. Discrétisation spatiale

Dans le cas d'une surface bidimensionnelle à forte pente et recouverte d'un milieu en calottes, l'équation de l'onde cinématique s'écrit :

$$\frac{\partial(\phi h)}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = i \cos(J_0) \quad (3.10)$$

où  $q_x$ ,  $q_y$  sont les flux dans la direction  $x$ , respectivement  $y$ ,  $\phi h$  le volume d'eau sur une surface unitaire,  $i$  la pluie nette et  $J_0$  la plus grande pente de la surface. Les flux  $q_x$  et  $q_y$  sont calculés à l'aide de la nouvelle loi selon la pente  $J_x$  en  $x$ , respectivement  $J_y$  en  $y$ . Le terme  $i$  doit être considéré comme un terme source en général. Il contient évidemment la pluie, mais peut également prendre en compte l'infiltration.

La méthode des volumes finis (Piroton 1998) propose de résoudre une forme intégrale de l'équation (3.10), dite formulation faible car la solution n'est alors exacte qu'en moyenne sur la surface de contrôle  $\Omega_i$  :

$$\iint_{\Omega_i} \frac{\partial(\phi h)}{\partial t} d\Omega_i + \iint_{\Omega_i} \frac{\partial q_x}{\partial x} d\Omega_i + \iint_{\Omega_i} \frac{\partial q_y}{\partial y} d\Omega_i = \iint_{\Omega_i} i \cos(J_0) d\Omega_i \quad (3.11)$$

En posant :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

et :

$$S = i \cos(J_0) \quad (3.13)$$

l'équation ( 3.11 ) peut alors s'écrire :

$$\iint_{\Omega_i} \frac{\partial(\phi h)}{\partial t} + \iint_{\Omega_i} \nabla \mathbf{F} d\Omega_i = \iint_{\Omega_i} S d\Omega_i \quad (3.14)$$

Le deuxième terme de l'équation ( 3.14 ) peut être écrit en intégrale de flux sur le contour  $\partial\Omega_i$  de la surface  $\Omega_i$  en utilisant le théorème de la divergence de Green. L'équation ( 3.14 ) devient alors :

$$\iint_{\Omega_i} \frac{\partial(\phi h)}{\partial t} + \oint_{\partial\Omega_i} \mathbf{F} \mathbf{n} d\partial\Omega_i = \iint_{\Omega_i} S d\Omega_i \quad (3.15)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal à la frontière  $\partial\Omega_i$ .

Le premier terme et le dernier terme de ( 3.15 ) peuvent être simplifiés à l'aide de la définition de la valeur moyenne :

$$\overline{\phi h}_i = \frac{1}{\Omega_i} \iint_{\Omega_i} \frac{\partial(\phi h)}{\partial t} d\Omega_i \quad (3.16)$$

$$\overline{S}_i = \frac{1}{\Omega_i} \iint_{\Omega_i} S d\Omega_i \quad (3.17)$$

et l'équation ( 3.15 ) devient :

$$\frac{d(\overline{\phi h}_i)}{dt} + \frac{1}{\Omega_i} \oint_{\partial\Omega_i} \mathbf{F} \mathbf{n} d\partial\Omega_i = \overline{S}_i \quad (3.18)$$

Numériquement, les valeurs moyennes  $\overline{\phi h}$  et  $\overline{S}$  ne sont guère intéressantes et il est préférable de les remplacer par les valeurs  $\phi h$  et  $S$  d'un certain point de l'élément. Ce remplacement induit généralement une erreur du premier ordre de précision. Mais, si le point choisi est le centre de gravité de l'élément, alors l'approximation devient du second ordre. Désignons donc par  $\phi h_i$  et  $S_i$  le volume unitaire et le terme source au centre de gravité de l'élément  $\Omega_i$ . L'équation ( 3.18 ) devient ainsi :

$$\frac{d(\phi h_i)}{dt} + \frac{1}{\Omega_i} \oint_{\partial\Omega_i} \mathbf{F} \mathbf{n} d\partial\Omega_i = S_i \quad (3.19)$$

L'équation ( 3.19 ) peut être considérée comme la formulation générale du problème en volumes finis. Le théorème de Green a permis de diminuer d'une dimension les équations sur la surface  $\Omega_i$  en équation 1D sur la frontière  $\partial\Omega_i$ . La difficulté réside dès lors dans l'estimation du flux sur cette frontière.

La frontière  $\partial\Omega_i$  de chaque élément est un ensemble de  $N_j$  segments de droite. Comme Faitou génère des éléments triangulaires,  $N_j = 3$ . Par conséquent, l'intégrale sur le contour fermé  $\partial\Omega_i$  peut être remplacée par une somme d'intégrations sur les segments de droite.

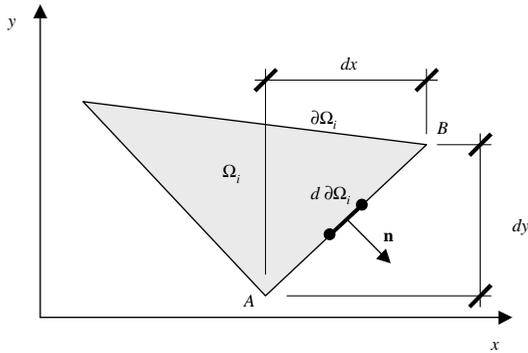


Figure 3.7 : Définition des paramètres utilisés dans la méthode des volumes finis pour le calcul du flux à travers la frontière  $\partial\Omega_i$ .

A partir des variables définies à la figure 3.7, et en remarquant que si le sens de parcours de l'élément est le sens trigonométrique,

$$n_x d\partial\Omega_i = dy \quad (3.20)$$

$$n_y d\partial\Omega_i = -dx \quad (3.21)$$

l'équation ( 3.19 ) devient :

$$\frac{d(\phi h_i)}{dt} + \frac{1}{\Omega_i} \sum_{k=1}^{N_j} \int_A^B (q_x dy - q_y dx) = S_i \quad (3.22)$$

Une intégration exacte n'est pas envisageable car la solution n'est pas connue sur l'ensemble du segment  $AB$ . Il faut donc recourir à une approximation obtenue par la technique de l'intégration de Gauss qui s'écrit :

$$\int_A^B (q_x dy - q_y dx) = \sum_{n=1}^{n_c} w_n (q_{x,n} (y_B - y_A) - q_{y,n} (x_B - x_A)) \quad (3.23)$$

où  $n_c$  est le nombre de points d'intégration,  $q_{x,n}$  et  $q_{y,n}$  sont les flux exacts sur les points d'intégration et les  $w_n$  sont des fonctions de poids.

Si les points de Gauss sont idéalement situés et les fonctions de poids choisies de manière optimale, alors la relation ( 3.23 ) est exacte pour des polynômes de  $q_x$  et  $q_y$  de degré  $2n_c-1$ . Ainsi, si  $q_x$  et  $q_y$  sont linéaires, un seul point de Gauss situé au milieu du segment  $AB$  avec un poids unitaire permet l'obtention de la solution exacte.

Le problème consiste donc maintenant à connaître les valeurs des flux  $q_x$  et  $q_y$  sur les points de Gauss, à savoir sur le point milieu de chaque bord des volumes finis. Or,  $q_x$  et  $q_y$  ne sont connus que sur les centres de gravité des éléments. Il faut donc développer une technique de reconstruction de ces flux afin de permettre leur estimation ailleurs que dans le centre de gravité des éléments.

Le moteur numérique de Faitou autorise deux techniques de reconstruction à choix, la reconstruction constante et la reconstruction linéaire.

Toute technique de reconstruction s'appuie sur des développements en série de Taylor autour du centre de gravité  $G$  du volume fini. L'inconnue  $q$  en un point quelconque de l'élément  $\Omega_i$  est obtenue par :

$$\begin{aligned}
q = q_G + \Delta x_G \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right)_G + \Delta y_G \left( \frac{\partial q}{\partial y} \right)_G + \frac{1}{2} \Delta x_G^2 \left( \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right)_G \\
+ \frac{1}{2} \Delta y_G^2 \left( \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \right)_G + \Delta x_G \Delta y_G \left( \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y} \right)_G + O(d^3)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

avec  $\Delta x_G = x - x_G$  et  $\Delta y_G = y - y_G$

Dans le cas de la reconstruction constante, L'équation ( 3.24 ) est tronquée au premier terme et devient :

$$q = q_G + O(d) \tag{3.25}$$

Ainsi, le flux est supposé constant sur tout l'élément et variable d'un élément à l'autre. L'erreur de troncature est du premier ordre et est proportionnelle à une distance caractéristique  $d$  de l'élément. Elle est principalement constituée de la première dérivée négligée dans ( 3.24 ). Mais comme cette variable reconstruite intervient dans une dérivée première de l'équation de base (3.10), la reconstruction constante fait apparaître numériquement une dérivée seconde dans l'équation (3.10). La conséquence de cette technique de reconstruction constante se traduit par une forte dissipation spatiale qui va « lisser » les hydrogrammes simulés. Par contre, les avantages résident dans une simplicité de calcul et une grande robustesse du schéma dû à l'amortissement numérique introduit.

Pour obtenir un schéma plus « pointu », les dérivées premières dans l'équation ( 3.24 ) doivent être gardées :

$$q = q_G + \Delta x_G \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right)_G + \Delta y_G \left( \frac{\partial q}{\partial y} \right)_G + O(d^2) \tag{3.26}$$

Cette technique de la reconstruction linéaire demande donc non seulement la connaissance de la variable  $q$  au centre de gravité de l'élément, mais également celle de ses dérivées en  $x$  et en  $y$  qui sont *a priori* inconnues. De plus, pour rester consistant, ces dérivées doivent être estimées au premier ordre de précision.

Par simplicité d'écriture, posons :

$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  : vecteur position du point où la reconstruction a lieu,

$\vec{r}_G = \begin{bmatrix} x_G \\ y_G \end{bmatrix}$  : vecteur position du centre de gravité  $G$  de l'élément,

$\vec{\nabla} q_G = \begin{bmatrix} \partial_x q \\ \partial_y q \end{bmatrix}_G$  : vecteur des dérivées premières évaluées au premier ordre en  $G$ .

Alors, l'équation ( 3.26 ) peut s'écrire :

$$q = q_G (\vec{r} - \vec{r}_G)^T \vec{\nabla} q_G \quad ( 3.27 )$$

La difficulté consiste maintenant à évaluer les dérivées premières au premier ordre de précision. Les variables  $q$  ne sont connues qu'au centre de gravité de chaque élément. En collectant les données de  $q$  sur les voisins immédiats de l'élément  $\Omega_i$ , il est possible d'obtenir le comportement spatial du flux et ainsi, sa dérivée. Pour cela, il faut au moins 3 voisins dont les centres de gravité ne sont pas alignés.

La méthode retenue dans Faitou pour le calcul des dérivées spatiales du flux est celle de Green – Gauss. Cette méthode, déjà à la base de la technique des volumes finis, consiste ici à entourer l'élément où les dérivées sont à calculer par un contour fermé passant par le centre de gravité des éléments voisins, comme le montre la figure 3.8.

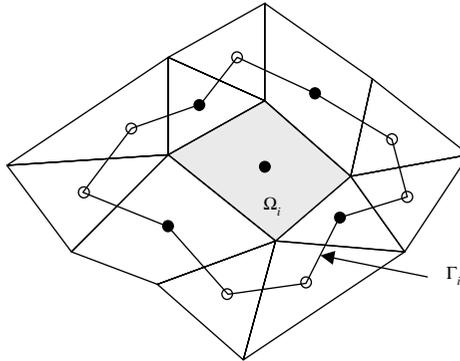


Figure 3.8 : Technique de construction du super volume de contrôle  $\Gamma_i$  d'après la méthode de Green – Gauss. Les points noirs sont les centres de gravité des voisins trouvés par bords, tandis que les points blancs sont ceux des voisins trouvés par sommet.

La surface de ce « super » volume de contrôle est notée  $\Gamma_i$  et sa frontière est le contour  $\partial\Gamma_i$ . Le théorème de la divergence, qui transforme une intégrale de surface en intégrale de contour, permet d'écrire :

$$\frac{1}{\Gamma_i} \iint_{\Gamma_i} \nabla q \, d\Gamma_i = \frac{1}{\Gamma_i} \oint_{\partial\Gamma_i} q \mathbf{n} \, d\partial\Gamma_i \quad (3.28)$$

La formule ( 3.28 ) permet l'évaluation de la moyenne des dérivées premières  $\nabla q$  à l'aide d'une intégrale de contour. Comme déjà mentionné plus haut, le remplacement de cette valeur moyenne par la valeur au centre de gravité  $G$  de l'élément  $\Omega_i$  constitue une approximation du premier ordre. Si  $G$  était le centre de gravité du super volume de contrôle  $\Gamma_i$ , alors ce remplacement serait du 2<sup>ème</sup> ordre de précision.

La définition de la moyenne permet d'écrire ( 3.28 ) sous la forme :

$$\tilde{\nabla} q_G = \frac{1}{\Gamma_i} \iint_{\Gamma_i} \nabla q \, d\Gamma_i = \frac{1}{\Gamma_i} \oint_{\partial\Gamma_i} q \mathbf{n} \, d\partial\Gamma_i \quad (3.29)$$

Il est possible de démontrer que les dérivées premières sont calculées avec une erreur du premier ordre si l'intégrale de contour est résolue par la méthode des trapèzes. Cette méthode s'impose logiquement puisque les flux sont connus sur les sommets des segments de droite constituant  $\partial\Gamma_i$ . La méthode des trapèzes permet l'écriture de ( 3.29 ) sous la forme :

$$\bar{\nabla}q_G = \frac{1}{\Gamma_i} \sum_{j=1}^{N_i} \frac{q_{A_j} + q_{B_j}}{2} l_j n_j \quad (3.30)$$

où  $N_i$  est le nombre de segments de droite composant le contour,  $A_j$  et  $B_j$  sont les nœuds de départ et d'arrivée du segment  $j$ ,  $l_j$  est la longueur du segment  $j$  et  $n_j$  sa normale. Si les  $N_i$  nœuds de la frontière  $\partial\Gamma_i$  sont numérotés de 1 à  $N_i$  dans le sens trigonométrique et si le nœud  $N_{i+1}$  est considéré identique au nœud 1 car le contour est fermé, alors l'équation ( 3.30 ) peut s'écrire sous une forme plus concise :

$$\bar{\nabla}q_G = \mathbf{D} \bar{q} \quad (3.31)$$

avec :

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{N_i} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

est  $\mathbf{D}$  une matrice de poids de dimension  $2N_i$ . Elle présente l'avantage de ne devoir être évaluée qu'une seule fois pour chaque volume fini car elle ne dépend que de la géométrie du maillage. Cette matrice  $\mathbf{D}$  est donnée par :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2\Gamma_i} \begin{bmatrix} y_2 - y_{N_i} & \cdots & y_{j+1} - y_{j-1} & \cdots & y_1 - y_{N_i-1} \\ x_2 - x_{N_i} & \cdots & x_{j+1} - x_{j-1} & \cdots & x_1 - x_{N_i-1} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

La somme des termes situés sur une ligne de cette matrice est nulle, ce qui permet d'écrire :

$$\tilde{\nabla} q_G = \mathbf{D} \cdot \nabla \mathbf{q} \quad (3.34)$$

avec :

$$\nabla \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 - q_G \\ \vdots \\ q_{N_i} - q_G \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

A l'aide de l'équation ( 3.27 ), il est ainsi possible d'obtenir la valeur du flux  $q$  en n'importe quel endroit, en particulier sur le milieu de chaque bord de l'élément  $\Omega_i$ . Cependant, cette reconstruction linéaire peut engendrer dans certains cas des extremums qu'il s'agit de limiter. Pour illustrer cette notion, considérons l'exemple unidimensionnel présenté à la figure 3.9

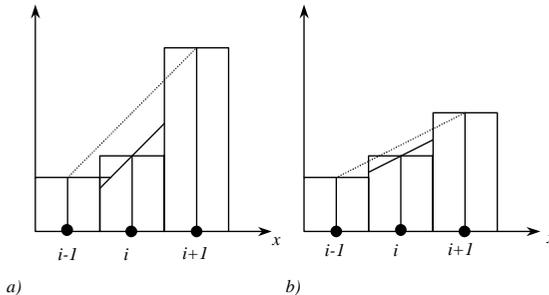


Figure 3.9 : Illustration de la reconstruction linéaire en unidimensionnel et du principe du limiteur. a) le limiteur entre en action. b) le limiteur n'entre pas en action.

La reconstruction linéaire consiste dans ce cas à calculer le gradient de la variable à reconstruire par rapport aux valeurs trouvées chez les voisins immédiats de l'élément  $i$ , puis d'obtenir la valeur en  $i-1/2$ , par exemple, par extrapolation linéaire depuis le centre de gravité de  $i$ . Pour le cas *b*) présenté à la figure 9.5, on obtient bien :

$$q_{i-1/2} \in [q_{i-1}, q_{i+1}] \quad (3.36)$$

mais dans le cas a) par contre, la valeur reconstruite en  $i-1/2$  n'appartient plus à cet intervalle et un extremum local est généré. En désignant par  $q_{min}$  et  $q_{max}$  la valeur minimale et maximale de tous les  $N_i$  voisins composant le super élément  $\Gamma_i$ , plus l'élément lui-même, le principe du limiteur peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 q^* &= q_G (\bar{r} - \bar{r}_g) \tilde{N} q_G \\
 q &= q^* & \text{si } q^* \in [q_{min}, q_{max}] \\
 q &= q_{min} & \text{si } q^* < q_{min} \\
 q &= q_{max} & \text{si } q^* > q_{max}
 \end{aligned}
 \tag{3.37}$$

Par reconstruction, il est donc possible d'estimer le flux au milieu d'un bord du volume fini à partir du flux connu en son centre de gravité. Mais comme un bord est la frontière entre deux volumes finis, la reconstruction peut être effectuée à partir de chaque élément pour obtenir, sauf situation exceptionnelle, deux valeurs différentes du flux pour le même bord, comme le montre la figure 3.10.

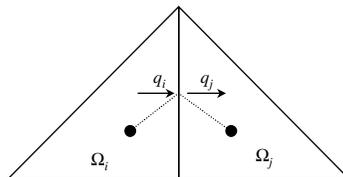


Figure 3.10 : Principe de la continuité du flux sur les bords des volumes finis.

La formulation conservative de la méthode des volumes finis assure le respect du bilan sur chaque éléments. Par contre, il est nécessaire d'évaluer le flux à travers chaque frontière de manière unique pour que le bilan soit conservé sur l'ensemble du modèle. Généralement, l'estimation du flux  $q$  sur le bord à partir des flux reconstruits  $q_i$  et  $q_j$  représente un problème de Riemann unidimensionnel, toujours quelque peu ardu à résoudre proprement. Mais sur ce point en particulier, les simplifications apportées par les hypothèses cinématiques sont particulièrement avantageuses.

La pire idée à ce stade du développement serait de vouloir moyenner les flux  $q_i$  et  $q_j$  pour obtenir le flux unique  $q$ . Cette solution de facilité, qui correspond en fait à effectuer une dérivée spatiale centrée, serait immédiatement sanctionnée par des instabilités numériques explosives. Avec les hypothèses cinématiques, les courbes caractéristiques de l'écoulement sont uniquement dirigées vers l'aval. Cela équivaut à dire qu'aucune information ne remonte l'écoulement. Le schéma numérique ne doit pas non plus aller chercher une partie de l'information à l'aval, comme cela est le cas pour une dérivée centrée. Par conséquent, seule une dérivée arrière par rapport à la direction de l'écoulement est possible.

Toujours grâce aux hypothèses cinématiques, le sens de l'écoulement peut être connu *a priori* puisqu'il correspond à la direction de la plus grande pente. Ainsi, il est possible de déterminer, avant le calcul, quel est le volume fini situé à l'amont du bord et lequel se trouve à l'aval. En se référant à nouveau à la figure 9.6, supposons que l'élément  $\Omega_i$  se trouve à l'amont du bord étudié. Alors, le flux  $q$  traversant ce bord est tout simplement le flux  $q_i$  reconstruit à partir de l'élément amont  $\Omega_i$ .

### 3.3. Discrétisation temporelle

L'ensemble des relations présentées jusqu'ici ne permet que l'estimation de l'intégrale de surface dans l'équation ( 3.19 ). Il reste encore à choisir une méthode pour l'intégration temporelle qui doit être au moins du même ordre de précision que le schéma spatial pour des raisons de consistance. Faut-il assurer l'intégration spatiale de l'équation ( 3.19 ) à l'aide de la méthode d'Euler modifiée, du second ordre de précision.

D'une manière générale, l'équation ( 3.19 ) peut s'écrire sous la forme :

$$(\phi h)' = \frac{d(\phi h)}{dt} = fct(h,t) \quad (3.38)$$

Le terme à droite de l'équation ( 3.38 ) est composé du terme source S de ( 3.19 ) et de l'intégrale des flux sur la frontière du volume fini. Ce terme est donc connu. La méthode de Euler modifiée s'effectue en deux étapes pour chaque pas de temps. Tout d'abord,  $fct(h,t)$  est évaluée au temps  $t$ , ce qui permet d'obtenir :

$$(\phi h)_{t+\Delta t/2} = (\phi h)_t + \frac{\Delta t}{2} (\phi h)'_t \quad (3.39)$$

Alors,  $fct(h,t)$  est à nouveau évaluée avec les valeurs obtenues en  $t+\Delta t/2$  pour finalement obtenir les résultats au nouveau pas de temps :

$$(\phi h)_{t+\Delta t} = (\phi h)_t + \Delta t (\phi h)'_{t+\Delta t/2} \quad (3.40)$$

La procédure de Euler modifiée utilisée par Faitou est représentée graphiquement à la figure 3.11.

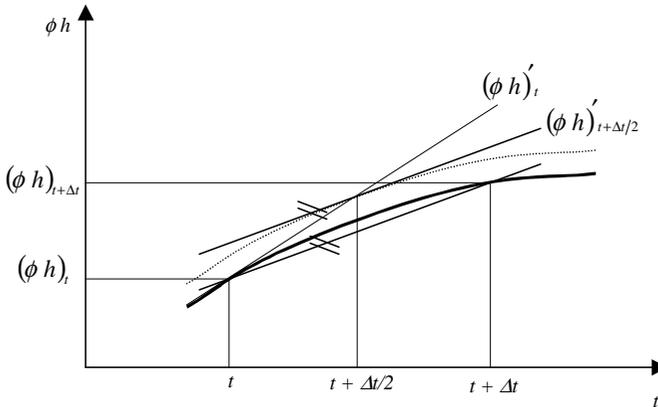


Figure 3.11 : Représentation graphique de la méthode de Euler modifiée



## **4. FAITOU : un logiciel de simulation de la formation et du transfert des crues**

### **4.1. Introduction**

Depuis un certain temps déjà, les équations des écoulements hydrauliques sont utilisées en hydrologie pour le calcul de la formation des crues sur les bassins versants. Cette modélisation est qualifiée de déterministe à base physique puisqu'elle considère le cheminement de l'eau contrairement aux modèles globaux tels que l'hydrogramme unitaire ou les cascades de réservoirs.

L'engouement actuel de la recherche pour cette orientation se justifie par les nombreux avantages et potentialités qu'offre une approche physique du phénomène très complexe de la transformation d'une pluie en hydrogramme sur un bassin versant. Contrairement aux modèles globaux, fondés sur des paramètres sans signification physique réelle et obtenus par calage sur quelques événements mesurés, les modèles à base physique s'appuient sur des paramètres concrets, tels le coefficient de rugosité de l'écoulement. En cas de modification majeure du bassin versant, à la suite d'une étape d'urbanisation par exemple, il est plus aisé d'identifier et d'ajuster en conséquence les paramètres sensibles d'un modèle à base physique. En phase de projet, l'effet d'interventions sur le bassin peut ainsi être estimé avec une certaine fiabilité.

Un autre avantage indéniable des modèles à base physique réside dans leur faculté de pouvoir prendre en compte la distribution spatiale des différents phénomènes modélisés. Alors qu'un modèle global noie toute la variabilité spatiale des caractéristiques d'un bassin versant dans quelques paramètres à caler, le modèle à base physique permet l'intégration de toute la richesse d'information sur la topographie, l'occupation du territoire, la répartition spatiale des

pluies, les différents types de sols et bien d'autres encore. L'accès à ce type de données est actuellement facilité par l'avènement des systèmes d'informations géographiques (SIG).

L'application des équations de l'onde cinématique aux écoulements sur plan représente le modèle hydrologique à base physique le plus répandu et le plus décrit dans la littérature spécialisée. L'applicabilité des simplifications cinématiques aux écoulements de surface est aujourd'hui admise, bien que nourrissant toujours des débats scientifiques. L'hypothèse de l'onde cinématique offre des simplifications de calcul qu'aucun chercheur ne saurait dénier. Par contre, le choix d'une loi de frottement se fixe généralement sur les relations de Chézy ou de Manning-Strickler. Or, ces lois ne permettent pas une modélisation fiable du ruissellement de surface. Le coefficient de rugosité de ce type de relations sort complètement de leur domaine de validité dès qu'il est calé sur des événements mesurés. Il perd alors sa signification physique pour pallier le biais de modélisation de l'écoulement de surface. L'introduction de la nouvelle loi établie pour le modèle en billes, ainsi qu'une description plus fine du cheminement des eaux, devraient par contre permettre de renouer avec une modélisation à base physique, telle que souhaitée.

La loi de comportement du ruissellement de surface n'est pas la seule cause du biais de modélisation qui découle sur des valeurs aberrantes du coefficient de rugosité. Ainsi, le concept d'une lame d'eau qui se développe régulièrement sur un plan d'écoulement, parfois de grande longueur, ne correspond pas à la réalité physique du ruissellement de surface sur un terrain naturel. En effet, après quelques mètres ou quelques dizaines de mètres, les irrégularités de surface favorisent la concentration de l'écoulement en filets d'eau. Par conséquent, les modèles hydrologiques en cascade de plans, pouvant mesurer plusieurs centaines de mètres de longueur et ayant des ambitions de modèles déterministes, engendrent un fort biais de modélisation par une prise en compte trop simpliste du cheminement des eaux.

L'objectif du modèle Faitou est de réduire autant que possible les biais de modélisation, par la prise en compte de la nouvelle loi d'écoulement d'une part, et par une modélisation plus fine de la topographie du bassin d'autre part.

## **4.2. Description du logiciel**

La prise en compte de la nouvelle loi de comportement dans le calcul des écoulements de surface doit permettre d'améliorer la fiabilité des simulations visant à transformer les pluies en débits sur un bassin versant. Cette amélioration tient en particulier au fait que le domaine de validité de cette loi couvre les situations de crues extrêmes. Jusqu'ici, seule la foi en la constance du coefficient de rugosité permettait l'estimation de débits extrêmes, pour lesquels et par définition il n'existe aucune mesure permettant le calage de ces paramètres.

Sans une remarquable puissance de calcul, le développement de modèles déterministes d'écoulement de surface, entièrement distribués spatialement et non-stationnaires, n'est tout simplement pas envisageable. Mais les développements spectaculaires de l'informatique autorisent aujourd'hui l'élaboration de tels modèles numériques. Une augmentation de la complexité et du volume des calculs n'est pas à confondre avec une augmentation de la qualité des résultats. Pourtant, même en gardant cette réflexion toujours à l'esprit, il serait fort dommage de ne pas explorer ce formidable potentiel.

La modélisation de la géométrie d'un bassin versant par quelques surfaces planes a montré ses limites. Franchissons un pas supplémentaire et utilisons la source de données la plus détaillée sur la topographie, à savoir le modèle numérique de terrain (MNT), appelé également parfois modèle numérique d'altitudes.

En Suisse, l'Office Fédéral de la Topographie a achevé l'élaboration du MNT à maille de 25 mètres pour l'ensemble de son territoire. Concrètement, il s'agit d'une matrice dans laquelle chaque cellule contient l'altitude d'un point du terrain. La distance entre deux cellules est de 25 mètres. L'ensemble de ces points définit entièrement la surface du relief, comme illustré par l'exemple de la figure 4.1.

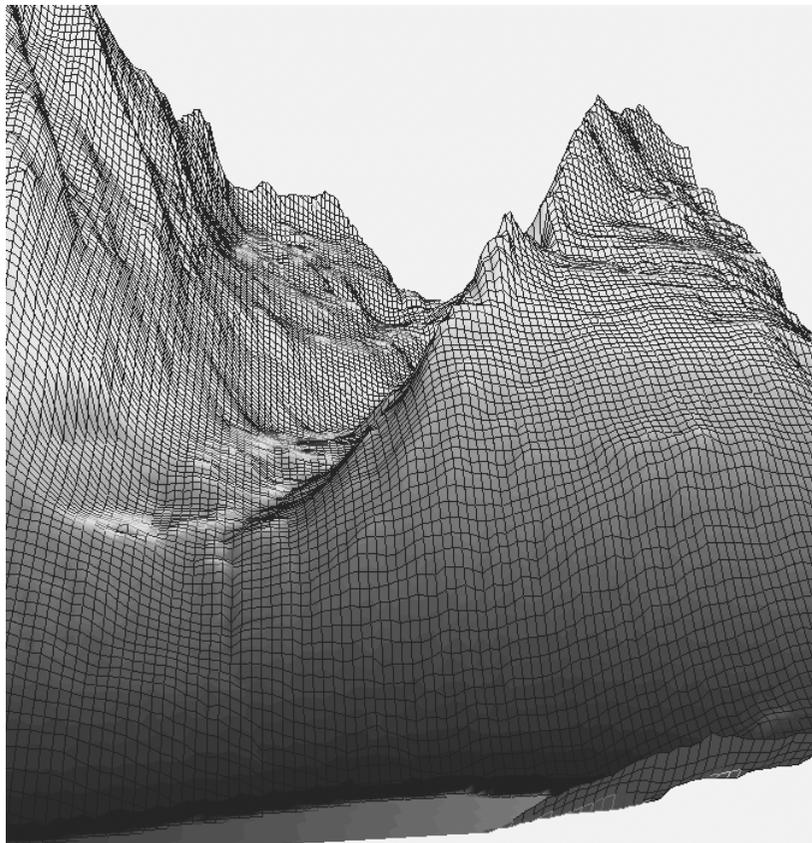


Figure 4.1: Vue perspective du modèle numérique de terrain de la région de Mattmark en Valais. Le lac de Mattmark est visible sur le bas de l'image. Vue créée avec le logiciel HiQ de National Instruments. Modèle numérique de terrain MNT25, © 1994 Office fédéral de topographie

Au lieu de ne considérer que quelques plans, Faitou traite l'ensemble de la topographie définie par le MNT. L'écoulement de surface se produit sur l'ensemble des facettes s'appuyant sur les points d'altitudes du MNT. Après une longueur d'écoulement superficiel correspondant à quelques facettes de 25 mètres, le ruissellement alimente latéralement le réseau des cours d'eau qui achemine le débit jusqu'à l'exutoire du bassin versant.

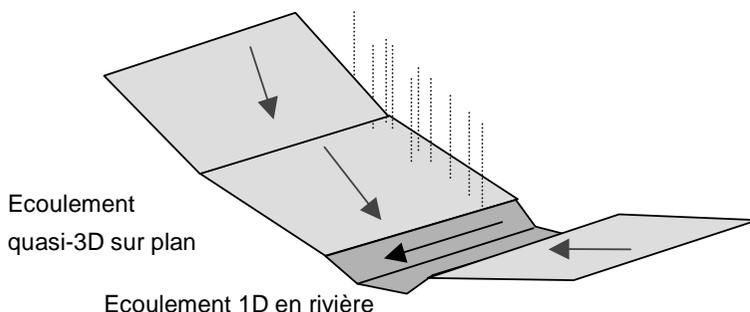


Figure 4.2 : Représentation schématique des divers types d'écoulement considérés dans le modèle Faitou.

Avec cette modélisation, schématisée par la figure 4.2, la distribution spatiale de chaque paramètre devient très aisée. Chaque facette est caractérisée par une pente, une surface, un coefficient de rugosité, une loi d'infiltration, etc... qui dépendent des caractéristiques du terrain à l'endroit considéré. Selon la même approche, la pluie reçue par chaque facette peut être modulée afin de tenir compte de sa répartition spatio-temporelle. A la limite, chaque facette peut recevoir une pluie différente !

De même, le réseau d'écoulement 1D en rivière est modélisé par un ensemble des profils en travers pouvant reproduire toutes les variations et complexités de la géométrie.

D'apparence très simple pour ne pas dire simpliste, cette modélisation des écoulements sur un bassin versant requiert une base théorique adéquate ainsi qu'une géométrie adaptée aux équations retenues. De plus, des outils de génération automatique du modèle numérique de calcul sont absolument indispensables au vu des très grandes quantités de données à gérer.

Pour s'en convaincre, il suffit de signaler qu'un modèle numérique de terrain à mailles de 25 mètres représentant la surface couverte par une carte nationale au 1 : 25'000 est constitué de 701 colonnes et de 481 lignes, soit un total de 337'181 altitudes, ou encore 1600 altitudes par km<sup>2</sup>. Il n'est donc pas raisonnable de croire que l'établissement du modèle de calcul, avec tous ses liens topologiques, puisse se faire « à la main ». Ce travail demanderait un temps considérable et serait certainement encore truffé d'erreurs rendant impossible toute tentative de simulation numérique.

Un modèle numérique de terrain contient toujours quelques « accidents ». Il existe très souvent, même dans des bassins versants alpins à fortes pentes, des zones horizontales ou pire encore, des dépressions locales qui entraînent des augmentations d'altitude le long d'un chemin d'écoulement. En présence de ces « trous », les algorithmes de délimitation automatique du bassin versant fondés sur la direction des vecteurs pente et orientation de chaque cellule ne savent plus par où continuer et s'arrêtent en perdant ainsi parfois une grande partie du bassin.

Ces inconvénients présentent plusieurs origines. La littérature spécialisée propose quelques dizaines d'algorithmes possibles pour générer un MNT à partir d'un semis de points XYZ. Chaque méthode présente des avantages et des inconvénient dépendant du type de relief rencontré, mais aucune n'arrive encore à faire l'unanimité aujourd'hui. Les altitudes observées dans un MNT sont en général toutes interpolées à partir de points voisins et sont donc sujettes à discussion. De plus, la résolution de 25 mètres de la matrice ne permet pas de détecter les petites particularités de la topographie,

comme certaines gorges, éléments pourtant essentiels dans le cheminement des eaux.

Face à ce constat, il apparaît indispensable d'autoriser une certaine modification de la topographie afin de pouvoir générer automatiquement et de manière fiable à la fois le réseau de rivières et le modèle en volumes finis de la surface.

### 4.3. Génération du réseau de rivières

La détermination du réseau de rivières en mode matriciel débute par le calcul de la convergence. Cette opération consiste à attribuer à chaque cellule de la matrice la taille, exprimée en nombre de cellules, de son sous-bassin versant. Cet algorithme commence par trier les altitudes par ordre décroissant. Puis, de la cellule la plus haute jusqu'à la cellule la plus basse, il détermine vers laquelle des 8 cellules voisines l'écoulement va se diriger. Ce choix s'effectue en calculant chaque pente entre la cellule traitée et ses voisines. La plus grande pente obtenue permet de désigner la cellule cible. En désignant par l'indice  $o$  la cellule origine et par l'indice  $c$  la cellule cible, la valeur de convergence  $C$  de cette dernière s'obtient alors par :

$$C_c = C_c + C_o + 1 \quad (4.1)$$

Bien évidemment, cette dernière relation est à considérer comme une instruction d'un langage de programmation et non pas comme une équation mathématique. En présence d'une dépression locale, où aucune pente nulle ou descendante n'est trouvée, la convergence de la cellule origine est modifiée de la façon suivante :

$$C_o = C_o + 0.5 \quad (4.2)$$

De cette manière, les lignes de crêtes du bassin versant possèdent une convergence nulle alors que les fonds de vallées présentent une

convergence élevée. Il faut encore relever que cet algorithme ne permet pas d'obtenir des valeurs de convergence croissantes jusqu'à l'exutoire, vu le traitement appliqué en présence de dépressions locales du modèle numérique de terrain. La figure 4.3 présente un exemple de carte de convergence obtenue par Faitou.

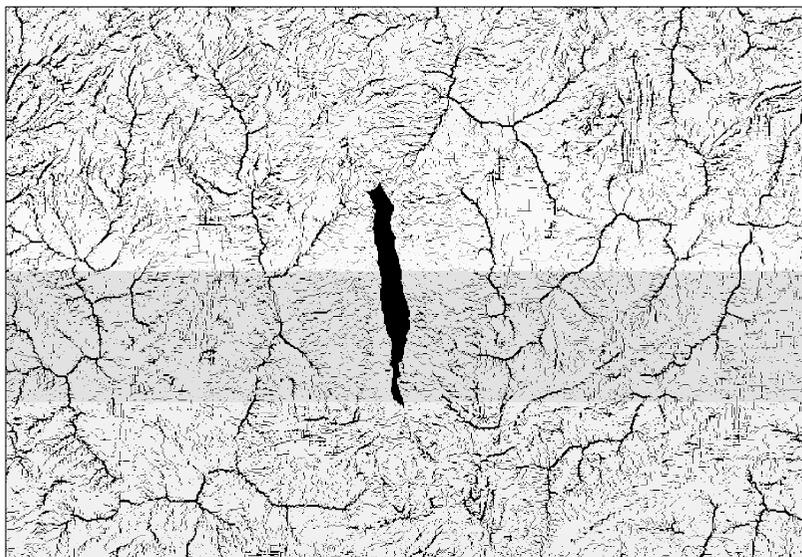


Figure 4.3 : Carte des convergences calculée par Faitou sur l'ensemble du modèle numérique de terrain correspondant à la carte nationale No 1346, Chanrion. Le lac de Mauvoisin apparaît au centre de la carte. Les zones blanches correspondent à des petites valeurs de convergence, alors que les zones noires indiquent une forte convergence. Cette carte des convergences fait ressortir clairement le réseau drainant d'un bassin versant.

Une fois les convergences obtenues pour l'ensemble de la matrice, la détermination des segments de rivières peut débuter. Pour cela, un paramètre  $C_{\min}$  doit être choisi. Ce paramètre fixe la valeur seuil de convergence à partir de laquelle une rivière doit être considérée.  $C_{\min}$  permet de moduler le niveau de détail du réseau de rivières. Le choix d'une valeur basse implique la génération d'un réseau drainant

très dense, alors qu'une valeur élevée ne va détecter que les cours d'eau principaux.

La détermination des segments de rivières ressemble fortement au calcul des convergences. Au lieu d'être effectué sur les valeurs d'altitudes, ce dernier est réalisé sur les valeurs de convergence elles-mêmes qui sont tout d'abord triées par ordre croissant. Chaque valeur supérieure à  $C_{\min}$  marque le début d'un segment. La fin du segment, la cellule cible, est déterminée par une succession de critères.

Le premier critère de choix repose sur la pente maximale, comme pour le calcul de convergence, et permet de trouver la fin du segment de rivière. Si plusieurs pentes entre la cellule origine et ses 8 voisines sont identiques, alors l'algorithme se dirige vers la cellule voisine qui présente la plus grande valeur de convergence. Finalement, si aucun des critères précédents n'est rempli, le passage est forcé dans la direction de la cellule voisine la plus basse, même si celle-ci est située plus haut que la cellule origine. Ce traitement est nécessaire pour sortir des dépressions locales du modèle numérique de terrain.

La troisième phase de cet algorithme de recherche du réseau de rivières consiste à assurer une pente descendante pour chaque segment déterminé. Si un segment à pente montante a été généré, l'altitude  $z$  de la cellule cible est corrigée et abaissée selon la relation, exprimée en mètres :

$$z_c = z_o - 0.01 \quad (4.3)$$

Malgré une certaine réticence à modifier le modèle numérique de terrain original, cette opération demeure indispensable pour forcer le passage dans certaines zones tourmentées de la topographie. Certaines régions alpines, comme les petits lacs naturels, présentent un exutoire très encaissé et de petite dimension. Ce niveau de détail échappe à la résolution du MNT à mailles de 25 mètres et aucun point d'altitude n'est pris dans la gorge.

Cette modification des altitudes peut également être considérée comme un filtre numérique élaboré, appliqué au MNT. Au lieu de modifier sans distinction l'ensemble des altitudes par un filtre numérique de type moyenne ou médiane, comme cela est souvent recommandé dans la littérature, l'algorithme développé ne corrige le MNT que dans quelques régions ciblées en fonction du réseau drainant.

Ces trois phases, à savoir le calcul de la convergence, la détermination des segments de rivière et la correction des altitudes, représentent une itération du processus global de génération automatique du réseau drainant. L'algorithme itère sur ces trois phases jusqu'au moment où plus aucune altitude sur le MNT n'est à corriger. Le résultat obtenu est une collection de segments de rivières, définis par leur origine et leur fin, ainsi qu'un nouveau modèle numérique de terrain qui assure la continuité des pentes descendantes sur l'ensemble du réseau de rivières.

#### **4.4. Génération du modèle de surface**

Une simulation par Faitou de la formation et du transfert des crues sur un bassin versant requiert un couplage entre le modèle 2D de surface et le modèle 1D des rivières. Chaque segment de rivière compris entre deux profils est alimenté par deux hydrogrammes latéraux, c'est-à-dire sur chacune de ses rives. Pour assurer l'intégrité de ce couplage, Faitou génère en fait simultanément le modèle de rivières et le modèle de surface.

Pour commencer, la détermination du réseau de rivières est lancée sur l'ensemble du modèle numérique de terrain, mais avec le paramètre  $C_{\min} = 0.4$ . Cela signifie que chaque point du MNT fait partie d'un segment de rivière. De cette façon, tous les chemins d'écoulements sont certains d'avoir une pente descendante non nulle, condition indispensable au calcul selon les hypothèses cinématiques.

Puis vient la délimitation automatique du bassin versant. Cette opération requiert l'introduction de la notion d'exutoire. Pour Faitou, un exutoire est constitué d'un nombre quelconque de segments créés sur la grille du MNT. Ainsi, un segment choisi sur le tracé d'un cours d'eau permet de représenter un exutoire ponctuel au bas d'une vallée. Mais l'ensemble des segments constituant le contour d'un lac permet de considérer une retenue comme exutoire du bassin versant. La délimitation automatique du bassin versant consiste à détecter toutes les cellules du MNT qui convergent vers l'exutoire. Cette opération se base simplement sur la direction du vecteur orientation de chaque cellule puisque la continuité des pentes descendantes et la suppression des dépressions locales ont été effectuées lors de la détermination du réseau de rivières avec  $C_{\min} = 0.4$ .

A ce moment, une nouvelle détermination du réseau de rivières a lieu avec la valeur du paramètre  $C_{\min}$  souhaitée. Seuls les segments de rivières faisant partie du bassin versant sont créés. La génération du modèle de surface peut dès lors débiter.

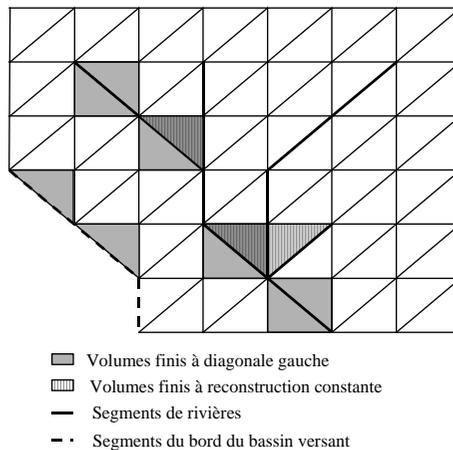


Figure 4.4: Principales difficultés du maillage automatique de Faitou.

La figure 4.4 regroupe les principales difficultés que doit surmonter le mailleur automatique des volumes finis. Tout d'abord, pour les raisons d'intégrité citées plus haut entre les modèles 2D et 1D, aucun bord de volume fini ne doit traverser un segment de rivière. Faitou ne génère que des volumes finis triangulaires sur les points du MNT. Par défaut, chaque triangle est créé avec une diagonale « droite ». Mais par endroit, le respect des segments de rivières demande une diagonale « gauche ». Cette même difficulté est rencontrée sur la frontière du modèle. Au fur et à mesure de la création des éléments, les données topologiques sont également établies. Elle concernent essentiellement les relations de voisinage pour les bords de chaque volume fini. En effet, la méthode numérique présentée au chapitre 3 exige la connaissance, pour chaque bord, de son voisin de droite et de gauche, ainsi que de son voisin amont et aval.

Après la génération complète des volumes finis, le pré-processeur de Faitou s'occupe de créer pour chaque élément les super volumes de contrôle indispensables à la reconstruction linéaire. Là également, la présence du réseau de rivières complique passablement cette tâche. Les super volumes de contrôles qui servent à déterminer le gradient du flux sur chaque volume fini ne doivent jamais traverser une rivière. En effet, les flux sur les différentes rives d'une rivière sont totalement indépendants et il serait aberrant d'estimer leur variation en allant voir ce qui se passe de l'autre côté d'un cours d'eau. Cette situation implique que certains volumes finis sont forcés à une reconstruction constante par manque de voisins, comme le montre également la figure 4.4.

## **5. Quelques exemples pratiques d'application**

### **5.1. Simulation du bassin versant de Mattmark**

Le bassin versant de Mattmark, en Valais, a été choisi pour effectuer le premier test de validité du modèle Faitou. La documentation disponible sur la crue du 23 au 25 septembre 1993 dans cette région explique en grande partie les raisons de ce choix. Cette crue, au caractère exceptionnel, a entraîné le premier déversement par l'évacuateur de la digue de Mattmark depuis sa construction.

Le bassin versant de la retenue occupe une surface de 37 km<sup>2</sup> au fond de la vallée de la Viège de Saas. Son altitude varie entre 2200 et 3900 m et sa pente moyenne est de 21%. Il est principalement composé de sols incultes et de rochers, les glaciers occupant tout de même 22% de sa surface. La figure 5.1 présente une vue de la région de Mattmark sous la forme d'une carte des ombres obtenue par Faitou.

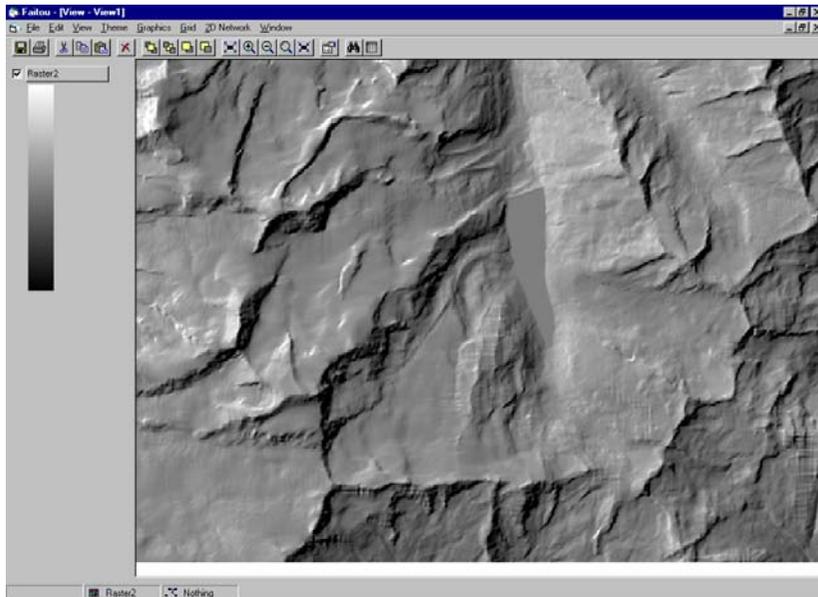


Figure 5.1 : Vue de la région de Mattmark. Sur cette carte des ombres obtenue par Faitou, la digue est visible au centre, appuyée contre la moraine sud du glacier de l'Allalin. Le lac de retenue s'étend en direction du sud.

### 5.1.1. Génération du modèle de calcul

La première étape de la simulation consiste à élaborer le maillage du bassin versant en volumes finis ainsi qu'à générer le réseau de rivières, comme cela est présenté sous 4.3. Le modèle numérique de terrain de la région, avec une résolution de 250 m, constitue l'information de base pour la réalisation de ce travail. A ce niveau de définition, il a été choisi de considérer le début d'une rivière après la convergence de 3 cellules. De cette façon, le réseau de rivières généré correspond bien avec les cours d'eau mentionné sur la carte nationale au 1:25'000. Cette procédure aboutit au modèle présenté à la figure 5.2.

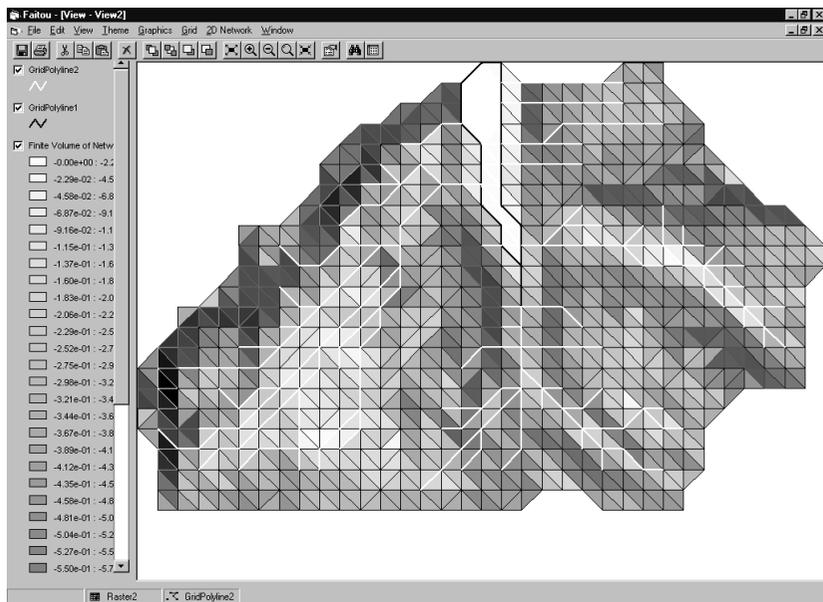


Figure 5.2 : Modèle de calcul généré sur la base du MNT 250. Les volumes finis sont teintés en fonction de leur plus grande pente. Le réseau de rivières apparaît en blanc. Le lac se situe tout au nord de cette carte.

L'aspect de cette image peut sembler de prime abord quelque peu grossier. Il faut cependant relever que ce modèle compte tout de même 1071 volumes finis, 1863 bords où les flux sont estimés, 290 profils en travers ainsi que 36 jonctions de rivières.

Il serait envisageable d'utiliser un modèle numérique de terrain à résolution plus fine, à mailles de 50 m par exemple. Le modèle généré pour ce cas est présenté à la figure 5.3.

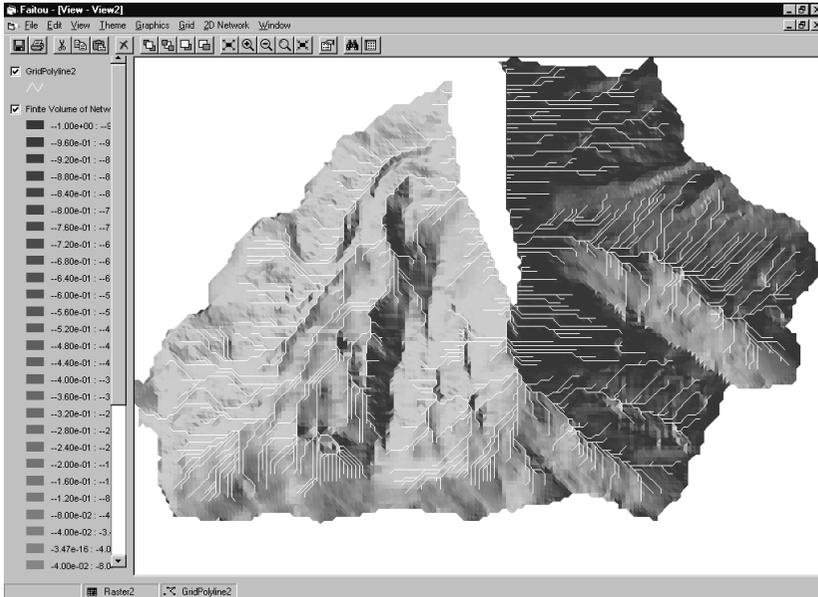


Figure 5.3 : Modèle de calcul généré sur la base du MNT 50. Les volumes fins sont ici teintés en fonction de la composante en x (est-ouest) de leur orientation. Le réseau des rivières apparaît en blanc.

A ce niveau de résolution, le modèle de surface compte 28'229 volumes fins et 46'472 bords, et le modèle de rivières gère 4723 profils en travers et 385 jonctions. Pour le premier test de Faitou à l'échelle du bassin versant, il a paru raisonnable d'utiliser le modèle à 250 m, qui offre déjà une bonne discrétisation spatiale.

Dans un même esprit de simplification, le réseau de rivières est calculé avec le modèle de l'onde diffusante et non pas avec les équations complètes de St-Venant. Les fortes pentes rencontrées dans ces rivières justifient pleinement l'usage de ce modèle simplifié.

### 5.1.2. *Simulation de la crue de septembre 1993*

Les données de pluies et de débit ont été établies dans le cadre du projet Cruex (Cruex 1995). Comme le bassin versant ne dispose pas

d'une station limnimétrique, la crue a été reconstituée à partir des enregistrements du niveau du lac et des données d'exploitation de l'aménagement hydroélectrique. Selon les méthodes de calcul utilisées pour cette opération, le débit de pointe de la crue peut être estimé entre 134 et 152 m<sup>3</sup>/s .

La densité des éléments en section  $s$  a été fixée à  $s = 0.99$ , valeur proche de l'unité, et n'a pas été soumise au processus de calage. Cette valeur de  $s$  permet à l'écoulement de disposer d'une faible section d'écoulement pour les très petites hauteurs d'eau, ce qui n'est pas le cas pour  $s = 1$ . L'optimisation des deux autres paramètres du modèle, à savoir le diamètre équivalent  $D$  et la densité de couverture  $p$ , a été réalisée « à la main ». Après quelques essais, l'hydrogramme présenté à la figure 5.4 a été obtenu avec  $D = 0.5$  m et  $p = 0.1$ .

Compte tenu des incertitudes liées à la reconstitution des hydrogrammes ainsi qu'à la définition de la pluie, il peut être admis que la crue simulée par Faitou reproduit bien le comportement mesuré, et ceci sans recours à un processus de calage excessif. Il n'est pas indispensable, en effet, d'optimiser les paramètres  $D$  et  $p$  au-delà de la première décimale pour obtenir un bon résultat. Cette faible sensibilité du modèle par rapport à la valeur prise par ses paramètres est un gage de qualité et de robustesse, particulièrement lorsqu'il est utilisé en extrapolation pour simuler des crues extrêmes.

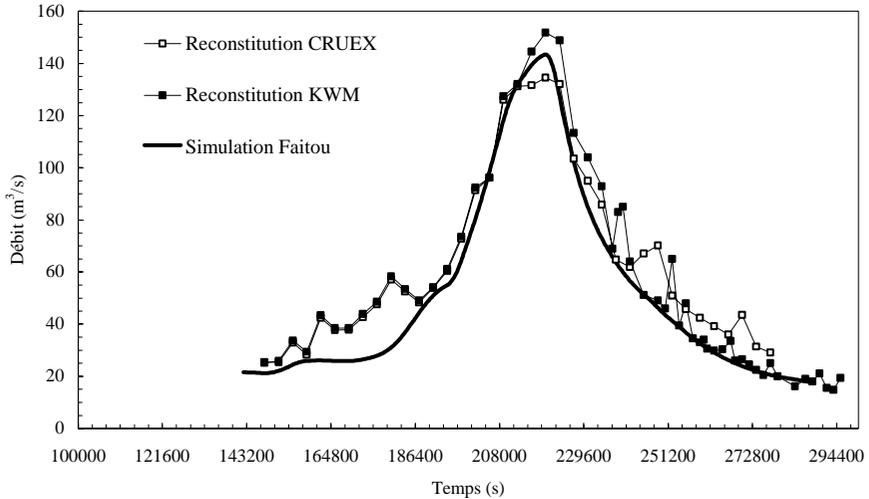


Figure 5.4 : Comparaison entre les hydrogrammes reconstitués dans la retenue de Mattmark et la simulation Faitou avec  $D = 0.5 \text{ m}$ ,  $p = 0.1$  et  $s = 0.99$ .

## 5.2. Simulation du bassin versant de la Veveyse

Afin de renforcer la conviction de la validité du modèle Faitou, il a été choisi de le soumettre à un deuxième test sur un bassin versant aux caractéristiques fort différentes de celui de Mattmark. Redescendons des sommets alpins pour étudier le bassin versant de la Veveyse situé en bordure du plateau suisse à proximité du lac Léman.

Une station limnimétrique du SHGN<sup>2</sup> enregistre les débits à l'entrée du voûtage des Toveires, à l'amont immédiat de la ville de Vevey. L'emplacement de cette station coïncide avec l'exutoire choisi du bassin versant. Les données de débit et de pluie utilisées ici ont été

---

<sup>2</sup> SHGN : Service Hydrologique et Géologique National

collectées dans le cadre d'une étude effectuée au Laboratoire de Constructions Hydrauliques (LCH) de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne(EPFL).

Le bassin versant de La Veveyse occupe une surface de 62 km<sup>2</sup>. Son altitude est comprise entre 372 et 2014 ms.m. Son régime hydrologique est caractérisé par des montées en crue très rapides. Le plus grand débit mesuré, le 8 juillet 1965, a été de 165 m<sup>3</sup>/s .

Comme pour Mattmark, le modèle de calcul a été généré sur la base du MNT à 250 m de résolution. Il est présenté à la figure 5.5 ainsi que les deux affluents principaux, la Veveyse de Fégire et la Veveyse de Châtel, qui se rejoignent avant de descendre en direction de la ville de Vevey.

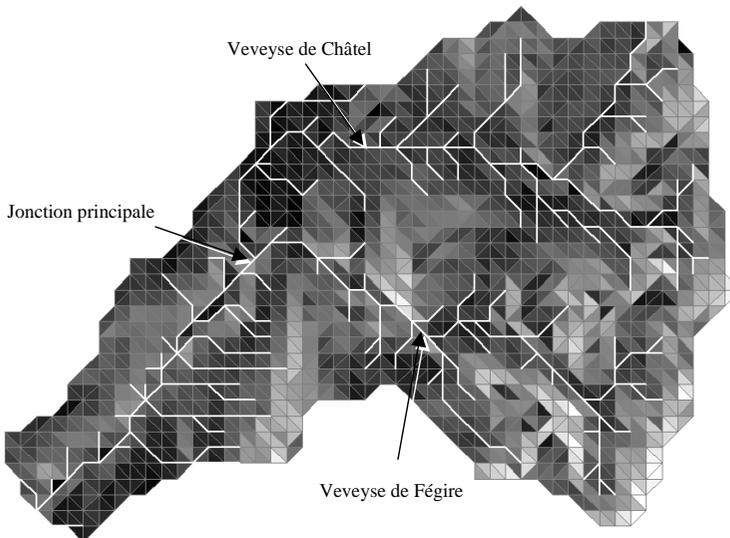


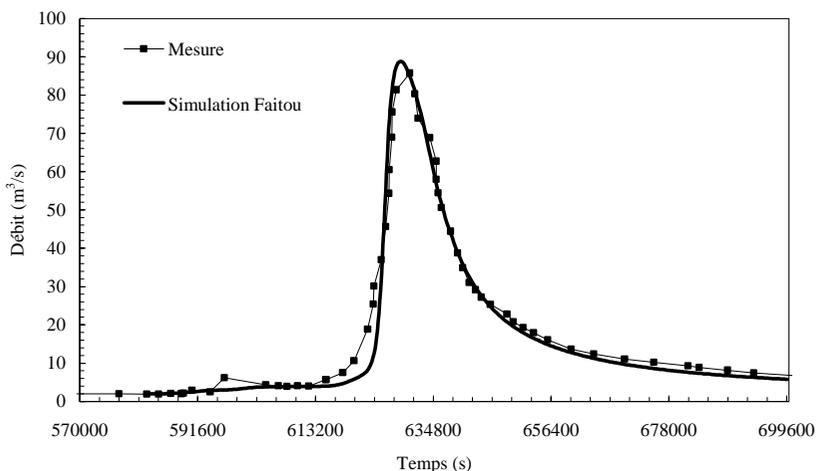
Figure 5.5 : Modèle de calcul du bassin versant de la Veveyse. Les volumes finis sont teintés selon leur pente.

La crue du 8 juin 1990 a été choisie pour tester le modèle Faitou sur ce bassin versant. Le résultat obtenu est présenté sur la figure 5.6 en superposition de la crue mesurée.

Cette simulation a été effectuée avec les paramètres  $D = 0.1$  m et  $p = 0.4$  en ayant fixé *a priori*  $s = 0.99$ . Ce résultat a une nouvelle fois été obtenu après quelques essais « à la main », sans processus d'optimisation automatique.

Afin de mettre en évidence tout le potentiel d'une modélisation entièrement distribuée spatialement, la zone de la jonction entre la Veveyse de Fégire et la Veveyse de Châtel montrée à la figure 5.7, est examinée dans le détail.

La figure 5.8 présente les hydrogrammes simulés dans les trois branches de cette jonction. La contribution de chaque affluent peut être analysée séparément. L'effet du routage jusqu'à l'exutoire du bassin versant est également visible puisqu'au début de la crue, le débit à l'aval de la jonction est supérieur au débit simulé à l'exutoire du bassin versant, situé environ 4 km en aval..



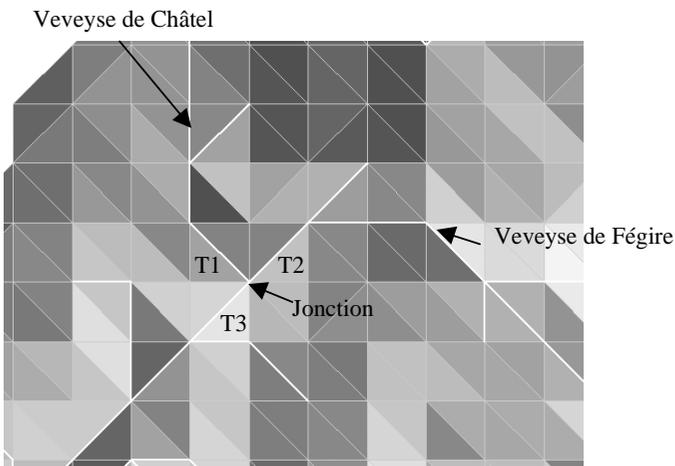


Figure 5.7 : Détail du modèle Faitou dans la zone de la jonction des deux affluents principaux.

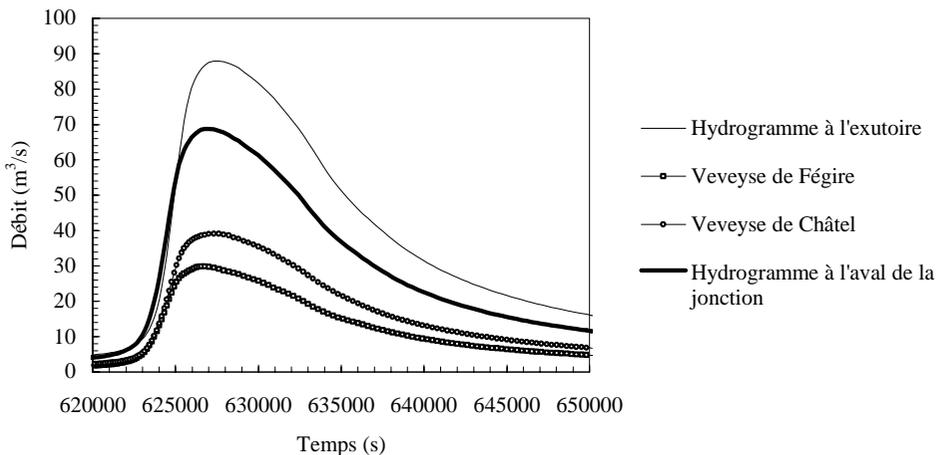


Figure 5.8 : Détail des hydrogrammes de la jonction de la Veveyse de Châtel et de la Veveyse de Féglise.

En plongeant plus profondément dans le détail, la figure 5.9 présente les hydrogrammes latéraux alimentant le réseau de rivières au

voisinage de la jonction, dont la localisation est précisée sur la figure 5.7. L'influence de la surface et de la topographie de chaque sous bassin sur l'aspect de l'hydrogramme est ici mise en évidence.

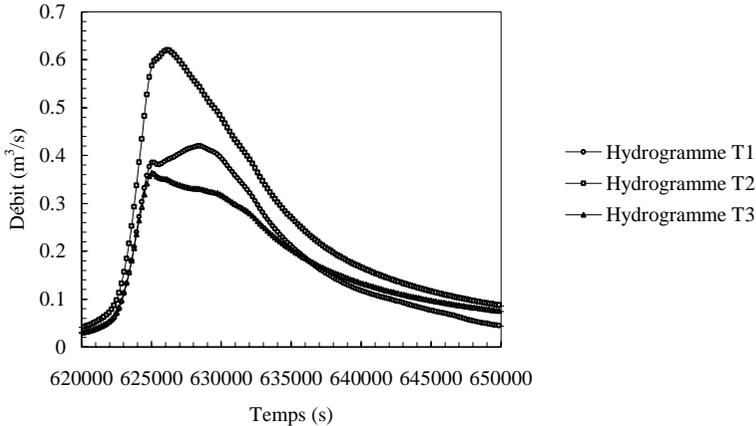


Figure 5.9 : Hydrogrammes latéraux alimentant les deux tronçons amont et le tronçon aval de la jonction présentée à la figure 5.7.

La crue simulée à l'exutoire du bassin versant de la Veveyse résulte, en fait, de la combinaison et du routage en rivières de 630 hydrogrammes latéraux, tels que les 3 présentés à la figure 5.9.

### 5.3. Simulation du bassin versant des Toules

Le barrage voûte des Toules est situé en Suisse, plus précisément dans le canton du Valais et sur la route historique du col du Grand St-Bernard. Sa ligne de crête supérieure est le sommet des Alpes valaisannes formant la frontière entre la Suisse et l'Italie. Faisant partie du bassin versant du Rhône, la direction principale d'écoulement est sud-nord. Sur la carte des ombres présentées à la figure 5.10, le plan d'eau de la retenue ainsi que le bassin versant

naturel sont bien visible. La description détaillée de cet aménagement hydroélectrique et de son bassin versant est donnée par Boillat et al. (1999).

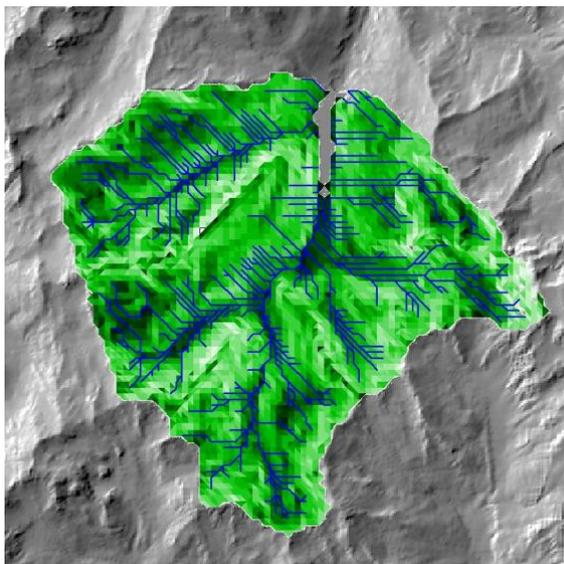


Figure 5.10. Carte des ombres de la région de la retenue des Toules obtenue à l'aide de Faitou et résultat de la génération automatique du modèle de calcul

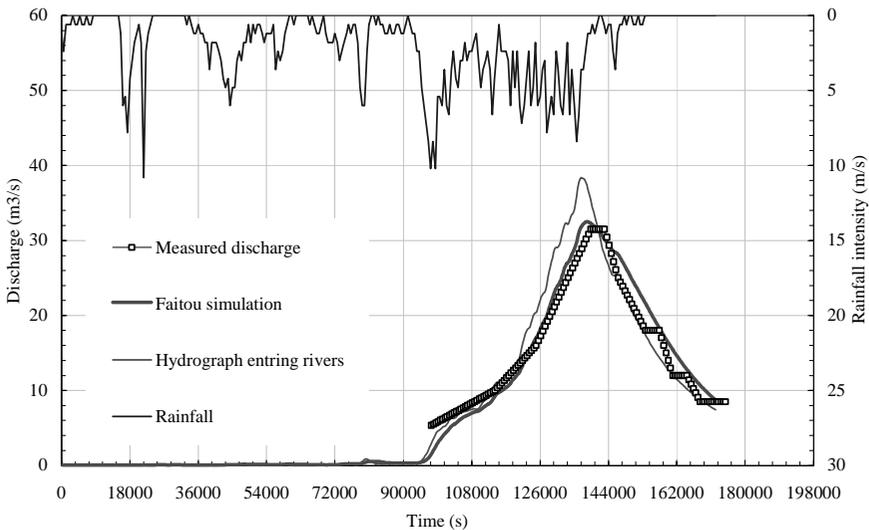
### 5.3.1. *Simulation de la crue de septembre 1993*

A titre d'illustration du potentiel du modèle Faitou, la crue historique de septembre 1993 à été simulée. La figure 5.11 présente graphiquement cet événement.

La pluie représentée ici est directement l'enregistrement à pas de temps de 10 minutes effectué à la station météorologique du Grand St-Bernard. Il s'agit donc bien de la pluie brute qui est directement donné à la simulation numérique. Bien que ce point n'ait pas été développé dans cette communication, le modèle Faitou considère une infiltration, également spatialement distribuée. Ceci est évident

lorsqu'on observe la réponse quasi nulle du bassin versant durant le premier jour de pluie.

La crue mesurée présente un aspect qui peut paraître surprenant. Il faut savoir qu'il n'existe aucune station de jaugeage à l'entrée de cette retenue et que cet hydrogramme a été reconstitué par calcul sur la base des enregistrements du niveau du lac et des données d'exploitations de la centrale (pompage et turbinage). La précision de la mesure du niveau du plan d'eau explique la présence de paliers de débit constant.



La figure 5.11 présente également l'hydrogramme « virtuel » entrant dans le réseau des rivières. Cet hydrogramme ne peut être mesuré en réalité, mais correspond à la sortie du modèle 2D du ruissellement de surface. Il est calculé par addition simultanée de tous les apports entrant dans les rivières. Son intérêt est de le comparer

avec l'hydrogramme entrant dans la retenue (dénommé par Simulation Faitou sur la figure 5.11) afin de mesurer l'effet de routage du réseau hydrographique.

Il peut être admis, au vu de cette représentation graphique, que le modèle Faitou est en mesure de reproduire fidèlement le comportement d'un bassin versant.



## 6. Conclusions

La première partie de cette communication traite par le détail les aspects théoriques de l'écoulement hydrologique en fine lame. A partir des équations hydrauliques de base, tout le développement analytique est présenté et toutes les simplifications possibles des équations sont analysées, expliquées et justifiées. La prise en compte des discontinuités, phénomène omniprésent en hydraulique de surface, occupe une place importante dans cette analyse.

S'il apparaît que la résolution des équations dynamiques complètes n'est pas indiquée pour un écoulement hydrologique en fine lame considéré à l'échelle du bassin versant, les hypothèses diffusive et cinématique constituent les compromis les mieux adaptés. L'hypothèse cinématique, qui ne conserve que les termes de gravité et de frottement, offre la simplification mathématique la plus radicale, avec sa relation explicite vitesse – épaisseur de lame ruisselante. En regard de la discrétisation spatiale envisageable actuellement par les moyens informatiques, elle apparaît comme une alternative intéressante. La simplicité de l'expression mathématique, qui lie la vitesse à la pente topographique a cependant un prix : elle exige une pente définie non nulle et positive sur l'ensemble du bassin versant. La mise en œuvre de cette expression simplifiée demande donc un traitement préalable de la topographie, parfois délicat à réaliser en conditions réelles. Le modèle mathématique n'en demeure pas moins non-linéaire et capable d'induire des ressauts hydrauliques « simplifiés », ce qui implique la mise en œuvre de schémas de résolution capturant les chocs.

L'hypothèse diffusive, quant à elle, conserve le terme de gradient de pression. La pente « motrice » de l'écoulement redevient plus logiquement la pente de la ligne d'eau, et non plus la pente de fond comme dans le cas cinématique. La prise en compte de ce terme implique la formation de ressauts hydrauliques mathématiquement

continus. La dimension de ces « transitions » est cependant à comparer avec la discrétisation spatiale du domaine. Une estimation de l'ordre de grandeur de ce terme, indique qu'il est environ mille fois inférieur par rapport au frottement et à la gravité. Si le traitement topographique prérequis au calcul ne s'impose plus théoriquement, il devient, pratiquement, moins important. L'écoulement peut alors franchir des zones horizontales, et même à contre-pente, en comblant les dépressions locales. La réalité physique de cette zone de rétention doit par contre être validée par une étude de terrain.

La recherche hydraulique ne s'est intéressée que très peu aux lois de comportement des écoulements hydrologiques en fine lame. Une recherche originale dans ce domaine a permis de formuler une expression adaptée à ces conditions particulières. Sa prise en compte dans un modèle hydrologique garantit une base physique réelle au résultat obtenu. Cette expression de la perte de charge se fonde sur un modèle géométrique de l'état de surface d'un terrain naturel. Ce modèle simple est constitué d'une surface plane recouverte de calottes sphériques. La loi de comportement proposée est valide à la fois pour les écoulements laminaires et turbulents. De plus, elle garantit une transition régulière entre les deux, condition indispensable à une simulation numérique. Dans des situations extrêmes de régime d'écoulement, cette relation se confond avec les lois reconnues de l'hydraulique de surface.

Un logiciel informatique a été écrit afin de mettre en œuvre les développements théoriques et expérimentaux effectués. Il autorise également la création automatique de l'ensemble du modèle numérique de calcul en assurant une parfaite adéquation entre les données de base et les équations utilisées. A partir d'un modèle numérique de terrain, une démarche aisée permet l'obtention rapide de résultats grâce à un schéma robuste de résolution par volumes finis non structurés, à pas de temps adaptatifs. Trois exemples d'application de la méthode et des outils proposés permettent de juger de sa validité.

Il paraît indéniable que les modèles hydrologiques spatialement distribués et à base physique constituent l'avenir de cette activité aussi difficile que passionnante. Ils permettent tant de réduire les phases de calage que d'être utilisés en tant qu'outil d'aide à la décision dans une gestion active de bassin versant. Cette communication, orientée mécanique des fluides et hydraulique, pose les bases tant théoriques que numériques et expérimentales d'une telle approche.



# Notations

<i>Symbole</i>	<i>Définition</i>
$\alpha$	Coefficient de la relation générale hauteur-vitesse
$e, e'$	Constantes d'intégration
$f^T$	Inconnue intégrée au sens de Reynolds
$f''$	Partie fluctuante d'une inconnue au sens de Reynolds
$F_0$	Nombre de Froude généralisé
$h_0$	Epaisseur caractéristique de lame d'écoulement, hauteur normale à un exutoire
$h$	Hauteur d'eau totale
$h_s$	Epaisseur de lame entre l'axe x et la surface libre
$h_f$	Epaisseur de lame entre le fond et l'axe x
$h(s^-, t), h(s^+, t)$	Hauteurs à gauche et à droite d'une transition
$i$	Vitesse d'infiltration
$J_f$	Terme de frottement généralisé
$K_0$	Nombre d'onde cinématique
$l_0$	Longueur caractéristique d'écoulement
$m$	Coefficient caractéristique de l'expression de perte de charge généralisée
$p$	Pression
$p^*$	Pression adimensionnelle
$q$	Débit par unité de largeur
$q'$	Débit mesuré par un observateur se déplaçant avec une discontinuité
$r$	Vitesse des précipitations
$S_0$	Pente de fond
$S_f$	Pente énergétique

$S_{ij}$	Composantes de turbulence intégrées sur la hauteur
$t_i$	Composantes du frottement sur le sol
$t_0$	Temps caractéristique
$T_w$	Période d'onde adimensionnelle
$\bar{U}_i$	Vitesse moyenne sur la hauteur d'eau
$u_i$	Vitesse selon l'axe $x_i$
$u_{i,0}$	Vitesses caractéristiques selon chaque axe
$u_i^*$	Vitesse adimensionnelle selon l'axe $x_i$
$U$	Vitesse de déplacement du choc
$W_0$	Vitesse caractéristique selon la droite de plus grande pente
$x^*, t^*, h^*, u^*$	Coordonnées et variables adimensionnelles
$\alpha$	Coefficient caractéristique de l'expression de perte de charge généralisée
$\varepsilon_i$	Rapport entre une vitesse $u_{i,0}$ et la vitesse caractéristique $W_0$
$\theta_i$	Angles que font les axes du repère cartésien trirectangle avec l'axe vertical $oz'$
$\tau_{ij}$	Contraintes visqueuses
$\rho$	Masse volumique
$\lambda_i$	Longueurs caractéristiques suivant les axes $x_i$
$\sigma_{ij}$	Contraintes turbulentes
$\sigma_{ij}^*$	Contraintes turbulentes adimensionnelles
$\rho_{ij}$	Paramètres d'inégale répartition de vitesses sur la hauteur
$\mu(h, x)$	Coefficient de diffusion

# Bibliographie

- ARCHAMBEAU P., PIROTON M., MOUZELARD TH. AND ERPICUM S. (2001), *Impact studies and water management with WOLFHYDRO : a new physically based hydrological solver*, International Symposium on Environmental Hydraulics, Arizona State University, USA.
- AL-MASHIDANI G. AND TAYLOR C., *Finite element solutions of the shallow water equations - surface runoff*, Finite Elements Methods in Flow Problems, pp 385-395.
- BEROD D. (1995) « *Contribution à l'estimation des crues rares à l'aide de méthodes déterministes. Apport de la description géomorphologique pour la simulation des processus.* » Thèse No 1319, EPFL.
- BOILLAT J.-L., (1980) Polycopié « *Hydraulique urbaine* », Laboratoire de Constructions Hydrauliques, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- BOILLAT J.-L., DUBOIS J. (1998) « *Application of the PMP-PMF methodology to the Mattmark scheme* » Proc. Of Int. Symp. On new trends and guideline on dam safety, pp 1221-1228, Barcelona, 17-19 june.
- BOILLAT J.-L., DUBOIS J. (1999) « *Approche méthodologique PMP-PMF. Application au barrage des Toules.* » Colloque international sur la sécurité des barrages, Liège.
- BOILLAT J.-L., DUBOIS J., SCHLEISS A. (2000) « *Utilisation possible de la retenue de Mattmark pour la protection contre les crues et la production d'énergie.* » Proc. XX Congress ICOLD, Q. 77-R.23, pp. 341-357, Beijing.

- BOILLAT J.-L., MARDINI R., IHLY T., (1997) « *Flood modeling related to land development.*” DHI software user conference, Copenhagen.
- CHEN C.L. (1980), *Dam-break wave model: formulation and verification*, Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol 106, N° HY5, pp 747-767.
- CHEN C.L. (1987), *Discharge and depth behind a partially breached dam*, Journal of Hydraulic Engineering, pp 648-654.
- CHEN C.L. (1980), *Laboratory verification of a dam-break flood model*, Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol 106, N° HY4, pp 535-555.
- CHEN C.L. (1992), *Momentum and energy coefficients based on power-law velocity profile*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol 118, n° 11, November, pp 1571-1584.
- CHEN Y.H., SIMONS D.B. and MOLINAS A.(1978), *Hydrologic and geomorphic changes in a river basin induced by a dam break*, Proceedings of the International Symposium on Risk and Reliability in Water Resources, Vol 2, pp 616-625.
- CHEN C.L. and CHOW V.T. (1968), *Hydrodynamics of mathematically simulated surface runoff* A contribution to the International Hydrological Decade, Hydraulic Engineering Series n° 18, University of Illinois.
- CHOW, V., T. (1988) “*Applied Hydrology*”, Civil Engineering Series, *Mc Graw-Hill International Edition*.
- CONSUEGRA D., NIGGLI M., MUSY A. (1998) “*Concepts méthodologiques pour le calcul des crues. Application au bassin versant supérieur du Rhône.* », *Wasser, Energie, Luft – eau, énergie, air*, Heft 9/10, pp. 223-231.

- CROLEY T.H. and HUNT B. (1981), *Multiple-valued and non-convergent solutions in kinematic cascade models*, Journal of Hydrology, Vol 49, pp 121-138.
- CRUEX (1995) « *Cinquième rapport intermédiaire. Exercice de coordination de Mattmark.* » LCH, LASEN, IATE, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- CUNGE J.A., (1969) « *Au sujet d'une méthode de calcul de propagation des crues (Méthode Muskingum)* » Journal of Hydraulic Research, 7(2), pp. 205-230.
- CUNGE J.A., (1991) Polycopié « *Simulation des écoulements non-permanents dans les rivières et canaux.* » Institut National Polytechnique de Grenoble, Ecole Nationale Supérieure d'Hydraulique et de Mécanique de Grenoble.
- DALUZ VIEIRA J.H. (1983), *Conditions governing the use of approximations for the Saint-Venant equations for shallow surface water flow*, Journal of Hydrology, Vol 60, pp 43-58.
- DUBOIS J. (1998) « *Comportement hydraulique et modélisation des écoulements de surface.* » Thèse No 1980, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne et Communication No 8, Laboratoire de Constructions Hydrauliques.
- DUBOIS J., BOILLAT J.-L. (1999) « *Numerical simulation of flood routing in complex schemes. The Routing System computer program.* » Proc. XXVIII IAHR congress 22-27 August, Graz, Austria.
- DUBOIS J., BOLLAERT E., BOILLAT J.-L. (1999) « *Optimisation of detention basin systems using the data flow programming technique.* » Proc. 2<sup>nd</sup> Inter-Regional Conference on Environment-Water, Lausanne.
- EL-JABI N., ROUSSELLE J., (1987) « *Hydrologie fondamentale.* » Génie Civil, Ecole Polytechnique de Montréal.

- HAGER W.H., SINNIGER R.O. (1988) « *Reservoir storage effect on design flood.*» Proc., Seizième Congrès des Grands Barrages, Q. 63-R. 80, pp. 1375-1399, San Francisco.
- HÖRLER A., (1962) « *Canalisation.* », Tiré à part du manuel de l'ingénieur, tome II.
- HORTON R. E. (1933) "*The role of infiltration in the hydrologic circle.*" *Trans. Amer. Geophys. Union*, 14, 446-460.
- JAYAWARDENA A.W. and WHITE J.K. (1977), *A finite element distributed catchment model, I. analytical basis*, *Journal of Hydrology*, Vol 34, pp 269-286.
- JAYAWARDENA A.W. and WHITE J.K. (1979), *A finite element distribution catchment model, II. Application to real catchments*, *Journal of Hydrology*, Vol 42, n° 3/4, pp 231-249.
- JORDAN J.-P., BATHURST J.-C., MUSY A. (1987) "*Modélisation hydrologique à base physique sur un bassin versant rural en climat tempéré.* » Proc. of the Symposium AISH, Vancouver.
- KAWAHARA M., NAKAZAWA S., OHMORI S. and TAGAKI T. (1980), *Two-step explicit finite element method for storm surge propagation analysis*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 15, pp 1129-1148.
- KAWAHARA M., TAKEUCHI N. and YOSHIDA T. (1978), *Two step explicit finite element method for Tsunami wave propagation analysis*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 12, pp 331-351.
- KAWAHARA M. and YOKOYAMA T. (1984), *Finite element method for direct runoff flow*, *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, HY4, pp 519-534.
- KEIFER J.-C., CHU H.H. (1957) "*Synthetic storm patterns for drainage design.*" *Journal of Hydraulics Division*, Vol. 83, No 4.

- KÖLLA E. (1986) « *Zum Abschätzung von Hochwassern in Fließgewässern an Stellen ohne Direktmessungen.* », Mitteilung der Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie, ETH Zürich, 163 p.
- LANE L.J. and WOOLHISER D.A. (1977), *Simplifications of watershed geometry affecting simulation of surface runoff*, Journal of Hydrology, Vol 35, pp 173-190.
- METCALF AND EDDY, Inc., University of Florida, and Water Resources Engineers, Inc. (1971), *Storm Water Management Model*, Vol. I. Final Report, 11024DOC07/71 (NTIS PB-203289), U.S. EPA, Washington, DC, 20460.
- MICHEL C., EDIJATNO, (1988) « *Réflexion sur la mise au point d'un modèle pluie-débit simplifié sur plusieurs bassins versants représentatifs et expérimentaux.* », CEMAGREF Antony.
- MORRIS E.M. (1980), *The propagation of waves in shallow water flow with lateral inflow*, Hydrological Sciences Bulletin, Vol 25, n° 1, pp 25-32.
- MUSY A., HIGY C., (1999) Polycopié "*Hydrologie appliquée*". Hydrologie et Aménagements, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- NAPIORKOWSKI J.J. and DOOGE J.C.I. (1988), *Analytical solution of channel flow model with downstream control*, Hydrological Sciences Journal, Vol 33, n° 3, pp 269-287.
- NASH J. E. (1957) "*The form of the instantaneous unit hydrograph.*" Int. Assoc. Sci. Hydrol., 45, 3, 1114-1121.
- PIROTTON M. (1994), *Modélisation des discontinuités en écoulement instationnaire à surface libre. Du ruissellement hydrologique en fine lame à la propagation d'ondes consécutives aux ruptures de barrages*, Editions L.H.C.N., 479 pages.

- PIROTTON M. (1995), *Modèle hydrologique conceptuel distribué d'écoulement quasi-tridimensionnel en fine lame sur bassin versant*, "Research and Development in the Field of Dams", pp. 689-700, Swiss National Committee on Large Dams, Switzerland.
- PIROTTON M. (1995), *Modélisation des ressauts en ruissellement hydrologique quasi-tridimensionnel sur terrains quelconques*, "Hydraulic Research and its Application next century, Vol I : Integration of Research approaches and applications", editor : Thomas Telford, pp. 546-549, "XXVI IAHR Congress HYDRA 2000", London, UK.
- PIROTTON M. (1997), *Une approche globale pour modéliser la genèse et la propagation des crues naturelles ou accidentelles*, Classe des Sciences, Académie Royale de Belgique, 182 pages.
- PIROTTON M. (1996), *A global approach of the unsteady surface flows computations including shocks, by finite elements*, Numerical Methods in Engineering Simulation, editors : M. Cerrolaza, C. Gajardo, C.A. Brebbia, Computational Mechanics Publications, pp. 45-52, Mérida, Venezuela.
- PIROTTON M. (1998), *A Physically-Based Approach to predict input hydrographs in managed reservoirs*, "New trends and Guidelines on Dam Safety", editor : L. Berga, AA. BALKEMA/Rotterdam /Brookfield, pp. 1215 - 1220.
- ARCHAMBEAU P., DEWALS B, ERPICUM S., MOUZELARD Th, PIROTTON M. (2002), *and WOLF software : a fully integrated device applied to modeling gradual dam failures and assessing subsequent risks*, Advances in Fluid Mechanics, 15-17 May 2002, Ghent, Belgium
- SINGH V. P. (1995) "*Computer models of watershed hydrology.*" Water Ressources Publications, 1129 pp.

- SINNIGER R. O., BOILLAT J.-L. DUBOIS J. (1995) « *L'hydrogramme de crue critique d'une retenue avec évacuateur de surface.* », Symposium CNSGB Recherche et développements dans le domaine des barrages, Crans-Montana, 7-9 septembre, pp. 653-664.
- SINNIGER R.O., HAGER W.H. (1989) « *Constructions Hydrauliques. Ecoulements stationnaires*» Traité de Génie Civil, Vol. 15, Presses Polytechniques Romandes.
- SOIL CONSERVATION SERVICE (1975) "*National Engineering Handbook, section 4, Hydrology.*" United States Department of Agriculture (USDA).
- TAYFUR G., LEVENT KAVVAS M., GOVINDARAJU R.S., STORM D.E. (1993), *Applicabilty of St. Venant equations for two-dimensional overland flows over rough infiltrating surfaces*, Journal of Hydraulic Engineering, Vol 119, n°1, pp 51-63.
- TAYLOR C., MASHIDANI G.A. and DAVIS J.M. (1974), *A finite element approach to watershed runoff*, Journal of Hydrology, Vol 21, pp 231-246.
- TAYLOR R.L. and ZIENKIEWICZ O.C. (1982), *Mixed finite element solution of fluid flow problems*, Finite Elements in Fluids, Vol 4, pp 319-345, chapter 1.
- VISCHER D. (1980) "*Das höchstmögliche Hochwasser und der empirische Grenzabfluss.*" SIA 40/80, pp 981-985.
- WALTERS F.H. (1991) "*Sequential Simplex Optimisation*" CRC Press LLC, Florida.
- WILLIAMS J. R., HANN R. W. (1973) "*HYMO, A Problem-Oriented Computed Language for Hydrologic Modeling.*" User's manual, ARS-S-9, United States Department of Agriculture (USDA).
- WOOLHISER D.A. and LIGGETT J.A. (1967), *Unsteady one-dimensional flow over a plane - the rising hydrograph*, Water Resources Research, Vol 3, n° 3, pp 753-771.

ZELLER J., GEIGER H., RÖTHLISBERGER G. (1980)  
« Starkniederschläge des schweizerischen Alpen und  
Alpenrandgebietes.» Eidg. Anstalt für forstliche  
Versuchswesen, Birmensdorf.





ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Prof. Dr A. Schleiss  
Laboratoire de constructions hydrauliques - LCH  
EPFL, CH-1015 Lausanne  
<http://lchwww.epfl.ch>  
e-mail: [secretariat.lch@epfl.ch](mailto:secretariat.lch@epfl.ch)