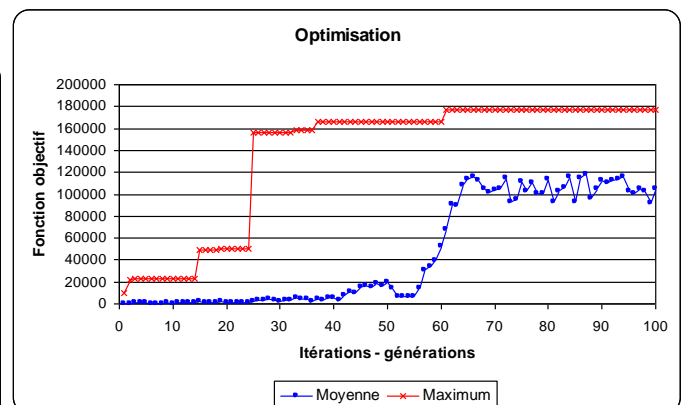
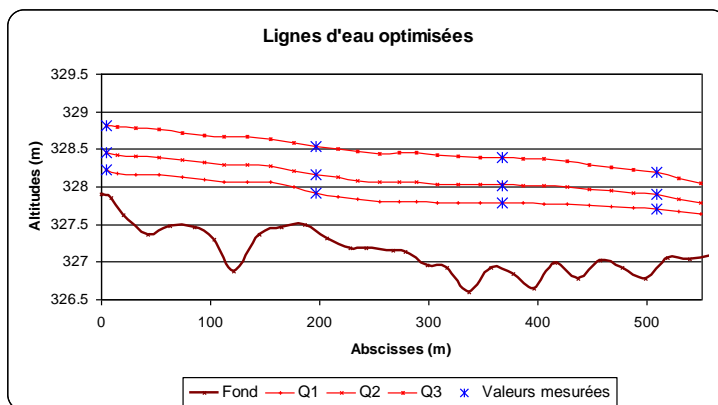
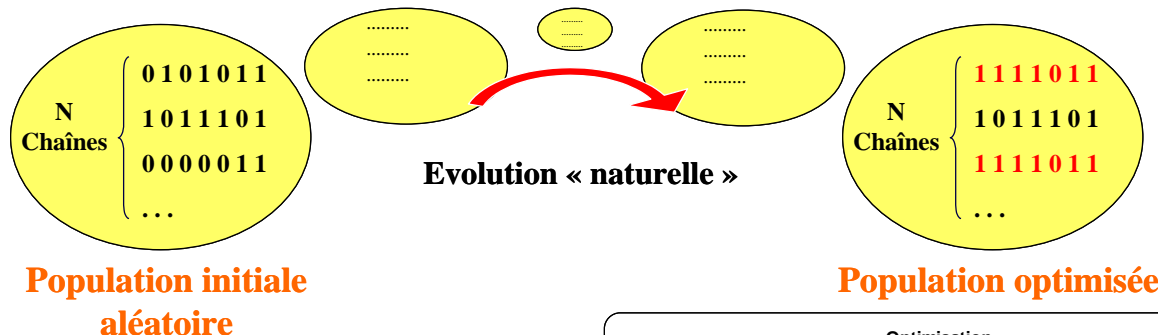


APPLICATION DES ALGORITHMES GENETIQUES AUX PROBLEMES D'OPTIMISATION EN HYDRODYNAMIQUE DE SURFACE

Sébastien ERPICUM



Ce travail a été réalisé au sein des Laboratoires de Mécanique des Fluides, d'Hydrodynamique Appliquée et des Constructions Hydrauliques des Professeurs A.G.H. Lejeune et M. Piroton. Je tiens ici à les remercier pour leur accueil et leur aide.

J'aimerais plus spécifiquement exprimer ma gratitude au Professeur M. Piroton, qui m'a poussé vers le sujet ardu de l'optimisation, et à ses assistants P. Archambeau et Th. Mouzelard. L'atmosphère de travail détendue mais efficace qu'ils ont la faculté de créer dans les bureaux du Service est en effet à la base de la réussite de ce mémoire au même titre que leurs idées et conseils avisés.

Je tiens également à remercier Mme A-M Habraken (Ulg) et M Diericks (MET) qui ont accepté d'être membres du jury.

Je ne saurais oublier ici ma famille et mes proches mais surtout Marie qui a su me supporter tout au long de la réalisation de ce travail.

Merci à tous ...

Mémoire présenté par **Sébastien ERPICUM** en vue de l'obtention du Diplôme d'Etudes
Approfondies en Sciences Appliquées

**APPLICATIONS DES ALGORITHMES GENETIQUES AUX PROBLEMES D'OPTIMISATION EN
HYDRODYNAMIQUE DE SURFACE**

Le but de ce travail est de montrer l'applicabilité des méthodes génétiques aux problèmes d'optimisation rencontrés en modélisation numérique des écoulements de surface.

Après un rappel des équations de l'hydraulique de surface et de la méthode de discrétisation spatiale par volumes finis à la base de leur résolution numérique, le logiciel de calcul unidimensionnel des écoulements Wolf1D du HACH, logiciel utilisé par la suite, est présenté.

Les algorithmes génétiques d'optimisation sont ensuite introduits avant de décortiquer leur méthodologie de fonctionnement et les différentes opérations qu'ils effectuent.

Un algorithme génétique simple et robuste est alors écrit de façon à pouvoir être utilisé conjointement avec n'importe quel logiciel de calcul hydrodynamique de la suite Wolf.

Après une rapide étude de la précision maximale que l'on est en droit d'attendre de la méthode, une première application à la détermination des débits en rivière à partir des seules mesures de hauteur d'eau est effectuée de façon à tester différentes configurations du logiciel.

Des essais sont menés avec succès par ordre croissant de difficulté pour déterminer la valeur de 2, 4 ou 6 paramètres.

Le logiciel est alors appliqué à la détermination de la valeur optimale du coefficient de frottement d'un réseau de rivières, à la maximisation du profit généré par un ensemble de centrales hydroélectriques au fil de l'eau ainsi qu'à l'optimisation des paramètres régissant l'écoulement hydrologique d'un bassin versant (application du logiciel WolfHydro).

Dans tous les cas, les résultats sont excellents, l'algorithme génétique atteignant un optimum qui n'est pas mis en défaut par des algorithmes d'optimisation classiques efficaces.

La première approche des problèmes d'optimisation en hydraulique de surface à l'aide des algorithmes génétiques que représente ce travail semble donc prometteuse. Elle ouvre des portes à toute une série d'applications d'avenir qui ne manqueront pas d'être intéressantes.

I PRESENTATION.....I-5

II APPROCHE THEORIQUE DE L'HYDRAULIQUE DE SURFACE II-7

II.1 CONSIDERATIONS DE BASE II-7

II.1.1 EQUATIONS FONDAMENTALES DE L'HYDRAULIQUE II-7

II.1.2 LA TURBULENCE II-7

II.1.3 RESOLUTION NUMERIQUE II-8

II.1.4 MÉTHODE DE LA MOYENNE DE REYNOLDS II-8

II.2 INTEGRATION DES EQUATIONS SUR LA SECTION MOUILLEE II-10

II.2.1 BUT..... II-10

II.2.2 DEMARCHE II-11

II.2.3 PASSAGE EN ADIMENSIONNEL II-12

II.2.4 CONDITIONS AUX BORNES D'INTEGRATION..... II-14

II.2.5 INTEGRATION SUR LA SECTION..... II-15

II.2.5.1 Intégration sur la largeur locale II-16

II.2.5.1.1 Conditions cinématiques..... II-17

II.2.5.1.2 Conditions dynamiques..... II-17

II.2.5.2 Intégration sur la profondeur locale..... II-19

II.2.5.2.1 Conditions cinématiques..... II-19

II.2.5.2.2 Conditions dynamiques..... II-20

II.2.5.3 Forme classique des équations..... II-20

II.2.5.4 Coefficient d'inégale répartition de vitesse II-21

II.2.5.4.1 Profils de vitesse en mouvement permanent..... II-21

II.2.5.4.2 Profils de vitesse en mouvement instationnaire..... II-22

II.2.5.5 Contribution S_x des contraintes normales à la section II-23

II.2.5.6 Introduction des apports extérieurs..... II-24

II.2.5.7 Fermeture du système II-24

II.2.5.8 Formulation non conservative II-25

II.2.6 COMMENTAIRES ET CONCLUSIONS SUR LES SIMPLIFICATIONS DES EQUATIONS II-26

III DISCRETISATION SPATIALE PAR VOLUMES FINIS.....III-29

III.1	INTRODUCTION.....	III-29
III.2	VOLUMES FINIS : DIFFERENTES FAMILLES	III-29
III.3	PRINCIPE DE LA METHODE	III-31
III.4	ORDRE DE PRECISION DE LA METHODE DES VOLUMES FINIS	III-32
III.4.1	ORDRE DE PRECISION DE LA DISCRETISATION DU TERME INSTATIONNAIRE	III-32
III.4.2	ORDRE DE PRECISION DE LA DISCRETISATION DU TERME CONVECTIF	III-33
III.4.2.1	Introduction	III-33
III.4.2.2	Ordre de précision du schéma irréaliste	III-34
III.4.2.3	Ordre de précision du schéma réel	III-35
III.5	RECONSTRUCTION DES VARIABLES CONSERVATIVES SUR LES ARETES.....	III-37
III.5.1	INTRODUCTION	III-37
III.5.2	RECONSTRUCTION CONSTANTE	III-37
III.5.3	RECONSTRUCTION LINEAIRE	III-38
III.5.4	GENERATION DES OPERATEURS DE DERIVEES PREMIERES	III-38

IV LE LOGICIEL WOLF1D.....IV-41

IV.1	SYSTEME D'EQUATIONS ET SCHEMA DE RESOLUTION.....	IV-41
IV.2	GESTION NUMERIQUE DES APPORTS LATERAUX.....	IV-41
IV.3	GESTION DES CONFLUENCES	IV-41
IV.4	CHOIX DU PAS DE TEMPS	IV-41
IV.5	EVALUATION DES TERMES DE FROTTEMENT	IV-42
IV.6	DONNEES.....	IV-43

V LES ALGORITHMES GENETIQUES.....V-45

V.1	INTRODUCTION.....	V-45
V.2	LES PARAMETRES.....	V-47
V.2.1	CODAGE	V-47
V.2.2	CONSTRAINTES.....	V-48
V.2.2.1	Intervalle de variation des paramètres	V-48
V.2.2.2	Contraintes sur les combinaisons de paramètres	V-49

V.3	EVOLUTION DES POPULATIONS.....	V-51
V.3.1	SELECTION NATURELLE	V-51
V.3.2	CROISEMENT	V-52
V.3.3	MUTATION.....	V-53
V.3.4	MEMOIRE DU MAXIMUM	V-54
V.3.5	INVERSION	V-54
V.4	FONCTION OBJECTIF	V-55
V.4.1	GENERALITES	V-55
V.4.2	TRANSFORMATIONS DES FONCTIONS A OPTIMISER	V-56
V.4.3	RETRAITEMENT DE LA FONCTION OBJECTIF	V-57
V.4.4	FONCTION OBJECTIF GLOBALE OU LOCALE	V-60
V.5	STRUCTURE DE L'AG.....	V-61
V.6	CONNEXION AG – PROGRAMMES DE CALCUL	V-62
<u>VI</u>	<u>TESTS ET APPLICATIONS.....</u>	<u>VI-64</u>
VI.1	INTRODUCTION	VI-64
VI.2	TESTS DES DIFFERENTES CONFIGURATIONS DE L'AG.....	VI-65
VI.2.1	L'OURTHE A HOUFFALIZE	VI-65
VI.2.2	PARAMETRES DE L'AG	VI-66
VI.2.3	PRECISION DE LA METHODE	VI-67
VI.2.4	ERREUR SUR LES DONNEES.....	VI-69
VI.2.5	OPTIMISATION DE 2 PARAMETRES	VI-71
VI.2.5.1	Données générales.....	VI-71
VI.2.5.2	Effet du retraitement de la fonction objectif	VI-72
VI.2.5.3	Types de croisement.....	VI-75
VI.2.5.4	Effet de la mémoire du maximum.....	VI-76
VI.2.5.5	Effet de l'inversion.....	VI-77
VI.2.5.6	Nombre de générations et de chaînes	VI-78
VI.2.5.7	Conclusions	VI-79
VI.2.6	OPTIMISATION COUPLEE DE PLUSIEURS PARAMETRES	VI-82
VI.2.6.1	Données	VI-82
VI.2.6.2	Fonction objectif globale.....	VI-82
VI.2.6.3	Fonction objectif locale	VI-83

VI.2.6.4	Conclusions	VI-85
VI.2.7	OPTIMISATION DE 6 PARAMETRES	VI-87
VI.2.8	CONCLUSIONS	VI-88
VI.3	OPTIMISATION DE PRODUCTION HYDROELECTRIQUE.....	VI-88
VI.3.1	INTRODUCTION	VI-88
VI.3.2	COEFFICIENT DE FROTTEMENT DU RESEAU.....	VI-89
VI.3.3	TURBINAGE.....	VI-91
VI.3.3.1	Données et fonction objectif	VI-91
VI.3.3.2	Résultats	VI-92
VI.4	APPLICATION HYDROLOGIQUE : LE BASSIN DE MATTMARK (SUISSE).....	VI-94
VI.4.1	INTRODUCTION	VI-94
VI.4.2	PRESENTATION DU LOGICIEL WOLFHYDRO	VI-94
VI.4.3	LE BASSIN SUISSE DE MATTMARK.....	VI-96
VI.4.4	OPTIMISATION	VI-98
<u>VII</u>	<u>CONCLUSIONS.....</u>	<u>VII-101</u>
<u>VIII</u>	<u>BIBLIOGRAPHIE.....</u>	<u>VIII-103</u>

I PRESENTATION

Les problèmes d'optimisation sont nombreux et variés en hydraulique de surface.

Certains coefficients présents dans les équations proviennent d'expériences et de formules empiriques, et leur valeur est à évaluer au cas par cas en fonction des caractéristiques de la rivière et de l'écoulement. Par exemple, les coefficients de frottement, dont la valeur a une grande influence sur les résultats du calcul des écoulements hydrologiques ou en rivière, ne sont pas calculables directement. Le problème est le même avec les coefficients d'inégale répartition de vitesse dans les logiciels de calcul uni- ou bi-dimensionnel.

Un autre problème d'optimisation est celui de la détermination du débit d'un cours d'eau. Les méthodes classiques font appel à des courbes de tarage qui offrent une relation supposée univoque entre la hauteur d'eau en une section et le débit. Ces courbes étant établies pour des débits faibles (pour lesquels les mesures sur le terrain sont possibles), leur utilisation pour évaluer les débits de crue reste sujette à l'extrapolation des données. Elles ne tiennent également pas compte des phénomènes d'hystérésis que l'on observe sur les courbes hauteur/débit lors des crues et décrues. Cela peut conduire à des erreurs assez importantes sur l'évaluation de l'importance des crues avec toutes les conséquences que cela suppose en terme de gestion de celles-ci. Grâce aux développements récents de logiciels de calcul des écoulements physiquement basés, fiables et performants, une toute autre approche peut-être envisagée : à partir de données sous forme de hauteurs d'eau relevées sur site, quel est le débit qui permet de fournir la ligne d'eau calculée la plus proche de la ligne d'eau réelle ? Ce problème de calage inverse de paramètres est un problème type d'optimisation en hydraulique, la recherche du débit optimum étant souvent couplée à celle de la valeur du coefficient de frottement de la rivière.

Enfin, toute une série d'applications des logiciels de calcul d'écoulement disponibles actuellement, tels ceux développés au sein du Laboratoire d'Hydraulique Appliquée et des Constructions Hydrauliques (HACH) de l'Université de Liège, génèrent des problèmes d'optimisation plus ou moins complexes.

Dans ce travail, on a cherché à développer un algorithme d'optimisation robuste, simple et fiable, qui permette d'aborder un grand nombre de problèmes totalement différents avec la même efficacité, et ce afin de pouvoir l'utiliser, à terme, avec n'importe lequel des logiciels de modélisation des écoulements de la suite WOLF du HACH.

Les critères de robustesse et de simplicité nous ont poussé à utiliser les algorithmes génétiques d'optimisation, algorithmes développés par John Holland et ses collaborateurs à l'université du Michigan et validés pour les applications d'optimisation de fonctions et de contrôle par un grand nombre d'articles et de thèses de doctorat.

Vu l'ampleur du travail, ce mémoire n'est qu'une première approche destinée à prouver l'applicabilité de ces algorithmes aux problèmes précités ainsi qu'à dégrossir la recherche d'une configuration efficace de la méthode dont les variantes sont nombreuses.

Tout essai d'optimisation de la valeur des paramètres des équations de l'hydraulique passe en premier lieu par une bonne compréhension de ces dernières et nécessite une méthode efficace permettant de les résoudre dans de nombreux cas de figure.

C'est pourquoi les premiers chapitres de ce travail présentent les équations théoriques de l'hydraulique de surface ainsi qu'une méthode de discrétisation spatiale adéquate pour leur résolution numérique, ce que fait de façon efficace le logiciel Wolf1D du Laboratoire d'Hydrodynamique Appliquée et des Constructions Hydrauliques de l'Université de Liège présenté au chapitre IV.

Ce n'est qu'alors que les algorithmes génétiques d'optimisation sont présentés et que les opérateurs qu'ils utilisent sont analysés (Chapitre V).

Toute une série de tests permet de déterminer une configuration optimale de l'algorithme pour les problèmes envisagés. C'est le sujet du chapitre VI qui présente également plusieurs applications originales.

Des conclusions sur l'applicabilité de la méthode terminent ce travail (Chapitre VII).

II APPROCHE THEORIQUE DE L'HYDRAULIQUE DE SURFACE

II.1 CONSIDERATIONS DE BASE

II.1.1 Equations fondamentales de l'hydraulique

Soit un fluide incompressible et de viscosité dynamique μ constante. Les équations hydrauliques de base s'écrivent, pour un volume V de ce fluide en mouvement

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div} \vec{u} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \text{div} u_i \vec{u} = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{II-1} \\ \text{II-2} \end{array}$$

où

- u représente la vitesse des particules fluides,
- u_i ($i = 1$ à 3) sont ses composantes selon les 3 axes,
- F la force de gravité,
- p la pression,
- ρ la masse volumique du fluide,
- ν la viscosité cinématique.

Ces équations sont appelées équations de Navier-Stokes. Elles résultent de l'application au volume de fluide des deux principes fondamentaux de conservation de la masse et de conservation de la quantité de mouvement.

Le système des équations II-1 et II-2 est un système fermé en les 4 inconnues u_i et p .

II.1.2 La turbulence

La mise en évidence de la turbulence par Reynolds (1883) montra la nature rotationnelle de l'écoulement turbulent, c'est-à-dire de l'écoulement dont le nombre de Reynolds, qui est une mesure de son état de "déstabilisation", autrement dit de turbulence,

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu} \quad \text{II-3}$$

est supérieur à +/- 1000.

Cet écoulement se compose d'une multitude de vortex dont les vecteurs directeurs sont alignés dans toutes les directions, ce qui en fait un mouvement tri-dimensionnel.

Physiquement, les grands tourbillons, associés aux faibles fréquences de fluctuation, sont de l'ordre de grandeur du domaine d'écoulement. Ils sont donc anisotropes, car influencés par les conditions aux limites. A l'inverse, les petits tourbillons, associés aux grandes fréquences, sont déterminés par les forces visqueuses et sont isotropes.

C'est principalement le mouvement turbulent à grande échelle qui transporte la quantité de mouvement. Il est très peu dissipatif, interagit avec l'écoulement moyen et a tendance à propager les fluctuations de l'écoulement, au contraire du mouvement turbulent à faible échelle qui interagit avec les forces de viscosité et est donc très dissipatif.

Mais ces deux états d'écoulement sont en intime relation : afin de transformer l'énergie cinétique des mouvements à grande échelle en énergie thermique (dissipation par les mouvements de faible amplitude), les échelles interagissent par un processus appelé "cascade d'énergie". Pendant la cascade, l'énergie cinétique des grandes structures est transformée, presque sans dissipation, en énergie cinétique de petites structures. Toutes les échelles intermédiaires sont alors excitées, et ceci grâce à la non-linéarité des équations de Navier-Stokes. Finalement, l'énergie cinétique emmagasinée dans les petites structures est convertie en chaleur par les forces visqueuses.

II.1.3 Résolution numérique

La résolution sous leur forme originale des équations de Navier-Stokes (modélisation directe), qui est une méthode a priori simple à appliquer puisqu'elle ne nécessite aucun retraitement des équations, souffre cependant d'un grave défaut la rendant inutilisable en pratique dans la majorité des écoulements rencontrés. En effet, l'utilisation des équations de base induit que tous les phénomènes turbulents seront modélisés, du plus important au plus infime tourbillon. Ce qui signifie qu'à la fois les mailles du grid et le pas de temps devront être suffisamment petits pour capturer correctement les plus petites caractéristiques d'écoulement.

Pratiquement, cette méthode est donc limitée à la résolution de calculs d'écoulements peu turbulents, ce qui limite fortement son domaine d'utilisation, à l'heure actuelle du moins.

C'est pourquoi d'autres méthodes ont été développées, et notamment la méthode de la moyenne de Reynolds ou Reynolds-Averaged Navier-Stokes simulations (RANS).

II.1.4 Méthode de la moyenne de Reynolds

Une des plus importantes propriétés d'un écoulement turbulent est son apparente nature aléatoire (Figure II-1). Cependant, il est en général inutile voire peu pratique d'obtenir la description précise de l'état d'écoulement du fluide.

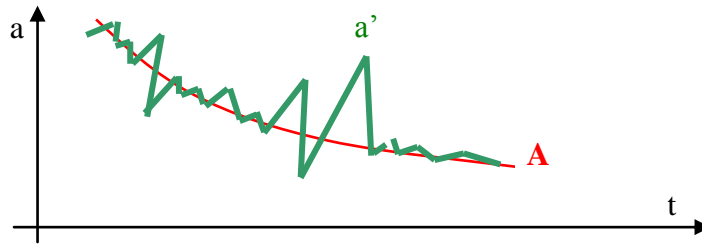


Figure II-1 : Structure aléatoire des variables d'écoulement

L'idée de la moyenne de Reynolds est de décomposer chaque variable en une composante moyennée A et une fluctuation a'' (II-4).

$$a = A + a''$$

$$A = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} a \, dt \quad \text{II-4}$$

La composante moyenne est obtenue par intégration sur un temps Δt suffisant pour excéder l'échelle temporelle des variations erratiques les plus lentes de la propriété étudiée (*aspect temporel de l'intégration*), mais également faible par rapport à l'échelle de temps de l'écoulement moyen. Par ailleurs, on peut considérer l'intégration comme une moyenne des variations de la propriété sur un grand nombre d'expériences identiques (*aspect probabiliste de l'intégration*).

Pour obtenir les équations moyennées de Navier-Stokes, il faut les intégrer selon ce même principe, compte tenu des propriétés de la décomposition de Reynolds décrites ci-dessous :

$$\overline{a''} = \int_0^{\Delta t} a'' \, dt = 0 \quad \text{par définition} \quad \text{II-5}$$

$$\overline{\text{div} \vec{a}} = \text{div} \vec{A} \quad \text{II-6}$$

$$\overline{\text{div} \vec{b} a''} = \text{div} \vec{B} \vec{A} + \text{div} \vec{b}'' \vec{a}'' \quad \text{II-7}$$

Le système des équations II-1 et II-2 s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \end{array} \right. \quad \text{II-8}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j u_i) = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \end{array} \right. \quad \text{II-9}$$

où

- u_i et p représentent désormais des valeurs moyennes, éventuellement « complexes »,
- σ_{ij} est un terme général qui reprend les tensions laminaires et/ou turbulentes.

II.2 INTEGRATION DES EQUATIONS SUR LA SECTION MOUILLEE

II.2.1 But

La résolution du système d'équations complet II-8 et II-9 s'avère encore souvent prohibitive en temps de calcul. Deux approches sont alors possibles pour simplifier les écritures sans perdre trop d'information sur l'écoulement :

- dans l'optique de la modélisation d'écoulements à échelle quasi-horizontale grande comparativement à la profondeur caractéristique, l'effort de calcul peut être réduit en simplifiant une équation et en procédant par intégration des processus sur la hauteur. De 4 inconnues de base (3 vitesses, 1 pression), on passe à 3 inconnues intégrées (2 débits, 1 pression ou, par relation univoque, 1 hauteur). Cette simplification ne s'obtient impunément puisqu'on ne conserve qu'une connaissance faible selon la direction intégrée, ce qu'explique l'appellation de modèle quasi-tridimensionnel. De plus, la fermeture des équations ne s'obtient qu'au prix d'hypothèses de répartition des inconnues selon l'axe d'intégration, hypothèses qui doivent être analysées au moment de l'interprétation des résultats.

L'objectif de cette intégration sur la hauteur est de proposer un « compromis mathématique » adapté pour :

- modéliser les écoulements de surface, y compris les réservoirs naturels et artificiels, les écoulements en faible lame, les réseaux navigables ou non, ...
- gérer l'alimentation en eau industrielle ou potable, la production d'énergie, les apports naturels et artificiels dans les réseaux navigables (étiages et crues), les ouvrages hydrauliques, ...
- l'étude des cours d'eau dans leur ensemble et la gestion des réseaux hydrographiques ne nécessitent généralement pas la connaissance détaillée de l'écoulement dans la direction perpendiculaire à l'axe principal d'écoulement. On peut alors chercher à obtenir une forme unidimensionnelle aussi générale que possible des équations d'écoulement en les intégrant sur la section mouillée. C'est ce qui est fait ci-après.

II.2.2 Démarche

Le repère $oxyz$ est placé de manière telle (Figure II-2) que les axes ox et oy suivent la topographie moyenne de la rivière. Les angles θ_x , θ_y et θ_z utilisés dans les équations sont les angles entre l'axe oz' vertical et une perpendiculaire aux axes ox , oy et oz respectivement.

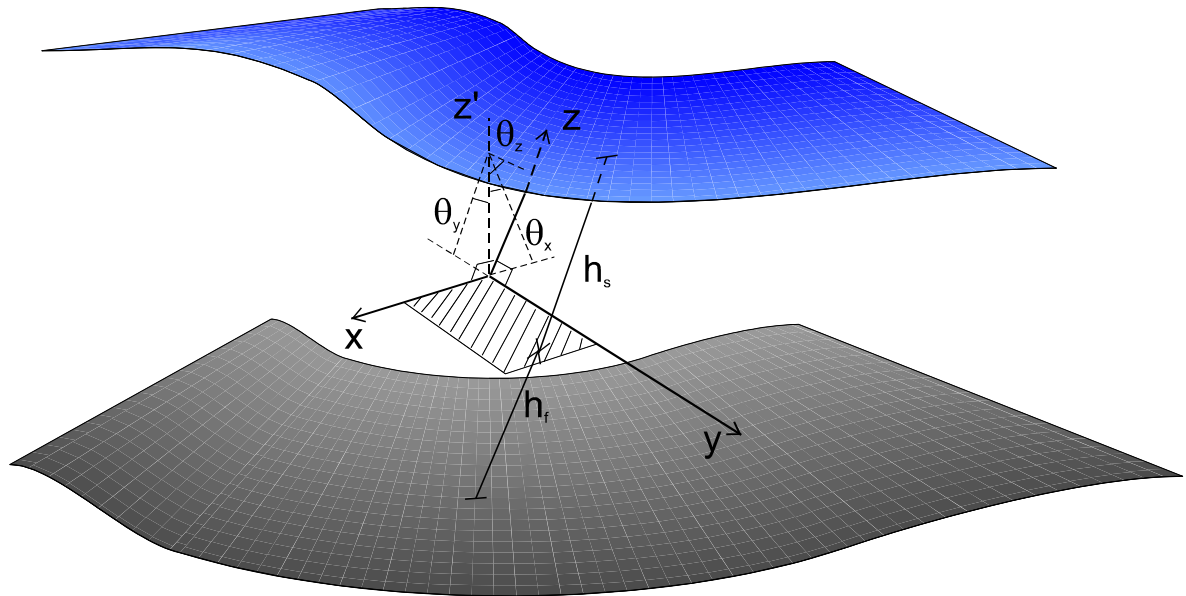


Figure II-2 : Définitions du système d'axes

Le système de départ (II-8 et II-9) se base sur un modèle macroscopique (choix de l'échelle de temps et d'espace caractéristique), avec les tensions visqueuses et turbulentes non explicitées, reprises dans le terme général σ_{ij} . Il tient compte de l'incompressibilité du fluide (non limitatif en écoulement à surface libre).

L'intégration s'effectuera en deux étapes :

- Un passage en adimensionnel sera réalisé pour analyser l'importance relative des termes des équations et pouvoir poser des hypothèses peu restrictives pour la gestion des écoulements de surface qui simplifient significativement les équations,
- Moyennant ces hypothèses, les équations prendront une forme « adaptée » à l'intégration proprement dite sur la section, simplifiée par une caractérisation du comportement du fluide aux bornes d'intégration.

II.2.3 Passage en adimensionnel

Afin d'intégrer sur la section les équations de quantité de mouvement, il est indispensable d'obtenir un découplage des différentes équations, par exemple en tirant d'une équation une information sur la distribution de pression. On définit pour ce faire des grandeurs caractéristiques qui vont permettre de rendre les équations adimensionnelles et de déterminer les termes prépondérants des équations d'Euler.

Soient :

- u_0, v_0, w_0 les vitesses caractéristiques selon chaque axe,
- l_0 une largeur caractéristique de la rivière qui affirme une certaine homogénéité des propriétés géométriques, soit du lit pour une propagation usuelle, soit de la vallée dans des cas exceptionnels.

On choisit u_0 comme vitesse caractéristique de l'écoulement, ce qui préfigure inévitablement le caractère unidimensionnel de l'écoulement selon une direction prédominante parallèle à l'axe x .

La comparaison des vitesses caractéristiques est définie par

$$\varepsilon'_i = \frac{u_0^i}{u_0} \quad \text{II-10}$$

Soit

$$\begin{aligned} \varepsilon'_x &= 1 \\ \varepsilon'_y &= \frac{v_0}{u_0} \\ \varepsilon'_z &= \frac{w_0}{u_0} \end{aligned} \quad \text{II-11}$$

Avec ces valeurs, on construit des longueurs caractéristiques selon les axes OX, OY et OZ en s'aidant du rapport des vitesses caractéristiques:

$$\lambda_i = \frac{l_0}{\varepsilon'_i} \quad \text{II-12}$$

avec $i = 1, 2, 3$ correspondant respectivement à x, y, z ; ainsi qu'un temps caractéristique

$$t_0 = \frac{\lambda_i}{u_i} = \frac{l_0}{v_0} \quad \text{II-13}$$

Les formes adimensionnelles des coordonnées et du temps peuvent alors s'écrire fort logiquement sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} x'_i &= \frac{x_i}{\lambda_i} \\ t' &= \frac{t}{t_0} = \frac{v_0}{l_0} . t \end{aligned} \quad \text{II-14}$$

L'écriture adimensionnelle des composantes de vitesse s'écrit :

$$\begin{aligned} u' &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{1}{u_0} \frac{dx}{dt} = \frac{u}{u_0} \\ v' &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{1}{v_0} \frac{dy}{dt} = \frac{v}{v_0} \\ w' &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{1}{w_0} \frac{dz}{dt} = \frac{w}{w_0} \end{aligned} \quad \text{II-15}$$

Enfin, on prend pour justifier la pression adimensionnelle l'axe principal d'écoulement ox le long duquel se développent essentiellement les gradients de pression :

$$p' = \frac{p}{\rho u_0^2} \quad \text{II-16}$$

Parallèlement à cette définition, la gravité adimensionnelle s'écrit

$$g' = g \frac{\lambda_z}{u_0^2} = g l_0 \frac{w_0}{u_0^2 v_0} \quad \text{II-17}$$

et pour la forme adimensionnelle des contraintes visqueuses:

$$\sigma'_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\rho u_0^i u_0^j} \quad \text{II-18}$$

En introduisant toutes ces relations dans les équations de base, on obtient après manipulation :

- pour la continuité :

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0 \quad \text{II-19}$$

- pour la quantité de mouvement selon ox

$$\begin{aligned} \varepsilon'_x \varepsilon'_y \left(\frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{\partial u' u'}{\partial x'} + \frac{\partial u' v'}{\partial y'} + \frac{\partial u' w'}{\partial z'} \right) &= \frac{\varepsilon'_y}{\varepsilon'_z} g' \sin \theta_x - \frac{\varepsilon'_y}{\varepsilon'_x} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \\ \varepsilon'_x \varepsilon'_y \left(\frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x'} + \frac{\partial \sigma'_{yx}}{\partial y'} + \frac{\partial \sigma'_{zx}}{\partial z'} \right) & \end{aligned} \quad \text{II-20}$$

- pour la quantité de mouvement selon oy

$$\varepsilon_y^2 \left(\frac{\partial v'}{\partial t'} + \frac{\partial v'u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'v'}{\partial z'} \right) = \frac{\varepsilon'_y}{\varepsilon'_z} g' \sin \theta_y - \frac{\partial p'}{\partial y'} + \varepsilon_y^2 \left(\frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial x'} + \frac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial y'} + \frac{\partial \sigma'_{zy}}{\partial z'} \right) \quad \text{II-21}$$

- pour la quantité de mouvement selon oz

$$\varepsilon'_z \varepsilon'_y \left(\frac{\partial w'}{\partial t'} + \frac{\partial w'u'}{\partial x'} + \frac{\partial w'v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'w'}{\partial z'} \right) = \frac{\varepsilon'_y}{\varepsilon'_z} g' \sin \theta_z - \frac{\varepsilon'_y}{\varepsilon'_z} \frac{\partial p'}{\partial z'} + \varepsilon'_z \varepsilon'_y \left(\frac{\partial \sigma'_{xz}}{\partial x'} + \frac{\partial \sigma'_{yz}}{\partial y'} + \frac{\partial \sigma'_{zx}}{\partial z'} \right) \quad \text{II-22}$$

La forme particulière des équations montre la voie à suivre pour réduire les dimensions du problème.

On suppose les termes $\varepsilon'_z \varepsilon'_y$, ε_y^2 , ε_z^2 petits vis-à-vis de l'unité, ce qui revient à supposer négligeable tout carré de vitesses perpendiculaires à l'axe principal par rapport au carré de celle parallèle à cet axe longitudinal.

Les équations (II-21 et II-22) trahissent une distribution de pression sur la section transversale uniquement influencée par l'effet gravitaire. Elles s'écrivent respectivement :

$$\frac{\partial p'}{\partial y'} = 0$$

$$\frac{\partial p'}{\partial z'} = -g' \cos \theta \quad \text{II-23}$$

en reprenant la même définition unidimensionnelle de θ avec des axes x, z contenus dans un plan vertical. Cette orientation classique montre la constance de la pression sur toute horizontale tracée dans une section transversale ainsi que la classique distribution hydrostatique de pression influencée par l'inclinaison de la direction principale du lit par rapport à l'horizontale.

Le raisonnement tenu dans ce paragraphe appelle quelques commentaires tant sur le fond que sur la forme. Ils sont développés plus loin, au paragraphe II.2.6.

II.2.4 Conditions aux bornes d'intégration

En toutes généralités, l'intégration des équations nécessite des conditions à imposer sur les frontières extérieures matérialisées par le fond, la surface libre et les berges de la rivière. Elles établissent des relations entre les valeurs des variables aux frontières qui apparaissent dans les équations.

Ces conditions sont de deux types :

- Il faut préciser d'abord le comportement du fluide aux frontières ? C'est à dire son mouvement relatif par rapport à elles, ce que l'on nomme conditions cinématiques,
- Il convient également d'établir des équilibres de forces à ces mêmes frontières. Ce sont les conditions dynamiques.

Ces conditions seront analysées au fur et à mesure de l'intégration des équations.

II.2.5 Intégration sur la section

Les simplifications réalisées en adimensionnel ne donnent pas encore une forme unidimensionnelle aux équations. Pour ce faire, la forme simplifiée des équations (II-20, II-21 et II-22) ramenées sous forme dimensionnelle doit subir une intégration sur la section mouillée.

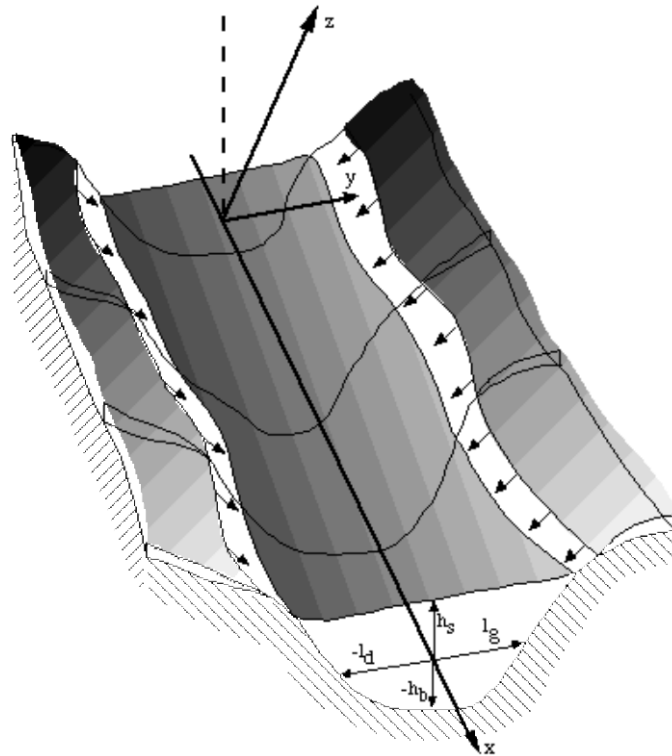


Figure II-3 : Définition des bornes d'intégration et des échanges du système avec le monde extérieur

La figure ci-avant (Figure II-3) présente l'espace à prendre en compte et y définit les bornes d'intégration.

L'immédiate intégration des équations (II-23) écrites sous forme dimensionnelle permet de remplacer la pression par son expression

$$p = \rho g \left[\zeta_s(x) - z \cos \theta \right] \quad \text{II-24}$$

à remplacer dans l'équation dynamique selon OX.

L'intégration de cette dernière et de l'équation de continuité est menée en débutant par une intégration sur la largeur pour terminer avec la profondeur.

II.2.5.1 Intégration sur la largeur locale

Pour l'équation de continuité,

$$\int_{-l_d}^{l_g} \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_{-l_d}^{l_g} \frac{\partial v}{\partial y} dy + \int_{-l_d}^{l_g} \frac{\partial w}{\partial z} dy = 0$$

l'intégration de chaque composante indépendamment donne

$$\begin{cases} \int_{-l_d}^{l_g} \frac{\partial u}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-l_d}^{l_g} u dy - u|_{y=l_g} \frac{\partial l_g}{\partial x} + u|_{y=-l_d} \frac{\partial (-l_d)}{\partial x} \\ \int_{-l_d}^{l_g} \frac{\partial v}{\partial x} dy = \quad \quad \quad + v|_{y=l_g} \quad - v|_{y=-l_d} \\ \int_{-l_d}^{l_g} \frac{\partial w}{\partial z} dy = \frac{\partial}{\partial z} \int_{-l_d}^{l_g} w dy - w|_{y=l_g} \frac{\partial l_g}{\partial z} + w|_{y=-l_d} \frac{\partial (-l_d)}{\partial z} \end{cases}$$

En recomposant, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-l_d}^{l_g} \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_{-l_d}^{l_g} \frac{\partial v}{\partial x} dy + \int_{-l_d}^{l_g} \frac{\partial w}{\partial z} dy &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-l_d}^{l_g} u dy + \int_{-l_d}^{l_g} \omega dy + \\ &\underbrace{\left(v|_{y=l_g} - u|_{y=l_g} \frac{\partial l_g}{\partial x} - w|_{y=l_g} \frac{\partial l_g}{\partial z} \right)}_{=\frac{\partial l_g}{\partial t}} - \underbrace{\left(v|_{y=-l_d} - u|_{y=-l_d} \frac{\partial (-l_d)}{\partial x} - w|_{y=-l_d} \frac{\partial (-l_d)}{\partial z} \right)}_{=\frac{\partial (-l_d)}{\partial t}} \end{aligned}$$

II-25

L'équation dynamique selon x s'écrit quant à elle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-l_d}^{l_g} u dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-l_d}^{l_g} u u dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-l_d}^{l_g} u w dy &= \rho g \frac{\partial}{\partial x} (h_s - z \cos \theta) l - \rho g (h_s - z \cos \theta) \frac{\partial l}{\partial x} + g l \sin \theta \\ &+ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-l_d}^{l_g} \sigma_{xx} dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-l_d}^{l_g} \sigma_{zx} dy \right) \\ &- u|_{y=-l_d} \underbrace{\left(\frac{\partial (-l_d)}{\partial t} + u|_{y=-l_d} \frac{\partial (-l_d)}{\partial x} + w|_{y=-l_d} \frac{\partial (-l_d)}{\partial z} - v|_{y=-l_d} \right)}_{=0 \text{ (non décollement des particules à la paroi)}} \\ &+ u|_{y=l_g} \underbrace{\left(\frac{\partial l_g}{\partial t} + u|_{y=l_g} \frac{\partial l_g}{\partial x} + w|_{y=l_d} \frac{\partial l_g}{\partial z} - v|_{y=l_g} \right)}_{=0 \text{ (idem)}} \\ &+ \frac{1}{\rho} \underbrace{\left(\sigma_{xy}|_{y=l_g} - \sigma_{xx}|_{y=l_g} \frac{\partial l_g}{\partial x} - \sigma_{zx}|_{y=l_g} \frac{\partial l_g}{\partial z} \right)}_{=R_g \text{ (frottement à la paroi)}} \\ &- \frac{1}{\rho} \underbrace{\left(\sigma_{xy}|_{y=-l_d} - \sigma_{xx}|_{y=-l_d} \frac{\partial (-l_d)}{\partial x} - \sigma_{zx}|_{y=-l_d} \frac{\partial (-l_d)}{\partial z} \right)}_{=-R_d \text{ (frottement à la paroi)}} \end{aligned}$$

II-26

On conserve la généralité d'une topographie éventuellement évolutive avec le temps, mais on suppose momentanément qu'elle n'est le siège d'aucun échange avec le monde extérieur.

II.2.5.1.1 Conditions cinématiques

Comme on suppose le fond imperméable, l'imposition des conditions au fond va porter sur un non-décollement des particules fluides à la paroi :

$$\Rightarrow \begin{cases} v|_{y=-l_d} = \frac{\partial -l_d}{\partial t} + u|_{y=-l_d} \frac{\partial -l_d}{\partial x} + w|_{y=-l_d} \frac{\partial -l_d}{\partial z} = 0 \\ v|_{y=l_g} = \frac{\partial l_g}{\partial t} + u|_{y=l_g} \frac{\partial l_g}{\partial x} + w|_{y=l_g} \frac{\partial l_g}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad \text{II-27}$$

Ces équations cinématiques s'accordent avec l'idée que l'on se fait des échanges du système avec le monde extérieur. La figure (Figure II-3) schématise la transmission de la contribution hydrologique, supposée ne pas s'opérer continûment au travers des parois mouillées mais plus proche d'un déversement à partir des berges.

Bien que ces échanges puissent être intégrés dans la contribution des apports hydrologiques qui seront introduits ultérieurement, ce raisonnement implique que l'on ne prend en compte aucun effet d'infiltration au travers du lit, ni d'effet direct d'érosion sous l'action du courant.

Pour ce qui touche à la première contribution, on peut montrer que le surcroît de précision qu'elle est à même d'apporter est extrêmement sensible au bon ajustement des paramètres à la réalité.

Pour l'évolution temporelle de la géométrie sous l'action des courants, justifiable notamment dans les cas envisagés de rupture de barrage, elle fait soit partie d'un calcul séparé pour s'intéresser par exemple à l'évolution de la brèche dans un ouvrage, soit elle est supposée s'intégrer dans une certaine forme d'analyse globale du phénomène, qui répercute nombre d'intervenants dans des valeurs particulières de coefficients de frottement adaptées à des cas aussi extrêmes.

II.2.5.1.2 Conditions dynamiques

La valeur des contraintes aux frontières est liée aux forces qu'exerce le monde extérieur sur le système. Elles se déduisent des contraintes agissant sur les volumes élémentaires représentés à la figure ci-dessous (Figure II-4) pour chaque berge.

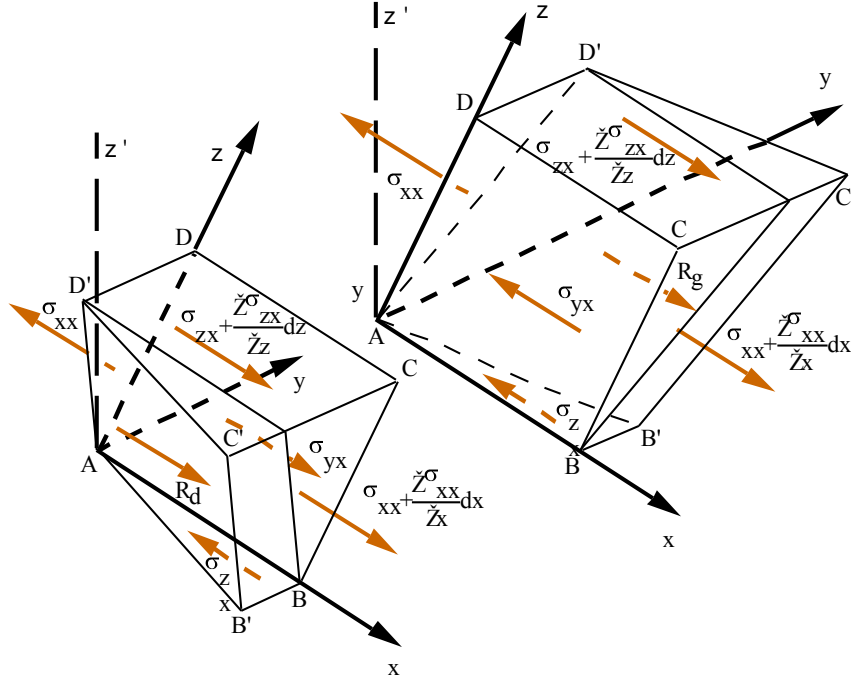


Figure II-4 : Equilibre de volumes élémentaires à chaque paroi

L'équilibre des contraintes agissant sur chaque facette donne la forme suivante pour le frottement sur la paroi :

$$\begin{cases} R_g = \sigma_{yx}|_{y=l_g} - \sigma_{xx}|_{y=l_g} \frac{d_g}{\partial x} - \sigma_{zx}|_{y=l_g} \frac{d_g}{\partial z} \\ -R_d = \sigma_{yx}|_{y=-l_d} - \sigma_{xx}|_{y=-l_d} \frac{\partial \langle l_d \rangle}{\partial x} - \sigma_{zx}|_{y=-l_d} \frac{\partial \langle l_d \rangle}{\partial z} \end{cases} \quad \text{II-28}$$

en négligeant les termes d'ordre supérieur.

L'introduction de ces relations (II-27 et II-28) dans les équations (II-25 et II-26) simplifie substantiellement les écritures en éliminant toute contribution qui s'évalue sur les frontières. En introduisant la largeur totale $l(x,z)$, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-l_d}^{l_g} u dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-l_d}^{l_g} w dy = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{-l_d}^{l_g} u dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-l_d}^{l_g} u u dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-l_d}^{l_g} u w dy = gl \sin \theta - \rho g (h_s - z \cos \theta) \frac{\partial l}{\partial x} + \\ \rho g \frac{\partial}{\partial x} (h_s - z \cos \theta) l + \frac{1}{\rho} (R_g + R_d) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-l_d}^{l_g} \sigma_{xx} dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-l_d}^{l_g} \sigma_{zx} dy \right) \end{cases} \quad \text{II-29}$$

II.2.5.2 Intégration sur la profondeur locale

En tenant compte de l'indépendance de h_b et h_s vis-à-vis de la coordonnée y , on obtient :

Equation de continuité :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h_b}^{h_s} dz}_{\frac{\partial \omega}{\partial t}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_b}^{h_s} \int_{-l_d}^{l_g} u dy dz}_{\frac{\partial}{\partial x} \int u d\omega} + \int_{-l_d}^{l_g} \left(w|_{z=h_s} - u|_{z=h_s} \frac{\partial h_s}{\partial x} - \frac{\partial h_s}{\partial t} \right) dy - \int_{-l_d}^{l_g} \left(w|_{z=-h_b} - u|_{z=-h_b} \frac{\partial h_b}{\partial x} - \frac{\partial h_b}{\partial t} \right) dy$$

II-30

Equation dynamique selon OX :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h_b}^{h_s} \int_{-l_d}^{l_g} u dy dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_b}^{h_s} \int_{-l_d}^{l_g} u u dy dz \\ &= gl \int_{-h_b}^{h_s} \sin \theta + \rho g \int_{-h_b}^{h_s} \frac{\partial}{\partial x} (h_s - z \cos \theta) dz - \rho g \int_{-h_b}^{h_s} (h_s - z \cos \theta) \frac{\partial l}{\partial x} dz \\ &+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_b}^{h_s} \int_{-l_d}^{l_g} \sigma_{xx} dy dz + \int_{-l_d}^{l_g} u|_{z=h_s} \underbrace{\left(\frac{\partial h_s}{\partial t} - u|_{z=h_s} \frac{\partial h_s}{\partial x} - w|_{z=h_s} \right)}_{=0} dy \\ &- \int_{-l_d}^{l_g} u|_{z=-h_b} \underbrace{\left(\frac{\partial h_b}{\partial t} - u|_{z=-h_b} \frac{\partial h_b}{\partial x} - w|_{z=-h_b} \right)}_{=0} dy \\ &+ \frac{1}{\rho} \int_{-h_b}^{h_s} (R_g + R_d) dx + \frac{1}{\rho} \left[\left(\int_{-l_d}^{l_g} \sigma_{xx} dy \right) \Big|_{z=-h_b} \frac{\partial h_b}{\partial x} + \left(\int_{-l_d}^{l_g} \sigma_{zx} dy \right) \Big|_{z=-h_b} \right] \\ &+ \frac{1}{\rho} \left[\left(\int_{-l_d}^{l_g} \sigma_{xx} dy \right) \Big|_{z=h_s} \frac{\partial h_s}{\partial x} + \left(\int_{-l_d}^{l_g} \sigma_{zx} dy \right) \Big|_{z=h_s} \right] \\ &\quad \text{équilibrent les éventuelles forces de surface (forcing du vent, ...)} \end{aligned}$$

II-31

II.2.5.2.1 Conditions cinématiques

L'écriture des conditions cinématiques sur ces frontières exprime à nouveau une condition de non-glissement. Tenant compte de l'ordre d'intégration pour l'expression des fonctions h_b et h_s , il vient :

$$\begin{cases} w|_{z=-h_b} = \frac{\partial -h_b}{\partial t} + u|_{z=-h_b} \frac{\partial -h_b}{\partial x} = 0 \\ w|_{z=h_s} = \frac{\partial h_s}{\partial t} + u|_{z=h_s} \frac{\partial h_s}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \text{II-32}$$

II.2.5.2 Conditions dynamiques

Certaines contributions intégrales subsistent encore dans l'équation dynamique.

Un bilan sur un élément de volume élémentaire de la surface libre ou du fond montre que celles qui impliquent des contraintes évaluées à la surface équilibrent d'éventuelles forces qu'exercent le monde extérieur sur le système. Les phénomènes à étudier permettent de négliger ces effets (vent,...).

Les contributions équivalentes au fond s'annulent également si les parois solides gauche et droite réduisent progressivement leur entre-distance jusqu'à annuler au fond la largeur du lit. Sinon, elles équilibrent les frottements sur le fond du lit et complètent l'effet global de frottement qu'exerce la paroi sur l'ensemble du périmètre mouillé.

II.2.5.3 Forme classique des équations

La forme classique s'obtient alors en introduisant les traditionnelles définitions de section mouillée ω et de débit q :

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_\omega \frac{q^2}{\omega} \right) = g\omega \sin \theta + \rho g \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h \cos \theta} h - \xi \, l(\xi) d\xi - \\ \rho g \int_0^{h \cos \theta} h - \xi \frac{\partial l(\xi)}{\partial x} d\xi + \frac{1}{\rho} t_x + S_x \end{cases} \quad \text{II-33}$$

reprenant la notation t_x pour désigner cette fois l'effet global du frottement sur le périmètre mouillé (*l'effet intégré de R_g et R_d*). Le frottement est habituellement défini à partir de la pente de frottement (J : pente de la ligne d'énergie), ce qui donne, par définition :

$$t_x = \rho g \omega J \quad \text{II-34}$$

ρ_ω ($\rho_\omega = \frac{\omega}{q^2} \iint_\omega u^2 d\omega$ avec $q = \int_\omega u d\omega$) caractérise l'inégale répartition de vitesse sur la

section et S_x résume l'effet intégré de la contrainte axiale de Reynolds.

A l'instar des paragraphes précédents, toutes ces notations simplificatrices cachent des contributions que l'on est incapable d'évaluer sans indication supplémentaire sur la distribution des vitesses et sur le fluide considéré.

II.2.5.4 Coefficient d'inégale répartition de vitesse

Le coefficient ρ_ω ne doit sa présence au sein des équations qu'au désir d'exprimer toute contribution intégrale sous une forme unidimensionnelle n'impliquant plus que les variables de débit q et de section ω . Compte tenu de l'impossibilité d'obtenir une telle expression générale pour l'intégrale sur la section du carré de la vitesse axiale, on force le type d'écriture souhaité en introduisant un paramètre unidimensionnel dont on rappelle la définition :

$$\rho_\omega = \frac{\omega}{q^2} \iint \bar{u}^2 d\omega \quad \text{II-35}$$

Il synthétise, pour les équations unidimensionnelles, certaines informations qu'elles ne sont plus à même de discerner, en l'occurrence certaines caractéristiques sur la forme de diagramme qu'adopte la vitesse axiale sur chaque section transversale.

Il faudrait sinon conserver la généralité du système d'équations originel et faire intervenir les tensions turbulentes pour espérer reproduire les profils expérimentaux mesurés dans des situations privilégiées. De telles approches ne trouvent une justification que dans des études particulières comme l'analyse des effets d'érosion par exemple, où les directions des contraintes au fond peuvent différer de l'orientation du courant moyen.

Ce type d'étude tend par ailleurs à renforcer l'idée qu'il est préférable de s'en tenir à des topographies fixes, puisqu'en dehors de l'incertitude qui subsiste sur le diagramme réel de vitesse dans des situations aussi tourmentées, une loi d'évolution d'érosion en fonction des variables moyennes constituerait une approche insuffisamment fiable.

Si la valeur de ρ_ω reflète la forme de surface mouillée impliquée et le profil de vitesse développé, elle ne dépend respectivement ni de sa surface, ni de son amplitude. Ce témoin d'un caractère tridimensionnel de distribution résume, par sa seule contribution, une réalité physique difficilement caractérisable mathématiquement.

Evoquons ce constat en trois stades :

II.2.5.4.1 Profils de vitesse en mouvement permanent

En se basant sur la valeur minimale qu'est susceptible de prendre ce coefficient ($\rho_\omega = 1$), le profil idéal peut se référencer comme celui qui distribue uniformément la vitesse sur la section. Sa modification, lorsqu'il est confronté aux conditions d'un écoulement réel, tient

d'abord à la présence d'une jonction paroi-fluide qui l'affecte profondément par l'imposition des conditions de non-glissement sur l'ensemble du périmètre mouillé.

Si on répercute l'effet de cet intervenant majeur en imaginant arbitrairement certains profils qui répondent à cette imposition dans quelques cas simples de section transversale, l'impact de toute irrégularité du profil sur des valeurs de ρ_{ω} devient manifeste avec des valeurs de plus en plus majorées par rapport à l'unité.

L'écoulement stationnaire est sans doute le contexte le plus adéquat pour une caractérisation simple du champ réel de vitesses. Pour sérier davantage les intervenants, bon nombre d'expérimentateurs travaillent sur de très larges sections mouillées en regard des hauteurs d'eau impliquées.

C'est dans ce cadre restreint d'un champ de vitesse unidimensionnel (selon un axe perpendiculaire à un fond régulier) qu'intervient cette courte discussion.

En séparant préalablement du diagramme la couche caractéristique des effets de parois où se développent des gradients considérables, Darcy et Bazin proposent une loi parabolique qui indique bien que le maximum de vitesse ne se situe pas nécessairement en surface. Bazin précise ses expériences en le situant à une distance du fond qui varie entre $0,7 h_t$ et h_t .

La forme plus répandue de la loi de puissance fait référence à la vitesse de frottement dans une loi où interviennent la longueur caractéristique d'écoulement, des constantes tirées de l'expérimentation (dont celle de Karman $k = 0,4$) et des paramètres liés par relations empiriques à des grandeurs caractéristiques de l'écoulement comme le nombre de Reynolds.

Cette description montre que la prise en compte d'une analyse mathématique plus respectueuse de la réalité débouche, dans les cas les plus favorables, sur une distribution qui présuppose la connaissance de la solution. On imagine aisément la lourdeur d'une procédure itérative qui tiendrait compte, section par section, d'une correction de ρ_{ω} sur base du résultat approximé afin d'en évaluer une nouvelle approximation.

Cette première analyse adopte des hypothèses d'écoulement peu en rapport avec l'instationnarité des phénomènes que l'on souhaite modéliser. Voyons en quels termes peuvent être maintenues les conclusions tirées jusqu'ici pour de telles circonstances.

II.2.5.4.2 Profils de vitesse en mouvement instationnaire

La principale difficulté de ce type d'étude est de définir les termes généraux d'un signal instationnaire. Des études abordent cette question en observant la forme habituelle des signaux de débit. Cela conduit à adopter, comme base commune aux essais, une forme d'hydrogramme

qui combine le profil accentué d'une crue avec une décrue beaucoup plus graduelle dans le temps. Aux simplifications géométriques de section s'ajoute encore l'incontournable particularisation du phénomène à analyser. Les mesures établissent néanmoins certains caractères marquants pour une section large à fond graveleux.

- Les points situés dans chaque section transversale près de la surface libre obtiennent un pic de vitesse plus précoce que ceux situés près du fond, respectant ainsi les prédominances locales des forces d'inertie ou de viscosité.
- Pour une égale hauteur d'eau, les vitesses locales sont généralement supérieures en phase de crue, à l'exception des couches voisines du fond.
- Par contre, à égalité de vitesse moyenne, les profils des différents stades de passage de l'onde s'alignent valablement sur une courbe commune. Les abords de la surface libre font exception à cette règle, avec des vitesses en décrue généralement inférieures à leurs homologues en phase de crue.

La conclusion la plus significative de ce type d'essais est de reconduire des formulations logarithmiques en procédant à un ajustement approprié des paramètres adapté à chaque état. Certaines relations empiriques sont proposées qui les lient à un coefficient représentatif de l'instantanéité du phénomène étudié. Ces conclusions encourageantes ne peuvent cependant cacher qu'à cause peut être du caractère assez restrictif des hypothèses de travail sur le signal étudié, ce type d'essai reste encore fort confidentiel dans la littérature.

Toutes ces considérations amènent finalement à ne considérer ρ_{ω} que comme un paramètre, fixé par défaut à l'unité.

II.2.5.5 Contribution S_x des contraintes normales à la section

L'intégration sur la section mouillée laisse logiquement dans l'équation un terme représentatif de l'effet extérieur global selon l'axe principal d'écoulement, qui agit sur une tranche d'épaisseur dx .

$$S_x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-l_d}^{l_g} \int_{-h_b}^{h_s} \sigma_{xx} dy dz \quad \text{II-36}$$

Par sa dérivée selon cet axe, il prend en compte tant l'accroissement de contrainte que celui de la section mouillée.

Nous allons expliciter cette expression pour une répartition uniforme de vitesse sur la section ($\rho_\omega = 1$). Avec l'hypothèse d'un fluide newtonien, il vient :

$$S_x = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-l_d}^{l_g} \int_{-h_b}^{h_s} 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} dydz = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} \omega \right) \quad \text{II-37}$$

On raisonnera directement sur cette forme simplifiée pour statuer sur le sort à lui réserver dès que l'on possédera quelques ordres de grandeur significatifs sur chaque application type à modéliser.

II.2.5.6 Introduction des apports extérieurs

Par opposition à ce qui se passe dans le cadre de l'intégration des équations sur la seule hauteur où les influences du monde extérieur se manifestent au niveau des conditions cinématiques, on écarte volontairement toute idée d'échange continu au niveau même des parois mouillées. Il s'agit là d'une conséquence de l'idéalisation du phénomène de passage d'un écoulement hydrologique en fine lame à celui en rivière que l'on suppose, en accord avec la figure ci-avant (Figure II-3), se produire par déversement à partir des berges.

En supposant que ce dernier se produit perpendiculairement à la direction principale d'écoulement et, par conséquent, que le débit latéral par unité de longueur $q_L(x, t)$ n'apporte aucune contribution au bilan de quantité de mouvement selon x , on modifie simplement l'équation de continuité pour écrire :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = q_L \quad \text{II-38}$$

II.2.5.7 Fermeture du système

On se trouve à présent face à un système de deux équations aux dérivées partielles liant deux variables indépendantes, l'abscisse x et le temps t , et trois dépendantes que sont la section ω , le débit q et l'altitude de surface libre Z .

On peut même en ajouter une quatrième, le périmètre mouillé p_m , qui intervient dans l'expression de la loi de frottement. Dans ces conditions, deux équations supplémentaires sont indispensables, qui caractérisent les parois limitant l'écoulement. On les écrit sous la forme générale suivante.

$$p_m = p_m[\omega, x, t, x] \quad \text{II-39}$$

$$Z = Z[\omega, x, t, x] \quad \text{II-40}$$

Leur connaissance dans les conditions les plus générales d'un écoulement réel et leurs propriétés de dérivabilité permettent d'écrire :

$$\left. \frac{\partial Z}{\partial x} \right|_t = \left. \frac{\partial Z}{\partial \omega} \right|_t + \frac{\partial \omega}{\partial x} + \left. \frac{\partial Z}{\partial x} \right|_{\omega} \quad \text{II-41}$$

Dans un premier temps, on se contentera d'introduire ces relations dans (II-33) pour établir une forme d'écriture plus appropriée aux développements futurs

On synthétisera ces considérations sous la forme suivante du système, pour ρ_{ω} et v indépendants de x (forme conservative):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \omega \\ q \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} q \\ qu + gp_{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -q_L \\ -g\omega \sin \theta + g\omega J + gp_x + 2 \left(v_t \omega \frac{\partial u}{\partial x} \right) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \equiv \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \mathbf{X} + \mathbf{D}' \mathbf{X} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad \text{II-42}$$

avec

$$p_{\omega}(h) = \int_0^{h \cos \theta} h - \xi \, l(x, \xi) d\xi \quad \text{II-43}$$

$$p_x(h) = \int_0^{h \cos \theta} h - \xi \, \frac{\partial l(x, \xi)}{\partial x} d\xi \quad \text{II-44}$$

$$l = l_g + l_d \quad \text{II-45}$$

II.2.5.8 Formulation non conservative

On constate que l'expression générale du terme « source » qui s'identifie à la dérivée spatiale de la cote du fond pour une pente de fond faible

$$g\omega \sin \theta = g\omega \tan \theta \quad \text{II-46}$$

peut se combiner avec les termes p_x et p_{ω} en un terme autonome non conservatif, mais très utile à la compréhension des phénomènes de surface :

$$\begin{aligned} -g\omega \sin \theta + g \int_{-h_b}^{h_s} \frac{\partial}{\partial x} h_s - z \cos \theta \, ldz - g \int_{-h_b}^{h_s} h_s - z \cos \theta \, \frac{\partial l}{\partial x} dz &= \\ -g\omega \tan \theta + g \int_{-h_b}^{h_s} l \frac{\partial h_s}{\partial x} dz &= g\omega \frac{\partial h_b}{\partial x} + g\omega \frac{\partial h_s}{\partial x} = g\omega \frac{\partial Z}{\partial x} \end{aligned} \quad \text{II-47}$$

La somme des termes donne $g\omega \frac{\partial z}{\partial x}$, avec z une altitude mesurée par rapport à un plan fixe de référence horizontal, que l'on simplifie en une seule notation en associant à Z une interprétation adaptée à la valeur de θ pour la topographie considérée.

En tenant compte de la dépendance de Z par rapport à l'abscisse et à la section mouillée, on a pour dérivation d'une fonction composée :

$$g\omega \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{g\omega}{\frac{\partial \omega}{\partial Z} \Big|_x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + g\omega \frac{\partial Z}{\partial x} \Big|_\omega \quad \text{II-48}$$

donnant finalement l'expression non conservative suivante avec l'expression générale de la matrice convective

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \omega \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - \rho_\omega u^2 & 2\rho_\omega u \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \omega \\ q \end{bmatrix} + \left[g\omega \frac{\partial Z}{\partial x} \Big|_\omega + \frac{t_x}{\rho} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(v_t \omega \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \equiv \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \mathbf{A} \mathbf{X} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x} + \mathbf{D} \mathbf{X} = 0 \end{aligned} \quad \text{II-49}$$

en reprenant la notation générale classique pour la célérité des ondes en écoulement à surface libre :

$$c^2 = \frac{g\omega}{\frac{\partial \omega}{\partial Z} \Big|_x} \quad \text{II-50}$$

Cette expression suggère que le vrai moteur de l'écoulement est la pente de surface libre, combinaison « hybride » d'une contribution convective et d'un terme source. C'est cette combinaison physique qui pose notamment problème dans la résolution numérique correcte des équations, puisque les termes convectifs doivent recevoir un traitement approprié en fonction de l'origine de l'information, à combiner avec un terme source que l'on penserait a priori devoir être évalué à l'endroit précis où l'équation discrétisée est résolue.

II.2.6 Commentaires et conclusions sur les simplifications des équations

Les hypothèses posées pour simplifier les équations englobent aisément les cas qui donnent lieu à l'apparition de courants transversaux d'importance secondaire, comme ceux engendrés par l'anisotropie de la turbulence entretenue par les variations de forme et de composition du fond, par un rayon de courbure de l'axe principal nettement supérieur à la hauteur d'eau et, plus généralement, par toute variation suffisamment graduelle de la forme géométrique qu'adopte la section mouillée.

Elles peuvent faire l'objet de plus amples discussions pour des sinuosités prononcées à grande courbure ou dans le cadre particulier de propagation de fronts raides ou très prononcés.

Le raisonnement tenu dans ces paragraphes appelle néanmoins quelques commentaires tant sur le fond que sur la forme :

- Le choix d'un système d'axes éventuellement inclinés sur la verticale rappelle que l'hydrostaticité de la pression selon un axe vertical n'est une hypothèse raisonnable que dans le cas particulier d'une topographie à faible pente sur laquelle l'écoulement devient quasi-horizontale. Quoi qu'il en soit, il est bon de rappeler qu'aucune imposition de faible pente ne peut être invoquée quant à l'hydrostaticité de la pression selon la perpendiculaire au fond de la rivière. Par ailleurs, cette hydrostaticité apparaît bien comme une conséquence des hypothèses et non comme une hypothèse elle-même.
L'hydraulique de surface en forte pente ne demande donc aucune autre précaution supplémentaire. L'hydrostaticité de la pression selon un axe z perpendiculaire au fond reste valable sur un coursier à forte pente, à condition d'intégrer l'effet d'inclinaison θ ,
- L'hypothèse sur les vitesses paraît d'autant plus acceptable qu'on raisonne sur le carré d'un rapport. Ainsi, les équations obtenues sont applicables à un champ particulièrement vaste, y compris celui des ondes raides, car à l'exception de la proximité même du choc, cette hypothèse est très aisément vérifiée. On peut y retrouver là une similitude par rapport à la théorie de la résistance des matériaux. Cette référence dans ce cadre de la modélisation en rivières naturelles très différenciées est délibérée dans la mesure où ce même raisonnement prévaut pour un type de choc beaucoup plus commun, le ressaut, qu'il faut pouvoir gérer en toute généralité dans un réseau quelconque. Notons qu'un choix de trois longueurs caractéristiques selon les axes et d'une vitesse caractéristique selon la plus grande pente donnerait des simplifications identiques en raisonnant cette fois directement sur le carré d'un rapport très disproportionné d'échelle d'écoulement.
- Bien que plus complexe à exploiter, il existe bien une expression conservative des équations, forme incontournable pour discrétiser valablement des équations de transport. La solution faible adéquate des équations doit par ailleurs être tirée de cette expression moins connue, car elle est la seule à générer des discontinuités correctes et bien positionnées.

- Bien que souvent ignoré, il subsiste un terme de viscosité, celui développé dans l'axe de l'écoulement. Il permet d'entamer une discussion sur deux plans:
 - Au niveau purement théorique, il réclame une formulation exprimée en fonction des seules variables si on veut fermer le système sans équation de transport supplémentaire.
 - Au niveau de son influence réelle, on peut généralement la considérer comme sans mesure avec la "dissipation" que l'on introduit parfois sciemment dans le schéma numérique. Il faut cependant noter qu'avec sa forme de convection - diffusion, cette équation possède une forme plus apte à gérer des transitions brusques "smoothées" par l'effet de viscosité théorique et/ou numérique.

III DISCRETISATION SPATIALE PAR VOLUMES FINIS

III.1 INTRODUCTION

La méthode des volumes finis, actuellement une des techniques de discrétisation spatiale les plus répandues et les plus fiables, fut développée après les méthodes des différences finies et des éléments finis. Ces deux dernières, bien que largement éprouvées en mécanique des fluides, doivent cependant faire face à plusieurs défauts inhérents à leur fondement théorique même.

La première, la méthode des différences finies, traite les équations en remplaçant les dérivées partielles par des différences algébriques d'inconnues placées aux nœuds du maillage. Bien qu'attrayante vu le faible temps de calcul requis comparativement aux autres méthodes, cette technique souffre de deux défauts. Tout d'abord, seule l'utilisation de maillages structurés cartésiens est envisageable, ce qui empêche toute liberté quant à la discrétisation d'une géométrie complexe. Ensuite, la méthode est basée sur les équations aux dérivées partielles, ce qui suppose une solution continue des équations de Navier-Stokes. De ce fait, la capture correcte de ressauts hydrauliques n'est pas assurée, ce qui représente une restriction sévère compte tenu de la nécessité de modéliser correctement de tels phénomènes.

La méthode des éléments finis propose par contre une solution faible des équations aux dérivées partielles. La capture de discontinuités d'écoulement se fait donc immédiatement. Le choix du maillage de calcul ne souffre d'aucune restriction. Cependant, la forme implicite du système à résoudre impose le calcul d'inversions de matrices de grandes tailles, synonyme de temps de calcul prohibitifs.

Grâce à la méthode des volumes finis, les inconvénients majeurs de ces deux méthodes ont pu être évités. Comme pour les éléments finis, l'intégration des équations aux dérivées partielles sur des cellules de contrôle produit une solution faible du système à résoudre, et le domaine de calcul peut être divisé en n'importe quelle sorte d'éléments, pourvus qu'ils ne se recouvrent pas et qu'ils remplissent l'entièreté du domaine. De plus, la méthode est explicite spatialement, ce qui évite de coûteux calculs d'inversion de matrice.

III.2 VOLUMES FINIS : DIFFERENTES FAMILLES

Le processus de discrétisation commence par la génération d'un maillage sur l'ensemble du domaine d'écoulement. Ce maillage est composé de cellules de contrôle, dont la seule restriction est d'éviter la superposition. On peut donc utiliser des maillages structurés (le

nombre de voisins de chaque élément est fixe et identique pour l'ensemble du domaine) ou non structurés (le nombre de voisins de chaque élément est variable, ce qui offre la possibilité de représenter une beaucoup plus vaste étendue de géométries que les maillages structurés). Les mailles peuvent être n'importe quel type de polygone, les plus couramment utilisés étant les triangles et les quadrilatères.

Une fois le maillage réalisé, il faut encore déterminer le type de volume de contrôle et l'emplacement des inconnues. En effet, il existe plusieurs familles de méthodes volumes finis, dont les deux plus importantes sont (Figure III-1) :

- La méthode des volumes finis "node-centered" dans laquelle les inconnues sont localisées aux nœuds du réseau. L'avantage est qu'il n'y a pas besoin de créer de nouvel emplacement pour stocker les inconnues. Par contre, il faut créer des volumes de contrôle autour des sommets, ce qui revient à construire un second maillage sur le premier, technique très lourde en temps de calcul et qui peut poser des problèmes de recouvrement de surface,
- La méthode des volumes finis "cell-centered" dans laquelle les inconnues sont situées au centre de gravité des mailles du réseau. Les volumes de contrôle coïncident avec les mailles du domaine, ce qui ne nécessite pas de remaillage, et assure facilement l'absence de trous ou de recouvrements de volumes dans le domaine. En pratique, cette méthode est la plus couramment utilisée pour les avantages cités ci-dessus.

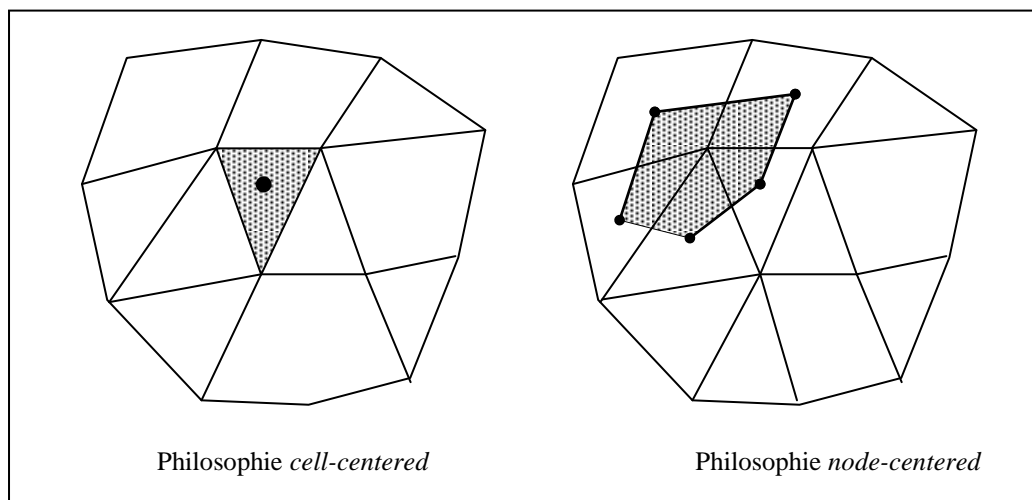


Figure III-1

III.3 PRINCIPE DE LA METHODE

Le domaine d'écoulement étant divisé en volumes de contrôle, il faut ensuite appliquer les lois de conservation sur chacun d'entre eux afin de déterminer le champ des variables en des endroits discrets des cellules : les nœuds. Les équations, qui doivent impérativement se trouver sous une forme conservative, vont de ce fait être intégrées sur la surface du volume de contrôle. Cette opération se fait en utilisant le théorème de Green, qui permet de transformer une intégrale de volume en une intégrale de surface. Par exemple, si l'on travaille à deux dimensions (modélisation de la surface libre des écoulements), le volume de contrôle est en fait une surface de contrôle (S) et la surface devient un contour (σ).

Soit le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) = b \quad \text{III-1}$$

Son intégration sur un volume de contrôle de surface S donne alors :

$$\iint_S \frac{\partial s}{\partial t} dS + \iint_S \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dS = \iint_S b dS \quad \text{III-2}$$

Après application du théorème de Green sur le second terme du membre de gauche, on peut réécrire III-2 sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_S s dS + \oint_{\sigma} f n_x + g n_y d\sigma = \iint_S b dS \quad \text{III-3}$$

avec $\vec{n} = (n_x, n_y)$ la normale extérieure à σ .

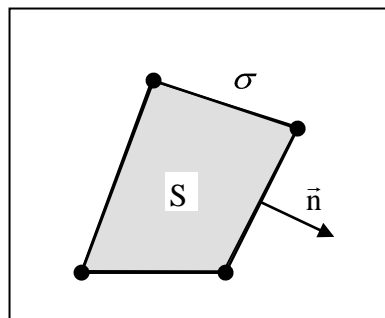


Figure III-2

Afin de résoudre cette dernière équation, deux opérations sont encore nécessaires. Il faut :

- remplacer s et b par leur valeur moyenne sur la cellule S.
- calculer de manière approchée $\oint_{\sigma} f n_x + g n_y d\sigma$

Ces manipulations ne sont pas sans influence sur la précision du schéma, comme nous le verrons par la suite. On obtient alors :

$$S \frac{\partial s}{\partial t} + \sum_{c=1}^{n_c} f n_x + g n_y \Delta \sigma_c - S b = 0 \quad \text{III-4}$$

où n_c représente le nombre de côtés de la cellule de contrôle, et c le numéro du côté considéré.

Si on discrétise la dérivée temporelle par une dérivée décentrée arrière (méthode explicite de Newton) :

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{s^{l+1} - s^l}{\Delta t} \quad \text{III-5}$$

et si on note que :

$$\Delta y_c = n_x \Delta \sigma_c \quad \text{et} \quad -\Delta x_c = n_y \Delta \sigma_c$$

où Δx_c et Δy_c sont respectivement les différences d'abscisses et d'ordonnées entre les extrémités de la face c (la surface étant parcourue aire à gauche), on obtient finalement une formulation explicite pour la discrétisation spatiale :

$$\frac{s^{l+1} - s^l}{\Delta t} + \frac{1}{S} \left[\sum_{c=1}^{n_c} f \Delta y - g \Delta x \right] + b = 0 \quad \text{III-6}$$

Il est désormais possible de calculer s^{l+1} au pas temporel $(l+1)$ uniquement en fonction des inconnues s^l au pas temporel l .

La précision globale du schéma dépendra à la fois de la précision de la discrétisation temporelle et de la discrétisation spatiale.

III.4 ORDRE DE PRECISION DE LA METHODE DES VOLUMES FINIS

III.4.1 Ordre de précision de la discrétisation du terme instationnaire

Soit une fonction $f(x,y)$ différentiable au moins deux fois, à intégrer sur une surface quelconque S :

$$I = \iint_S f dS \quad \text{III-7}$$

On effectue un développement en série de Taylor tronqué au troisième ordre de la fonction f autour du point P . L'intégrale (III-7) devient :

$$\begin{aligned} \iint_S f dS &= \iint_S \left[f_P + (x-x_P) \delta_x f_P + (y-y_P) \delta_y f_P \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (x-x_P)^2 \delta_{xx}^2 f_P + \frac{1}{2} (y-y_P)^2 \delta_{yy}^2 f_P \right] dS \end{aligned} \quad \text{III-8}$$

$$+ (x - x_p - y - y_p) \left[\delta_{xy}^2 f_p + O(h^3) \right] dS$$

où

- h est une distance caractéristique du problème : $x - x_p \sim h$ et $y - y_p \sim h$
- $O(h^3)$ contient les termes d'erreur d'ordre trois et plus.

Le premier terme du membre de droite n'est autre que la valeur de f en P multipliée par S . Etant donné que les inconnues ont été placées au centre de gravité de l'élément, les deuxième et troisième membres de III-8 s'annulent car, par définition du centre de gravité, on a

$$\begin{cases} x_p = \frac{1}{S} \iint_S x dS \\ y_p = \frac{1}{S} \iint_S y dS \end{cases} \quad \text{III-9}$$

De ce fait, l'intégrale III-8 se réduit à :

$$\iint_S f dS = f_p S + O(h^4) \quad \text{III-10}$$

Finalement, la précision de la discrétisation du terme instationnaire est d'ordre deux grâce au simple fait de supposer les inconnues constantes sur l'élément et de les placer au centre de gravité de celui-ci. En effet, on a :

$$\frac{1}{S} \iint_S \frac{\partial s}{\partial t} dS = \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)_p + O(h^2) \quad \text{III-11}$$

III.4.2 Ordre de précision de la discrétisation du terme convectif

III.4.2.1 Introduction

L'approximation de l'intégration des flux sur le contour du volume de contrôle consiste à évaluer les flux convectifs en des points particuliers situés sur les arêtes du volume de contrôle. Comme nous le verrons, une évaluation en un seul point au milieu de l'arête donne déjà une précision du premier ordre pour le terme convectif.

Dans un premier temps, on va déterminer l'erreur attachée au schéma dit "irréaliste", c'est-à-dire pour lequel on connaît de manière exacte les flux. Ensuite, on étudiera l'influence sur le terme d'erreur de la connaissance avec une précision imparfaite des flux.

III.4.2.2 Ordre de précision du schéma irréaliste

Soit une fonction f à intégrer sur un intervalle $[0,1]$:

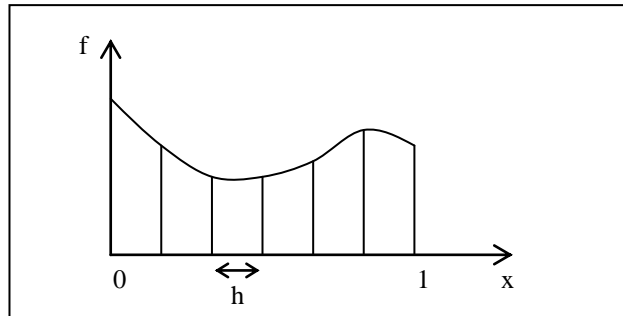


Figure III-3

L'intégration numérique de cette fonction sur des intervalles d'ordre h donne :

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_i f_{\Delta_i} h_i \quad \text{III-12}$$

où f_{Δ_i} représente la valeur de la fonction en un point Δ_i de l'intervalle considéré.

Si on choisit le point Δ_i au milieu de l'intervalle, la précision de l'intégration sur cet intervalle est d'ordre h^3 :

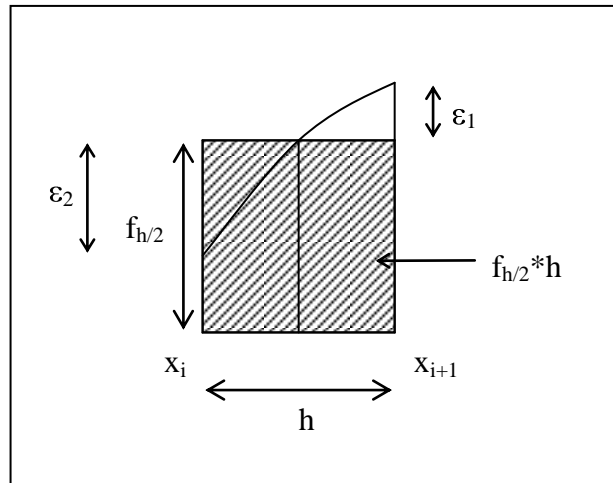


Figure III-4

Le terme d'erreur, c'est-à-dire la différence de surface entre le rectangle hachuré et la surface sous la courbe, vaut :

$$E \approx \epsilon_1 \cdot \frac{h}{4} - \epsilon_2 \cdot \frac{h}{4} \approx \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_{i+1/2}} \cdot \frac{h}{4} - \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_{i-1/2}} \cdot \frac{h}{4} = \frac{h^2}{8} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_{i+1/2}} - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_{i-1/2}} \right) \quad \text{III-13}$$

Si on développe en série le terme de dérivée seconde, on obtient :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2}} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2}} + h \cdot \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i-\frac{1}{2}} + O(h^2) \quad \text{III-14}$$

Et en remplaçant III-14 dans III-13, on obtient finalement :

$$E \approx \frac{h^2}{8} \cdot \left(h \cdot \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i-\frac{1}{2}} + O(h^2) \right) = O(h^3) \quad \text{III-15}$$

On peut facilement passer à la discrétisation du terme convectif qui est, grâce à la méthode volumes finis, ramenée à une intégrale sur le contour de la maille :

$$\frac{1}{S} \iint_S \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dS = \frac{1}{S} \oint_{\sigma} f n_x + g n_y \quad d\sigma = \frac{1}{S} \sum_{c=1}^{n_c} f n_x + g n_y \quad \Delta \sigma_c \quad \text{III-16}$$

L'erreur absolue est donc d'ordre $O\left(\frac{h^3}{h^2}\right) = O(h)$.

En résumé, en l'absence d'hypothèse sur le maillage et sur l'extrapolation des flux aux points Δ , la discrétisation des flux n'utilisant qu'un seul point de contrôle est du premier ordre de précision. A noter toutefois qu'en présence d'un maillage régulier sans stretching, on peut montrer que le schéma admet une erreur d'ordre h^2 .

III.4.2.3 Ordre de précision du schéma réel

En réalité, on ne connaît pas exactement les flux aux points triangles. Il faut les extrapoler à partir des valeurs stockées au centre de gravité des mailles du domaine, ce qui entache le schéma d'une erreur supplémentaire.

Considérons un cas unidimensionnel. Soit f_{Δ}^* la valeur extrapolée du flux au point delta et f_{Δ} le flux exact au même point.

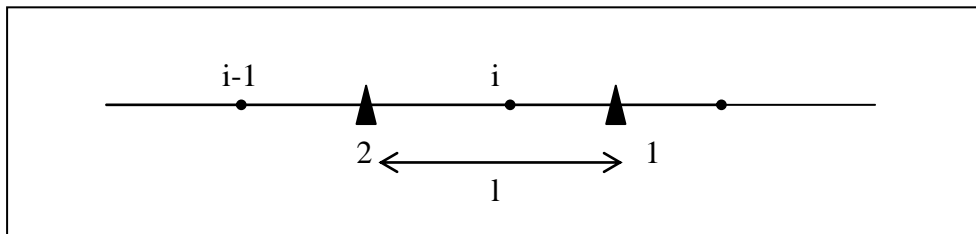


Figure III-5

Si les flux sont interpolés à l'ordre h^n on a :

$$f_{\Delta}^* = f_{\Delta} + K_1 h^n \delta_{x^n} f_{\Delta} + O(h^{n+1}) \quad \text{III-17}$$

$$f_{\Delta 2}^* = f_{\Delta 2} + K_2 h^n \delta_{x^n} f_{\Delta 2} + O h^{n+1} \quad \text{III-18}$$

avec K_1 et K_2 des constantes dépendantes du maillage et du type d'extrapolation utilisée. L'erreur de discrétisation du terme convectif due à la connaissance imprécise des flux vaut donc :

$$\frac{\partial f^*}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{\Delta 1}^* - f_{\Delta 2}^*}{l} - \frac{f_{\Delta 1} - f_{\Delta 2}}{l} = \left[\frac{K_1}{l} h^n \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right)_{\Delta 1} - \frac{K_2}{l} h^n \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right)_{\Delta 2} \right] + O \left(\frac{h^{n+1}}{l} \right) \quad \text{III-19}$$

On effectue un développement en série de Taylor de $\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right)_{\Delta}$ au voisinage de i :

$$\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right)_{\Delta} = \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right)_i + O h \quad \text{III-20}$$

En introduisant III-20 dans III-19, on obtient :

$$\frac{\partial f^*}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{K_1 - K_2}{l} \right) h^n \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right)_i + O \left(\frac{h^{n+1}}{l} \right) \quad \text{III-21}$$

or

$$\begin{aligned} \frac{h^n}{l} &= O h^{n-1} \\ \frac{h^{n+1}}{l} &= O h^n \end{aligned} \quad \text{III-22}$$

ce qui donne finalement :

$$\frac{\partial f^*}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} = K_1 - K_2 h^{n-1} \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right)_i + O h^n \quad \text{III-23}$$

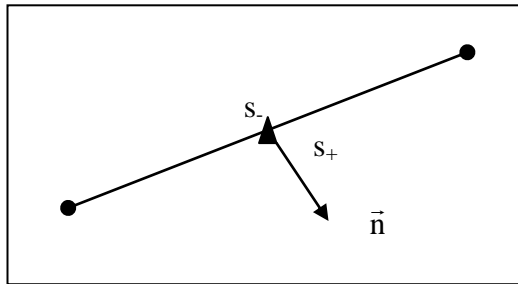
En conclusion, l'approximation des flux à l'ordre h^n conduit à une erreur supplémentaire d'ordre h^{n-1} , qui s'ajoute à l'erreur intrinsèque du premier ordre du schéma irréaliste. Donc, pour conserver une discrétisation du terme convectif du premier ordre, il faut évaluer les flux au second ordre.

Encore une fois, en présence d'un maillage régulier uniforme, cette erreur dégénère en une erreur d'ordre $O(h^n)$.

III.5 RECONSTRUCTION DES VARIABLES CONSERVATIVES SUR LES ARETES

III.5.1 Introduction

Pour obtenir un schéma de discrétisation du premier ordre, on a vu la nécessité d'évaluer les flux au milieu du segment avec une précision du second ordre. Pour calculer ces flux, on reconstruit les variables conservatives au point milieu du segment, à partir des voisins



de gauche et de droite.

Figure III-6

Nous allons étudier successivement la reconstruction constante et la reconstruction linéaire.

III.5.2 Reconstruction constante

La reconstruction constante équivaut à supposer que les variables sont constantes sur le volume de contrôle. Pour une fonction f , cela consiste à écrire :

pour le décentrement avant :

$$f_{\Delta +} = f_i \quad \text{III-24}$$

pour le décentrement arrière :

$$f_{\Delta -} = f_{i+1} \quad \text{III-25}$$

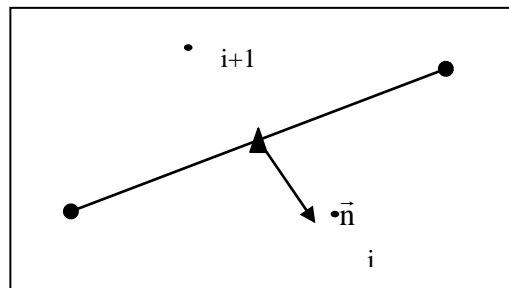


Figure III-7

III.5.3 Reconstruction linéaire

La reconstruction linéaire au point milieu est définie de la manière suivante :

Pour le décentrement avant :

$$f_{\Delta+}(x, y) = f_i + (x_{\Delta} - x_i) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + (y_{\Delta} - y_i) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_i \quad \text{III-26}$$

Pour le décentrement arrière :

$$f_{\Delta-}(x, y) = f_{i+1} + (x_{\Delta} - x_{i+1}) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i+1} + (y_{\Delta} - y_{i+1}) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i+1} \quad \text{III-27}$$

Ces reconstructions sont appliquées aux variables conservatives.

Cependant, pour que la reconstruction linéaire des flux par III-26 et III-27 soit d'ordre deux, il faut connaître les dérivées avec une précision du premier ordre. Ce point sera traité au paragraphe suivant.

III.5.4 Génération des opérateurs de dérivées premières

Pour obtenir une précision du premier ordre, on a besoin d'utiliser trois voisins au minimum comme support de l'extrapolation. En effet, si on réalise un développement en série des variables de trois voisins de l'élément, on obtient :

$$\begin{aligned} s_1 &= s_i + (x_1 - x_i) \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)_i + (y_1 - y_i) \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right)_i + O(h^2) \\ s_2 &= s_i + (x_2 - x_i) \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)_i + (y_2 - y_i) \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right)_i + O(h^2) \\ s_3 &= s_i + (x_3 - x_i) \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)_i + (y_3 - y_i) \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right)_i + O(h^2) \end{aligned} \quad \text{III-28}$$

On cherche une dérivée première qui soit un polynôme du premier degré des valeurs des trois voisins :

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)_i = \alpha \cdot s_1 + \beta \cdot s_2 + \gamma \cdot s_3 \quad \text{III-29}$$

avec α , β et γ des constantes à définir, qui sont respectivement les multiplicateurs de la première, deuxième et troisième équation.

Il faut alors résoudre le système suivant pour obtenir les dérivées selon x :

$$\begin{cases} \alpha \cdot s_i + \beta \cdot s_i + \gamma \cdot s_i = 0 \\ \alpha \cdot (x_1 - x_i) \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_i + \beta \cdot (x_2 - x_i) \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_i + \gamma \cdot (x_3 - x_i) \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_i = \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_i \\ \alpha \cdot (y_1 - y_i) \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)_i + \beta \cdot (y_2 - y_i) \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)_i + \gamma \cdot (y_3 - y_i) \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)_i = 0 \end{cases} \quad \text{III-30}$$

avec α, β, γ d'ordre $O(1/h)$, et s_1, s_2, s_3 d'ordre $O(h^2)$, ce qui donne une précision du premier ordre pour la dérivée première.

La génération des dérivées peut s'obtenir facilement pour un nombre quelconque de voisins par la formule de Green-Gauss :

$$\nabla s_i = \frac{1}{S_i} \oint_{\Gamma_i} s_i \vec{n} d\Gamma_i \quad \text{III-31}$$

avec :

- S_i la surface du supervolume de contrôle, composé en joignant les centres de gravités des éléments qui participent au calcul de la dérivée,
- Γ_i le contour du supervolume,
- \vec{n} la normale extérieure du contour du supervolume.

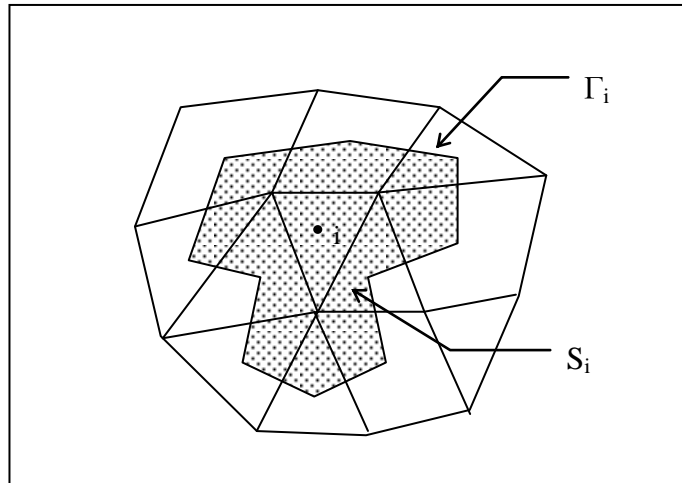


Figure III-8

De ce fait, les dérivées s'obtiennent simplement par une intégrale sur le contour du supervolume de contrôle. La figure suivante illustre un cas où on prendrait les voisins par bord et par côté pour le calcul des dérivées.

L'intégrale III-31 est calculée en sommant les contributions de chacun des segments de droite du contour, en appliquant la méthode des trapèzes. En développant III-31, on s'aperçoit que cette intégrale se réduit à une combinaison linéaire des valeurs des inconnues aux nœuds voisins du nœud i :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} \Big|_i \\ \frac{\partial s}{\partial y} \Big|_i \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \dots \\ s_n \end{bmatrix} \quad \text{III-32}$$

avec M une matrice de pondération des valeurs des différents voisins.

Un traitement particulier doit cependant être déterminé pour les dérivées calculées sur des éléments frontières. Le contour Γ_i ne pouvant plus englober l'élément, on le fait passer par l'élément même :

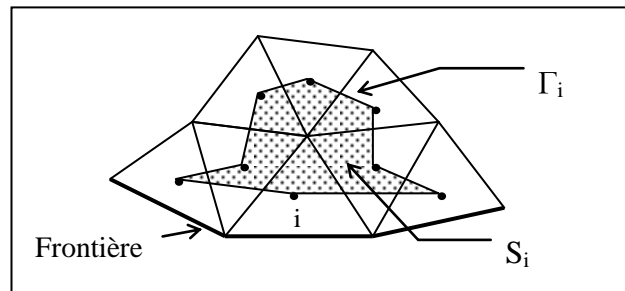


Figure III-9

IV LE LOGICIEL WOLF1D

Dans ce travail, on s'est servi du logiciel Wolf1D du Laboratoire d'Hydraulique Appliquée et des Constructions Hydrauliques (HACH) de l'Université de Liège afin de calculer les écoulements dans les réseaux de rivières envisagés pour tester l'algorithme génétique d'optimisation (AG).

IV.1 SYSTEME D'EQUATIONS ET SCHEMA DE RESOLUTION

Le système résolu est celui défini au chapitre II.2 qui décrit complètement l'hydrodynamique de tout écoulement à surface libre en section et en conditions quelconques.

Le schéma numérique utilisé dans le logiciel résout les équations unidimensionnelles grâce à la technique des volumes finis sur maillage non structuré assurant une précision du second ordre tant en discrétisation spatiale que temporelle (Chapitre III). Ses propriétés de « shock capturing » lui permettent de supporter des coexistences de régimes variés dans le réseau avec apparition, déplacement et extinction de ressauts.

Sa précision a été testée avec beaucoup de satisfaction en comparaison notamment de codes implicites développés au sein du HACH.

IV.2 GESTION NUMERIQUE DES APPORTS LATERAUX

Les apports latéraux dans le réseau ne sont gérés qu'au seul niveau de la continuité dans les équations d'écoulement filaire (Chapitre II.2) : aucun apport n'est donc assuré en termes de quantité de mouvement ce qui est conforme à la réalité des faits tant que les apports restent diffus et limités. Pour pouvoir traiter cet apport d'impulsion, il faudrait fournir des données géométriques d'orientation de l'apport par rapport à l'écoulement principal, données peu évidentes à préciser.

IV.3 GESTION DES CONFLUENCES

Les conditions limites qui prévalent aux confluences sont gérées par un processus explicite efficace basé sur les multiplicateurs de Lagrange. Cette approche supporte toute description géométrique du réseau et impose au choix une conservation d'énergie spécifique ou une stricte égalité des altitudes de surface libre.

IV.4 CHOIX DU PAS DE TEMPS

Les simulations procèdent par pas de temps adaptatifs calculés de manière automatique par le logiciel en fonction des diverses conditions d'écoulement coexistant dans l'ensemble du

réseau. La stabilité du schéma numérique étant dépendante du nombre de Courant, le logiciel adapte à chaque itération son pas sur une valeur de référence imposée pour la simulation.

IV.5 EVALUATION DES TERMES DE FROTTEMENT

Nous n'avons pas encore discuté de l'évaluation du terme de pente de frottement J présent dans le système d'équations intégrées sur la section mouillée développé au chapitre II. Ce terme englobe en fait l'évaluation des pertes dues au frottement sur le fond et les berges de la rivière ainsi que celles dues à la viscosité du fluide en écoulement. Il est très difficilement calculable. Dès lors, depuis les fondements de l'hydrodynamique, de très nombreux auteurs se sont penchés sur des méthodes pratiques pour calculer ces pertes de charge en fonction des autres grandeurs caractéristiques de l'écoulement.

Actuellement, on peut dire que deux écoles « s'affrontent » dans le domaine des lois de frottement. Une école empirique ou expérimentale qui définit des lois principalement basées sur des observations et l'interprétation des résultats. Une autre école dite « moderne » qui s'attache à déterminer des lois de comportement plus générales. Ces dernières lois sont principalement des généralisations aux écoulements à surface libre des lois de pertes de charges établies pour les conduites en charge.

Plusieurs formules, empiriques ou « modernes », sont implémentées dans le logiciel Wolf1D. Dans ce travail, on s'est cependant contenté d'utiliser la loi de frottement de Manning, qui est une loi empirique, vu le nombre de données disponibles dans la littérature sur la valeur des coefficients qu'elle utilise et le succès qu'elle rencontre auprès d'un grand nombre d'ingénieurs hydrauliciens.

Cette formule a été développée dans le cadre du mouvement uniforme, très pratique pour la détermination de la pente de frottement puisque dans ce cas elle est égale à la pente de fond du canal. Son utilisation pour résoudre des écoulements instationnaires est acceptable vu qu'il est généralement admis que la forme mathématique obtenue dans le cadre du mouvement uniforme peut être utilisée à l'identique dans les écoulements variés correspondants.

La formule se présente sous la forme d'une relation entre la vitesse moyenne de l'écoulement U , la pente de fond du canal J_0 et le rayon hydraulique R_h de l'écoulement dans la section considérée.

$$U = KJ_0^{1/2} R_h^{2/3} \quad \text{IV-1}$$

K est le coefficient de frottement de Manning-Strickler, dont le tableau ci-dessous après donne les valeurs usuelles.

Nature des surfaces	Etat des parois			
	Parfait	Bon	Assez bon	Mauvais
A. Canaux artificiels				
Ciment lissé	100	91	83	77
Mortier de ciment	91	83	77	67
Aqueducs en bois raboté	100	83	77	71
Aqueducs en bois non raboté	91	77	71	67
Canaux revêtus de béton	83	71	63	56
Moellons bruts assemblés au ciment	59	50	40	33
Pierres sèches	40	33	30	29
Moellons dressés	77	71	67	59
Aqueducs métalliques à section semi-circulaire, lisses	91	83	77	67
Aqueducs métallique en tôle plissée section demi-circulaire	44	40	36	33
Canaux et fossés en terre, droits et uniformes	59	50	44	40
Canaux et fossés avec pierres, lisses et uniformes	40	33	30	29
Canaux et fossés avec pierres, rugueux et irréguliers	29	25	22	-
Canaux en terre à larges méandres	44	40	36	33
Canaux en terre dragués	40	36	33	30
Canaux avec lits de pierres rugueuses, herbes sur les rives de terre	40	33	29	25
Canaux à fond de terre, côtés avec pierres	36	33	30	29
B. Cours d'eau naturels				
1. Propres rives en ligne droite, l'eau au niveau le plus haut, sans gué ou fosse profonde	40	36	33	30
2. même que 1 mais quelques herbes et pierres	33	30	29	25
3. Avec méandres, avec quelques étangs et endroits peu profonds, propres	29	25	22	20
4. même que 3, l'eau à l'étiage, pente et sections plus faibles	25	22	20	18
5. même que 3 avec quelques pierres et herbes	30	29	25	22
6. même que 4 avec pierres	22	20	18	17
7. Zones à eau coulant lentement avec herbes ou fosses très profondes	20	17	14	13
8. Zones avec beaucoup de mauvaises herbes	13	10	8	7

Tableau IV-1 : Valeurs du coefficient K de Manning-Strickler $\left[m^{1/3} s^{-1} \right]$

IV.6 DONNEES

Tous les logiciels hydrauliques du HACH sont des logiciels physiquement basés, ce qui signifie que les données à introduire sont les caractéristiques physiques du site où l'écoulement est étudié.

Dans le cas de l'étude d'un cours d'eau à l'aide de Wolf1D, il faut fournir au programme les caractéristiques de la rivière en différentes sections comme l'altitude du fond, les relations hauteur / section mouillée et hauteur / périmètre mouillé, le coefficient de frottement, l'abscisse en long... Les conditions aux limites peuvent prendre des formes très variées mais toutes ont une signification physique. Ce sont des hauteurs d'eau, des débits, des conditions de déversoir, de barrage mobile, de nombre de Froude...

On voit donc que la façon dont Wolf1D est structuré et fonctionne permet d'une manière extrêmement simple d'avoir accès aux valeurs des paramètres physiques qui nous intéressent et de faire évoluer ces valeurs dans des gammes réalistes afin de rencontrer les objectifs fixés pour l'optimisation.

V LES ALGORITHMES GENETIQUES

V.1 INTRODUCTION

« Les algorithmes génétiques (AG) sont des algorithmes d'exploration fondés sur les mécanismes de la sélection naturelle et de la génétique. » Ils travaillent sur une série de N représentations codées des paramètres à optimiser que l'on appelle une population de N chromosomes ou chaînes.

Pour chaque chromosome, on calcule une valeur de fonction objectif qui traduit la pertinence des valeurs codées des paramètres par rapport au problème à résoudre. Meilleurs sont les valeurs proposées pour les paramètres, plus grande est la valeur de la fonction objectif.

L'algorithme fait alors évoluer « de façon naturelle » la population de départ, avec comme principe directeur que les chromosomes les mieux adaptés, pour lesquels la valeur de la fonction objectif est la plus grande, ont plus de chance de survivre et de conduire à la solution optimale.

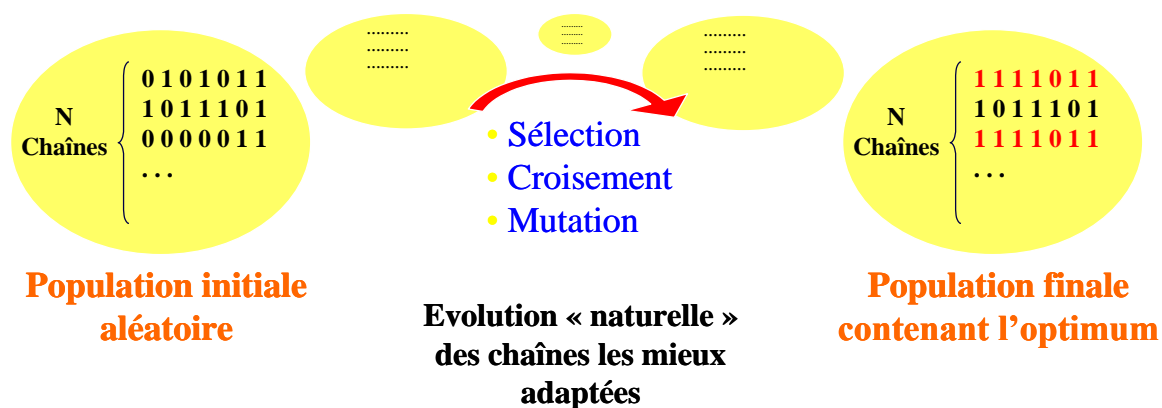


Figure V-1 : Schéma de principe de l'AG

On voit donc que les AG se situent entre les méthodes classiques d'optimisation qui s'appliquent localement dans l'espace à considérer, et les méthodes purement aléatoires ou d'exploration systématique qui explore le champs de variation des paramètres dans son ensemble. En fait, les AG mènent de façon intelligente une exploration pseudo-aléatoire de l'espace de variation des paramètres du problème.

Les différences fondamentales des AG par rapport aux autres méthodes d'optimisation plus classiques se regroupent en 4 axes principaux [1] :

- Les AG utilisent un codage des paramètres et non les paramètres eux-mêmes,
- Les AG travaillent sur une population de points au lieu d'un point unique,
- Les AG n'utilisent que les valeurs de la fonction étudiée, pas sa dérivée ou une autre connaissance auxiliaire,
- Les AG utilisent des règles de transition probabilistes et non déterministes.

On peut donc penser que les AG permettent de s'affranchir de la difficulté qu'ont les méthodes plus traditionnelles à étudier des fonctions bruitées et discontinues ou à assurer la convergence vers un extremum absolu, tout en évitant un parcours systématique extrêmement coûteux des espaces de variation des paramètres.

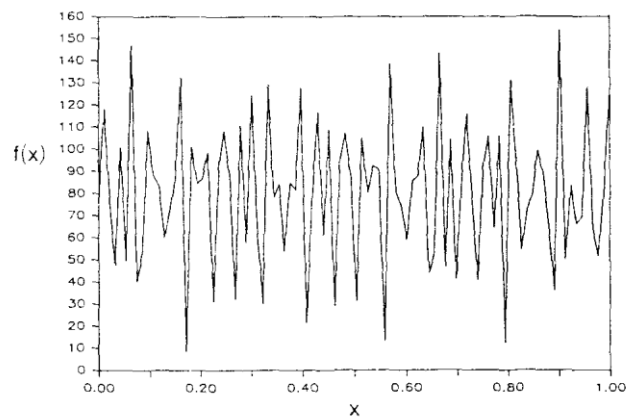


Figure V-2 : Fonction bruitée → méthodes traditionnelles non applicables

De plus, les AG, de part leur simplicité d'utilisation, permettent de résoudre un grand nombre de problèmes totalement différents avec la même efficacité, alors que les méthodes traditionnelles sont en général très bien adaptées à une classe de problèmes restreinte (Figure V-5).

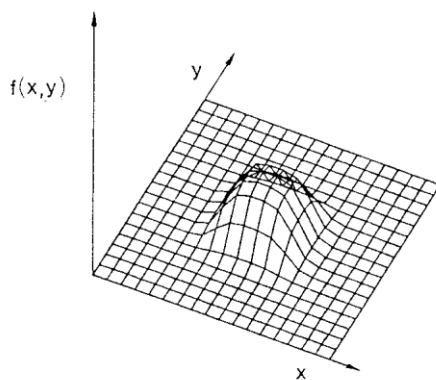


Figure V-4 : Fonction à pic unique → pas de problème pour les méthodes basées sur le calcul

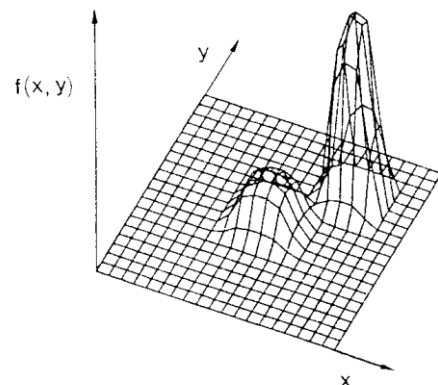


Figure V-3 : Fonction à pics multiples → quelle colline escalader ?

Les AG sont également ce que l'on appelle une méthode robuste, c'est à dire une méthode qui obtient de bons résultats pour une classe de problèmes importante.

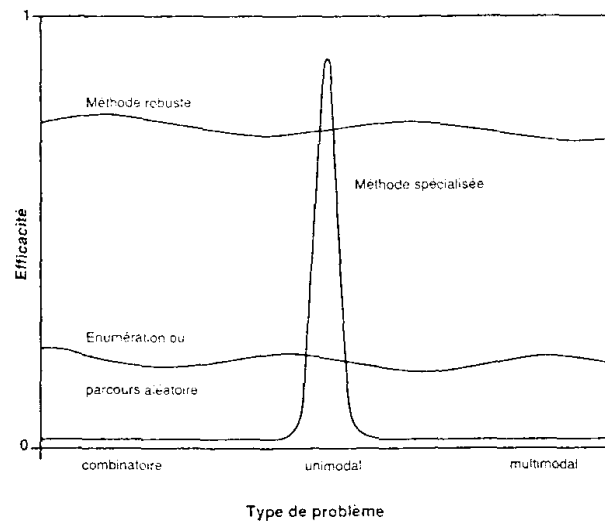


Figure V-5 : Comparaison des méthodes classiques d'optimisation, souvent spécialisées, des méthodes aléatoires ou énumératives inefficaces et des méthodes robustes comme les AG

V.2 LES PARAMETRES

V.2.1 Codage

Comme déjà signalé précédemment, les AG nécessitent le codage de l'ensemble des paramètres d'origine du problème à optimiser en une chaîne d'alphabet et de longueur finie. Cela est indispensable pour faire évoluer les populations comme on le verra dans les paragraphes suivants (V.3.2 et V.3.3).

Il convient ici de définir la notion de schème, encore appelé motif de similarité, qui est une chaîne de codage dont l'alphabet est étendu grâce à un symbole * indifférent. Il permet de définir un sous ensemble de chaînes par des similarités à des positions définies.

Par exemple, dans un codage de 5 chiffres à l'aide de 0 et de 1, le schème *0000 correspond aux deux chaînes 00000 et 10000. Le schème *0**1 correspond aux 8 chaînes de longueur 5 qui possèdent un 0 en deuxième position et un 1 en dernière position.

Attention que le symbole * n'est jamais manipulé par l'algorithme génétique dans les faits. Ce n'est qu'une notation qui permet de décrire toutes les similarités potentielles entre les chaînes d'une longueur et d'un alphabet fixés.

Cette notation simplifie énormément l'analyse des AG car elle permet de reconnaître explicitement l'ensemble des similarités possibles dans une population de chaînes. On peut

montrer [1] que les schèmes courts et très performants des chaînes, les briques élémentaires, se combinent au cours du processus d'optimisation pour former des chaînes potentiellement encore plus performantes. La mutation (paragraphe V.3.3) n'a que peu d'effet sur ces schèmes courts mais elle permet de se prémunir contre la perte irrévocable de matériel génétique potentiellement important.

Deux principes de base existent pour choisir un codage d'AG [1] :

- **Le principe de pertinence des briques élémentaires :** l'utilisateur doit sélectionner un codage de façon à ce que les schèmes courts et d'ordres faibles soient pertinents pour le problème sous-jacent, et relativement indépendants des schèmes aux autres positions instanciées.
- **Le principe des alphabets minimaux :** l'utilisateur doit choisir le plus petit alphabet qui permette une expression naturelle du problème.

Sur base de ces principes et dans le cadre de la première approche que constitue ce travail, seul un codage binaire en base deux des paramètres a été utilisé. Ainsi, un paramètre se code en une chaîne de 0 et de 1 telle que un 1 à la $i^{\text{ème}}$ position renvoie la valeur 2^{i-1} . Par exemple, la chaîne 00001 renvoie la valeur $2^4 = 16$. La chaîne 11010 renvoie la valeur $2^0+2^1+2^3 = 11$.

En général, une chaîne de x bits permet donc d'atteindre toutes les valeurs entières comprises entre 0 et 2^x-1 .

Dans ce travail et pour donner un ordre de grandeur, les chaînes utilisées comprennent entre 6 et 36 bits (0 ou 1) selon le nombre de paramètres à déterminer et la précision souhaitée pour les résultats.

V.2.2 Contraintes

Les contraintes sur les paramètres sont de deux types : tout d'abord, un paramètre possède un intervalle de variation défini par une borne supérieure et une borne inférieure en dehors desquelles sa valeur ne peut se trouver. Ensuite, certaines limitations peuvent être posées entre différents paramètres, ces limitations dépendant des valeurs prisent par ceux-ci. Nous allons examiner successivement ces deux types de contraintes et la façon dont elles sont prisent en considération dans l'AG.

V.2.2.1 Intervalle de variation des paramètres

Comme on vient de le voir, le codage des paramètres limite les valeurs qui peuvent leur être attribuées. Un codage en base 2 et en 5 bits ne fournira comme valeurs que les 32 nombres

entiers compris entre 0 (0000) et 31 (1111) inclus. Dans cette forme de codage, c'est donc la longueur de la chaîne qui fixe l'intervalle de variation des paramètres.

Les paramètres étudiés ne variant pas nécessairement dans ces intervalles, on a systématiquement projeté linéairement l'intervalle de variation du codage sur celui du paramètre pour déterminer les valeurs réelles des paramètres. Avec cette technique, c'est la précision du paramètre qui est fonction de la longueur de la chaîne. Par exemple, supposons que l'on ait un paramètre qui peut varier entre les valeurs 10 et 40. Si on le code en base 2 et en 4 bits, on limite le champs d'exploration du paramètre aux 16 valeurs suivantes,

Codage	Valeur décodée	Valeur projetée
0 0 0 0	0	10
1 0 0 0	1	12
0 1 0 0	2	14
1 1 0 0	3	16
0 0 1 0	4	18
1 0 1 0	5	20
0 1 1 0	6	22
1 1 1 0	7	24
0 0 0 1	8	26
1 0 0 1	9	28
0 1 0 1	10	30
1 1 0 1	11	32
0 0 1 1	12	34
1 0 1 1	13	36
0 1 1 1	14	38
1 1 1 1	15	40

La précision sur le résultat sera donc d'un demi intervalle de variation, soit $2/2 = 1$ unité. Par contre, si on code le paramètre par une chaîne de longueur 6, on se donne 64 valeurs possibles pour le paramètre et on obtient une précision de $(40-10)/63/2 = 0.238$, soit plus de 4 fois plus de précision qu'auparavant, pour 2 bits supplémentaires.

V.2.2.2 Contraintes sur les combinaisons de paramètres

Il arrive que certains paramètres soient soumis à des contraintes découlant de la valeur des autres paramètres.

Soit on a affaire à des égalités du type

$$P_1 = aP_2 + bP_3 + c \quad \text{V-1}$$

où P_1, P_2, P_3 sont 3 paramètres à optimiser et a, b et c sont 3 constantes. Ce cas se résout très simplement en optimisant la valeur de 2 paramètres, la valeur du troisième étant calculée directement, et pour chaque chaîne, à partir de celles des 2 autres.

Si, par contre, les contraintes à respecter sont des inégalités du type

$$aP_1 + bP_2 + cP_3 \leq d \quad \text{V-2}$$

on les vérifie dans l'AG d'une toute autre façon. En premier lieu, on s'arrange pour obtenir une population de départ qui vérifie toutes les inégalités. Pour ce faire, on génère aléatoirement des chaînes de codage, on les décode et on vérifie que les groupes de paramètres respectent les différentes contraintes. Si ce n'est pas le cas, on cherche une autre chaîne. Si toutes les contraintes sont vérifiées, on garde la chaîne. On effectue cette opération jusqu'à posséder une population de départ complète de chaînes toutes différentes, de façon à explorer dès le départ le plus de directions possibles dans l'espace de recherche.

On laisse alors l'AG faire évoluer cette population selon les principes énoncés ci-après (paragraphe V.3), en ajoutant une vérification sur chaque nouvelle chaîne proposée : si les valeurs des paramètres contenues dans la chaîne vérifient toutes les contraintes, elle est acceptée. Si les valeurs des paramètres ne vérifient pas les contraintes, la chaîne est rejetée et on recommence la recherche d'une nouvelle chaîne à partir de l'ancienne population.

Cette méthode, par opposition à celle consistant à attacher une valeur de fonction objectif très faible aux chaînes qui ne vérifient pas les contraintes du problème, permet en toute logique d'obtenir une convergence plus rapide de l'algorithme, du moins pour les problèmes peu contraints tels ceux qui nous intéressent ici, l'évolution des populations s'effectuant à partir de séries complètes de chaînes toutes acceptables. Dans l'autre méthode, appelée méthode de pénalisation, on limite le nombre de chaînes disponibles vu que les chaînes inacceptables occupent une place dans la population alors qu'elles ne seront quasi jamais sélectionnées vu la faible valeur de la fonction objectif qui leur est attachée.

Dans le cas de problèmes fortement contraints pour lesquels il est presque aussi difficile de trouver une solution qui satisfasse toutes les contraintes que de trouver l'optimum, la méthode de pénalisation est plus intéressante vu qu'il est important d'obtenir de l'information sur les points qui ne sont pas acceptables afin d'essayer de déterminer des solutions acceptables. Dans cette méthode, on pénalise donc la fonction objectif des chaînes non-acceptables par exemple en fonction de leur degré de violation des contraintes.

V.3 EVOLUTION DES POPULATIONS

Trois opérations sont à la base de l'évolution d'une population : la sélection naturelle, le croisement et la mutation. On peut y adjoindre une « mémoire du maximum atteint » afin d'accélérer la convergence quand l'optimum, même bruité, est localisé dans une région précise de l'espace de variation défini en terme de schèmes.

V.3.1 Sélection naturelle

Cette manipulation est la première dans l'évolution d'une population. Elle traduit le principe que seuls les chromosomes les mieux adaptés survivent. L'évolution d'une population se fait en choisissant parmi l'ancienne population autant de chromosomes que nécessaire pour créer une nouvelle population de même taille. Le choix des chromosomes se fait de la façon suivante : les valeurs de la fonction objectif de chaque chromosome de la population i sont additionnés ; cette somme Q peut être représentée comme une roue de loterie divisée en autant de part qu'il y a de chromosomes dans la population, la taille de chaque part étant proportionnelle à la valeur de la fonction objectif du chromosome qu'elle représente. Un nombre aléatoire q est ensuite choisi entre 0 et Q et est reporté sur la roue de loterie. Le chromosome désigné par q (c'est à dire celui pour lequel la part de la roue contient la valeur q) est sélectionné pour participer à la construction de la nouvelle population $i+1$.

Un chromosome i est donc sélectionné avec une probabilité p_i directement proportionnelle à la valeur de la fonction objectif $f_{obj,i}$ à laquelle il conduit :

$$P_{sélection,i} = \frac{f_{obj,i}}{\sum_{j=1}^N f_{obj,j}}$$

V-3

Codage	f_{obj}	% du total
0 0 1 0 1	185	44.15
1 0 1 0 1	120	28.64
0 0 0 1 1	25	5.97
1 1 0 1 0	89	21.24
Total	419	100

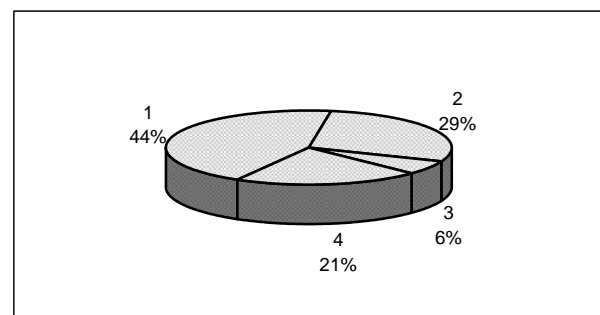


Figure V-6 : Sections de la roue de loterie proportionnées en fonction de l'adaptation des chaînes

V.3.2 Croisement

Cette opération consiste, pour une paire de chromosomes sélectionnés comme précisé au paragraphe précédent, à croiser une partie des deux chaînes codées pour créer deux nouvelles chaînes de la nouvelle population. C'est ici que le codage des chaînes devient indispensable.

Cette opération se fait en sélectionnant aléatoirement une position de croisement sur les chaînes codées et en échangeant les parties de code ainsi définies.

Le but de cette manipulation est de créer un nouveau chromosome meilleur que ces parents en espérant avoir réuni dans le nouveau codage de « bonnes » parties de code des parents, c'est-à-dire des schèmes performants.

Deux façons ont été envisagées pour croiser des chaînes :

- soit on sélectionne une position dans la chaîne globale et on croise alors deux demi-chaînes (croisement simple ou en 1 point),

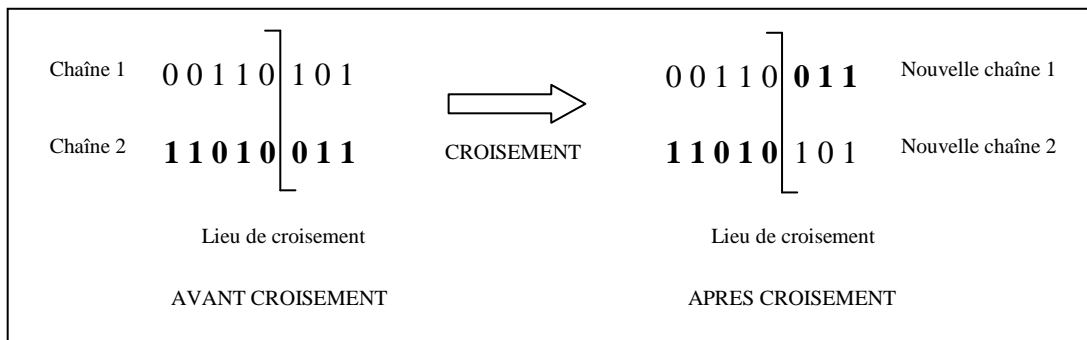


Figure V-7 : Schéma de l'opération de croisement simple

- soit on sélectionne une position de croisement pour chaque sous chaîne représentant un paramètre et on croise entre elles les chaînes de codes pour chaque paramètre séparément (croisement en 1 point par paramètre).

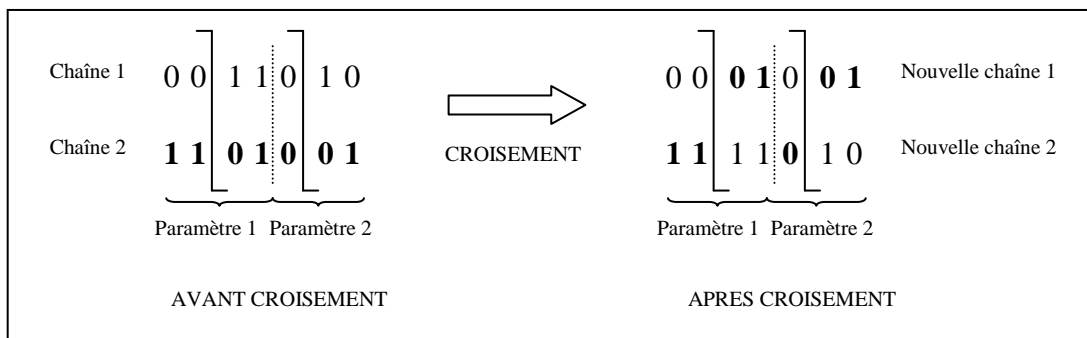


Figure V-8 : Schéma de l'opération de croisement en 1 point par paramètre

C'est cette dernière façon qui a donné les meilleurs résultats. Cela s'explique aisément car la première méthode (méthode du croisement simple) se contente d'échanger de l'information entre deux codages d'un seul paramètre, celui dont la chaîne de code est coupée ; les autres paramètres se trouvant échangés dans leur intégralité entre les deux chaînes. Le mélange de l'information est donc fortement réduit, et les pistes explorées beaucoup moins nombreuses que dans la seconde méthode où l'on échange de l'information simultanément entre tous les paramètres afin de rechercher la valeur optimale de chacun d'entre eux séparément.

Une troisième façon de croiser les chaînes, le croisement uniforme, a également été testée. Cette opération consiste à croiser tous les bits de 2 chaînes avec une probabilité de 0,5. Le mélange d'information est donc ici très important, cela au risque de détruire beaucoup des schèmes présents dans les chaînes parentes.

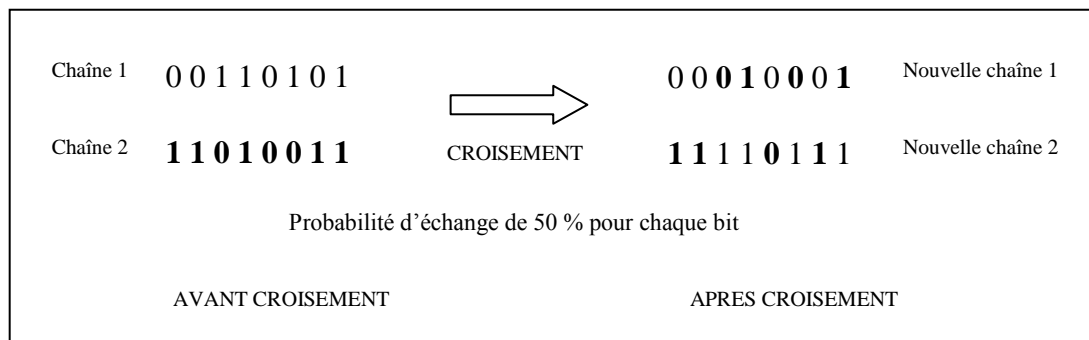


Figure V-9 : Schéma de l'opération de croisement uniforme

V.3.3 Mutation

Le rôle de la mutation reste très flou en génétique (aussi bien naturelle qu'artificielle). Si ce sont la sélection et le croisement associés qui donnent aux AG l'essentiel de leur puissance, l'intérêt de la mutation n'est pas totalement négligeable. Bien que la sélection et le croisement recombinent de façon efficace les notions existantes dans les chaînes codées, ils peuvent conduire à la perte de manière irrémédiable de l'information génétique potentiellement utile (des 1 ou des 0 à des endroits précis). L'opération de mutation sert à éviter, dans les systèmes génétiques artificiels, de telles pertes irréparables. Dans un AG simple, la mutation se définit comme « la mutation aléatoire occasionnelle de la valeur d'un caractère de la chaîne ».

De plus, cette opération sert à explorer de nouvelles pistes dans la recherche de l'optimum absolu, pistes a priori non envisageables car inconnues dans la population de base (schèmes courts absents).

Pratiquement, la mutation se traduit lors du croisement par une faible probabilité de voir un gène muté en une autre valeur (un 0 devient 1 et vice versa) dans les chaînes de code échangées. Il convient de garder cette probabilité de mutation assez faible de façon à ne pas perdre trop d'information par rapport aux chaînes de départ de la population et à ne pas biaiser l'opération de sélection.

V.3.4 Mémoire du maximum

Dans l'algorithme génétique développé pour ce travail, on a donné la possibilité à l'utilisateur de choisir de garder ou non, dans toute nouvelle population de chaînes, la meilleure chaîne de la population précédente. De cette façon, on impose à l'AG de ne pas « oublier » la meilleure combinaison des paramètres obtenue d'une génération à l'autre.

On permet ainsi à l'AG de tester de nouvelles pistes à partir des meilleurs éléments qu'il contient sans risquer de perdre l'information sur l'optimum intermédiaire. On lui confère en quelque sorte une certaine mémoire de ce qu'il a déjà trouvé comme bonne solution du problème à optimiser.

Cette opération devrait donner de bons résultats lorsque le maximum de fonction objectif est localisé dans une zone restreinte, en terme de codage des paramètres, de l'espace à explorer. En effet, le fait de retrouver dans chaque population le maximum précédemment atteint guide la recherche dans son voisinage proche (en terme de codage) puisque un grand nombre de chromosomes de la nouvelle génération seront issus du codage de ce maximum.

L'étude de problèmes pour lesquels on n'a aucune idée a priori de l'allure de la fonction objectif ne devrait pas être menée avec cette opération de mémoire du maximum. Dans tous les cas, cette opération est à utiliser avec prudence afin de ne pas biaiser la recherche de l'optimum absolu.

V.3.5 Inversion

A l'analyse des premiers tests, il est apparu que la façon dont sont codées les chaînes peut conduire à une grave dysfonction de l'algorithme. Par exemple, si l'on observe le codage en base 2 et en 5 bits des nombres voisins 15 et 16, on a les chaînes suivantes :

1 1 1 1 0	pour la valeur 15
0 0 0 0 1	pour la valeur 16

Ces 2 valeurs, forts proches en représentation réelle, ont un codage totalement différent, et donc les opérations de croisement et de mutation ne sont pas à même de générer une valeur à partir de l'autre. On peut donc penser que l'exploration de l'espace de variation

des paramètres est biaisée par le codage utilisé, ce qui est confirmé par la figure ci-dessous qui représente les résultats de l'optimisation d'un problème à 2 paramètres qui n'utilise pas l'opération d'inversion. On remarque très bien que les valeurs testées sont cantonnées dans des zones de l'espace de variation des paramètres, zones définies par des nombres voisins dont les codages sont similaires à ceux présentés ci-avant.

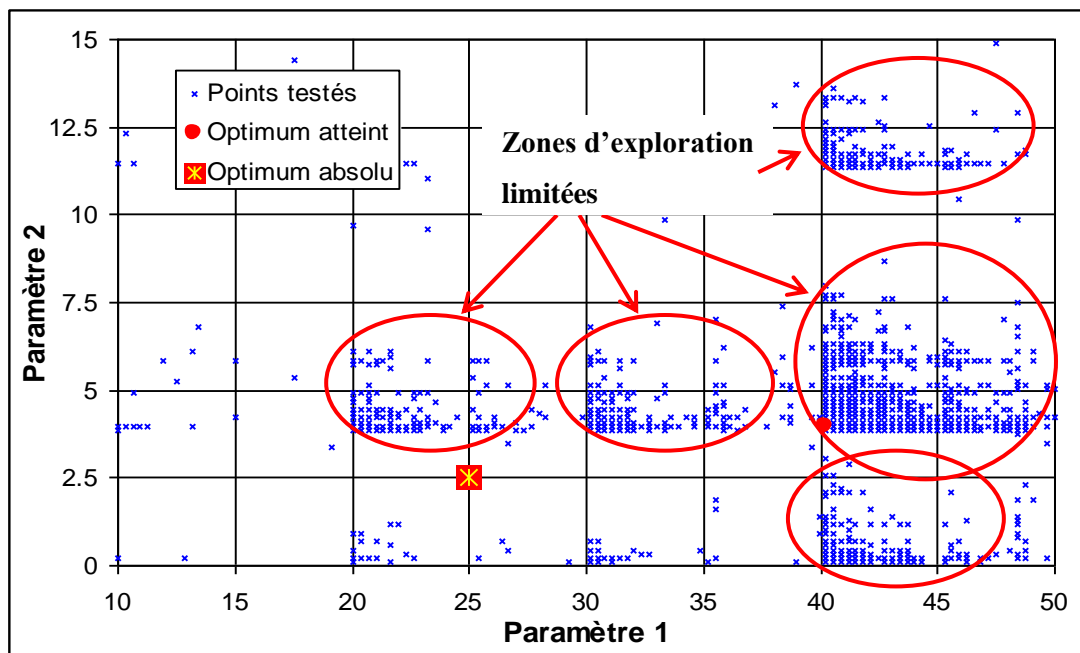


Figure V-10 : Couples de valeurs des paramètres testés par l'AG

Afin d'éviter ce mauvais comportement, une opération d'inversion totale du codage d'un paramètre a été implémentée dans l'AG. Cette opération d'inversion s'apparente en fait à une mutation totale du codage d'un paramètre, c'est pourquoi on a choisi de l'effectuer avec une certaine probabilité « pmuttot » gardée assez faible, comme la probabilité de mutation « pmut ».

De façon pratique, dans le corps du programme, après sa génération, une nouvelle chaîne de codage représentant un paramètre a une probabilité « pmuttot » d'être totalement inversée.

V.4 FONCTION OBJECTIF

V.4.1 Généralités

De part leur mode de fonctionnement, les AG recherchent le maximum absolu d'une fonction objectif f_{obj} positive en les paramètres à optimiser. Il y a donc lieu dans certains cas

de modifier la fonction à optimiser de façon à ce qu'elle soit strictement positive et que la solution attendue rencontre un critère de maximisation.

Le choix de la fonction objectif et son évaluation sont d'une importance capitale pour le bon fonctionnement de l'algorithme génétique. En effet, si la fonction ne conduit pas à des pics assez marqués, les optimums sont peu différenciés du reste des possibilités et la convergence est plus lente. En effet, une chaîne représentant une bonne combinaison de paramètres n'aura pas plus de chance qu'une chaîne moins efficace de se retrouver dans la génération suivante de l'AG, leur probabilité de sélection, directement liée à leur valeur de fonction objectif, étant du même ordre de grandeur. Par contre, si la fonction objectif possède des pics trop marqués, une chaîne avec une très bonne valeur de fonction objectif, mais pas nécessairement l'optimum absolu, risque de coloniser toute la nouvelle population tant sa probabilité de sélection sera grande par rapport aux chaînes « moyennes ».

V.4.2 Transformations des fonctions à optimiser

La plupart des problèmes d'optimisation qui nous intéressent concernent la minimisation d'une fonction $e(x)$ plutôt que la maximisation d'une fonction $u(x)$. Les seules données fiables et directement accessibles dont on dispose en général en hydraulique de surface sont des mesures de hauteur d'eau dans les rivières, voire des hydrogrammes de crues observés, mais ces derniers sont de toute façon déduits de mesures de hauteur d'eau à partir de courbes de tarage. Les problèmes que nous allons traiter vont donc principalement être de trouver la meilleure combinaison des paramètres qui minimise l'écart entre des valeurs de hauteur d'eau calculées et celles mesurées aux échelles limnimétriques.

L'utilisation de la méthode des moindres carrés pour calculer l'écart entre les deux fonctions nous assure que la fonction à minimiser $e(x)$ soit toujours positive, ce qui facilite grandement son retraitement adéquat, par exemple en effectuant l'opération suivante, proposée par Goldberg [1], pour calculer la fonction objectif $f_{obj}(x)$:

$$f_{obj}(x) = \begin{cases} C_{max} - e(x) & \text{quand } e(x) < C_{max} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{V-4}$$

La difficulté de cette transformation réside dans le choix de C_{max} qui doit assurer que f_{obj} soit toujours positive. En effet, on connaît rarement à l'avance les valeurs que peut prendre $e(x)$ dans la gamme de variation des paramètres. Ce problème est analysé plus en détail par Goldberg [1] qui propose plusieurs façons d'évaluer C_{max} .

Dans le cadre de ce travail, la transformation utilisée est la suivante :

$$f_{obj}(x) = \frac{1}{e(x)^a} \quad \text{V-5}$$

avec a un exposant positif (généralement 1) choisi de façon à exacerber suffisamment les pics de la fonction objectif et $e(x)$ la fonction à minimiser évaluée de la façon suivante en fonction des i valeurs de hauteurs d'eau h mesurées sur la rivière :

$$e(x) = \sum_{j=1}^i h_{j,mesurée} - h_{j,calculée}^b \quad \text{V-6}$$

où b est un multiple positif de 2.

Cette fonction objectif évite toute évaluation préalable de $e(x)$ et permet de régler l'amplitude des pics en faisant varier la valeur des coefficients a et b .

Dans le cas où l'optimisation concerne directement la maximisation d'une fonction de profit $p(x)$ par exemple, il convient d'être attentif à ce que $p(x)$ soit toujours positive. Une transformation de la forme

$$f_{obj}(x) = \begin{cases} p(x) + C_{\min} & \text{quand } p(x) + C_{\min} > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{V-7}$$

peut d'ailleurs s'avérer nécessaire.

V.4.3 Retraitement de la fonction objectif

Afin d'éviter les dysfonctions évoquées ci-avant, colonisation de la nouvelle population par une seule chaîne ou absence de convergence à cause de pics peu prononcés, on peut retraiter les valeurs de la fonction objectif au sein d'une génération de façon à permettre une saine compétition entre les différentes chaînes tout en favorisant, mais pas trop, les meilleurs individus.

Ce retraitement est surtout utile au début et à la fin de l'exécution de l'AG : la première population de l'AG est générée de façon aléatoire et il est courant qu'elle contienne quelques très bonnes chaînes au sein d'une population globalement médiocre. La règle de sélection habituelle (V-3) conduirait alors à la colonisation de la nouvelle population par ces quelques éléments, ce qui n'est pas souhaitable et est même une des causes principales de convergence prématurée de l'algorithme. Vers la fin de l'exécution, la situation est différente : il est possible qu'il y ait toujours une bonne diversité dans la population, mais l'adaptation moyenne de la population risque d'être fort proche de celle du meilleur individu, ce qui fait que la probabilité de sélection de celui-ci n'est pas supérieure à la probabilité moyenne de sélection de la population, et l'optimisation se réduit à une exploration aléatoire parmi des individus globalement médiocres.

Dans tous ces cas, le retraitement de la fonction objectif peut être d'une grande efficacité ; il consiste à redistribuer les valeurs de la fonction objectif de façon à conserver la moyenne d'adaptation de la population tout en contrôlant le nombre de descendants probables du maximum de la population.

La transformation linéaire (Figure V-11) de la fonction objectif a été utilisée avec succès dans ce travail. Elle consiste à transformer les valeurs f_{obj} de la fonction objectif en des valeurs f'_{obj} selon l'équation suivante :

$$f'_{obj} = af_{obj} + b \quad \text{V-8}$$

où a et b sont choisis de façon à conserver la valeur moyenne de la fonction objectif $f_{obj,moy}$ dans la population tout en prodiguant au maximum une probabilité de sélection C_{mult} fois supérieure à la probabilité moyenne de sélection des individus.

Les expressions de a et b s'obtiennent à partir du système :

$$\begin{cases} f'_{obj,moy} = f_{obj,moy} = af_{obj,moy} + b \\ f'_{obj,max} = C_{mult} f_{obj,moy} = af_{obj,max} + b \end{cases} \quad \text{V-9}$$

et on a donc

$$\begin{cases} a = \frac{C_{mult} - 1}{f_{obj,max} - f_{obj,moy}} f_{obj,moy} \\ b = \frac{f_{obj,max} - C_{mult} f_{obj,moy}}{f_{obj,max} - f_{obj,moy}} f_{obj,moy} \end{cases} \quad \text{V-10}$$

Une valeur de C_{mult} égale à 2 a donné de bons résultats dans la plupart des cas testés.

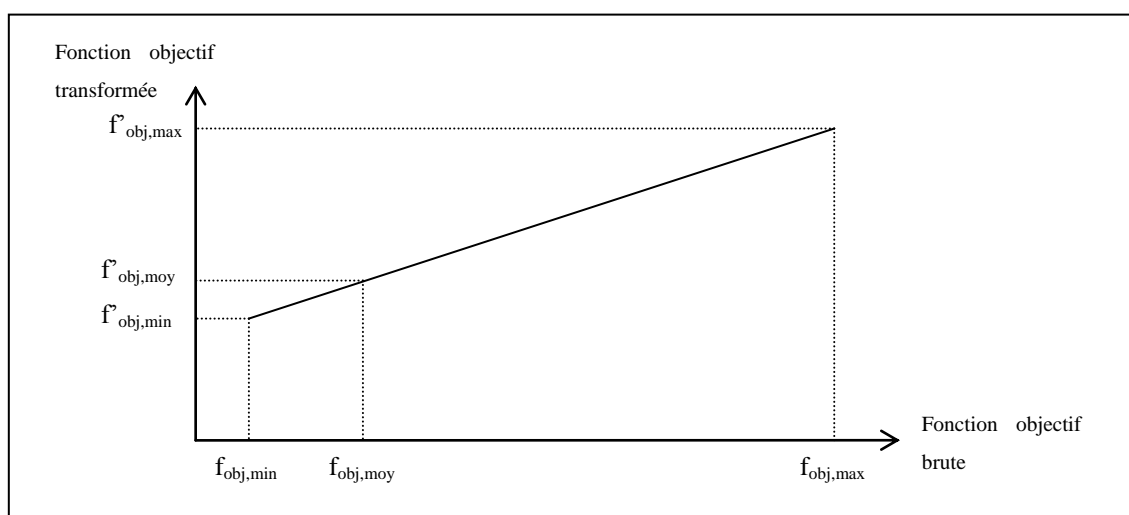


Figure V-11 : Transformation linéaire « normale » de la fonction objectif

Comme le fait remarquer Goldberg [1], cette transformation de la fonction objectif brute f_{obj} peut conduire à des erreurs, surtout en fin d'exécution. Au début, il n'y a pas de problème : la valeur de la fonction objectif des individus extraordinaires diminue alors que celle des individus faibles augmente. On permet donc une saine compétition entre toutes les chaînes proposées au départ. Plus loin dans le processus par contre, la situation peut se compliquer, par exemple dans le cas où quelques très mauvais individus survivent dans une population relativement bien adaptée. Ces individus ont en effet une valeur de fonction objectif très faible par rapport à la moyenne et au maximum de fonction objectif de la population, qui sont eux fort proches. Cela peut conduire à des valeurs de fonction objectif retraitée négatives pour ces mauvais individus (Figure V-12). Une façon très simple de résoudre ce problème est, quand on ne peut pas appliquer le coefficient C_{mult} souhaité, d'appliquer une nouvelle transformation linéaire de la forme V-8 pour laquelle on garde de nouveau la moyenne de la fonction objectif et on cherche à vérifier que le minimum de la fonction transformée soit égal à 0.

Le système en les paramètres a et b s'écrit alors

$$\begin{cases} f'_{obj,moy} = f_{obj,moy} = af_{obj,moy} + b \\ f'_{obj,min} = 0 = af_{obj,min} + b \end{cases} \quad \text{V-11}$$

ce qui conduit aux valeurs suivantes de a et b :

$$\begin{cases} a = \frac{f_{obj,moy}}{f_{obj,moy} - f_{obj,min}} \\ b = \frac{f_{obj,min} f_{obj,moy}}{f_{obj,min} - f_{obj,moy}} \end{cases} \quad \text{V-12}$$

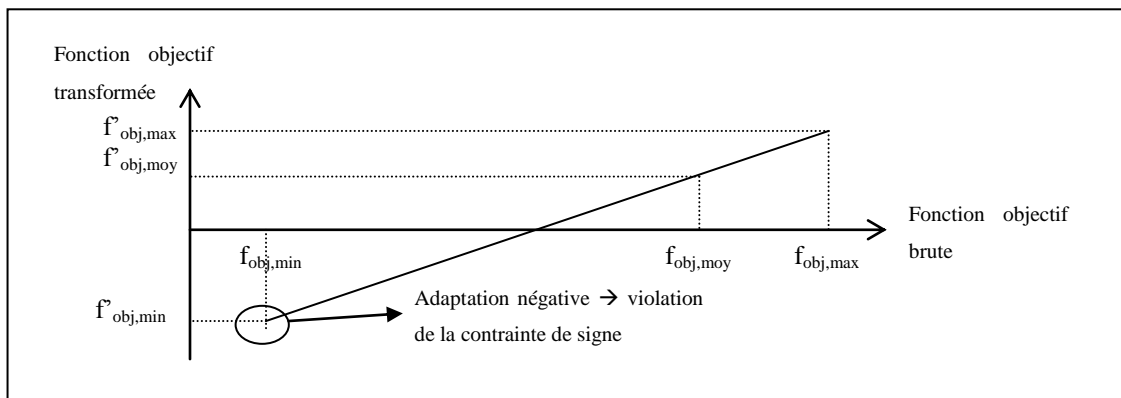


Figure V-12 : Problème lié à la transformation linéaire « normale » de la fonction objectif

Une fois la fonction objectif retraitée, on se génère une nouvelle population à partir de l'ancienne à l'aide des opérateurs de sélection, de croisement et de mutation définis précédemment, en calculant les probabilités de sélection à partir de f'_{obj} :

$$P_{sélection,i} = \frac{f'_{obj,i}}{\sum_{j=1}^N f'_{obj,j}} \quad \text{V-13}$$

V.4.4 Fonction objectif globale ou locale

Lorsque l'on a plusieurs paramètres à optimiser pour un problème donné, deux approches sont possibles pour calculer la valeur de la fonction objectif :

- soit on calcule une valeur globale pour chaque chaîne codée en fonction d'une série de points de comparaison, et on fait évoluer les populations en sélectionnant des chaînes entières dans l'ancienne population pour construire la nouvelle. C'est le cas des problèmes avec des paramètres dépendants.
- soit on calcule, pour chaque paramètre au sein d'une chaîne, une valeur en fonction de certains points de comparaison, et on construit les nouvelles chaînes paramètre par paramètre à l'aide de ces valeurs de fonctions objectifs locales. C'est le cas des problèmes avec des paramètres totalement indépendants

Les formules introduites dans le logiciel permettent d'évaluer une fonction locale « hybride » en effectuant une moyenne pondérée des fonctions locales et globale normées.

$$f''_{obj,loc,i} = \alpha \frac{f_{obj,glob}}{f_{obj,glob,max}} + (1 - \alpha) \frac{f_{obj,loc,i}}{f_{obj,loc,i,max}} \quad \text{V-14}$$

Cela est intéressant lorsque l'on a des données de comparaison qui dépendent d'un paramètre global et d'un paramètre purement local.

Par exemple, on a cherché dans ce travail à déterminer pour une rivière la valeur du coefficient de frottement de Manning-Strickler et la valeur des débits pour différentes valeurs de hauteur d'eau mesurées sur plusieurs échelles limnimétriques. Concrètement, on avait à notre disposition 5 séries de mesures en 4 échelles, chaque série ayant été relevée à un instant différent et donc pour un débit différent. Le coefficient de frottement K de la rivière était quant à lui considéré comme constant avec le débit. On avait donc 6 paramètres à optimiser, dont 5 indépendants entre eux. Les séries de mesures dépendaient donc d'un paramètre commun et d'un paramètre totalement indépendant.

L'optimisation a été menée comme suit : les chaînes de l'AG contenaient le codage des 6 paramètres. On a calculé pour chaque débit une valeur de fonction objectif locale « hybride » en calculant une moyenne pondérée entre les écarts du résultat calculé par rapport à la ligne d'eau relative à ce débit et la fonction objectif globale du problème évaluée avec toutes les données disponibles. Une 6^{ième} valeur de fonction objectif a été calculée pour le frottement, et ce de façon globale en considérant tous les points de mesure disponibles.

L'évolution des populations s'est alors effectuée en reconstruisant les chaînes paramètre par paramètre en se servant pour sélectionner les débits des fonctions objectifs locales et pour le paramètre de frottement de la fonction objectif globale. Les résultats sont fournis plus loin (Chapitre VI).

Cette seconde approche conduit à des résultats très probants. En effet, le choix des valeurs de débit les mieux adaptées est guidé par le résultat global de la chaîne testée mais aussi par le résultat propre au débit considéré pour la ligne d'eau le concernant, ce qui améliore nettement la convergence de l'AG.

V.5 STRUCTURE DE L'AG

La structure de l'AG développé dans le cadre de ce travail est la structure classique proposée dans la littérature, sur laquelle sont venues se greffer les opérations supplémentaires proposées.

Le programme, écrit en Fortran 90, comprend une série de sous-procédures, et notamment une sous-routine de génération de nombres aléatoires basée sur le couplage des schémas de Marsaglia et Park-Miller ainsi que des sous-routines de décodage des chaînes, de sélection et de croisement des chaînes ou des paramètres au sein d'une chaîne et une sous-routine de mutation des bits avec une probabilité *pmut*.

Le corps de l'algorithme est quant à lui composé d'une séquence d'initialisation dans laquelle on lit les paramètres du problème, on calcule les intervalles de variation des paramètres et on génère une première population de chaînes toutes différentes et acceptables par rapport aux contraintes. Il faut noter qu'on a ici laissé la possibilité à l'utilisateur de fournir lui-même les chaînes de la première population et ce de façon à pouvoir comparer entre elles différentes méthodes d'évolution des populations.

La séquence d'initialisation est suivie de la séquence principale d'évolution des populations pendant un nombre de génération fixé par l'utilisateur. On y décode les paramètres de la population *i*, on calcule la valeur réelle de ceux-ci en les projetant sur leur intervalle de variation, on calcule pour chaque série la valeur de la fonction objectif pour

autant que cette série n'aie pas encore été testée et on stocke le résultat de façon à éviter de faire 2 fois le même calcul de fonction objectif. Une fois les valeurs de fonction objectif de l'ensemble de la population i connues, on les retraits éventuellement avant de générer la nouvelle population $i+1$ par les opérations de sélection, croisement et mutation expliquées précédemment. Si on le souhaite, on peut à ce moment forcer l'AG à garder dans la nouvelle population la meilleure combinaison des paramètres atteinte jusqu'à présent. Pour terminer, on stocke les données et résultats relatifs à la population i avant de faire évoluer la population $i+1$.

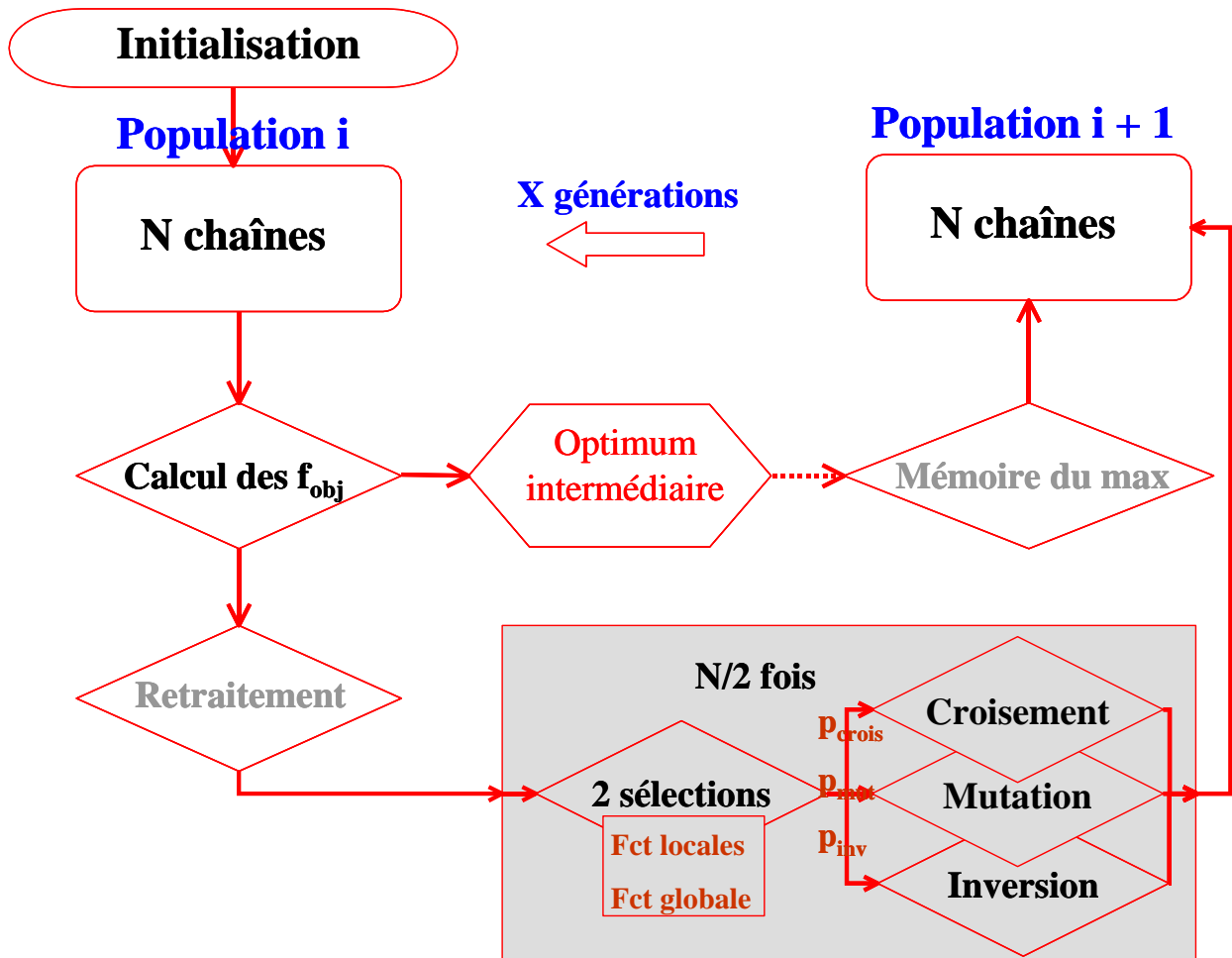


Figure V-13 : Schéma de fonctionnement de l'AG

V.6 CONNEXION AG – PROGRAMMES DE CALCUL

A l'analyse du schéma ci-avant (Figure V-13), on devine déjà que la façon dont a été construit l'AG permet de faire appel à n'importe quel programme de calcul pour évaluer la fonction objectif.

En fait, le programme se présente sous la forme d'un module qui fait appel à toute une série de sous-routines, dont une sous-routine d'évaluation de la fonction objectif. Il suffit donc

que le programme de calcul soit construit également en module avec une routine principale d'initialisation et une autre de calcul, afin de pouvoir être utilisé par l'AG.

C'est notamment ce qui a été fait avec le logiciel Wolf1D. Dans ce cas, l'AG peut ne faire appel qu'aux routines de calcul du programme sans repasser à chaque évaluation de fonction objectif par une lecture des paramètres fixes de la simulation (topographie, réseau,...) et sans réinitialiser à chaque fois les matrices nécessaires au calcul. En fait, l'AG ne change que les paramètres qu'il modifie (débit, coefficient de frottement,..) à l'endroit où ils sont stockés dans le logiciel Wolf1D avant de relancer un calcul.

La même démarche a été effectuée lors de l'utilisation du logiciel WolfHydro, logiciel de calcul des écoulements en fine lame sur bassin versant. En effet, l'AG est destiné, à terme, à pouvoir résoudre n'importe quel problème d'optimisation apparaissant dans l'utilisation ou dans l'application de n'importe quel logiciel de la suite WOLF du Laboratoire d'Hydraulique Appliquée et des Constructions Hydrauliques de l'Université de Liège.

Schématiquement, le corps du logiciel d'optimisation se présente sous la forme d'un appel aux procédures de différents modules comme schématisé ci-dessous :

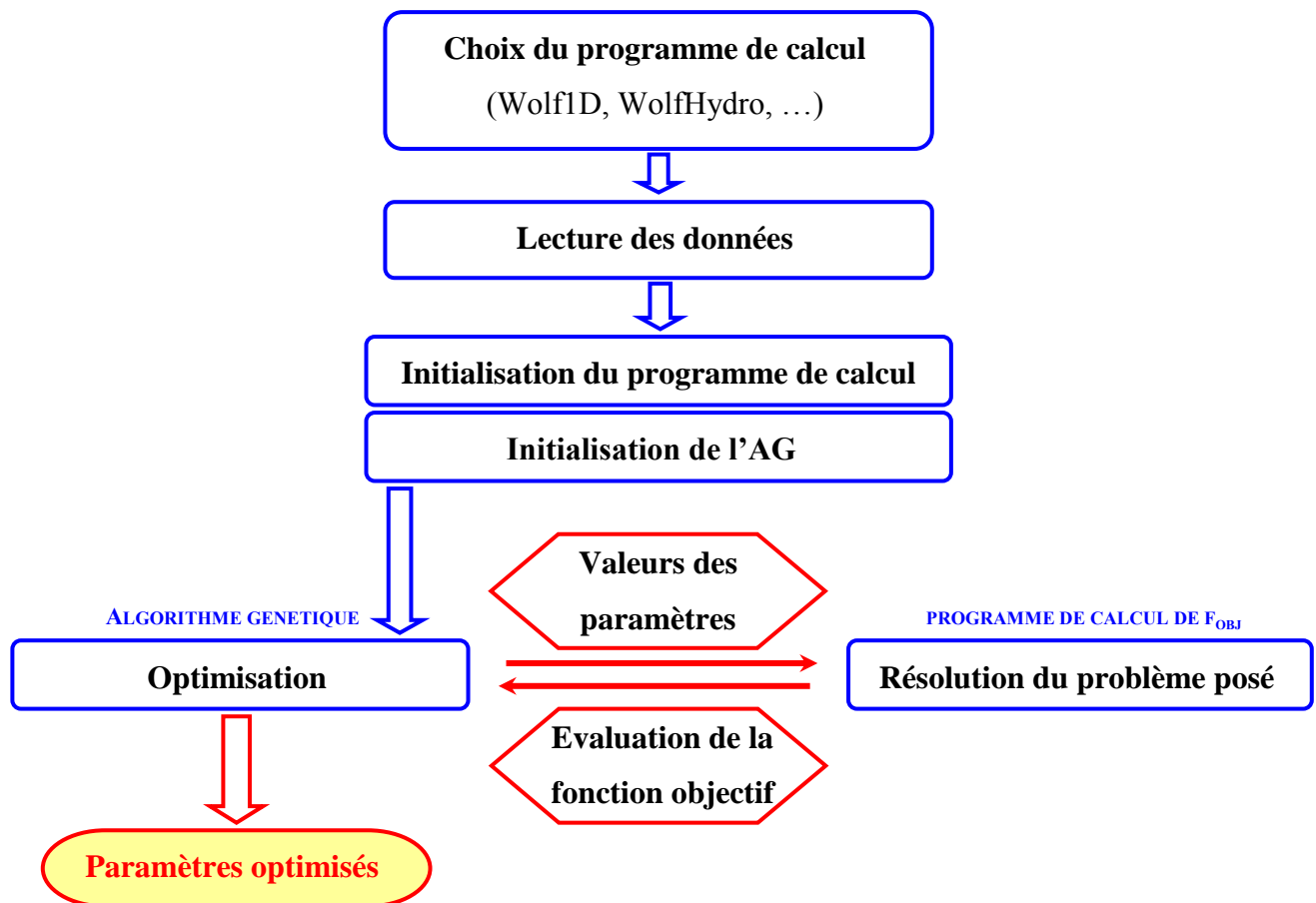


Figure V-14 : Schéma de principe du programme d'optimisation

VI TESTS ET APPLICATIONS

VI.1 INTRODUCTION

L'algorithme génétique d'optimisation a tout d'abord été testé dans le cadre de la recherche de la valeur du coefficient de frottement de Manning-Strickler et du débit d'un cours d'eau à partir de mesures de hauteur d'eau en différentes sections. Les calculs hydrauliques ont été effectués à l'aide du logiciel Wolf1D du HACH décrit précédemment.

Afin de s'affranchir d'éventuelles erreurs ou incertitudes sur les hauteurs mesurées ou sur les valeurs optimales des paramètres, les cas introduits dans l'AG ont été préalablement calculés avec le logiciel Wolf1D. De cette façon, la valeur exacte des paramètres à atteindre était connue avant l'optimisation et on a pu se concentrer uniquement sur la façon dont l'AG convergeait vers ces valeurs, sans se soucier de leur exactitude physique pour les cas considérés.

Une fois l'AG validé par cette première approche, le cas de l'optimisation du coefficient de frottement d'un réseau de rivières réel et du turbinage d'une centrale hydroélectrique a été étudié, et ce dans le cadre du travail de fin d'études d'Olivier Dumoulin. Pour cette seconde application, la solution optimale était inconnue a priori, mais on a effectué l'optimisation à l'aide de deux algorithmes : l'algorithme génétique et un algorithme d'optimisation plus classique développé par le Electrical Engineering Department and Institute for Systems Research of the University of Maryland, USA et nommé FFSQP for Fortran Feasible Sequential Quadratic Programming [9].

Des applications hydrologiques ont également été effectuées par la suite à l'aide du logiciel WolfHydro également développé par le HACH.

Remarque générale :

De part son utilisation de nombres aléatoires, l'AG ne devrait jamais suivre le même chemin de convergence, même pour 2 applications à un même problème. En effet, la population de départ sera chaque fois totalement différente, et les nombres aléatoires qui décident des opérations de sélection, croisement, ... également.

Il nous fallait cependant pouvoir comparer entre elles différentes simulations afin de pouvoir juger de la rapidité et de la « qualité » de la convergence induite par l'une ou l'autre méthode utilisée. Pour ce faire, on a implémenté une seconde routine de génération de

nombres pseudo-aléatoires. Cette routine génère des nombres aléatoires mais identiques d'une exécution de l'algorithme à l'autre.

Les comparaisons de différentes simulations qui suivent sont donc licites, la population de départ et la séquence de nombres aléatoires étant à chaque fois identiques.

VI.2 TESTS DES DIFFERENTES CONFIGURATIONS DE L'AG

VI.2.1 L'Ourthe à Houffalize

Les programmes ont été appliqués à ce cours d'eau car nous disposons d'une banque de données très complète sur la rivière, du moins pour un tronçon de 559.4 mètres traversant la ville d'Houffalize à hauteur du parking des autobus.

Un relevé topographique précis du site, réalisé en 1989, existe à la Région Wallonne (Siège central à Jambes – N° de dossier IGE.3H/L.T 1989/C.E.12). Les sections disponibles sont au nombre de 30 et sont équidistantes d'environ 20 mètres. Le fond de la rivière varie de la cote 327.08 mètres pour la section aval à la cote 327.9 mètres pour la section amont. Cette rivière présente peu de difficultés et constitue donc une excellente application pour valider l'AG dans un cas réaliste.



Figure VI-1 : Tronçon considéré de l'Ourthe à Houffalize

Afin de s'affranchir de toute erreur sur la valeur des hauteurs d'eau mesurées sur site, nous avons adopté la démarche suivante dans cette application : avec les données topographiques, nous avons calculé à l'aide du logiciel Wolf1D les lignes d'eau correspondant à des débits de 0.5, 2.5, 5, 7.5 et 10 m³/s, valeurs qui balayent la gamme des débits généralement observés à cet endroit. Comme condition limite aval du problème, nous avons imposé une hauteur d'eau en s'inspirant des données relevées sur le terrain, la condition limite amont étant le débit. Le coefficient de frottement de Manning-Strickler a été pris égal à 25, valeur plausible pour ce type de cours d'eau. A partir des résultats en terme de hauteur d'eau, nous avons obtenu des valeurs de hauteurs mesurées en 4 échelles limnimétriques « virtuelles » placées respectivement aux abscisses 0, 186.3, 356.6 et 497.9 mètres à partir de

la section amont. Nous disposons donc de 5 séries de 4 hauteurs mesurées correspondant à 5 débits et à 1 coefficient de frottement, soit 6 paramètres.

Ces valeurs nous ont servi de données pour l'AG afin de déterminer par méthode inverse la valeur du coefficient de frottement et les débits de la rivière.

On trouvera ci-après un tableau récapitulatif des données utilisées et des résultats obtenus par le calcul WOLF1D ainsi qu'un tracé des 5 lignes d'eau générées.

Echelle	Abscisses	Hauteurs d'eau calculées (m)				
		Q = 0.5 m³/s	Q = 2.5 m³/s	Q = 5 m³/s	Q = 7.5 m³/s	Q = 10 m³/s
1	0	0.16	0.36	0.57	0.77	0.94
11	186.3	0.24	0.52	0.75	0.95	1.13
20	356.6	0.64	0.90	1.14	1.33	1.50
27	497.9	0.59	0.79	0.97	1.13	1.27
Cond limite aval (altitude de surface libre)		327.5	327.6	327.7	327.8	327.9
		Coefficient de frottement			K = 25	

Tableau VI-1 : Données et résultats WOLF1D

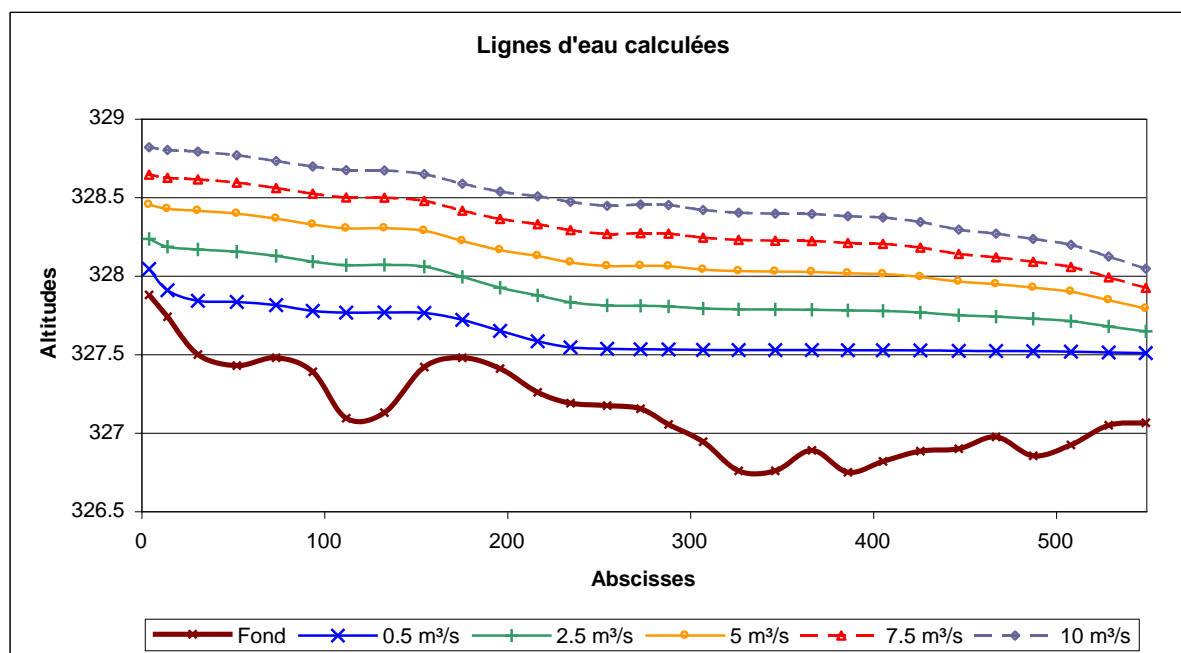


Figure VI-2 : Lignes d'eau générées par WOLF1D

VI.2.2 Paramètres de l'AG

L'utilisation pratique de l'AG nécessite de fixer certaines valeurs de paramètres internes et de probabilité d'occurrence de certains événements.

La fonction objectif a été évaluée via les formules V-6 et V-5 avec des valeurs des paramètres $a = 1$ et $b = 2$. Seules ces valeurs des coefficients a et b ont été utilisées, les résultats étant assez satisfaisants et les pics de la fonction objectif bien marqués. Il n'empêche qu'à l'avenir il y aurait sûrement beaucoup à gagner à explorer d'autres valeurs ou d'autres façons de calculer la fonction objectif.

La probabilité de croisement des chaînes a été prise égale à $p_{cross} = 0.6$, celle de mutation des éléments à $p_{mut} = 0.0333$. Ces valeurs sont proposées par Goldberg [1] sur base d'études menées par De Jong (1975) qui suggère « que pour avoir de bonnes performances, il faut choisir une probabilité de crossover (croisement) élevée, une probabilité de mutation faible (inversement proportionnelle à la taille de la population), et une population de taille modérée. » Les populations que nous avons étudiées comportaient entre 30 et 120 chaînes suivant le nombre de paramètres et la taille de leur codage. La probabilité d'inversion a été prise égale à 0.01.

VI.2.3 Précision de la méthode

Les résultats fournis par Wolf1D en terme de hauteur d'eau possèdent 8 chiffres significatifs après la virgule pour une expression en mètres. Fournir des données avec une telle précision à l'AG n'a aucun sens, étant entendu que la mesure des hauteurs sur une échelle limnimétrique est au mieux précise au centimètre. Les résultats de Wolf1D ont donc été arrondis avant leur utilisation dans l'AG. Ce faisant, la meilleure valeur des paramètres, c'est-à-dire celle donnant la plus grande valeur de fonction objectif, n'est plus nécessairement celle utilisée au départ pour le calcul des lignes d'eau.

De plus, on a vu auparavant que le codage des paramètres avait pour effet que seul un nombre fini de valeurs pouvait être testé par l'AG dans leur intervalle de variation, et que donc une nouvelle approximation sur le résultat apparaissait.

Afin d'évaluer l'impact de ces approximations, on a effectué, pour une des séries de mesures de hauteur d'eau, un calcul de la fonction objectif de tous les couples coefficient de frottement – débit possibles par pas de 0,1 unité. On a donc balayé la plage du coefficient de frottement K de 10 à 50 par pas de 0,1 et celle du débit de 0,1 à 15 m^3/s par pas de 0,1 m^3/s . Ce balayage a été effectué sur la série des hauteurs correspondant au débit de 2,5 m^3/s . Les résultats sont donnés ci-après.

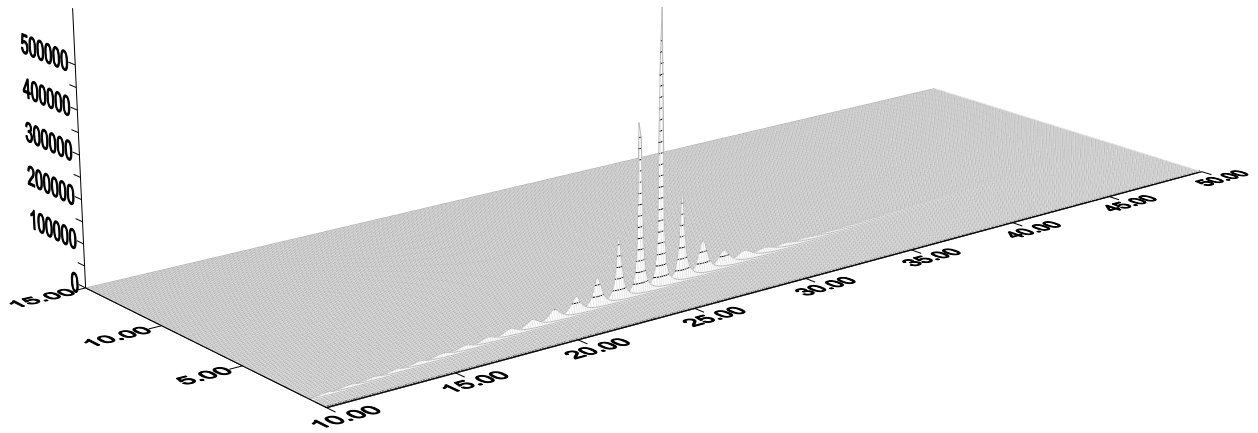


Figure VI-3 : Résultats en terme de valeur de fonction objectif du balayage des intervalles de variation du coefficient de frottement et du débit sur le tronçon de l'Ourthe par rapport à la ligne d'eau pour $Q=2,5 \text{ m}^3/\text{s}$

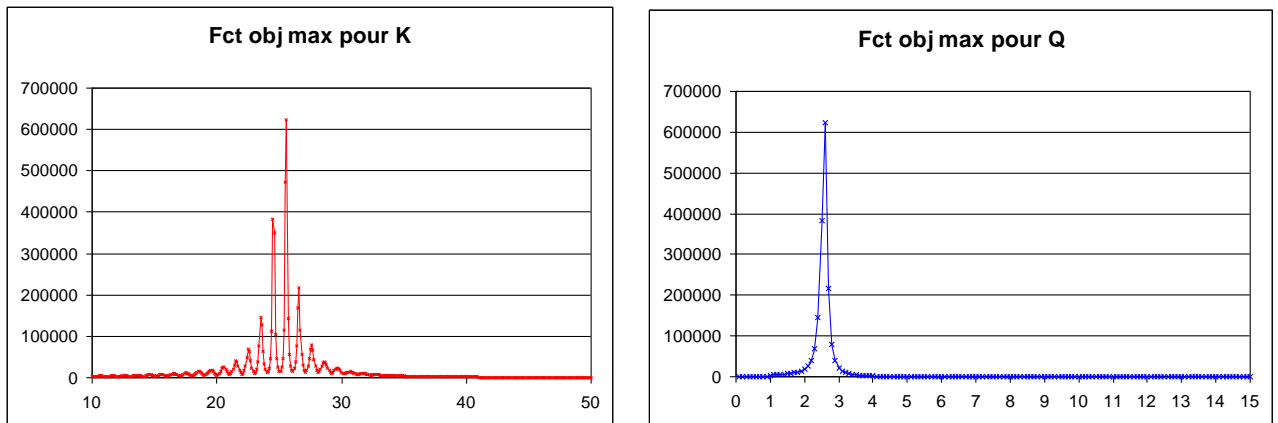


Figure VI-4 : Résultats en terme de maximum de fonction objectif pour le balayage des valeurs du coefficient de frottement de 10 à 50 et des valeurs du débit de 0.1 à 15 m^3/s , par pas de 0,1 unité

On voit clairement (Figure VI-4) que la valeur de $2,5 \text{ m}^3/\text{s}$ du débit optimal est sensiblement conservée. Par contre, le tracé de la fonction objectif maximum en fonction de la valeur du coefficient de frottement présente plusieurs maxima locaux, le maximum absolu étant cependant toujours assez proche de 25.

On peut penser, en regard de ces figures, que le débit est un paramètre assez peu sensible aux faibles variations de hauteurs d'eau, ce qui n'est pas le cas du coefficient de frottement.

Les pics du maximum de la fonction objectif en fonction du coefficient de frottement sont distribués autour de la valeur optimale de départ de 25. Cela s'explique aisément par le

fait que l'arrondi des valeurs de hauteurs d'eau a été effectué tantôt à la valeur supérieure, tantôt à la valeur inférieure, et qu'il existe donc des solutions assez bonnes que l'on approche la ligne d'eau réelle par le bas ou par le haut.

Quoiqu'il en soit, on se rend bien compte ici de l'utilité des AG dans ce type de problème d'optimisation, la fonction à optimiser présentant des maximums locaux très marqués qui peuvent conduire à des valeurs erronées des paramètres optimisés.

Il est important de signaler que la variation par pas finis des valeurs des paramètres n'est pas l'apanage des seuls algorithmes génétiques. En effet, toutes les méthodes d'optimisation procèdent à un moment ou à un autre à une modification par pas fini de la valeur des paramètres.

De plus, la précision sur les mesures est la même qu'elle que soit la méthode d'optimisation utilisée, et les problèmes définis ici sont donc des problèmes généraux des méthodes d'optimisation.

Une façon de diminuer l'impact de ces approximations est de diminuer le pas de variation des paramètres, c'est à dire dans notre cas d'augmenter le nombre de bits pour le codage d'un paramètre. Ce faisant, on augmente fortement le temps de calcul nécessaire et la taille de l'espace à explorer, tout en ne gagnant qu'une précision toute relative sur des valeurs de débits ou de coefficient de frottement.

En conclusion, nous allons donc nous contenter d'une précision minimale sur la valeur des paramètres, mais nous allons nous efforcer d'atteindre le maximum absolu de la fonction objectif par l'optimisation, la précision étant par la suite directement ajustable par une modification du codage des paramètres ou une amélioration de la précision sur les données.

VI.2.4 Erreur sur les données

Comme on vient de le signaler, les mesures de hauteurs d'eau à l'aide d'échelles limnimétriques ou de limnimètres ne sont jamais précises au-delà du centimètre. De plus, la surface libre d'un écoulement sur la largeur du plan d'eau n'est jamais parfaitement horizontale, et le niveau d'eau relevé n'est donc pas toujours exactement celui correspondant au niveau calculé. Enfin, la collecte des données est entachée de toutes une série d'erreurs qu'il est presque impossible d'éviter (erreurs humaines, échelles qui bougent,...)

Il est donc bon de tester l'influence d'une erreur dans les données sur les résultats de l'optimisation.

Par exemple, on a analysé le problème d'optimisation du coefficient de frottement et du débit le cas $Q = 2.5 \text{ m}^3/\text{s}$: on a introduit une erreur de + 2 centimètres sur l'échelle située au nœud 11, ce qui fourni les données suivantes :

Nœud	Hauteur d'eau	
	utilisée	réelle
1	0.36	0.36
11	0.54	0.52
20	0.9	0.9
27	0.79	0.79

Tableau VI-2 : Données erronées utilisées pour le débit $2,5 \text{ m}^3/\text{s}$ (coefficient de frottement de 25)

En procédant au calcul de la fonction objectif pour toutes les valeurs possibles du coefficient de frottement et du débit dans les intervalles de variation proposés, et ce par pas de 0,1 unité, on a la représentation suivante de la fonction objectif et l'influence de la valeur des paramètres sur la solution (Figure ci-dessous).

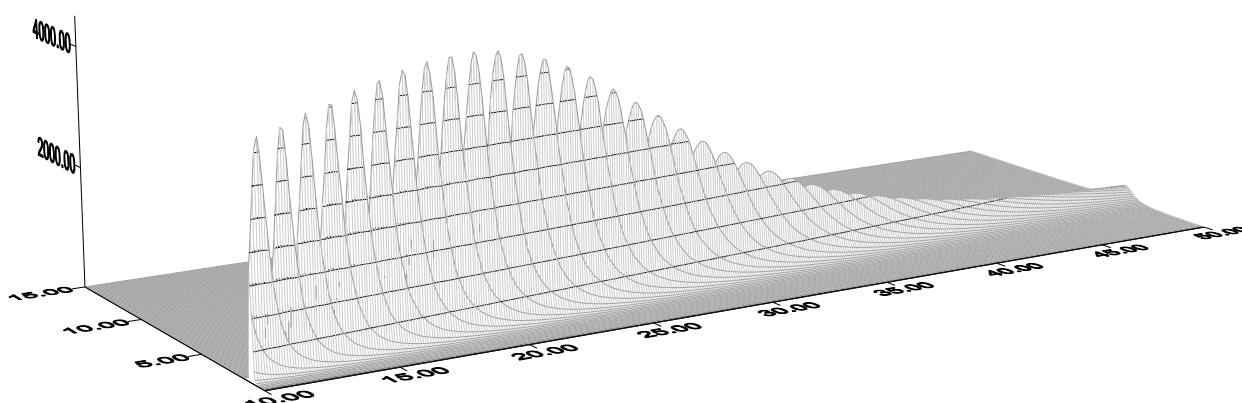


Figure VI-5

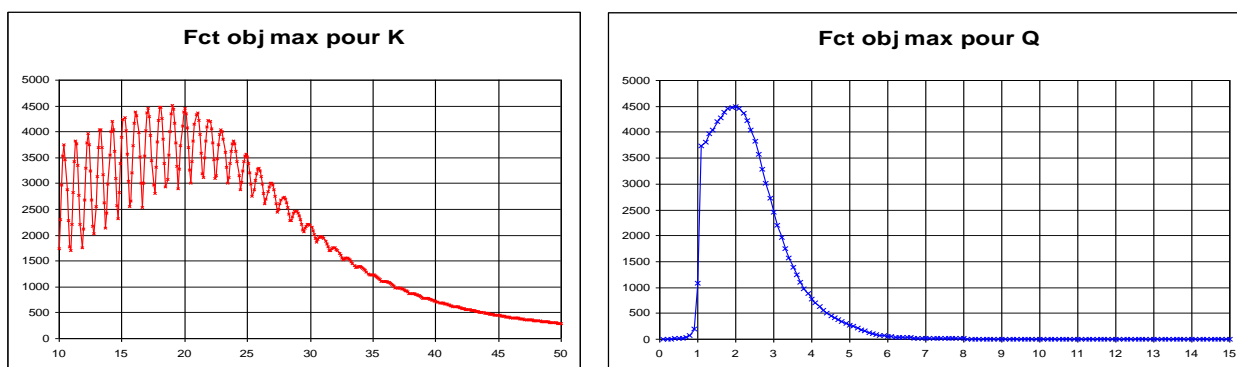


Figure VI-6 : Résultats en terme de maximum de fonction objectif pour le balayage des valeurs du coefficient de frottement de 10 à 50 et des valeurs du débit de 0.1 à $15 \text{ m}^3/\text{s}$, par pas de 0,1 unités, avec des données erronées

On voit clairement sur ces 3 figures que, si le pic du débit reste bien marqué, il s'est déplacé vers la valeur de 2 m³/s, tandis que le pic pour la valeur du coefficient de frottement est fortement aplati et déplacé vers des valeurs de 18-19 ; de plus, la fonction objectif est devenue extrêmement bruitée lorsque le coefficient de frottement varie!

Même si l'AG trouve l'optimum de ce problème, celui-ci sera donc erroné par rapport aux valeurs réelles à cause d'une faible erreur sur une mesure de hauteur d'eau.

Il faut cependant remarquer que l'on a considéré une erreur de lecture sur une seule des 4 échelles. Cela devait obligatoirement conduire à un résultat erroné. En réalité, on peut espérer que, si erreurs il y a, ce sera sur plusieurs échelles et que donc elles auront tendance à se compenser.

Le cas de l'analyse de données réelles ne manquera donc pas d'être riche d'enseignements et permettra sans doute d'encore beaucoup faire évoluer la méthode. Cela ne fait cependant pas partie de ce travail dans lequel on cherche avant tout à obtenir un algorithme d'optimisation fonctionnel pour des données correctes avant de penser à l'appliquer à des cas réels en rivières.

VI.2.5 Optimisation de 2 paramètres

VI.2.5.1 Données générales

Dans un premier temps, on a cherché à optimiser les valeurs d'un seul débit (Q) et du coefficient de frottement (K) de la rivière à partir de la série de mesure relative au débit de 2,5 m³/s. Cela nous a permis de tester pas à pas les différentes opérations de base de l'AG (paragraphe V.3). Le calcul de la fonction objectif a été effectué de façon globale dans chaque cas (paragraphe V.4.4).

On a choisi de coder les paramètres en 7 bits, que ce soit pour le coefficient de frottement ou pour le débit. Les intervalles de variation étaient de 10 à 50 pour le coefficient de frottement et de 0.1 à 15 m³/s pour le débit. Cela nous procure une erreur maximum de l'ordre de 0,25 (1 %) sur K, et de l'ordre de 0,05 m³/s (2 %) sur Q.

Des essais ont également été effectués avec des codages en 10 bits dans les mêmes intervalles de variation, mais le temps de calcul nécessaire était nettement supérieur vu le nombre de valeurs possibles ($2^{10} \times 2^{10} = 1\,048\,576$ possibilités) sans conduire à de nettes différences dans les résultats, la précision d'un codage en 6 bits étant de loin suffisante pour les cas testés.

L'AG a effectué à chaque fois 1000 générations avec des populations de 30 chaînes, c'est à dire que potentiellement il pouvait explorer dans son ensemble l'intervalle de variation

des paramètres (30000 chaînes à tester sur $2^7 \times 2^7 = 16384$ possibilités). Ce grand nombre de générations a été choisi de façon à être sûr que l'AG atteigne l'optimum absolu, et donc de façon à ce que l'on puisse comparer les différentes configurations entre elles. On a choisi des populations de 30 chaînes comme un compromis entre une occupation initiale optimale de l'espace de variation des paramètres et un temps de calcul correct pour une population dans son ensemble. Les simulations ont été effectuées sur un PC équipé d'un processeur Pentium IV 1.4 GHz, ce qui ne représente qu'une dizaine de minutes de calcul.

Pour le problème traité, le maximum calculé de la fonction objectif était de 386 100, avec des valeurs de $K = 25,12$ et de $Q = 2,56 \text{ m}^3/\text{s}$.

VI.2.5.2 Effet du retraitement de la fonction objectif

La première simulation effectuée (Simul 22) possédait les caractéristiques suivantes :

- Pas de retraitement de la fonction objectif,
- Pas de mémoire du maximum,
- Croisement uniforme,
- Pas d'inversion.

Après 1000 générations, on a obtenu le résultat (très mauvais) suivant :

Simul 22	K	Q	Fct Obj
Optimum	25	2.5	386100
Résultat	20.08	2.09	8818
% d'erreur	19.69	16.22	97.72
Nombre de chaînes testées			1011

Tableau VI-3 : Résultats de la simulation de base

On constate tout de suite que le nombre de chaînes différentes qui ont été testées est extrêmement faible, ce qui indique que les populations ont été assez vite « colonisées » par une chaîne unique, ce qui a bloqué le processus de recherche de l'optimum.

Si on regarde les résultats fournis par la simulation sur un graphe représentant le maximum et la moyenne de la fonction objectif pour chaque génération (Figure VI-7), on voit que, rapidement, la moyenne devient proche du maximum. Cela signifie bien que les populations sont colonisées par la première chaîne bien adaptée que l'AG évalue tant sa probabilité de sélection est grande. Cela empêche l'AG d'explorer de nouvelles pistes et donc d'améliorer la valeur des paramètres.

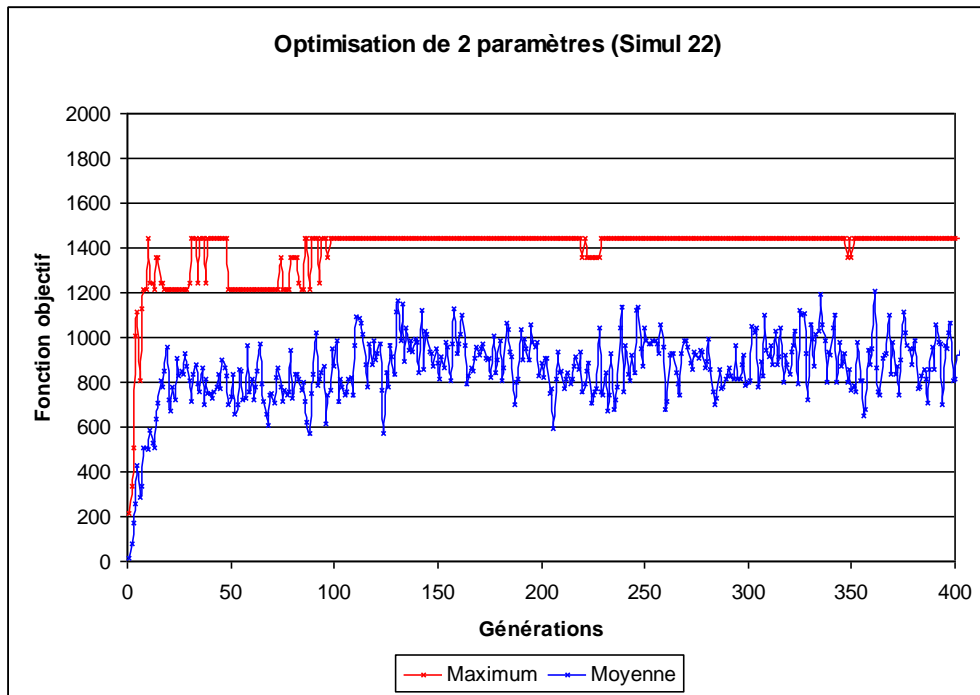


Figure VI-7 : AG de base, la première chaîne « bien adaptée » colonise la population

Le graphe suivant nous montre la répartition dans l'espace de variation des paramètres de la population initiale et de la quatrième population. On voit bien que l'AG ne cherche plus de solution que dans le voisinage immédiat de la première chaîne bien adaptée qu'il a atteint, c'est à dire qu'il ne teste plus que des valeurs qu'il peut se générer par effet de mutation, le croisement étant rendu totalement inefficace car les chaînes sélectionnées sont identiques à chaque fois.

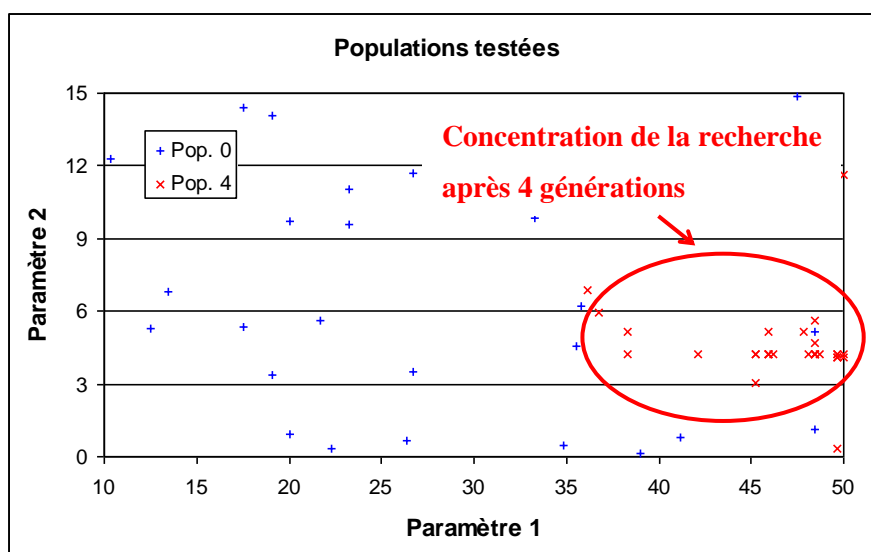


Figure VI-8 : Occupation de l'espace de variation des paramètres

Le problème récurrent des applications effectuées avec l'AG sous sa forme la plus simple est une colonisation des populations par la première « bonne » chaîne trouvée par l'algorithme. Si celle-ci est vraiment « très bonne », cela n'est pas trop grave, l'optimum pouvant être considéré comme atteint, par contre, si celle-ci est moins bonne, toute évolution est exclue par cette colonisation de la population et l'algorithme se retrouve en fait bloqué.

Pour tenter de résoudre ce problème, on a implémenté le retraitement de la fonction objectif comme expliqué précédemment (V.4.3). De cette façon, une bonne chaîne recevra un nombre maximum possible de descendants C_{mult} (choisi égal à 2) plus grand que les autres chaînes, ce qui l'empêchera de coloniser toute la population et permettra une exploration d'autres pistes par l'AG.

La seconde simulation (Simul 17) possédait donc les mêmes caractéristiques que la première mais avec un retraitement de la fonction objectif. Le résultat n'est pas meilleur que dans la situation précédente mais on voit que le nombre de chaînes testées est nettement supérieur que dans le cas précédent.

Simul 17	K	Q	Fct Obj
Optimum	25	2.5	386100
Résultat	30.16	3.03	16880
% d'erreur	20.63	21.32	95.63
Nombre de chaînes testées			3589

Tableau VI-4 : Résultat de la simulation avec retraitement de la fonction objectif → augmentation du nombre de chaînes testées.

Le graphe ci-dessous nous montre qu'il n'y a plus de colonisation des populations, la moyenne de la fonction objectif restant nettement inférieure au maximum.

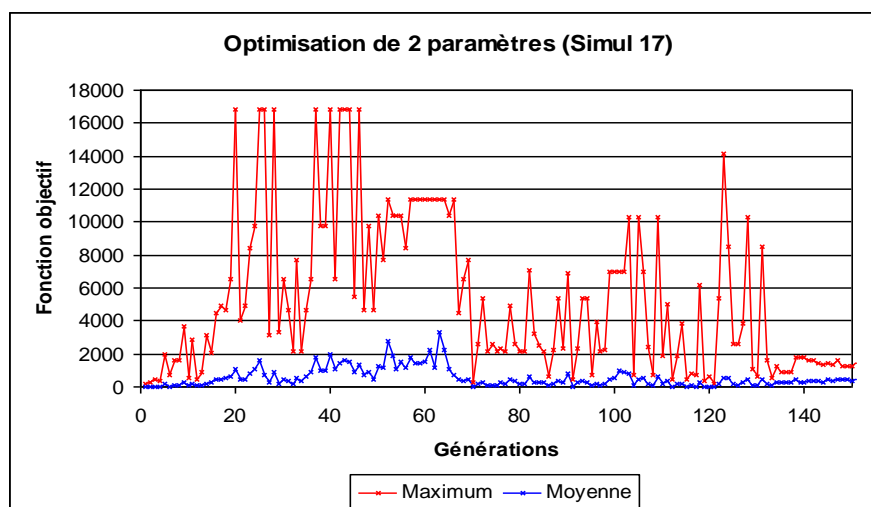


Figure VI-9 : AG avec retraitement de la fonction objectif → il n'y a plus de colonisation des populations

VI.2.5.3 Types de croisement

Le croisement uniforme utilisé jusqu'à présent maximise le mélange de l'information entre les différentes chaînes disponibles dans une population. Les solutions obtenues ne sont cependant pas satisfaisantes. On peut se poser la question de savoir si ce mixage intense des bits entre chaînes parentes ne cassent pas trop de schèmes utiles. On a pour ce faire testé le croisement en 1 point par paramètre, croisement qui conserve théoriquement des morceaux de chaînes plus longs lors de la création de nouveaux chromosomes, tout en maximisant le mélange de l'information en faisant évoluer tous les paramètres de concert.

La simulation 18 possédait les caractéristiques suivantes :

- Retraitement de la fonction objectif,
- Pas de mémoire du maximum,
- Croisement en 1 point par paramètre,
- Pas d'inversion.

Elle a atteint l'optimum absolu comme nous le montre le tableau de résultats :

Simul 18	K	Q	Fct Obj
Optimum	25	2.5	386100
Résultat	25.12	2.56	386100
% d'erreur	0.47	2.55	0.00
Nombre de chaînes testées			8929

Tableau VI-5 : Simulation avec retraitement de la fonction objectif et croisement en 1 point par paramètre

Sur la figure ci-après (Figure VI-10), on voit que l'AG a atteint toute une série d'optima mais sans en conserver d'une population à l'autre, ceci grâce au retraitement de la fonction objectif.

La simulation passe par l'optimum absolu, et on peut donc penser que le croisement utilisé ici est donc plus efficace pour le problème considéré que le croisement uniforme.

Les résultats avec le croisement simple en 1 point ne sont pas présentés car il n'y a pas d'amélioration des performances de l'AG, au contraire : bien que le mélange d'information soit efficace, il n'est opéré que sur un paramètre à la fois et l'évolution des populations est donc ralentie.

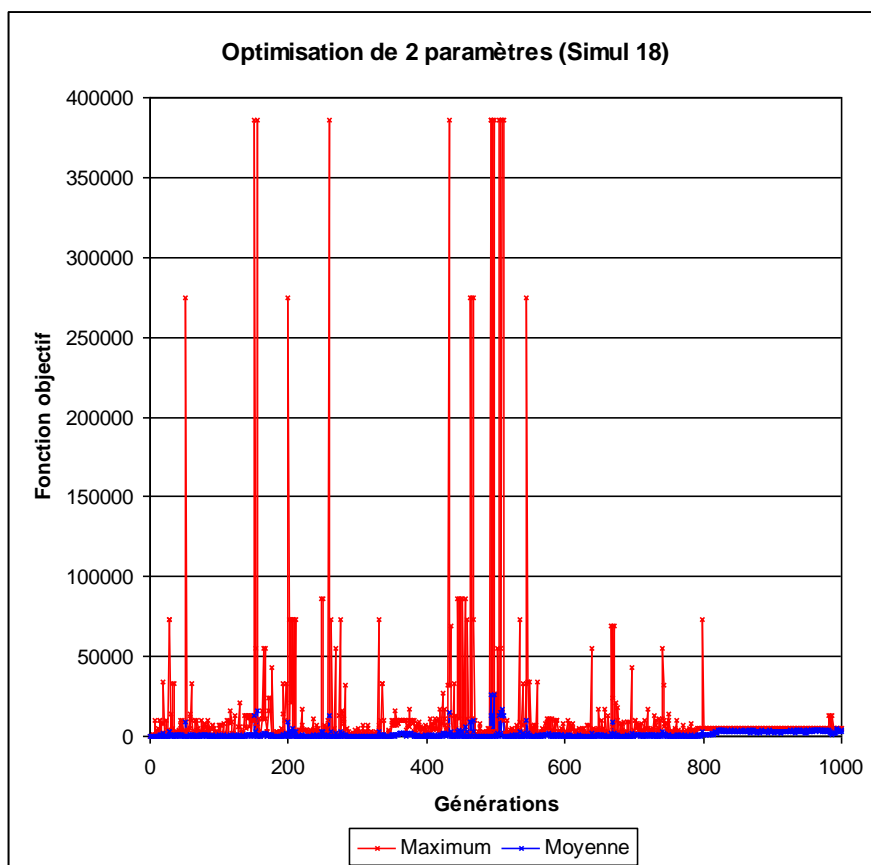


Figure VI-10 : Simulation avec le croisement en 1 point par paramètre

VI.2.5.4 Effet de la mémoire du maximum

On a constaté que la configuration retenue tant qu'à présent pousse l'AG à explorer un grand nombre de pistes différentes, ce qui lui permet de passer par l'optimum, mais celui-ci n'est pas nécessairement gardé en mémoire vu qu'il n'engendre pas un nombre de descendants fortement supérieur à celui des autres chaînes.

La démarche suivie a donc logiquement été de forcer l'AG à garder dans chaque population le meilleur résultat de la population précédente. A noter que cette meilleure chaîne n'est ajoutée à une nouvelle population que si elle ne s'y retrouve pas de façon « naturelle », et ce afin de ne pas contrer l'effet bénéfique du retraitement de la fonction objectif en multipliant le nombre d'occurrence de l'optimum dans les nouvelles populations.

La simulation 14 possédait les caractéristiques suivantes :

- Retraitement de la fonction objectif,
- Mémoire du maximum,
- Croisement en 1 point par paramètre,
- Pas d'inversion.

Simul 14	K	Q	Fct Obj
Optimum	25	2.5	386100
Résultat	25.12	2.56	386100
% d'erreur	0.47	2.55	0.00
Nombre de chaînes testées			2653

Tableau VI-6 : Optimisation avec retraitement de la fonction objectif, croisement en 1 point par paramètre et mémoire du maximum → optimum absolu atteint

On constate que bien que le nombre de chaînes testées soit plus petit que pour la simulation 18, l'optimum absolu est atteint. Sur le graphe ci-dessous, on voit que l'AG reste longtemps « bloqué » sur un optimum local avant d'atteindre l'optimum absolu.

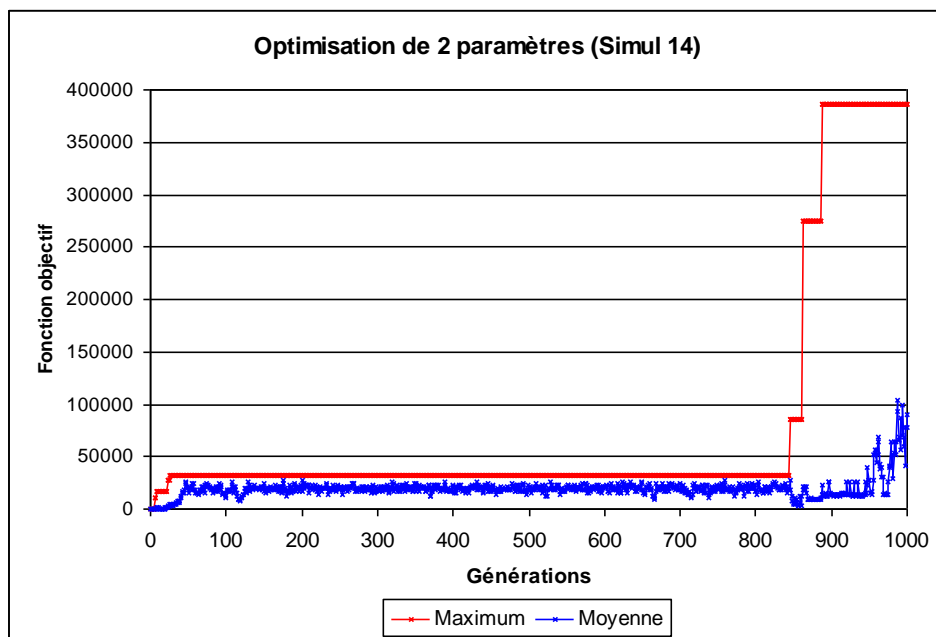


Figure VI-11 : l'optimisation atteint l'optimum absolu mais est restée longtemps sur un résultat médiocre

VI.2.5.5 Effet de l'inversion

A l'analyse des résultats, il semble que le codage utilisé soit à l'origine de ce palier dans la convergence de l'algorithme. Comme expliqué précédemment (V.3.5), il faut dans certains cas totalement inverser le codage d'un paramètre pour pouvoir tester une valeur très proche d'une autre en terme de nombres réels.

C'est ce qui est fait dans la simulation 21 qui a exactement les mêmes caractéristiques que la simulation 14 si ce n'est que le codage d'un paramètre peut être totalement inversé avec une probabilité « pmuttot » égale à 0,01.

Simul 21	K	Q	Fct Obj
Optimum	25	2.5	386100
Résultat	25.12	2.56	386100
% d'erreur	0.47	2.55	0.00
Nombre de chaînes testées			8184

Tableau VI-7 : optimisation avec inversion totale du codage (probabilité de 0,01) → optimum atteint

On remarque sur la figure suivante que l'optimum est atteint très rapidement par l'AG, ce qui confirme l'importance de l'inversion totale pour l'homogénéité de la recherche de la solution optimale.

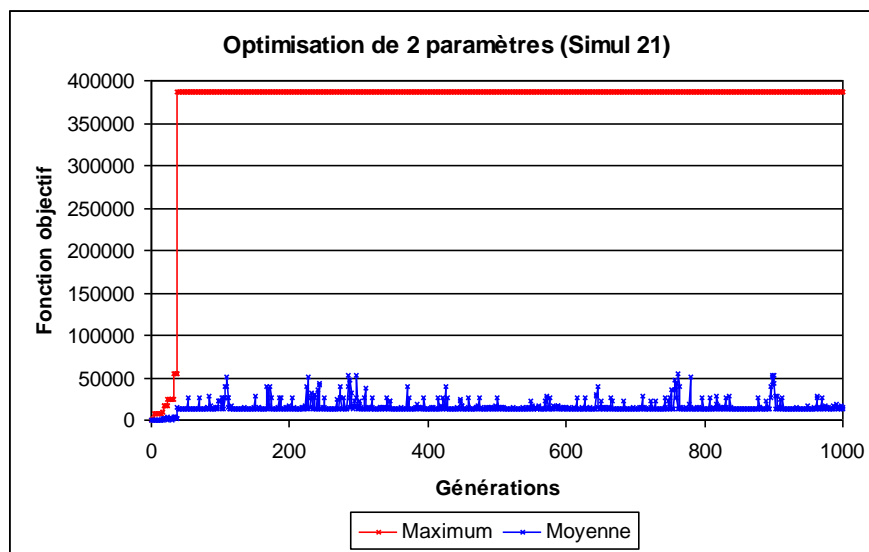


Figure VI-12 : Convergence très rapide de l'AG grâce à l'opération d'inversion totale du codage

VI.2.5.6 Nombre de générations et de chaînes

Le nombre de chaînes que contient une population est extrêmement important pour la rapidité de convergence et de calcul de l'AG. Des tests ont été effectués et ont montrés que, pour une petite population de départ, l'AG effectue moins d'évaluations de fonction objectif que pour une grande population, et ce à maximum possible égal. Pour un problème simple, on a testé 25 générations de 60 chaînes, ce qui a conduit en moyenne à 860 évaluations de la fonction objectif sur 1500 possibles. Pour 50 générations de 60 chaînes, l'AG n'a évalué que 550 valeurs en moyenne. Cette constatation trouve son explication dans le plus grand nombre de chaînes différentes disponibles au départ et donc dans la plus grande information disponible pour le croisement.

Il est évident que plus l'AG teste de chaînes différentes (pour autant que ce soit de façon intelligente), plus il aura de chance d'atteindre rapidement l'optimum absolu. Seulement, si les populations sont trop grandes, le temps de calcul peut rapidement devenir prohibitif sans compter que l'AG ne sera plus à même de discerner les bonnes chaînes des autres tant le nombre de chromosomes, et donc la taille de la roue de sélection, sera grand.

VI.2.5.7 Conclusions

Le tableau suivant reprend les caractéristiques de toutes les simulations effectuées sur le problème à 2 paramètres.

	Retraitement linéaire	Mémoire du maximum	Croisement	Mutation totale
Simul 13	Oui $C_{mult}=2$	Oui	Uniforme	Non
Simul 14			En 1 pt par param	Non
Simul 21			En 1 pt par param	Oui ($p = 0.01$)
Simul 15			En 1 pt	Non
Simul 17		Non	Uniforme	Non
Simul 18			En 1 pt par param	Non
Simul 16	Non	Oui	Uniforme	Non
Simul 22		Non	Uniforme	Non

Tableau VI-8 : Ensemble des simulations testées

Le tableau suivant compare ces 8 simulations en terme de résultat final et de nombre de chaînes testées.

	K	Q	Fct Obj Max	Nbre absolu de chaînes testées	Nbre de chaînes testées avant max
Simul 13	25.12	2.56	386100	7018	2105
Simul 14	25.12	2.56	386100	2653	1479
Simul 21	25.12	2.56	386100	8184	869
Simul 15	23.86	2.45	85985	1526	710
Simul 17	30.16	3.03	16880	3589	532
Simul 18	25.12	2.56	386100	8929	2983
Simul 16	40.24	3.97	1443	961	236
Simul 22	20.28	2.09	8818	1011	929

Tableau VI-9 : Résultats des simulations d'optimisation de 2 paramètres

Si l'on place sur un graphique les différentes simulations en comparant leur efficacité (optimum atteint) par rapport au temps de calcul nécessaire (nombre d'évaluations de fonction objectif), on obtient un graphe très intéressant (Figure VI-13).

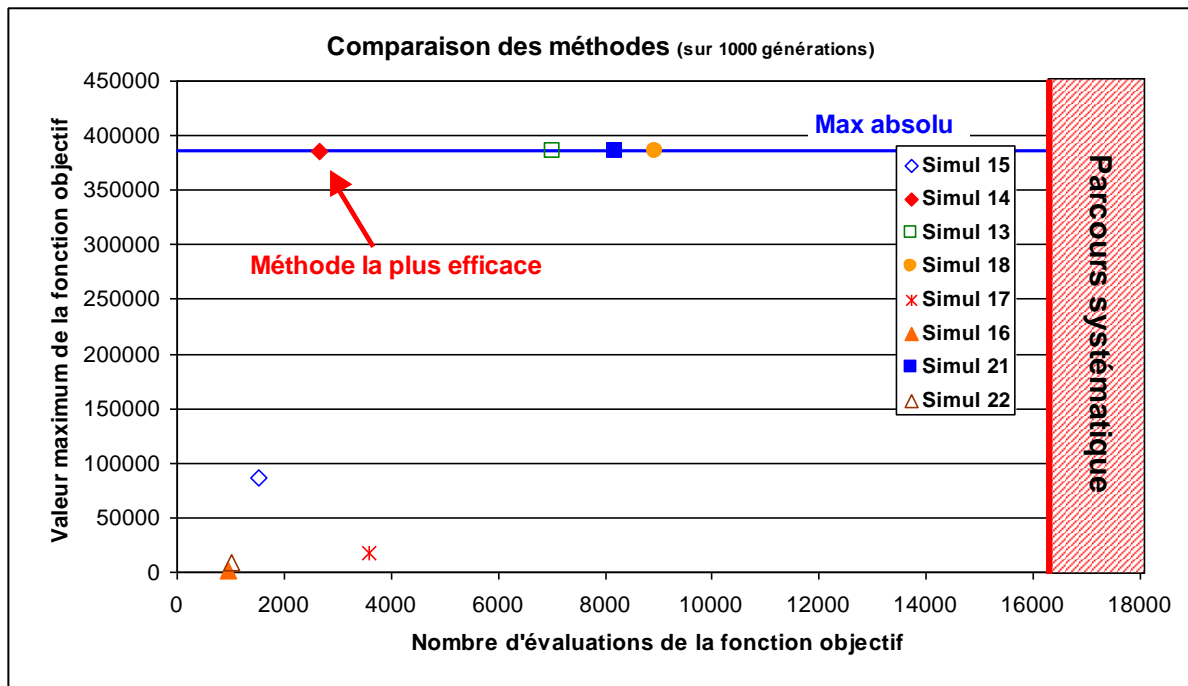


Figure VI-13 : Comparaison des méthodes par rapport au nombre global d'évaluation de la fonction objectif (c'est-à-dire du point de vue temps de calcul)

Sur 1000 générations, la configuration 14 est la plus efficace car c'est elle qui est la plus rapide (2653 évaluations de fonction objectif sur 16384 = 16 %) tout en atteignant l'optimum absolu.

Si maintenant on imagine un critère d'arrêt efficace qui permette de stopper l'optimisation dès que l'optimum est atteint (il ne faut pas oublier ici que l'optimum absolu est inconnu au départ de l'optimisation et que rien sauf une exploration systématique des intervalles de variation des paramètres ne peut confirmer sa valeur), il est plus intéressant de comparer les méthodes par rapport au nombre d'évaluations de la fonction objectif avant d'atteindre l'optimum. On obtient le graphe de la page suivante qui nous montre que c'est la simulation 22, avec l'inversion totale du codage, qui devient alors la plus efficace puisqu'elle ne nécessite que 869 calculs (5 %) avant d'atteindre l'optimum absolu du problème.

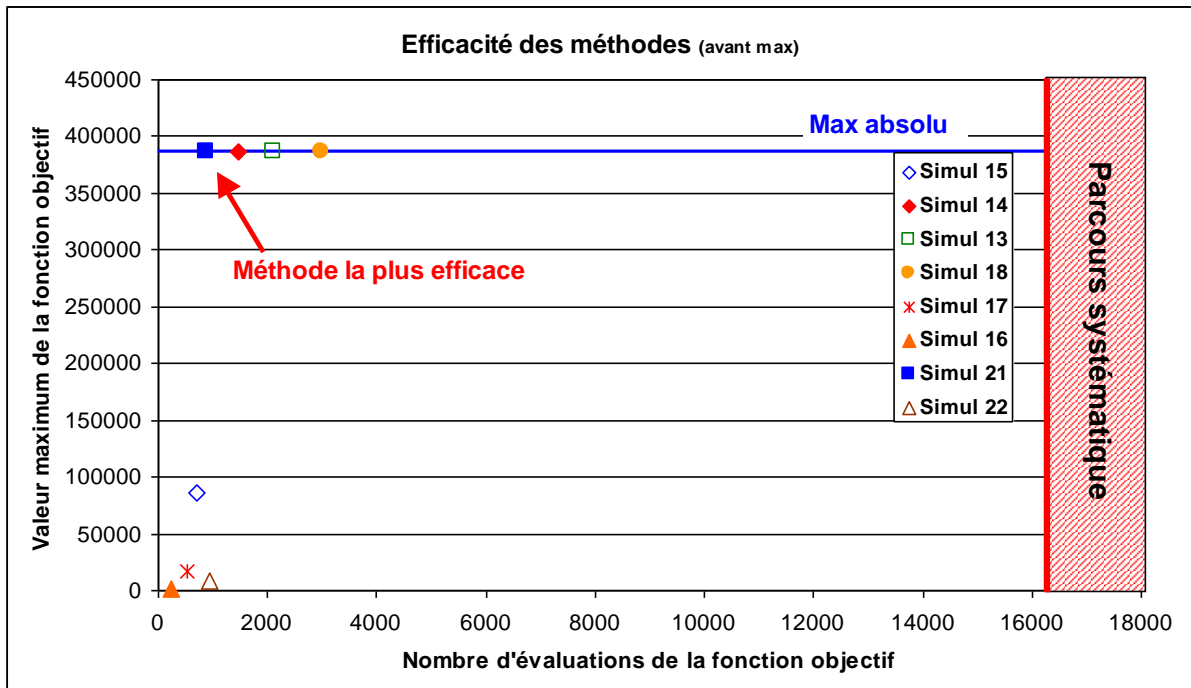


Figure VI-14 : Comparaison des méthodes par rapport au nombre d'évaluation de la fonction objectif avant d'atteindre l'optimum

Le tracé de la ligne d'eau optimisée est donné ci-dessous. Malgré la relative imprécision du codage, la solution aurait difficilement pu être meilleure avec des mesures disponibles en 4 sections.

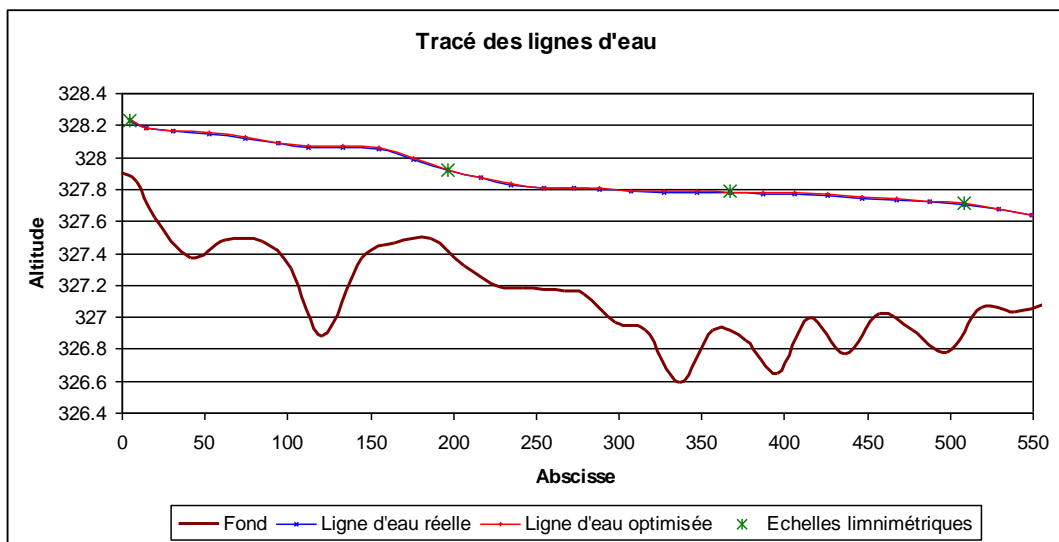


Figure VI-15 : Comparaison de la ligne d'eau réelle ($K=25$, $Q=2.5\text{ m}^3/\text{s}$) et de la ligne d'eau optimisée ($K=25.12$, $Q=2.56\text{ m}^3/\text{s}$)

VI.2.6 Optimisation couplée de plusieurs paramètres

Dans la seconde partie des tests de l'AG, on a cherché à optimiser la valeur de plusieurs débits et du coefficient de frottement à partir des données générées au paragraphe VI.2.1 (Tableau VI-1). On a pour ce faire supposé que la valeur du coefficient de Manning était une caractéristique de la rivière constante avec le débit.

Cet exercice nous permettra notamment de tester le calcul global ou local de la fonction objectif (paragraphe V.4.4).

VI.2.6.1 Données

On a utilisé les données relatives au débit de 0.5, 5 et 10 m³/s pour un coefficient de frottement de 25. On a cherché ainsi à travailler sur 3 lignes d'eau nettement différenciées afin d'obtenir une valeur du coefficient de frottement optimisée sur une large gamme de débit. Les intervalles de variation étaient à nouveau de 10 à 50 pour le coefficient de frottement et de 0.1 à 15 m³/s pour les débits. Les 4 paramètres ont été codés en 6 bits.

L'AG a effectué à chaque fois 500 générations avec des populations de 60 chaînes, ce qui lui a permis de tester 30 000 solutions différentes sur les $2^{4 \times 6} = 16\,777\,216$ possibles.

Les caractéristiques communes aux différentes simulations dont les résultats se trouvent ci-après sont :

- Retraitement de la fonction objectif ($C_{\text{mult}} = 2$),
- Mémoire du maximum,
- Croisement en 1 point par paramètre.

Pour le problème traité, le maximum calculé de la fonction objectif est de 64,316.

VI.2.6.2 Fonction objectif globale

Dans un premier temps, on a effectué le calcul d'une seule fonction objectif globale servant à sélectionner des chaînes entières, représentant les 4 paramètres, pour créer une nouvelle population. Cette fonction objectif était donc évaluée avec les 12 points de comparaison disponibles, selon la démarche exposée au paragraphe VI.2.2.

Le tableau des résultats ci-après nous montre que l'optimum absolu n'a pas été atteint bien qu'un grand nombre de chaînes ait été testé. Il semble donc que la recherche de l'optimum ne soit pas totalement efficace. Le calcul d'une fonction objectif globale évalue une adaptation moyennée des 4 paramètres alors que 3 d'entre eux (les 3 débits) sont totalement indépendants. Il semble que cela soit la cause du mauvais résultat de l'AG.

Simul 44	K	Q1	Q2	Q3	Fct Obj
Optimum	25	0.5	5	10	64.32
Résultat	17.62	0.34	3.65	7.20	55
% d'erreur	29.52	32.70	27.05	28.05	14.79
Nombre de chaînes testées					26795

Tableau VI-10 : optimisation de 3 débits et du coefficient de frottement avec évaluation globale de la fonction objectif

La nécessité d'implémenter un critère d'arrêt de l'AG autre qu'un nombre de génération fixé apparaît à nouveau ici. En effet, rien ne dit que les exécutions qui fournissent de mauvais résultats après 500 générations ne vont pas finir par trouver le bon optimum. Au contraire, le principe de fonctionnement des AG fait que toute exécution, même avec seulement quelques chaînes « mauvaises » comme population de départ, doit finir, à la longue, par converger vers l'optimum absolu. C'est ce qui fait en partie la force de cette méthode. La convergence est d'autant plus rapide que les bons schèmes sont présents dans la population de départ, et donc que la population de départ est diversifiée et couvre l'ensemble des zones des espaces à explorer, mais elle est toujours théoriquement assurée pour une population de départ quelconque.

VI.2.6.3 Fonction objectif locale

Dans un deuxième temps, on a mené l'évolution des populations en utilisant des valeurs de fonctions objectif locales et construisant les nouvelles chaînes morceau par morceau ou paramètre par paramètre, en respectant les règles de sélection, croisement et mutation exposées précédemment (paragraphe V.4.4).

Cette modification de la méthodologie de l'AG découle de la constatation que, si la valeur du coefficient de frottement était connue, rien ne justifierait d'optimiser ensemble les 3 valeurs de débit, une optimisation paramètre par paramètre étant dans ce cas plus efficace.

O a donc calculé une valeur de fonction objectif pour chaque paramètre en utilisant, pour les débits, les résultats de la ligne d'eau les concernant pondérés par rapport au résultat global de la chaîne testée, et pour le coefficient de frottement, l'ensemble des résultats des 3 lignes d'eau (Fonction hybride, paragraphe V.4.4).

On espère ainsi augmenter les performances de l'AG en termes de rapidité de convergence et diminuer la quantité d'évaluations de la fonction objectif.

Différentes valeurs du coefficient α de la formule V-14 ont été testées.

Simul 38	K	Q1	Q2	Q3	Fct Obj
Optimum	25	0.5	5	10	64.32
Résultat	30.32	0.34	6.01	11.69	59
% d'erreur	21.27	32.70	20.25	16.89	7.51
Nombre de chaînes testées					10424

Tableau VI-11 : Optimisation avec évaluation locale de la fonction objectif ($\alpha = 0$)

La simulation 38 représente l'autre extrême par rapport à la simulation 44. Les fonctions objectif locales ne tiennent pas du tout compte de l'adaptation globale des paramètres testés. On voit que les résultats ne sont pas meilleurs que pour le cas précédent, le nombre de chaînes testées étant de plus nettement inférieur.

Simul 35	K	Q1	Q2	Q3	Fct Obj
Optimum	25	0.5	5	10	64.32
Résultat	25.24	0.34	5.07	10.03	64
% d'erreur	0.95	32.70	1.33	0.33	0.00
Nombre de chaînes testées					21971

Tableau VI-12 : Optimisation avec évaluation locale de la fonction objectif ($\alpha = 0.25$) \rightarrow optimum absolu atteint

La simulation 35, pour laquelle on ne tient compte qu'à 25 % de la valeur de l'adaptation globale dans l'évaluation des fonctions objectif locales atteint l'optimum absolu du problème étudié, pour un nombre de chaînes testées inférieur à celui de la simulation 44.

La simulation 34 utilise une pondération 50/50 entre l'adaptation globale et l'adaptation locale des paramètres. C'est la configuration qui fournit les meilleurs résultats comme le montre le tableau de la page suivante. En effet, l'optimum est atteint avec un nombre restreint d'évaluations de la fonction objectif.

Simul 34	K	Q1	Q2	Q3	Fct Obj
Optimum	25	0.5	5	10	64.32
Résultat	25.24	0.34	5.07	10.03	64.32
% d'erreur	0.95	32.70	1.33	0.33	0.00
Nombre de chaînes testées					15109

Tableau VI-13 : Optimisation avec évaluation locale de la fonction objectif ($\alpha = 0.5$) \rightarrow configuration optimale

VI.2.6.4 Conclusions

Le tableau suivant reprend les caractéristiques de toutes les simulations effectuées sur le problème à 4 paramètres.

	Type de fct obj	Coefficient alpha
Simul 44	globale	-
Simul 38	locale	0
Simul 35		0.25
Simul 34		0.5
Simul 41		1

Tableau VI-14 : Ensemble des simulations testées

Le tableau ci-dessous compare ces 5 simulations en terme de résultat final et de nombre de chaînes testées.

	K	Q1	Q2	Q3	Fct Obj Max	Nbre absolu de chaînes testées	Nbre de chaînes testées avant max
Simul 44	17.62	0.34	3.65	7.20	54.81	26795	-
Simul 38	30.32	0.34	6.01	11.69	59.49	10424	-
Simul 35	25.24	0.34	5.07	10.03	64.32	21971	19966
Simul 34	25.24	0.34	5.07	10.03	64.32	15109	2692
Simul 41	22.70	0.34	4.59	9.09	63.22	28829	-

Tableau VI-15 : Résultats des simulations d'optimisation de 4 paramètres

Si l'on place sur un graphique les différentes simulations en comparant leur efficacité (optimum atteint) par rapport au temps de calcul nécessaire (nombre d'évaluations de fonction objectif), on obtient le graphe de la page suivante, qui nous montre bien que la configuration de la simulation 34 est la plus efficace pour l'optimisation du problème envisagé.

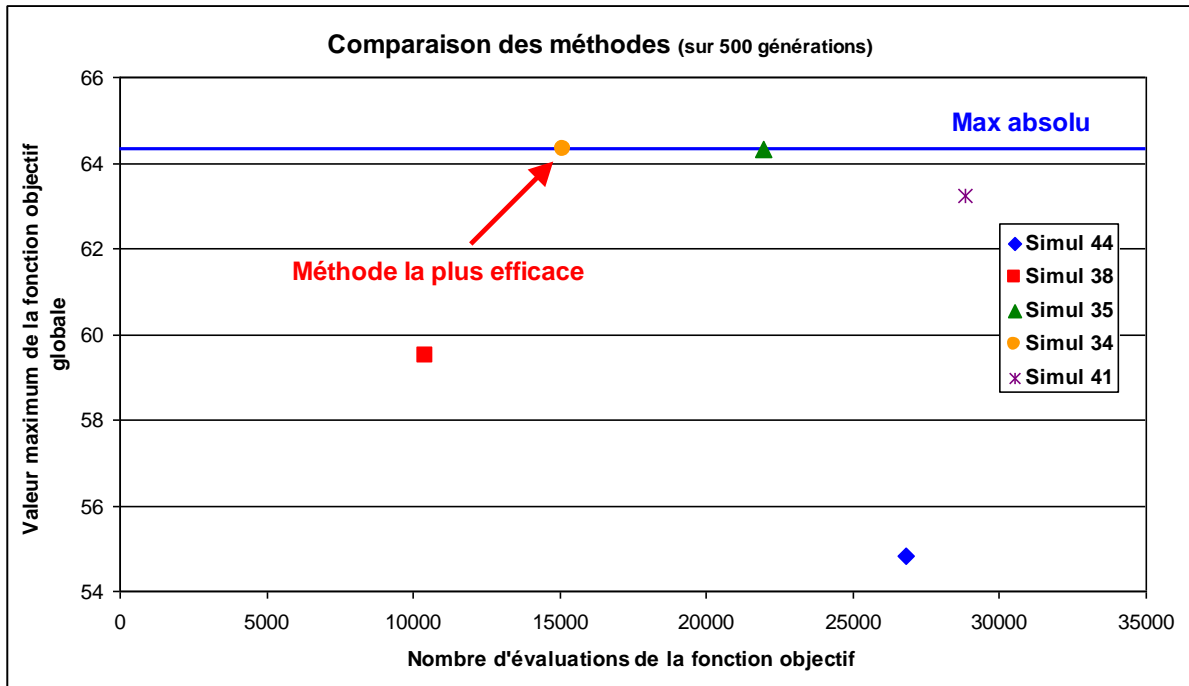


Figure VI-16 : Comparaison des méthodes par rapport au nombre global d'évaluation de la fonction objectif (c'est-à-dire du point de vue temps de calcul)

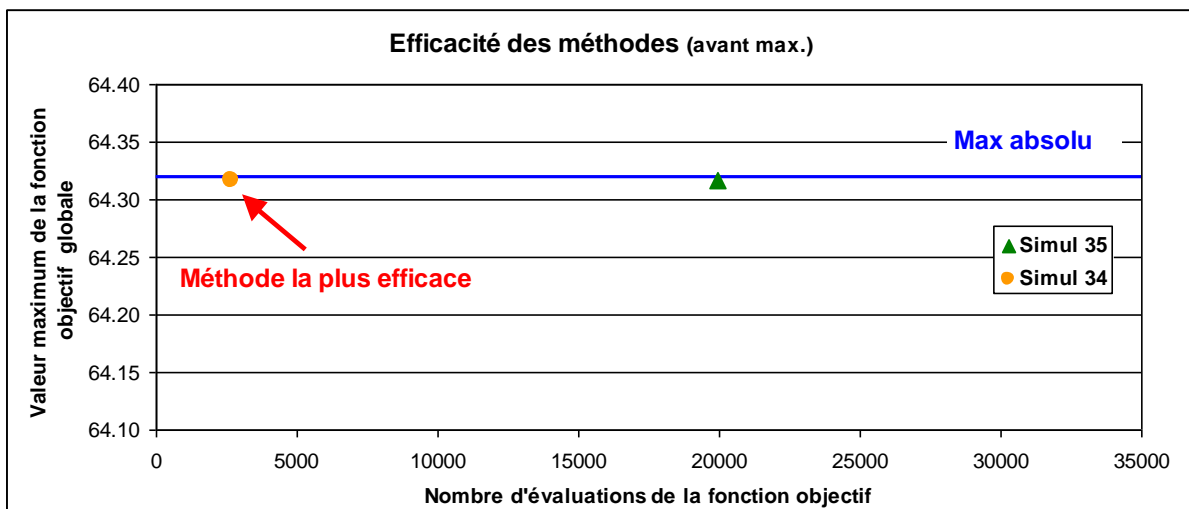


Figure VI-17 : Comparaison des meilleures configurations par rapport au nombre d'évaluations de la fonction objectif nécessaires pour atteindre l'optimum absolu

Le tracé des lignes d'eau pour les valeurs optimisées ($K=25.25$, $Q=0.34$, 5.07 et 10.03 m^3/s), donné ci-après, montre bien que les valeurs trouvées sont très bonnes, les écarts entre valeurs mesurées et calculées étant minimes. Pour plus de précision, il faudrait vraisemblablement plus de stations de mesure.

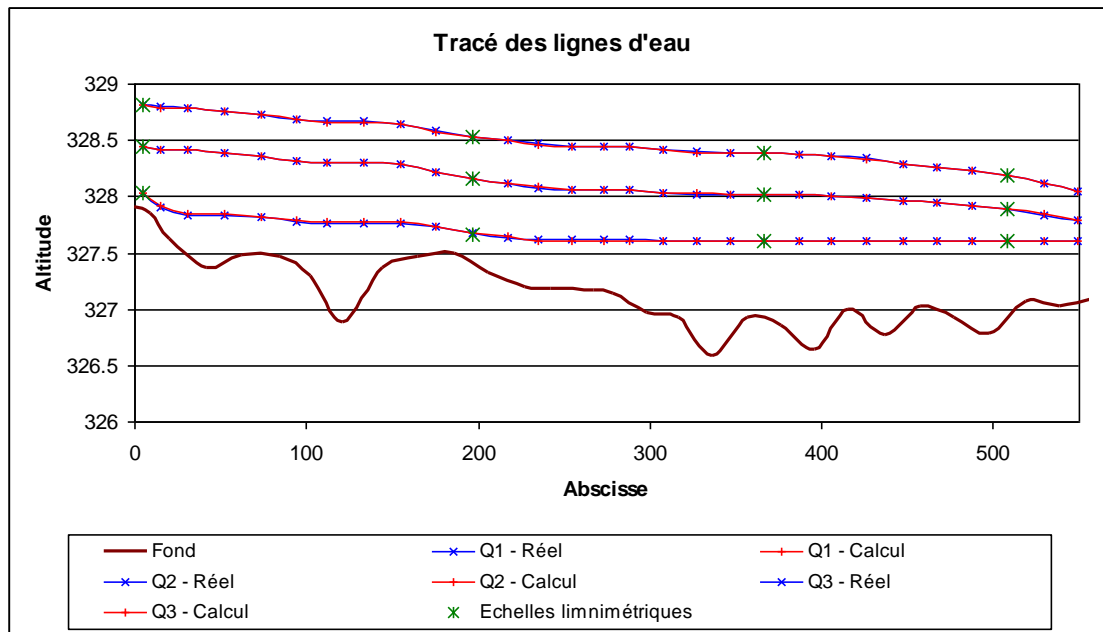


Figure VI-18 : Comparaison des lignes d'eau réelles et des lignes d'eau optimisées

VI.2.7 Optimisation de 6 paramètres

Dans ce dernier cas appliqué au tronçon de l'Ourthe à Houffalize, on a cherché à retrouver la valeur des 5 débits et du coefficient de frottement choisis au paragraphe VI.2.1.

La configuration de l'AG, déduite des tests précédents, est la suivante :

- Retraitement de la fonction objectif,
- Mémoire du maximum,
- Croisement en 1 point par paramètre,
- Inversion ($p_{muttot} = 0.01$),
- Evaluation « hybride » de la fonction objectif avec un coefficient de pondération α de 0,5.

Les intervalles de variation et le codage des paramètres sont les mêmes que pour les cas 1 et 2.

	K	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
Optimum	25	0.5	2.5	5	7.5	10
Résultat	25.87	0.57	2.70	4.36	7.67	10.03
% d'erreur	3.49	14.60	8.06	-12.86	2.24	0.33

Tableau VI-16 : Résultats de l'optimisation de 5 débits et du coefficient de frottement

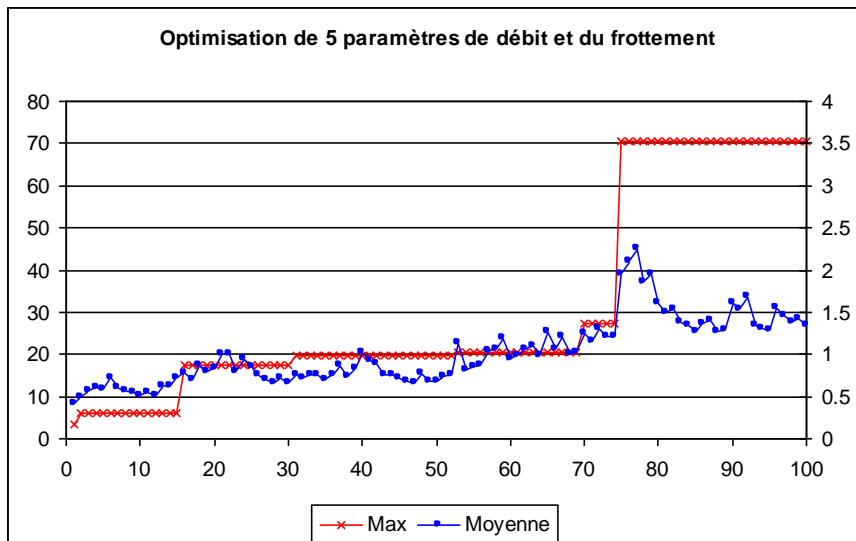


Figure VI-19 : Optimisation de 6 paramètres à l'aide de l'AG – Valeur de la fonction objectif au cours des générations

Comme on le constate dans le Tableau VI-16, l'AG a optimisé assez rapidement et de façon correcte les différents paramètres du problème.

VI.2.8 Conclusions

Les résultats obtenus avec l'AG sont encourageants. Les différentes améliorations telles que le retraitement de la fonction objectif, la « mémoire du maximum » ou l'inversion du codage ont montré leur utilité. Le calcul global ou local de la fonction objectif permet une nette amélioration des performances de l'AG suivant les cas à traiter. La précision des données et leur exactitude restent un problème épineux difficile à gérer, surtout si l'on dispose de peu de points de mesure. Il conviendrait d'étudier plus en détail ce problème, notamment par des études à partir de données relevées sur site.

Il nous faut maintenant envisager d'autres cadres d'application afin de juger de la robustesse de l'AG et de son application aux grands nombres de problèmes d'optimisation auxquels peut conduire l'hydrodynamique appliquée.

VI.3 OPTIMISATION DE PRODUCTION HYDROELECTRIQUE

VI.3.1 Introduction

Dans le cadre de son travail de fin d'études « Optimisation numérique de la production hydroélectrique de la Cascade Warche-Amblève » [5], O. Dumoulin a été amené à optimiser la valeur de plusieurs paramètres régissant le turbinage de centrales hydroélectriques au fil de l'eau. Ces paramètres définissent en fait l'hydrogramme injecté dans le réseau à partir du

Barrage de Bütgenbach, hydrogramme qui transite par la centrale hydroélectrique de Bévercé, se propage dans la Warche puis dans l'Amblève et arrive à la centrale de Heid de Goreux.

Cette application est très intéressante car elle a permis d'appliquer l'AG à un problème réel complexe d'optimisation, vécu au quotidien par les sociétés productrices d'électricité qui possèdent de tels systèmes de production.

Le réseau étudié comptait à peu près 60 kilomètres de rivières, discrétisés par des mailles de +/- 100 mètres, 48 heures d'écoulements étant calculées par le logiciel Wolf1D en quelques minutes sur une station de travail personnelle équipée d'un processeur Pentium III 550 MHz !

Le but de la recherche était de déterminer les paramètres optimaux de l'hydrogramme lâché à Bütgenbach de façon à maximiser le profit total généré par son exploitation aux différents outils de production présents sur le réseau.

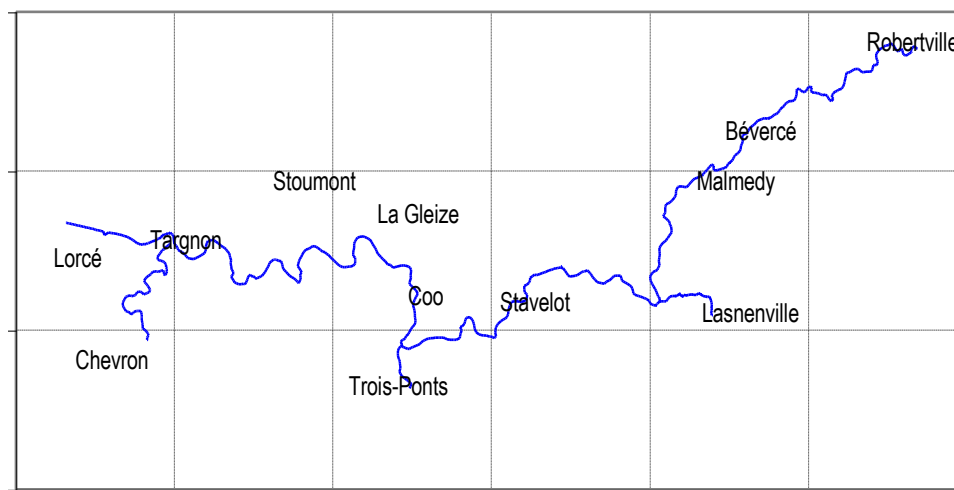


Figure VI-20 : Modélisation du réseau de « la cascade Warche – Amblève » - 591 mailles [5]

L'algorithme génétique a été utilisé deux fois pour cette optimisation. Il a tout d'abord permis de déterminer la valeur du coefficient de frottement de Manning Strickler pour l'ensemble du réseau modélisé, et ce à partir des données réelles de hauteur d'eau mesurées en différentes stations limnimétriques. Ensuite, il a été utilisé pour l'optimisation proprement dite de l'hydrogramme turbiné à l'amont du réseau. Dans cette deuxième utilisation, l'algorithme FFSQP introduit au paragraphe VI.1 a également été appliqué afin de confirmer les résultats.

VI.3.2 Coefficient de frottement du réseau

Pour déterminer la valeur du coefficient de frottement, la modélisation du réseau de rivière en entier a été utilisée. Cela comprend 591 mailles de calculs, soit 592 sections pour

lesquelles sont fournies les relations tabulées hauteur / section mouillée et hauteur / périmètre mouillé.

Les données de hauteur d'eau étaient fournies en 9 points correspondants aux 9 stations limnimétriques équipant le réseau. La fonction objectif a été calculée en comparant les mesures de ces stations aux résultats fournis par Wolf1D par la méthode des moindres carrés, comme expliqué au paragraphe VI.2.2.

On a cherché à optimiser la valeur du coefficient de Manning en le supposant constant sur l'ensemble du réseau.

La valeur trouvée était de 23. Elle fournit d'excellents résultats, que ce soit en terme de hauteur d'eau ou de propagation des hydrogrammes, comme le montrent les graphes suivants.

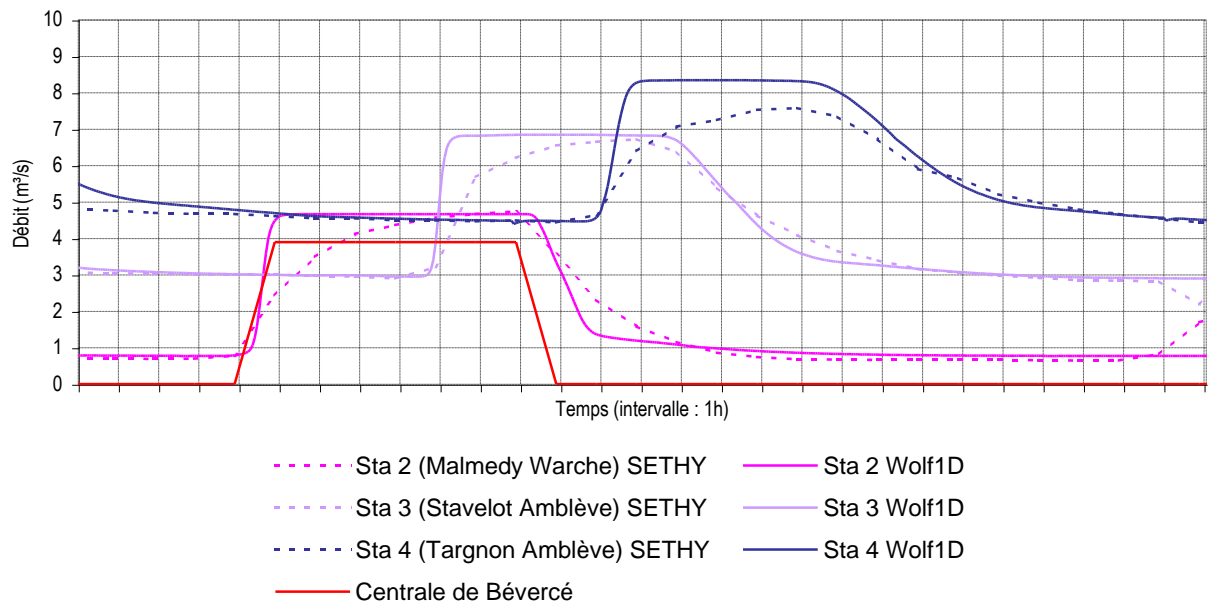


Figure VI-21 : Comparaison des hydrogrammes au droit des stations limnimétriques pour un coefficient de Manning de 25 [5]

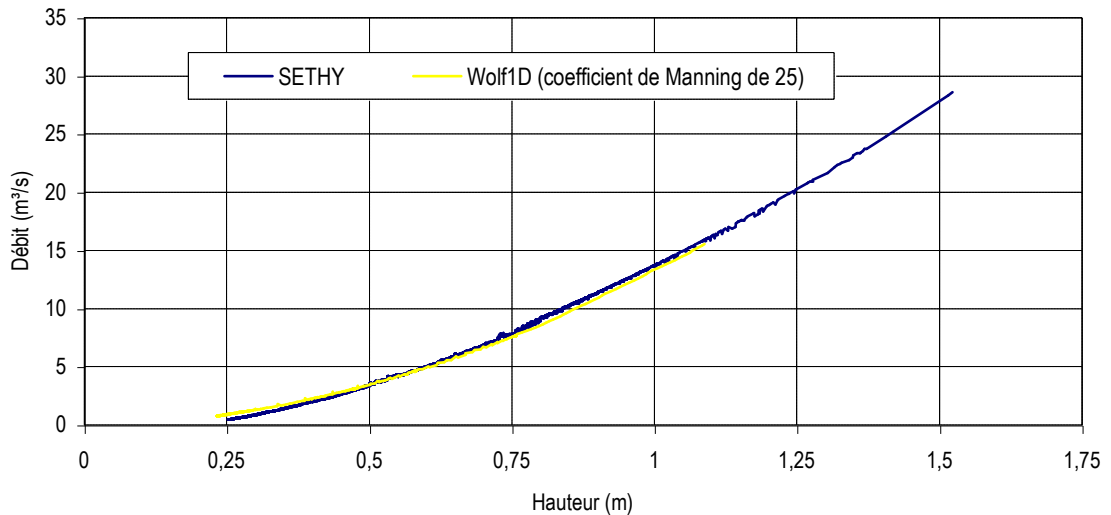


Figure VI-22 : Courbe de tarage optimisée à la station limnimétrique de Malmédy sur la Warche [5]

VI.3.3 Turbinage

VI.3.3.1 Données et fonction objectif

Les données à disposition étaient la valeur du débit d'étiage minimum, la valeur du débit maximum turbinable et le volume maximum disponible par périodes de 24 heures.

L'hydrogramme injecté sur 24 heures a été paramétré à l'aide de 2 temps T_1 et T_2 en heures entières correspondant chacun à la durée d'un palier à débit constant, et de 2 débits Q_0 et Q_1 , respectivement le débit minimum et le débit du premier palier. Le débit du deuxième palier Q_2 était déduit automatiquement de la valeur des 4 autres paramètres et du débit maximum turbinable.

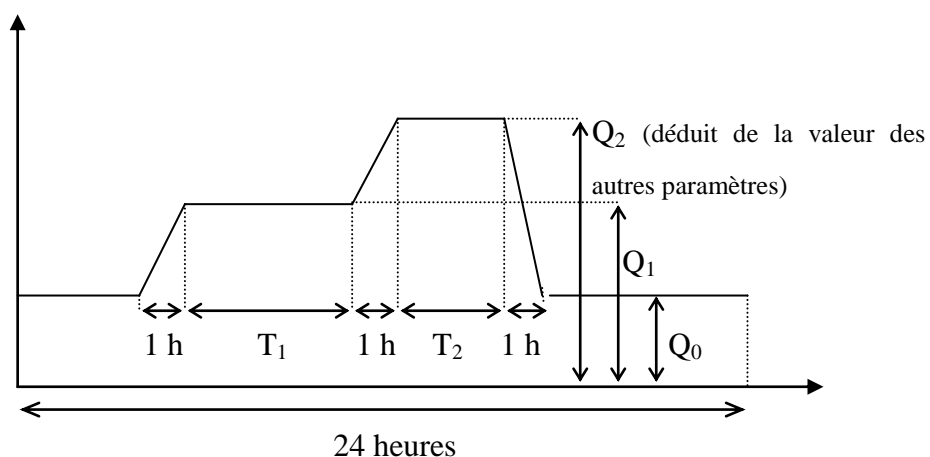


Figure VI-23 : Paramétrage de l'hydrogramme à optimiser injecté à l'amont du réseau

Cet hydrogramme était injecté à l'amont du modèle et propagé dans le réseau par le logiciel Wolf1D, et ce sur une période de 48 heures afin d'obtenir ses effets à l'aval.

Les contraintes imposées sur les paramètres étaient que Q_1 soit supérieur à Q_0 , que le débit maximum turbinable ne soit pas dépassé, que la durée de l'hydrogramme injecté ne dépasse pas les 24 heures correspondant à une période complète de turbinage et bien entendu que les débits minimum et maximum soient respectés.

La fonction objectif choisie a simplement été le profit maximum généré par l'hydrogramme injecté. Ce profit a été calculé à partir des courbes de rémunérations du kWh fournies par Electrabel et rendues adimensionnelles, en fonction de la puissance horaire générée aux centrales hydroélectriques étudiées. Cette fonction est en effet toujours positive et est bien sûr à maximiser.

VI.3.3.2 Résultats

Les résultats complets sont présentés et analysés dans le travail d'O. Dumoulin [5].

L'optimisation a notamment été menée avec une population de 100 chaînes pendant 25 générations. L'algorithme génétique a convergé vers un optimum qui procure une amélioration relative de plus ou moins 2,5 % de la production et de 6 % du profit généré par rapport à la situation réelle dans la simulation présentée ici.

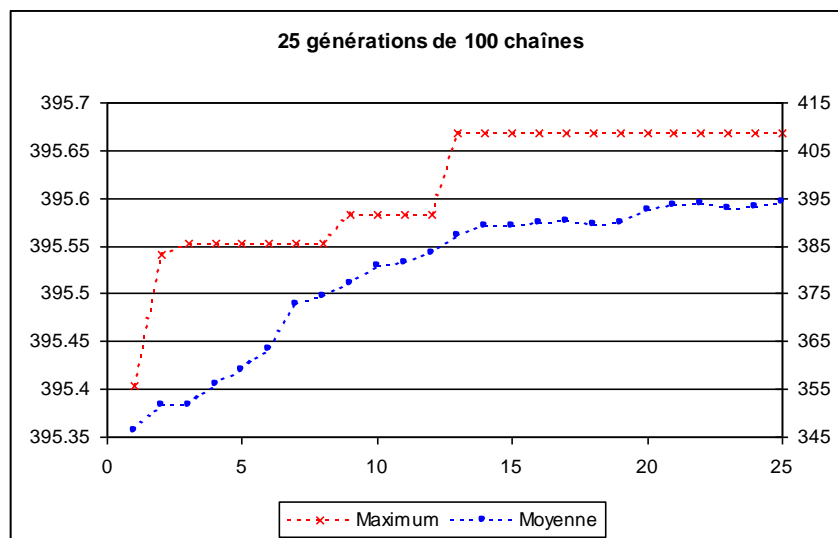


Figure VI-24 : Optimisation par l'AG des paramètres de l'hydrogramme turbiné – Profit réalisé

Les paramètres optimisés ont ensuite été introduits dans l'algorithme FFSQP afin de valider l'optimum atteint. L'algorithme FFSQP est un algorithme d'optimisation classique

réputé qui travaille localement à la recherche de l'optimum d'une fonction en se basant sur les valeurs de son gradient en fonction d'une légère variation de la valeur des paramètres..

L'algorithme FFSQP n'ayant pas réussi à améliorer la solution obtenue par l'AG (Figure VI-25), on peut dire que celui-ci a bien atteint un bon extremum de la fonction objectif et que la méthode d'optimisation génétique utilisée est valable.

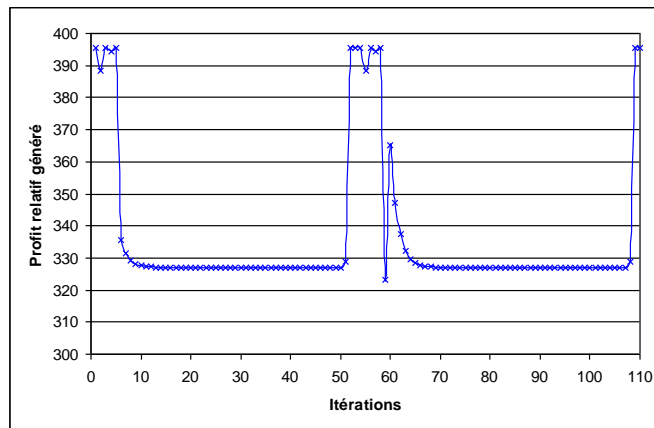


Figure VI-25 : Itération de l'algorithme FFSQP à partir de la solution obtenue par l'AG

Les graphes ci-après présentent la solution proposée par l'AG. Celui-ci injecte un fort débit à la centrale de Bévercé en début de journée afin de profiter du premier pic dans la courbe de rémunération de kWh. Le temps nécessaire à la propagation de cet hydrogramme correspondant à la durée entre les 2 pics de rétribution, la production maximum à la centrale de Heid de Goreux est également maximisée en terme de rémunération.

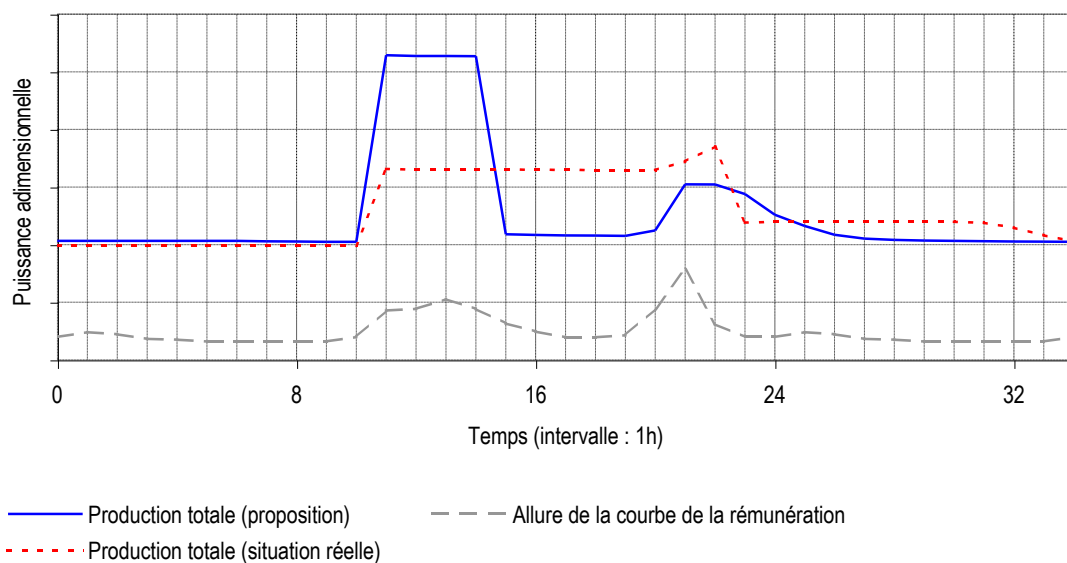


Figure VI-26 : Résultat optimisé (proposé) en terme de puissance produite [5]

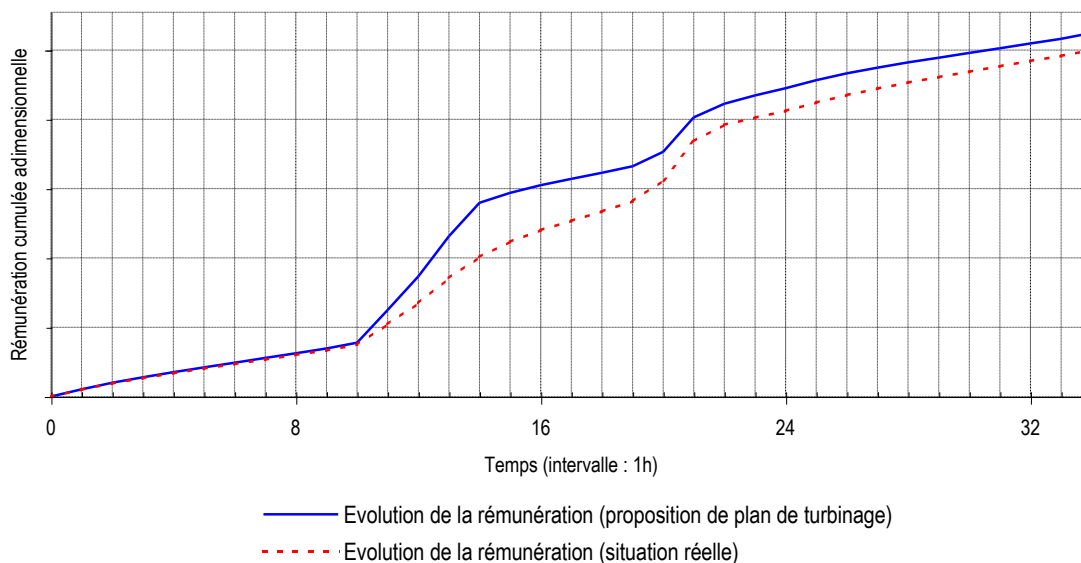


Figure VI-27 : Résultats de l'optimisation en terme de profit [5]

La solution proposée est donc très prometteuse à beaucoup de points de vue : elle permet une nette augmentation du profit grâce à une meilleure utilisation des volumes disponibles, cette amélioration étant explicable et semblant tout à fait logique.

VI.4 APPLICATION HYDROLOGIQUE : LE BASSIN DE MATTMARK (SUISSE)

VI.4.1 Introduction

Le panel de paramètres à optimiser introduit par les logiciels de calcul hydrologique physiquement basés nous a poussé à implémenter l'AG autour d'un tel programme, à savoir le logiciel WolfHydro du HACH. Cela a constitué l'ultime test du programme dans le cadre de ce travail.

VI.4.2 Présentation du logiciel WolfHydro

Au-delà d'une évolution possible du climat, les modifications humaines du bassin versant tendent en majorité à exacerber les capacités de réaction du terrain en augmentant à la fois les quantités des apports pluvieux et leur vitesse de convergence vers l'aval. C'est la raison pour laquelle la recherche s'intensifie pour l'élaboration d'outils fiables de gestion des bassins capables non seulement d'anticiper leurs réactions mais de prédire les évolutions de leur réponse consécutives à toute modification de leurs propriétés topographiques et morphologiques.

L'approche physiquement basée présente pour avantage principal de réduire les phases de calage sur un bassin déterminé, dès lors que la frange de valeurs de chacun de ses paramètres à signification physique est beaucoup mieux connue. Toute modification des propriétés trouve par ailleurs aisément son pendant dans une modification adéquate de la valeur des paramètres. La multiplication de ces derniers à disposition dans un modèle distribué implique cependant de renoncer à l'approche traditionnelle de calage « au feeling » au profit d'approches d'optimisation. C'est à ce stade que s'insère logiquement l'algorithme génétique développé dans ce travail.

Néanmoins, les progrès informatiques aiguisent l'envie des chercheurs qui souhaitent exploiter toutes les potentialités des modèles numériques de terrain et l'information satellitaire au sens large.

C'est dans cette volonté de remplacer les modèles hydrologiques empiriques globaux par des approches distribuées résolvant plus ou moins complètement les équations d'Euler ou de Navier-Stokes que s'inscrit depuis de nombreuses années le HACH en proposant des modèles hydrodynamiques spécifiques au ruissellement de surface. Ces approches, validées par des essais en simulateur de pluie, ont déjà montré leurs potentialités tant dans la prévision que dans la gestion des crues, en aidant les gestionnaires dans le choix de politiques d'altération des propriétés du bassin versant.

Succédant à d'autres versions, basées sur des approches mathématiques et des méthodes de résolution variées, le logiciel WolfHydro recourt à la technique des volumes finis (Chapitre III) pour résoudre les équations conservatives dites de l'onde diffusive, calculant les écoulements en fine lame et leurs échanges avec le monde extérieur sur tout modèle numérique de terrain.

L'événement pluvieux peut être considéré en intégrant l'hétérogénéité du terrain, l'évolution temporelle de ses propriétés, l'irrégulière répartition des précipitations et leur évolution spatiale avec le temps, conformément au déplacement des fronts nuageux.

Le modèle maillé est formé de trois couches superposées modélisant respectivement l'écoulement en fine lame sur le terrain, l'écoulement hypodermique et le transfert vers les nappes profondes. La loi d'infiltration tient compte de la récupération de la capacité de stockage du sol après l'arrêt provisoire de la pluie ce qui permet de calculer de longues périodes sans arrêt du logiciel.

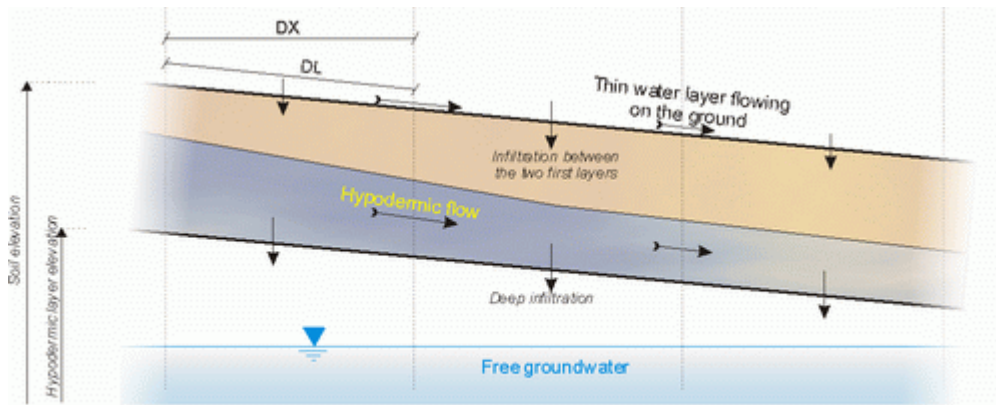


Figure VI-28 : Schéma des 3 couches de sol modélisées par WolfHydro

VI.4.3 Le bassin suisse de Mattmark

La vérification des capacités d'évacuation des grands ouvrages hydrauliques à travers le monde résulte à la fois des évolutions climatiques pressenties et de la plus grande disponibilité en données hydrologiques sur les sites exploités. Dans une réaction sécuritaire par rapport aux événements climatiques extrêmes, la Suisse s'intéresse actuellement au développement de modèles hydrologiques de simulation qui peuvent profiter de bassins versants bien instrumentés tel celui de Mattmark représenté ci-dessous.

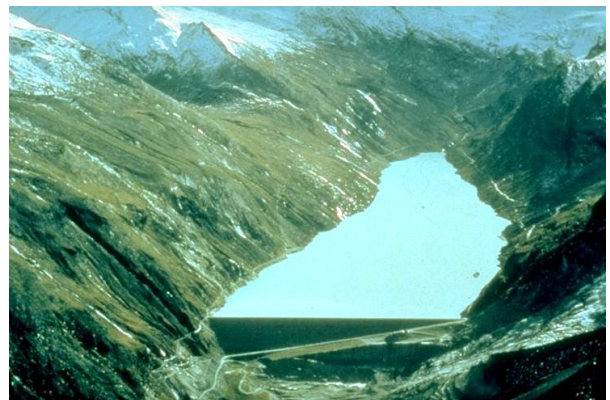


Figure VI-29 : Barrage de Mattmark

Le modèle numérique de terrain disponible sur l'ensemble de la Suisse est d'une résolution spatiale de 25 m. Le HACH ayant notamment participé aux études numériques de ce bassin, toutes les données le concernant sont directement disponibles. C'est donc lui qui a été utilisé pour tester l'AG. Le modèle utilisé comptait 758 mailles carrées de 250 mètres de côté, et ce afin de diminuer au maximum le temps de calcul.

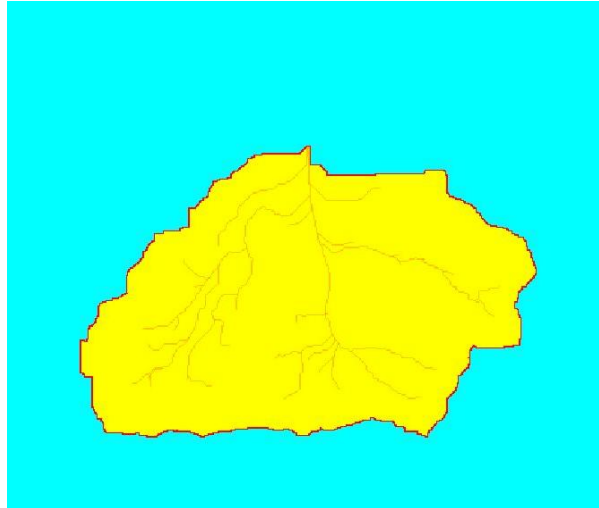


Figure VI-30 : Détermination du bassin versant de Mattmark effectuée automatiquement par le logiciel WolfHydro

Les tests ont été effectués pour une pluie uniforme extrême, variable temporellement, sur le bassin de Mattmark considéré dans ses propriétés d'infiltration les plus défavorables.

La fonction objectif est le résultat de la comparaison par la méthode des moindres carrés de l'hydrogramme mesuré sur site à l'entrée de la retenue par rapport à celui calculé par WolfHydro au même endroit avec les données de pluie réelles.

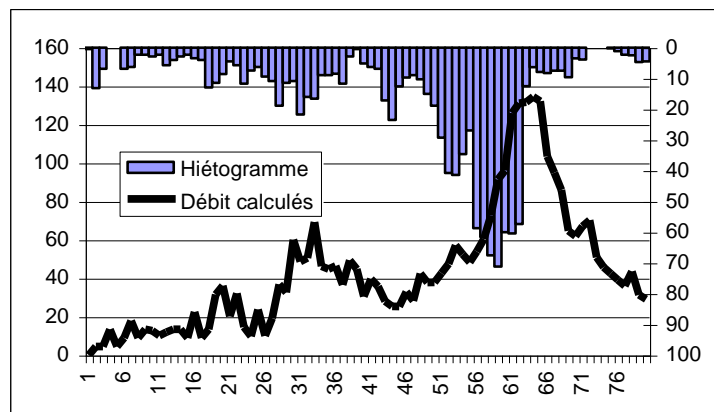


Figure VI-31 :

Hyéto gramme de

l'événement de crue extrême considéré sur le bassin de Mattmark

VI.4.4 Optimisation

Dans un premier temps, l'optimisation a été menée sur la valeur du coefficient de frottement du bassin en ne calculant l'écoulement que pour la couche de sol supérieure, le bassin étant supposé imperméable. L'intervalle de variation a été fixé entre les valeurs de 0.01 et 5 pour le coefficient de Manning – Strickler (valeurs physiques en hydrologie). Le codage est effectué en 16 bits de façon à obtenir une grande précision sur le résultat. On a considéré le cas d'un coefficient de frottement constant sur l'ensemble du bassin.

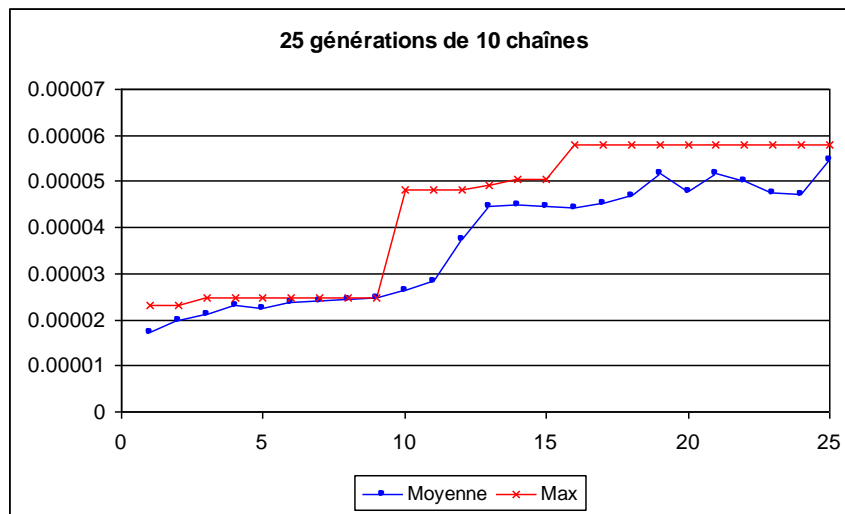
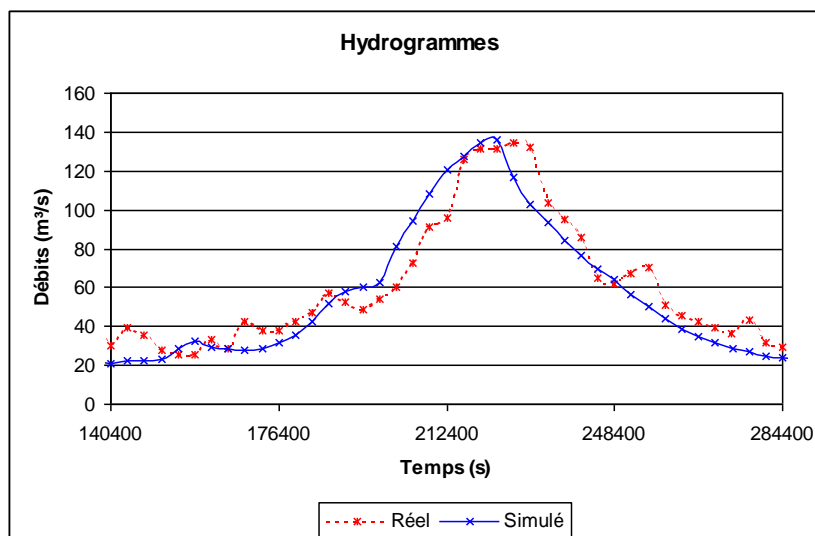


Figure VI-32 : Optimisation du paramètre de frottement du bassin versant

La valeur obtenue est $K = 0,18$. Elle conduit à l'hydrogramme calculé suivant, comparé à



l'hydrogramme mesuré sur site.

Figure VI-33 : Comparaison des hydrogrammes réels et calculés à l'entrée de la retenue de Mattmark

La concordance entre les deux hydrogrammes semble assez bonne.

Un second essai a été mené en utilisant comme paramètres, en plus du coefficient de frottement du sol, une épaisseur de couche d'infiltration avec sa porosité, son coefficient d'infiltration et son coefficient de Horton ainsi que le coefficient de perméabilité de Darcy pour l'infiltration profonde. De cette façon, toute la puissance de modélisation du logiciel WolfHydro était mise à la disposition de l'AG afin qu'il fasse correspondre les 2 hydrogrammes mesuré et calculé.

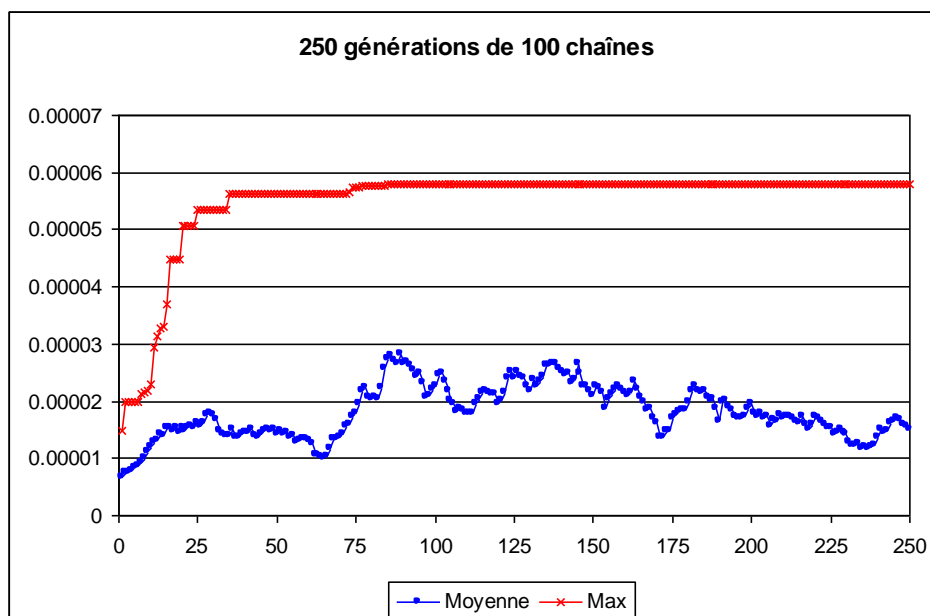


Figure VI-34 : Optimisation couplée de 6 paramètres hydrologiques sur le bassin de Mattmark

Les résultats obtenus sont assez stupéfiants. Alors que le panel de possibilités était gigantesque (près de 5×10^{21} possibilités), l'AG propose comme solution celle correspondant sensiblement aux conditions observées sur site lors de la prise de mesures, à savoir un sol quasi imperméable et saturé avec la valeur du coefficient de frottement de 0,18 trouvée ci-dessus.

Frottement	Darcy	Epaisseur	Porosité	Infiltration	Horton
[m ^{1/3} /s]	[m/s]	[m]	[%]	[m/s]	[1/s]
0.18	1.11E-06	2.43	79	1E-09	1E-10

Tableau VI-17 : Résultats de l'optimisation de 6 paramètres hydrologiques sur le bassin de Mattmark

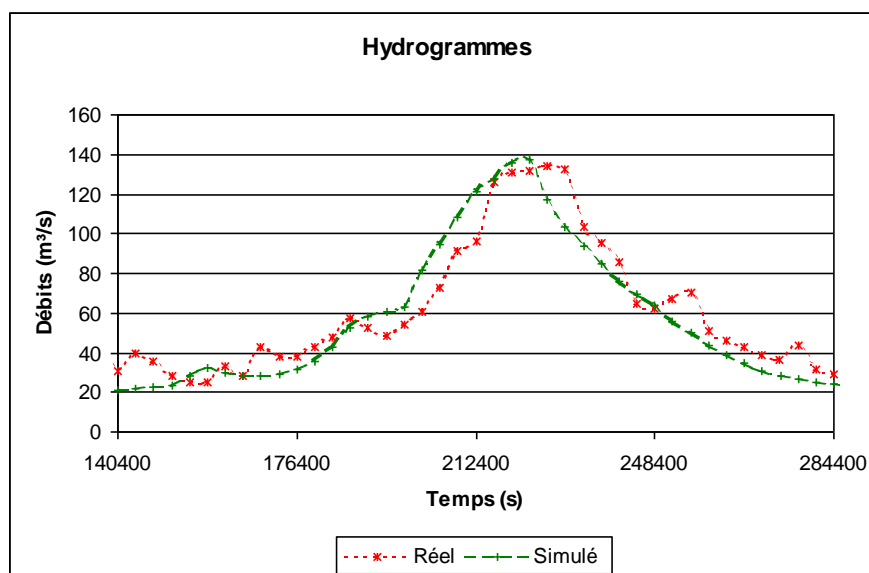


Figure VI-35 : Comparaison des hydrogrammes mesuré et optimisé sur le bassin de Mattmark

En conclusion, on peut donc dire que l'application aux modèles hydrologiques de l'AG est extrêmement encourageante. On a de plus réussi à démontrer qu'un nombre élevé de paramètres n'est pas un obstacle pour l'AG.

VII CONCLUSIONS

Le but de ce travail était de montrer l'applicabilité des méthodes génétiques aux problèmes d'optimisation rencontrés en modélisation numérique des écoulements de surface.

Dans un premier temps, un rappel a été fait des équations utilisées pour la modélisation unidimensionnelle des écoulements en rivière. On a ensuite présenté la méthode des volumes finis, méthode utilisée par les logiciels de la suite Wolf du HACH utilisés dans ce travail pour le calcul des écoulements.

Une fois cette présentation des méthodes numériques de modélisation effectuée, on a développé un algorithme génétique d'optimisation simple et robuste à partir des règles de base proposées dans la littérature. Le programme, écrit en Fortran 90 pour la rapidité de l'exécution, a été construit de façon à pouvoir être utilisé conjointement avec n'importe quel logiciel de la suite Wolf. L'algorithme effectue la recherche de l'optimum absolu d'une fonction strictement positive dépendant des paramètres du problème et appelée fonction objectif.

En préambule à tout test, une étude de l'incidence sur le résultat des imprécisions sur les paramètres dues à leur codage ou à leur mode de variation a été effectuée de façon à évaluer la précision maximale que l'on était en droit d'attendre de la méthode.

Une première application à la détermination des débits en rivière à partir des seules mesures de hauteur d'eau a ensuite permis de tester les routines de l'algorithme, et notamment les procédures de retraitement de la fonction objectif, de croisement, de « mémoire du maximum » et d'inversion totale du codage. L'étude de l'opportunité d'une évaluation globale ou paramètre par paramètre de la fonction objectif a ensuite été étudiée dans le cas de l'optimisation de la valeur d'un coefficient de frottement en rivière constant avec le débit. On a également testé l'influence sur l'optimisation d'erreurs sur les mesures de hauteur d'eau aux échelles limnimétriques. Même si on peut espérer une compensation des erreurs sur un grand nombre de mesures, celles-ci restent préjudiciables pour la méthode à son stade actuel de développement.

Les essais ont été menés avec succès par ordre croissant de difficulté : que ce soit pour déterminer une valeur de frottement et 1, 3 ou 5 valeurs de débit, l'algorithme génétique a montré ses capacités à trouver l'optimum.

Cette première application étant dans l'ensemble très concluante, on a cherché à tester la robustesse de l'algorithme en l'appliquant à un tout autre type de problème : l'optimisation de l'hydrogramme turbiné par une centrale hydroélectrique au fil de l'eau. Ici encore, les résultats ont été excellents, l'algorithme génétique atteignant un optimum qui ne fut pas mis en défaut par l'algorithme d'optimisation classique FFSQP. A noter que l'algorithme génétique a préalablement permis d'optimiser la valeur du coefficient de frottement du réseau de rivières dans lequel se propageait l'hydrogramme turbiné.

En dernier lieu, on a optimisé les paramètres régissant l'écoulement hydrologique d'un bassin versant en appliquant le code au logiciel WolfHydro du HACH. De nouveau, les résultats étaient très encourageants.

On peut finalement conclure que cette première approche des problèmes d'optimisation en hydraulique de surface à l'aide des algorithmes génétiques semble prometteuse. Elle ouvre des portes à une série d'applications qui ne manqueront pas d'être intéressantes.

Reste maintenant à multiplier les essais sur des données réelles afin d'encore affiner la méthode et en tout cas de la valider et de l'améliorer à partir de cas pratiques réels.

VIII BIBLIOGRAPHIE

Livres :

- [1] GOLDBERG D. E., *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, Ed. Addison-Wesley, 1989
- [2] PIROTTON M., ARCHAMBEAU P., ERPICUM S., MOUZELARD Th., *Hydraulique Appliquée*, Laboratoire d'Hydraulique Appliquée et des Constructions Hydrauliques, Université de Liège, 2001
- [3] PRESS W., TEUKOLSKY S., VETTERLING W., FLANNERY B., *Fortran Numerical Recipes*, Cambridge University Press, 1992
- [4] PIROTTON M., *Modélisation des discontinuités en écoulement instationnaire à surface libre : du ruissellement hydrologique en fine lame à la propagation d'ondes consécutives aux ruptures de barrages*, Editions L.H.C.N., Université de Liège, 1994

Travaux de fin d'études :

- [5] DUMOULIN O., *Optimisation numérique de la production hydroélectrique de la « Cascade Warche-Amblève »*, Travail de fin d'études, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, 2001
- [6] KINON H., *Développement d'une méthode automatique de détermination des débits à partir des seules mesures de hauteurs d'eau*, Travail de fin d'études, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, 1997

Publications :

- [7] PIROTTON M., ARCHAMBEAU P., ERPICUM S., MOUZELARD Th., *Quelques outils numériques de gestion des eaux de surface*, Journées de l'eau AILg, Liège, 2000
- [8] SYSWERDA G., *Uniform Crossover in Genetics Algorithms*, in: Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms, Schaffer, J. (Ed.), Morgan Kaufmann Publishers, Los Altos, CA, pp. 2-9, 1989

Routine d'optimisation FFSQP :

- [9] ZHOU J., TITS A., LAWRENCE C., *User's Guide for FFSQP Version 3.7, A FORTRAN Code for Solving Constrained Nonlinear (Minimax) Optimization Problems, Generating Iterates Satisfying All Inequality and Linear Constraints*, Electrical Engineering Department and Institute for Systems Research, University of Maryland

Les droits d'utilisation de cette routine restent la propriété exclusive de ses auteurs.

Sites Web :

- [10] CARROLL D. L., *Genetic Algorithm (GA) Tips*, <http://cuaerospace.com/carroll/gatips.html>