

CALCUL DE LA REPARTITION ANGULAIRE DE L'ENERGIE ACOUSTIQUE DIFFUSEE PAR UNE SURFACE GAUSSIENNE

J.J. EMBRECHTS

Maître de Recherches du Fonds National de la Recherche Scientifique

1. Introduction

La diffusion acoustique par une surface rugueuse a déjà été étudiée par plusieurs auteurs [1,2,3, entre autres ...], et le cas des surfaces à profil de rugosité gaussien est un cas d'école fréquemment utilisé pour illustrer les diverses théories consacrées à ce phénomène.

Dans une récente communication [4], nous avons apporté une contribution supplémentaire à l'étude de la diffusion acoustique. Cette contribution peut être résumée de la manière suivante : dans le cas limite de l'acoustique géométrique (longueur d'onde nulle ou négligeable), la théorie de l'approximation de Kirchhoff [1,2] est équivalente au formalisme des rayons sonores. Plus précisément, si un faisceau de rayons sonores parallèles est envoyé sur une surface rugueuse et si chaque rayon est réfléchi spéculairement par la facette orientée qu'il atteint, on peut montrer que le diagramme de la répartition angulaire de l'énergie diffusée par la surface est identique à celui prédit par l'approximation de Kirchhoff. C'est, à notre connaissance, la première fois que cette équivalence est démontrée, et nous renvoyons le lecteur à l'article [4] pour plus de détails.

Outre l'intérêt purement théorique et scientifique de cette découverte, il en est au moins un autre concernant les programmes de calcul de champs sonores en acoustique des salles. Les surfaces diffusantes de la salle peuvent être à présent décrites par la distribution statistique de leurs pentes, une donnée parfois plus simple et plus accessible que leur indicatrice de diffusion pour tous les angles d'incidence

possibles. Dans l'application de la technique des rayons sonores, lorsqu'un de ceux-ci rencontre une surface diffusante, il suffit de tirer au hasard une pente locale selon une loi de probabilité respectant la distribution statistique des pentes, pour déterminer la direction de réflexion du rayon. Ainsi, après un très grand nombre de rayons tirés, il est certain que l'algorithme créera une diffusion de type Kirchhoff, et donc significative du point de vue de la Physique.

Le but de cet article est de présenter un algorithme de tir de rayons basé sur cette technique. L'équivalence entre Kirchhoff et rayons sonores ayant été démontrée théoriquement dans [4], un algorithme est ici mis au point pour la vérifier d'un point de vue pratique. Les résultats de l'algorithme, à savoir les répartitions angulaires de l'énergie acoustique diffusée, seront exprimés pour des surfaces aléatoires à profil de rugosité gaussien.

2. Expression analytique de l'indicatrice de diffusion

Considérons une surface rugueuse aléatoire et une onde sonore plane incidente selon la direction \vec{k}_1 (figure 1). L'intensité sonore $I(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$ (W/sr) diffusée dans la direction \vec{k}_2 repérée par les angles θ_2 et ϕ_2 s'exprime par [4] :

$$I(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = Q(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \frac{I_{inc} S_0}{4} \rho(\vec{q}) \frac{|\vec{q}|^4}{q_z^4} w(\vec{y} = -\vec{q}_n)$$

$$\vec{q} = \vec{k}_2 - \vec{k}_1, \vec{q}_n = \left(\frac{q_x}{q_z}, \frac{q_y}{q_z} \right) \quad (1)$$

Cette expression peut donc être déduite de la théorie de l'approximation de Kirchhoff, comme de la théorie des rayons sonores. Elle est valable lorsque la longueur d'onde tend vers 0 (acoustique géométrique) et dans la zone de Fraunhofer (à grande distance de la surface). Les symboles utilisés dans cette formulation ont la signification suivante :

- $\vec{k}_1(\vec{k}_2)$: vecteur de longueur $k = 2\pi/\lambda$ (λ est la longueur d'onde) dirigé selon la direction d'incidence (de diffusion);
- I_{mc} : intensité de l'onde plane incidente (W/m^2);
- S_0 : projection de la surface rugueuse dans le plan moyen des irrégularités de surface ($z=0$ à la figure 1);
- $\rho(\vec{q})$: facteur de réflexion de Fresnel des facettes qui réfléchissent spéculairement de la direction \vec{k}_1 vers \vec{k}_2 . Le vecteur \vec{q} est dirigé suivant la normale extérieure à ces facettes;
- $w(\vec{\gamma})$: distribution statistique des pentes $\vec{\gamma}$ de la surface rugueuse (contrairement aux autres vecteurs, $\vec{\gamma}$ est un vecteur à deux composantes (γ_x, γ_y)). La proportion de la surface S_0 couverte par des éléments ($dS_0(x,y) = dx dy$) tels que la pente en (x,y) est comprise dans l'intervalle $[\vec{\gamma}, \vec{\gamma} + d\vec{\gamma}]$ s'exprime par $w(\vec{\gamma})d\vec{\gamma}$;
- $Q(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$: fonction d'ombre, c'est-à-dire la proportion de facettes orientées spéculairement (pour \vec{k}_1 et \vec{k}_2) qui sont effectivement vues par l'onde incidente et selon la direction opposée à \vec{k}_2 .

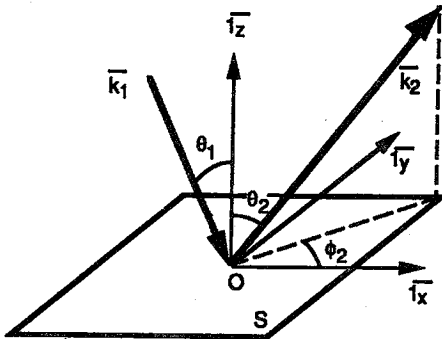


Figure 1 : Définition des grandeurs géométriques caractérisant la surface rugueuse et les ondes incidente et diffusée.

L'expression analytique (1) peut être représentée dans un diagramme polaire, ce qui illustre alors l'indicatrice de diffusion de la surface rugueuse. Nous allons dans

cet article calculer la même grandeur $I(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$ par un tir de rayons sonores et montrer ainsi effectivement que les deux approches correspondent. Pour cela, nous avons besoin d'une autre relation théorique établie dans la référence [4] : cette relation nous donne la probabilité $P(\vec{\gamma})$ pour qu'un rayon sonore du faisceau incident atteigne une facette dont la pente est comprise dans l'intervalle $[\vec{\gamma}, \vec{\gamma} + d\vec{\gamma}]$:

$$P(\vec{\gamma}) = (\gamma_x \tan \theta_1 + 1) Q(\vec{k}_1) w(\vec{\gamma}) d\gamma_x d\gamma_y \quad (2)$$

Dans cette expression, la fonction d'ombre n'est appliquée que sur la direction d'incidence. Cette fonction d'ombre est évidemment nulle pour $\gamma_x \leq -\cot \theta_1$, ce qui empêche la probabilité de devenir négative. Physiquement, cela s'interprète par le fait que les facettes dont les pentes sont caractérisées par $\gamma_x \leq -\cot \theta_1$ sont par construction dans l'ombre, quel que soit le profil des hauteurs de la surface dans le voisinage.

3. Le cas des surfaces rugueuses aléatoires à profil gaussien

La distribution statistique des pentes pour une surface rugueuse s'écrit :

$$w(\vec{\gamma}) = \frac{T^2}{4\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{T^2 |\vec{\gamma}|^2}{4\sigma^2}\right) \quad (3)$$

σ est l'écart-type des variations de hauteur (de moyenne nulle) et T est la *longueur de corrélation* exprimant la distance horizontale (dans le plan S_0) à partir de laquelle les hauteurs de deux facettes peuvent être considérées comme non corrélées [1]. La relation (3) peut être insérée dans l'équation (1), en tenant compte de la relation liant $\vec{\gamma}$ et (θ_2, ϕ_2) via $\vec{\gamma} = -\vec{q}_n$. On obtient :

$$I(\theta_1, \theta_2, \phi_2) = Q(\theta_1, \theta_2, \phi_2) \frac{\rho(\theta_s) I_{mc} S_0}{4} \left(\frac{T^2}{4\pi\sigma^2} \right) \frac{1}{\cos^4 \alpha} \exp\left(-\frac{T^2 \tan^2 \alpha}{4\sigma^2}\right)$$

$$\cos 2\theta_s = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \phi_2$$

$$\cos^4 \alpha = \frac{q_z^4}{|\vec{q}|^4} = \frac{(\cos \theta_1 + \cos \theta_2)^4}{4(1 + \cos 2\theta_s)^2} \quad (4)$$

L'angle θ_s représente l'angle d'incidence local sur les facettes qui réfléchissent spéculairement de la direction \vec{k}_1 vers \vec{k}_2 , tandis que l'angle α est l'angle entre la normale à ces facettes et l'axe \vec{I}_z .

En ce qui concerne la fonction d'ombre $Q(\vec{k}_1)$ ou $Q(\theta_1)$, une relation tirée de Bass et Fuks [2] peut être utilisée :

$$Q(\theta_1) = \frac{1}{1 + \Lambda_N \left(\frac{T}{\sigma\sqrt{2}} \cot \theta_1 \right)}$$

$$\Lambda_N(a) = \frac{1}{2a} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp(-a^2/2) - a \operatorname{erfc}(a/\sqrt{2}) \right) \quad (5)$$

4. Algorithme de tir de rayons : principe général

La direction d'incidence des rayons sonores θ_1 est définie au départ. Lorsqu'un rayon atteint la surface diffusante, il faut tirer au hasard une pente $\vec{\gamma}$, en tenant compte de la distribution statistique des pentes de la surface. Dès que cette pente est déterminée, le rayon réfléchi peut être construit. Les rayons réfléchis sont enfin collectés dans plusieurs angles solides, ce qui permet de calculer la puissance diffusée par unité d'angle solide (W/sr) dans plusieurs directions.

Pratiquement, l'algorithme opère de la manière suivante :

- 1 : pour tout rayon tiré, génération de deux nombres aléatoires X et Y entre 0 et 1 (densité de probabilité uniforme);
- 2 : résoudre l'équation $X = F(\gamma_x)$, où $F(\gamma_x)$ est la fonction de probabilité cumulée associée à $P(\bar{\gamma})$. D'après l'équation (2) :

$$F(\gamma_x) = \frac{1}{1 + \Lambda_N \left(\frac{T}{\sigma\sqrt{2}} \cot \theta_1 \right)} \int_{-\cot \theta_1}^{\gamma_x} d\gamma'_x \int_{-\infty}^{+\infty} (\gamma'_x \tan \theta_1 + 1) w(\bar{\gamma}') d\gamma'_y \quad (6)$$

- 3 : résoudre l'équation $Y = F(\gamma_y)$ de la même manière, avec :

$$F(\gamma_y) = \frac{1}{1 + \Lambda_N \left(\frac{T}{\sigma\sqrt{2}} \cot \theta_1 \right)} \int_{-\cot \theta_1}^{+\infty} d\gamma'_x \int_{-\infty}^{\gamma_y} (\gamma'_x \tan \theta_1 + 1) w(\bar{\gamma}') d\gamma'_y \quad (7)$$

La résolution de ces deux équations donne la pente $\bar{\gamma}$ d'une facette dont la probabilité d'être atteinte répond à (2) ;

- 4 : calculer le vecteur normal \bar{n} de la facette tirée au hasard, ainsi que la direction du rayon réfléchi :

$$\bar{k}_2 = \bar{k}_1 - 2(\bar{k}_1 \cdot \bar{n})\bar{n} \quad \bar{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma_x^2 + \gamma_y^2}} (-\gamma_x, -\gamma_y, 1) \quad (8)$$

- 5 : éventuellement, tenir compte des effets d'ombre sur la direction du rayon réfléchi, par tirage aléatoire d'un troisième nombre, ce que nous ne ferons pas ici ;
- 6 : déterminer l'angle solide collecteur dans lequel le rayon sonore est réfléchi et incrémenter la puissance diffusée dans cet angle solide ;
- 7 : passer au rayon suivant (retour à l'étape numéro 1).

5. Algorithme de tir de rayons : points particuliers

5.1. Résolution de l'équation (6)

Cette équation peut s'écrire, en tenant compte de (3) pour une surface gaussienne :

$$F(\gamma_x) = \frac{\left(\frac{T^2}{4\pi\sigma^2}\right)}{1 + \Lambda_N\left(\frac{T}{\sigma\sqrt{2}} \cot \theta_1\right)} \int_{-\cot \theta_1}^{\gamma_x} (\gamma_x \tan \theta_1 + 1) \exp\left(-\frac{T^2 \gamma_x'^2}{4\sigma^2}\right) d\gamma_x' \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{T^2 \gamma_y'^2}{4\sigma^2}\right) d\gamma_y' \quad (9)$$

La dernière intégrale donne $2\sigma\sqrt{\pi}/T$, tandis que l'intégrale par rapport à la variable γ_x' donne :

$$\frac{2\sigma\sqrt{\pi}}{T} (\Lambda_N(a) - \Lambda_N(a; b)) \quad a = \frac{T}{\sigma\sqrt{2}} \cot \theta_1 \quad b = \frac{T\gamma_x}{\sigma\sqrt{2}}$$

$$\Lambda_N(a; b) = \frac{1}{2a} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp(-b^2/2) - a \operatorname{erfc}(-b/\sqrt{2}) \right) \quad (10)$$

A noter que dans cette dernière expression, la fonction complémentaire d'erreur $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$, $x \geq 0$ et $\operatorname{erfc}(x) = 1 + \operatorname{erf}(|x|)$, $x < 0$. Finalement, l'expression (9) devient :

$$F(\gamma_x) = \frac{(\Lambda_N(a) - \Lambda_N(a; b))}{1 + \Lambda_N(a)}, b \geq -a \quad F(\gamma_x) = 0, b < -a \quad (11)$$

où les quantités a et b sont données par (10). On peut montrer que $F(\gamma_x)$ est une fonction croissante et monotone, entre 0 et 1.

La résolution analytique de l'équation $X = F(\gamma_x)$ où γ_x est la variable n'est donc pas possible, l'expression (11) ne s'y prêtant pas. Une résolution numérique par recherche dichotomique sera adoptée. Nous avons remarqué que cet algorithme

simple conduisait à des vitesses de calcul satisfaisantes pour notre problème. Dans un premier temps, nous calculons la valeur de $F(\gamma_x)$ pour 101 valeurs discrètes de $\frac{T\gamma_x}{2\sigma}$, également réparties entre -17 et $+17$. En dehors de cet intervalle, l'exponentielle dans (10) est négligeable (inférieure à la précision machine) et la fonction $F(\gamma_x)$ y atteint ses limites (0 et 1). Par conséquent :

$$\text{Si } 0 \leq X < F\left(\frac{T\gamma_x}{2\sigma} = -17\right), \text{ alors, par convention, } \gamma_x = \frac{-34\sigma}{T}$$

$$\text{Si } F\left(\frac{T\gamma_x}{2\sigma} = 17\right) \leq X \leq 1, \text{ alors, par convention, } \gamma_x = \frac{34\sigma}{T}$$

Un *integer* compte le nombre d'occurrences de ces deux événements qui doivent correspondre à des probabilités très faibles.

Sinon, recherche dans le tableau des 101 valeurs discrètes des deux valeurs consécutives de F telles que $F_i \leq X < F_{i+1}$.

On opère ensuite la recherche dichotomique en enfermant X dans un intervalle de plus en plus petit, jusqu'à ce que cet intervalle ait une longueur négligeable (voir test d'arrêt ci-après).

La recherche dichotomique est un algorithme itératif. A l'itération numéro j , la solution γ_x est enfermée dans un intervalle Δ_j . Le test d'arrêt sera basé sur la relation suivante :

$$|\Delta_j| \leq \frac{1 + \gamma_x^2}{1 + |\gamma_x|/1000} 10^{-3} \Rightarrow |\Delta\theta_2| \leq 2 \cdot 10^{-3} \quad (12)$$

Dès que l'intervalle Δ_j respecte cette condition, l'erreur commise sur l'angle de diffusion θ_2 est inférieure à 0.12 degré, ce que nous acceptons. La démonstration de (12) est la suivante :

Dans le plan d'incidence $\phi_2 = 0$ ou π , on peut écrire $\gamma_x = \tan \alpha$, où α est l'angle entre la normale à une facette et l'axe $\vec{1}_z$ (figure 2). Comptons α positif lorsque γ_x est positif, et inversement. Considérons une pente $\gamma'_x = \tan(\alpha + \varepsilon)$ voisine de la solution γ_x . Dès lors :

$$\Delta\gamma_x = \gamma'_x - \gamma_x = \tan \varepsilon \frac{1 + \gamma_x^2}{1 - \gamma_x \tan \varepsilon}$$

La solution γ_x et son approximation γ'_x (le milieu de l'intervalle Δ_j) sont toutes deux incluses dans l'intervalle Δ_j à l'itération n°j.

Si $|\Delta\gamma_x| \leq |\Delta_j| \leq \frac{1 + \gamma_x^2}{1 + |\gamma_x|/1000} 10^{-3}$

Alors $\frac{|\tan \varepsilon|}{|1 - \gamma_x \tan \varepsilon|} \leq \frac{1}{1 + |\gamma_x|/1000} 10^{-3} \Rightarrow |\tan \varepsilon| \leq \frac{1 + |\gamma_x|}{1 + |\gamma_x|/1000} |\tan \varepsilon| 10^{-3}$

$$\Rightarrow |\varepsilon| \cong |\tan \varepsilon| \leq 10^{-3} \Rightarrow |\Delta\theta_2| \leq 2.10^{-3} \quad (13)$$

Cette dernière relation tient compte de la petitesse de l'angle d'erreur ε et du fait qu'une erreur angulaire ε sur la normale à une facette se répercute en double sur la construction de la direction spéculaire.

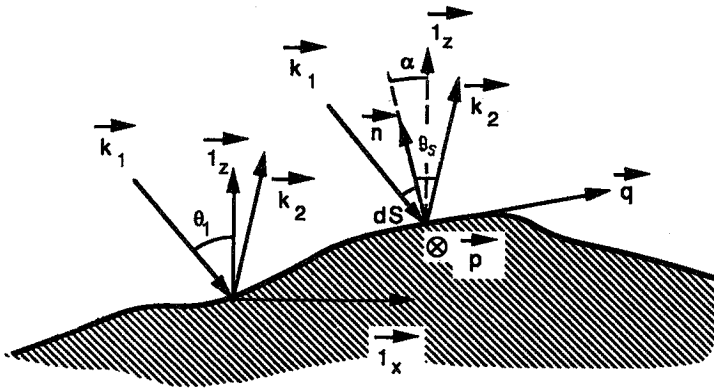


Figure 2 : Définition de l'angle α

La démonstration et le test d'arrêt que nous avons décrits sont basés sur un développement dans le plan d'incidence. Dans cet article, nous allons effectivement limiter l'étude de la diffusion dans ce plan. Sans entrer dans les détails, nous indiquons ci-après un test d'arrêt des itérations valable quel que soit ϕ_2 :

$$|\Delta_j| \leq \sqrt{1+\gamma_x^2} 10^{-3} \quad (14)$$

5.2. Résolution de l'équation (7)

Cette équation peut s'écrire, en tenant compte de (3) pour une surface gaussienne :

$$F(\gamma_y) = \frac{\left(\frac{T^2}{4\pi\sigma^2}\right)}{1 + \Lambda_N\left(\frac{T}{\sigma\sqrt{2}} \cot \theta_1\right)} \int_{-\cot \theta_1}^{+\infty} (\gamma_x \tan \theta_1 + 1) \exp\left(-\frac{T^2\gamma_x'^2}{4\sigma^2}\right) d\gamma_x \int_{-\infty}^{\gamma_x} \exp\left(-\frac{T^2\gamma_y'^2}{4\sigma^2}\right) d\gamma_y \quad (15)$$

La dernière intégrale donne $\frac{\sigma\sqrt{\pi}}{T} \left(2 - \operatorname{erfc}\left(\frac{T\gamma_y}{2\sigma}\right)\right)$, tandis que l'intégrale par rapport à la variable γ_x atteint la limite de (10) pour γ_x tendant vers l'infini, soit :

$\frac{2\sigma\sqrt{\pi}}{T} (1 + \Lambda_N(a))$. Par conséquent, (15) devient :

$$F(\gamma_y) = 1 - 0.5 \operatorname{erfc}\left(\frac{T\gamma_y}{2\sigma}\right) \quad (16)$$

On peut montrer que $F(\gamma_y)$ est une fonction croissante et monotone, entre 0 et 1.

La résolution analytique de l'équation $Y = F(\gamma_y)$ où γ_y est la variable est opérée comme précédemment, par recherche dichotomique. Le test d'arrêt des itérations est déterminé en constatant que la pente γ_y influence peu l'angle de

diffusion θ_2 au voisinage du plan d'incidence, car $\gamma_y \cong 0$. Par contre, elle influence la valeur de ϕ_2 de manière proportionnelle. Pour s'en rendre compte, il suffit d'exprimer la relation :

$$\gamma_y = \frac{-\sin \theta_2 \sin \phi_2}{\cos \theta_2 + \cos \theta_1} \Rightarrow \frac{\Delta \gamma_y}{\gamma_y} \cong \frac{\Delta \phi_2}{\phi_2} (\text{si } \phi_2 \rightarrow 0) \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta \phi_2}{\phi_2 - \pi} (\text{si } \phi_2 \rightarrow \pi) \quad (17)$$

Dès lors, le test d'arrêt consistera à limiter $|\Delta \gamma_y / \gamma_y|$ à $10^{-3} / dphi$, où $dphi$ est l'excursion maximale en azimut de l'angle solide collecteur, ce qui limite automatiquement $\Delta \phi_2$ à l'erreur angulaire acceptée de 0.06 degré.

Il se pose néanmoins un problème au voisinage très proche de $\gamma_y = 0$, car le test d'arrêt est alors $|\Delta \gamma_y| \leq \cong 0$, ce qui risque de rendre l'algorithme instable. Pour résoudre ce problème, considérons le développement en série de la fonction complémentaire d'erreur autour de 0 :

$$erfc(|x|) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} |x| + o(x^3) \quad (18)$$

Ce développement limité aux deux premiers termes est exact à 0.04% près si $|x| \leq 0.1$, erreur que nous acceptons. Dès lors, l'algorithme de résolution de $Y = F(\gamma_y)$ devient le suivant :

$$\gamma_y = \frac{2\sigma\sqrt{\pi}}{T} (Y - 0.5)$$

Si $\left| \frac{T\gamma_y}{2\sigma} \right| \leq 0.1$ alors la solution γ_y ci-dessus convient ;

Sinon : opérer la recherche dichotomique avec le test d'arrêt :

$$|\Delta \gamma_y| \leq \left(\frac{2\sigma}{T} \right) (10^{-4} / dphi) \quad (19)$$

A titre indicatif, si l'on veut mener l'étude en dehors du plan d'incidence, le test suivant peut être utilisé en lieu et place de (19) : $|\Delta\gamma_y| \leq 2.10^{-3} |\gamma_y|$ (20)

5.3. Puissance recueillie dans les angles solides collecteurs

Les angles solides collecteurs sont caractérisés au voisinage du plan d'incidence par $|\phi_2| \leq dphi$ ou $|\phi_2 - \pi| \leq dphi$. D'autre part, la variable θ_2 est découpée en secteurs d'écart angulaire $dteta$, entre $-\pi/2$ et $\pi/2$. Par convention, les valeurs négatives de θ_2 correspondent au demi-plan $\phi_2 = \pi$. La valeur en stéradians d'un angle solide collecteur est $\Delta\Omega_i = 2 dphi |\cos\theta_{2i} - \cos\theta_{2f}|$, où les angles θ_{2i} et $\theta_{2f} = \theta_{2i} + dteta$ représentent les angles limites du secteur correspondant.

Si N_i rayons sonores sont réfléchis dans l'angle solide $\Delta\Omega_i$, cela correspond à une puissance de :

$$N_i W_r = \frac{N_i}{N} I_{inc} S_0 \cos\theta_1 \quad (21)$$

où W_r est la puissance transportée par un rayon. Par conséquent, l'intensité (W/sr) diffusée dans une direction \vec{k}_2 caractéristique de l'angle solide $\Delta\Omega_i$, peut s'écrire :

$$I(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \frac{N_i}{N\Delta\Omega_i} I_{inc} S_0 \cos\theta \quad (22)$$

Cette expression doit donner les mêmes résultats que l'équation (4), pour un nombre de rayons tendant vers l'infini.

Il faut également signaler que (22) ne tient pas compte du facteur de réflexion local, propre à chaque facette. La surface est ici supposée parfaitement réfléchissante (rigide). Pour d'autres types de surfaces, il s'agirait de multiplier la

puissance de chaque rayon réfléchi par le facteur $\rho(\theta_s)$ dépendant de l'angle local d'incidence θ_s : cfr. équation (4).

5.4. Rayons réfléchis en dessous du plan horizontal z=0

Le choix aléatoire de la direction réfléchie du rayon sonore n'exclut pas d'obtenir, dans (8), une direction telle que $\cos \theta_2 < 0$. Un tel rayon sonore représente une partie de l'énergie réfléchie au premier ordre vers une autre facette de la surface rugueuse. Dans l'algorithme décrit plus haut, les rayons réfléchis en dessous de l'horizontale seront comptabilisés dans un angle solide couvrant tout le demi-espace $z < 0$. Leur énergie ne sera pas analysée.

Les réflexions multiples à l'intérieur de la surface ne sont pas considérées dans ce formalisme de rayons sonores. Mais ils ne sont pas non plus pris en compte dans les expressions (1) et (4) dérivées de l'approximation de Kirchhoff (cfr. [2]). Les deux théories restent donc comparables.

5.5. Rayons réfléchis en dehors des angles solides voisins de 0 et π

L'algorithme peut être accéléré dans le cas où l'on ne s'intéresse qu'à l'énergie diffusée au voisinage du plan d'incidence. Il s'agit de tirer au hasard la pente γ_y en premier lieu. Si cette pente est trop importante, le rayon sonore réfléchi sortira du voisinage du plan d'incidence, et il est inutile dès lors d'opérer le tirage aléatoire de la pente γ_x , ce qui permet d'épargner une recherche dichotomique. Traduisons mathématiquement :

$$\underline{\text{Si}} \quad |\gamma_y| > \frac{\sin(dphi)}{\cos \theta_1} \quad \Rightarrow \quad |\sin \phi_2| > \sin(dphi) \quad (23)$$

Cette relation est démontrée facilement à partir de (17). Si elle est vérifiée, le rayon réfléchi sortira du voisinage du plan d'incidence (voisinage limité par $\pm dphi$), quelle que soit la pente γ_x .

6. Résultats de l'algorithme de tir de rayons

L'utilisateur doit spécifier le nombre total de rayons à tirer N , l'angle d'incidence θ_1 , ainsi que le paramètre de rugosité de la surface T/σ . L'étendue des angles solides collecteurs est fixée par $dphi = 10^\circ$ et $dteta = 5^\circ$.

Le programme calcule les intensités diffusées par la surface rugueuse dans le plan d'incidence. Les intensités sont données en dB, avec pour convention que 0dB est attribué à l'intensité diffusée dans la direction spéculaire $\theta_2 = \theta_1$ et $\phi_2 = 0$.

D'après la théorie de Kirchhoff, l'intensité diffusée est maximale dans cette direction, tant que la surface n'est pas trop rugueuse ($T/\sigma > 2.83$: voir [5]). Pour les surfaces plus rugueuses, on observe plutôt un minimum local d'intensité en $\theta_2 = 0$, ainsi que deux maxima opposés : l'un dans le demi-plan spéculaire, l'autre dans le demi-plan de rétro réflexion (ceci sans tenir compte de l'influence de la fonction d'ombre qui peut déplacer la position des maxima)

Le tableau suivant illustre une feuille de résultats. Les colonnes de nombres sont les suivantes (de gauche à droite) :

- l'angle de diffusion θ_2 , positif si $\phi_2 = 0$ et négatif si $\phi_2 = \pi$;
- le nombre de rayons N_i recueillis dans chaque angle solide collecteur ;
- l'intensité diffusée (W/sr) pour une puissance unitaire (1W) du faisceau incident ;
- la même intensité diffusée en dB ;
- les deux valeurs d'intensité correspondantes prédites par l'approximation de Kirchhoff ;
- et l'écart (en dB) entre les deux théories, pour chaque angle solide collecteur.

Nombre de rayons : 100000
 Angle d'incidence (°) : 60.0
 Rugosité : tsig= 5.00

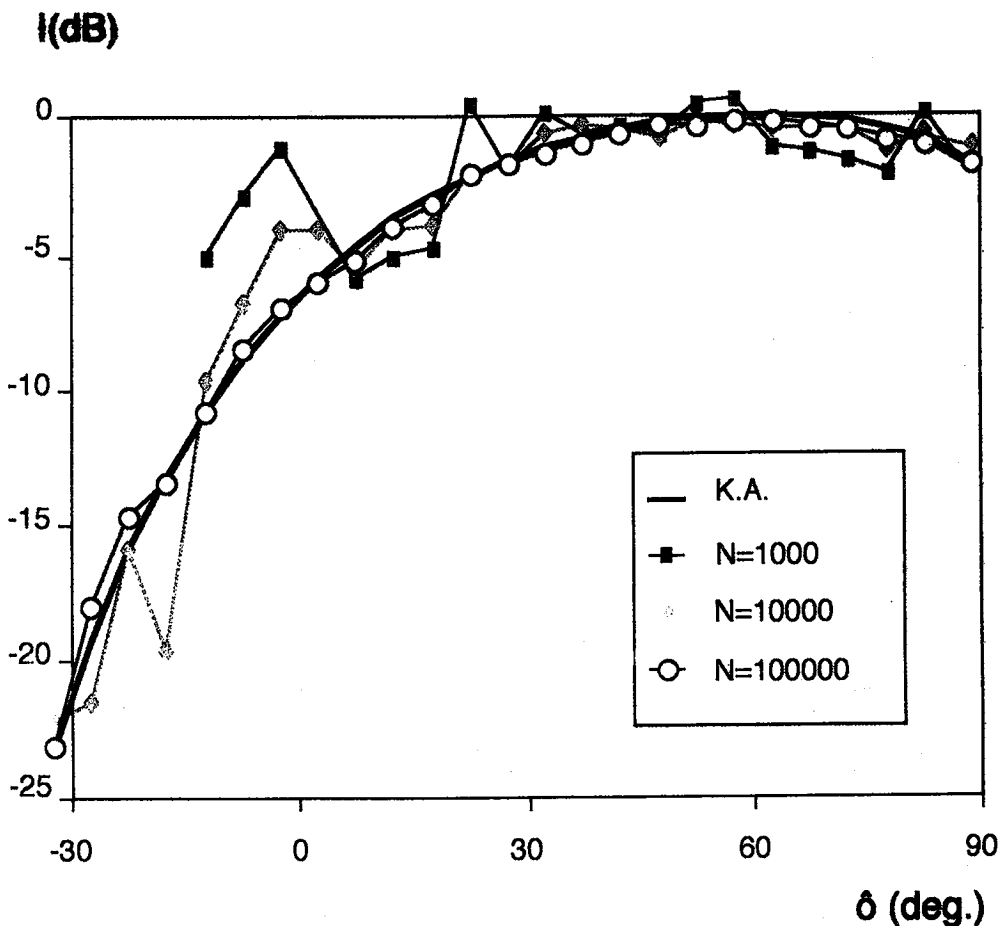
Angle solide collecteur : dphi = 10.0° dteta = 5.0°

angle (°)	rayons (N,W, dB)	Kirchhoff (W, dB)	Ecart (dB)
*****	*****	*****	*****
87.5	2047 0.673E+00 -1.68	0.766E+00 -1.12	-.6
82.5	2358 0.781E+00 -1.03	0.836E+00 -.74	-.3
77.5	2434 0.819E+00 -.83	0.896E+00 -.44	-.4
72.5	2588 0.891E+00 -.46	0.942E+00 -.22	-.2
67.5	2600 0.924E+00 -.30	0.973E+00 -.08	-.2
62.5	2625 0.972E+00 -.09	0.989E+00 -.01	-.1
57.5	2479 0.965E+00 -.11	0.989E+00 -.01	-.1
52.5	2266 0.938E+00 -.24	0.973E+00 -.08	-.2
47.5	2095 0.933E+00 -.26	0.942E+00 -.22	0.0
42.5	1762 0.856E+00 -.63	0.896E+00 -.44	-.2
37.5	1499 0.809E+00 -.88	0.836E+00 -.74	-.1
32.5	1210 0.740E+00 -1.27	0.766E+00 -1.12	-.2
27.5	931 0.662E+00 -1.75	0.686E+00 -1.60	-.2
22.5	728 0.625E+00 -2.00	0.600E+00 -2.18	.2
17.5	440 0.480E+00 -3.14	0.510E+00 -2.88	-.3
12.5	261 0.396E+00 -3.98	0.421E+00 -3.72	-.3
7.5	117 0.294E+00 -5.27	0.335E+00 -4.71	-.6
2.5	33 0.248E+00 -6.01	0.256E+00 -5.88	-.1
-2.5	26 0.196E+00 -7.04	0.186E+00 -7.27	.2
-7.5	56 0.141E+00 -8.47	0.127E+00 -8.91	.4
-12.5	55 0.834E-01 -10.75	0.814E-01 -10.86	.1
-17.5	42 0.459E-01 -13.35	0.478E-01 -13.17	-.2
-22.5	39 0.335E-01 -14.71	0.254E-01 -15.92	1.2
-27.5	22 0.156E-01 -18.02	0.118E-01 -19.22	1.2
-32.5	8 0.489E-02 -23.07	0.473E-02 -23.21	.1
-37.5	1 0.539E-03 -32.64	0.155E-02 -28.06	-4.6
-42.5	0 0.000E+00 -100.00	0.395E-03 -34.00	-66.0
-47.5	0 0.000E+00 -100.00	0.725E-04 -41.36	-58.6
-52.5	0 0.000E+00 -100.00	0.866E-05 -50.59	-49.4
-57.5	0 0.000E+00 -100.00	0.582E-06 -62.31	-37.7
-62.5	0 0.000E+00 -100.00	0.178E-07 -77.47	-22.5
-67.5	0 0.000E+00 -100.00	0.179E-09 -97.44	-2.6
-72.5	0 0.000E+00 -100.00	0.360E-12 -124.40	24.4
-77.5	0 0.000E+00 -100.00	0.646E-16 -161.86	61.9
-82.5	0 0.000E+00 -100.00	0.258E-21 -215.84	115.8
-87.5	0 0.000E+00 -100.00	0.182E-29 -297.37	197.4

nombre de rayons au rebut = 0

Le nombre de rayons « au rebut » mentionné est un indicateur qui signale le nombre de rayons pour lesquels la recherche des pentes par (6) ou (7) n'a pu avoir lieu (X ou Y en dehors du tableau de 101 valeurs). Ce nombre doit correspondre à une probabilité très faible.

Figure 3 : Intensité (dB) diffusée par une surface gaussienne parfaitement rigide ($T/\sigma = 5$) et calculée par l'approximation de Kirchhoff (K.A.) et par l'algorithme de rayons sonores ($N=1000, 10000, 100000$ rayons). L'angle d'incidence est de 60° .



Finalement, la figure 3 illustre la diffusion d'une surface moyennement rugueuse, pour une onde plane incidente de 60° . On peut y voir la bonne correspondance entre la théorie de l'approximation de Kirchhoff et le formalisme statistique des rayons sonores.

7. Conclusion

L'algorithme mis au point pour calculer par tir de rayons sonores l'indicatrice de diffusion d'une surface rugueuse a effectivement donné les résultats attendus, à savoir que l'on retrouve l'indicatrice de diffusion de Kirchhoff lorsque le nombre de rayons tirés tend vers l'infini.

La formulation proposée est directement applicable à un programme plus général d'acoustique des salles qui voudrait tenir compte de la diffusion acoustique. La résolution des étapes 2 et 3 de l'algorithme (équations 6 et 7) a été conçue de manière à limiter le temps de calcul (précalcul des fonctions F , recherche dichotomique simple, ...), puisqu'elles doivent être effectuées pour chaque rayon sonore tombant sur la surface. La surface rugueuse est entièrement définie par un nombre limité de paramètres : T/σ , et éventuellement son facteur de réflexion $\rho(\theta_s)$ si elle n'est pas parfaitement réfléchissante localement.

L'algorithme peut être adapté pour d'autres surfaces que les surfaces gaussiennes : il suffit de connaître la distribution statistique des pentes et, plus précisément, les fonctions de probabilités cumulées F . Le point le plus délicat ici pourrait être la détermination de la fonction d'ombre qui, à notre connaissance, n'a été développée que pour une surface gaussienne.

Le tir de rayons obéissant à cet algorithme simule un processus de diffusion possédant une signification physique, puisqu'il est équivalent à la théorie de l'approximation de Kirchhoff. Par conséquent, la diffusion acoustique simulée est

physiquement correcte, dans le cadre des hypothèses de cette théorie. On ne peut pas en dire autant d'autres lois de diffusion, telle la loi de Lambert ($I_0 \cos \theta_2$).

Enfin, on peut se demander si le grand nombre de rayons nécessaire pour atteindre une correspondance suffisante avec Kirchhoff dans certaines directions (voir figure 3 au voisinage de $\theta_2 = -5^\circ$) n'est pas un obstacle à l'utilisation de la méthode. Nous ne le pensons pas, car ces directions correspondent à des émissions de faibles intensités, d'une part. D'autre part, cet inconvénient est inhérent à tout algorithme de diffusion basé sur un tir aléatoire de rayons sonores.

8. Références

- [1] Beckmann P. and Spizzichino A., *The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces*, Macmillan (New York), 1963 ;
- [2] Bass F.G. and Fuks I.M., *Wave Scattering from Statistically Rough Surfaces*, Pergamon (Oxford), 1979, Chap.7 ;
- [3] Thorsos E.I., The validity of the Kirchhoff approximation for rough surface scattering using a gaussian roughness spectrum, *J. Acoust. Soc. Am*, **83** (1988), 78-92 ;
- [4] Embrechts J.J., Modelization of Kirchhoff scattering by a sound ray algorithm, *Proceedings of the ICA/ASA'98*, Seattle (1998), 2329-2330 ;
- [5] Embrechts J.J., Etude et modélisation de la réflexion lumineuse dans le cadre de l'éclairage prévisionnel, *Faculté des Sciences Appliquées de l'Université de Liège* (1994).