

N° 24

1951

SF₁ * P

BULLETIN
DU
SERVICE TECHNIQUE
DE
L'AÉRONAUTIQUE

Diffusion des inconnues hyperstatiques
dans les voitures à longerons couplés,

PAR

B. FRAEYS de VEUBEKE
INGÉNIEUR AU SERVICE DU MATÉRIEL VOLANT.

BRUXELLES

IMPRIMERIE MARCEL HAYEZ
112, rue de Louvain, 112

1951

Diffusion des inconnues hyperstatiques dans les voiles à longerons couplés.

INTRODUCTION

Le présent rapport contient un premier ensemble d'applications des principes de variation de l'élasticité aux structures aéronautiques.

Il est un fait connu que la théorie technique des poutres n'est généralement pas applicable à une aile dans son ensemble.

Dans les ailes à revêtement travaillant, le cisaillement et la torsion, variables le long de l'envergure, induisent des tensions secondaires qui, négligeables pour une poutre de section massive, deviennent du même ordre de grandeur que les tensions de la théorie habituelle. De plus, toute contrainte au gauchissement de la section à l'implanture n'a plus l'effet strictement local prédict par le « principe de Saint-Venant ».

D'autres structures d'ailes, à revêtement non travaillant, s'écartent trop du schéma prismatique, mais peuvent raisonnablement être traitées comme un assemblage de poutres justiciables individuellement de la théorie classique.

C'est à ce second type de construction qu'appartiennent les voiles envisagées ici.

Le couplage entre les deux poutres principales ou « longerons » peut être réalisé par un champ de nervures perpendiculaires; ce problème comporte un nombre fini d'inconnues hyperstatiques.

Quand le champ est assez dense il peut être remplacé par un champ de liaison élastique continu; le problème comporte alors des fonctions hyperstatiques continues.

Le premier point de vue a déjà reçu une solution remarquable par FRIEDRICH et VON KARMAN en 1928. Seule l'augmentation considérable de la rigidité de torsion des longerons nous force maintenant à généraliser la solution en prenant en considération l'élasticité des nervures, négligée à l'époque.

Le deuxième point de vue a fait l'objet de recherches suivies en Hollande, en Angleterre et en Italie.

Les deux points de vue sont abordés ici et le principe de variation des tensions y apporte des simplifications décisives. Il permet même d'étendre l'utilité du champ continu au delà des indications qualitatives, déjà précieuses en elles-mêmes pour la conception de la voilure, vers l'obtention de solutions approchées du problème réel par les méthodes directes du calcul des variations.

Enfin le couplage des longerons par membrures diagonales, abordé antérieurement par le principe de variation des déplacements et par la méthode de relaxation, apparaît beaucoup plus simplement comme réductible à un système d'équations récurrentes analogues à celles de FRIEDRICH et von KARMAN.

Je suis redevable au Prof^r L. BOUCKAERT de l'orientation de ces recherches vers l'application des méthodes variationnelles de l'élasticité; je tiens à l'en remercier ainsi que pour l'intérêt amical qu'il a témoigné pendant leur élaboration.

CHAPITRE PREMIER.

PRINCIPES DE VARIATION EN ÉLASTICITÉ.

Les théorèmes de variation fournissent la possibilité d'établir directement les équations différentielles qui gouvernent un problème d'élasticité aussi bien que des principes utiles pour en dériver des solutions approchées. Nous les passerons ici brièvement en revue.

§ 1. L'énergie de déformation interne.

Soit un parallélépipède élémentaire soumis à l'action de forces de volume (X, Y, Z) et de tensions appliquées aux six facettes qui le délimitent.

Donnons à tous les points de volume des déplacements infinitésimaux différentiables ($\delta u, \delta v, \delta w$). Le travail fourni par les forces extérieures et ramené à l'unité de volume est alors, par un calcul direct :

$$\begin{aligned}\delta W &= \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x \delta u + \tau_{xy} \delta v + \tau_{xz} \delta w) + \frac{\partial}{\partial y} (\dots) + \frac{\partial}{\partial z} (\dots) + X \delta u + Y \delta v + Z \delta w \\ &= \sigma_x \delta \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \delta \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{xz} \delta \frac{\partial w}{\partial x} + \dots + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X \right) \delta u + \dots\end{aligned}$$

Si ce déplacement n'est accompagné d'aucune variation de l'énergie cinétique (elle restera nulle pour fixer les idées), la même expression représente aussi l'accroissement que subit la densité d'énergie de déformation interne.

Celle-ci doit être indépendante de toute rotation ou translation en bloc, c'est-à-dire de tout déplacement additionnel de la forme

$$\begin{aligned}\delta u &= \delta u_0 + z \delta q - y \delta r; \\ \delta v &= \delta v_0 + x \delta r - z \delta p; \\ \delta w &= \delta w_0 + y \delta p - x \delta q,\end{aligned}$$

contenant six paramètres indépendants ($\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta p, \delta q, \delta r$).

Substituant dans δW et annulant les coefficients des trois premiers paramètres, il vient

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0, \\ \dots\end{aligned}\right\} \quad (\text{s. 1})$$

équations qui expriment les conditions d'équilibre de translation du volume élémentaire, annulant les coefficients des trois derniers paramètres :

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}, \quad \tau_{zy} = \tau_{yz}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

Ce sont les conditions bien connues d'équilibre de rotation qui font du tenseur des tensions un tenseur symétrique.

La densité d'énergie de déformation interne prend ainsi la forme

$$\delta W = \sigma_x \delta \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \dots + \sigma_z \delta \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (\text{c. 1})$$

Retenons qu'à partir de six composantes arbitraires pour le tenseur des tensions, il faut faire implicitement appel à des forces de volume (X, Y, Z) telles que les équations (c. 1) soient vérifiées.

§ 2. Principe de variation des déplacements.

On se place dans l'hypothèse où l'énergie de déformation est une fonction d'état exprimable en fonction des dérivées partielles des composantes du déplacement (u, v, w).

Le corps est supposé soumis à des forces de volume imposées ($\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$) dont l'énergie potentielle est alors

$$P_V = - \int_V (\bar{X} u + \bar{Y} v + \bar{Z} w) dV,$$

et, sur une partie S_1 de sa surface, à des tensions imposées ($\bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z$), dont l'énergie potentielle a pour valeur

$$P_S = - \int_{S_1} (\bar{p}_x u + \bar{p}_y v + \bar{p}_z w) dS.$$

Soient alors (u, v, w) un système différentiable des fonctions-déplacement et ($\delta u, \delta v, \delta w$) des variations indépendantes et arbitraires de ces déplacements, assujetties à vérifier sur la surface complémentaire S_2 les conditions

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad w = \bar{w}, \quad (\text{c. 1})$$

d'où

$$\delta u = 0, \quad \delta v = 0, \quad \delta w = 0, \quad \text{sur } S_2;$$

le principe de variation des déplacements énonce que « parmi tous les déplacements compatibles avec (c. 1), ceux-là sont réalisés qui rendent stationnaire la variation première de l'énergie totale » :

$$\delta \left[\int_V W dV + P_V + P_S \right] = 0. \quad (\text{v. 1})$$

En effet, considérant (c. 1) et intégrant par parties, il vient, par application de ce principe :

$$-\int_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \bar{X} \right) \delta u + \dots \right] dV \\ + \int_{S_1} \left[(l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} - \bar{p}_x) \delta u + \dots \right] dS = 0;$$

l'intégrale de surface sur S_1 a disparu en vertu de la contrainte (c. 1); (l, m, n) sont les cosinus directeurs de la normale extérieure à la surface.

Les conditions pour l'annulation de la variation première sont donc que :

1. Les équations d'EULER soient vérifiées :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \bar{X} &= 0; \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (s. 2)$$

Elles expriment l'équilibre de volume avec les forces imposées. En égard à (s. 1), elles auraient aussi bien pu être écrites sous la forme $X = \bar{X}$, $Y = \bar{Y}$, $Z = \bar{Z}$.

2. Les conditions aux limites « naturelles » soient vérifiées :

$$\left. \begin{aligned} l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} &= \bar{p}_x; \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (s. 3)$$

Elles expriment l'équilibre à la surface S_1 , avec les tensions imposées.

Le principe de variation des déplacements n'est restreint ni aux petites déformations, ni à l'existence d'une relation linéaire entre tensions et déformations. Il joue de ce fait un rôle fondamental dans la théorie des déformations finies.

§ 3. Cas des rotations et déformations très petites.

Dans ce cas les six composantes de la déformation peuvent être exprimées linéairement à partir des déplacements

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \gamma_{yx} &= \gamma_{xy} & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{zx} &= \gamma_{xz} & \gamma_{zy} &= \gamma_{yz} & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (c. 2)$$

Réiproquement, l'existence des fonctions (u, v, w) n'est assurée que si les

conditions d'intégrabilité des équations (c. 2) sont satisfaites; elles sont au nombre de six:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Trois du type } \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = 0; \\ \text{Trois du type } 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y \partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 0. \end{array} \right\} \text{(c. 3)}$$

Ce sont les équations de contrainte (c. 3) qui lient les six composantes de la déformation pour assurer la « compatibilité des déformations ».

Quand l'énergie de déformation interne est exprimée en fonction des déformations, ce qui sera dénoté symboliquement par $W(\epsilon)$, il vient, en vertu de (e. 1) :

$$\delta W = \sigma_x \delta \epsilon_x + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \dots + \sigma_z \delta \epsilon_z, \quad (\text{e. 2})$$

et, W étant une fonction d'état par hypothèse,

$$\sigma_x = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_x}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}}, \quad \dots \quad (\text{e. 3})$$

Ce sont les relations explicites entre tensions et déformations.

Le principe de variation des déplacements devient alors susceptible d'une interprétation comme principe de variation des « déformations », à condition de lier ces variations par des contraintes dérivant de (c. 3) [ou, ce qui revient au même, résultant de (c. 2)] et de plus de (c. 1). Dans tout ce qui suit il sera implicitement admis que les rotations et déformations sont très petites.

§ 4. Forme canonique d'un principe de variation général.

Pour libérer les déformations des contraintes différentielles dérivant de (c. 2) et des contraintes dérivant de (c. 1), il suffit, suivant une méthode classique mais dont la justification théorique rigoureuse sort du cadre de l'exposé⁽¹⁾, d'additionner à l'expression à varier l'expression

$$\int_V \left[T_{xx} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} - \epsilon_x \right) + T_{xy} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} - \gamma_{xy} \right) + \dots \right] dV,$$

obtenue en prenant chaque équation de contrainte en volume (c. 2), multipliée par un multiplicateur de LAGRANGE (α_x, T_{xy}, \dots), et de même

$$\int_S [\alpha_x (\bar{u} - u') + \alpha_y (\bar{v} - v') + \alpha_z (\bar{w} - w')] dS$$

pour les contraintes de surface (c. 1) avec des multiplicateurs ($\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$).

⁽¹⁾ Voir, par exemple, O. BOLZA, « Vorlesungen über variationsrechnung », chap. XI, § 69.

Pour bien marquer le fait que les variations des six déformations sont devenues indépendantes entre elles et indépendantes des déplacements, ces derniers ont été affectés d'un indice prime.

Comme les neuf multiplicateurs de LAGRANGE sont aussi à varier indépendamment, les équations d'EULER et les conditions aux limites naturelles résulteront au total de l'annulation des coefficients appartenant à dix-huit variations arbitraires.

En particulier, les équations d'EULER appartenant aux variations des déformations livrent

$$T_{xx} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x}, \quad T_{xy} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}}, \quad \dots$$

Ces multiplicateurs peuvent donc être interprétés comme constituant un système indépendant de tensions, ces tensions prenant les valeurs (e. 3) correspondant aux déformations en vertu du principe de variation.

De même il vient comme conditions aux limites naturelles appartenant aux variations de déplacements sur S_2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = l T_{xx} + m T_{xy} + n T_{xz}; \\ \dots \end{array} \right.$$

En vue de passer à la forme canonique du principe général (2), modifions-le légèrement en imposant à priori aux multiplicateurs les valeurs qu'ils prennent finalement pour y satisfaire. Les neuf variations des multiplicateurs disparaissent ainsi et le principe devient le suivant :

$$\left. \begin{aligned} & \delta \int_V \left[W(\varepsilon) + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} - \varepsilon_x \right) + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} - \gamma_{xy} \right) \dots \right] dV \\ & - \delta \int_V (\bar{X} u' + \bar{Y} v' + \bar{Z} w') dV - \delta \int_{S_1} (\bar{p}_x u' + \bar{p}_y v' + \bar{p}_z w') dS \\ & + \delta \int_{S_2} \left[\left(l \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} + m \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} + n \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xz}} \right) (\bar{u} - u') + \dots \right] dS = 0. \end{aligned} \right\} (v. 2)$$

Le passage à la forme canonique s'achève par les changements de variables représentés par les formules (e. 3), toutes les déformations étant donc éliminées au profit des tensions qui leur sont conjuguées. Au lieu de la fonction W on introduit la fonction conjuguée

$$\Phi = \sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \dots + \sigma_z \varepsilon_z - W; \quad (e. 4)$$

(2) Au sens de HAMILTON JACOBI : La méthode est exposée par D. HILBERT et R. COURANT, « Methoden der Mathematische Physik », vol. I, chap. IV, § 9.

la forme canonique est ainsi

$$\begin{aligned} & \delta \int_V [\sigma_x \frac{\partial u'}{\partial x} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) + \dots \sigma_z \frac{\partial w'}{\partial z} - \Phi(\sigma)] dV \\ & - \delta \int_V (\bar{X} u' + \bar{Y} v' + \bar{Z} w') dV - \delta \int_{S_1} (\bar{p}_x u' + \bar{p}_y v' + \bar{p}_z w') dS \\ & + \delta \int_{S_2} [(l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz})(\bar{u} - u') + \dots] dS = 0. \end{aligned} \quad (v. 3)$$

Elle comporte six tensions et trois déplacements arbitraires.

Les équations d'EULER appartenant aux variations des tensions sont

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_x}, \quad \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{xy}}, \quad \dots \quad (e. 5)$$

Or, eu égard à (e. 2), on a manifestement

$$d\Phi = \epsilon_x d\sigma_x + \gamma_{xy} d\tau_{xy} + \dots + \epsilon_z d\sigma_z \quad (e. 6)$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = \epsilon_x, \quad \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} = \gamma_{xy}, \quad \dots \quad (e'. 2)$$

et ces équations expriment que pour rendre l'expression canonique stationnaire, les déplacements et les déformations associées aux tensions doivent en définitive se correspondre.

§ 5. Principe de variation des tensions.

En intégrant par parties (v. 3) peut être transformé en

$$\begin{aligned} & - \delta \int_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \bar{X} \right) u' + \dots + \Phi(\sigma) \right] dV \\ & + \delta \int_{S_2} [\bar{u} (l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz}) + \dots] dS \\ & + \delta \int_{S_1} [u' (l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} - \bar{p}_x) + \dots] dS = 0. \end{aligned}$$

En imposant comme « contraintes à priori » que les tensions vérifient les équations d'équilibre (s. 1) et (s. 3), on trouve le principe de variation des tensions ou de l'énergie complémentaire :

$$\delta \int_V \Phi(\sigma) dV - \delta \int_{S_1} [\bar{u} (l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz}) + \dots] dS = 0; \quad (v. 4)$$

« parmi toutes les tensions statiquement compatibles, celles-là sont réalisées qui rendent l'énergie complémentaire stationnaire ».

Les équations (c'. 2) assurant la compatibilité des déformations sont ici les équations d'EULER, et les équations

$$u' = \bar{u}, \quad v' = \bar{v}, \quad w' = \bar{w}, \quad \text{sur } S_2 \quad (\text{c}' 1)$$

deviennent des conditions naturelles.

L'aspect parfaitement complémentaire de ce principe avec le principe de variation des déformations est à souligner. Les contraintes à priori et les conditions à posteriori (équations d'EULER et conditions naturelles) y échangent leurs rôles respectifs.

§ 6. Cas d'une loi de Hooke généralisée.

Quand W est exprimée par une forme quadratique homogène des six composantes de la déformation, chaque composante de la tension devient, suivant (e. 3), une fonction linéaire des composantes de la déformation (loi de Hooke généralisée).

Le théorème d'EULER sur les fonctions homogènes permet alors d'écrire

$$2W = \epsilon_x \frac{\partial W}{\partial \epsilon_x} + \dots = \epsilon_x \sigma_x + \gamma_{xy} \tau_{xy} + \dots + \epsilon_z \sigma_z \quad (\text{e. 7})$$

et, d'après la définition (e. 4) de la fonction conjuguée,

$$\Phi = W, \quad \epsilon_x = \frac{\partial W}{\partial \sigma_x}, \quad \dots \quad (\text{e. 8})$$

Le principe de variation des tensions prend alors la forme habituelle à partir de laquelle il est souvent démontré⁽³⁾ :

$$\delta \int_V W(\sigma) dV - \delta \int_{S_1} \bar{u} (l \sigma_x + m \tau_{xy} + n \tau_{xz}) + \dots dS = 0. \quad (\text{v. 5})$$

Quant au principe général sous sa forme canonique (v. 3), il devient :

$$\begin{aligned} & \delta \int_V [\sigma_x \epsilon'_x + \tau_{xy} \gamma'_{xy} + \dots + \sigma_z \epsilon'_z - W(\sigma)] dV \\ & - \delta \int_V (\bar{X} u' + \bar{Y} v' + \bar{Z} w') dV - \delta \int_{S_1} (\bar{p}_x u' + \bar{p}_y v' + \bar{p}_z w') dS \\ & + \delta \int_{S_2} [(l \sigma_x + m \tau_{xy} + n \tau_{xz})(\bar{u} - u') + \dots] dS = 0. \end{aligned}$$

C'est un théorème de variation récemment proposé par ERIC REISSNER⁽⁴⁾ dans le cas particulier où il n'y a pas de forces de volume ni de surface imposées.

⁽³⁾ I. S. SOKOLNIKOFF, « Mathematical Theory of Elasticity », pp. 284-286.

⁽⁴⁾ ERIC REISSNER, « On a variational theorem in Elasticity ». (*Journal of Mathematics and Physics*, XXIX, n° 2, July 1950.)

Remarque: Quand la forme W est définie positive il est aisément de montrer que l'extremum des énergies totale ou complémentaire est nécessairement un minimum.

C'est aussi dans le cadre d'une loi de Hooke généralisée que sont valables le théorème de l'énergie de déformation

$$\int_V W \, dV = \frac{1}{2} \int_V (\bar{X} u + \bar{Y} v + \bar{Z} w) \, dV + \frac{1}{2} \int_{S_1} (\bar{p}_x u + \bar{p}_y v + \bar{p}_z w) \, dS, \quad (e. 9)$$

le principe de superposition des tensions et déformations et le principe de réciprocité de BETTI-RAYLEIGH qui en découle.

Le théorème (e. 9) se démontre sans aucune difficulté en partant de l'expression (e. 2) pour la densité d'énergie, en y remplaçant les déformations au profit des déplacements par (e. 2), intégrant par parties et tenant compte alors des équations d'équilibre (s. 2) et (s. 3).

Par une propriété générale des fonctions quadratiques, on a

$$\begin{aligned} W(\varepsilon + \varepsilon') - W(\varepsilon) - W(\varepsilon') &= 2 \frac{\partial W(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_x} \varepsilon'_x + \dots \\ &= 2 \frac{\partial W(\varepsilon')}{\partial \varepsilon'_x} \varepsilon_x + \dots \end{aligned}$$

Quand on opère sur cette identité comme on l'a fait pour passer de (e. 2) à (e. 9), il vient le principe de réciprocité:

$$\begin{aligned} &\int_V (\bar{X} u' + \bar{Y} v' + \bar{Z} w') \, dV + \int_{S_1} (\bar{p}_x u' + \bar{p}_y v' + \bar{p}_z w') \, dS \\ &= \int_V (\bar{X}' u + \bar{Y}' v + \bar{Z}' w) \, dV + \int_{S_1} (\bar{p}'_x u + \bar{p}'_y v + \bar{p}'_z w) \, dS. \end{aligned} \quad (e. 10)$$

§ 7. Formules de Castigliano.

Partons de l'expression (e. 1) pour l'accroissement de la densité d'énergie et intégrons-la dans tout le volume; il vient, après une intégration par parties :

$$\delta U = \int_S [(\delta \sigma_x + \tau_{xy} + \tau_{xz}) \delta u + \dots] \, dS - \int_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \delta u + \dots \right] \, dV,$$

et, si l'accroissement est calculé à partir de l'état d'équilibre :

$$\delta U = \int_S (\bar{p}_x \delta u + \bar{p}_y \delta v + \bar{p}_z \delta w) \, dS + \int_V (\bar{X} \delta u + \bar{Y} \delta v + \bar{Z} \delta w) \, dV; \quad (e. 11)$$

on peut chercher à mettre en évidence dans la deuxième intégrale une résultante des forces de volume dans un volume partiel V_i , par exemple :

$$\bar{N}_{xi} = \int_{V_i} \bar{X} dV.$$

Si, par exemple, le déplacement u est distribué dans le volume V_i suivant la loi

$$u = u_i(x, y, z),$$

définissons-y une moyenne pondérée u_i par l'égalité

$$u_i \bar{N}_{xi} = \int_{V_i} \bar{X} u_i(x, y, z) dV,$$

et choisissons l'accroissement δu dans le volume suivant la loi

$$\delta u = u_i(x, y, z) \delta \alpha,$$

et dans le volume complémentaire $V - V_i$, de façon telle que

$$\int_S \bar{p}_x \delta u + \int_{V-V_i} \bar{X} \delta u = 0; \quad (e. 12)$$

il vient alors

$$\delta U = \int_{V_i} \bar{X} \delta u dV = \bar{N}_{xi} \delta u_i;$$

c'est-à-dire une formule de CASTIGLIANO de première espèce :

$$\frac{\partial U}{\partial u_i} = \bar{N}_{xi}. \quad (e. 13)$$

La condition (e. 12) est pratiquement réalisée quand les forces imposées étant localisées dans des volumes et sur des surfaces restreintes, l'accroissement δu est choisi de façon à s'annuler en un point intérieur de ces surfaces et volumes (V_i excepté).

Le même traitement peut être appliqué pour mettre en évidence les résultantes des tensions imposées sur une surface partielle S_i , et d'autres combinaisons permettent d'isoler des moments résultants par rapport à un axe avec définition de moyennes pondérées en volume ou en surface pour les rotatrices correspondantes.

Partant, d'autre part, de l'expression (e. 6), qui fournit l'accroissement de la fonction conjuguée, intégrant dans tout le volume et par parties,

$$\delta \Psi = \int_V \delta \Phi dV = \int_S [u \delta(l \tau_{xc} + m \tau_{xy} + n \tau_{xz}) + \dots] dS - \int_V \left[u \delta \left(\frac{\partial \tau_{xc}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + \dots \right] dV;$$

ce qui, au égard à (s. 1), peut encore s'écrire

$$\delta \Psi = \int_S (u \delta p_x + v \delta p_y + w \delta p_z) dS + \int_V (u \delta X + v \delta Y + w \delta Z) dV.$$

Choisissons dans le volume partiel V_i la loi

$$\delta X = \bar{X}(x, y, z) \delta x$$

et prenons partout ailleurs $\delta X = 0$ et $\delta p_x = 0$; il vient

$$\delta \Psi = u_i \delta \bar{N}_{xi},$$

où u_i et \bar{N}_{xi} ont les mêmes définitions que précédemment. On retrouve une formule dé CASTIGLIANO du deuxième type :

$$u_i = \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{N}_{xi}}, \quad (\text{e. 14})$$

qui, dans le cas particulier d'une loi de HOOKE généralisée, prend la forme plus familière

$$u_i = \frac{\partial U}{\partial \bar{N}_{xi}}. \quad (\text{e. 15})$$

§ 8. Domaines à connexion multiple.

Les conditions (c. 3) ne sont pas suffisantes pour assurer aux fonctions u , v et w la propriété d'être uniformes dans le cas où le domaine ne serait pas à connexion simple. Pour le voir, introduisons les petites rotations

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

qui satisfont identiquement à la relation

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0.$$

Il vient alors, par exemple :

$$2 \oint d\omega_x = \oint \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) dx + \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} - 2 \frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} \right) dy + \left(2 \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} \right) dz, \quad (\text{e. 4})$$

et les composantes de la déformation devraient être telles que l'intégrale au second membre soit nulle pour tout contour fermé tracé dans le domaine.

Les conditions (c. 3) assurent précisément que les expressions de $d\omega_x$, $d\omega_y$ et $d\omega_z$, établies à partir des déformations, soient des différentielles exactes. D'après le théorème de STOKES, l'intégrale est donc nulle, si le contour est réductible de façon continue à un point sans quitter le domaine; il engendre alors une surface en tous les points de laquelle (c. 3) est vérifié. Ceci est par définition le cas pour un domaine à connexion simple; ce n'est plus le cas pour les contours entourant une perforation dans un domaine à connexion multiple (fig. 1). Le retour au point A après la description du contour antihorlogique dessiné peut faire apparaître des constantes cycliques :

$$(\Delta \omega_x)_A, \quad (\Delta \omega_y)_A, \quad (\Delta \omega_z)_A,$$

qui ne sont compatibles qu'avec une dislocation de la matière.

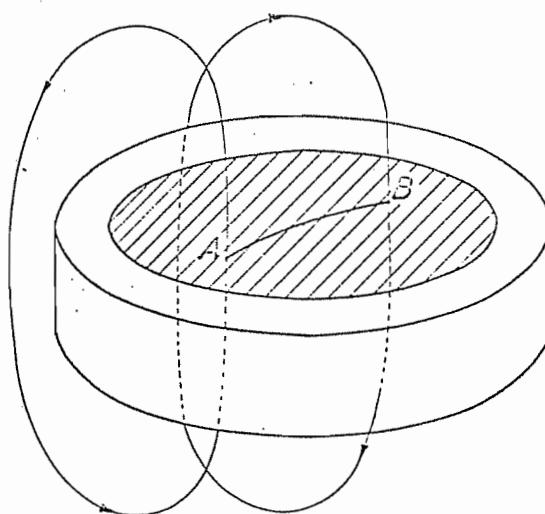


FIG. 1. — Exemple de connexion multiple introduite par une perforation toroïdale.

Il vient ensuite pour les déplacements mêmes :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \oint du = \oint 2 \epsilon_x dx + (\gamma_{xy} - 2 \omega_z) dy + (\gamma_{xz} + 2 \omega_y) dz; \\ \dots \end{array} \right. \quad (c. 5)$$

Les gradients des fonctions (ω_x , ω_y , ω_z) résultant de (c. 4) font encore en sorte que les seconds membres de (c. 5) soient des différentielles exactes.

Mais, encore une fois, on peut avoir pour le contour indiqué des constantes cycliques :

$$(\Delta u)_A, \quad (\Delta v)_A, \quad (\Delta w)_A.$$

Les principes antérieurs ne sont donc applicables qu'en contraignant les

déformations à satisfaire, outre (c. 3), un certain nombre de conditions circuitales :

$$(\Delta \omega_x)_A, \dots \quad (\Delta u)_A = 0, \dots \quad (c. 6)$$

Il apparaîtra que la considération d'un nombre limité de circuits suffit à assurer une uniformité complète.

§ 9. Le concept de dislocation (5).

Un certain nombre de surfaces de séparation, telles que B (fig. 1), permettent de réduire le domaine à la connexion simple. Une interprétation physique des constantes cycliques (6) consiste à imaginer que les deux côtés de cette surface puissent prendre un déplacement relatif. Un contour appartient à une séparation quand il réunit deux côtés de cette surface sans traverser d'autre séparation. Soient deux contours appartenant aux points A et B d'une même séparation (fig. 1); le contour AABBA étant réductible, les constantes cycliques qui lui sont associées sont nulles. De plus, si les déformations elles-mêmes sont restreintes à des fonctions uniformes, les intégrales (c. 4) se détruisent sur les portions AB et BA; d'où

$$(\Delta \omega_x)_A - (\Delta \omega_x)_B = 0$$

et donc

$$(\Delta \omega_x)_A = (\Delta \omega_x)_B = p$$

et une constance analogue pour les autres accroissements des rotations. Dès lors, il vient pour les intégrales (c. 5) :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta u)_A - (\Delta u)_B - r(y_B - y_A) + q(z_B - z_A) = 0; \\ \dots \end{array} \right.$$

Les dislocations entre les côtés de la séparation d'indice k sont donc représentables par

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = \Delta u_k + q_k(z - z_k) - r_k(y - y_k); \\ \Delta v = \Delta v_k + r_k(x - x_k) - p_k(z - z_k); \\ \Delta w = \Delta w_k + p_k(y - y_k) - q_k(x - x_k), \end{array} \right.$$

(x_k, y_k, z_k) étant un point de référence sur la séparation, (x, y, z) un point quelconque de cette surface. Le déplacement relatif des deux côtés est donc un

(5) Le terme « dislocation » a été proposé par LOVE (« Mathematical Theory of Elasticity », § 156).

La théorie des dislocations, due à Volterra (LOVE, *loc. cit.*), semble devoir jouer un rôle important dans l'étude des propriétés plastiques des métaux. (Voir, par exemple, L. P. BOUCKAERT, « Revue des Questions Scientifiques », 20 avril 1950.)

(6) Initiée par G. Weingarten (LOVE, *loc. cit.*).

déplacement solide (⁷). (Δu_k , Δv_k , Δw_k , p_k , q_k , r_k) sont les six paramètres de la dislocation.

§ 10. Hyperstaticité circuitale. Formules de Menabrea.

Imposer des paramètres de dislocation ($\Delta \bar{u}_k$, ..., \bar{r}_k) sur une barrière B_k revient simplement à étendre les conditions à priori (c. 1).

Le domaine est rendu simplement connexe, à condition d'inclure dans la surface-limite les deux côtés de chaque barrière; cette remarque est d'application pour l'établissement de la forme canonique du principe général de variation. C'est ainsi que dans (v. 3) la surface S_2 contient les deux côtés de chaque barrière.

Fixons notre attention sur la contribution d'une de ces barrières, et soient (l , m , n) les cosinus directeurs de la normale extérieure associée au côté terminal; la contribution de ce côté est

$$\int_B [(l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz})(\bar{u} + \Delta \bar{u} - u' - \Delta u') + \dots] dS;$$

conservant à (l , m , n) le sens précédent, la contribution de l'autre côté est

$$- \int_B [(l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz})(\bar{u} - u') + \dots] dS;$$

les tensions étant uniformes avec les déformations, il vient finalement

$$\int_B [(l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz})(\Delta \bar{u} - \Delta u') + \dots] dS,$$

intégrale qui ne doit être étendue que du côté terminal de la barrière.

De façon analogue, le principe (v. 4) de variation des tensions contient comme contribution d'une barrière à l'intégrale de surface

$$\int_B [(l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz}) \Delta \bar{u} + \dots] dS,$$

étendue du côté terminal seulement.

Introduisant alors les paramètres de la dislocation

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \bar{u} = \Delta \bar{u}_k + \bar{q}_k(z - z_k) - \bar{r}_k(y - y_k); \\ \dots \end{array} \right.$$

(⁷) Le résultat est dû à G. Weingarten (LOVE, loc. cit.).

on transforme cette contribution en

$$\Delta \bar{u}_k N_{xk} + \Delta \bar{v}_k N_{yk} + \Delta \bar{w}_k N_{zk} + \bar{p}_k M_{xk} + \bar{q}_k M_{yk} + \bar{r}_k M_{zk},$$

où (N_{xk}, \dots, M_{zk}) sont les sommes vectorielles et moments résultants des tensions agissant sur la face terminale par rapport aux axes de référence transportés au point (x_k, y_k, z_k) .

Considérant alors des variations des (N_{xk}, \dots) comme des variations de paramètres de tension, il vient

$$\frac{\partial \Psi}{\partial N_{xk}} = \Delta \bar{u}_k \quad \dots$$

En général le problème consiste précisément à rendre nulles les dislocations; les formules de MENABREA gouvernent alors le problème :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial N_{xk}} = 0, \quad \dots$$

Ce sont ces conditions qui remplacent en général les conditions circuitales (c. 6).

Nous venons d'utiliser le principe de variation des tensions pour établir les équations nécessaires à la solution d'un système hyperstatique par la méthode classique des barrières (ou des coupures).

De nombreux auteurs se sont préoccupés des simplifications introduites par un choix judicieux des barrières et par l'utilisation systématique de variations simultanées sur des groupes de barrières⁽⁸⁾. En réalité le principe de variation des tensions est beaucoup plus souple et permet de s'affranchir entièrement de toute considération de barrière chaque fois qu'un procédé simple permet de définir tous les états de tension, qui ne violent que des conditions de déformation circuitaires. L'équivalence au procédé des groupes de barrières apparaît alors souvent comme un sous-produit de ce raisonnement plus direct. W. S. HEMP⁽⁹⁾ a récemment attiré l'attention sur ce point; de nombreux exemples l'illustrent au chapitre III et mettent en évidence l'économie de calcul considérable qui l'accompagne.

⁽⁸⁾ ROBERT et MUSSETTE, « Le calcul des systèmes hyperslatiques », éditions Desoer, Liège, 1945.

⁽⁹⁾ W. S. HEMP, « On the analysis of statically indeterminate structures ». (The college of Aeronautics Cranfield, Report 3, 1946.)

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'UNE LIAISON CONTINUE PAR NERVURES.

Le type de voilure étudié répond aux dispositions géométriques suivantes (fig. 2) :

1. Il comporte deux longerons-caissons, dont les centres de cisaillement sont alignés sur deux droites parallèles qui définissent le plan de l'aile;
2. Ces longerons sont réunis par des nervures dont les plans sont perpendiculaires aux axes de cisaillement et qui ne transmettent pratiquement que des efforts contenus dans leur plan.

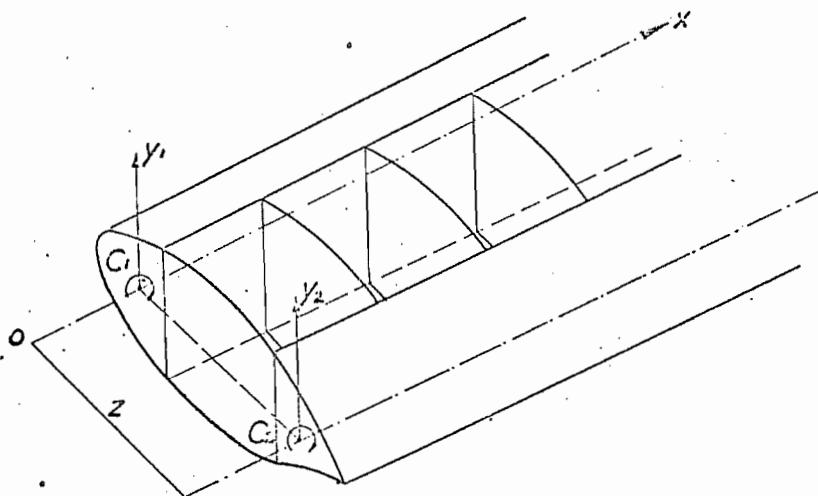


FIG. 2. — Voilure avec champ de nervures perpendiculaires.

Seules les sollicitations perpendiculaires au plan de l'aile sont envisagées.

L'axe des x est constitué par l'axe de cisaillement du longeron avant; son origine est à l'extrémité de l'aile; il est dirigé positivement vers le plan de symétrie de l'avion.

y_1 et y_2 sont les flèches respectives des axes de cisaillement avant et arrière; z est la distance entre ces axes, mesurée dans le plan d'une nervure.

§ 1. Grandeur isostatiques.

Toute répartition des charges extérieures normales au plan de l'aile est remplacée par deux distributions concentrées sur les axes de cisaillement des longerons. Ces distributions sont entièrement définies par l'équivalence statique de la charge réelle et des charges concentrées dans chaque tronçon d'envergure infinitésimale dx ; elles ne nécessitent pour leur calcul que la connaissance de la répartition de la charge totale et de la position du centre de poussée suivant l'envergure.

Ce procédé isole le rôle de « couplage hyperstatique des longerons » joué par les nervures, leur autre rôle étant évidemment de transmettre les charges réelles agissant sur le revêtement entre les longerons.

$$P_1(x) \quad \text{et} \quad P_2(x)$$

sont les répartitions d'efforts tranchants (éventuellement discontinus par suite de charges d'inertie locales);

$$Q_1(x) = \int_0^x P_1(x) dx, \quad Q_2(x) = \int_0^x P_2(x) dx$$

sont les répartitions de moments fléchissants qui en résultent.

Les flèches que prendraient les longerons sous l'effet de ces seules charges seront désignées par

$$\bar{y}_1(x) \quad \text{et} \quad \bar{y}_2(x).$$

§ 2. Équilibre des nervures.

Si les nervures sont distribuées de façon assez dense, ce qui est le cas quand le revêtement qu'elles soutiennent est souple et participe peu à la rigidité de la structure, on peut, sans trop s'écartez du problème réel, imaginer une distribution continue, chaque bande ayant une rigidité totale équivalente à la nervure concentrée qu'elle remplace. Cet artifice permet de traiter le problème par les équations différentielles de déformation d'un milieu continu et forme la base des premiers travaux de recherche sur le rôle du couplage hyperstatique des nervures.

Une bande de ces nervures continues, de largeur dx , est capable de transmettre les efforts indiqués (fig. 3) et caractérisés par deux paramètres indépendants t et m . Les sens indiqués sont positifs quand l'observateur regarde vers les x croissants.

Les sollicitations réelles des longerons sont alors :
pour les efforts tranchants :

$$\left. \begin{aligned} T_1(x) &= P_1(x) - H'(x); \\ T_2(x) &= P_2(x) + H'(x), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

où

$$H'(x) = \int_0^x t \, dx + T_0 \quad (2)$$

et T_0 est un effort tranchant dû à une nervure concentrée que nous conservons à l'origine;

pour les moments fléchissants :

$$\left. \begin{aligned} M_1(x) &= Q_1(x) - H(x); \\ M_2(x) &= Q_2(x) + H(x), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

où

$$H(x) = \int_0^x H'(x) \, dx = \int_0^x (x - \xi) t(\xi) \, d\xi + T_0 x, \quad (4)$$

et pour les moments de torsion autour des axes de cisaillement :

$$\left. \begin{aligned} C_1(x) &= \frac{1}{2} z H'(x) - K(x); \\ C_2(x) &= \frac{1}{2} z H'(x) + K(x), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

où

$$K(x) = M_0 + \int_0^x m(x) \, dx, \quad (6)$$

M_0 étant aussi un couple dû à la nervure concentrée d'origine.

Les fonctions $H(x)$ et $K(x)$ sont les deux fonctions hyperstatiques inconnues du problème.

§ 3. Énergies de déformation.

Prenons pour l'énergie de déformation d'un tronçon du longeron avant la forme classique

$$\left(\frac{1}{2} f_1 M_1^2 + \frac{1}{2} z^2 g_1 T_1^2 + \frac{1}{2} j_1 C_1^2 \right) dx,$$

où $f_1(x)$, $g_1(x)$ et $j_1(x)$ sont des flexibilités associées respectivement à la flexion, au cisaillement et à la torsion. Exprimant les sollicitations en fonction des inconnues hyperstatiques, il vient encore

$$\sqrt{\frac{1}{2} \left[f_1 (Q_1 - H)^2 + z^2 g_1 (P_1 - H')^2 + j_1 \left(\frac{1}{2} z H' - K \right)^2 \right]} dx \quad (7)$$

et de même pour le longeron arrière,

$$\frac{1}{2} \left[f_2(Q_2 + H)^2 + z^2 g_2(P_2 + H')^2 + j_2 \left(\frac{1}{2} z H' + K \right)^2 \right] dx.$$

Ces formes impliquent que la théorie habituelle des poutres est applicable. Pour une bande de nervure de largeur dx on aura une forme quadratique

$$e dx = \frac{1}{2} (z^4 u t^2 + 2 z^3 v t m + z^2 w m^2) dx,$$

contenant trois flexibilités : u , v et w . Les puissances de z ont été introduites pour donner à ces flexibilités les mêmes dimensions que f_1 et f_2 .

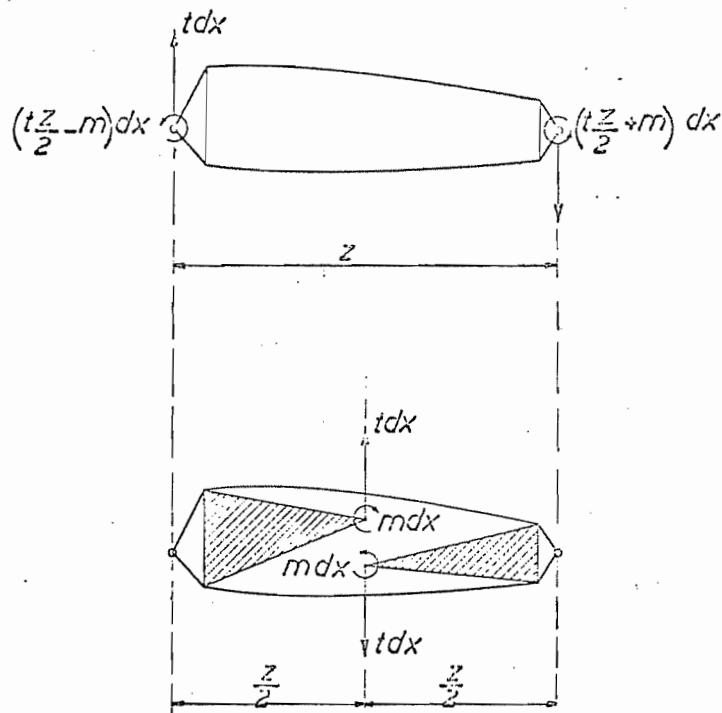


FIG. 3. — Efforts transmis par une bande de nervure.

Pour en trouver une interprétation il suffit de donner aux paramètres t et m le sens d'efforts réciproques au moyen de bras rigides (fig. 3) et d'appliquer les deuxièmes formules de CASTIGLIANO :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} &= z^4 u t + z^3 v m = y_1 - y_2 - \frac{1}{2} z (\theta_1 + \theta_2); \\ \frac{\partial m}{\partial t} &= z^3 v t + z^2 w m = \theta_1 - \theta_2. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Nous pouvons mesurer expérimentalement les flexibilités en appuyant la nervure aux centres de cisaillement ($y_1 = y_2$). Dès lors, n'appliquant que t ,

$$u = -(\theta_1 + \theta_2) / (2z^3 t) \quad \text{et} \quad v = (\theta_1 - \theta_2) / (z^3 t);$$

et, n'appliquant que m ,

$$v = -(\theta_1 + \theta_2) / (2z^2 m) \quad \text{et} \quad w = (\theta_1 - \theta_2) / (z^2 m).$$

Tenant compte de ce que

$$t = H'' \quad \text{et} \quad m = K', \quad (9)$$

il vient aussi

$$e dx = \frac{1}{2} [z^4 u (H'')^2 + 2z^3 v H'' K' + z^2 w (K')^2] dx. \quad (10)$$

Pour la nervure concentrée à l'origine, l'énergie sera

$$\frac{1}{2} [z^3 U_0 T_0^2 + 2z^2 V_0 T_0 M_0 + z W_0 M_0^2] \quad (11)$$

ou, puisque

$$T_0 = H'(o) \quad \text{et} \quad M_0 = K(o),$$
$$\frac{1}{2} z^3 U_0 [H'(o)]^2 + z^2 V_0 H'(o) K(o) + \frac{1}{2} z W_0 K^2(o). \quad (12)$$

§ 4. Équations différentielles gouvernant les inconnues hyperstatiques.

Les éliminations fastidieuses des déformations et des sollicitations auxiliaires pour aboutir aux équations différentielles finales, qui gouvernent le problème, sont évitées par le recours au principe de variation des tensions.

A cet effet, toutes les énergies de déformation partielles sont additionnées et intégrées sur l'envergure de l'aile pour aboutir à l'énergie de déformation totale E .

On peut établir une expression de la variation de cette énergie en donnant aux inconnues H et K des variations arbitraires le long de l'envergure.

En exprimant les conditions pour que l'énergie soit stationnaire, on trouve les équations différentielles et les conditions aux limites qui gouvernent H et K , dans le cas où l'encastrement de l'aile à l'emplanture est parfait.

Il vient tout d'abord pour la variation de l'énergie l'expression :

$$\delta E = \int_0^a [(Q_2 f_2 - Q_1 f_1) + H(f_1 + f_2)] \delta H dx$$
$$+ \int_0^a \left[z^2 (P_2 g_2 - P_1 g_1) + z^2 \left(g_1 + g_2 + \frac{j_1 + j_2}{4} \right) H' + \frac{1}{2} z (j_2 - j_1) K \right] \delta H' dx$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^a (z^4 u H'' + z^2 v K') \delta H'' dx \\
 & + \int_0^a \left[\frac{1}{2} z (j_2 - j_1) H' + (j_1 + j_2) K \right] \delta K dx \\
 & + \int_0^a (z^3 v H'' + z^2 w K') \delta K' \\
 & + [z^3 U_0 H'(o) + z^2 V_0 K(o)] \delta H'(o) \\
 & + [z^2 V_0 H'(o) + z W_0 K(o)] \delta K(o).
 \end{aligned}$$

Il faut intégrer par parties, jusqu'à ne conserver sous le signe intégral que les variations δH et δK .

L'équation d'EULER pour la variation δH sous le signe intégral est alors

$$\begin{aligned}
 & z^4 (u H'')'' - z^2 \left[\left(g_1 + g_2 + \frac{j_1 + j_2}{4} \right) H' \right]' + (f_1 + f_2) H \\
 & + z^3 (v K')'' + \frac{1}{2} z [(j_1 - j_2) K]' = (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)''
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

car les flèches isostatiques des longerons sont manifestement

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{y}_1'' &= f_1 Q_1 - z^2 (g_1 P_1)' ; \\
 \bar{y}_2'' &= f_2 Q_2 - z^2 (g_2 P_2)' .
 \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

L'équation d'EULER pour la variation δK sous le signe intégral est

$$z^2 (w K')' - (j_1 + j_2) K + z^3 (v H'')' + \frac{1}{2} z (j_1 - j_2) H' = 0 .
 \tag{15}$$

Restent les variations aux limites qui fournissent les conditions aux limites de ce système différentiel du sixième ordre.

Tout d'abord, de par sa définition même on a nécessairement

$$H(o) = 0 \tag{16}$$

et la variation $\delta H(a)$ doit être prise nulle aussi pour respecter cette condition. L'annulation du coefficient de la variation $\delta H(a)$ livre

$$\begin{aligned}
 z^4 (u H'')' - z^2 \left(g_1 + g_2 + \frac{j_1 + j_2}{4} \right) H' + z^3 (v K')' + \frac{1}{2} z (j_1 - j_2) K \\
 = (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)' ; \quad (x = a)
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

l'annulation du coefficient de $\delta H'(o)$:

$$- z^4 u(o) H''(o) - z^3 v(o) K'(o) + z^3 U_0 H'(o) + z^2 V_0 K(o) = 0 ; \tag{18}$$

l'annulation du coefficient de la variation $\delta H'(a)$:

$$z^4 u(a) H''(a) + z^3 v(a) K'(a) = 0 ; \tag{19}$$

l'annulation du coefficient de la variation $\delta K(o)$:

$$-z^3 v(o) H''(o) - z^2 w(o) K'(o) + z^2 V_0 H'(o) + z W_0 K(o) = 0; \quad (20)$$

enfin l'annulation du coefficient de la variation $\delta K(a)$:

$$z^3 v(a) H''(a) + z^2 w(a) K(a) = 0. \quad (21)$$

Du fait même qu'il dérive d'une forme quadratique dans les fonctions H , K et leurs dérivées, le système différentiel constitué par les équations (13) et (15) et les conditions aux limites (16) à (21) est un système linéaire self-adjoint⁽¹⁰⁾.

§ 5. L'équation différentielle du couplage parfait.

L'intégration du système différentiel précédent est trop complexe pour se prêter à une discussion fructueuse. Pour acquérir une idée du mécanisme suivant lequel s'opère la liaison par les nervures, nous commençons par suivre la plupart des investigateurs antérieurs en faisant abstraction de l'élasticité des nervures, c'est-à-dire en les considérant toutes comme infiniment rigides. Ceci se traduit mathématiquement par

$$u = v = w = 0, \quad U_0 = V_0 = W_0 = 0.$$

De plus, les déformations des longerons dues aux efforts tranchants ont généralement été négligées, ce qui se traduit par

$$g_1 = g_2 = 0.$$

Cette dernière hypothèse restreint inutilement le champ de validité, car elle n'introduit pas de simplifications supplémentaires dans les équations. Celles-ci deviennent

$$\begin{aligned} & -z^2 \left[\left(g_1 + g_2 + \frac{j_1 + j_2}{4} \right) H' \right]' + (f_1 + f_2) H + \frac{1}{2} z [(j_1 - j_2) K]' = (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)'' \\ & - (j_1 + j_2) K + \frac{1}{2} z (j_1 - j_2) H' = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

La fonction K est facilement éliminée entre les deux et il vient l'équation différentielle du « couplage parfait » :

$$-z^2 [J H']' + F H = (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)'', \quad (23)$$

(10) A. COURANT und D. HILBERT, « Methoden der Mathematische Physik », vol. I, chap. V, § 1.

où on a posé

$$J = g_1 + g_2 + \frac{j_1 j_2}{j_1 + j_2};$$
$$F = f_1 + f_2.$$

Les conditions aux limites se réduisent à (16) et

$$-z^2 \left(g_1 + g_2 + \frac{j_1 + j_2}{4} \right) H' + \frac{1}{2} z (j_1 - j_2) K = (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)', \quad (x = a)$$

ce qui, en éliminant $K(a)$ par l'équation (22) en $x = a$, donne

$$-z^2 J(a) H'(a) = (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)'_a; \quad (26)$$

mais

$$\bar{y}'_1(a) = -z^2 g_1(a) P_1(a);$$
$$\bar{y}'_2(a) = -z^2 g_2(a) P_2(a),$$

et si l'on introduit simplement l'hypothèse, généralement fondée, que

$$g_1(a) = g_2(a) = 0,$$

la condition (26) se réduit tout simplement à

$$\boxed{H'(a) = 0}. \quad (27)$$

La détermination du moment fléchissant hyperstatique de transfert H ne dépend donc plus que d'une équation différentielle du second ordre (23) avec deux conditions aux limites simples. Sa répartition ne dépend par ailleurs que de la somme des flexibilités des deux longerons à la flexion, de la somme de leurs flexibilités au cisaillement et de la somme de leurs raideurs à la torsion.

Par contre, le couple différentiel de torsion

$$K = \frac{1}{2} (C_2 - C_1),$$

qui, une fois H connu, s'en déduit par (22), dépend en outre du rapport entre les raideurs de torsion.

L'hypothèse commode de la rigidité infinie des nervures a été fondée antérieurement (réf. 2) sur la faible rigidité relative en torsion des longerons. Elle ne peut plus être appliquée sans examen aux versions modernes des ailes en caisson D, par exemple.

§ 6. Influence d'un couplage parfait sur la rigidité en torsion des ailes à flexibilités constantes.

Les cas d'intégrabilité simples peuvent fournir des indications qualitatives précieuses. Si les flexibilités des longerons sont constantes en envergure, les solutions du problème du couplage parfait sont facilement exprimées sous forme finie par les fonctions circulaires ou hyperboliques. De nombreux exemples ont été traités dans la littérature. Les résultats de GABRIELLI (réf. 6) et de ROXBEE COX et WILLIAMS (réf. 9) sont à retenir. Ils concernent l'influence du couplage parfait sur la raideur de l'aile en torsion, facteur dominant dans la détermination de la vitesse critique d'auto-entretien des vibrations couplées de flexion et de torsion, ou « flutter » des ailes.

Avec la notation

$$\mu^2 = \left(\frac{a}{z}\right)^2 \frac{F}{J} \quad (\text{une constante})$$

et supposant qu'un couple C agit seul à l'extrémité de l'aile, l'équation du couplage parfait devient

$$a^2 H'' - \mu^2 H = -z^{-1} C \mu^2 x,$$

dont l'intégrale est

$$H = \frac{C}{z} \left(-\frac{a}{\mu} \frac{\operatorname{sh} \mu x/a}{\operatorname{ch} \mu} + x \right),$$

quand les conditions aux limites (16) et (27) sont appliquées (ceci implique que $g_1 = g_2 = 0$).

D'autre part, chaque longeron, subissant la même rotation θ dans une section,

$$\theta' = -j_1 C_1 = -j_2 C_2,$$

et donc

$$z H' = C_1 + C_2 = -\theta' \left(\frac{1}{j_1} + \frac{1}{j_2} \right),$$

ou encore

$$\theta' = -z J H', \quad (27)$$

relation qui, intégrée le long de l'envergure, livre

$$\theta(o) = C a J \frac{\mu - \tanh \mu}{\mu} = \frac{y_1(o) - y_2(o)}{z},$$

c'est-à-dire la rotation terminale sous l'effet de C .

Par ailleurs, la rotation terminale due à la simple flexion différentielle des longerons, sans liaison par nervures, serait

$$\bar{\theta}(o) = \frac{\bar{y}_1(o) - \bar{y}_2(o)}{z} = C a F \frac{a^2}{3 z^2}.$$

Prenant cette valeur comme comparaison,

$$\frac{\theta(o)}{\bar{\theta}(o)} = 3 \frac{\mu - \tanh \mu}{\mu^3}. \quad (28)$$

Les auteurs de la référence 9 ont aussi examiné l'effet d'une seule nervure terminale infiniment rigide. Le résultat de ce calcul élémentaire est le suivant :

$$\frac{\theta(o)}{\bar{\theta}(o)} = \frac{3}{3 + \mu^2}. \quad (29)$$

La comparaison numérique entre (28) et (29) montre que l'accroissement de rigidité fourni par les autres nervures est faible. Ce fait est à la base des méthodes de calcul proposées par THALAU (réf. 1) et qui consistent à ne tenir compte que de l'effet de la nervure extrême et d'une nervure représentative située vers les deux tiers de l'envergure. Encore faut-il observer que d'autres cas de charge des longerons peuvent faire jouer un rôle plus important aux autres nervures.

§ 7. Couplage parfait dans les ailes Cantilever. Cas d'intégrabilité sous forme finie.

On se rapproche de la distribution réelle des flexibilités dans les ailes CANTILEVER en les représentant par une fonction du type

$$\frac{1}{(p + qx)^m}.$$

Cette circonstance a été mise à profit par les auteurs de la référence 11 en vue d'intégrer sous forme finie le problème du couplage parfait.

Changeons de variable indépendante par la relation

$$x = a\xi,$$

les limites d'intégration devenant 0 à l'extrémité et 1 à l'emplanture de l'aile.

Supposons que les flexibilités obéissent aux lois de répartition :

$$J(\xi) = \frac{J(o)}{(1 + q\xi)^n}, \quad F(\xi) = \frac{F(o)}{(1 + q\xi)^{n+2}}. \quad (30)$$

Ceci implique notamment que les paramètres q et n de ces répartitions sont entièrement déterminés par les valeurs $J(0)$ et $J(1)$, $F(0)$ et $F(1)$; explicitement

$$q = \left[\frac{F(o) J(1)}{F(1) J(o)} \right]^{\frac{1}{2}} - 1, \quad n = \frac{\log [J(o)/J(1)]}{\log (1 + q)}.$$

La solution générale de l'équation du couplage parfait sans second membre est alors simplement

$$H = A(1+q\xi)^{r_1} + B(1+q\xi)^{r_2},$$

où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation algébrique en r :

$$(z/a)^2 q^2 J(o) [r^2 - (n+1)r] - F(o) = 0,$$

et A , B sont deux constantes arbitraires.

Par la méthode de variation des paramètres, la solution générale avec second membre devient

$$q(r_2 - r_1) z^2 J(o) H = [A(\xi) + A](1+q\xi)^{r_1} + [B(\xi) - A](1+q\xi)^{r_2},$$

où

$$A(\xi) = \int_0^\xi (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)'' (1+q\eta)^{r_1} d\eta;$$

$$B(\xi) = - \int_0^\xi (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)'' (1+q\eta)^{r_2} d\eta,$$

les accents désignant maintenant la dérivation par rapport à la variable d'intégration.

La condition $H(0) = 0$ est déjà assurée; il reste à déterminer A par la condition $H'(1) = 0$. On a d'ailleurs pour la dérivée:

$$(r_2 - r_1) z^2 J(o) H' = r_1[A(\xi) + A](1+q\xi)^{r_1-1} + r_2[B(\xi) - A](1+q\xi)^{r_2-1}.$$

Ces formules ramènent le calcul complet des ailes bilongeron CANTILEVER à couplage parfait à deux quadratures pour lesquelles on dispose de procédés numériques.

Le problème résolu au § 6 peut en particulier être abordé sans difficulté.

Sous l'effet du couple de torsion C agissant à l'extrémité de l'aile,

$$(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)'' = z^{-1} G a^2 \xi F(\xi) = \frac{a^2 F(o) C}{3} \frac{\xi}{(1+q\xi)^{n+2}}. \quad (34)$$

Après réduction, l'équation du couplage parfait devient

$$-(1+q\xi)^2 H'' + nq(1+q\xi) H' + \mu^2 H = \mu^2 z^{-1} a G \xi,$$

où il a été posé

$$\mu^2 = \frac{a^2}{z^2} \frac{F(o)}{J(o)}.$$

Une solution particulière étant immédiate, il vient directement pour l'intégrale :

$$(\mu^2 + nq^2) H = \frac{a G}{z} [\mu^2 \xi - nq + A(1+q\xi)^{r_1} + B(1+q\xi)^{r_2}].$$

Les conditions aux limites livrent

$$A + B = nq; \\ r_1(1+q)^{r_1-1} A + r_2(1+q)^{r_2-1} B = -\mu^2 i q.$$

Ensuite, considérant l'équation (27),

$$\theta(o) = z J(o) \int_0^1 \frac{\Pi' d\xi}{(1+q\xi)^n},$$

soit, tous calculs effectués,

$$\theta(o) = C \frac{a J(o)}{\mu^2 + nq^2} f(\mu, n, q),$$

où

$$f(\mu, n, q) = \left[\frac{1}{(1+q\xi)^{n-1}} \left(\frac{\mu^2}{(n-1)q} + \frac{r_1}{r_1-1} A(1+q\xi)^{r_1-1} + \frac{r_2}{r_2-1} B(1+q\xi)^{r_2-1} \right) \right]_0^1.$$

Cherchons encore à comparer cette rotation à celle produite par le même couple sans l'intervention des nervures. Intégrant deux fois (31),

$$\bar{\theta}(o) = \frac{\bar{y}_1(o) - \bar{y}_2(o)}{z} = \frac{a^3 C}{z^2} F(o) \frac{p(n, q)}{nq^3(1+q)^n},$$

où

$$p(n, q) = \frac{1}{(n+1)} - \frac{1+q}{n-1} + \frac{2(1+q)^n}{n^2-1} + \frac{nq}{(n+1)(1+q)} - q,$$

et donc

$$\frac{\theta(o)}{\bar{\theta}(o)} = \frac{nq^3(1+q)^n}{\mu^2 p(n, q)} \frac{f(\mu, n, q)}{\mu^2 + nq^2}. \quad (32)$$

Enfin, si les raideurs de torsion des deux longerons sont dans un rapport constant, le rapport de la rotation terminale contrainte par une seule nervure terminale infiniment rigide à celle obtenue par flexion différentielle est, tous calculs effectués,

$$\frac{\theta(o)}{\bar{\theta}(o)} = \frac{[(1+q)^{n-1}-1]}{[(1+q)^{n-1}-1] + \frac{(n-1)p(n, q)}{q(1+q)} \mu^2}. \quad (33)$$

Le cas particulier

$$F(o)/F(1) = 12 \quad \text{et} \quad J(o)/J(1) = 3$$

a été calculé.

La figure 4 illustre la loi de décroissance des flexibilités de l'extrémité à l'emplanture. La figure 5 reproduit les valeurs des rapports de rotation (32) et (33) en fonction de μ ; elle met en évidence le fait paradoxal au premier abord

que la raideur de torsion en bout d'aile diminue quand on ajoute à la nervure extrême les nervures infiniment rigides tout le long de l'envergure.

Ce paradoxe est éclairci quand on examine en détail l'action des nervures sur les longerons. Par exemple, pour $\mu = 4$, la figure 6 montre la répartition

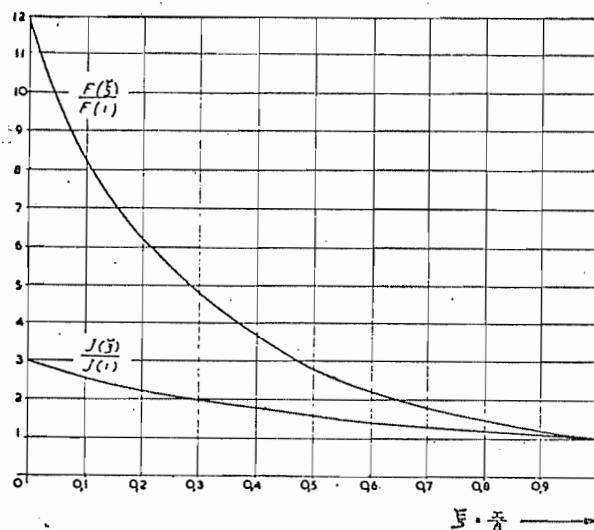


FIG. 4. — Répartition des flexibilités dans une aile cantilever.

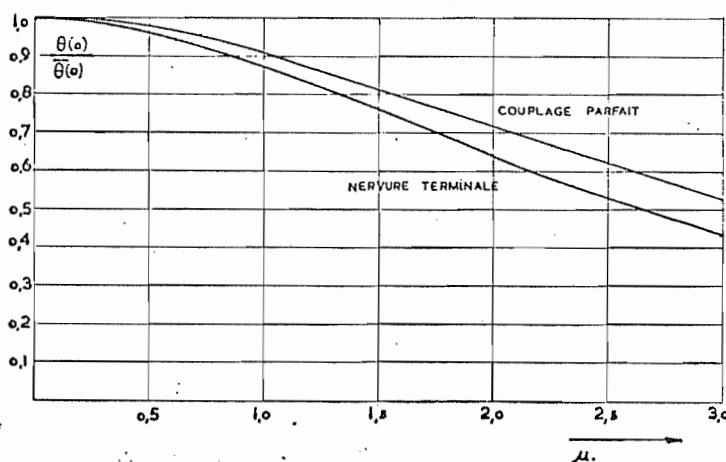


FIG. 5. — Rotation extrême due à un couple de bout d'aile.

de l'effort tranchant de transfert par unité de longueur t , rapporté à la valeur $C/(za)$, pour le rendre non dimensionnel. Il apparaît que de 0 à 0.243 les nervures tendent à diminuer l'effort tranchant C/z , dû à l'application du couple extérieur. Ensuite l'action change de signe, pour atteindre à l'emplanture une valeur inverse double de la valeur initiale.

La figure 7 montre le pourcentage du couple de torsion extérieur absorbé par les flux de cisaillement dans la torsion des caissons, tout le long de l'envergure; le couplage parfait ramène la totalité du couple en flexion différentielle à l'emplanture.

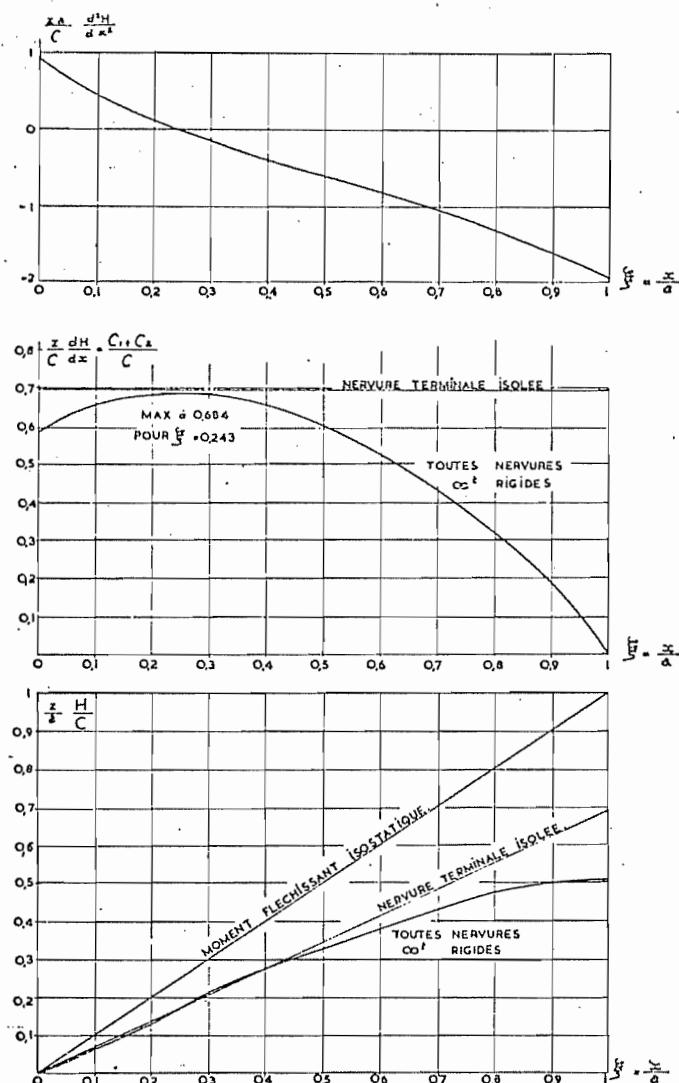


FIG. 6, 7, 8. — Répartition des inconnues hyperstatiques. Aile cantilever en torsion.

La figure 8, enfin, montre la répartition qui en résulte pour le moment fléchissant dans un longeron, le moment fléchissant isostatique d'emplanture étant pris pour unité. L'effet de la nervure terminale isolée est d'induire un moment fléchissant de transfert égal aux 69,4 % du moment isostatique; le moment réel ne vaut donc plus que 30,6 % du moment isostatique. Par contre, le couplage parfait ne donne à l'emplanture qu'un moment de transfert de

50,8 %, le moment réel valant alors encore 49,2 % du moment isostatique d'implanture.

Cet exemple constitue une indication précieuse au point de vue conception d'une structure d'aile; si les couples de torsion appliqués et les considérations de rigidité à la torsion sont prépondérants en bout d'aile (coup d'aileron, flutter d'aileron), il peut y avoir simultanément gain en poids, en simplicité et en rigidité, quand le couplage par nervures est limité à la zone en question.

§ 8. Applicabilité d'une méthode par approximations successives
à la résolution de l'équation du couplage parfait.

L'équation proposée est de la forme

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = r(x), \quad \left. \right\} \quad (\Lambda)$$

avec les conditions aux limites $y(0) = 0, \quad y'(a) = 0.$

Par une double intégration, dont les limites sont fixées de façon à assurer le respect des conditions aux limites, il vient

$$y = \int_0^x \left\{ \frac{1}{p} \int_a^x q y dx \right\} dx - \int_0^x \left\{ \frac{1}{p} \int_a^x r dx \right\} dx.$$

Cette équation suggère immédiatement une solution par approximations successives. Faisant $y = 0$ au second membre, on obtient une première approximation y_1 au premier. Celle-ci est réintroduite au second membre pour trouver y_2 au premier, et ainsi de suite. Ce procédé généralise celui de PICARD, pour lequel les conditions aux limites sont données à une seule extrémité de l'intervalle. Un procédé similaire a été proposé sans justification par les auteurs de la référence 11. L'étude des conditions de convergence de ce procédé peut être adaptée à la théorie générale des systèmes de STURM-LIOUVILLE⁽¹¹⁾. Assurons en effet au système (A) le système de STURM-LIOUVILLE:

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{d}{dx} \left(p \frac{dy}{dx} \right) + \lambda q y = r \\ & y(0) = y'(a) = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (B)$$

qui comporte le paramètre λ .

⁽¹¹⁾ E. L. INCE, « Ordinary differential equations ». Dover, Publications N. Y., 1944, chap. IX, X et XI.

Une paire de solutions fondamentales $u(x, \lambda)$ et $v(x, \lambda)$ de l'équation différentielle homogène satisfait la relation

$$v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} = \frac{c}{p}, \quad (C)$$

où c est une constante, qu'un multiplicateur convenable de u peut toujours ramener à l'unité. Moyennant quoi la méthode de variation des paramètres fournit la solution générale

$$y(x, \lambda) = c_1 u + c_2 v - u \int_0^x p r v dx - v \int_x^a p r u dx. \quad (B')$$

Les constantes c_1 et c_2 doivent être déterminées de façon à satisfaire aux conditions aux limites

$$c_1 u(0, \lambda) + c_2 v(0, \lambda) = v(0, \lambda) \int_0^a p r u dx;$$

$$c_1 u'(a, \lambda) + c_2 v'(a, \lambda) = u'(a, \lambda) \int_0^a p r v dx.$$

Le déterminant des coefficients des constantes inconnues

$$F(\lambda) = \begin{vmatrix} u(0, \lambda) & v(0, \lambda) \\ u'(a, \lambda) & v'(a, \lambda) \end{vmatrix} \quad (D)$$

est la « fonction caractéristique ». Il faut distinguer deux cas :

1° λ n'est pas une racine et la fonction est différente de zéro; les constantes sont alors déterminées de façon unique et la solution de (B) également;

2° λ est une racine caractéristique λ_0 et $F(\lambda_0) = 0$. Il existe alors une solution du système homogène associé à (B), telle que les conditions aux limites soient vérifiées; soit $w(x, \lambda_0)$ cette solution :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d}{dx} \left(p \frac{dw}{dx} \right) + q w &= 0 \\ w(0, \lambda_0) &= w'(a, \lambda_0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (E)$$

Soit alors $z(x, \lambda_0)$ une solution formant paire fondamentale avec w et donc telle que

$$z w' - w z' = \frac{1}{p};$$

comme

$$\begin{aligned} p(0) &\neq 0 & \text{et} & \quad p(a) \neq 0 \quad \text{on en tire} \\ z(0, \lambda_0) &\neq 0, & z'(a, \lambda_0) &\neq 0, \quad w'(0, \lambda_0) \neq 0, \quad w(a, \lambda_0) \neq 0, \end{aligned}$$

ce qui prouve l'impossibilité de voir la solution générale du système homogène

satisfaire les deux conditions aux limites. L'index de compatibilité ne peut donc être supérieur à l'unité.

Examinons si dans ce dernier cas il peut exister une solution de (B) avec un second membre $r(x)$; w et z étant choisis comme paire fondamentale, il faut :

$$\begin{cases} c_2 z(o, \lambda_0) = z(o, \lambda_0) \int_0^a p r w dx; \\ c_2 z'(a, \lambda_0) = 0. \end{cases}$$

La deuxième équation livre nécessairement $c_2 = 0$, c_1 reste arbitraire et la première équation n'est compatible avec la seconde que si

$$\int_0^a p r w(x, \lambda_0) dx = 0; \quad (F)$$

c'est la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution de (B).

La circonstance que $p(x)$ et $q(x)$ sont deux fonctions positives et non nulles à travers tout l'intervalle (o, a) permet encore de tirer d'importantes conclusions quant aux racines de $F(\lambda) = 0$.

Supposons que λ_0 puisse être complexe ainsi que $w(x, \lambda_0)$; multiplions (E) par la fonction complexe conjuguée et intégrons sur l'intervalle :

$$-[p w^* w']_0^a + \int_0^a p w' w^{*\prime} dx + \lambda_0 \int_0^a q w w^* dx = 0;$$

le terme aux limites est nul, car

$$w^*(o, \lambda_0^*) = 0 \quad \text{et} \quad w'(a, \lambda_0) = 0;$$

d'autre part, chaque intégrale est manifestement réelle et positive; par conséquent λ_0 est un nombre réel et négatif. Enfin, il est possible d'établir que les racines de $F(\lambda) = 0$, autre qu'elles sont réelles et négatives, sont aussi toutes simples.

A cet effet choisissons la fonction $u(x, \lambda)$ de telle façon qu'elle vérifie la première condition aux limites

$$u(o, \lambda) = 0. \quad (G)$$

Cette relation étant maintenue pour toutes les valeurs de λ :

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda}(o, \lambda) = 0, \quad (H)$$

et faisant $x = 0$ dans (C), on a nécessairement aussi

$$v(o, \lambda) \neq 0, \quad w'(o, \lambda) \neq 0.$$

Par conséquent, la fonction caractéristique (D) se réduit à

$$F(\lambda) = u'(a, \lambda) = 0. \quad (I)$$

Dérivant l'équation

$$-(pu')' + \lambda q u = 0 \quad (J)$$

par rapport à λ , il vient

$$-\left(p \frac{\partial u'}{\partial \lambda}\right)' + \lambda q \frac{\partial u}{\partial \lambda} + q u = 0;$$

multiplions-la par u et intégrons sur l'intervalle :

$$-\left[u p \frac{\partial u'}{\partial \lambda}\right]_0^a + \int_0^a p u' \frac{\partial u'}{\partial \lambda} dx + \lambda \int_0^a q u \frac{\partial u}{\partial \lambda} dx + \int_0^a q u^2 dx = 0; \quad (K)$$

le terme aux limites se réduit à

$$-u(a, \lambda) p(a) F'(\lambda),$$

à cause de (G) et de (I).

Par contre, multipliant (J) par $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ et intégrant sur l'intervalle :

$$-\left[p u' \frac{\partial u}{\partial \lambda}\right]_0^a + \int_0^a p u' \frac{\partial u'}{\partial \lambda} dx + \lambda \int_0^a q u \frac{\partial u}{\partial \lambda} dx = 0, \quad (L)$$

le terme aux limites se réduisant à

$$-p(a) u'(a, \lambda) \frac{\partial u}{\partial \lambda}(a, \lambda),$$

à cause de (II).

Soustrayant (K) de (L), il vient en définitive

$$-u(a, \lambda) p(a) F'(\lambda) = \int_0^a q u^2 dx + p(a) u'(a, \lambda) \frac{\partial u}{\partial \lambda}(a, \lambda).$$

Faisons maintenant tendre λ vers λ_0 et remarquons qu'à la limite

$$\lim u'(a, \lambda) = u'(a, \lambda_0) = 0;$$

$$\lim u(a, \lambda) = u(a, \lambda_0) \neq 0,$$

et comme l'intégrale est essentiellement positive, on en conclut que

$$F'(\lambda_0) \neq 0,$$

preuve que la racine est nécessairement simple.

En résumé : il est établi que les racines de l'équation caractéristique appartenant au système (B) sont toutes réelles, négatives et simples; que (B) avec second membre admet une solution unique quand λ n'est pas une racine de $F(\lambda) = 0$, et en général, pas de solution si λ est une racine, excepté quand le second membre vérifie la relation (F), auquel cas la solution contient encore une constante arbitraire.

Examinons maintenant la portée de ces conclusions sur le problème de la convergence du procédé par approximations successives.

Pour cela, remarquons que les équations du couplage parfait sont identiques au système (B) pour $\lambda = +1$. Cette valeur ne saurait être une racine caractéristique et la solution est unique comme il se doit physiquement.

Développons la solution de (B) en série de puissances du paramètre λ :

$$y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) + \lambda^2(y_3 - y_2) + \dots \quad (\text{M})$$

Introduisons cette série dans l'équation différentielle et égalons les puissances successives de λ ; il vient, après double intégration :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = - \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{p} \int_x^a r dx \right\} dx; \\ \dots \\ y_{n+1} = \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{p} \int_x^a q y_n dx \right\} dx + y_1, \end{array} \right.$$

c'est-à-dire précisément la suite d'opérations proposées pour la méthode par approximations successives. La convergence de cette méthode pour la solution du couplage parfait revient donc exactement à la convergence de la série (M) pour $\lambda = +1$.

Or (M) est le développement en série de MAC-LAURIN de $y(x, \lambda)$, considérée comme une fonction analytique du paramètre λ . Le rayon de convergence est limité au module de la première singularité de la solution. Les racines de $F(\lambda) = 0$ jouent le rôle de pôles de cette solution, puisque $F(\lambda)$, en tant que déterminant des inconnues c_1 et c_2 , intervient au dénominateur. Ces pôles sont tous simples et situés sur la partie négative de l'axe réel.

Par contre, pour que le procédé par approximations successives converge, il faut que le cercle de convergence contienne le point $\lambda = +1$, donc que son rayon soit supérieur à l'unité; d'où la première proposition :

« La convergence est assurée si la première racine caractéristique $\lambda_1 < -1$ ».

Nous appellerons ce cas celui de « convergence directe ».

Une racine caractéristique λ_0 n'est plus qu'un pôle apparent de la solution quand on impose au second membre la restriction (F).

En effet, cette condition rétablit au point λ_0 l'existence de la solution $y(x, \lambda)$, qui deviendrait sinon infinie.

D'où la seconde proposition : « La convergence est assurée quand pour chaque racine λ_i de l'équation caractéristique, située à l'intérieur du cercle unité, on impose au second membre $r(x)$ la restriction

$$\int_0^1 p r w(x, \lambda_i) dx = 0,$$

où $w(x, \lambda_i)$ est la fonction propre attachée à la racine λ_i .

Ce cas est celui de « convergence conditionnelle ».

Il est toujours possible de s'y ramener théoriquement.

Dans l'exemple du paragraphe 7, la fonction $u(\xi, \lambda)$ vérifiant la première condition aux limites est

$$u(\xi, \lambda) = (1 + q\xi)^{r_1} - (1 + q\xi)^{r_2},$$

où

$$r_1 = \frac{1}{2}(n+1+\gamma), \quad r_2 = \frac{1}{2}(n+1-\gamma)$$

et

$$\gamma = \left[(n+1)^2 + \lambda \frac{4F(o) a^2}{q^2 J(o) z^2} \right]^{\frac{1}{2}};$$

l'équation aux racines caractéristiques $u'(1, \lambda) = 0$ devient

$$\frac{n+1-\gamma}{n+1+\gamma} = (1+q)^{\gamma}.$$

La valeur $\lambda_0 = -(n+1)^2 q^2 / (4\mu^2)$ rend $\gamma = 0$ et semble être une racine. Cependant elle fait $r_1 = r_2$ et la solution $u(\xi, \lambda)$ disparaît. Elle doit être remplacée par la suivante :

$$(1+q\xi)^{\frac{n+1}{2}} \log(1+q\xi),$$

qui, ne vérifiant pas la deuxième condition aux limites, prouve par là que λ_0 n'est pas une racine caractéristique.

Pour des valeurs plus négatives encore de λ , γ devient imaginaire pur. Posons donc

$$\gamma = i\beta.$$

L'équation aux racines caractéristiques devient

$$2 \operatorname{arc tan} \frac{\beta}{n+1} + \beta \log(1+q) = 2k\pi, \quad (k=1, 2, \dots) \quad (34)$$

et la fonction propre associée à une racine β_i :

$$w(\xi, \lambda_i) = (1 + q\xi)^{\frac{n+1}{2}} \sin \left[\frac{1}{2} \beta_i \log(1 + q\xi) \right]. \quad (35)$$

La figure 9 illustre le calcul du premier membre de (34) par points; partant d'une valeur de λ on calcule la valeur de β qui lui correspond, puis le premier membre de (34). L'intersection de la courbe ainsi obtenue avec l'ordonnée 2π donne à la première racine la valeur $\lambda_1 = -2.48$.

Les valeurs numériques de q , n et μ sont celles également utilisées pour les figures 6, 7 et 8. La convergence est donc directe.

Pour assurer la rapidité de convergence, la première racine devrait être suffisamment éloignée du cercle-unité, comme dans le cas actuel.

Puisque nécessairement $\lambda_1 < \lambda_0$, un critère possible consisterait à prendre $\lambda_0 \ll -1$, ce qui, traduit en paramètres de structure, devient

$$2\mu \ll (n+1)q. \quad (36)$$

Il est probable que ce critère est utilisable de façon générale avec les définitions explicites de n , q et μ introduites au § 7, sans que les répartitions de flexibilités doivent suivre rigoureusement les lois indiquées.

§ 9. Application de la méthode de Ritz à l'équation du couplage parfait.

L'équation différentielle (23) du couplage parfait résulte du principe de variation

$$\delta \int_0^a [z^2 J H'^2 + F H^2 - 2(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)'' H] dx = 0, \quad (37)$$

eu égard aux conditions aux limites

$$H(0) = H'(a) = 0.$$

Prenons pour H une fonction approchée :

$$H = \sum_1^m a_i h_i(x),$$

où les fonctions $h_i(x)$ obéissent aux conditions aux limites et forment le début d'un système « complet » de fonctions dans l'intervalle $(0, a)$.

Les conditions sous lesquelles l'intégrale I est stationnaire sont

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0. \quad (i = 1, 2 \dots m)$$

Elles fournissent un système linéaire aux inconnues a_i :

$$\sum_i c_{ik} a_k = d_i. \quad (i_1 = 1, 2 \dots m)$$

On a pour les coefficients

$$c_{ik} = c_{ki} = \int_0^a (J h'_i h'_k + F h_i h_k) dx$$

et pour les seconds membres

$$d_i = \int_0^a (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^n h_i dx.$$

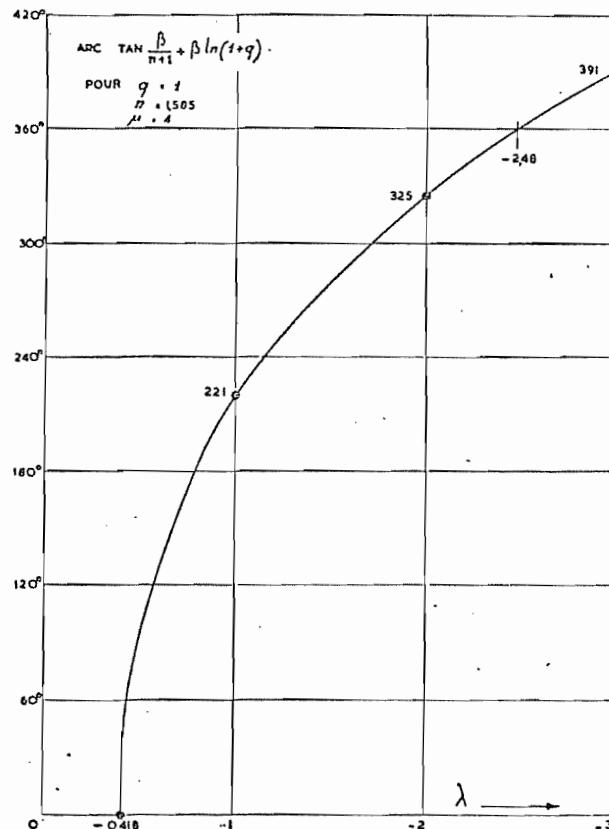


FIG. 9. — Détermination des valeurs caractéristiques du système de Sturm-Liouville.

Le calcul de ces coefficients nécessite $\frac{1}{2}n(n+3)$ quadratures numériques. Elles peuvent être simplifiées en adoptant une subdivision standardisée de l'intervalle d'intégration et en se servant de tables préparées des produits $h'_i h'_k$ et $h_i h_k$. Les valeurs de J et F doivent naturellement avoir été préalablement tabulées

avec la même subdivision. Un ensemble simple de fonctions $h_k(x)$ satisfaisant aux conditions requises est fourni par le système

$$h_k(x) = \sin(2k - 1)\frac{\pi x}{2a} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

C'est l'ensemble complet de fonctions propres engendrées par le système de STURM-LIOUVILLE :

$$\begin{cases} h'' + \lambda h = 0; \\ h(0) = h'(a) = 0. \end{cases}$$

§ 10. Application de la méthode de Ritz à l'équation générale du couplage.

La façon même dont les équations générales du couplage (13) et (15) ainsi que leurs conditions aux limites (16) à (21) ont été déduites ouvre la voie à leur solution par les méthodes dites « directes » du calcul des variations. Si dans l'expression de l'énergie totale (diminuée de l'énergie correspondant à l'état isostatique, qui ne subit pas de variation et dont le calcul serait inutile)

$$\begin{aligned} 2U &= \int_0^a [F H^2 + z^2 \left(g_1 + g_2 + \frac{j_1 + j_2}{4} \right) H'^2 - z (j_1 - j_2) H' K - (j_1 + j_2) K^2] dx \\ &+ \int_0^a [z^4 u (H'')^2 + 2 z^3 v H'' K' + z^2 w (K')^2] dx \\ &+ z^3 U_0 [H'(0)]^2 + 2 z^2 V_0 H'(0) K(0) + z W_0 K^2(0) \\ &- 2 \int_0^a [(Q_1 f_1 - Q_2 f_2) H + z^2 (P_1 g_1 - P_2 g_2) H'] dx, \end{aligned} \tag{38}$$

on approche les fonctions inconnues par des séries tronquées

$$H = \sum_1^m a_r h_r(x), \quad K = \sum_1^m b_r k_r(x), \tag{39}$$

les coefficients inconnus sont déterminés encore une fois par les conditions de stationnarité de U :

$$\frac{\partial U(a_r, b_r)}{\partial a_r} = 0, \quad \frac{\partial U(a_r, b_r)}{\partial b_r} = 0. \tag{40}$$

La solution est de nouveau ramenée à des quadratures mécaniques et à la résolution d'un système d'équations linéaires.

En dehors de (16) il n'est pas nécessaire que les fonctions $h_r(x)$ et $k_r(x)$ obéissent individuellement aux conditions aux limites, le principe de variation assurant de lui-même que ces dernières soient satisfaites. Pourtant cette liberté

même dans le choix est embarrassante et l'imposition de conditions individuelles « à priori » est souhaitable pour réduire le nombre de paramètres.

Les conditions aux limites générales qui ont été trouvées sont trop complexes pour permettre une construction aisée des fonctions d'approximation et pour leur donner un caractère universel, c'est-à-dire indépendant des caractéristiques de rigidité particulières de la structure. Il s'impose de les simplifier.

Cette simplification peut, sans nuire à la valeur finale de la solution, reposer sur l'indétermination relative qui subsiste dans l'opération consistant à diffuser la rigidité concentrée d'une nervure réelle intérieure en une rigidité répartie sur une bande.

Remarquons d'abord que les équations (18) et (20) peuvent être résolues par rapport à $H''(o)$ et $K'(o)$, qui apparaissent alors comme des fonctions linéaires des valeurs prises à l'extrémité de l'aile par les rigidités réparties :

$$\frac{u}{z^4(uw - v^2)}, \quad \frac{v}{z^3(uw - v^2)}, \quad \frac{w}{z^2(uw - v^2)}.$$

L'énergie de la nervure réelle concentrée d'extrémité étant déjà incluse dans (38), laissons tendre vers zéro à l'extrémité de l'aile les rigidités réparties provenant des autres nervures; les conditions (18) et (20) deviennent alors simplement

$$H''(o) = 0, \quad K'(o) = 0. \quad (41)$$

Le même résultat est évidemment obtenu en faisant tendre $u(o)$, $v(o)$ et $w(o)$ vers l'infini, tout en leur conservant des rapports limites qui sont logiquement cohérents avec les caractéristiques de la nervure extrême :

$$\lim \frac{u(o)}{v(o)} = U_0/V_0, \quad \lim \frac{v(o)}{w(o)} = V_0/W_0.$$

Cette remarque aura son utilité dans un instant.

Appliquant le même procédé à l'emplanture avec

$$\lim \frac{u(a)}{v(a)} = U_a/V_a, \quad \lim \frac{v(a)}{w(a)} = V_a/W_a,$$

les équations (19) et (21) deviennent

$$\begin{aligned} z U_a H''(a) + V_a K'(a) &= 0; \\ z V_a H''(a) + W_a K'(a) &= 0, \end{aligned}$$

et, comme le déterminant est différent de zéro,

$$H''(a) = 0, \quad K'(a) = 0. \quad (42)$$

Tenant compte de ce résultat dans la condition (17) et passant ensuite à la limite, il vient

$$z U_a H'''(a) + V_a K''(a) = 0. \quad (43)$$

Les conditions (41), (42) et (43) jointes à (16) constituent maintenant un système simple qui ne dépend plus que de la caractéristique de structure V_a/U_a (ce rapport pourrait être logiquement pris comme celui donné par la nervure réelle adjacente à l'emplanture).

Nous pouvons encore simplifier davantage en portant notre attention sur des relations aux limites qui sont une conséquence naturelle de la vérification des équations d'EULER. L'équation différentielle (15) en particulier, équation d'EULER du principe de variation, est satisfaite au point $x = 0$; introduisant alors les conditions (41), trouvées plus haut et effectuant le passage à la limite, il vient

$$z V_0 H'''(0) + W_0 K''(0) = 0. \quad (44)$$

Il vient de façon analogue au point $x = a$ et avec (42)

$$z V_a H'''(a) + W_a K''(a) = 0. \quad (45)$$

Il est maintenant avantageux d'introduire (45) comme une condition « à priori », car, associée à (43), elle livre des conditions simples, affranchies de tout paramètre de structure et par conséquent de signification universelle :

$$H'''(a) = 0, \quad K''(a) = 0. \quad (46)$$

Les autres relations naturelles aux limites, y compris celles qui dérivent de l'équation différentielle (13), ne sont pas intéressantes à considérer « à priori », car elles réintroduiraient des paramètres de structure.

Des fonctions d'approximation h et k , convenant au problème, c'est-à-dire obéissant aux conditions aux limites

$$\begin{aligned} h(0) &= h''(0) = h''(a) = h'''(a) = 0; \\ k'(0) &= k'(a) = k''(a) = 0, \end{aligned}$$

sont, par exemple, engendrées par les formules

$$\left. \begin{aligned} h(\xi) &= a_1 \xi + \int_0^\xi (\xi - \mu) \mu (\mu - 1)^2 \Phi(\mu) d\mu; \\ h(\xi) &= b_1 + \int_0^\xi \mu (\mu - 1)^2 \psi(\mu) d\mu, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

où $\xi = x/a$, $\Phi(\mu)$ et $\psi(\mu)$ sont deux polynômes arbitraires dans les puissances positives de μ .

Par exemple pour

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \quad \Phi(\mu) = \frac{1}{6} (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \mu^n; \\ h_{n+2}(\xi) &= \frac{1}{6} [(n+1)(n+2)\xi^2 - 2(n+1)(n+4)\xi + (n+3)(n+4)] \xi^{n+2} \\ &\quad (n = 0, 1, 2 \dots). \end{aligned}$$

Tandis que pour

$$b_1 = 0 \quad \text{et} \quad \psi(\mu) = \frac{1}{2}(n+2)(n+3)(n+4)\mu^n,$$

$$h_{n+2}(\xi) = \frac{1}{2}[(n+2)(n+3)\xi^2 - 2(n+2)(n+4)\xi + (n+3)(n+4)]\xi^{n+2} \quad (n=0, 1, 2 \dots)$$

Les premières fonctions sont obtenues en faisant

$$\Phi = \mu = 0, \quad a_1 = 1, \quad b_1 = 1$$

et sont donc

$$h_1(\xi) = \xi, \quad h_1(\xi) = 1;$$

on remarquera que ce sont les fonctions correspondant à l'action d'une nervure terminale isolée.

Il est à conseiller de rendre ces fonctions orthogonales dans l'intervalle (0,1) pour éviter d'obtenir un système linéaire final pauvrement caractérisé et d'accumuler les erreurs.

Le procédé de SCHMIDT convient à cet effet.

Un autre moyen d'obtenir des fonctions d'approximation bien conditionnées, sans qu'elles soient nécessairement orthogonales, consiste à changer de variable par la relation

$$x = a(1 - \cos \theta)$$

et de rechercher les fonctions, obéissant aux conditions aux limites, qui se rapprochent le plus de la suite (1, cos θ, cos 2θ, ...).

Tous calculs effectués, les premières fonctions ainsi obtenues sont

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= 1 - \cos \theta; \\ h_2 &= \frac{1}{30}[32 \cos \theta - 40 \cos 2\theta + 15 \cos 3\theta - 10 \cos 4\theta + 3 \cos 5\theta]; \\ h_3 &= \frac{1}{50}[-80 \cos 2\theta + 105 \cos 3\theta - 38 \cos 4\theta + 21 \cos 5\theta - 8 \cos 6\theta]; \\ h_4 &= \frac{1}{1070}[-1305 \cos 3\theta + 1926 \cos 4\theta - 1157 \cos 5\theta + 856 \cos 6\theta - 320 \cos 7\theta]; \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= 1; \\ h_2 &= \frac{1}{17}[24 \cos \theta - 12 \cos 2\theta + 8 \cos 3\theta - 3 \cos 4\theta]; \\ h_3 &= \frac{1}{43}[60 \cos 2\theta - 20 \cos 3\theta + 15 \cos 4\theta - 12 \cos 5\theta]; \\ h_4 &= \frac{1}{31}[60 \cos 3\theta - 45 \cos 4\theta + 36 \cos 5\theta - 20 \cos 6\theta]. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

L'allure de ces fonctions est représentée sur la figure 10.

La dernière étape dans l'application de la méthode de RITZ consiste à se rapprocher du problème réel en supprimant la nécessité d'opérer effectivement

une diffusion des rigidités de nervure, par ailleurs quelque peu artificielle. L'aile sera divisée dans le sens de l'envergure en une série de tranches délimitées par la position des nervures ou « stations » numérotées depuis 0 (nervure

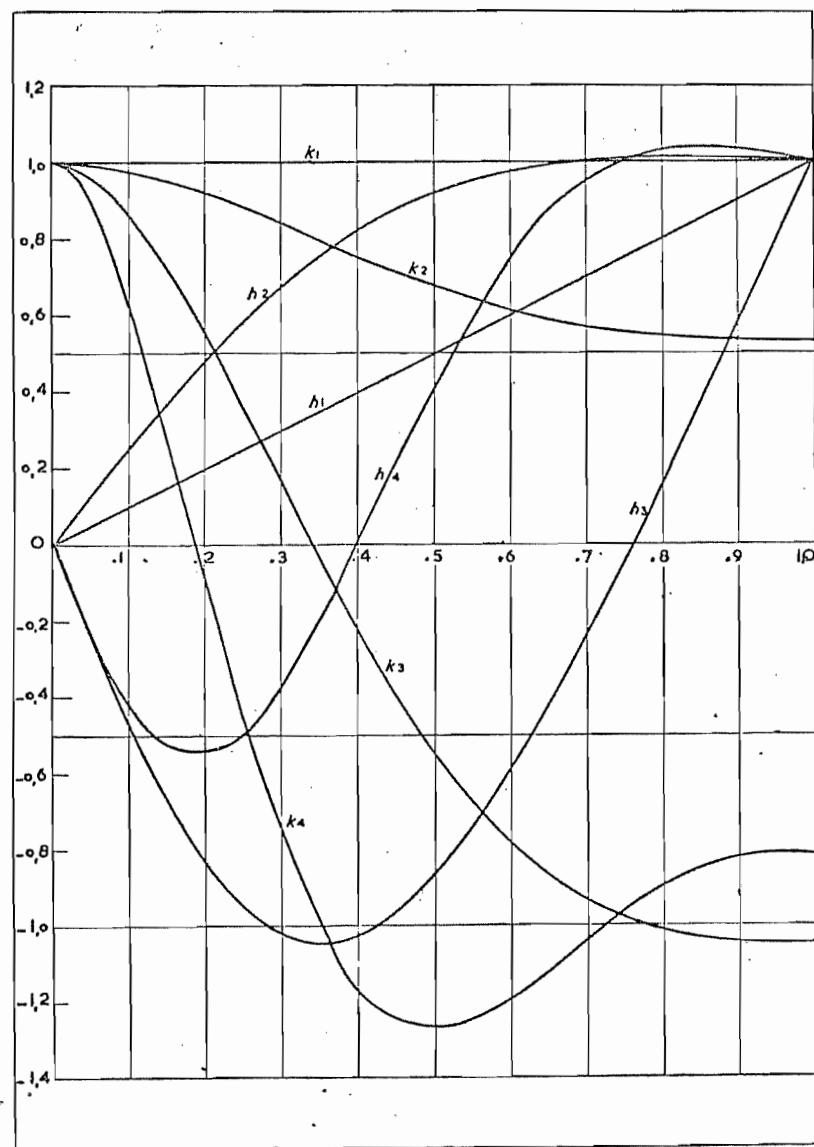


FIG. 10. — Les quatre premières fonctions d'approximation de chaque type.

d'extrémité) jusqu'à n (nervure adjacente à l'emplanture), $n+1$ désignant la section d'emplanture elle-même. La valeur d'une fonction f à la station i sera dénotée par $f(i)$; la largeur d'une tranche délimitée par les stations i et $i+1$ sera dénotée par $b_{i,i+1}$.

Nous poserons aussi, pour plus de concision,

$$x_i = x - x(i), \quad (50)$$

c'est-à-dire la coordonnée x , dont l'origine est ramenée à la station i . Sous l'action de nervures concentrées, la fonction H varie linéairement entre deux stations adjacentes; nous remplacerons donc une fonction d'approximation $h_r(x)$ par le contour polygonal inscrit, dont les sommets sont pris au droit des stations; dès lors, entre i et $i+1$:

$$\begin{aligned} h_r^*(x) &= h_r(i) + [h_r(i+1) - h_r(i)] \frac{x_i}{b_{i,i+1}}; \\ h_r'^*(x) &= \frac{h_r(i+1) - h_r(i)}{b_{i,i+1}}. \end{aligned} \quad (i \text{ à } i+1) \quad (51)$$

Dans les mêmes conditions la fonction K est constante entre deux stations adjacentes; nous remplacerons donc une fonction d'approximation $k_r(x)$ par une succession de paliers dont l'extrémité gauche est en contact avec la courbe au droit d'une station, c'est-à-dire

$$k_r^* = k_r(i). \quad (i \text{ à } i+1) \quad (52)$$

Il est à remarquer que les conditions $k'(a) = k''(a) = 0$ font pratiquement de chaque courbe $k_r(x)$ un palier dans la dernière tranche.

L'effort tranchant T_{ir} exercé par la nervure de la station i dans une répartition $h_r^*(x)$ est alors

$$\left. \begin{aligned} T_{or} &= h_r(1)/b_{o1}; \\ \dots \\ T_{ir} &= \frac{h_r(i+1) - h_r(i)}{b_{i,i+1}} - \frac{h_r(i) - h_r(i-1)}{b_{i-1,i}}, \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

et le moment M_{ir} :

$$\left. \begin{aligned} M_{or} &= k_r(0); \\ \dots \\ M_{ir} &= k_r(i+1) - k_r(i). \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

L'approximation des fonctions H et K étant devenue

$$H = \sum_1^m a_r h_r^*(x), \quad K = \sum_1^m b_r k_r^*(x),$$

où les fonctions d'approximation sont définies par (51) et (52), l'expression de l'énergie à rendre stationnaire devient, suivant (38),

$$\begin{aligned} 2U &= \int_0^a [F(\Sigma a_r h_r^*)^2 + z^2 \left(g_1 + g_2 + \frac{j_1 + j_2}{4} \right) (\Sigma a_r h_r'^*)^2 \\ &\quad - z(j_1 - j_2)(\Sigma a_r h_r'^*)(\Sigma b_r k_r) - (j_1 + j_2)(\Sigma b_r k_r^*)^2] dx \\ &+ \sum_{i=0}^n [z^3 U_i (\Sigma a_r T_{ir})^2 + 2z^2 V_i (\Sigma a_r T_{ir})(\Sigma b_r M_{ir}) + z W_i (\Sigma b_r M_{ir})^2] \\ &\quad - 2 \int_0^a [(Q_1 f_1 - Q_2 f_2) \Sigma a_r h_r^* + z^2 (P_1 g_1 - P_2 g_2) \Sigma a_r h_r'^*] dx. \end{aligned}$$

Quand on veut pousser plus loin encore l'aspect réaliste du problème, on est conduit de façon naturelle à prendre comme paramètres inconnus de la solution la hauteur des sommets du contour polygonal pour H et l'amplitude des paliers de K .

Ceci revient à considérer le nombre réel et discret d'inconnues hyperstatiques du problème. Cet aspect de la question est plus avantageusement traité par les méthodes des cellules hyperstatiques minima du chapitre III. L'avantage du procédé actuel dérive uniquement de la réduction du nombre d'inconnues, par rapport au nombre réel, sur la base des restrictions fournies par les conditions aux limites et du principe des moindres carrés.

§ 11. Extensions et cas particuliers.

A. — EFFORTS TRANCHANTS RÉDUITS.

Dès l'instant où il devient nécessaire de tenir compte des déformations des longerons dues aux efforts tranchants, la conicité des longerons peut jouer un rôle important en corrigeant l'effort tranchant apparent pour obtenir l'effort tranchant réduit qui se traduit seul en un flux de cisaillement sur l'âme. Soit $-c_1$ l'abscisse de convergence des semelles du longeron avant, l'effort tranchant réduit a pour valeur

$$T_1(x) - \frac{M_1(x)}{x + c_1} = P_1 - H' - \frac{Q_1 - H}{x + c_1}$$

et l'énergie de déformation par cisaillement :

$$\frac{1}{2} \int_0^a z^2 g_1 \left(P_1 - H' - \frac{Q_1 - H}{x + c_1} \right)^2 dx;$$

de même pour le longeron arrière :

$$\frac{1}{2} \int_0^a z^2 g_2 \left(P_2 + H' - \frac{Q_2 + H}{x + c_2} \right)^2 dx.$$

Les modifications correspondantes dans les équations différentielles d'EULER et dans l'expression de l'énergie débarrassée de sa partie isostatique (38) sont faciles à introduire.

B. — DEUXIÈME RÔLE DES NERVURES.

Jusqu'ici le rôle hyperstatique seul de la nervure a été envisagé. On peut tenir compte de son rôle isostatique en prenant en considération son état de tension isostatique, obtenu en considérant cette nervure (éventuellement complétée par un bec et une queue infiniment rigides) soumise aux charges aéro-

dynamiques et d'inertie qu'elle doit transmettre et simplement appuyée au droit des centres de cisaillement des longerons. Cet état de tension n'affecte, au point de vue énergétique, que la partie réellement existante (ou réellement déformable) déjà considérée comme servant de transmission hyperstatique aux inconnues T et M . L'énergie de déformation combinée contiendra maintenant des termes linéaires en T et M qui seront responsables de seconds membres additionnels. L'importance des tensions additionnelles ainsi mises en jeu est généralement faible, sauf pour les nervures peu rigides.

C. — CONDITIONS GÉNÉRALES D'ENCASTREMENT.

L'enca斯特ment parfait à l'emplanture est rarement réalisé. Pour obtenir les conditions réelles d'enca斯特rement il faut faire intervenir l'énergie de déformation de la structure sur laquelle la voilure vient s'implanter. Cette structure est soumise de la part de l'aile gauche aux sollicitations d'emplanture :

$$\begin{cases} T_1(a) = P_1(a) - H'(a); \\ M_1(a) = Q_1(a) - H(a); \\ C_1(a) = \frac{1}{2} z H'(a) - K(a); \end{cases} \quad \begin{cases} T_2(a) = P_2(a) + H'(a); \\ M_2(a) = Q_2(a) + H(a); \\ C_2(a) = \frac{1}{2} z H'(a) + K(a), \end{cases}$$

et de la part de l'aile droite, soit à un système de sollicitations symétriques (charges aérodynamiques et d'inertie symétriques), soit antisymétriques (charges aérodynamiques et d'inertie antisymétriques). Cette décomposition en un système symétrique et un système antisymétrique est évidemment toujours possible et unique. La structure en question est, d'autre part, soumise à des forces aérodynamiques et d'inertie formant avec celles des ailes un système statiquement équivalent à zéro [le système $H'(a)$, $H(a)$, $K(a)$ de chaque aile est déjà statiquement équivalent à zéro].

Il faut additionner l'énergie des deux ailes (c'est-à-dire deux fois l'énergie d'une aile, que le cas soit symétrique ou antisymétrique) à l'énergie de la structure d'emplanture. Celle-ci est une fonction quadratique générale des six éléments ramenés par la voilure et dont les coefficients de la partie homogène du second degré sont au nombre de 21 pour chaque cas (symétrique et antisymétrique). Un certain nombre de ceux-ci peuvent d'ailleurs être nuls ou négligeables.

Un cas intéressant se présente quand les ailes sont fixées à une structure d'emplanture elle-même reliée au restant par une liaison isostatique (c'est-à-dire dont les forces de liaison sont calculables par les seules considérations d'équilibre).

Chaque force de cette liaison est alors indépendante de $H'(a)$, $H(a)$ et $K(a)$ (parce que nous avons remarqué que le système d'emplanture qui leur est dû

est statiquement équivalent à zéro) et la variation de l'énergie de la structure restante étant nulle avec les variations de ces inconnues, son calcul devient superflu. En d'autres termes, la distribution des tensions dans les ailes devient indépendante de la répartition des forces aérodynamiques et d'inertie dans la structure restante.

Par ailleurs, rien n'est changé aux conditions aux limites (41), (42) et (46), qui conservent donc une valeur universelle.

D. — AILE EN CAISSE D.

Un cas particulier se présente quand la raideur en torsion du longeron arrière devient négligeable. La figure 3 montre alors immédiatement que

$$\frac{3}{2} H'(x) + K(x) = 0,$$

et après élimination de $K(x)$ entre cette équation et l'équation (13), il vient une équation unique du quatrième ordre en H qui ne contient plus j_2 .

CHAPITRE III.

FORMATION DES ÉQUATIONS RÉCURRENTES DE LIAISONS DISCONTINUES PAR NERVURES DROITES OU DIAGONALES.

Il s'agit ici d'établir les équations aux inconnues hyperstatiques circuitales discrètes qui dérivent du problème réel posé par le couplage des longerons au moyen de nervures droites ou diagonales.

L'objectif à viser consiste à réduire au maximum le couplage entre les inconnues elles-mêmes, c'est-à-dire à limiter chaque équation linéaire finale au plus petit nombre possible d'inconnues, sans que le gain qui en résulte pour la résolution numérique du système soit acquis aux dépens de complications dans le calcul des coefficients de ces inconnues.

Une façon manifeste d'obtenir ce résultat consiste avant tout à choisir les inconnues hyperstatiques de façon que chacune d'elles n'intéresse que la plus petite partie possible de la structure; ce choix relève d'ailleurs de la topologie.

La référence à des coupures fixes (qui rendent la structure isostatique) pour la définition des inconnues a généralement le désavantage de diffuser chacune d'elles dans toute la structure.

La référence à des groupes avantageux de coupures, si féconde dans les

structures planes, entraîne dans les structures tridimensionnelles qui nous occupent de réelles difficultés de recherche. Il doit manifestement exister une méthode conduisant à une vision directe et cette méthode découle du principe même qui est à la base de la variation des tensions.

Le problème posé par l'application du principe est celui de construire une représentation complète des états de tension, statiquement compatibles, et qui ne violent que des conditions de compatibilité circuitales aux déformations.

Une telle représentation peut consister dans la superposition (la validité d'une loi de Hooke est postulée) d'un état de tension statiquement compatible avec les forces extérieures appliquées et d'un certain nombre d'états de tension statiquement compatibles sans forces extérieures, qui pourraient être appelées self-contraintes (self-strainings).

Pour le démontrer il suffit d'imaginer un morcellement de la structure en un nombre d'éléments suffisant pour que chacun d'eux soit à connexion simple; d'établir pour chaque élément les sollicitations statiquement compatibles avec les forces extérieures et les actions des autres éléments; enfin, chaque élément étant ainsi en équilibre, d'écrire les équations exprimant l'équilibre des nœuds.

S'il en résulte un système de n équations à $n + m$ inconnues, m est le degré d'hyperstaticité de la structure (à condition, bien entendu, qu'un déterminant d'ordre n au moins soit différent de zéro). D'après un théorème classique d'algèbre, la solution complète comporte la somme d'une solution particulière du système avec second membre (c'est-à-dire un état statiquement compatible avec les forces extérieures) et de la solution générale du système homogène correspondant (c'est-à-dire des self-contraintes).

Le choix de la solution particulière est aisé. Quant au choix des inconnues hyperstatiques, il est décidé par l'examen des circuits fermés les plus simples, qui sont susceptibles d'une self-contrainte; l'amplitude de chaque self-contrainte constitue l'inconnue hyperstatische.

On peut reconnaître qu'une inconnue est indépendante des précédentes quand elle met en jeu un nouvel élément résistant de la structure, mais il faut, en définitive, être assuré d'avoir couvert l'examen d'un système complet de self-contraintes indépendantes. Ici la question peut devoir être tranchée par une connaissance du degré exact d'hyperstaticité, obtenue par le recours effectif au morcellement ou aux coupures.

§ 1. Longerons couplés par nervures perpendiculaires.

Si la raideur de torsion des longerons est nulle, le couplage des nervures est ineffectif et la totalité de la torsion est reprise par flexion différentielle.

Dans l'aile du type en « caisson D » (fig. 11) le longeron avant possède une raideur de torsion considérable, celle du longeron arrière peut être négligée.

Une cellule hyperstatique minimale est constituée par un tronçon incorporant trois nervures successives. Une cellule est numérotée comme sa nervure centrale et nous adoptons comme notation simplifiée

$$\xi_r = x_r b_r,$$

coordonnée d'envergure valable dans la tranche limitée aux stations ($r-1$) et r et variant de 0 à 1.

L'inconnue hyperstatique de la self-contrainte associée à la cellule est, par exemple, x_r , moment fléchissant au droit de la station r dans les longerons avant et arrière.

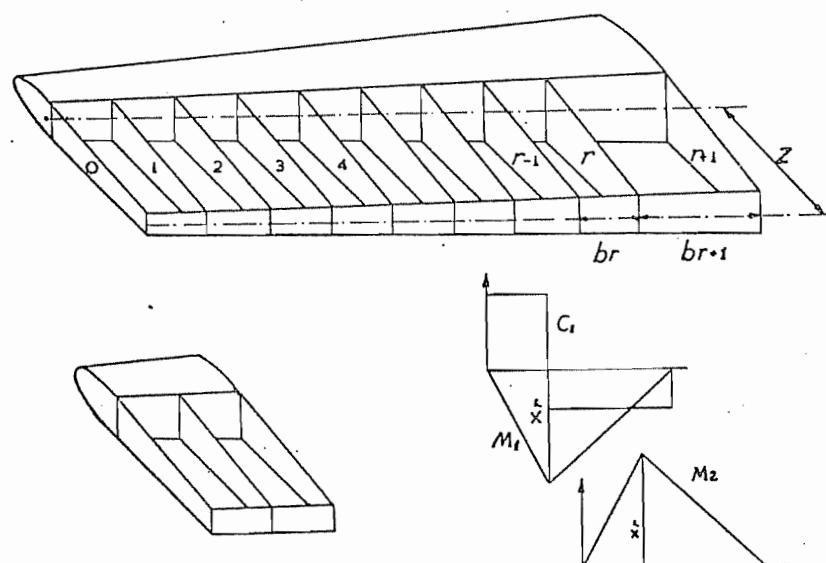


FIG. 11. — Aile « caisson D ». Etablissement des équations de récurrence.

La nervure r est sollicitée par un effort tranchant total au droit du longeron arrière :

$$T_r = \frac{x_{r-1}}{b_r} - x_r \left(\frac{1}{b_r} + \frac{1}{b_{r+1}} \right) + \frac{x_{r+1}}{b_{r+1}},$$

provenant de trois inconnues, car elle est un élément commun à trois cellules minimales.

Son énergie de déformation est du type

$$\frac{1}{2} z^2 u_r T_r^2.$$

Le moment de torsion total du longeron avant est, de $r-1$ à r :

$$G_1 = \frac{\hat{z}}{b_r} (x_r - x_{r-1}).$$

Son énergie de déformation est :

$$\frac{1}{2} \int_0^1 j C_i^2 d\xi_r.$$

Le moment fléchissant total du longeron avant est, de $r-1$ à r :

$$M_1 = Q_1 - x_{r-1}(1 - \xi_r) - x_r \xi_r,$$

où Q_1 est le moment isostatique. L'énergie de déformation est

$$\frac{1}{2} \int_0^1 f_1 M_1^2 d\xi_r.$$

De même pour le longeron arrière :

$$M_2 = Q_2 + x_{r-1}(1 - \xi_r) + x_r \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \int_0^1 f_2 M_2^2 d\xi_r.$$

Additionnant les énergies de déformation de tous les éléments de la cellule hyperstatique minimale r , on obtient tous les termes qui contiennent l'inconnue x_r dans l'énergie de déformation de la structure. Il suffit donc de ces termes pour former la condition de stationnarité

$$\frac{\partial U}{\partial x_r} = 0,$$

qui fournit l'équation de récurrence

$$a_{r,r-2} x_{r-2} + a_{r,r-1} x_{r-1} + a_{r,r} x_r + a_{r,r+1} x_{r+1} + a_{r,r+2} x_{r+2} = b_r,$$

dont il vient pour les coefficients (avec la notation $f = f_1 + f_2$) :

$$\begin{aligned} a_{r,r+2} &= z^2 u_{r-1} / b_{r-1} b_r; \\ a_{r,r-1} &= \int_0^1 f(1 - \xi_r) \xi_r d\xi_r - \frac{z^2}{b_r^2} \int_0^1 j d\xi_r - u_{r-1} \frac{z^2}{b_r^2} \left(\frac{1}{b_{r-1}} + \frac{1}{b_r} \right) - u_r \frac{z^2}{b_r} \left(\frac{1}{b_r} + \frac{1}{b_{r+1}} \right); \\ a_{r,r} &= \int_0^1 f \xi_r^2 d\xi_r + \int_0^1 f(1 - \xi_{r+1})^2 d\xi_{r+1} + \frac{z^2}{b_r^2} \int_0^1 j d\xi_r + \frac{z^2}{b_{r+1}^2} \int_0^1 j d\xi_{r+1} \\ &\quad + u_{r-1} \frac{z^2}{b_r^2} + u_r z^2 \left(\frac{1}{b_r} + \frac{1}{b_{r+1}} \right)^2 + u_{r+1} \frac{z^2}{b_{r+1}^2}, \\ a_{r,r+1} &: \end{aligned}$$

même expression que $a_{r,r-1}$, où l'indice r est à augmenter d'une unité;

$$a_{r,r+2} = z^2 u_{r+1} / b_{r+1} b_{r+2},$$

même expression que $a_{r,r-2}$, où l'indice r est augmenté de deux unités.

Enfin, pour le second membre :

$$b_r = \int_0^1 (Q_1 f_1 - Q_2 f_2) \xi_r d\xi_r + \int_0^1 (Q_1 f_1 - Q_2 f_2) (1 - \xi_{r+1}) d\xi_{r+1}.$$

Les déformations dues aux efforts tranchants ont été négligées.

Si les nervures sont considérées comme infiniment rigides, l'équation de récurrence ne contient plus que trois inconnues successives.

Quand le longeron arrière est également rigide à la torsion, il faut ajouter les self-contraintes obtenues par la considération des cellules hyperstatiques minimales du type de la figure 12.

Elles consistent simplement en des moments de torsion constants mais opposés dans chaque longeron et une flexion pure des nervures.

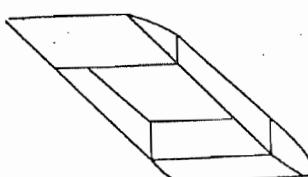


FIG. 12. — Cellule minimale de second type.

Une équation de récurrence pour une inconnue du premier type contient alors neuf inconnues. Pour une inconnue du deuxième type elle en contient sept. Ces chiffres sont abaissés respectivement à cinq et trois quand les nervures sont considérées comme infiniment rigides. Dans ce dernier cas et parallèlement au cas du couplage parfait, les inconnues du second type sont aisément éliminées pour laisser un système récurrent à trois inconnues du premier type, déjà établi par FRIEDRICH et von KARMAN en ramenant le problème aux équations des trois moments (réf. 11).

§ 2. Longerons couplés par nervures diagonales.

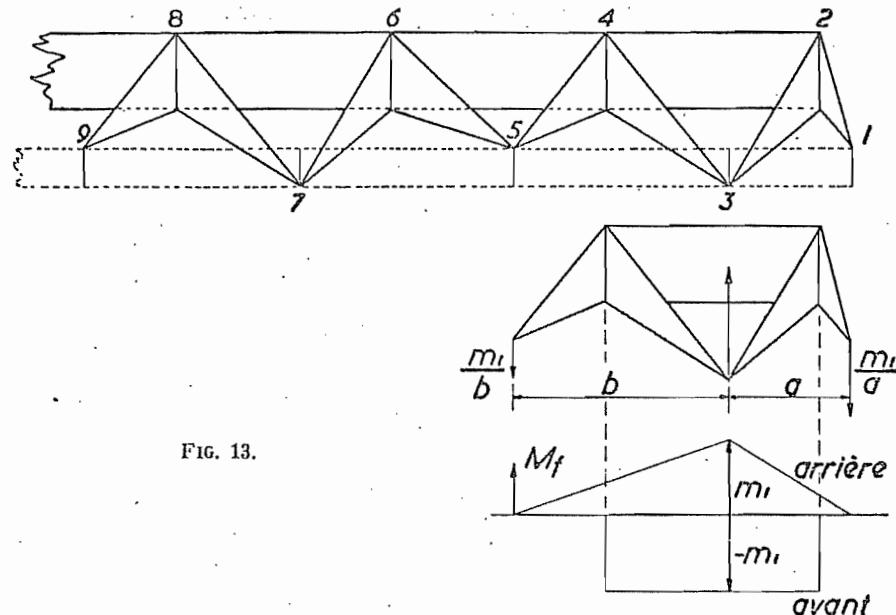
La figure 13 montre une solution dans laquelle la raideur de torsion du longeron avant est obtenue au moyen d'un réseau de bras diagonaux (solution apparentée au système Monospar). Quand les nœuds des bras diagonaux sont attachés à un longeron arrière, il vient un problème hyperstatique dont une cellule minimale typique est représentée en dessous (solution du Fairey Primer).

Le dessin représente plus exactement une cellule minimale dans laquelle la portion de longeron arrière a été supprimée pour montrer le système de forces qui prend naissance dans la self-contrainte.

Le système réciproque agit évidemment sur le longeron arrière. Cette façon d'analyser la self-contrainte est faite à dessein pour montrer l'identité de la solution avec celle dérivant de la considération de groupes de coupures. La coopération hyperstatische, qui, sur le longeron arrière, se traduit par l'application d'une succession d'efforts tranchants, résulte par contre sur le longeron avant en l'application d'une succession de moments purs.

L'équation type de récurrence est à nouveau établie en additionnant uniquement les énergies de déformation des éléments de la cellule r , soumise aux sollicitations totales qui peuvent provenir des forces extérieures, de la self-constrainte même de la cellule et des self-contraintes auxquelles ces éléments participent dans des cellules minimales voisines.

Il apparaît ainsi que l'équation de récurrence ne contient que trois inconnues successives.



Quand le longeron avant a une raideur propre de torsion, il faut prendre en considération un deuxième type de cellule minimale représenté sur la figure 14. Dans ces conditions, l'équation de récurrence du premier type contient six inconnues, celle du second type quatre inconnues, chiffres qui deviennent respectivement quatre et deux pour des bras infiniment rigides.

Le type de structure représenté à la figure 15 est connu sous le nom de poutre de WARREN. Il permet une très grande rigidité à la torsion sans l'utilisation d'un revêtement travaillant et a été réalisé par de nombreux constructeurs (Hawker sur le Hurricane I, Dewoitine, Morane, Renard).

Le calcul hyperstatique de ce type de voilure était à l'époque un problème formidable. Le principe de variation des déplacements a été utilisé pour tenter de le résoudre dans le cas particulier d'une rigidité infinie des membrures diagonales (réf. 13 et 14). J. DRYMAEL en a fait une des premières applications de la méthode de relaxation, généralisant le procédé de Cross, et incorporant déjà la notion de relaxation par groupes (réf. 15). Cette méthode commençait à être développée systématiquement par SOUTHWELL.

L'analyse de cette structure est en réalité aussi facile que les précédentes et seules les difficultés soulevées par une application de la méthode des coupures peuvent avoir justifié à l'époque l'utilisation d'une relaxation spatiale particulièrement laborieuse.

Un état de tension statiquement compatible avec les forces extérieures est obtenu en considérant les éléments diagonaux comme simplement appuyés sur les longerons. Puis il vient une suite de cellules hyperstatiques minimales imbriquées, délimitées par les nœuds (1234), (2345), (3456), etc.

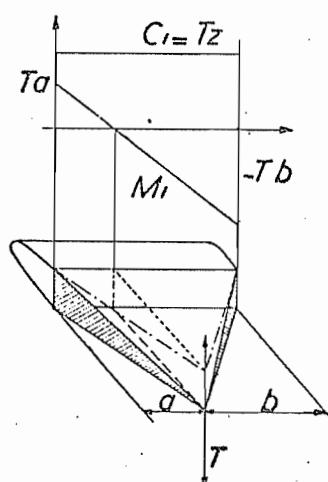


FIG. 14. — Cellule minimale de second type.

L'une de celles-ci est représentée en dessous et la vue en plan permet d'en analyser plus facilement la self-contrainte. Aux nœuds C et D ne peuvent exister que des paires réciproques d'efforts tranchants T_a et T_b . Leurs sens sont choisis de façon telle que le longeron avant subisse des moments fléchissants négatifs, le longeron arrière des moments positifs; ils tendent donc tous deux à abaisser le nœud A et à remonter le nœud B. Pour éviter la torsion de la diagonale AB il faut ensuite

$$a T_a = b T_b.$$

Dans cette diagonale le moment fléchissant s'annule en F, où règne un effort tranchant $T = T_a + T_b$ tendant à remonter le nœud A et à abaisser le nœud B; ceci définit entièrement la sollicitation de chaque élément. Comme inconnue hyperstatique, on peut prendre T ; il vient alors

$$T_a = \frac{b}{a+b} T, \quad T_b = \frac{a}{a+b} T.$$

Le moment fléchissant du longeron avant au point A :

$$-c T_a = -\frac{a+b}{bc} T,$$

du longeron arrière au point B :

$$d T_b = +\frac{a+b}{ad} T.$$

Quand la portion AC de longeron avant est parallèle à la portion DB de longeron arrière :

$$ad = bc$$

et les deux moments sont égaux en valeur absolue (celle-ci pourrait être prise aussi comme inconnue hyperstatique en remplacement de T).

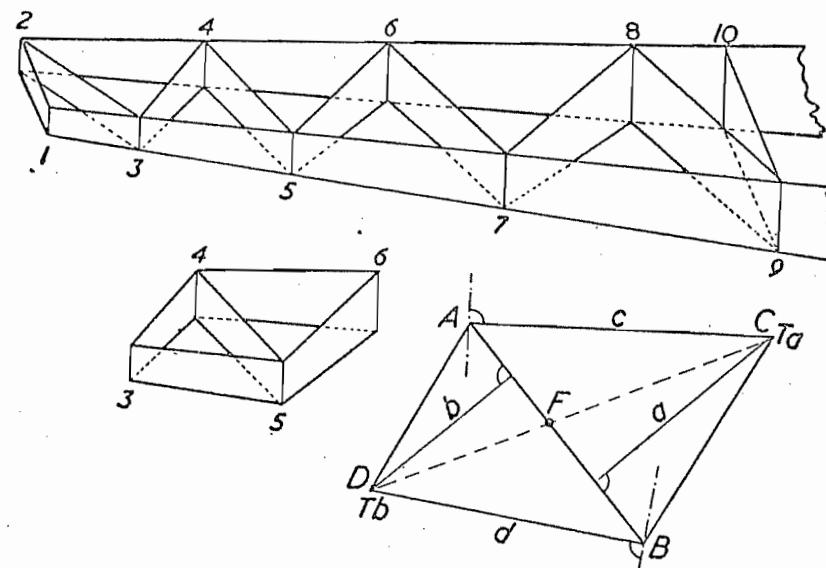


FIG. 15. — Voilure en poutre de Warren.

L'analyse des éléments communs à plusieurs cellules minimales établit que l'équation de récurrence contient cinq inconnues.

Enfin, la considération de la raideur propre en torsion des longerons ferait intervenir les cellules minimales du type de la figure 14 et les deux équations générales de récurrence contiendraient chacune respectivement neuf et sept inconnues.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.

1. THALAU, K., *Ueber die Verbundwirkung von Rippen im freitragenden, zweiholmigen und verspannungslosen Flugzeug-flügel.* (Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 1925.)
2. BIEZENO, C., KOCH, J. J. en KONING, C., *Invloed van het ribverband op de sterke van vliegtuigvleugels I.*
Rapport V.175 der Verslagen en Verhandelingen van den Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart. Amsterdam, 1927.
3. KONING, C., *Ibid. II.* Rapport V.284, 1928.
Méthode simplifiée pour obtenir les dernières équations du rapport V.175.
4. — *Ibid. III.* Rapport V.285, 1928.
La possibilité d'intégrer les équations d'équilibre est exploitée pour abaisser l'ordre du système différentiel précédent.
5. — *Ibid. IV.* Rapport V.357, 1930.
Les moments fléchissants sont pris comme inconnues, ce qui conduit enfin à l'équation différentielle type du problème.
6. GABRIELLI, G., *Torsional rigidity of cantilever wings with constant spar and rib sections.* (T.M. 520, N.A.C.A., 1929.)
Nombreuses références à divers procédés d'intégration du problème.
7. ROXBEE COX, H., *Torsional Loading on stripped Aeroplane Wings.* (R. and M., 1436, Aug. 1931.)
8. WILLIAMS, D., *Distortion of stripped Aeroplane wings under torsional loading.* (R. and M., 1536, janvier 1933.)
9. ROXBEE COX, H. and WILLIAMS, D., *Effect of stiff ribs on torsional stiffness of wings.* (R. and M., 1536, janvier 1933.)
10. — *Effect of ribs on stresses in spars.* (R. and M., 1538, janvier 1933.)
11. ROXBEE COX, H., HANSON, J. and SANDFORD, W. T., *Stiffness determination in certain cantilever wings.* (R. and M., 1617, May 1934.)
12. KUHN, P., *Analysis of two-spar cantilever wings with special reference to torsion and load transference.* (N.A.C.A. Report 5081, 1935.)
13. WILLIAMS, D., *The use of the principle of minimum potential energy in problems of static equilibrium.* (R. and M., 1827, janvier 1938.)
14. TAYLOR, J., *Stresses in Stiff-jointed plane frames under transverse loading.* (R. and M., 1952, Aug. 1938.)
15. DRYMAEL, J., *Plane braced frames loaded perpendicular to their planes.* (Journal of the R. Ae. Soc., novembre 1940.)