Des chiffres et des lettres,

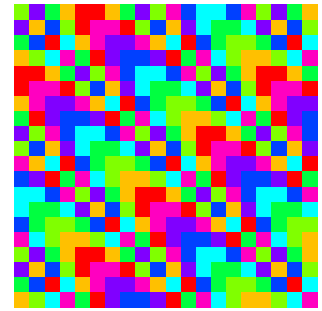
le mot le plus long et le compte est bon !

Michel Rigo

http://orbi.uliege.be/

14 novembre 2026, Conférence Altaïr





Jouer avec les mots, pourquoi et comment ?

Brussels Summer School of Mathematics, 4/8/2015

La combinatoire des mots



Raymond Queneau (1903–1976), cofondateur du groupe OuLiPo (*Ouvroir de littérature potentielle*).
"Ce groupe littéraire est célèbre pour ses défis mathématiques imposés à la langue. Les contraintes obligent à des astuces créatives."
G. Perec, *La Disparition*.



Cent mille milliards de poèmes (1961)
livre-objet permet de combiner des vers pour composer des sonnets.

Le premier quatrain :

Le roi de la pampa retourne sa chemise
pour la mettre sécher aux cornes des taureaux
le cornédbif en boîte empeste la remise
et fermentent de même et les cuirs et les peaux

La combinatoire des mots

Un sonnet : quatorze vers, deux quatrains et deux tercets



A
B
A
B
C
D
C
D
E
E
F
E
E
F

10 feuilles, 140 vers

Combien de sonnets contient le livre ?

$10 \times 14,\ 14^{10},\ 10^{14},\ 10!,\ 14!,\ 10+14,\ \ldots$

La combinatoire des mots

Un sonnet : quatorze vers, deux quatrains et deux tercets



A
B
A
B
C
D
C
D
E
E
F
E
E
F

10 feuilles, 140 vers

Combien de sonnets contient le livre ?

$10 \times 14,\ 14^{10},\ \mathbf{10^{14}},\ 10!,\ 14!,\ 10+14,\ \ldots$

La combinatoire des mots

Queneau, Raymond

Sur les suites s-additives. (French) Zbl 0257.05025

J. Comb. Theory, Ser. A 12, 31-71 (1972).

Queneau construit des sonnets, ici nous considérons :

- $abbbab$, 01100010, bonjour, $\heartsuit\clubsuit\clubsuit\diamondsuit$, ...
- $314159265358979\cdots$
- une séquence génétique `ACCGTATGCAATGC`
- un produit de matrices $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\mathcal{M}_2\mathcal{M}_1$

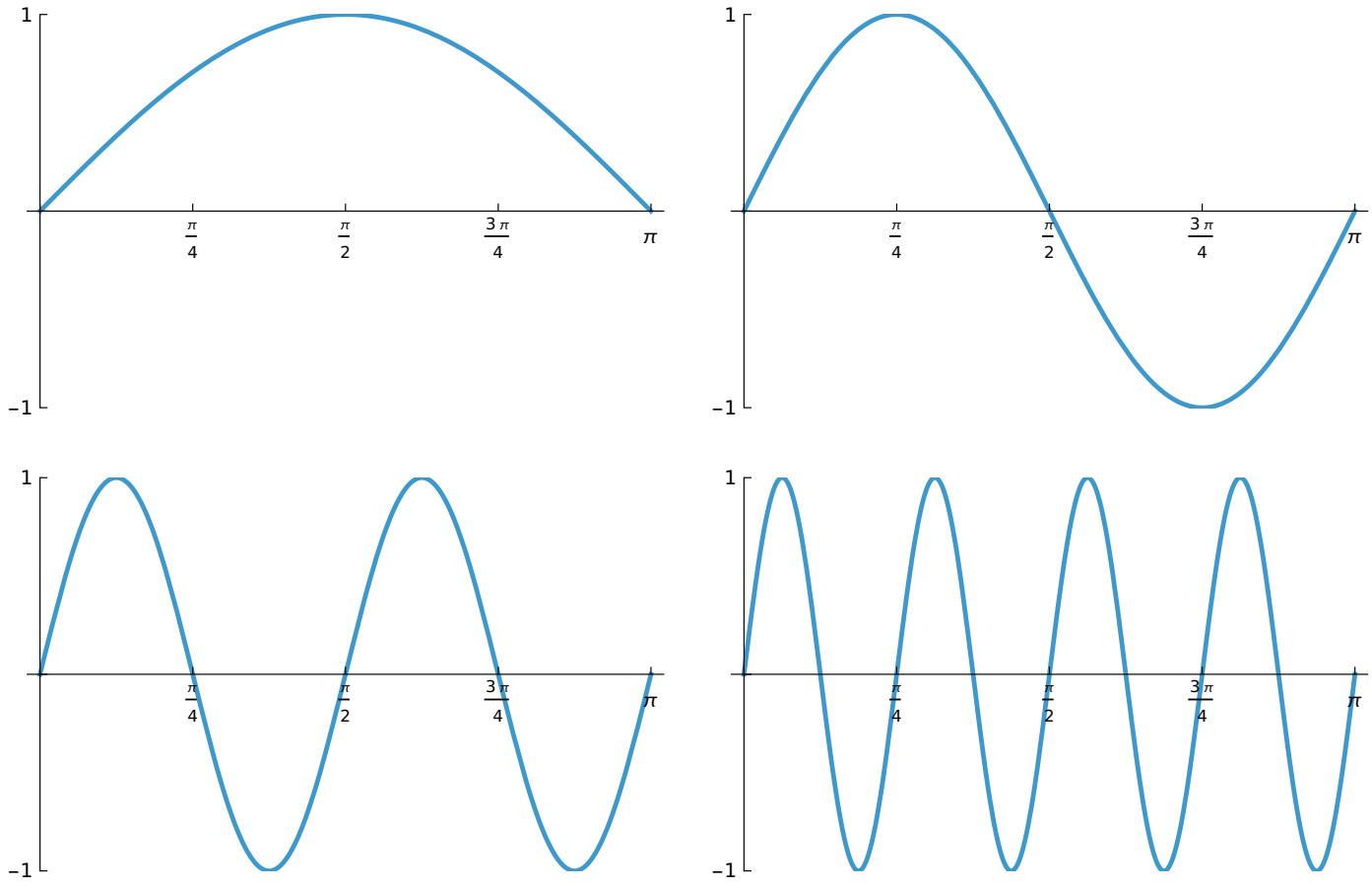
La combinatoire des mots

Combinatorics on words is the mathematics of (finite or infinite) sequences of symbols, treated as objects worth studying for their own sake (68R15).

- Automates et langages formels (informatique théorique)
- Dynamique symbolique
- Théorie ergodique
- Théorie des nombres
- Algèbre (monoïdes et groupes libres)
- *Stringology* et bio-informatique

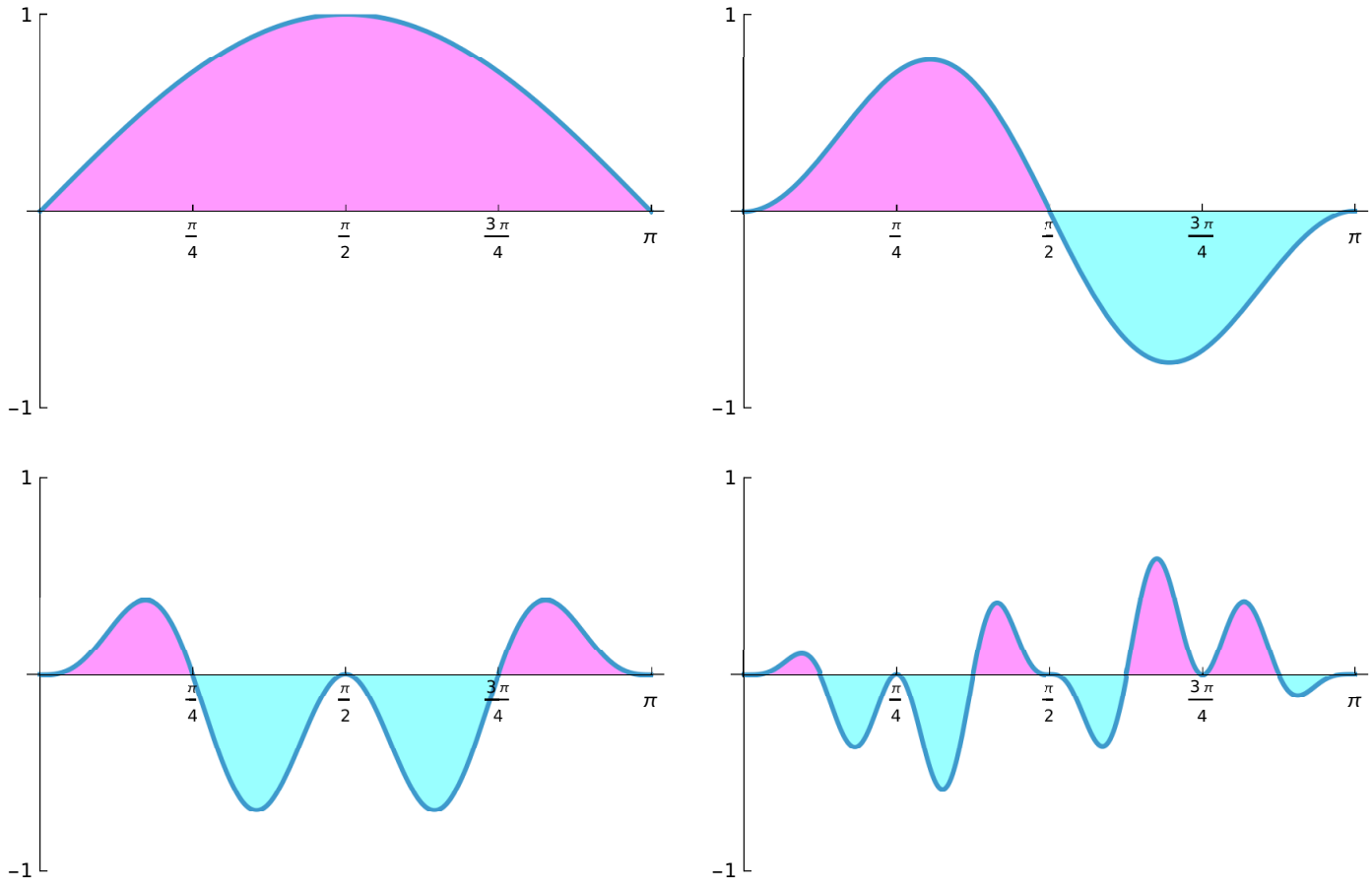
Étude du signe d'un produit

$$\prod_{k=0}^{n} \sin(2^k x) = \sin x . \sin(2x) . \sin(4x) \cdots \sin(2^n x) \quad \text{sur } [0, \pi]$$



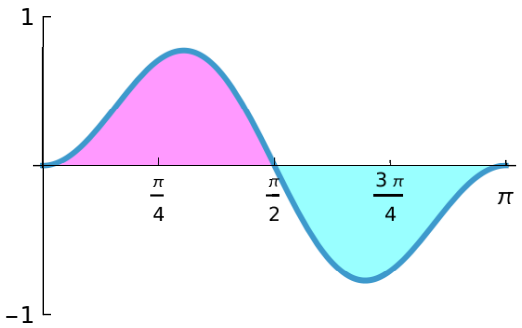
Étude du signe d'un produit

$$\prod_{k=0}^{n} \sin(2^k x) = \sin x . \sin(2x) . \sin(4x) \cdots \sin(2^n x) \quad \text{sur } [0, \pi]$$

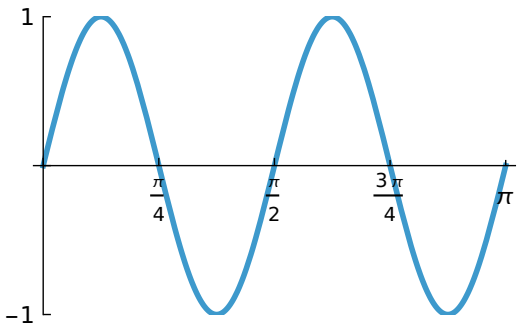


Étude du signe d'un produit

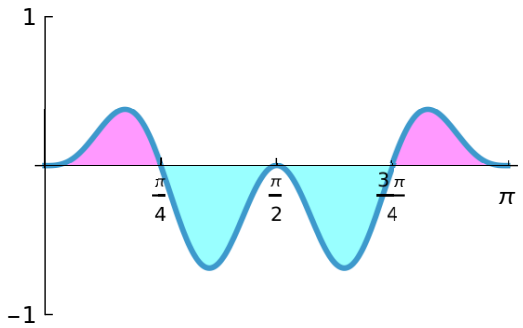
$$\prod_{k=0}^{n} \sin(2^k x).\sin(2^{n+1} x) = \prod_{k=0}^{n+1} \sin(2^k x)$$



$\sin(x)\sin(2x)$



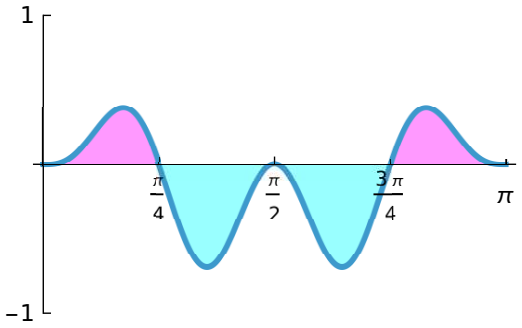
$\sin(4x)$



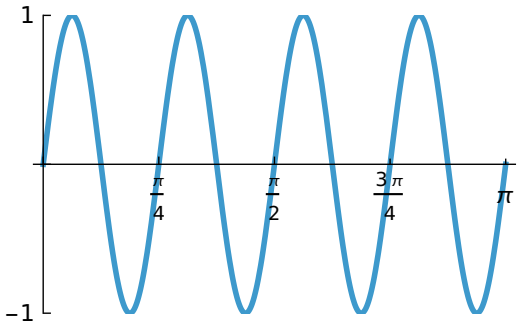
$\sin(x)\sin(2x)\sin(4x)$

Étude du signe d'un produit

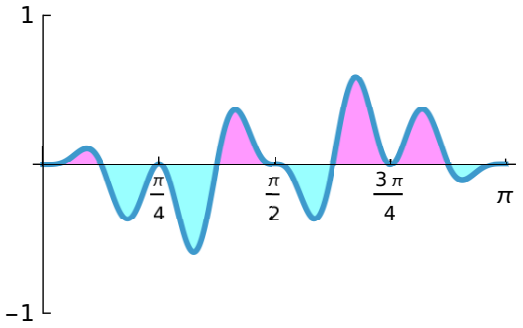
$$\prod_{k=0}^{n} \sin(2^k x).\sin(2^{n+1} x) = \prod_{k=0}^{n+1} \sin(2^k x)$$



$\prod_{k=0}^{2} \sin(2^k x)$

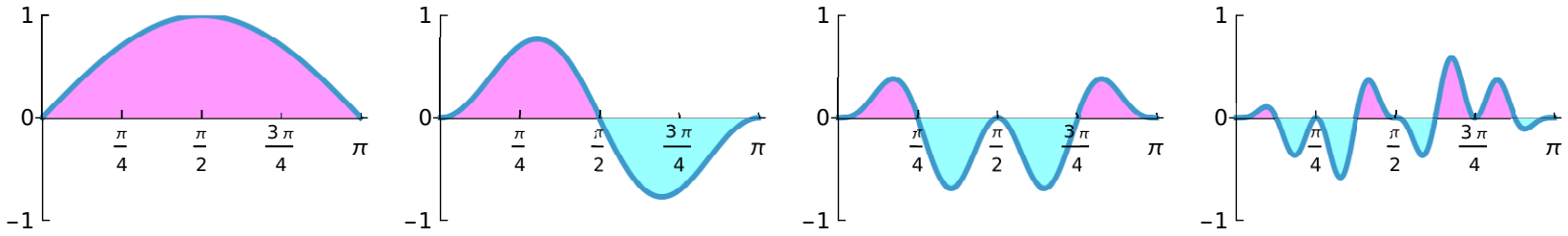


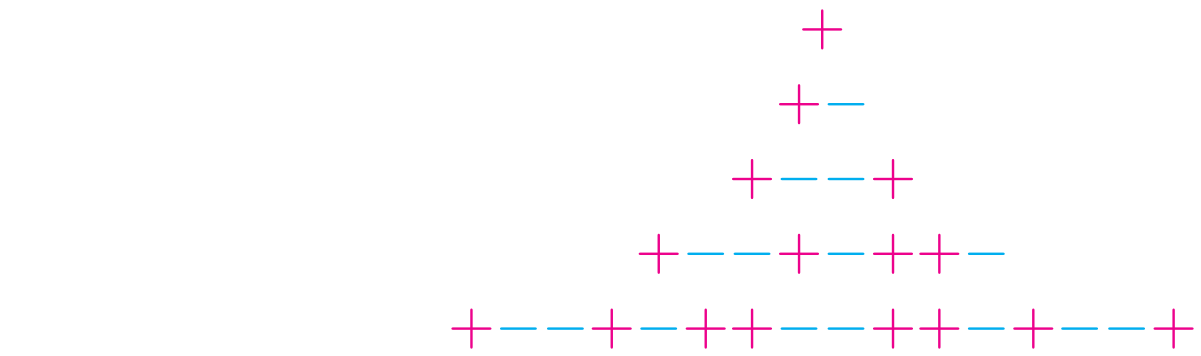
$\sin(2^3 x)$



$\prod_{k=0}^{3} \sin(2^k x)$

Étude du signe d'un produit





$$+ \mapsto +-, \qquad - \mapsto -+$$

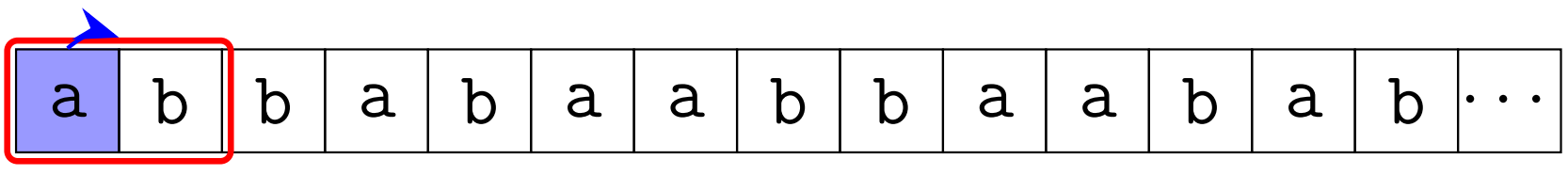
J.-P. Allouche, M. Mendès France, Euler, Pisot, Prouhet–Thue–Morse, Wallis and the duplication of sines, *Monatsh. Math.* (2008).

La suite de Prouhet–Thue–Morse

$$\boxed{\mathtt{a} \mapsto \mathtt{ab}, \quad \mathtt{b} \mapsto \mathtt{ba}}$$

$$\mathtt{abbabaabbaababbabaababba}\cdots$$

Une tête de lecture et une tête d'écriture se déplacent :



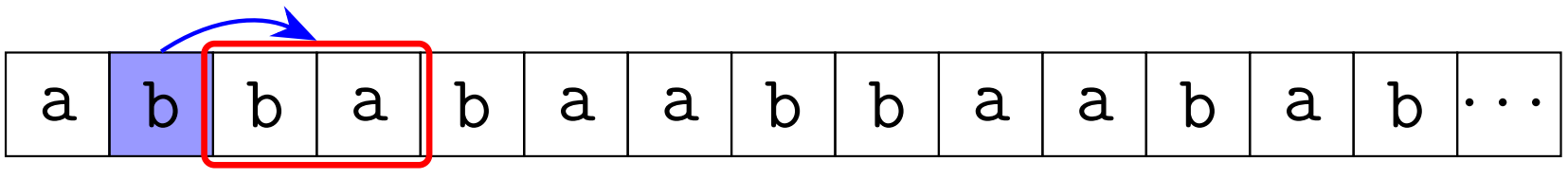
A. Cobham, Uniform tag sequences, *Math. Syst. Theory* (1972)

La suite de Prouhet–Thue–Morse

$$\boxed{\mathtt{a} \mapsto \mathtt{ab}, \quad \mathtt{b} \mapsto \mathtt{ba}}$$

$$\mathtt{abbabaabbaababbabaababba}\cdots$$

Une tête de lecture et une tête d'écriture se déplacent :



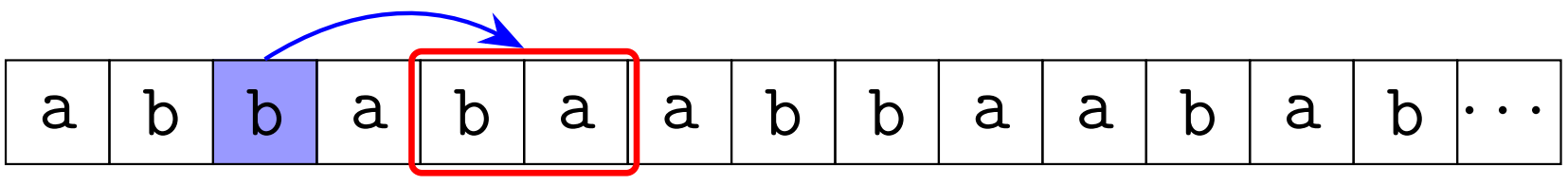
A. Cobham, Uniform tag sequences, *Math. Syst. Theory* (1972)

La suite de Prouhet–Thue–Morse

$$\boxed{\mathtt{a} \mapsto \mathtt{ab}, \quad \mathtt{b} \mapsto \mathtt{ba}}$$

$$\mathtt{abbabaabbaababbabaababba}\cdots$$

Une tête de lecture et une tête d'écriture se déplacent :



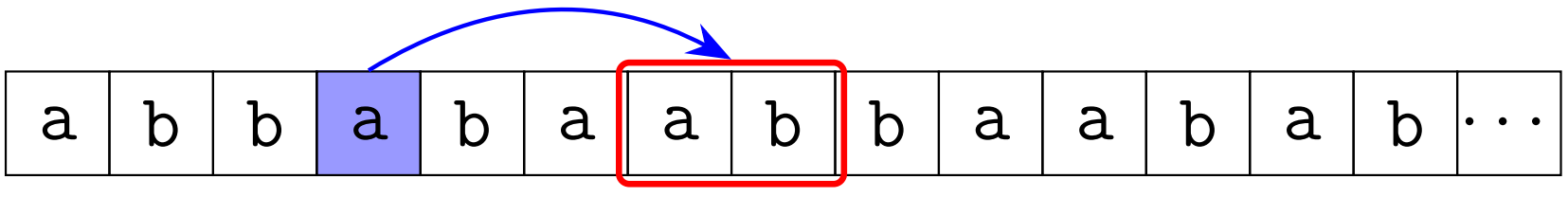
A. Cobham, Uniform tag sequences, *Math. Syst. Theory* (1972)

La suite de Prouhet–Thue–Morse

$$\boxed{\mathtt{a} \mapsto \mathtt{ab}, \quad \mathtt{b} \mapsto \mathtt{ba}}$$

$$\mathtt{abbabaabbaababbabaababba}\cdots$$

Une tête de lecture et une tête d'écriture se déplacent :



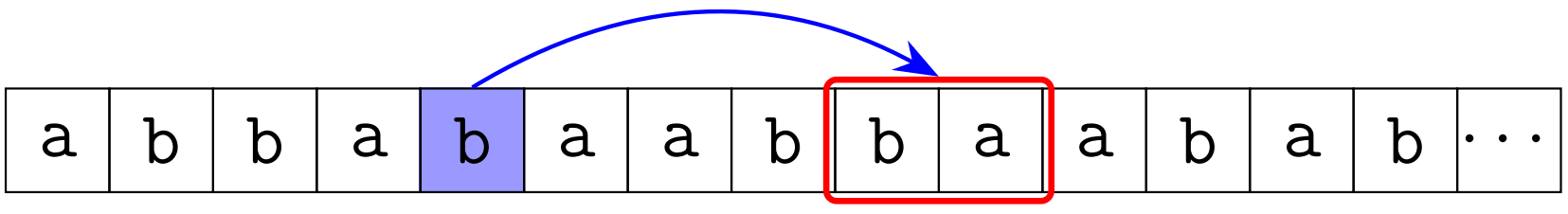
A. Cobham, Uniform tag sequences, *Math. Syst. Theory* (1972)

La suite de Prouhet–Thue–Morse

$$\boxed{\mathtt{a} \mapsto \mathtt{ab}, \quad \mathtt{b} \mapsto \mathtt{ba}}$$

$$\mathtt{abbabaabbaababbabaababba}\cdots$$

Une tête de lecture et une tête d'écriture se déplacent :



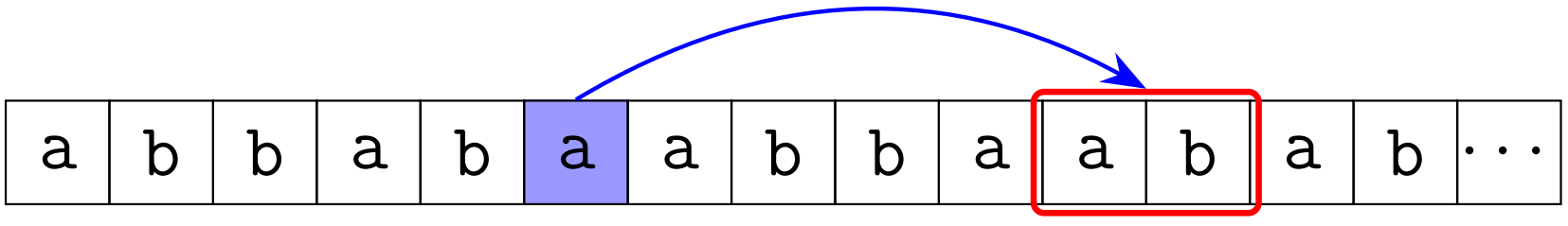
A. Cobham, Uniform tag sequences, *Math. Syst. Theory* (1972)

La suite de Prouhet–Thue–Morse

$$\boxed{\mathtt{a} \mapsto \mathtt{ab}, \quad \mathtt{b} \mapsto \mathtt{ba}}$$

$$\mathtt{abbabaabbaababbabaababba}\cdots$$

Une tête de lecture et une tête d'écriture se déplacent :

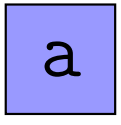


A. Cobham, Uniform tag sequences, *Math. Syst. Theory* (1972)

La suite de Prouhet–Thue–Morse

Une construction alternative $u \mapsto u\overline{u}$

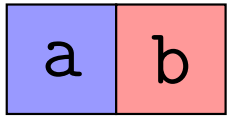
$$\overline{\mathtt{abbbaa}} = \mathtt{baaabb}$$



La suite de Prouhet–Thue–Morse

Une construction alternative $u \mapsto u\overline{u}$

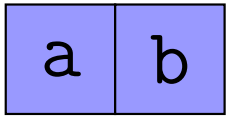
$$\overline{\mathtt{abbbaa}} = \mathtt{baaabb}$$



La suite de Prouhet–Thue–Morse

Une construction alternative $u \mapsto u\overline{u}$

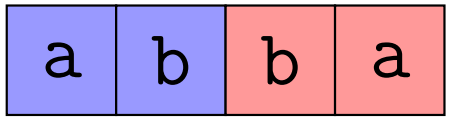
$$\overline{\texttt{abbbaa}} = \texttt{baaabb}$$



La suite de Prouhet–Thue–Morse

Une construction alternative $u \mapsto u\overline{u}$

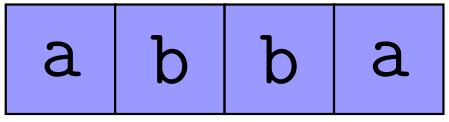
$$\overline{\texttt{abbbaa}} = \texttt{baaabb}$$



La suite de Prouhet–Thue–Morse

Une construction alternative $u \mapsto u\overline{u}$

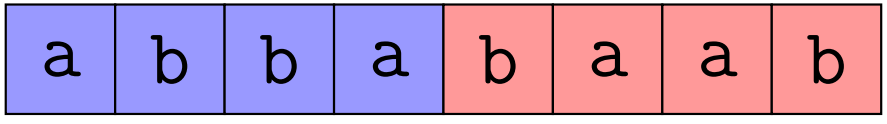
$$\overline{\texttt{abbbaa}} = \texttt{baaabb}$$



La suite de Prouhet–Thue–Morse

Une construction alternative $u \mapsto u\overline{u}$

$$\overline{\mathtt{abbbaa}} = \mathtt{baaabb}$$



La suite de Prouhet–Thue–Morse

Une construction alternative $u \mapsto u\overline{u}$

$$\overline{\mathtt{abbbaa}} = \mathtt{baaabb}$$

a	b	b	a	b	a	a	b

La suite de Prouhet–Thue–Morse

Écriture en base 2,

$$n = \sum_{i=0}^{\ell} c_i \, 2^i$$

n	Base 2
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011

La suite de Prouhet–Thue–Morse

Réconcilions les deux constructions vues précédemment,
avec un troisième point de vue !

Une définition de la suite

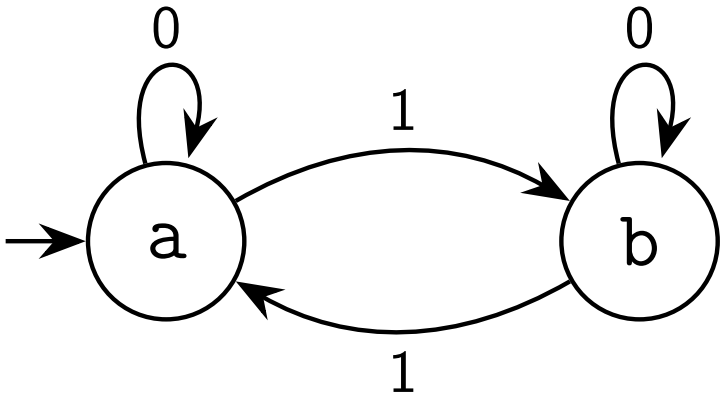
$\mathbf{T}_n = \mathtt{a} \Leftrightarrow$ nombre pair de 1 dans l'écriture en base 2 de $n \geq 0$.

0	1	1	2	1	2	2	3	1	2	2	3
a	b	b	a	b	a	a	b	b	a	a	b
0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011

La suite de Prouhet–Thue–Morse

A. Cobham (1972)

Une suite est 2-automatique $\Leftrightarrow$ elle est le codage d'une suite engendrée par un morphisme 2-uniforme.



$\mathtt{a} \mapsto \mathtt{ab}$

$\mathtt{b} \mapsto \mathtt{ba}$



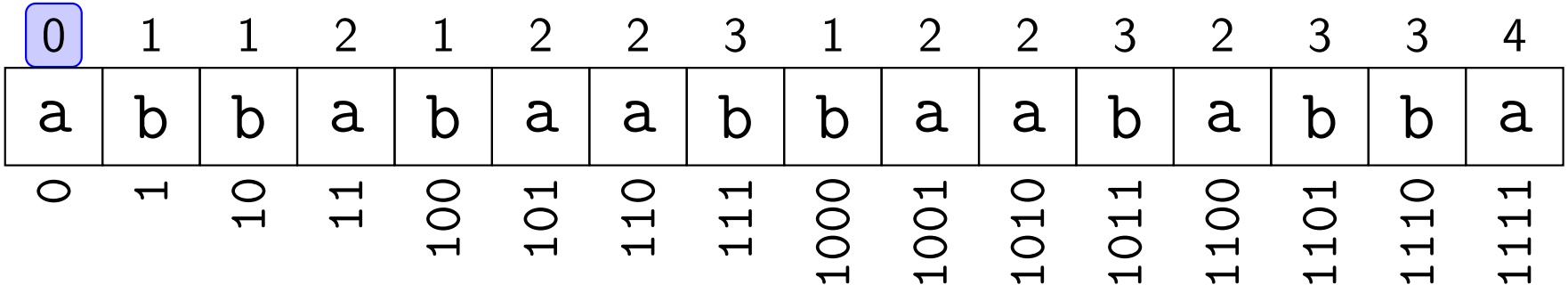
La suite de Prouhet–Thue–Morse



Les automates finis forment le modèle de calcul *le plus simple*.

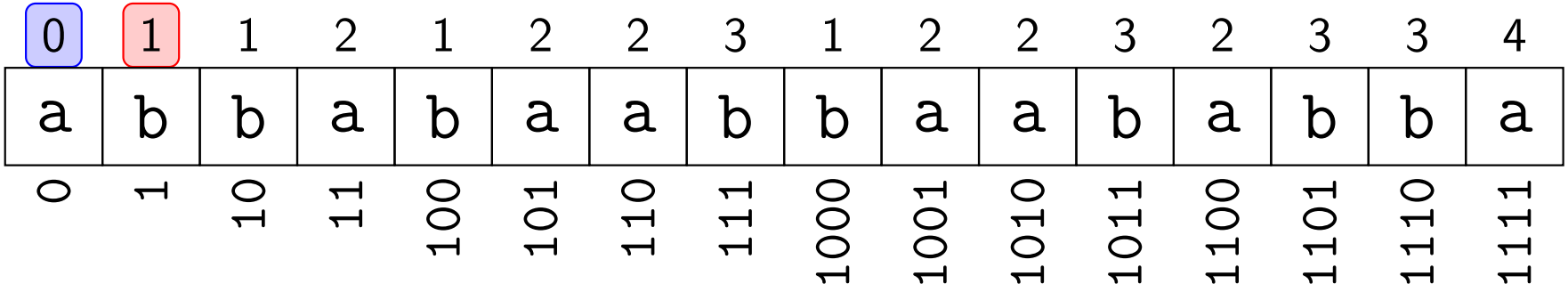
La suite de Prouhet–Thue–Morse

Justification de la construction alternative $u \mapsto u\overline{u}$



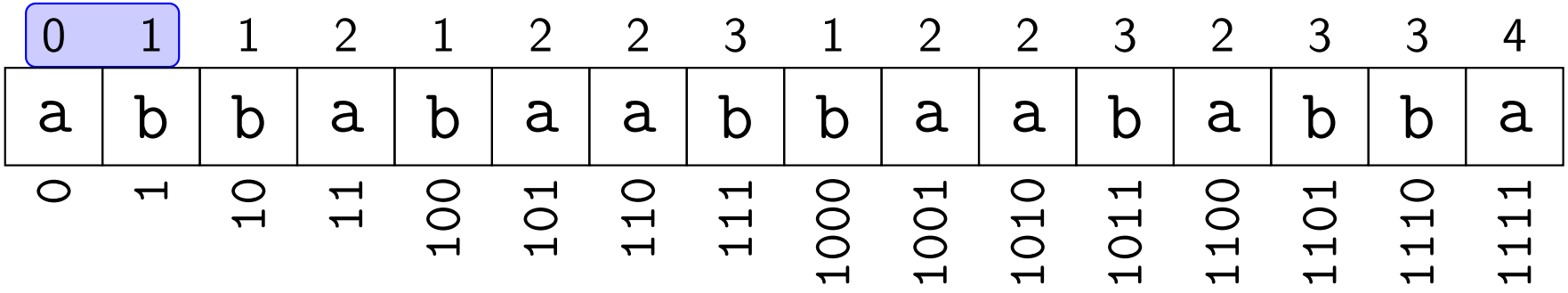
La suite de Prouhet–Thue–Morse

Justification de la construction alternative $u \mapsto u\overline{u}$



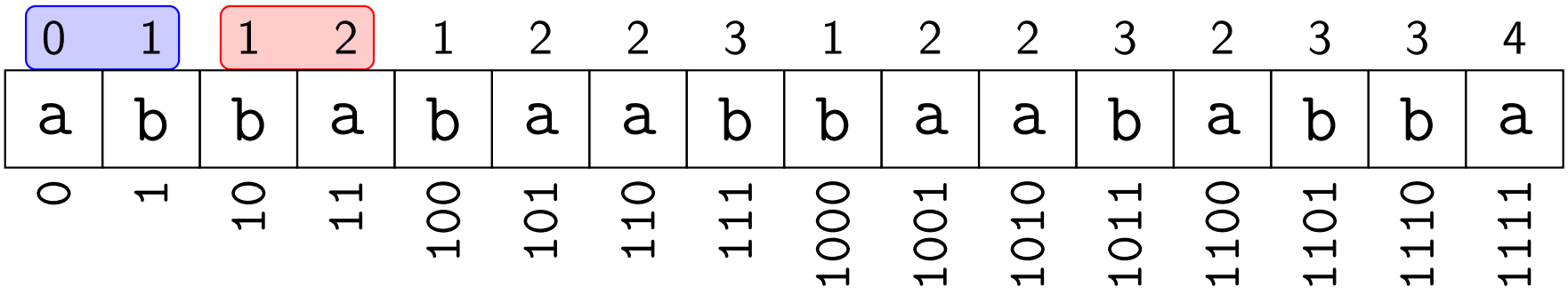
La suite de Prouhet–Thue–Morse

Justification de la construction alternative $u \mapsto u\overline{u}$



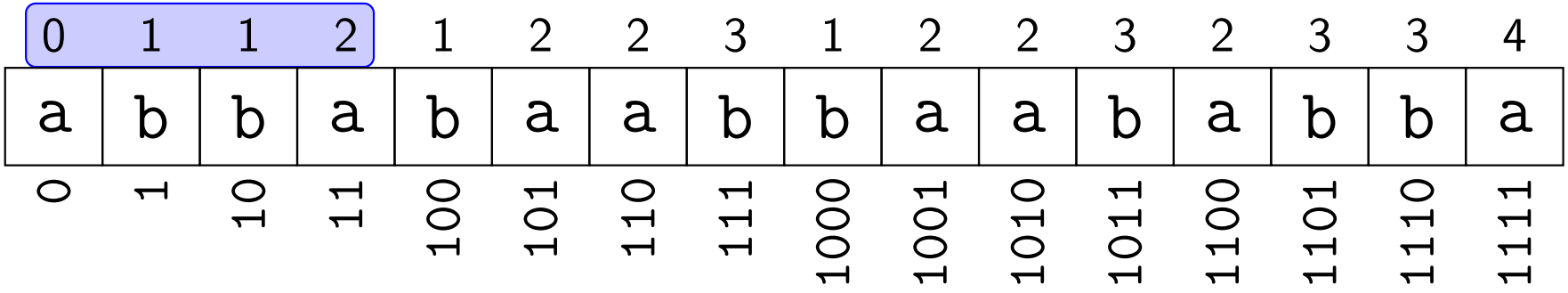
La suite de Prouhet–Thue–Morse

Justification de la construction alternative $u \mapsto u\overline{u}$



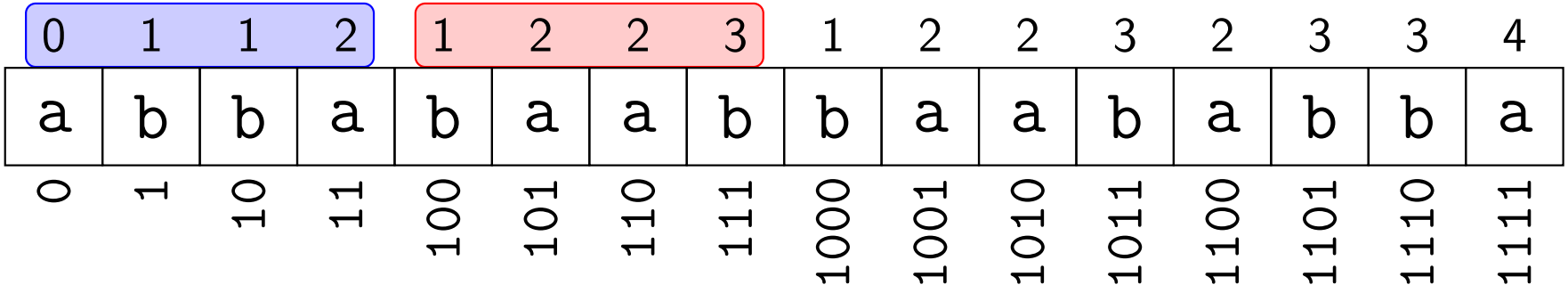
La suite de Prouhet–Thue–Morse

Justification de la construction alternative $u \mapsto u\overline{u}$



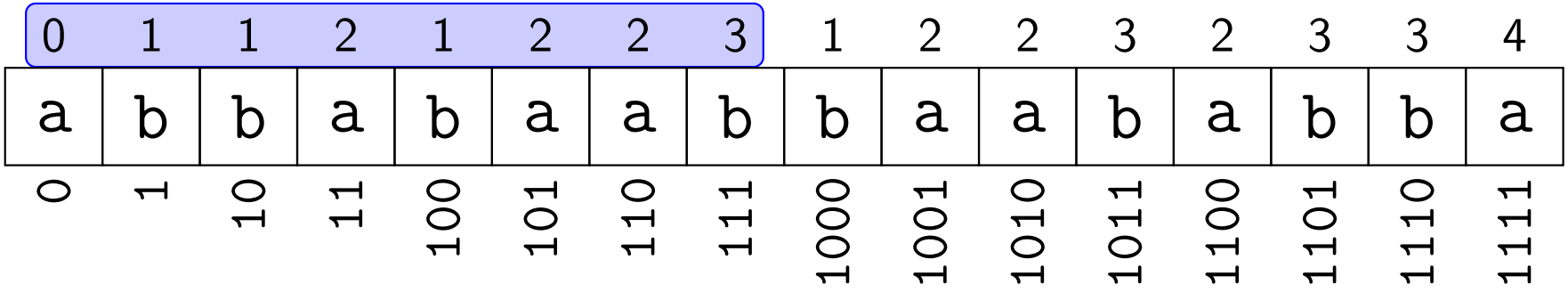
La suite de Prouhet–Thue–Morse

Justification de la construction alternative $u \mapsto u\overline{u}$



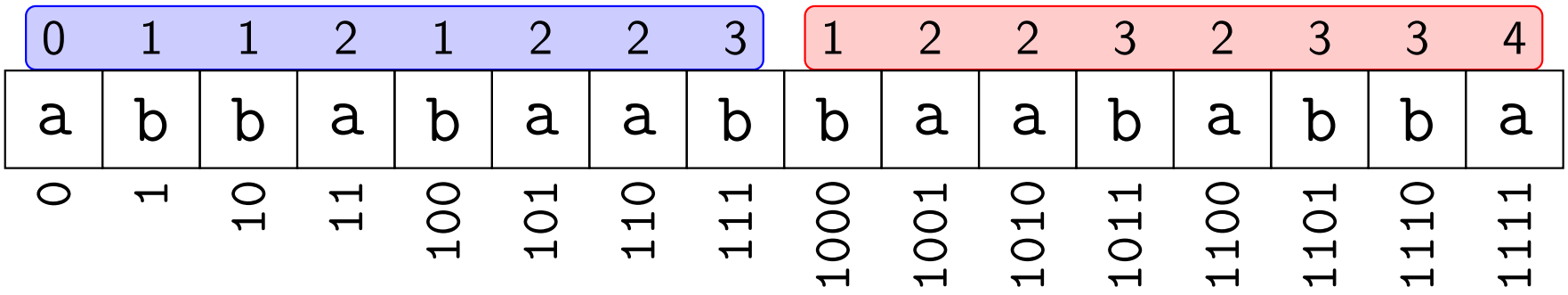
La suite de Prouhet–Thue–Morse

Justification de la construction alternative $u \mapsto u\overline{u}$



La suite de Prouhet–Thue–Morse

Justification de la construction alternative $u \mapsto u\overline{u}$



La suite de Prouhet–Thue–Morse

Une construction alternative, un produit infini...

$$\prod_{n\geq 0}(1-X^{2^n}) = (1-X)(1-X^2)(1-X^4)(1-X^8)\cdots$$

$$1 - X - X^2 + X^3 - X^4 + X^5 + X^6 - X^7 - X^8 + \cdots$$

$$+--+-++-$$

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^{\mathbf{T}_n} X^n$$

$$\mathbf{T} = 011010011001\cdots$$

La suite de Prouhet–Thue–Morse

Une construction alternative, un produit infini...

$$\prod_{n\geq 0}(1-X^{2^n}) = (1-X)(1-X^2)(1-X^4)(1-X^8)\cdots$$

$$1 - X - X^2 + X^3 - X^4 + X^5 + X^6 - X^7 - X^8 + \cdots$$

$$+--+-++-$$

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^{\mathbf{T}_n} X^n$$

$$\mathbf{T} = 011010011001\cdots$$

D'où vient cette célébrité ?



Axel Thue (1863–1922), mathématicien norvégien connu pour ses travaux en théorie des nombres (approx. diophantiennes) et en combinatoire.

- Über unendliche Zeichenreihen (1906)
- Über die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen (1912)

Théorème

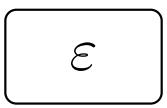
La suite $\mathbf{T}$ est sans chevauchement $(\ell m \ell m \ell)$.

entente=(ent)^{2}e, mamamouchi, Mississippi

$$\mathbf{T} = \texttt{abbabaabbaababba}\cdots$$

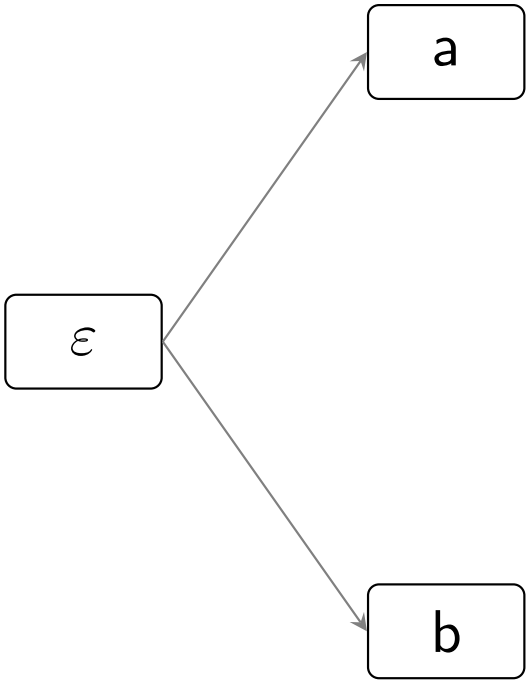
D'où vient cette célébrité ?

Résultat optimal : sur deux lettres, les carrés sont inévitables.



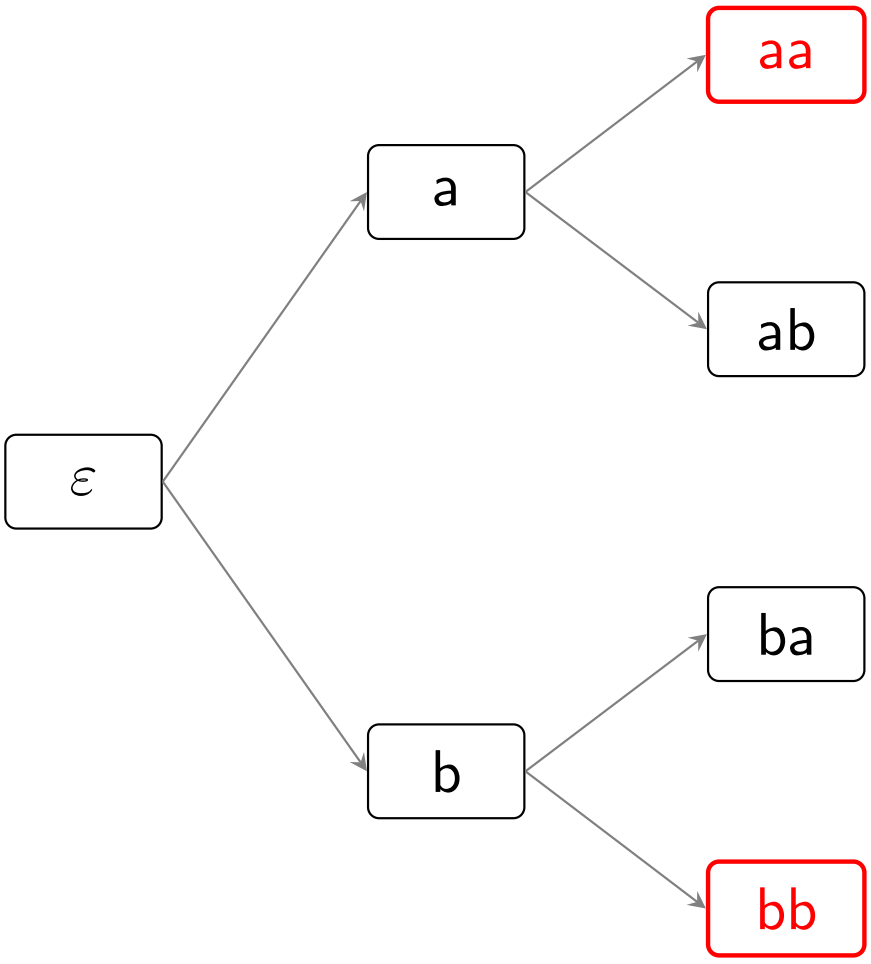
D'où vient cette célébrité ?

Résultat optimal : sur deux lettres, les carrés sont inévitables.



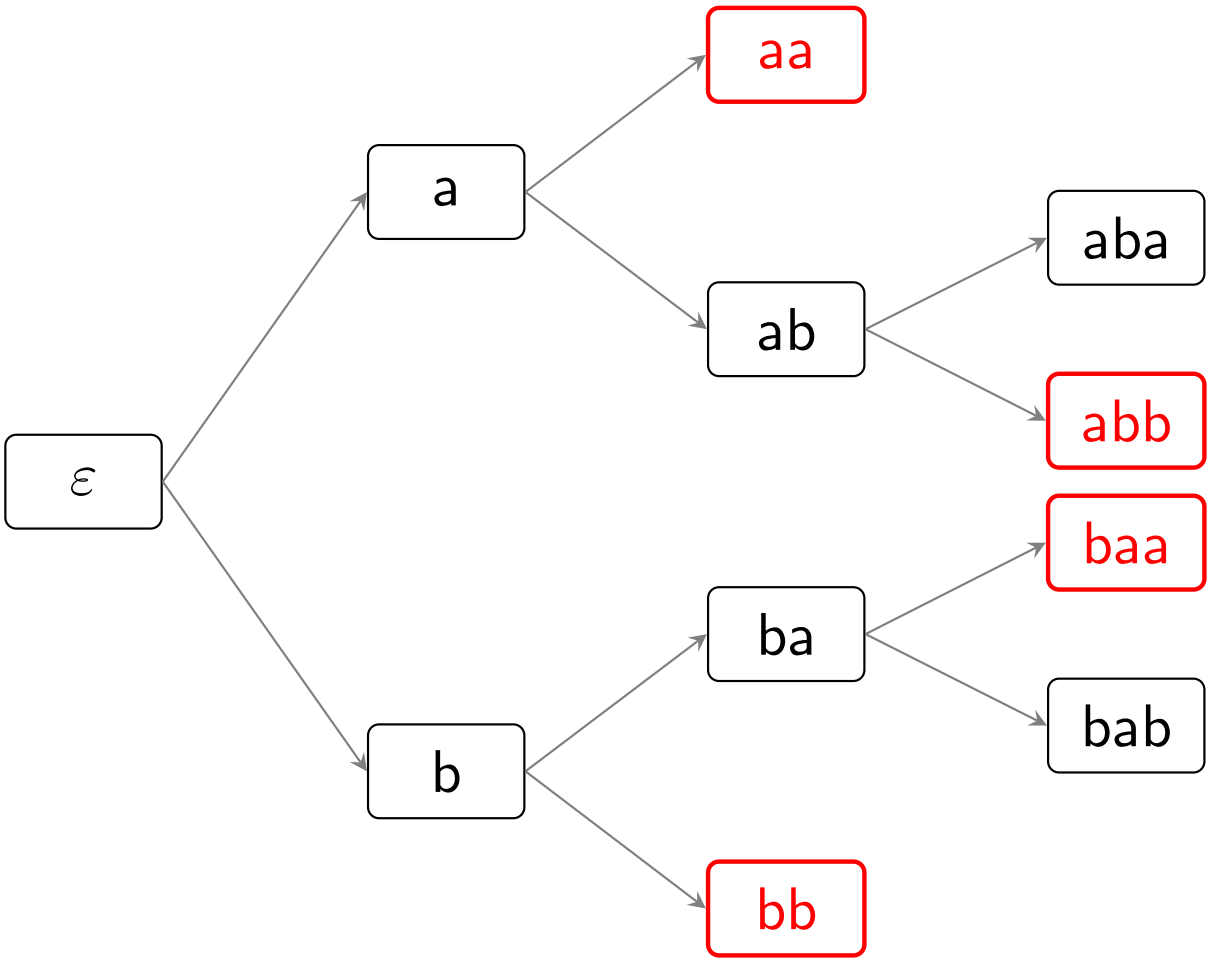
D'où vient cette célébrité ?

Résultat optimal : sur deux lettres, les carrés sont inévitables.



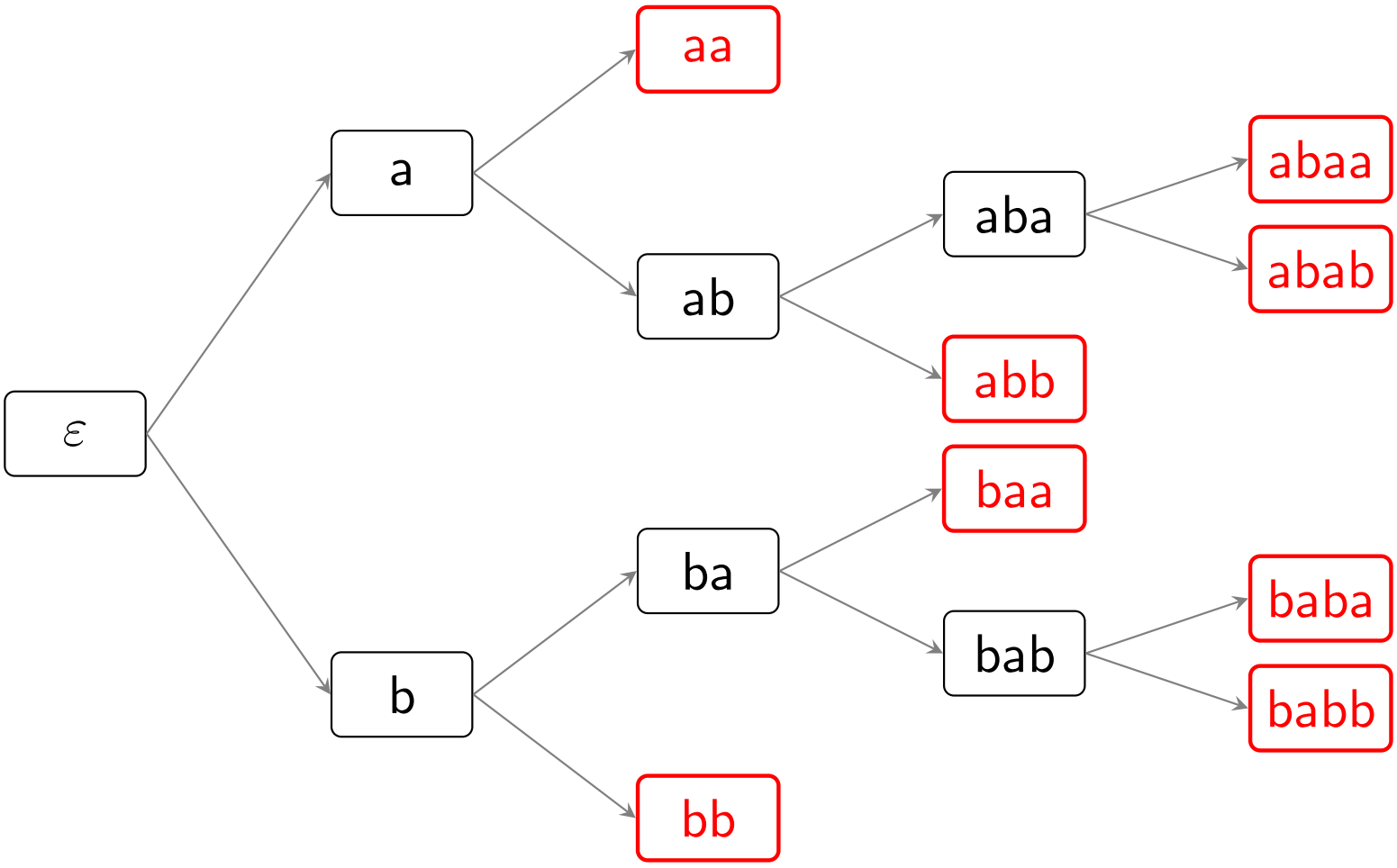
D'où vient cette célébrité ?

Résultat optimal : sur deux lettres, les carrés sont inévitables.



D'où vient cette célébrité ?

Résultat optimal : sur deux lettres, les carrés sont inévitables.



D'où vient cette célébrité ?

La suite $\mathbf{T}$ contient des carrés arbitrairement longs, mais pas de chevauchement !

abbabaabbaababbabaababbaabbabaabbaab
abbaabbabaababbabaabbaababbabaababba
abbabaababbabaabbaababbaabbabaabbaab
abbabaababbaabbaababbaabbabaabbabaab

S'il y a un carré uu, on trouve $\varphi(u)\varphi(u)$ plus loin, *etc.*

- A. Thue (1906)
- M. Lothaire, *Combinatorics on words* (1983)
- J. Berstel, *Axel Thue's papers on repetitions in words: a translation* (1994)
- preuve automatique `Walnut` (V. Bruyère, É. Charlier, J. Shallit)

$$\neg(\exists i \geq 0, p > 0)(\forall j < p)(T_{i+j} = T_{i+j+p}) \wedge T_i = T_{i+2p}$$

D'où vient cette célébrité ?

Résultat optimal : sur deux lettres, les carrés sont inévitables.

- Sur deux lettres, peut-on éviter les cubes ? Oui, $\mathbf{T}$ est sans cube
- Sur trois lettres, peut-on éviter les carrés ?

abb ab a abb a ab abb ab a ab abb a abb ab a abb a ab abb $\cdots$

2102012101202102012 $\cdots$

- Les questions d'évitabilité sont centrales en combinatoire, motifs évitables/inévitables (théorie de Ramsey, Erdős, . . .).
- Les questions de répétition le sont tout autant ;

  Maladie de Huntington : répétition élevée (≥ 40) du triplet CAG dans le gène HTT, production d'une protéine toxique.

D'où vient cette célébrité ?

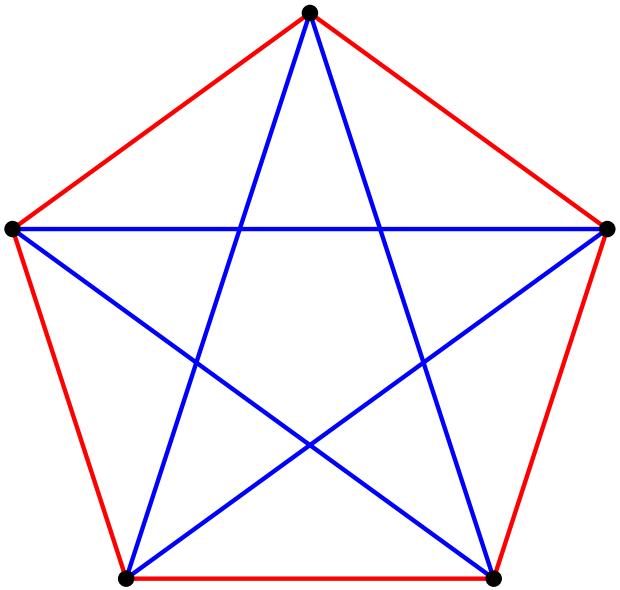
Résultat optimal : sur deux lettres, les carrés sont inévitables.

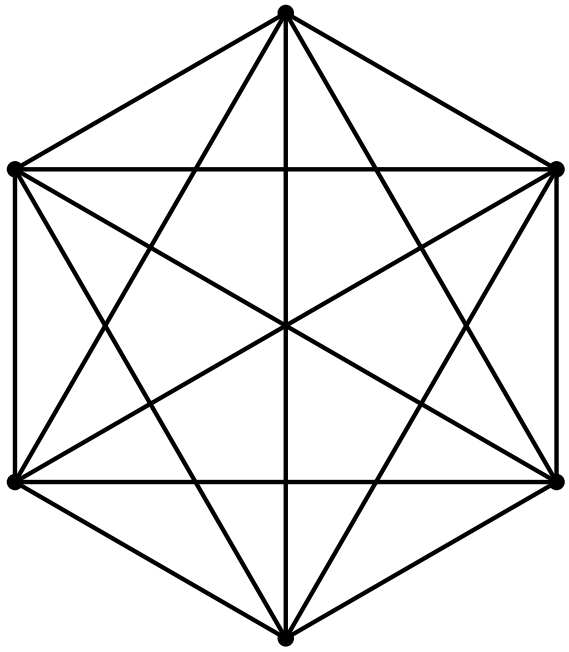
- Sur deux lettres, peut-on éviter les cubes ? Oui, $\mathbf{T}$ est sans cube
- Sur trois lettres, peut-on éviter les carrés ?

$$\texttt{abb ab a abb a ab abb ab a ab abb a abb ab a abb a ab abb}\cdots$$
$$2102012101202102012\cdots$$

- Les questions d'évitabilité sont centrales en combinatoire, motifs évitables/inévitables (théorie de Ramsey, Erdős, . . .).
- Les questions de répétition le sont tout autant ;
  Maladie de Huntington : répétition élevée (≥ 40) du triplet `CAG` dans le gène HTT, production d'une protéine toxique.

D'où vient cette célébrité ?





D'où vient cette célébrité ?

Le problème de Prouhet–Tarry–Escott : trouver 2 ensembles disjoints A et B de nombres naturels tels que

- $\sum_{a\in A} a^0 = \sum_{b\in B} b^0$, i.e., $\#A = \#B$
- $\sum_{a\in A} a = \sum_{b\in B} b$
- $\sum_{a\in A} a^2 = \sum_{b\in B} b^2$
- $\sum_{a\in A} a^3 = \sum_{b\in B} b^3$
- *etc.*

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

THÉORIE DES NOMBRES. — *Mémoire sur quelques relations entre les puissances des nombres;* par **M. E. Prouhet.** (Extrait par l'auteur.)

(Commissaires, MM. Sturm, Lamé, Binet.)

Eugène Prouhet (1817–1867)

D'où vient cette célébrité ?

$A \cup B = \{0, 1\}$

$A = \{0\}$ et $B = \{1\}$

$\#A = \#B \ (= 1)$

D'où vient cette célébrité ?

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$A = \{0, 3\} \qquad \text{et} \qquad B = \{1, 2\}$$

$$\#A = \#B \ (= 2)$$

$$\sum_{a \in A} a = 0 + 3 = 3 = 1 + 2 = \sum_{b \in B} b$$

D'où vient cette célébrité ?

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A = \{0, 3, 5, 6\} \qquad \text{et} \qquad B = \{1, 2, 4, 7\}$$

$$\#A = \#B \ (= 4)$$

$$\sum_{a \in A} a = 0 + 3 + 5 + 6 = 14 = 1 + 2 + 4 + 7 = \sum_{b \in B} b$$

$$\sum_{a \in A} a^2 = 0^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 = 70 = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 7^2 = \sum_{b \in B} b^2$$

D'où vient cette célébrité ?

Théorème

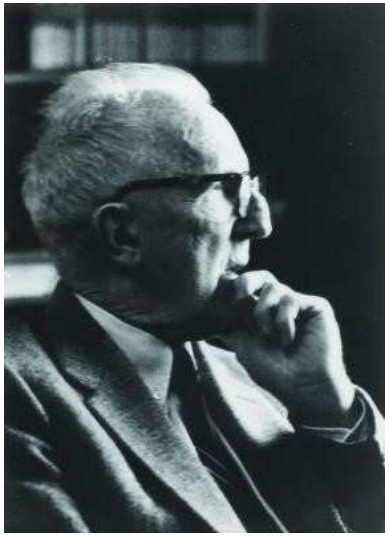
Si $A \cup B = \{0, \ldots, 2^k - 1\}$ et $A = \{i : T_i = \mathsf{a}\}$, alors

$$\sum_{a \in A} a^j = \sum_{b \in B} b^j, \quad \forall j < k.$$

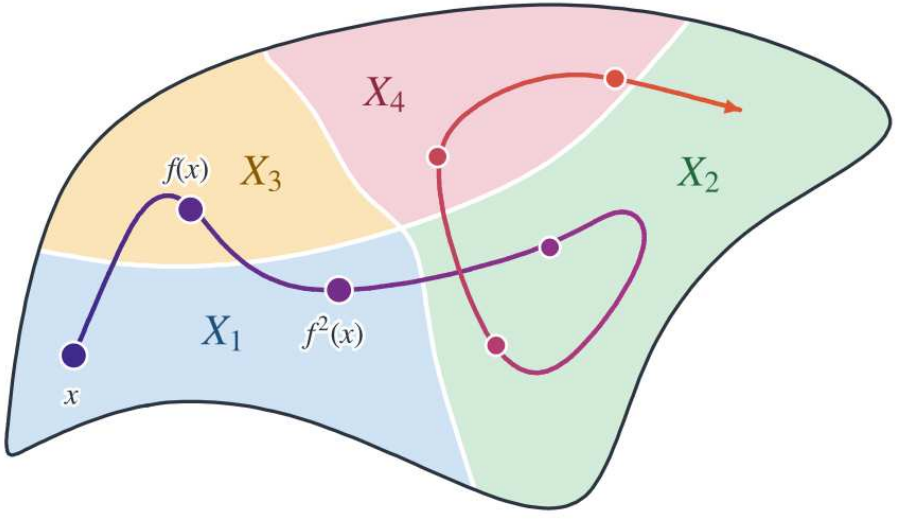
Pytheas Fogg, *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics* (2002).

M. R., *Le problème de Prouhet*, Losanges (2012).

D'où vient cette célébrité ?



Marston Morse (1892–1977), analyse mathématique, topologie différentielle, thèse *Certain Types of Geodesic Motion of a Surface of Negative Curvature*.



$$X_1 X_3 X_1 X_2 X_2 X_4 X_4 \cdots$$

D'où vient cette célébrité ?

$\mathbf{T}$ apparaît sans cesse :

- Aux échecs, au début du XX$^{\text{e}}$ siècle, une partie était *nulle* si une même suite de coups était répétée trois fois consécutivement.
- Max Euwe, champion du monde de 1935 à 1937, a redécouvert indépendamment la suite en 1929.
- Depuis, la règle a été modifiée. Si la même position apparaît trois fois sur l'échiquier (pas forcément de suite), le joueur qui a le trait peut réclamer la nulle.

J.-P. Allouche, J. Shallit, The ubiquitous Prouhet–Thue–Morse sequence (1999).

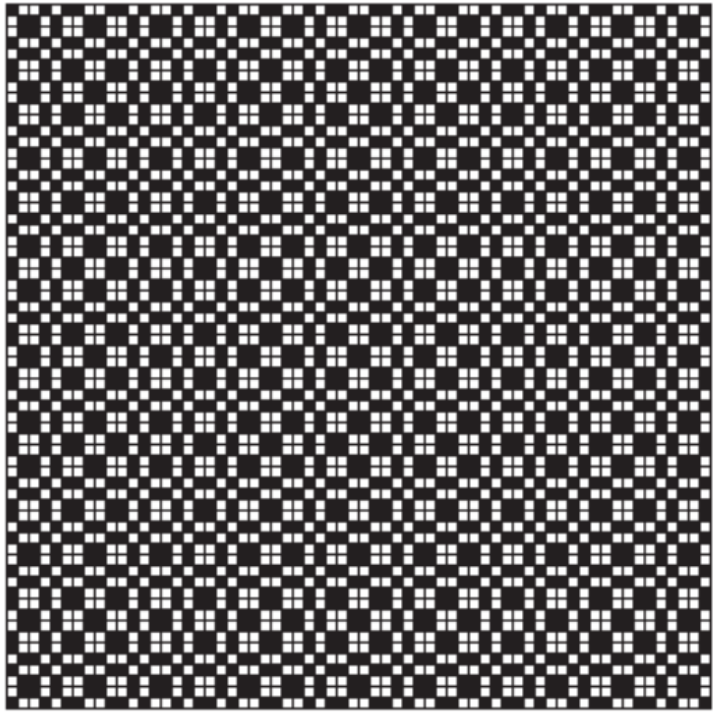
D'où vient cette célébrité ?

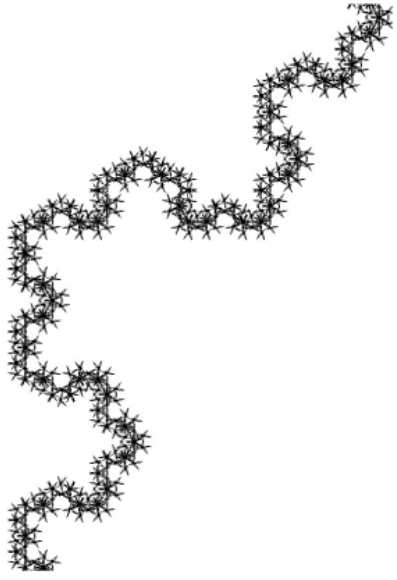
- répartir équitablement les tours d'un jeu (les tirs au but en Europa League 2017–2018)
- l'ordre de sélection des actions entre les deux joueurs au cours de deux tours consécutifs



- Diffraction, quasi-cristaux, optique, musique, . . .

D'où vient cette célébrité ?





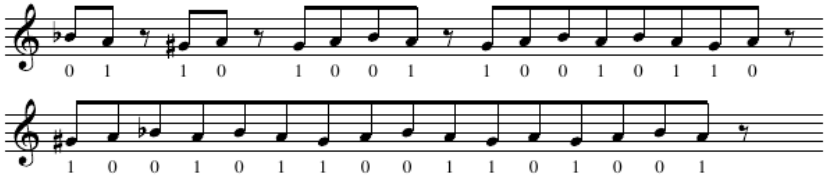


Figure 7.2: Melodic transcription of the Thue–Morse sequence, © 1996 Tom Johnson. Used by permission.

H. Zantema, Turtle graphics of morphic sequences

Un peu de théorie des nombres

Une application “purement mathématique”

Définition

Un réel x est algébrique s'il existe des rationnels $q_d, \ldots, q_0 \in \mathbb{Q}$ tels que

$$q_d x^d + \cdots + q_1 x + q_0 = 0.$$

Un réel est transcendant s'il n'est solution d'aucune équation polynomiale à coefficients rationnels.

- $17/19 : 19x - 17 = 0$
- $\sqrt{2} : x^2 - 2 = 0$
- e (Hermite 1873)
- π (Lindemann 1882)
- ...

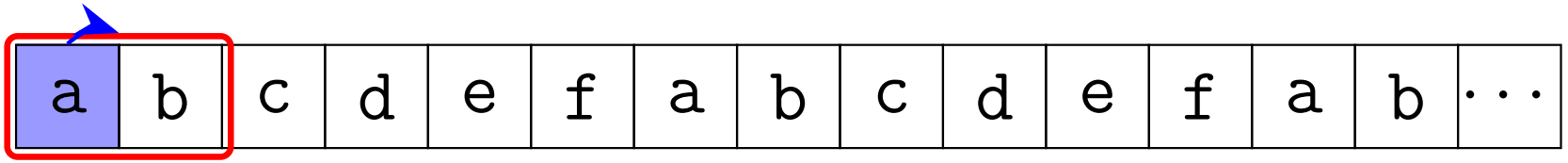
Un peu de théorie des nombres

- Un nombre est transcendant/algébrique si et seulement si sa partie fractionnaire l'est.
- Un réel est rationnel si et seulement si son développement (en base b) est ultimement périodique :

$$\frac{2}{7} = 0{,}\overline{285714} = 0{,}285714\,285714\,285714\cdots$$

$$a \mapsto ab,\ b \mapsto cd,\ c \mapsto ef, d \mapsto ab,\ e \mapsto cd,\ f \mapsto ef$$

$$a \mapsto 2,\ b \mapsto 8,\ c \mapsto 5, d \mapsto 7,\ e \mapsto 1,\ f \mapsto 4$$



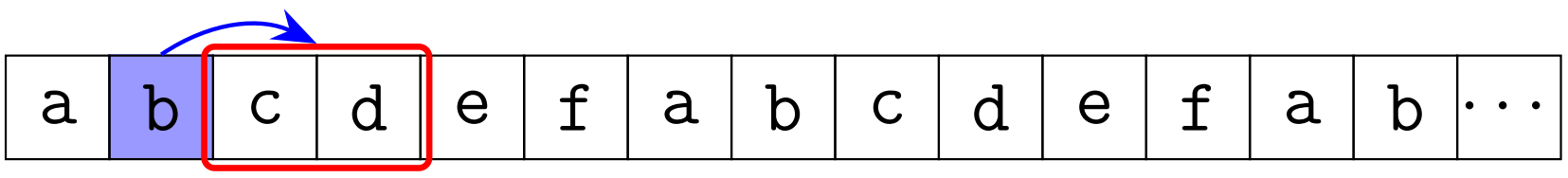
Un peu de théorie des nombres

- Un nombre est transcendant/algébrique si et seulement si sa partie fractionnaire l'est.
- Un réel est rationnel si et seulement si son développement (en base b) est ultimement périodique :

$$\frac{2}{7} = 0{,}\overline{285714} = 0{,}285714\,285714\,285714\cdots$$

$$a \mapsto ab,\ b \mapsto cd,\ c \mapsto ef, d \mapsto ab,\ e \mapsto cd,\ f \mapsto ef$$

$$a \mapsto 2,\ b \mapsto 8,\ c \mapsto 5, d \mapsto 7,\ e \mapsto 1,\ f \mapsto 4$$



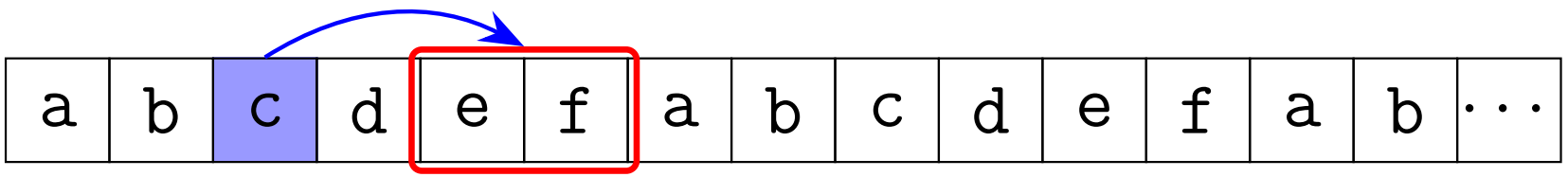
Un peu de théorie des nombres

- Un nombre est transcendant/algébrique si et seulement si sa partie fractionnaire l'est.
- Un réel est rationnel si et seulement si son développement (en base b) est ultimement périodique :

$$\frac{2}{7} = 0{,}\overline{285714} = 0{,}285714\,285714\,285714\cdots$$

$$a \mapsto ab,\ b \mapsto cd,\ c \mapsto ef, d \mapsto ab,\ e \mapsto cd,\ f \mapsto ef$$

$$a \mapsto 2,\ b \mapsto 8,\ c \mapsto 5, d \mapsto 7,\ e \mapsto 1,\ f \mapsto 4$$



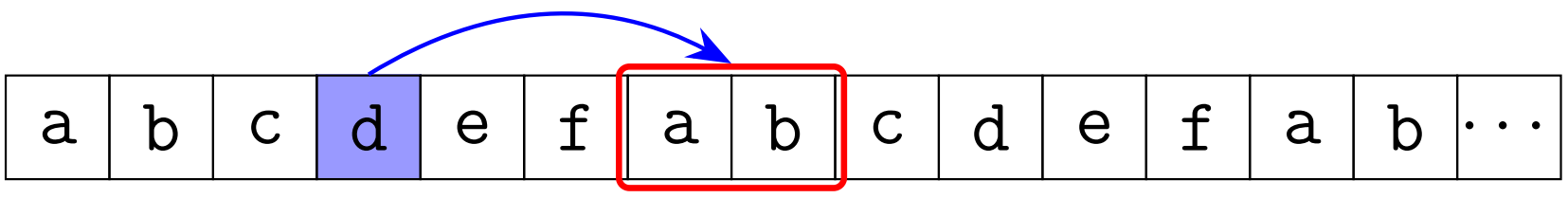
Un peu de théorie des nombres

- Un nombre est transcendant/algébrique si et seulement si sa partie fractionnaire l'est.
- Un réel est rationnel si et seulement si son développement (en base b) est ultimement périodique :

$$\frac{2}{7} = 0{,}\overline{285714} = 0{,}285714\,285714\,285714\cdots$$

$$a \mapsto ab,\ b \mapsto cd,\ c \mapsto ef, d \mapsto ab,\ e \mapsto cd,\ f \mapsto ef$$

$$a \mapsto 2,\ b \mapsto 8,\ c \mapsto 5, d \mapsto 7,\ e \mapsto 1,\ f \mapsto 4$$



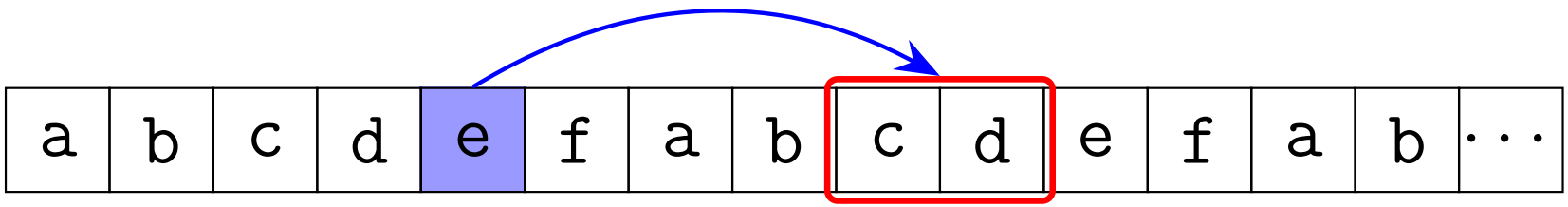
Un peu de théorie des nombres

- Un nombre est transcendant/algébrique si et seulement si sa partie fractionnaire l'est.
- Un réel est rationnel si et seulement si son développement (en base b) est ultimement périodique :

$$\frac{2}{7} = 0{,}\overline{285714} = 0{,}285714\,285714\,285714\cdots$$

$$a \mapsto ab,\ b \mapsto cd,\ c \mapsto ef, d \mapsto ab,\ e \mapsto cd,\ f \mapsto ef$$

$$a \mapsto 2,\ b \mapsto 8,\ c \mapsto 5, d \mapsto 7,\ e \mapsto 1,\ f \mapsto 4$$



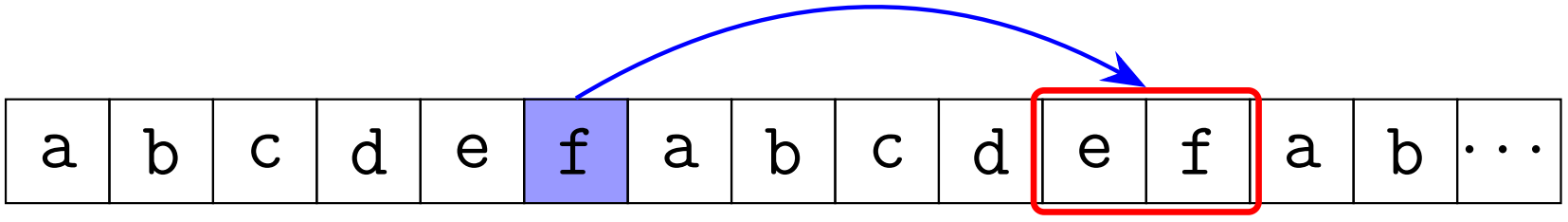
Un peu de théorie des nombres

- Un nombre est transcendant/algébrique si et seulement si sa partie fractionnaire l'est.
- Un réel est rationnel si et seulement si son développement (en base b) est ultimement périodique :

$$\frac{2}{7} = 0{,}\overline{285714} = 0{,}285714\,285714\,285714\cdots$$

$$a \mapsto ab,\ b \mapsto cd,\ c \mapsto ef, d \mapsto ab,\ e \mapsto cd,\ f \mapsto ef$$

$$a \mapsto 2,\ b \mapsto 8,\ c \mapsto 5, d \mapsto 7,\ e \mapsto 1,\ f \mapsto 4$$



Un peu de théorie des nombres

Observation

Les nombres rationnels sont “automatiques” (pour toute base).

- Hartmanis et Stearns (1965) s'intéressent aux nombres calculables par machine de Turing
- conjecture de Cobham sur les nombres automatiques : *Tout réel automatique irrationnel est transcendant*.
- Théorème d'Adamczewski–Bugeaud (Annals of Math. 2007)

Un peu de théorie des nombres

Définition

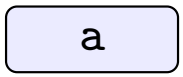
Un nombre réel est b-automatique si son développement en base b est automatique.

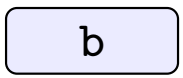
$$\sum_{n\geq 0} \frac{\mathbf{T}_n}{2^{n+1}} = \frac{0}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{0}{16} + \cdots \simeq 0{,}4124$$

- Ce nombre n'est pas rationnel.
- Est-il algébrique ou transcendant ?

Un peu de théorie des nombres

Les facteurs (spéciaux) de $\mathbf{T}$

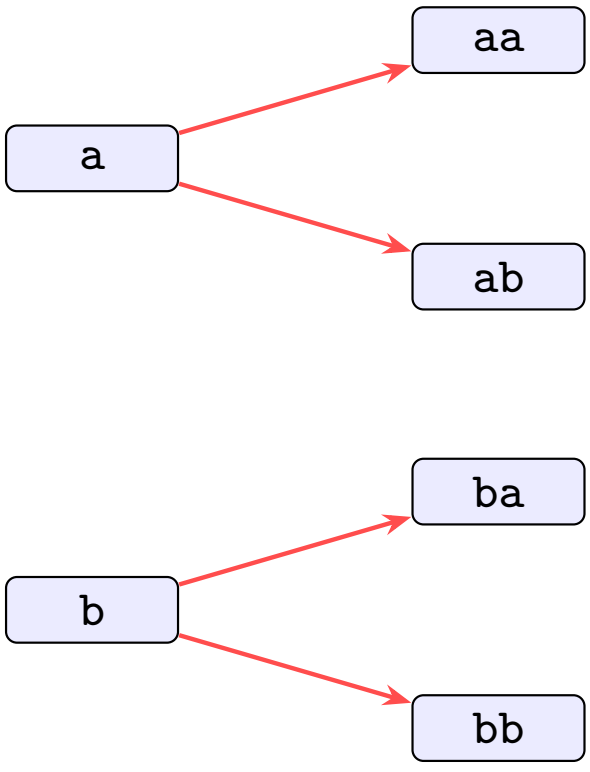




fonction de complexité : $(\mathrm{p}_{\mathbf{T}}(n))_{n\geq 1} = 2, 4, 6, 10, \ldots$

Un peu de théorie des nombres

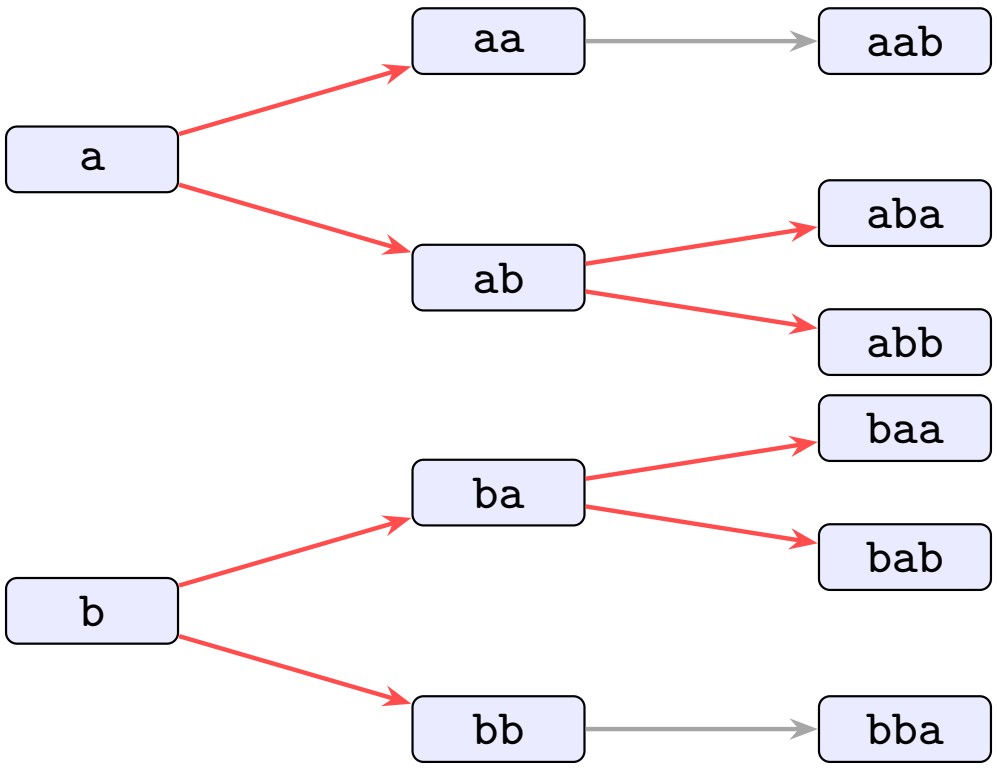
Les facteurs (spéciaux) de $\mathbf{T}$



fonction de complexité : $(\mathrm{p}_{\mathbf{T}}(n))_{n\geq 1} = 2, 4, 6, 10, \ldots$

Un peu de théorie des nombres

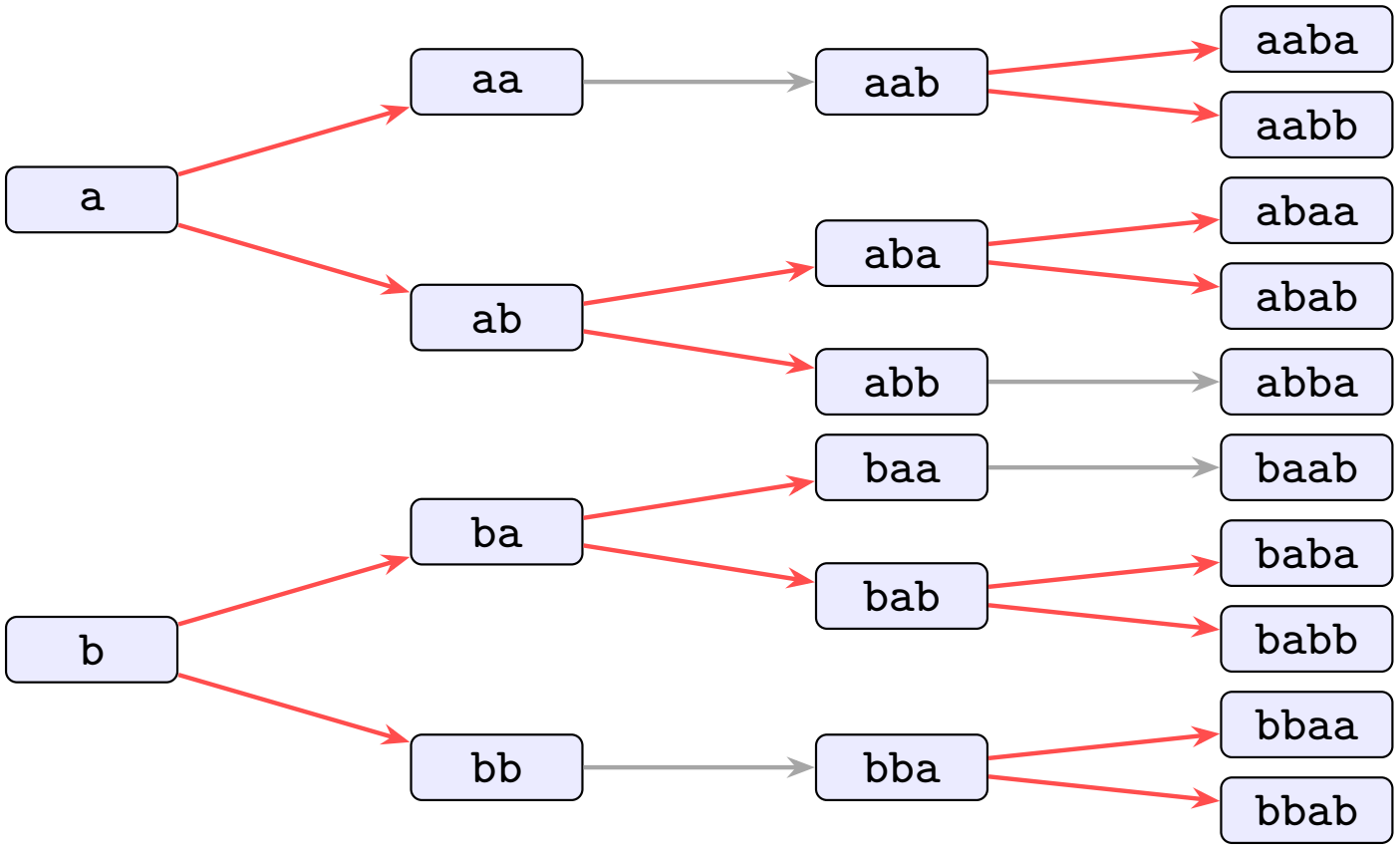
Les facteurs (spéciaux) de $\mathbf{T}$



fonction de complexité : $(\mathrm{p}_{\mathbf{T}}(n))_{n\geq 1} = 2, 4, 6, 10, \ldots$

Un peu de théorie des nombres

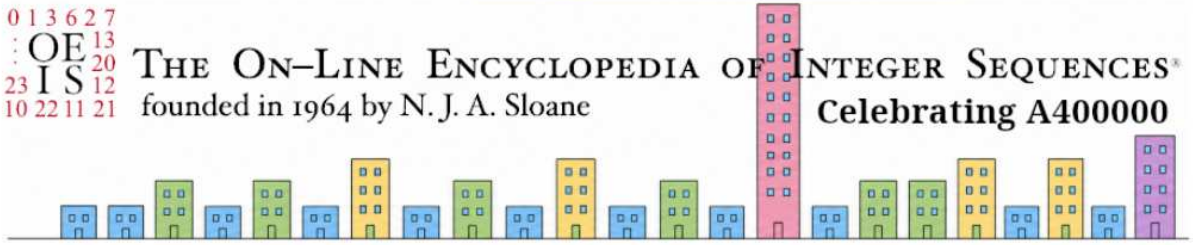
Les facteurs (spéciaux) de $\mathbf{T}$



fonction de complexité : $(\mathrm{p}_{\mathbf{T}}(n))_{n\geq 1} = 2, 4, 6, 10, \ldots$

Un peu de théorie des nombres

The OEIS is supported by the many generous donors to the OEIS Foundation.



Search Hints

(Greetings from The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences!)

A005942 a(2n) = a(n) + a(n+1), a(2n+1) = 2a(n+1), if n >= 2. 16

(Formerly M1007)

1, 2, 4, 6, 10, 12, 16, 20, 22, 24, 28, 32, 36, 40, 42, 44, 46, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 82, 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96, 100, 104, 108, 112, 116, 120, 124, 128, 132, 136, 140, 144, 148, 152, 156, 160, 162, 164, 166, 168, 170, 172, 174, 176, 178, 180, 182

(list; graph; refs; listen; history; text; internal format)

OFFSET 0,2

COMMENTS a(n) is the subword complexity (or factor complexity) of Thue-Morse sequence A010060, that is, the number of factors of length n in A010060. See Allouche-Shallit (2003). - N. J. A. Sloane, Jul 10 2012

Un peu de théorie des nombres

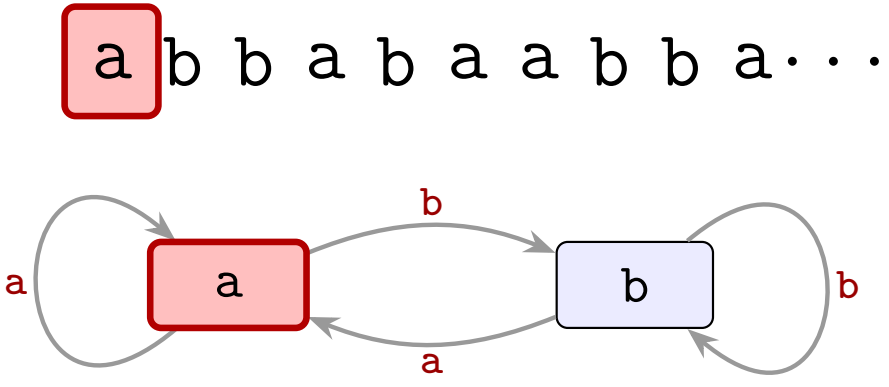
Graphe de de Bruijn d'ordre n :

- Les sommets sont les facteurs de longueur n.
- Si aub est un facteur de longueur $n+1$, alors $au \xrightarrow{b} ub$.



Nicolaas Govert de Bruijn

(1918–2012)



graphe d'ordre 1

Un peu de théorie des nombres

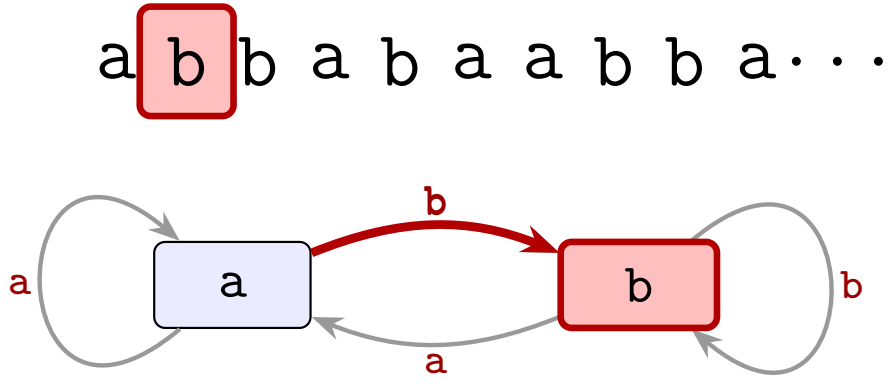
Graphe de de Bruijn d'ordre n :

- Les sommets sont les facteurs de longueur n.
- Si aub est un facteur de longueur $n+1$, alors $au \xrightarrow{b} ub$.



Nicolaas Govert de Bruijn

(1918–2012)



graphe d'ordre 1

Un peu de théorie des nombres

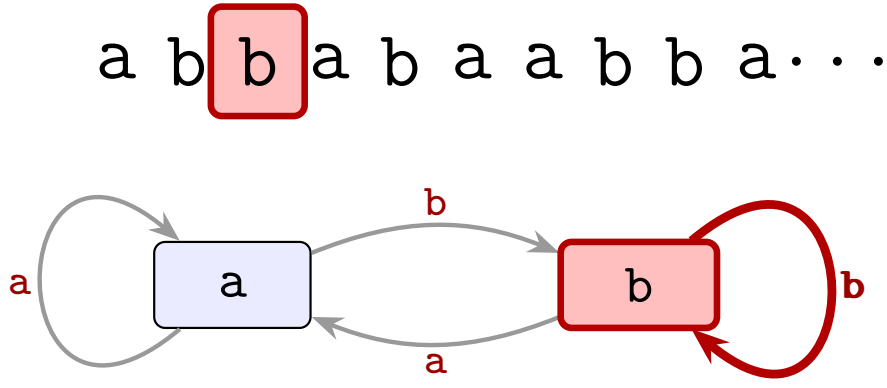
Graphe de de Bruijn d'ordre n :

- Les sommets sont les facteurs de longueur n.
- Si aub est un facteur de longueur $n+1$, alors $au \xrightarrow{b} ub$.



Nicolaas Govert de Bruijn

(1918–2012)



graphe d'ordre 1

Un peu de théorie des nombres

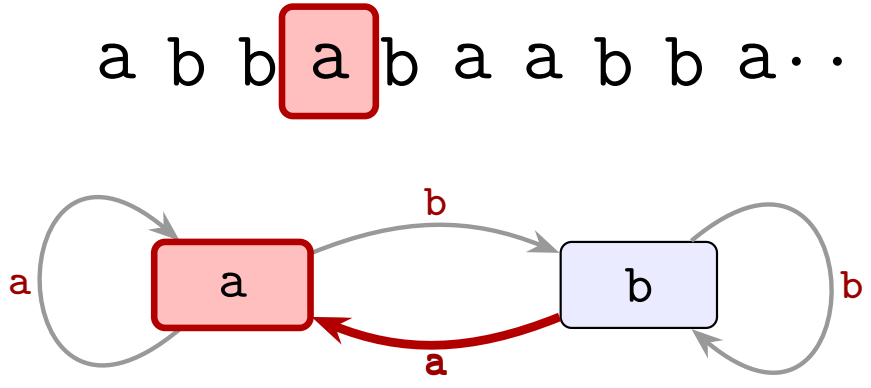
Graphe de de Bruijn d'ordre n :

- Les sommets sont les facteurs de longueur n.
- Si aub est un facteur de longueur $n+1$, alors $au \xrightarrow{b} ub$.



Nicolaas Govert de Bruijn

(1918–2012)



graphe d'ordre 1

Un peu de théorie des nombres

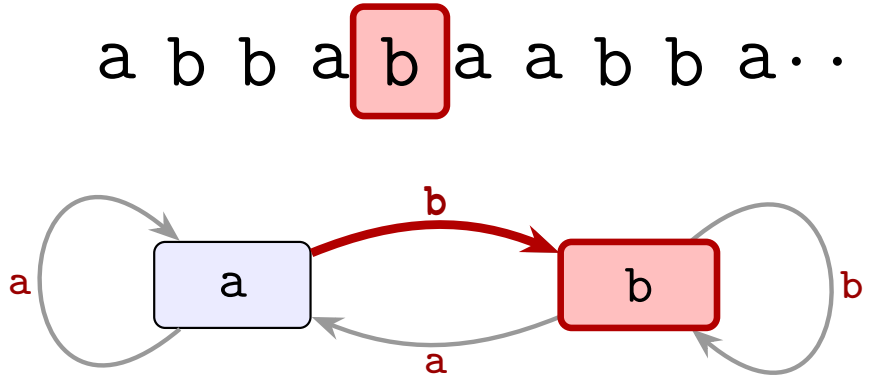
Graphe de de Bruijn d'ordre n :

- Les sommets sont les facteurs de longueur n.
- Si aub est un facteur de longueur $n+1$, alors $au \xrightarrow{b} ub$.



Nicolaas Govert de Bruijn

(1918–2012)



graphe d'ordre 1

Un peu de théorie des nombres

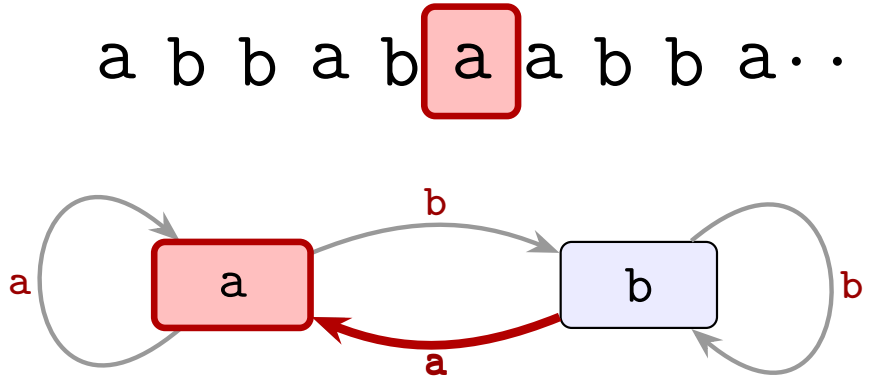
Graphe de de Bruijn d'ordre n :

- Les sommets sont les facteurs de longueur n.
- Si aub est un facteur de longueur $n+1$, alors $au \xrightarrow{b} ub$.



Nicolaas Govert de Bruijn

(1918–2012)



graphe d'ordre 1

Un peu de théorie des nombres

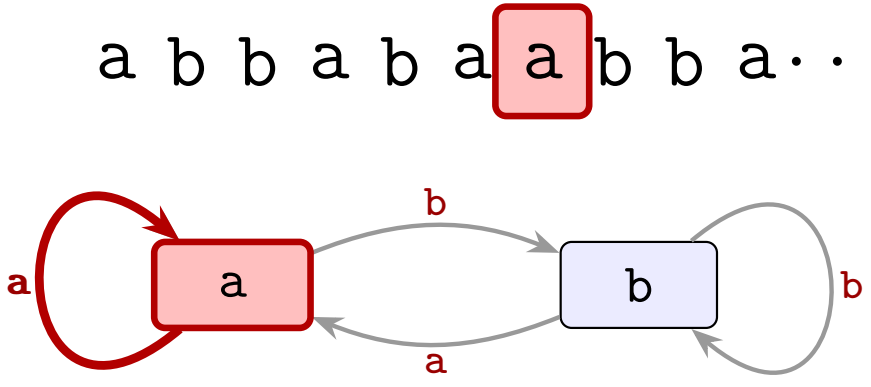
Graphe de de Bruijn d'ordre n :

- Les sommets sont les facteurs de longueur n.
- Si aub est un facteur de longueur $n+1$, alors $au \xrightarrow{b} ub$.



Nicolaas Govert de Bruijn

(1918–2012)



graphe d'ordre 1

Un peu de théorie des nombres

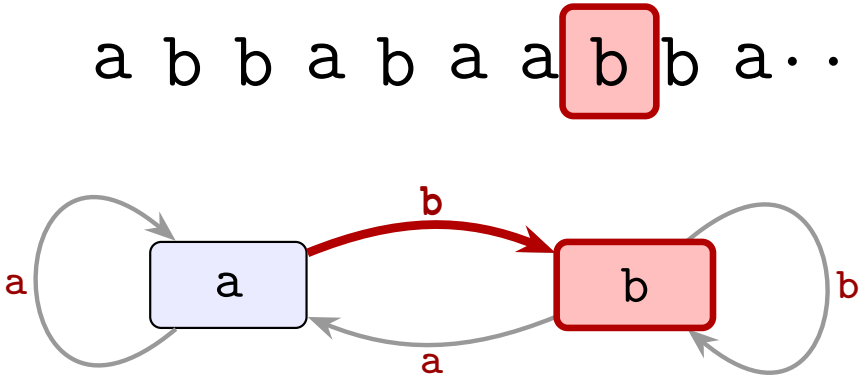
Graphe de de Bruijn d'ordre n :

- Les sommets sont les facteurs de longueur n.
- Si aub est un facteur de longueur $n+1$, alors $au \xrightarrow{b} ub$.



Nicolaas Govert de Bruijn

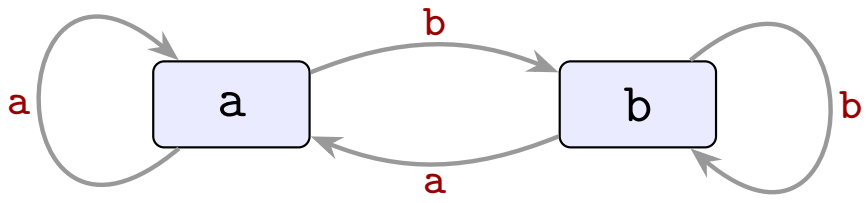
(1918–2012)



graphe d'ordre 1

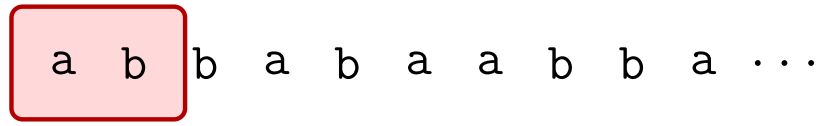
Un peu de théorie des nombres

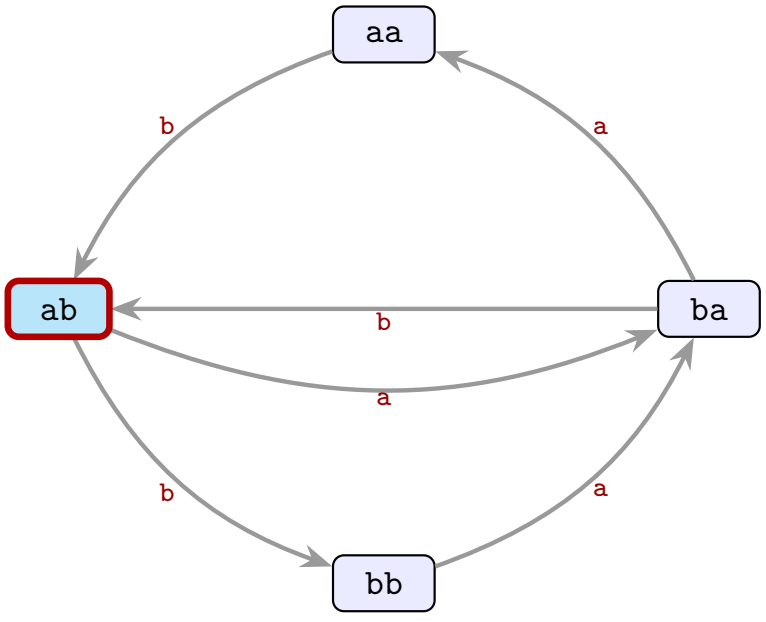
Remarque : le graphe ne “caractérise” pas la suite



$$\cdots \mathtt{aa} \cdots \mathtt{ab} \cdots \mathtt{ba} \cdots \mathtt{bb} \cdots$$

Un peu de théorie des nombres



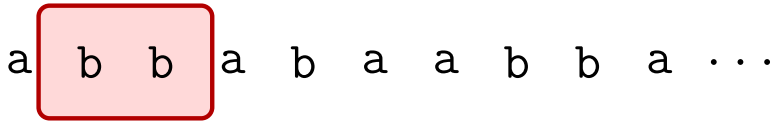


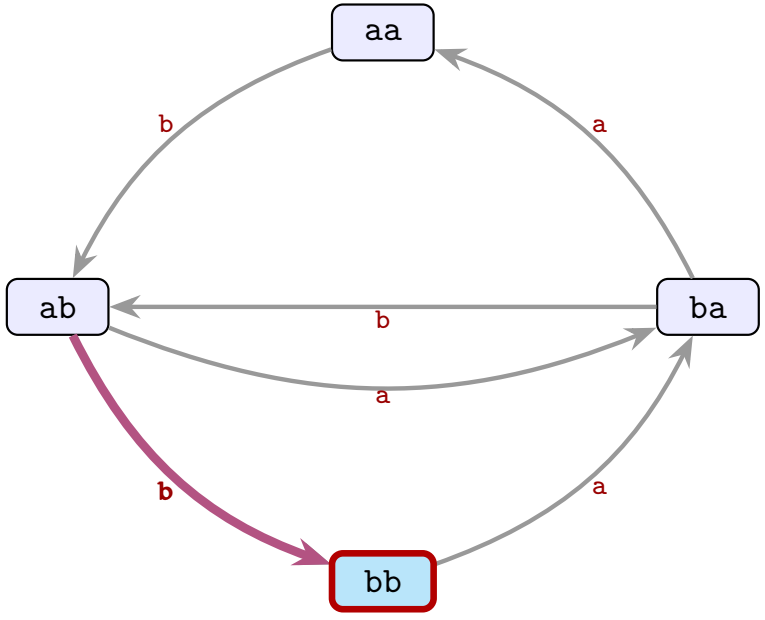
graphe d'ordre 2

- autant de sommets que de facteurs de longueur n,
- autant d'arcs que de facteurs de long. $n+1$.

En génomique: reconstruction d'une séquence à partir de "k-mers" et recherche d'un chemin eulérien (Idury–Waterman 1995, Pevzner–Tang–Waterman 2001).

Un peu de théorie des nombres



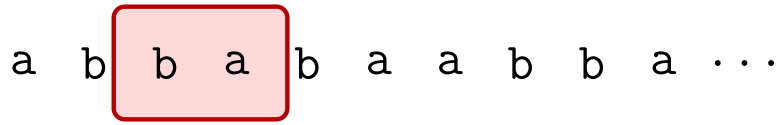


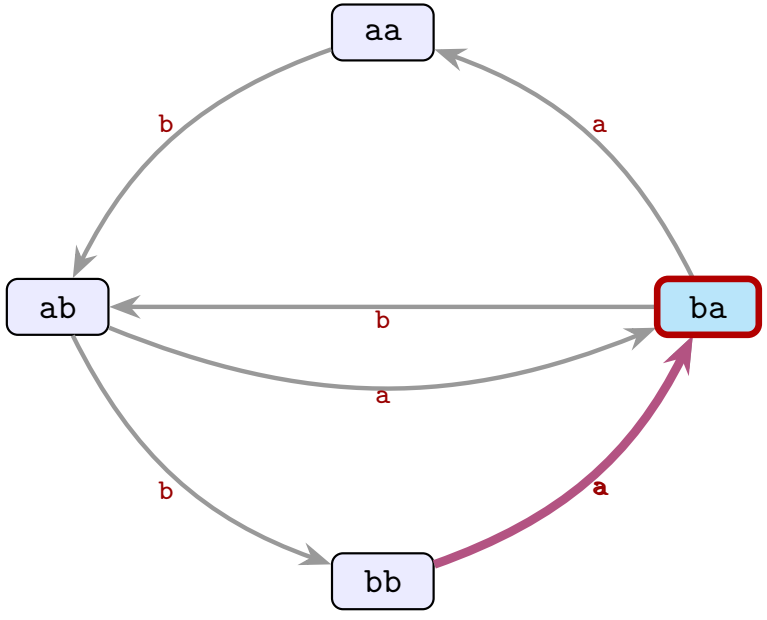
graphe d'ordre 2

- autant de sommets que de facteurs de longueur n,
- autant d'arcs que de facteurs de long. $n+1$.

En génomique: reconstruction d'une séquence à partir de "k-mers" et recherche d'un chemin eulérien (Idury–Waterman 1995, Pevzner–Tang–Waterman 2001).

Un peu de théorie des nombres





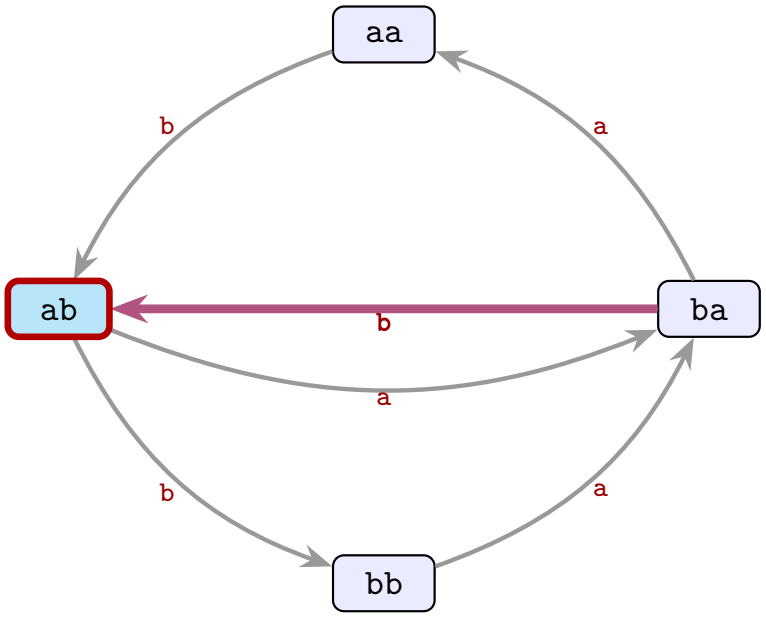
graphe d'ordre 2

- autant de sommets que de facteurs de longueur n,
- autant d'arcs que de facteurs de long. $n+1$.

En génomique: reconstruction d'une séquence à partir de "k-mers" et recherche d'un chemin eulérien (Idury–Waterman 1995, Pevzner–Tang–Waterman 2001).

Un peu de théorie des nombres

a b b a b a a b b a ···

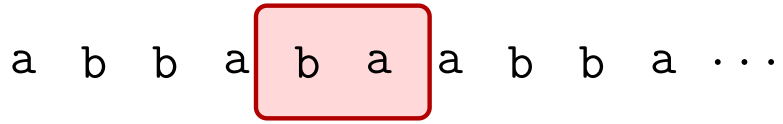


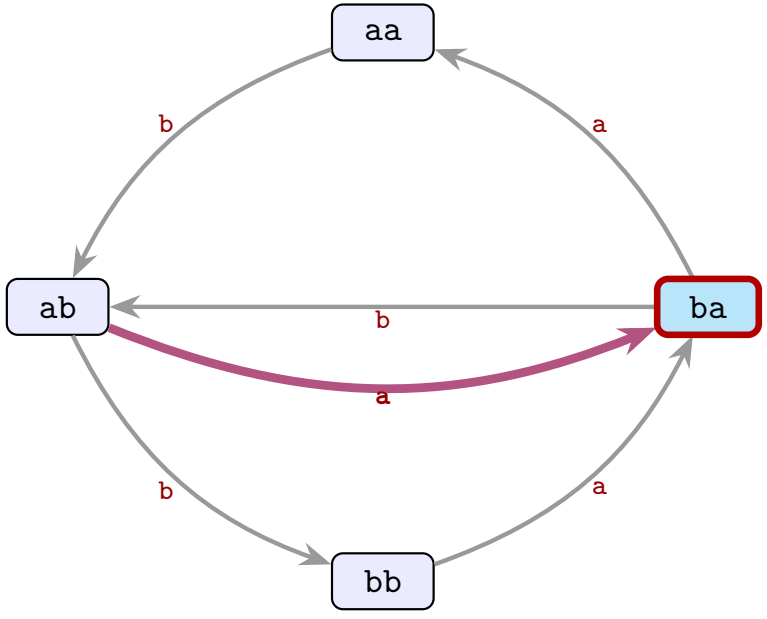
graphe d'ordre 2

- autant de sommets que de facteurs de longueur n,
- autant d'arcs que de facteurs de long. $n+1$.

En génomique: reconstruction d'une séquence à partir de "k-mers" et recherche d'un chemin eulérien (Idury–Waterman 1995, Pevzner–Tang–Waterman 2001).

Un peu de théorie des nombres





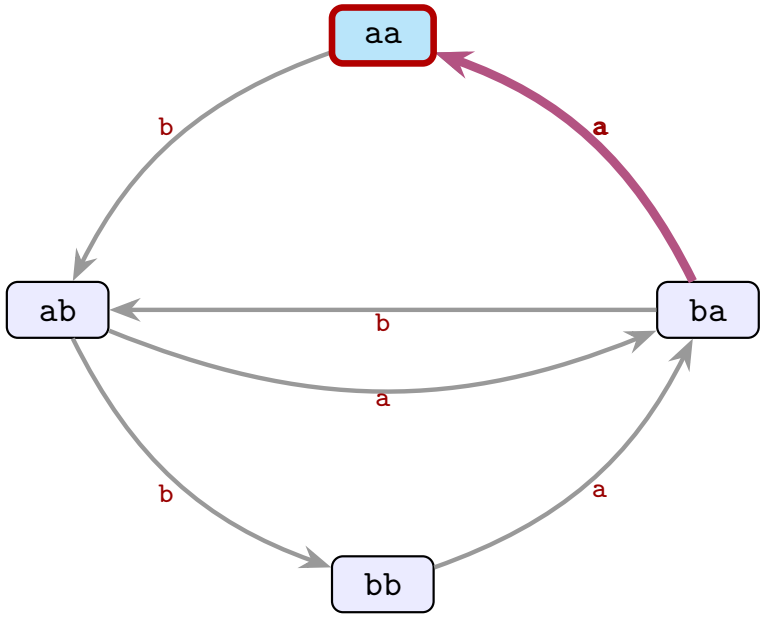
graphe d'ordre 2

- autant de sommets que de facteurs de longueur n,
- autant d'arcs que de facteurs de long. $n+1$.

En génomique: reconstruction d'une séquence à partir de "k-mers" et recherche d'un chemin eulérien (Idury–Waterman 1995, Pevzner–Tang–Waterman 2001).

Un peu de théorie des nombres

a b b a b a a b b a ···



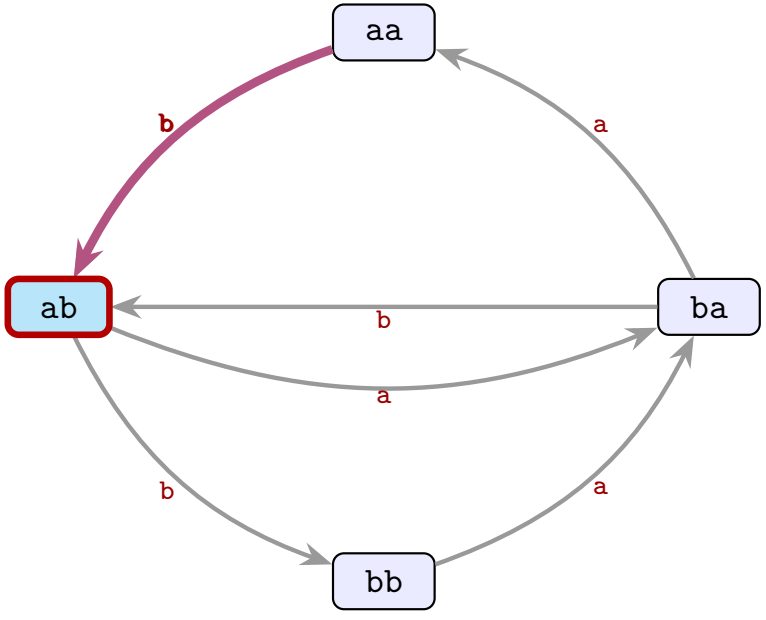
graphe d'ordre 2

- autant de sommets que de facteurs de longueur n,
- autant d'arcs que de facteurs de long. $n+1$.

En génomique: reconstruction d'une séquence à partir de "k-mers" et recherche d'un chemin eulérien (Idury–Waterman 1995, Pevzner–Tang–Waterman 2001).

Un peu de théorie des nombres

a b b a b a a b b a ···



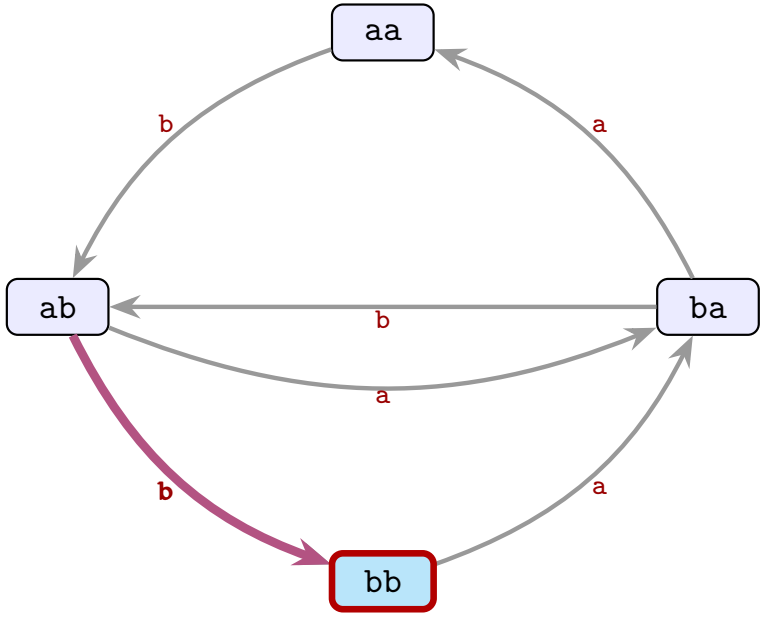
graphe d'ordre 2

- autant de sommets que de facteurs de longueur n,
- autant d'arcs que de facteurs de long. $n+1$.

En génomique: reconstruction d'une séquence à partir de "k-mers" et recherche d'un chemin eulérien (Idury–Waterman 1995, Pevzner–Tang–Waterman 2001).

Un peu de théorie des nombres

a b b a b a a b b a ···

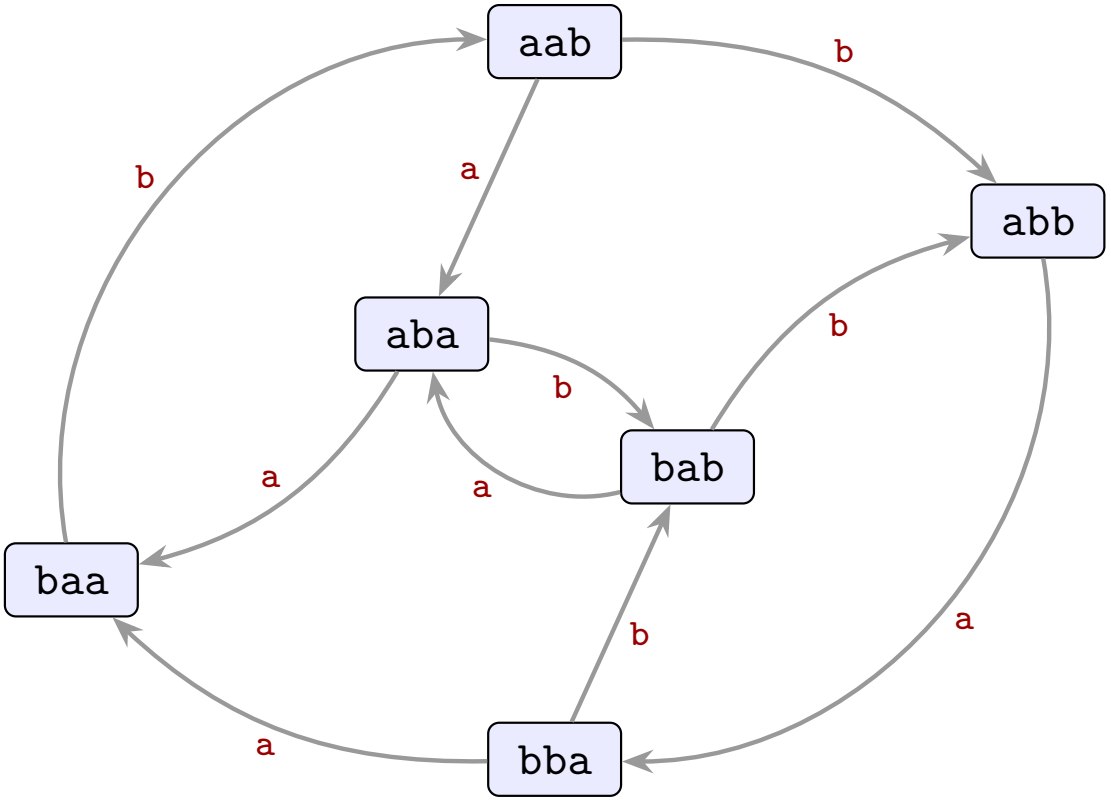


graphe d'ordre 2

- autant de sommets que de facteurs de longueur n,
- autant d'arcs que de facteurs de long. $n+1$.

En génomique: reconstruction d'une séquence à partir de "k-mers" et recherche d'un chemin eulérien (Idury–Waterman 1995, Pevzner–Tang–Waterman 2001).

Un peu de théorie des nombres



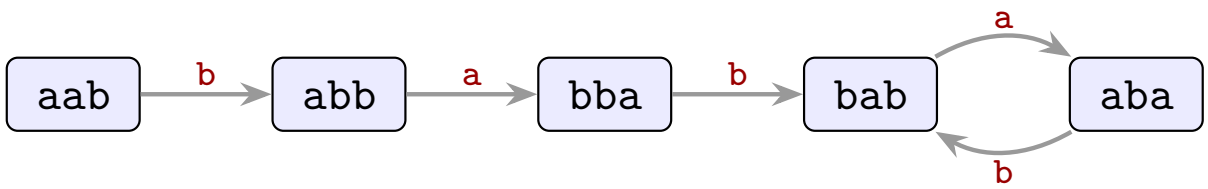
graphe d'ordre 3

On retrouve les 4 facteurs spéciaux

Un peu de théorie des nombres

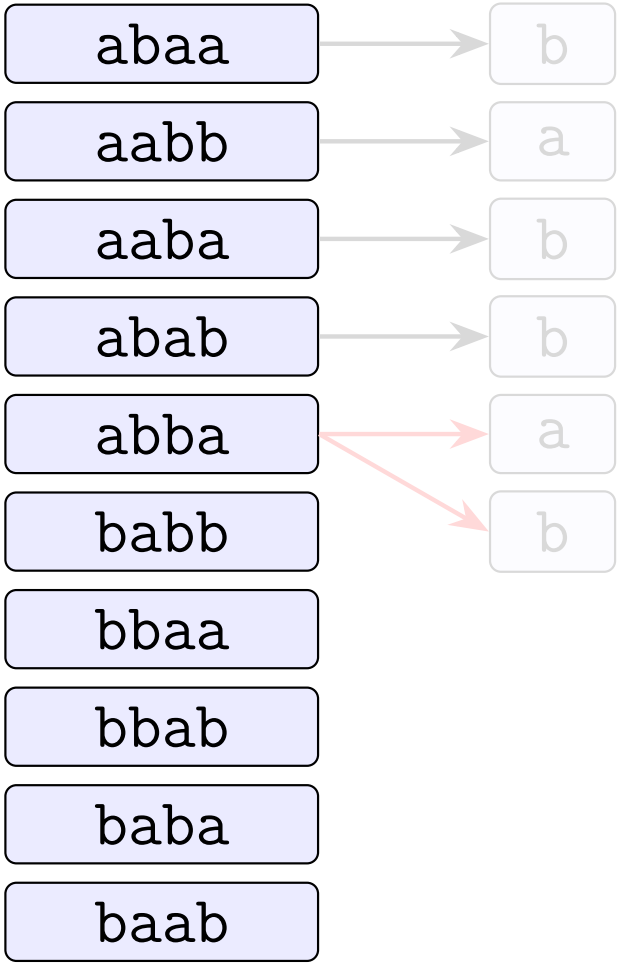
Remarque : un graphe de de Bruijn possède un *unique* cycle SSI la suite est ultimement périodique.

aabbababababa$\cdots$



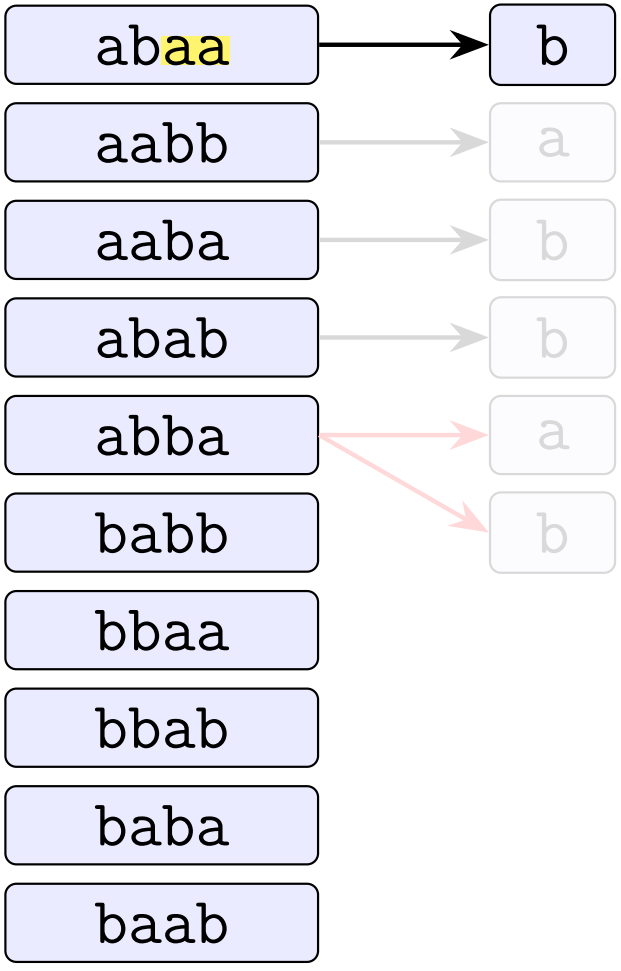
Un peu de théorie des nombres

Construisons ensemble le graphe de Rauzy d'ordre 4



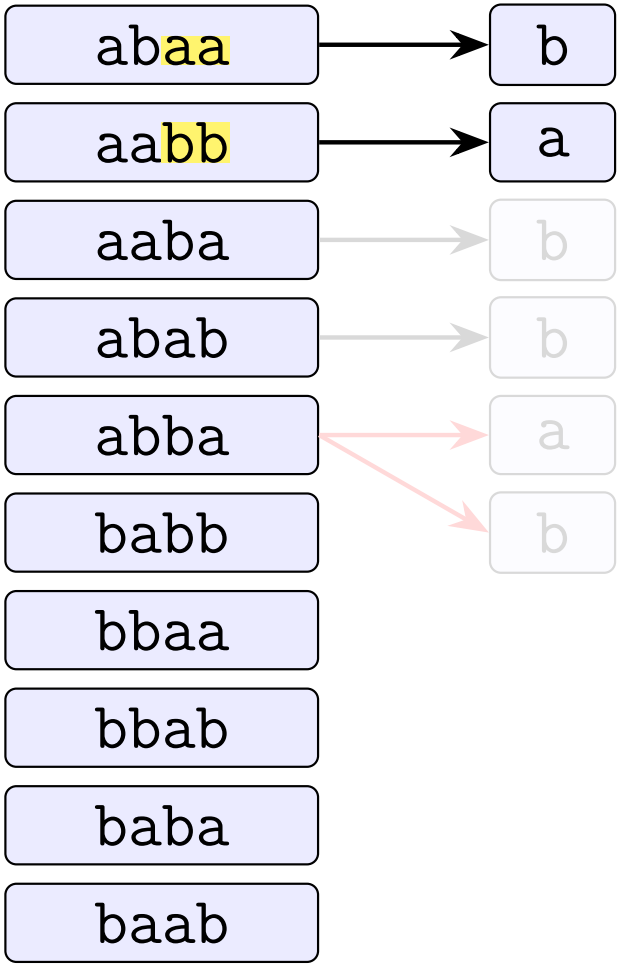
Un peu de théorie des nombres

Construisons ensemble le graphe de Rauzy d'ordre 4



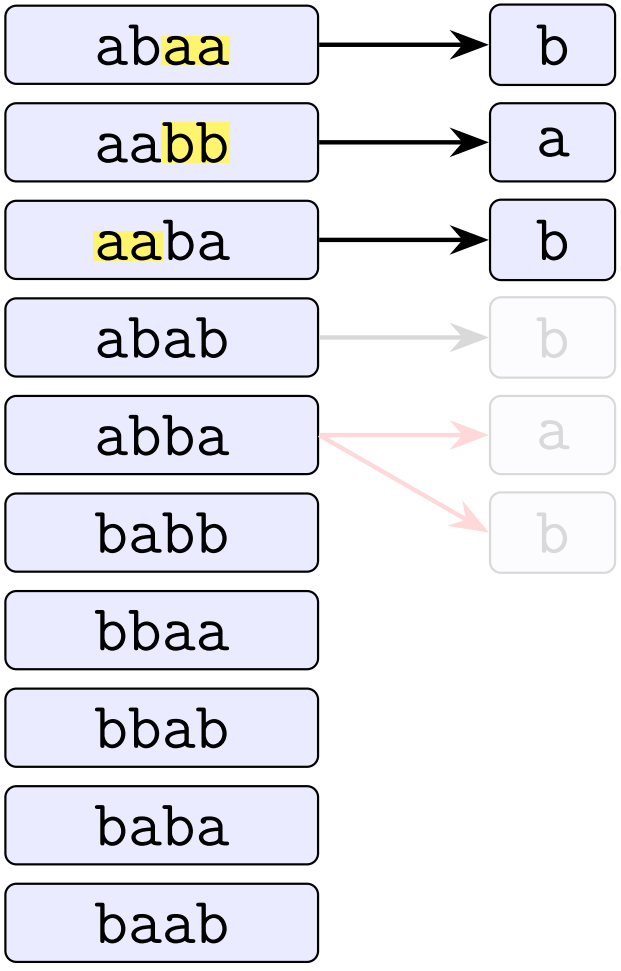
Un peu de théorie des nombres

Construisons ensemble le graphe de Rauzy d'ordre 4



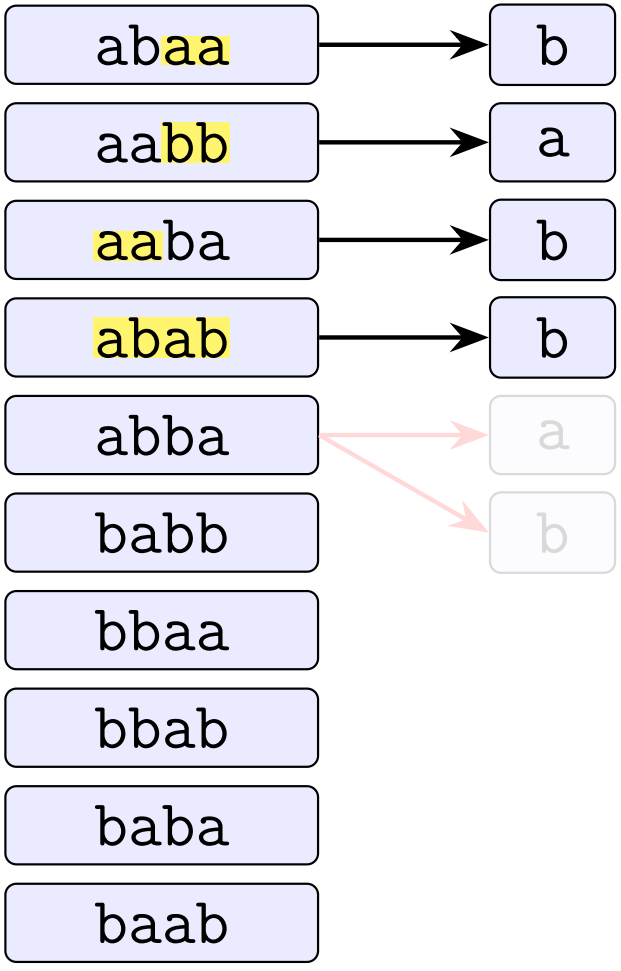
Un peu de théorie des nombres

Construisons ensemble le graphe de Rauzy d'ordre 4



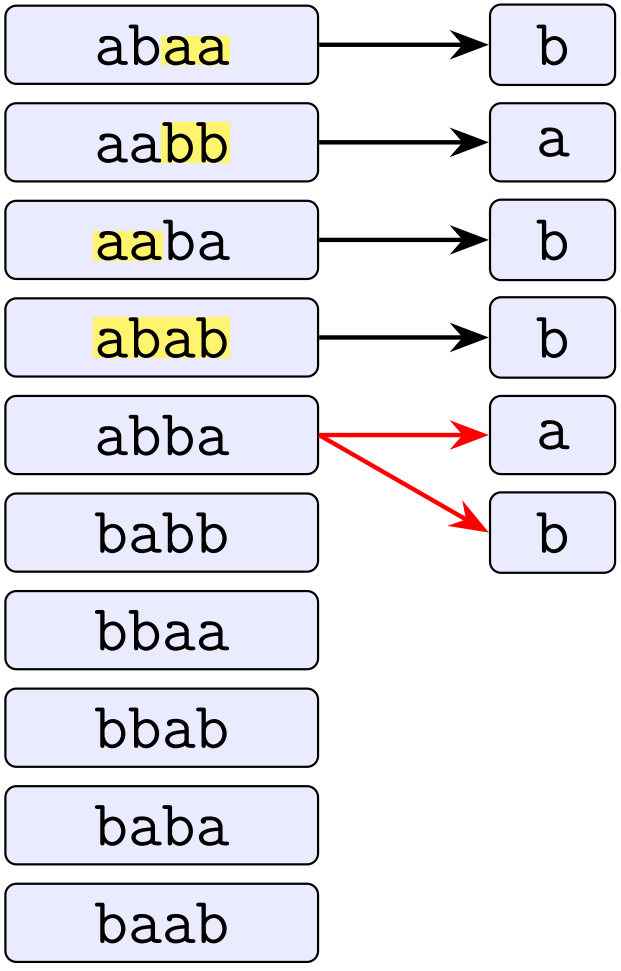
Un peu de théorie des nombres

Construisons ensemble le graphe de Rauzy d'ordre 4

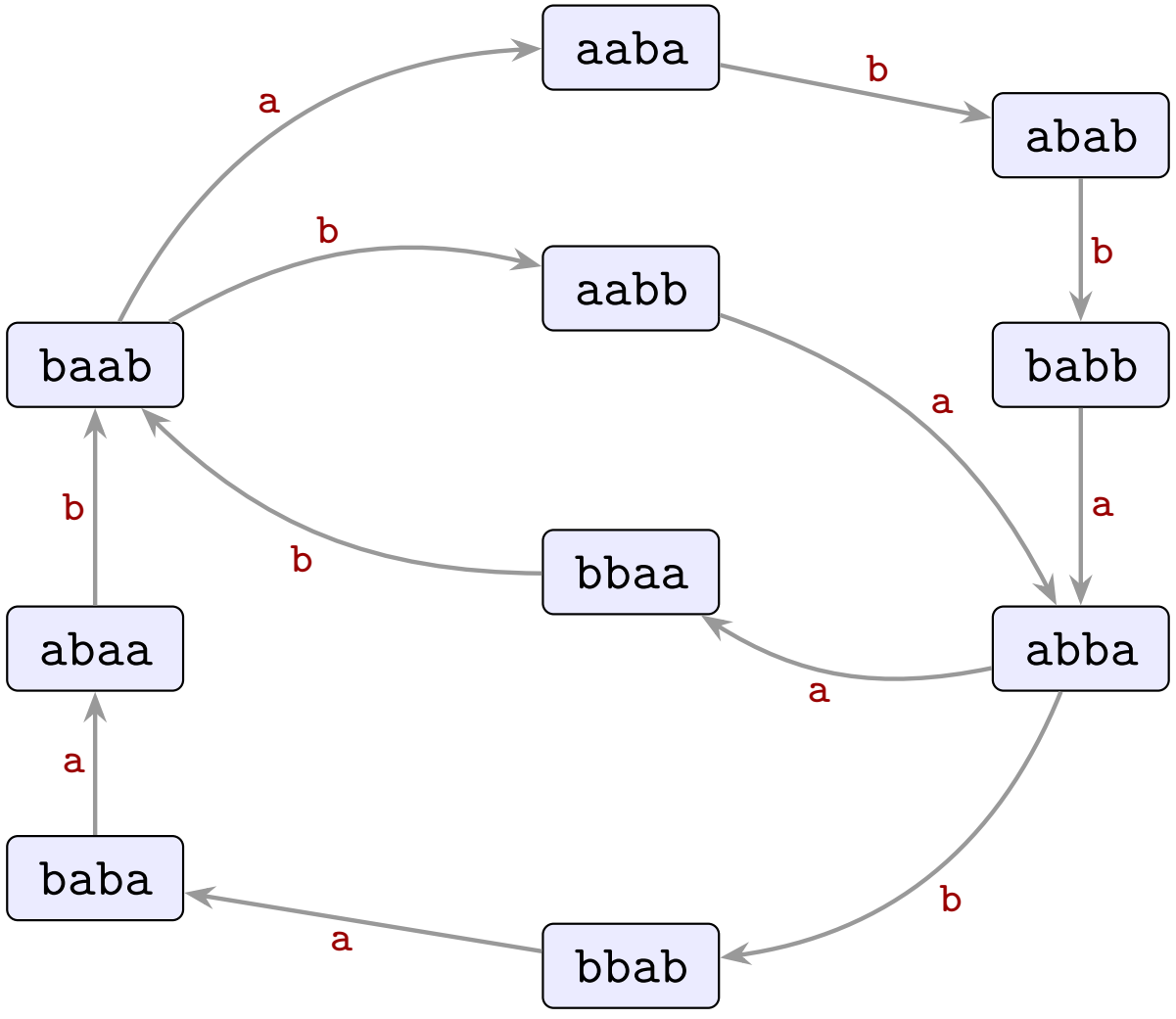


Un peu de théorie des nombres

Construisons ensemble le graphe de Rauzy d'ordre 4



Un peu de théorie des nombres



graphe d'ordre 4

Un peu de théorie des nombres

J. Cassaigne : $\mathsf{p}(n+1) = \mathsf{p}(n) + \#\{\text{facteurs spéciaux de lg. } n\}$

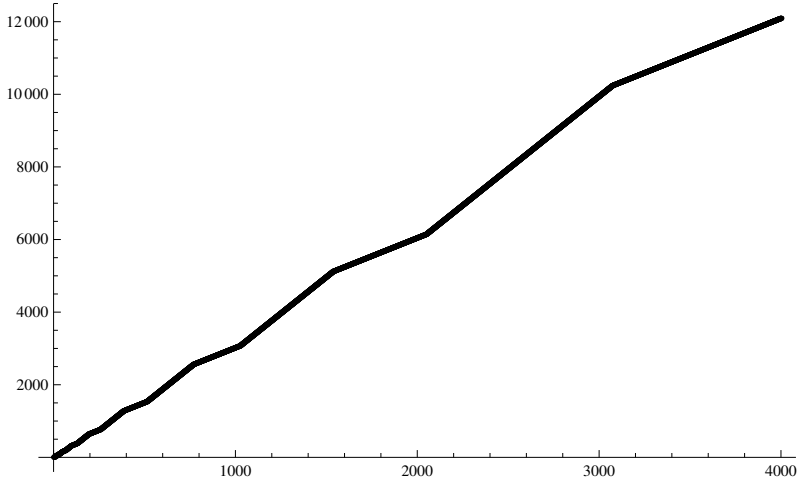
Théorème

$$\mathsf{p}_{\mathbf{T}}(n) = \begin{cases} 4n - 2\cdot 2^m - 4, & \text{si } 2\cdot 2^m < n \leq 3\cdot 2^m; \\ 2n + 4\cdot 2^m - 2, & \text{si } 3\cdot 2^m < n \leq 4\cdot 2^m. \end{cases}$$

$\mathsf{p}(n+1) - \mathsf{p}(n) =$

$2, 2, 4, 2, 4, 4, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, \ldots$

A. de Luca, S. Varricchio (1988), S. Brlek (1989)



Un peu de théorie des nombres

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\mathbf{T}_n}{2^{n+1}} = \frac{0}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{0}{16} + \cdots \simeq 0{,}4124$$

Théorème (Adamczewski–Bugeaud)

Le développement en base b d'un nombre algébrique irrationnel satisfait

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\mathsf{p}(n)}{n} = +\infty.$$

Corollaire (conjecture de Cobham)

Tout nombre réel b-automatique irrationnel est transcendant.

Un interlude magique

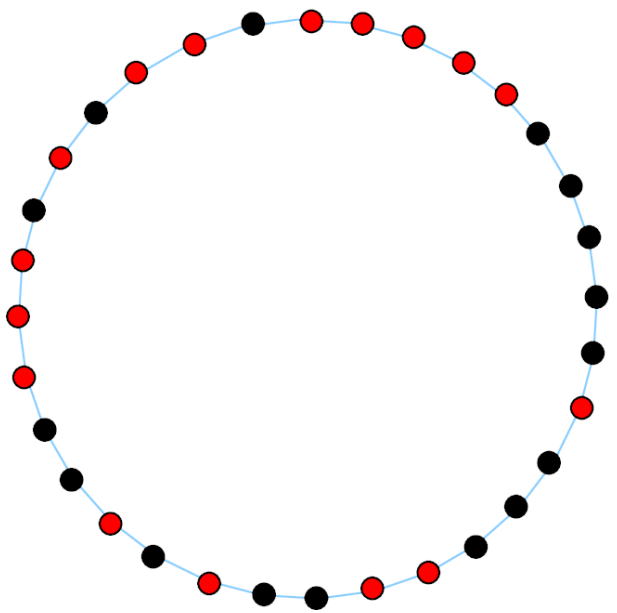


R. Jungers (UCLouvain) / Persi Diaconis, Ron Graham, *Magical Mathematics*.

Un interlude magique

N. de Bruijn

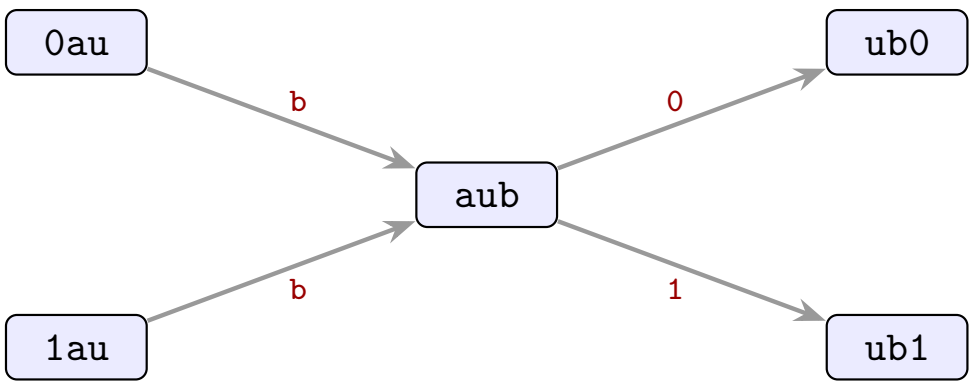
Soit un alphabet à p symboles. Pour tout $n \geq 1$, il existe un mot circulaire de longueur minimale p^n contenant chaque mot de longueur n une et une seule fois.



Un interlude magique

Graphe eulérien

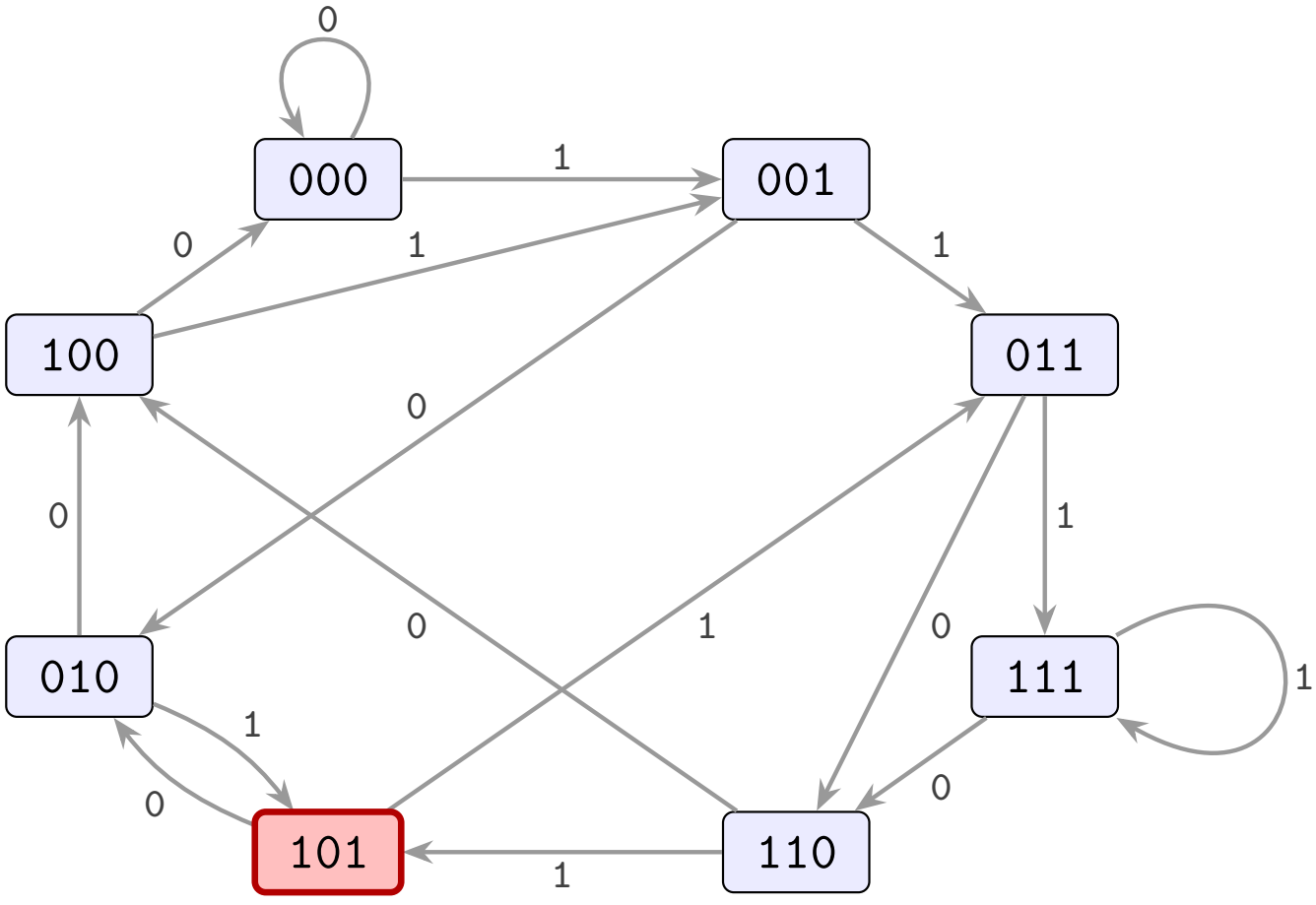
Il existe un circuit visitant chaque arc, une et une seule fois.
Un graphe est eulérien $\Leftrightarrow d^+(v) = d^-(v), \forall v$.
Construction d'un circuit eulérien en temps linéaire.



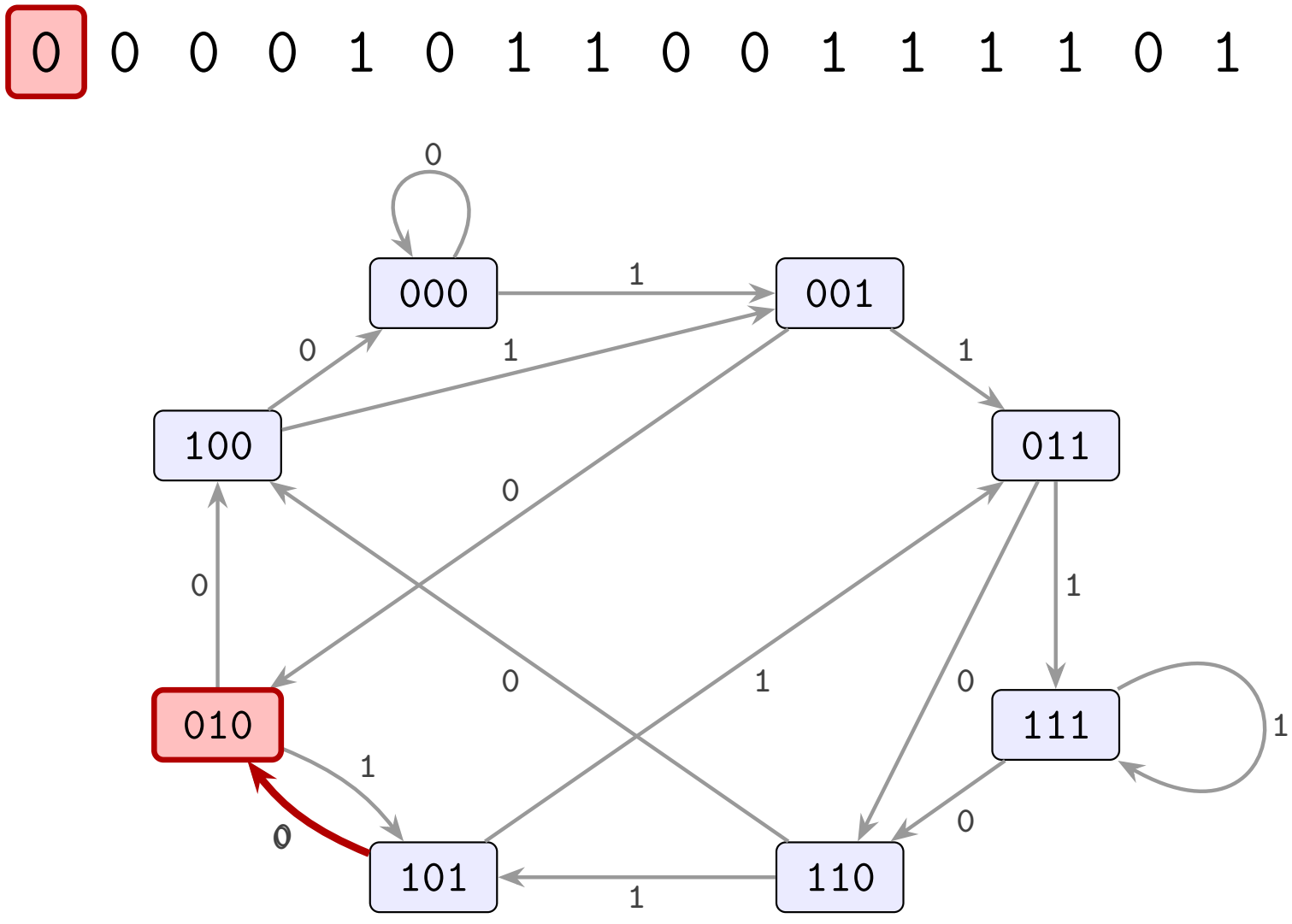
- Le graphe de de Bruijn "complet" est donc eulérien !

Un interlude magique

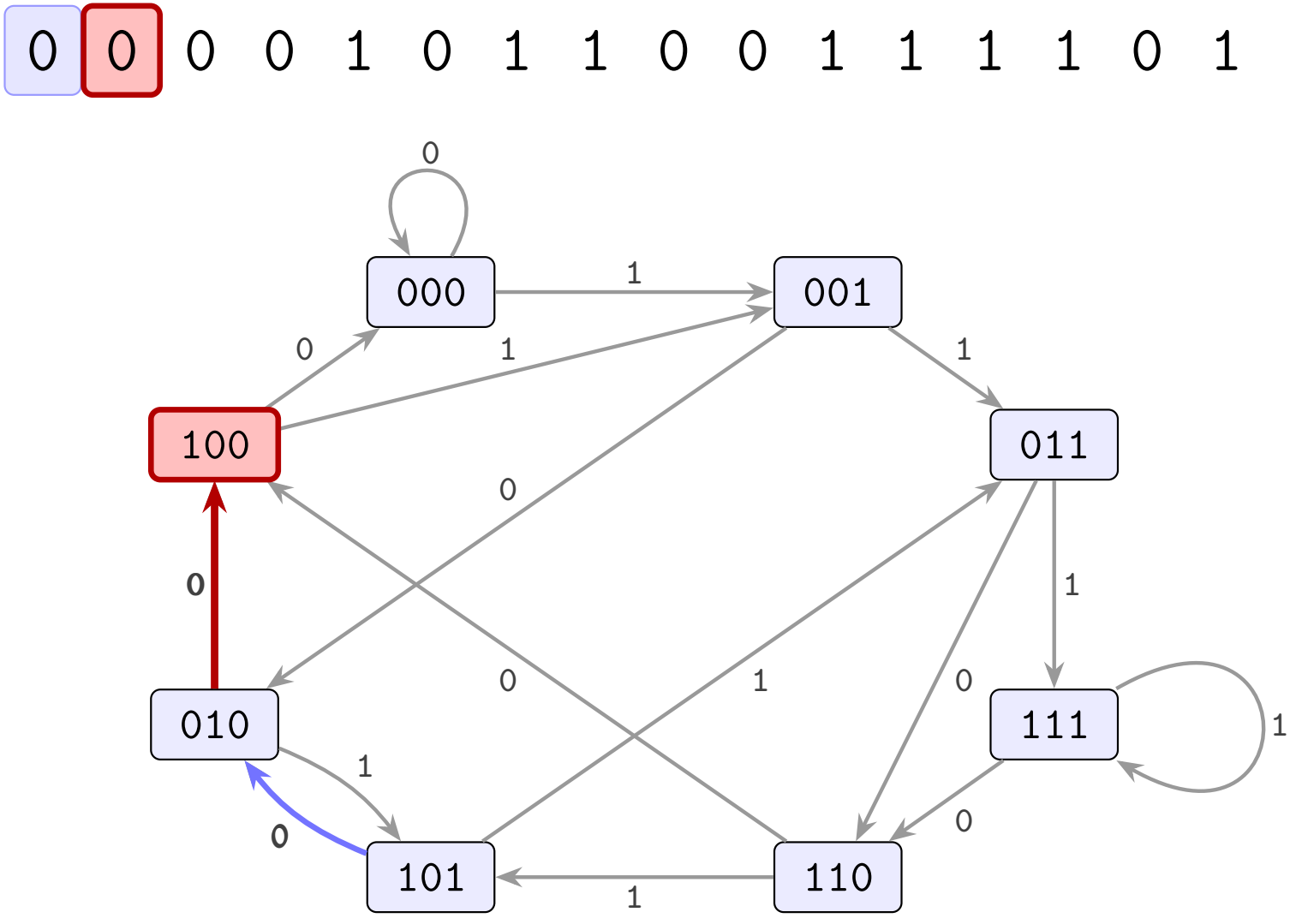
0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1



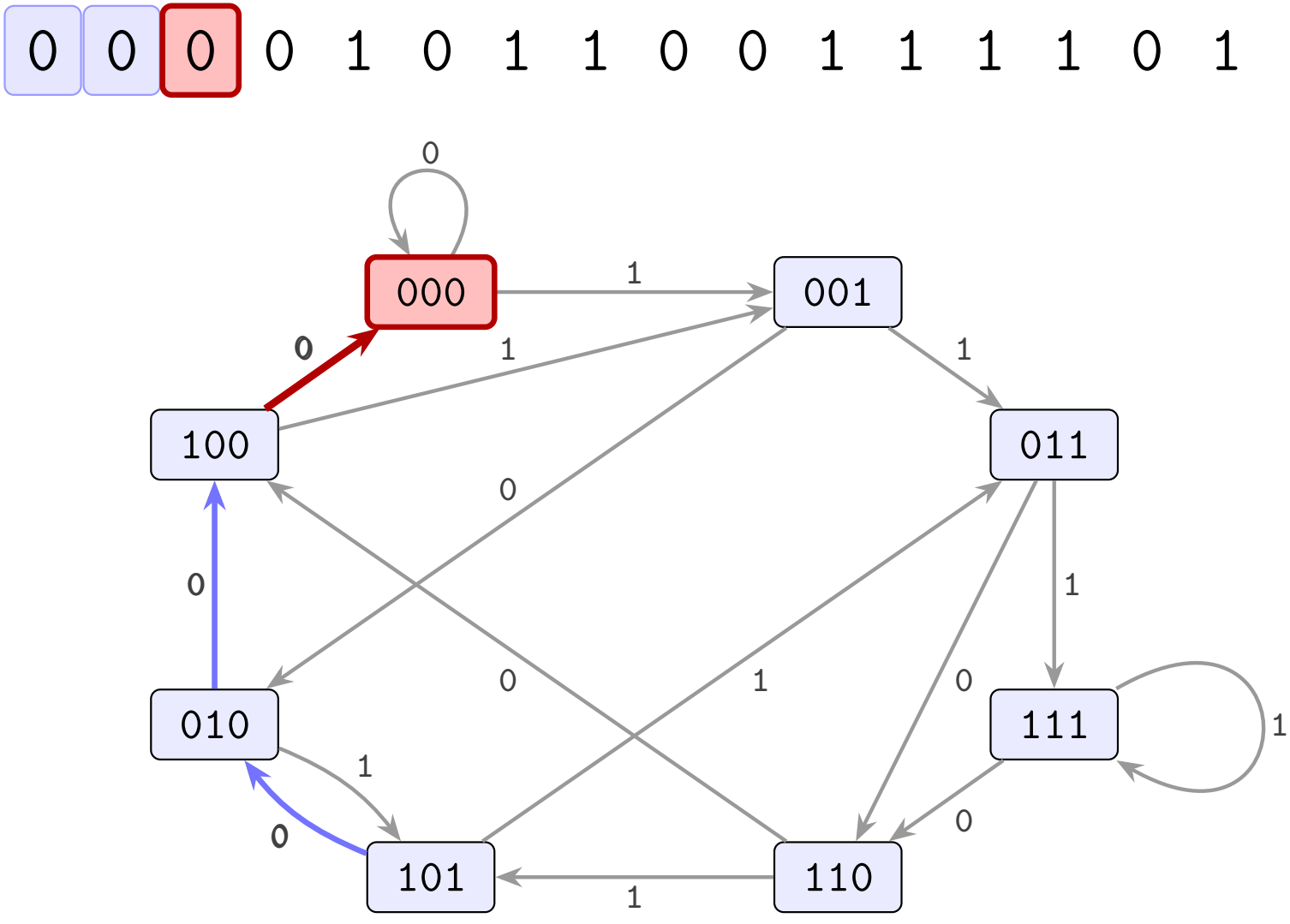
Un interlude magique



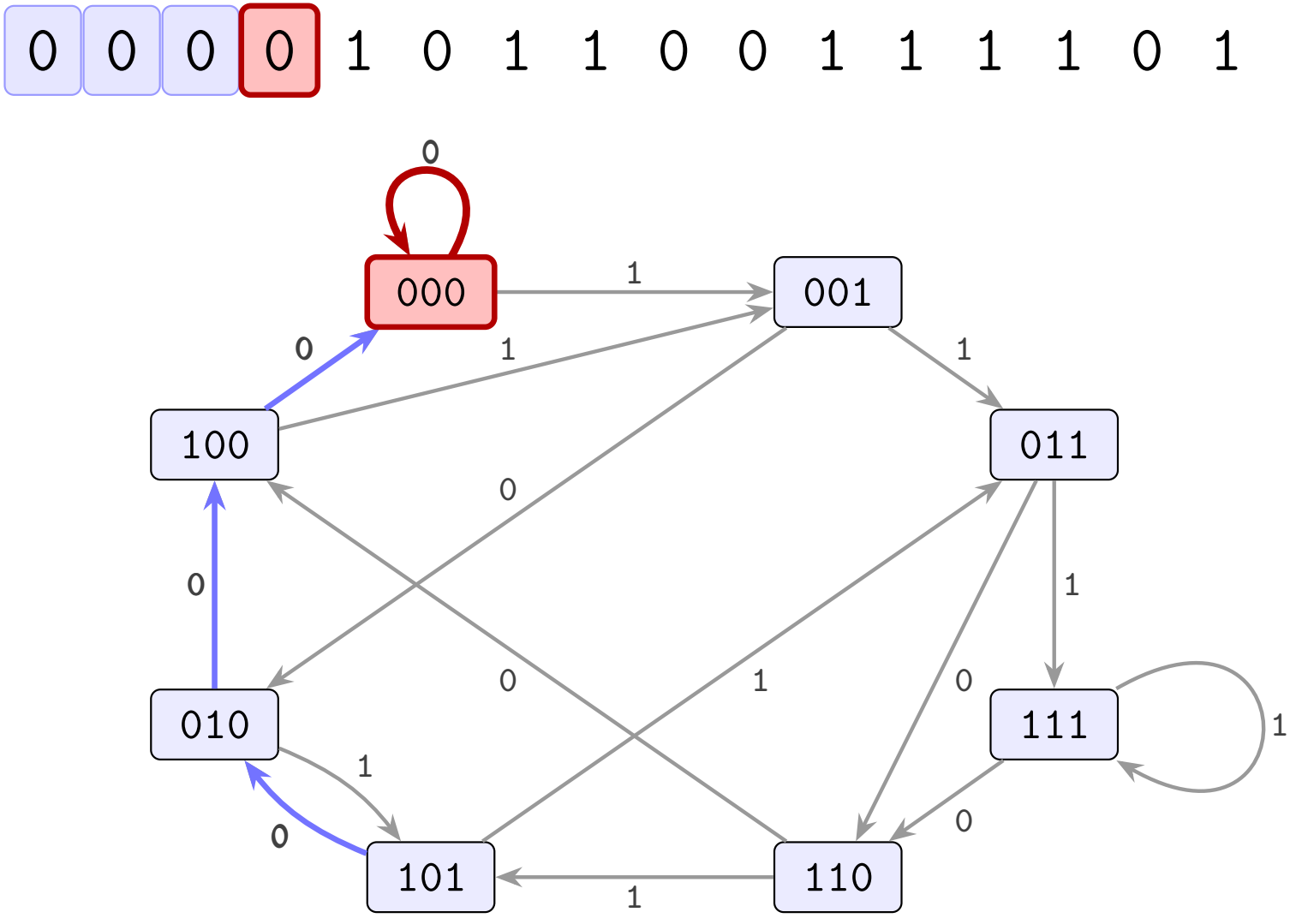
Un interlude magique



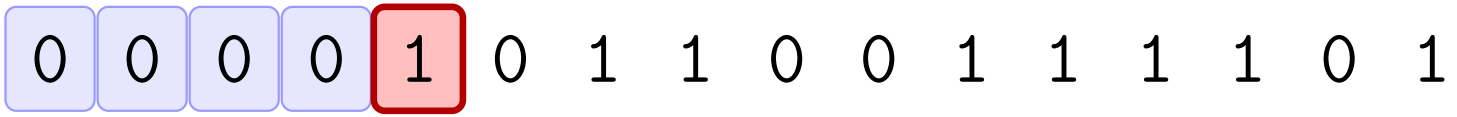
Un interlude magique

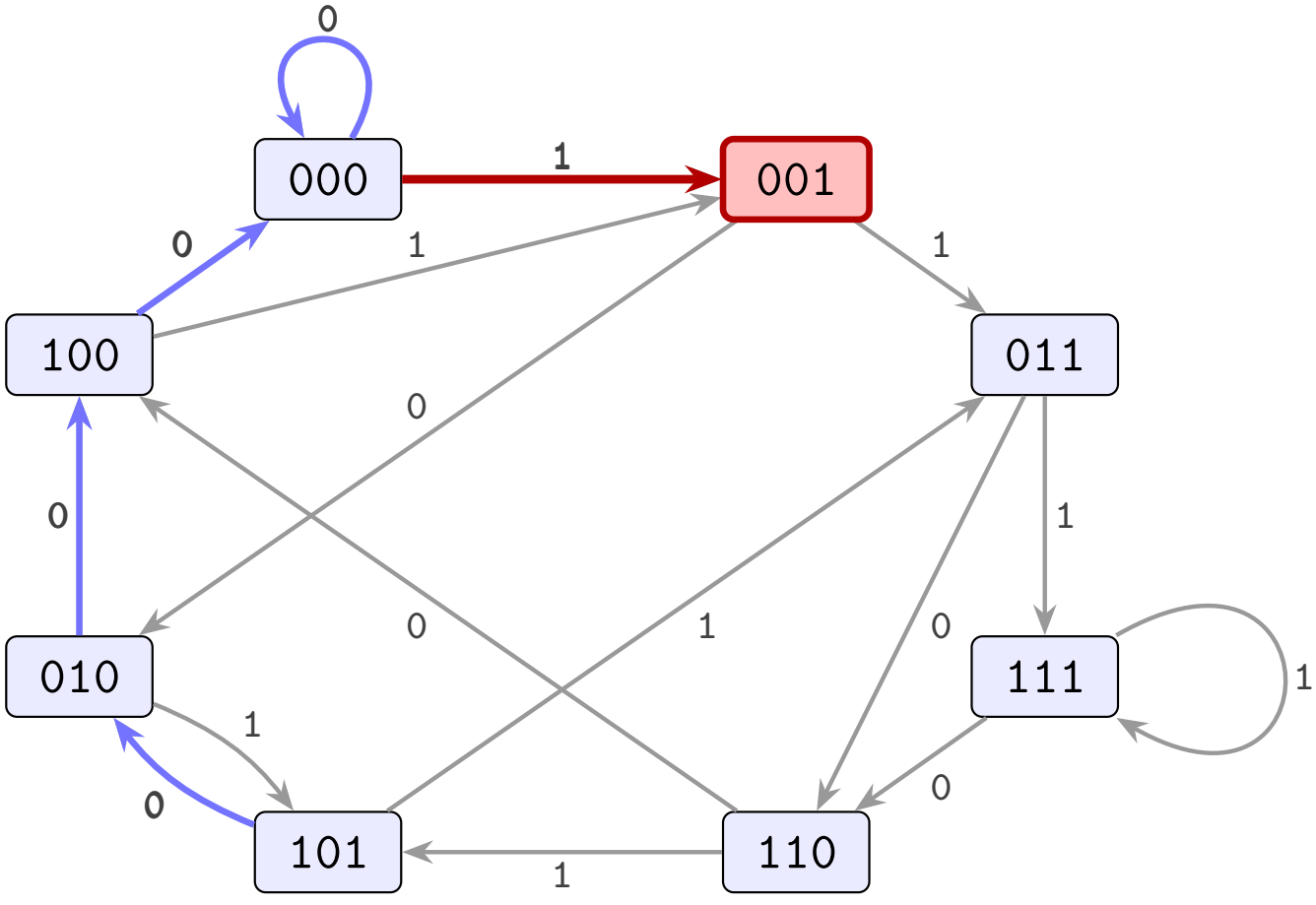


Un interlude magique

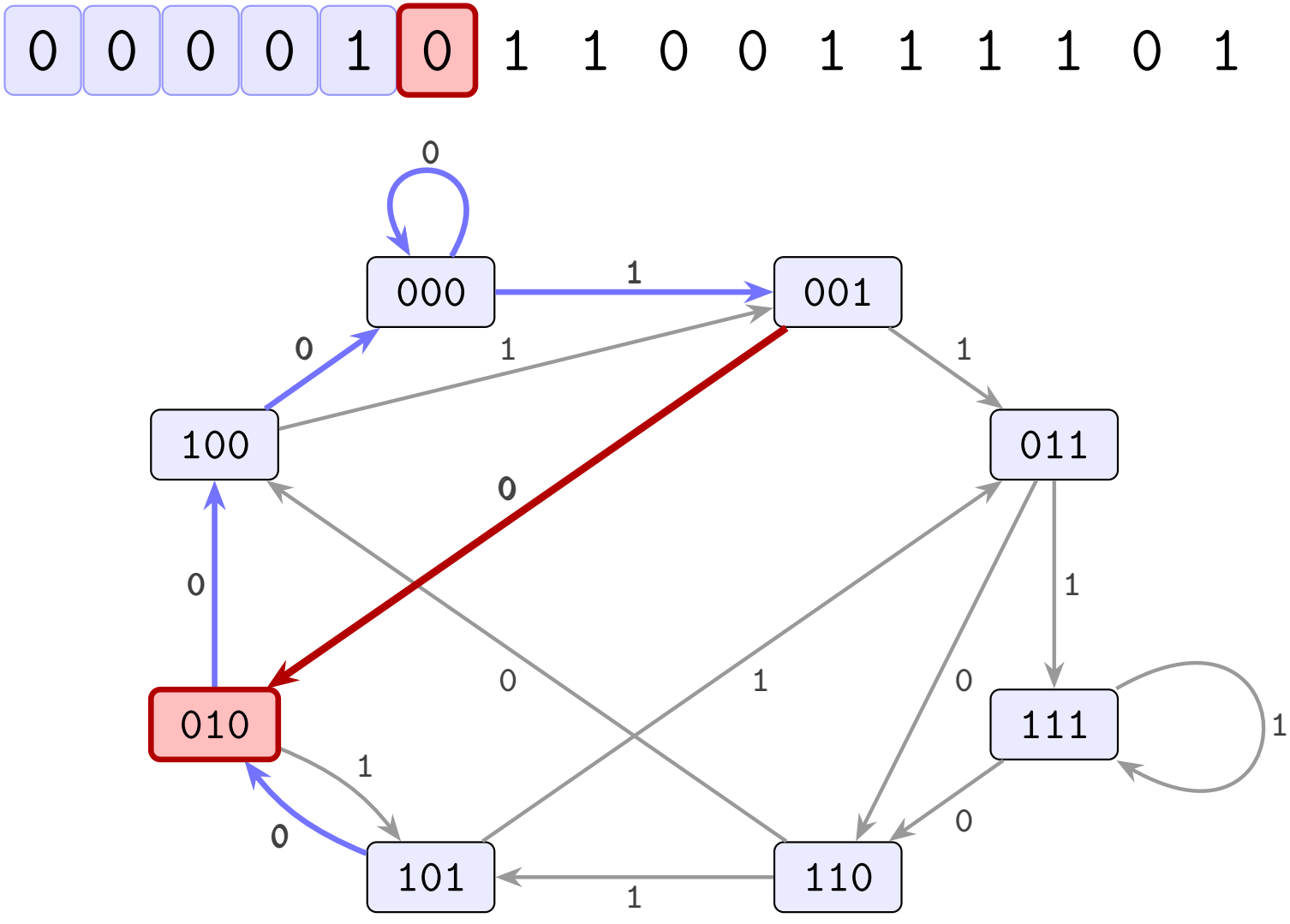


Un interlude magique

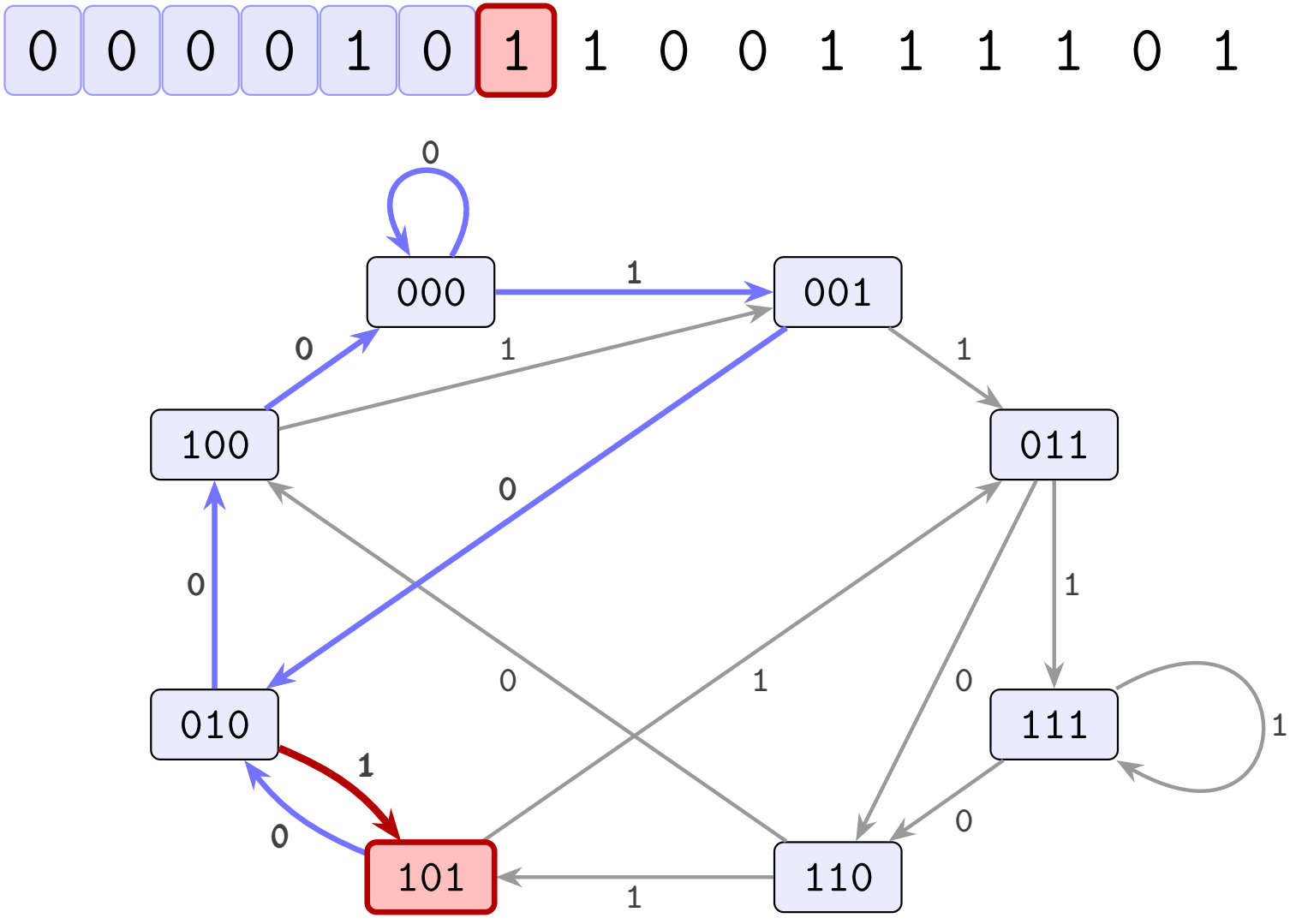




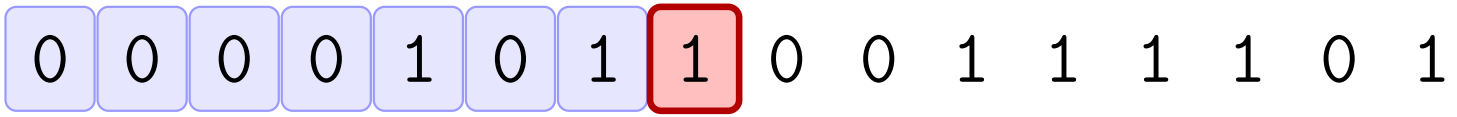
Un interlude magique

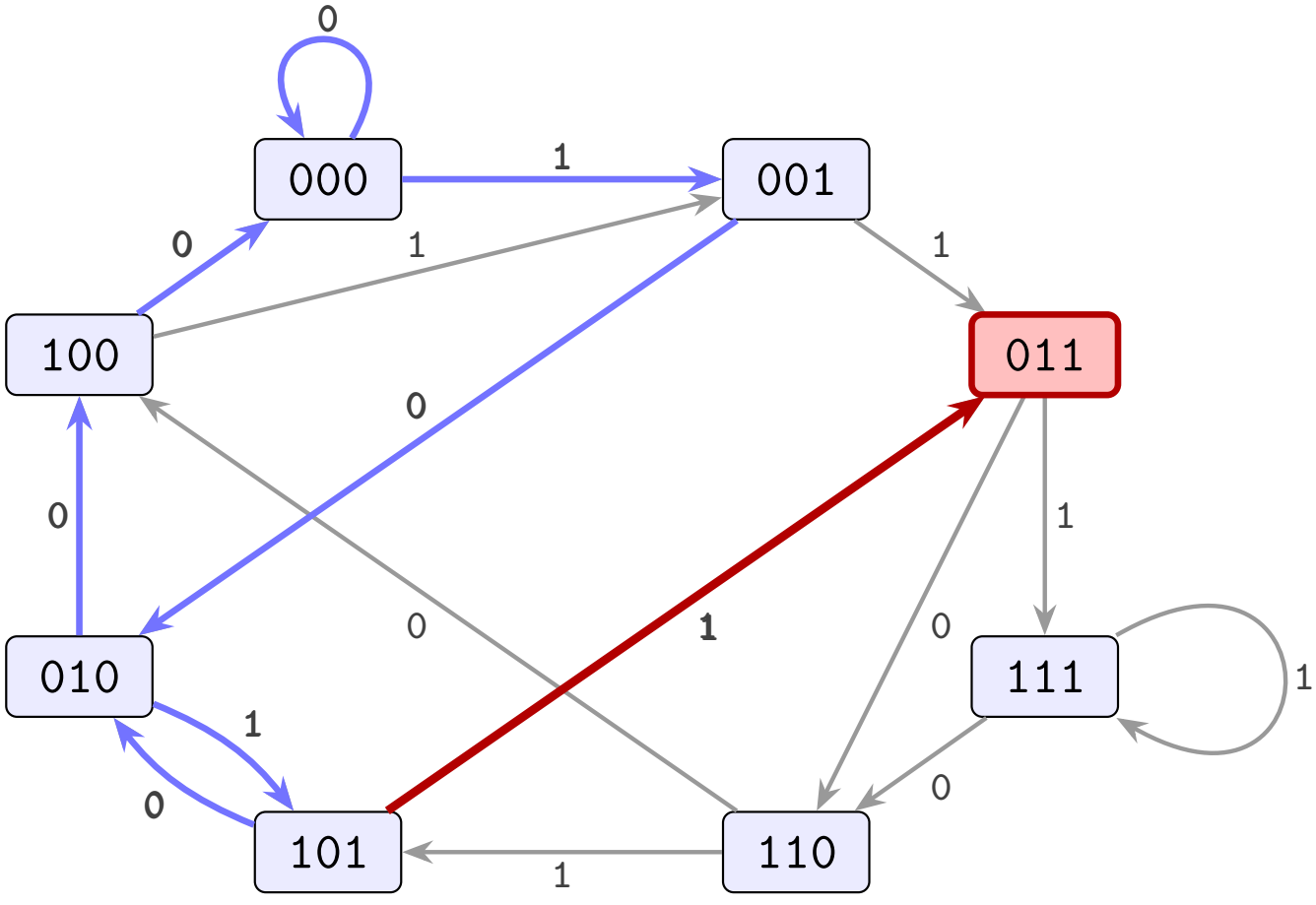


Un interlude magique

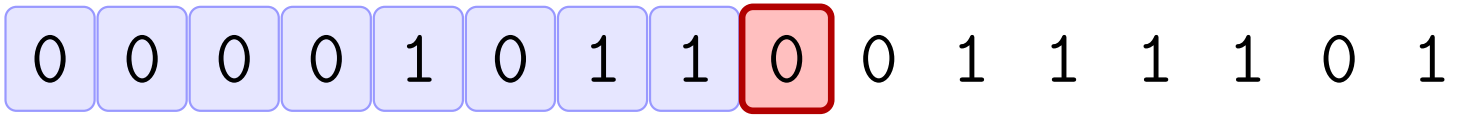


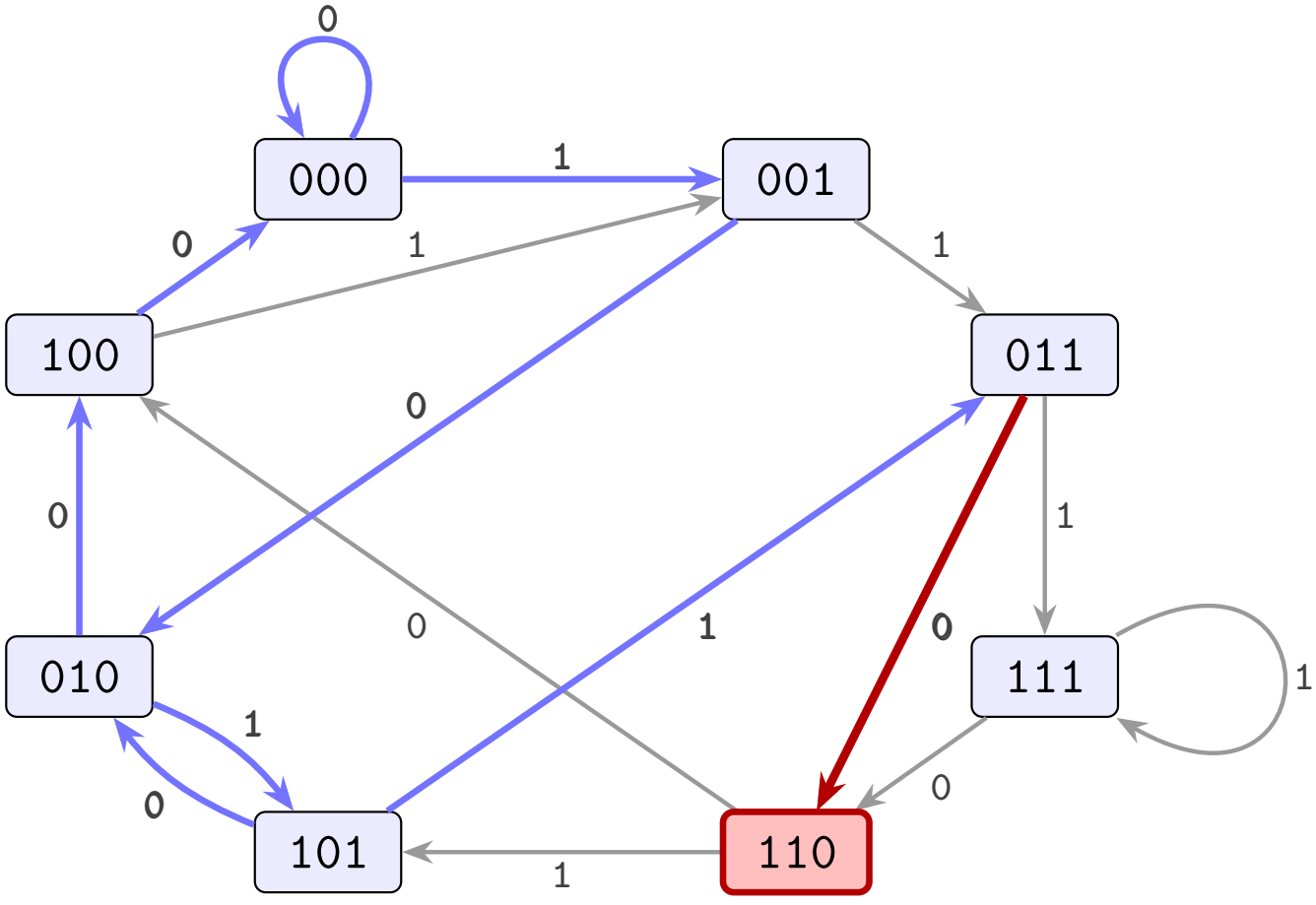
Un interlude magique



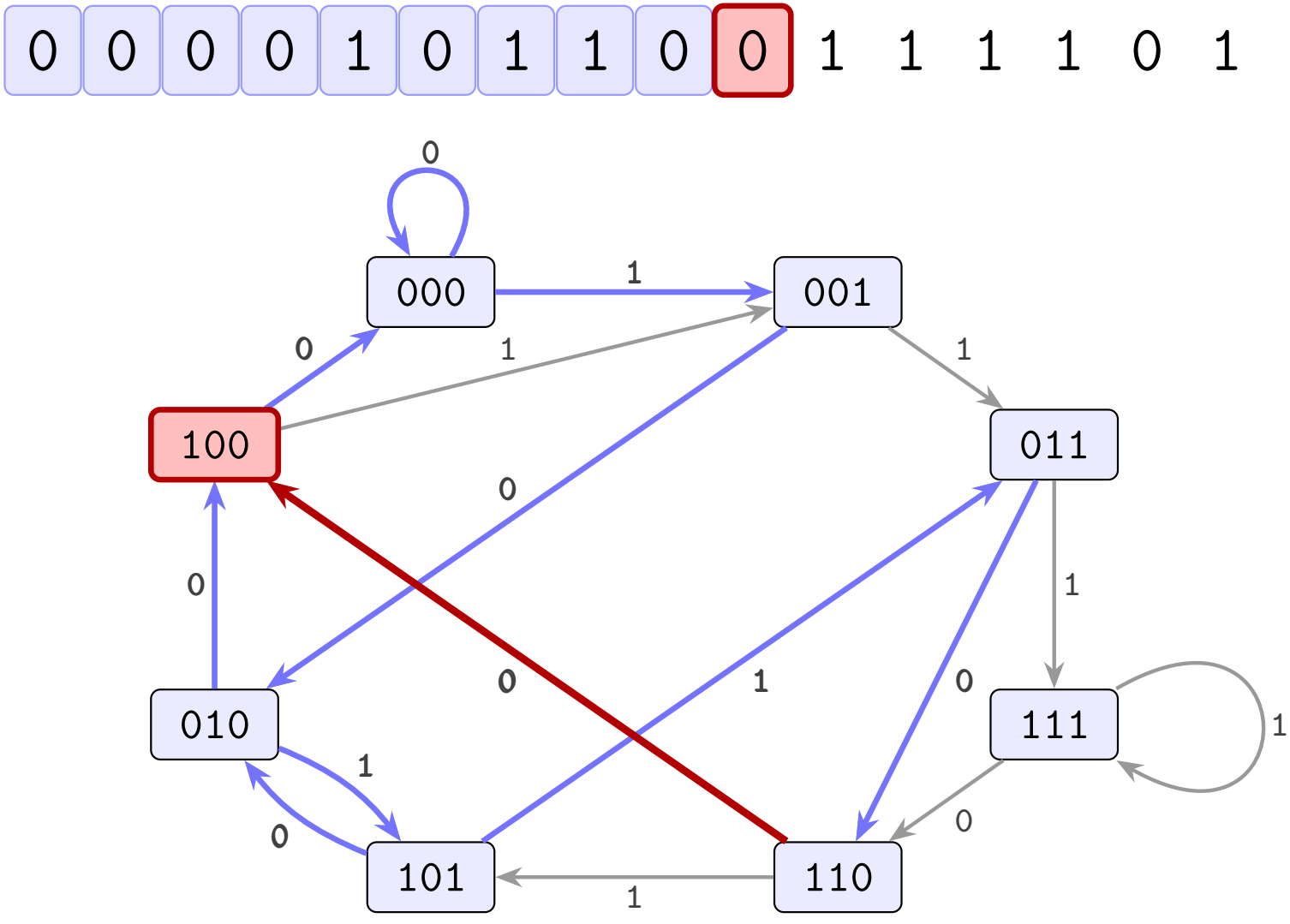


Un interlude magique

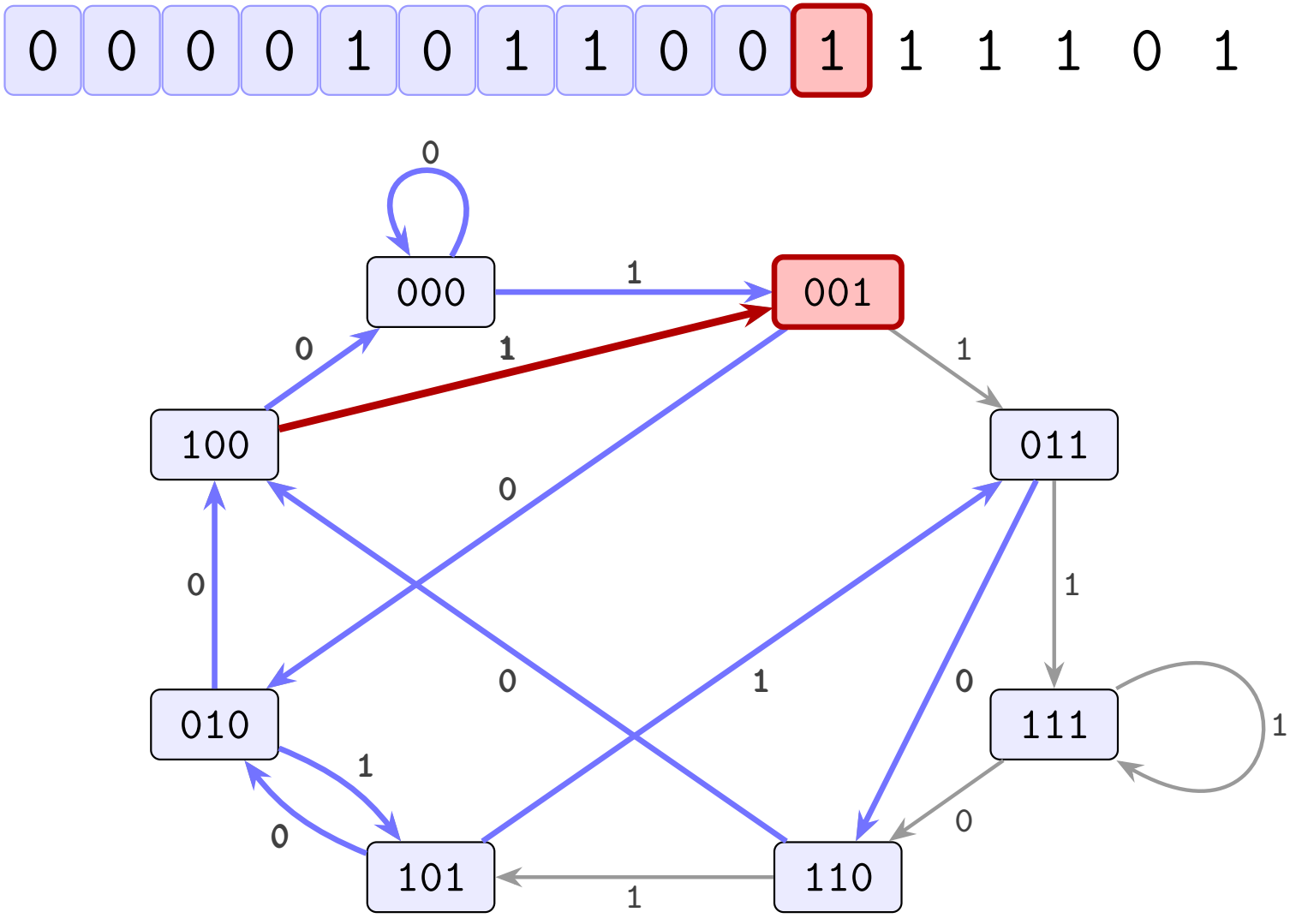




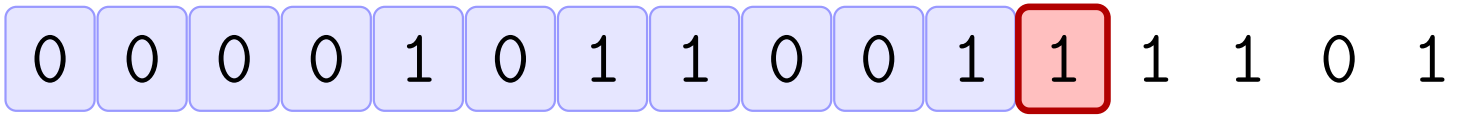
Un interlude magique

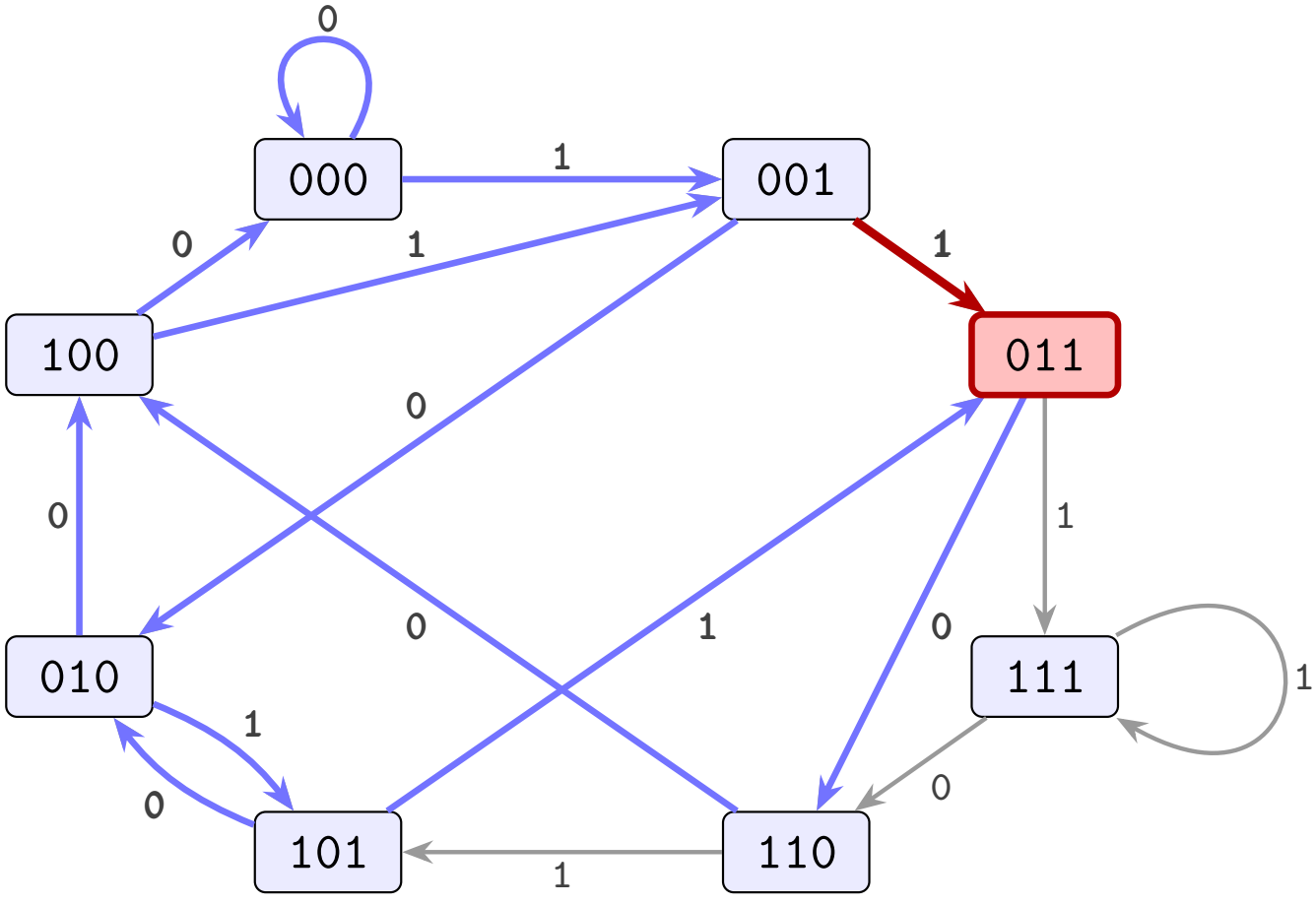


Un interlude magique

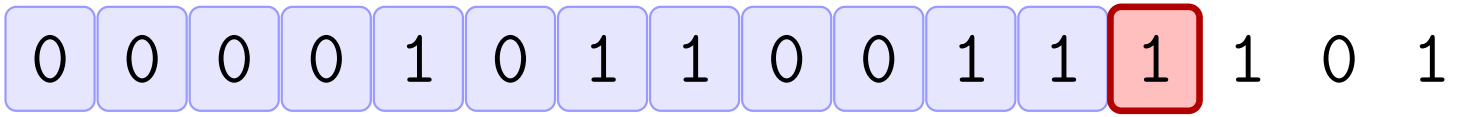


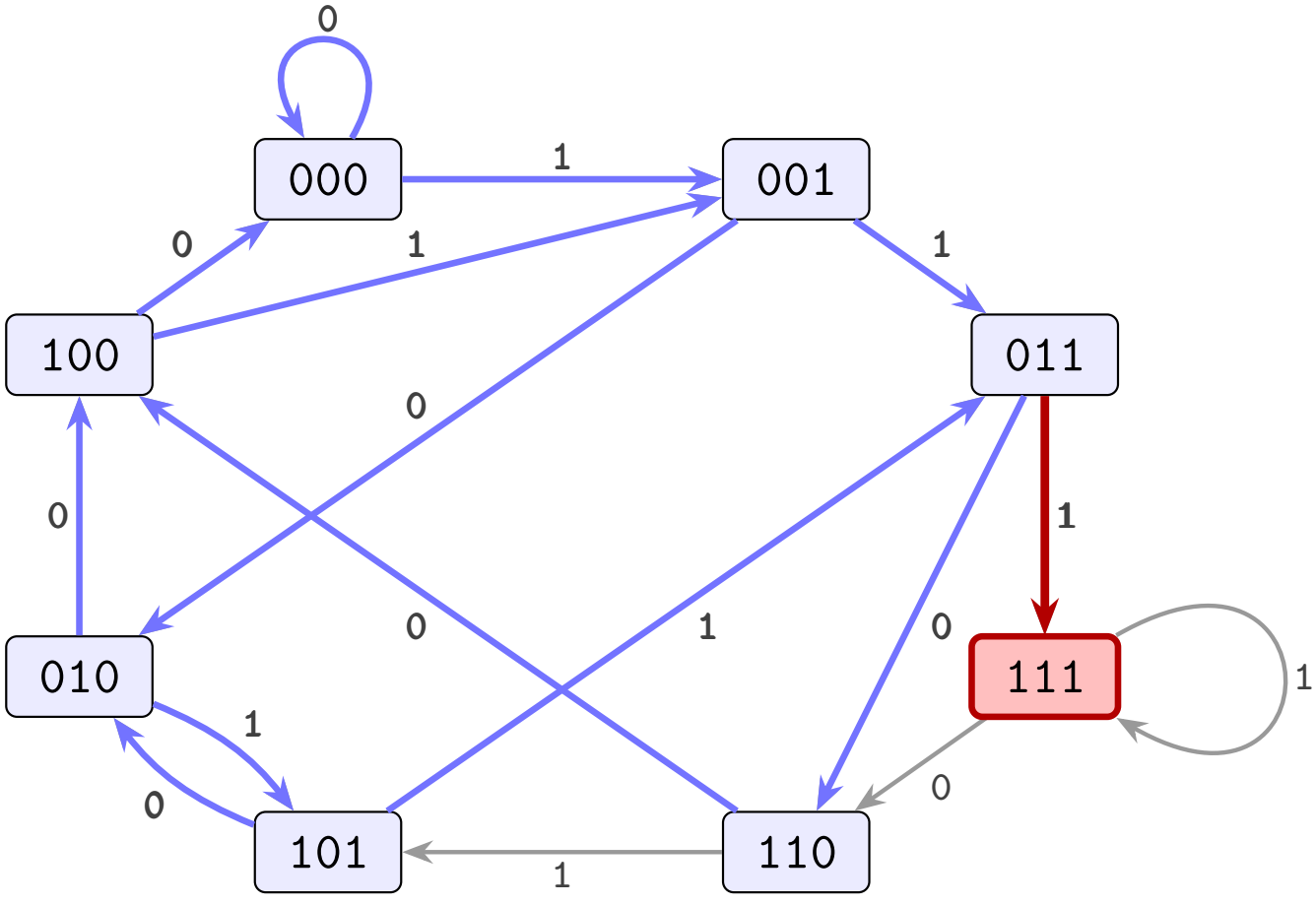
Un interlude magique



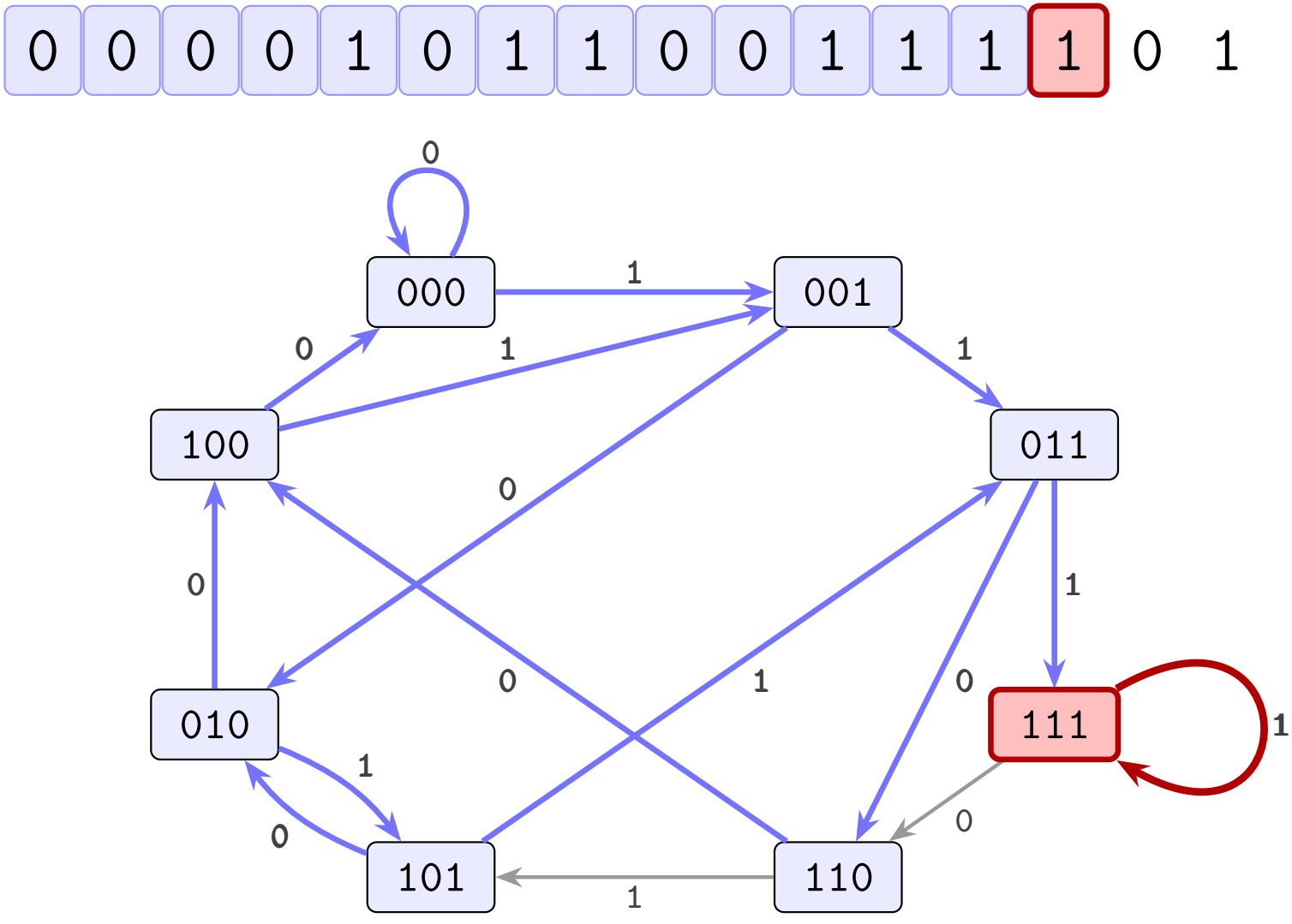


Un interlude magique

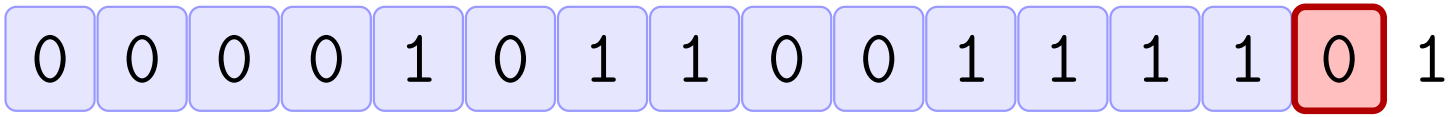


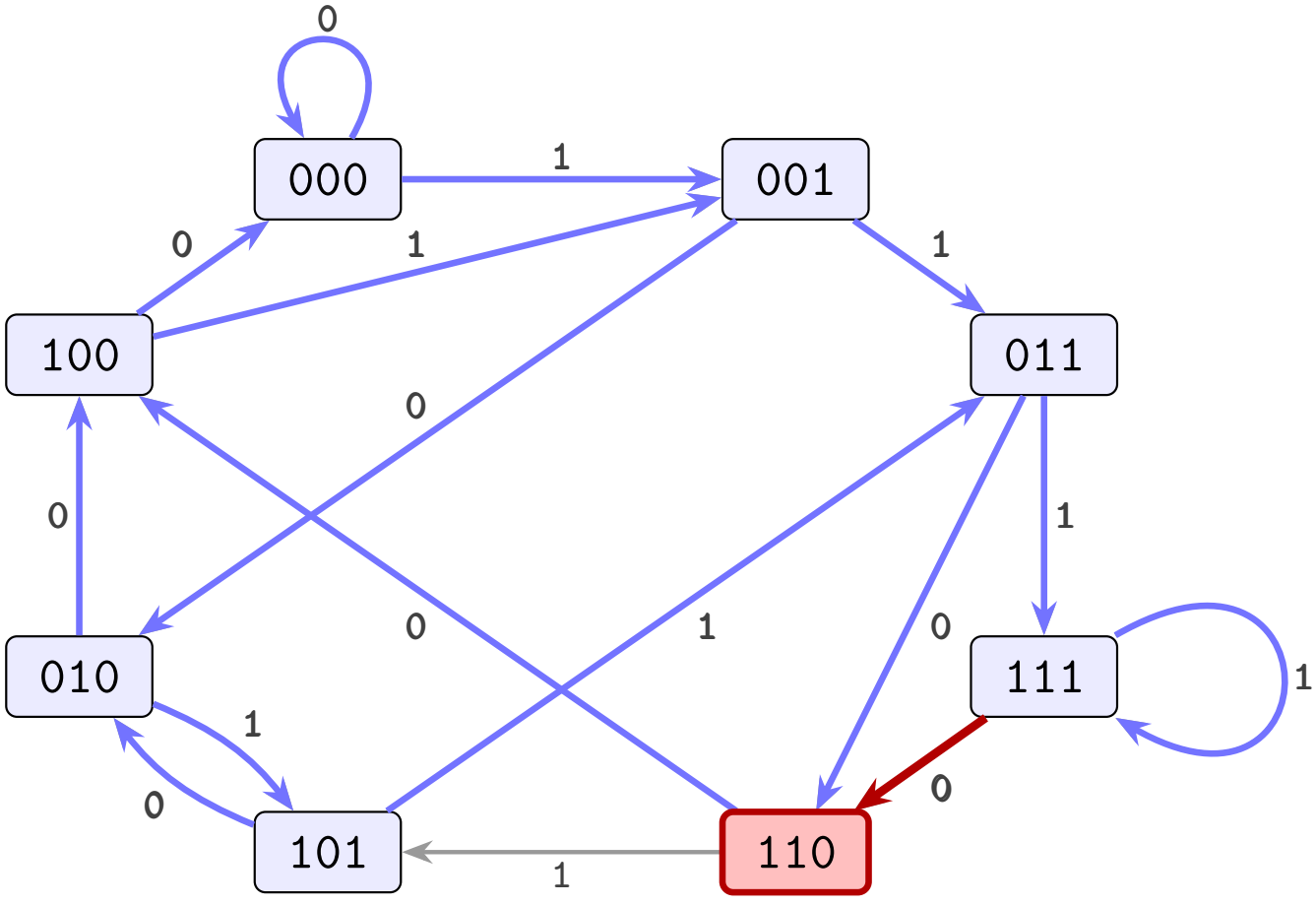


Un interlude magique

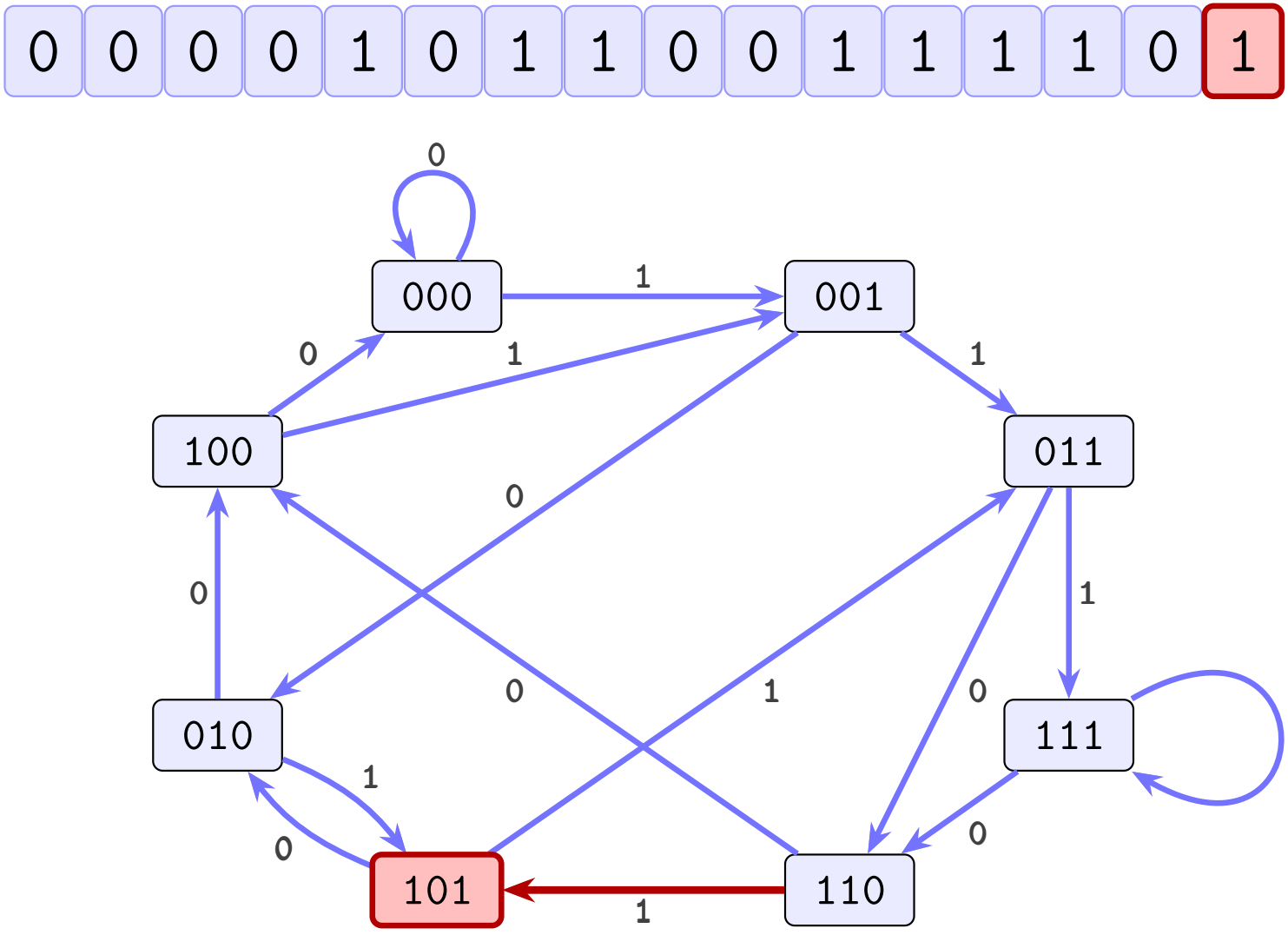


Un interlude magique





Un interlude magique



Un interlude magique

Challenge

Ranger un jeu de 52 cartes de telle sorte que pour chaque suite de 5 cartes consécutives, les 3 plus hautes occupent des positions "uniques".

$$5\heartsuit - V\heartsuit - \underbrace{\boxed{R\clubsuit - 10\spadesuit - 6\diamondsuit - 3\clubsuit - 5\spadesuit}}_{T=(1,2,3)} - 7\diamondsuit - D\heartsuit - 8\clubsuit$$

$$5\heartsuit - V\heartsuit - R\clubsuit - \underbrace{\boxed{10\spadesuit - 6\diamondsuit - 3\clubsuit - 5\spadesuit - 7\diamondsuit}}_{T=(1,5,2)} - D\heartsuit - 8\clubsuit$$

$$5\heartsuit - V\heartsuit - R\clubsuit - 10\spadesuit - \underbrace{\boxed{6\diamondsuit - 3\clubsuit - 5\spadesuit - 7\diamondsuit - D\heartsuit}}_{T=(5,4,1)} - 8\clubsuit$$

Un interlude magique



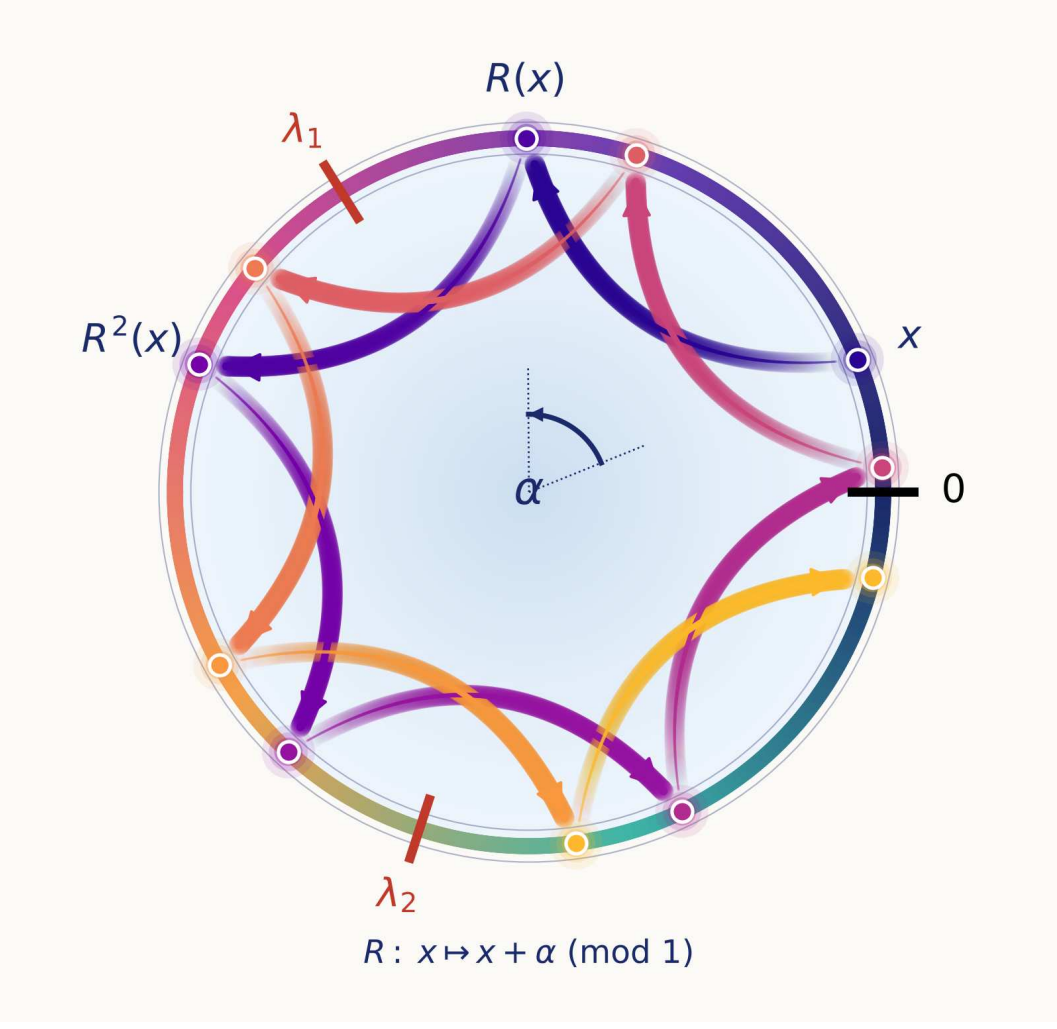
Un interlude magique

- Pour une famille $\mathcal{F}$ d'objets combinatoires codés chacun par un mot de longueur n, un cycle universel est un mot circulaire de longueur $\#\mathcal{F}$ dans lequel chaque élément de $\mathcal{F}$ apparaît exactement une fois (Chung, Diaconis et Graham, 1992).
- R. Johnson, Universal cycles for permutations, Discrete Mathematics 309 (2009), 5264–5270.

En guise de conclusion

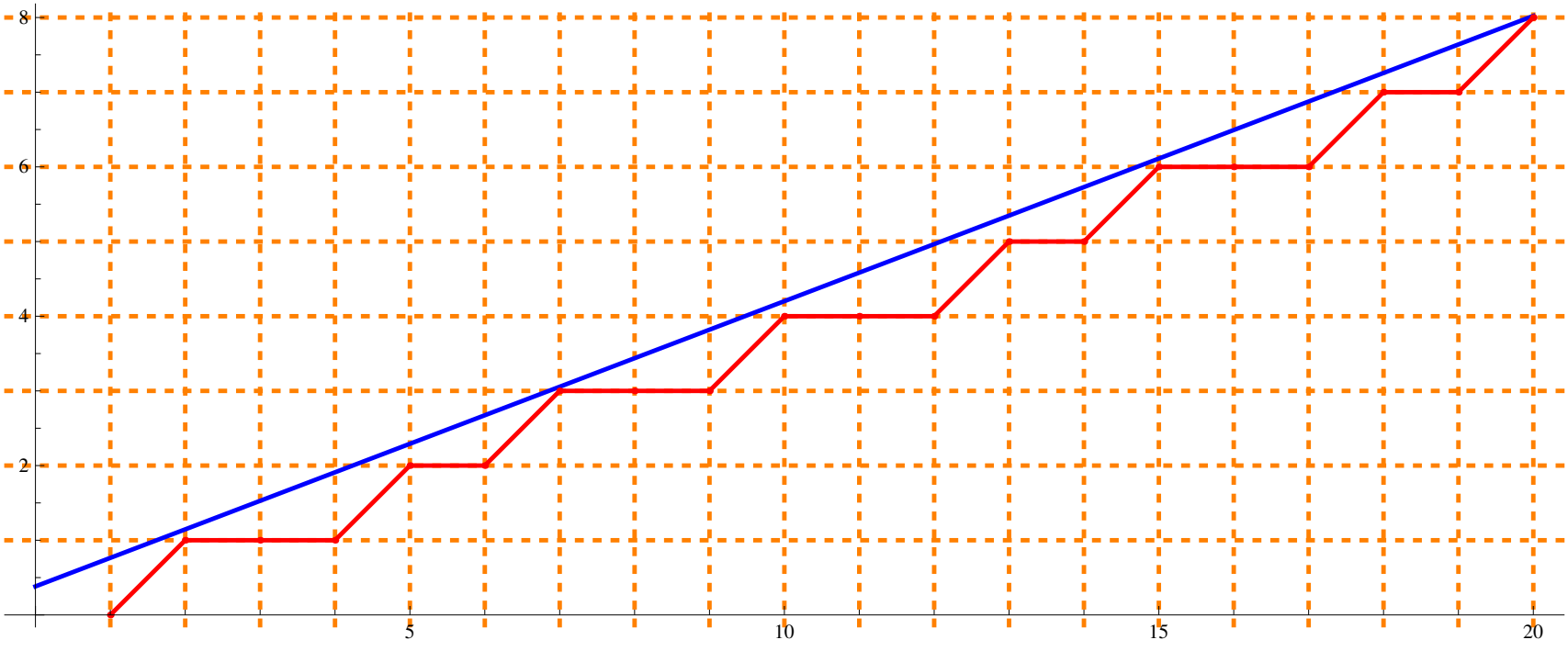
Tout “bon” exposé de combinatoire des mots se doit de parler

- du mot de Thue–Morse
- du mot de Fibonacci abaababaabaababaa$\cdots$



En guise de conclusion

Discrétisation de droites (pente irrationnelle)

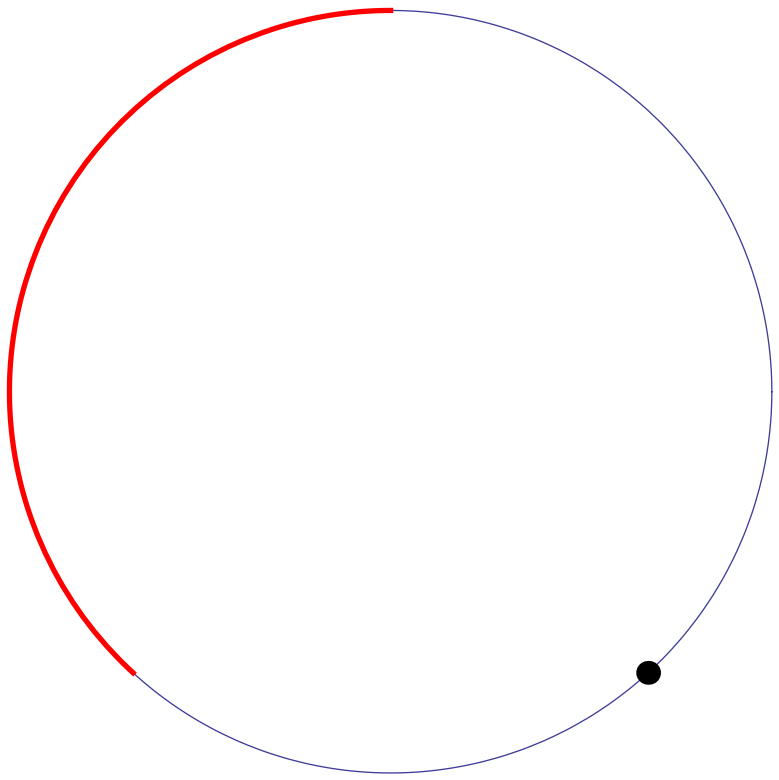


abaababaabaababaababaabaababaababaabaababab···

En guise de conclusion

Réalisation de systèmes dynamiques discrets

$\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z},\ R : \mathbb{T} \to \mathbb{T},\ x \mapsto x + \alpha \pmod 1$

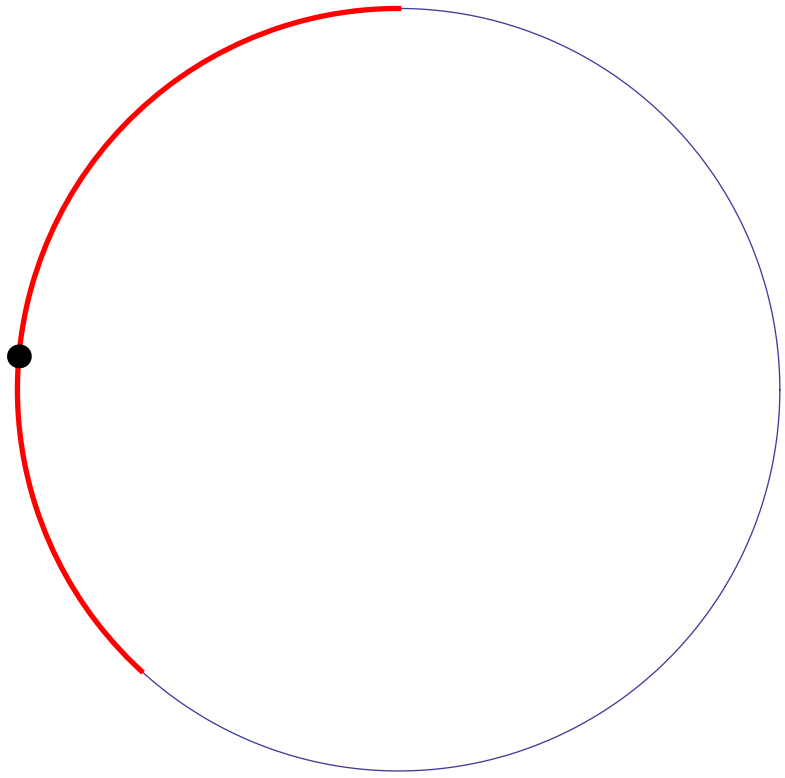


$I_{\mathsf{a}} = [0, 1-\alpha[,\ I_{\mathsf{b}} = [1-\alpha, 1[,\ \mathsf{a}$

En guise de conclusion

Réalisation de systèmes dynamiques discrets

$\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z},\ R : \mathbb{T} \to \mathbb{T},\ x \mapsto x + \alpha \pmod 1$

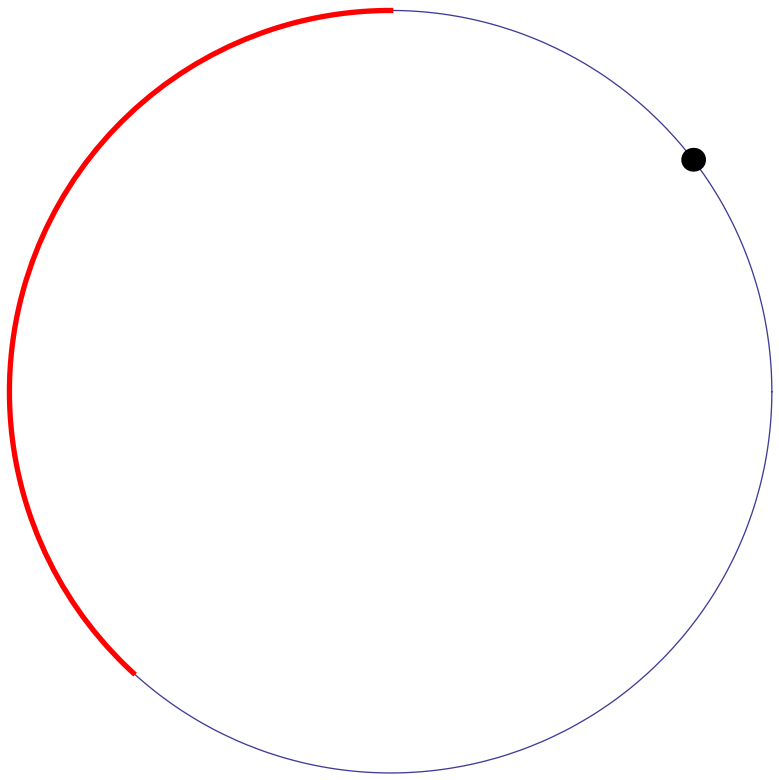


$I_{\mathtt{a}} = [0, 1-\alpha[,\ I_{\mathtt{b}} = [1-\alpha, 1[,\ \mathtt{ab}$

En guise de conclusion

Réalisation de systèmes dynamiques discrets

$\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z},\ R : \mathbb{T} \to \mathbb{T},\ x \mapsto x + \alpha \pmod 1$

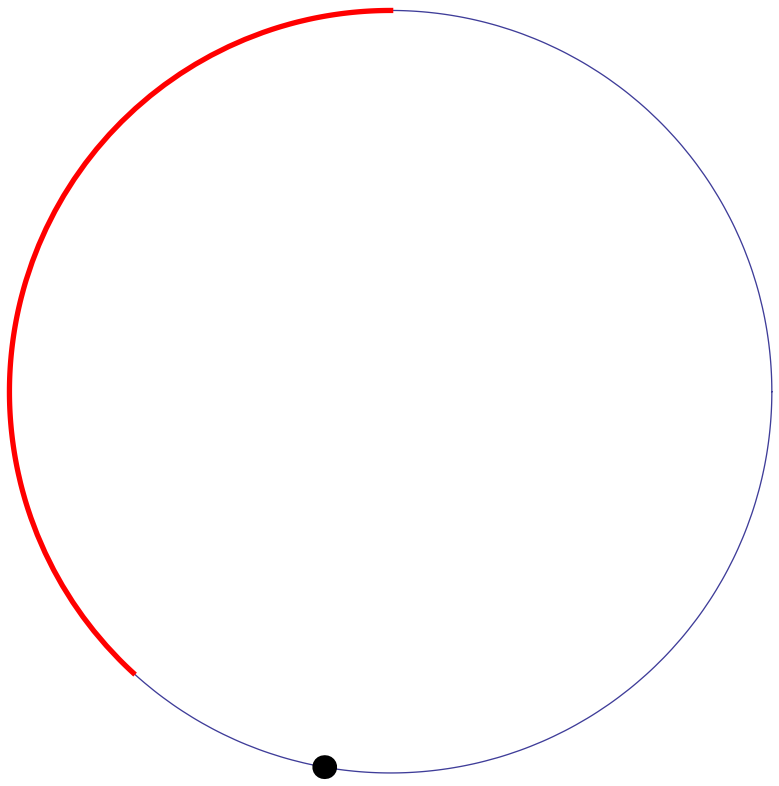


$I_{\mathtt{a}} = [0, 1-\alpha[,\ I_{\mathtt{b}} = [1-\alpha, 1[,\ \mathtt{aba}$

En guise de conclusion

Réalisation de systèmes dynamiques discrets

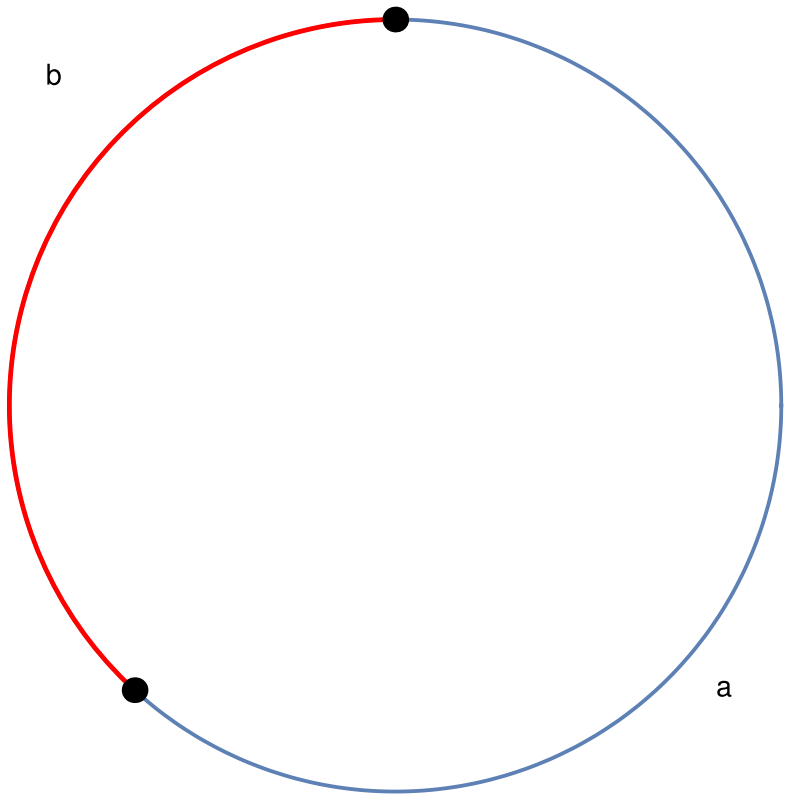
$\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z},\ R : \mathbb{T} \to \mathbb{T},\ x \mapsto x + \alpha \pmod 1$



$I_{\mathtt{a}} = [0, 1-\alpha[,\ I_{\mathtt{b}} = [1-\alpha, 1[,\ \mathtt{abaa}$

En guise de conclusion

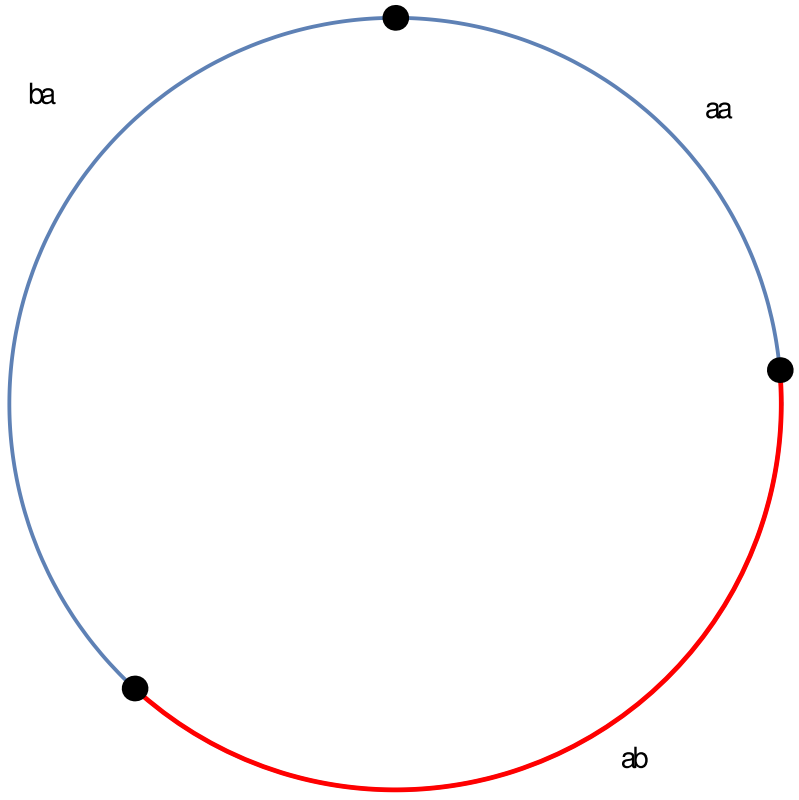
I_b



I_a, I_b

En guise de conclusion

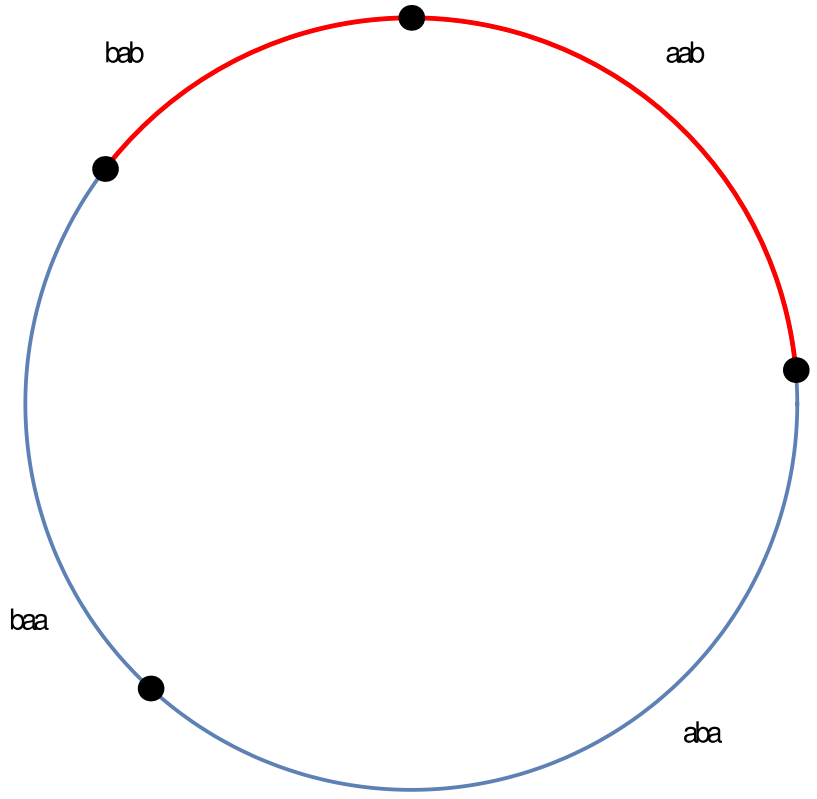
$R^{-1}(I_{\mathtt{b}})$



$I_{\mathtt{a}} \cap R^{-1}(I_{\mathtt{a}}),\ I_{\mathtt{a}} \cap R^{-1}(I_{\mathtt{b}}),\ I_{\mathtt{b}} \cap R^{-1}(I_{\mathtt{a}})$

En guise de conclusion

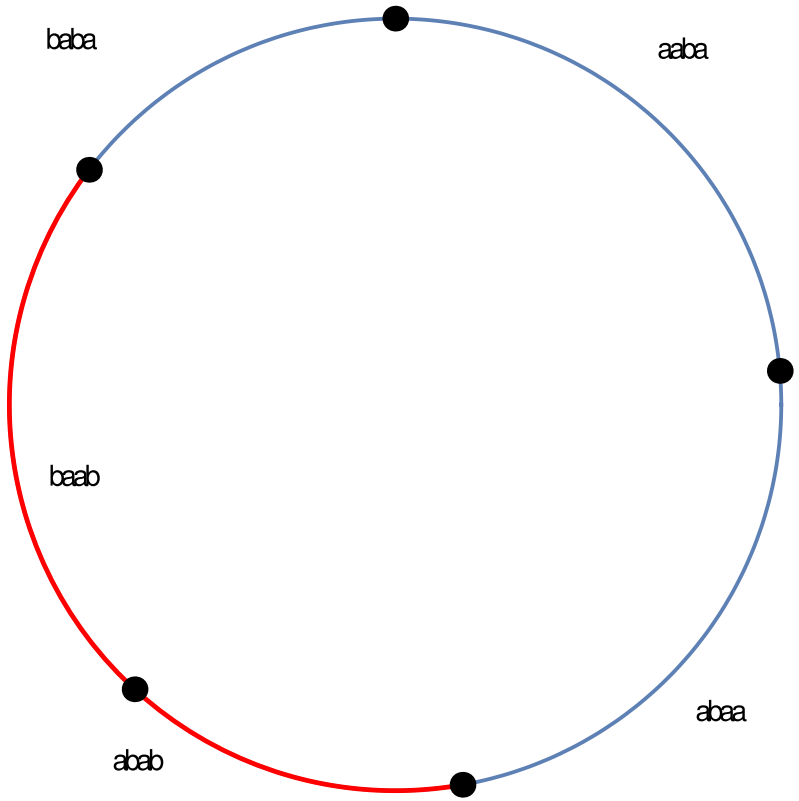
$R^{-2}(I_{\mathsf{b}})$



$I_{\mathsf{a}} \cap R^{-1}(I_{\mathsf{a}}) \cap R^{-2}(I_{\mathsf{b}})$, $I_{\mathsf{a}} \cap R^{-1}(I_{\mathsf{b}}) \cap R^{-2}(I_{\mathsf{a}})$,
$I_{\mathsf{b}} \cap R^{-1}(I_{\mathsf{a}}) \cap R^{-2}(I_{\mathsf{a}})$, $I_{\mathsf{b}} \cap R^{-1}(I_{\mathsf{a}}) \cap R^{-2}(I_{\mathsf{b}})$

En guise de conclusion

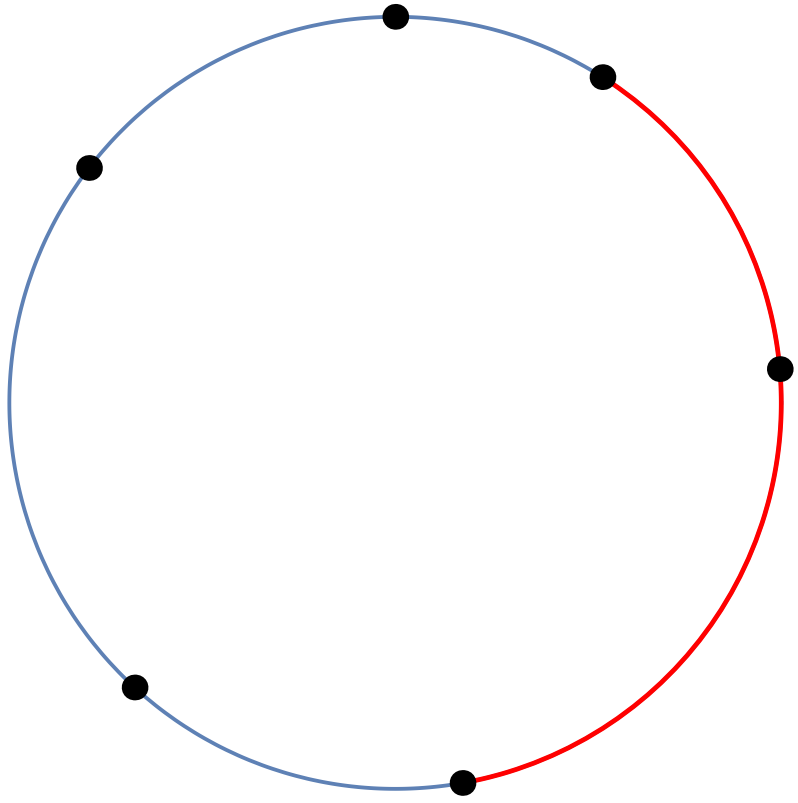
$R^{-3}(I_{\mathtt{b}})$



$I_{aab} \cap R^{-3}(I_{\mathtt{a}}),\ I_{aba} \cap R^{-3}(I_{\mathtt{a}}),\ I_{aba} \cap R^{-3}(I_{\mathtt{b}})$
$I_{baa} \cap R^{-3}(I_{\mathtt{b}}),\ I_{bab} \cap R^{-3}(I_{\mathtt{a}})$

En guise de conclusion

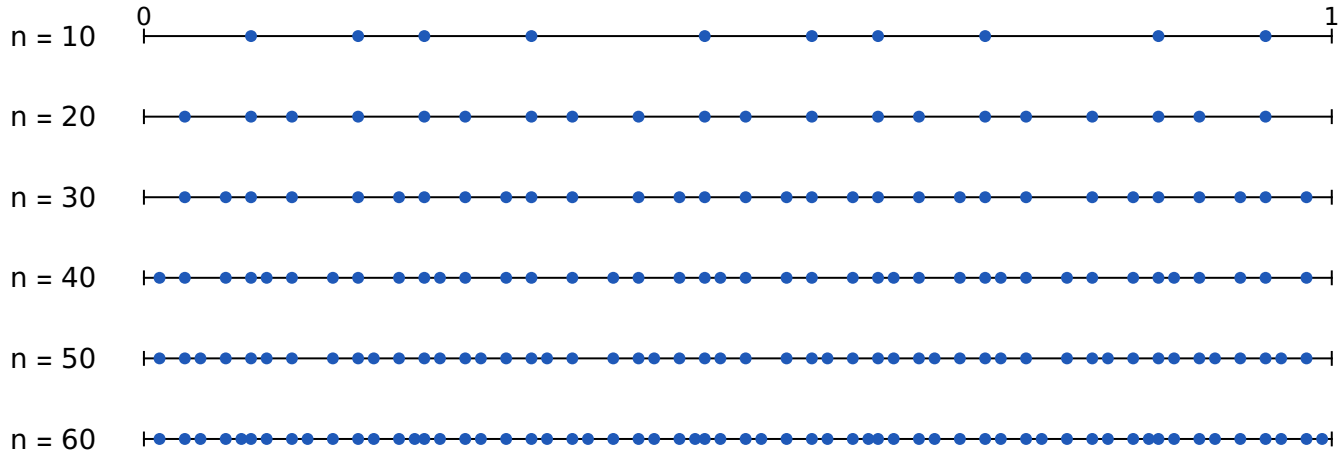
$R^{-4}(I_{\mathtt{b}})$



I_{aabaa}, I_{aabab}, I_{abaab},
I_{ababa}, I_{baaba}, I_{babaa}

En guise de conclusion

Théorème de Kronecker : si α est irrationnel, l'ensemble des $\{n\alpha\}$, $n \in \mathbb{N}$, est dense dans $[0, 1]$.



Théorème d'équidistribution (Weyl 1916)

Soient $0 < a < b < 1$. Si α est irrationnel, alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\#\{k < n \mid a < \{k\alpha\} < b\}}{n} = b - a\,.$$

En guise de conclusion

Les *mots sturmiens* sont caractérisés de multiples façons

- complexité $\mathsf{p}(n) = n + 1$ (minimale)
- mots mécaniques de pente irrationnelle
- codage de rotations
- mots apériodiques et *équilibrés*,

$$\forall u, v \in \mathsf{Fac}_n, \quad -1 \leq |u|_a - |v|_a \leq 1.$$

cf. aussi les suites de Beatty

$$\lfloor (n+1)\varphi \rfloor - \lfloor n\varphi \rfloor$$

En guise de conclusion

Sur quoi est-ce que je travaille actuellement ?

$$\binom{u}{v} = \#\{i_1 < \cdots < i_{|v|} \mid u_{i_1} \cdots u_{i_{|v|}} = v\}.$$

$$\binom{abbab}{ab} = 4$$

- M. Stipulanti, Extensions of the Pascal triangle to words, and related counting problems (2019)
- M. Lejeune, On the k-binomial equivalence of finite words and k-binomial complexity of infinite words (2021)
- M. Golafshan, Binomial coefficients of words and multidimensional arrays (2026)
- A. Renard, TBA (2027)

En guise de conclusion

$$\binom{u\,a}{v\,b} = \binom{u}{v\,b} + \delta_{a,b}\binom{u}{v\,b}$$

$$\binom{m+1}{n+1} = \binom{m}{n+1} + \binom{m}{n}$$

$$\binom{uv}{w} = \sum_{w=w_1\,w_2} \binom{u}{w_1}\binom{v}{w_2}$$

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{p=p_1+p_2} \binom{m}{p_1}\binom{n}{p_2}$$

Un problème ouvert

Le mot d'Oldenburger–Kolakoski

$$122112122122112112212112122 11\cdots$$

$$1^{1}2^{2}1^{2}2^{1}1^{1}2^{2}1^{1}2^{2}1^{2}\cdots$$