

# FACTEURS D'ABSORPTION EQUIVALENTS DES STRUCTURES DE BAFFLES PARALLELES SUSPENDUS

## RESOLUTION DES EQUATIONS DE PROPAGATION A L'INTERIEUR DE LA STRUCTURE

J.J.EMBRECHTS

Chercheur Qualifié du Fonds National de la Recherche Scientifique

### 1. Introduction

Lors d'une étude précédente [4], le facteur d'absorption équivalent d'une structure de baffles parallèles suspendus a été déterminé en appliquant les techniques d'acoustique géométrique.

On peut se demander si cette application est toujours justifiée et, sinon, dans quelles limites (notamment fréquentielles) l'acoustique géométrique donne des résultats valables.

L'étude exposée ici apportera un élément de réponse à cette question. On y résout en effet les équations de propagation à l'intérieur de la structure de baffles, ce qui permet notamment de réintroduire la notion de fréquence et de longueur d'onde. Afin de ne pas trop alourdir les développements mathématiques, nous nous sommes placés dans le cadre des hypothèses suivantes :

- ) La structure périodique est infinie dans la direction perpendiculaire aux rangées de baffles;
- ) La structure est attaquée par une onde plane et le plan d'incidence est supposé perpendiculaire aux rangées de baffles;
- ) Le matériau absorbant constituant le baffle est localement réactif;
- ) Lors de la résolution informatique, on imposera en outre que l'admittance acoustique de ce matériau soit réelle;
- ) La paroi support de la structure est parfaitement rigide, et donc d'admittance nulle;
- ) La tranche du baffle est également supposée rigide; son épaisseur sera supposée négligeable dans les exemples.

## 2. Equations de propagation au droit de la structure de baffles

### 2.1. En dehors de la structure

La structure de baffles parallèles est donc supposée infinie et périodique dans la direction Oz, perpendiculaire aux rangées : voir figure 1. Complétons le système d'axes de telle manière que l'axe Ox rentre dans la structure.

La période spatiale est notée L, l'épaisseur e et la profondeur t.

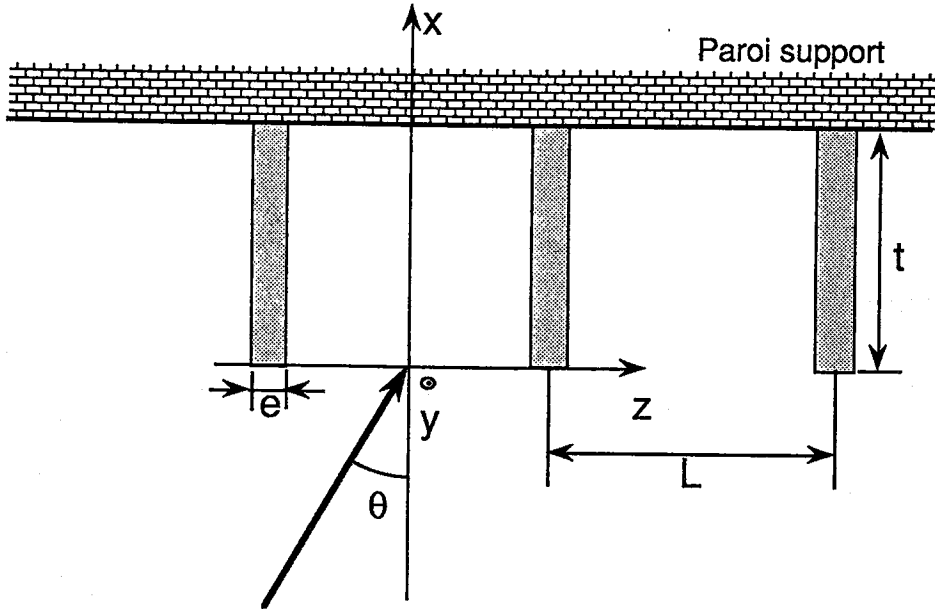


Figure 1

*Structure de baffles parallèles suspendus : définition des dimensions, repère d'axes cartésiens et direction de l'onde plane incidente.*

La structure est attaquée par une onde plane de fréquence  $f$  et de longueur d'onde  $\lambda$ . Son angle d'incidence est  $\theta$  par rapport à la normale au plan support. Le plan d'incidence est supposé perpendiculaire aux rangées de baffles (plan  $y=\text{constante}$ ). Pour une incidence en dehors de ce plan, nous renvoyons le lecteur à l'article [1].

La pression incidente s'écrit ( $x < 0$ ) :

$$p_i(x, z) = e^{j(\omega t - kx \cos\theta - kz \sin\theta)} \quad (1)$$

Dans cette configuration d'absorbant à structure périodique, on montre que la pression diffusée peut s'écrire [1,2] , pour  $x < 0$  :

$$p_s(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n e^{\gamma_n x} e^{-j \beta_n z}$$

$$\beta_n = k \left( \sin\theta + n \frac{\lambda}{L} \right), \quad k \lambda = 2 \pi$$

$$\gamma_n^2 = \beta_n^2 - k^2, \quad n \text{ entier} \quad (2)$$

Il s'agit donc d'une somme d'ondes planes (modes) dont les amplitudes complexes  $A_n$  sont encore, à ce stade de l'étude, inconnues. Elles vont être déterminées par la suite. Notons que le facteur  $e^{j\omega t}$  a été volontairement omis dans l'équation (2).

Parmi ces modes, il faut tout d'abord imposer :

$$\operatorname{re}(\gamma_n) \geq 0 \quad (3)$$

afin que la pression diffusée soit bornée pour  $x$  tendant vers  $-\infty$ . Le mode  $n=0$ , en particulier, s'écrit :

$$p_{s0}(x, z) = A_0 e^{j k (x \cos\theta - z \sin\theta)} \quad (4)$$

Il s'agit, si l'on compare à l'équation (1), du mode de réflexion spéculaire. La résolution de  $\gamma_n$  dans l'équation (2) peut donner à ce dernier, soit des valeurs réelles positives si  $\beta_n^2 \geq k^2$ , soit des valeurs imaginaires pures du type  $\gamma_n = j \alpha_n$  dans le cas contraire. Dans le premier cas ( $\gamma_n$  réel), la pression s'annule très vite au-delà d'une couche limite dont l'épaisseur en  $x$  est de l'ordre de la longueur d'onde : ce sont des ondes de surface.

Dans le second cas ( $\gamma_n$  imaginaire), ce sont des modes de rayonnement dont l'énergie ne s'atténue pas avec la distance. Il faut exclure le cas  $\alpha_n$  négatif, qui correspondrait à des ondes diffusées venant de  $x = -\infty$ . Finalement :

$$p_s(x, z) = A_0 e^{j k (x \cos \theta - z \sin \theta)} + \sum_{n_r} A_n e^{j(\alpha_n x - \beta_n z)} + \dots$$

$$+ \sum_{n_s} A_n e^{(\gamma_n x - j \beta_n z)}$$

$n_r$  : ondes rayonnées avec  $\alpha_n \geq 0$

$n_s$  : ondes de surface avec  $\gamma_n > 0$

(5)

## 2.2. Dans la structure

Considérons la cavité rectangulaire numéro  $v$ , s'étendant de  $z = vL - \frac{a}{2}$  à  $z = vL + \frac{a}{2}$ , ( $a = L - e$ ) étant la largeur de la cavité. Soit la variable  $v = z - vL$ , variable locale à la cavité, qui est comprise entre  $-\frac{a}{2}$  et  $+\frac{a}{2}$  : voir figure 2.

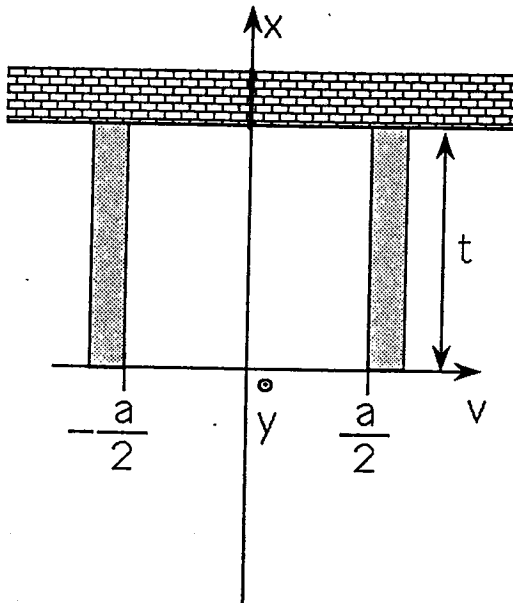


Figure 2

Variable  $v$  locale à la cavité.

La solution générale des équations de propagation à l'intérieur de la cavité est :

$$p(x, v) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (B_m e^{-j k_m x} + C_m e^{j k_m x}) (D_m e^{-j l_m v} + E_m e^{j l_m v})$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} X_m(x) V_m(v)$$

$$k_m^2 + l_m^2 = k^2, m \text{ entier} \quad (6)$$

Emettons l'hypothèse que le matériau absorbant soit localement réactif, d'admittance  $\eta_1$  :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \pm \frac{\partial p}{\partial v} = j k \eta_1 p, \quad v = \pm \frac{a}{2} \quad (7)$$

ce qui donne ( $v = \frac{a}{2}$ ) :

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} X_m(x) j l_m \left( E_m e^{j l_m \frac{a}{2}} - D_m e^{-j l_m \frac{a}{2}} \right) = j k \eta_1 \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} X_m(x) V_m\left(\frac{a}{2}\right)$$

(8)

Cette égalité est valable pour toute valeur de  $x$  comprise entre 0 et  $t$ , d'où les termes en " $m$ " s'annulent individuellement. On obtient les deux équations suivantes, dans lesquelles on a posé  $a_m = \frac{a l_m}{2}$  :

$$v = \frac{a}{2} : \quad l_m (E_m e^{j a_m} - D_m e^{-j a_m}) = k \eta_1 (E_m e^{j a_m} + D_m e^{-j a_m})$$

$$v = -\frac{a}{2} : \quad -l_m (E_m e^{-j a_m} - D_m e^{j a_m}) = k \eta_1 (E_m e^{-j a_m} + D_m e^{j a_m})$$

(9)

La solution de ce système est :

$$E_m = D_m \neq 0 \quad \text{et} \quad \text{tg}(a_m) = \frac{k \eta_1}{j l_m} = \frac{N}{a_m}, \quad N = -\frac{1}{2} j k a \eta_1$$

$$\text{ou} \quad E_m = -D_m \neq 0 \quad \text{et} \quad \text{tg}(a_m) = -\frac{a_m}{N}$$

$$\text{ou} \quad \eta_1 = 0 \text{ et } l_m = 0 \quad \text{et} \quad E_m, D_m \text{ quelconques} \quad (10)$$

C'est l'équation aux valeurs propres ( $l_m$ ). Le premier cas de l'équation (10) donne des facteurs en  $E_m \cos(l_m v)$  : voir équation (6). Le second cas donne des facteurs en  $E_m \sin(l_m v)$  et le troisième en  $(E_m + D_m)$ . Remarquons que si  $l_m$  est solution de (10),  $-l_m$  l'est aussi. En regroupant dans (6) les termes en  $+l_m$  et  $-l_m$ , on peut imposer sans perte de généralité :

$$\text{re}(l_m) > 0 \quad \text{et} \quad \text{im}(l_m) \geq 0 \quad \text{si} \quad \text{re}(l_m) = 0 \quad (11)$$

L'utilité de cette imposition apparaîtra dans la suite.

Finalement, en supposant que l'équation aux valeurs propres (10) soit résolue, la pression à l'intérieur de la cavité est :

$$p(x, v) = \sum_m (B_m e^{-j k_m x} + C_m e^{j k_m x}) \cos(l_m v + \delta_m)$$

$$\delta_m = 0 \quad \text{si} \quad \text{tg}(a_m) = \frac{N}{a_m} \quad \text{ou} \quad l_m = 0$$

$$\delta_m = -\frac{\pi}{2} \quad \text{si} \quad \text{tg}(a_m) = -\frac{a_m}{N} \quad (12)$$

N.B. : la constante  $E_m$  est rentrée dans  $B_m$  et  $C_m$ .

Revenons un instant à l'équation (6) donnant  $k_m$  : si  $k_m$  est solution,  $-k_m$  l'est également. On peut donc regrouper ces termes et imposer que la partie réelle de  $k_m$  soit positive. Dans ce cas, un raisonnement rapide sur l'atténuation des ondes progressives (vers le fond) de la cavité et régressives (vers les  $x$  négatifs) montre que la partie imaginaire de  $k_m$  doit être négative ou nulle. Imposons donc :

$$\text{re}(k_m) > 0 \quad \text{et} \quad \text{im}(k_m) \leq 0 \quad \text{ou}$$

$$\text{re}(k_m) = 0 \quad \text{et} \quad \text{im}(k_m) \leq 0 \quad \text{par convention} \quad (13)$$

L'hypothèse suivante devrait nous permettre de limiter la complexité des développements. Il s'agit d'imposer que la paroi support des baffles soit parfaitement rigide, ce qui s'écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x=t) = 0 \quad , \quad -\frac{a}{2} \leq v \leq \frac{a}{2} \quad (14)$$

ou encore :

$$p(x, v) = \sum_m B_m \left( e^{-j k_m x} + e^{j k_m (x-2t)} \right) \cos(l_m v + \delta_m)$$

pour  $0 \leq x \leq t$  et  $-\frac{a}{2} \leq v \leq \frac{a}{2}$  (15)

En préparation de l'étape suivante, exprimons la pression et le gradient de pression à l'interface ( $x=0$ ) :

$$p(0^+, v) = \sum_m B_m \left( 1 + e^{-2j k_m t} \right) \cos(l_m v + \delta_m)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(0^+, v) = \sum_m j k_m B_m \left( -1 + e^{-2j k_m t} \right) \cos(l_m v + \delta_m) \quad (16)$$

Dans ces expressions, la constante  $B_m$  dépend du numéro  $v$  de la cavité. En effet, les équations de propagation et les conditions aux limites sont semblables dans toutes les cavités, mais l'excitation est différente : elle est proportionnelle à (voir éq. 1) :

$$p_i + e^{-j k z} \sin \theta = e^{-j k (v + vL)} \sin \theta + e^{-j \beta_0 vL} \quad (17)$$

D'où, la constante  $B_m$  est aussi proportionnelle à  $e^{-j \beta_0 vL}$  :

$$B_m = B'_m e^{-j \beta_0 vL} \quad (18)$$

où  $B'_m$  est une constante indépendante du numéro ( $v$ ) de la cavité. Finalement, en posant  $H_m = 2 B'_m e^{-j k_m t}$ , on obtient :

$$p(0^+, v) = e^{-j \beta_0 vL} \sum_m H_m \cos(k_m t) \cos(l_m v + \delta_m)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(0^+, v) = e^{-j \beta_0 vL} \sum_m k_m H_m \sin(k_m t) \cos(l_m v + \delta_m) \quad (19)$$

### 2.3. Continuité du gradient de pression à l'interface

De nouveau, dans le but de simplifier les développements, imposons que la tranche des baffles (d'épaisseur "e") soit parfaitement rigide, ce qui nous conduit à l'équation suivante (cfr. équ. 19) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x}(0^+, v) &= e^{-j\beta_0 v L} \sum_m k_m H_m \sin(k_m t) \cos(l_m v + \delta_m) \quad , -\frac{a}{2} \leq v \leq \frac{a}{2} \\ &= 0 \quad \text{si} \quad \frac{a}{2} < |v| \leq \frac{L}{2} \quad (\text{sur la tranche}) \end{aligned} \quad (20)$$

D'autre part, rappelons que le gradient de pression de l'autre côté de l'interface s'écrit (cfr. éqs. 1 et 2) :

$$\frac{\partial p}{\partial x}(0^-, v) = e^{-j\beta_0 v L} \left( -j k \cos\theta e^{-j\beta_0 v} + \sum_n A_n \gamma_n e^{-j\beta_n v} \right) \quad |v| \leq \frac{L}{2} \quad (21)$$

Exprimons la continuité du gradient de pression de part et d'autre de l'interface ( $x=0$ ) :

$$\begin{aligned} \cos\theta + \sum_n j \frac{A_n \gamma_n}{k} e^{jv(\beta_0 - \beta_n)} &= j \sum_m \frac{k_m}{k} H_m \sin(k_m t) e^{j\beta_0 v} \cos(l_m v + \delta_m) \\ & \quad |v| \leq \frac{a}{2} \\ &= 0 \quad \text{si} \quad \frac{a}{2} < |v| \leq \frac{L}{2} \end{aligned} \quad (22)$$

Intégrons l'équation (22) sur la période spatiale "L", après avoir multiplié chaque membre par le facteur  $e^{j\frac{2\pi p}{L}}$  :



$$L \delta_p \cos\theta + \frac{j L A_p \gamma_p}{k} = j \sum_m \frac{k_m}{k} H_m \sin(k_m t) a_{s_{m,p}} \quad , p \text{ entier}$$

$$\delta_p = 1 \text{ si } p = 0, \quad \delta_p = 0 \text{ sinon (symbole de Kronecker)}$$

$$s_{m,p} = \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{j\beta_p v} \cos(l_m v + \delta_m) dv$$

$$= \frac{e^{j\delta_m}}{2} \left( \text{sinc}\left(a \frac{l_m + \beta_p}{2}\right) + e^{-2j\delta_m} \text{sinc}\left(a \frac{\beta_p - l_m}{2}\right) \right) \quad (23)$$

La dernière égalité est démontrée en annexe 1.

#### 2.4. Continuité de la pression à l'interface

Cette relation de continuité le long de la cavité ( $|v| \leq \frac{a}{2}$ ) est obtenue en appliquant les équations (1), (2) et (19) :

$$e^{-j\beta_0 v} \left( 1 + \sum_n A_n e^{-jv \frac{2\pi n}{L}} \right) = \sum_m H_m \cos(k_m t) \cos(l_m v + \delta_m)$$

$$|v| \leq \frac{a}{2} \quad (24)$$

Intégrons cette équation le long de la cavité, c'est-à-dire de  $v = -\frac{a}{2}$  à  $+\frac{a}{2}$ , après avoir multiplié chaque membre par le facteur  $\cos(l_u v + \delta_u)$  :

$$s_{u,0} + \sum_n A_n s_{u,n} = J_u H_u \cos(k_u t)$$

$$J_u = e^{2j\delta_u} \quad \text{si } l_u = 0 ;$$

$$J_u = e^{2j\delta_u} \left( \frac{1}{2} + \frac{j}{ak\eta_1} \sin^2\left(l_u \frac{a}{2} + \delta_u\right) \right) \quad \text{si } l_u \neq 0 \quad (25)$$

Cette dernière égalité est démontrée en annexe 2.

## 2.5. Equation donnant l'amplitude $A_n$ des modes de propagation et le facteur d'absorption équivalent

En regroupant les équations (23) et (25), nous obtenons :

$$\frac{j A_p \gamma_p}{k} = -\delta_p \cos\theta + j \frac{a}{L} \sum_m \frac{k_m}{k} \sin(k_m t) s_{m,p} \left( \frac{s_{m,0} + \sum_n A_n s_{m,n}}{J_m \cos(k_m t)} \right) \quad (26)$$

ou encore :

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n \left( -\frac{j \gamma_p}{k} \delta_{p-n} + j \frac{a}{L} \sum_m \frac{k_m}{k} \operatorname{tg}(k_m t) \frac{s_{m,p} s_{m,n}}{J_m} \right) \\ = \delta_p \cos\theta - j \frac{a}{L} \sum_m \frac{k_m}{k} \operatorname{tg}(k_m t) \frac{s_{m,p} s_{m,0}}{J_m}, \quad p = -\infty \text{ à } +\infty \quad (27)$$

Déterminer l'amplitude  $A_n$  des modes de propagation revient à résoudre ce système de "n" équations à "n" inconnues, "n" tendant vers l'infini.

Lorsque l'on aura déterminé les  $A_n$  (cfr. section 3), le facteur de réflexion équivalent de la structure de baffles sera donné par l'énergie totale contenue dans les modes rayonnants. Mechel [2] donne l'expression du facteur d'absorption équivalent :

$$\alpha(\theta) = 1 - |A_0|^2 - \frac{1}{\cos\theta} \sum_{n_r \neq 0} |A_{n_r}|^2 \sqrt{1 - \left( \sin\theta + \frac{n_r \lambda}{L} \right)^2} \quad (28)$$

où la somme sur  $n_r$  est limitée aux modes rayonnants pour lesquels, rappelons-le,  $\gamma_n^2$  dans l'équation (2) est négatif.

## 3. Programme de calcul des amplitudes $A_n$

### 3.1. Résolution de l'équation aux valeurs propres $l_m$

La première équation aux valeurs propres (10) s'écrit :

$$a_m \operatorname{tg}(a_m) = N \quad (29)$$

Nous pouvons mettre cette équation sous la forme suivante, en posant  $\pi g = j a_m$  :

$$g \operatorname{th}(\pi g) = j h \quad , \quad h = \frac{a k \eta_1}{2\pi} \quad (30)$$

L' équation (30) est résolue ci-après dans le cas d'une admittance réelle. Donc, "h" est réel. Posons  $g = \frac{1}{2} (v + j \mu)$ . L'équation (30) devient alors [3, éq. 4.5.51] :

$$(v + j \mu) \frac{\operatorname{sh}(\pi v) + j \sin(\pi \mu)}{\operatorname{ch}(\pi v) + \cos(\pi \mu)} = 2 j h \quad (31)$$

ce qui donne, en résolvant séparément les parties réelles et imaginaires :

$$v \operatorname{sh}(\pi v) - \mu \sin(\pi \mu) = 0$$

$$\text{et} \quad \frac{\mu \operatorname{sh}(\pi v) + v \sin(\pi \mu)}{\operatorname{ch}(\pi v) + \cos(\pi \mu)} = 2 h \quad (32)$$

La solution de la première équation est donnée par  $v = \pm s_\mu$  (dépendant de  $\mu$ ), ainsi que l'illustre la construction de la figure 3.

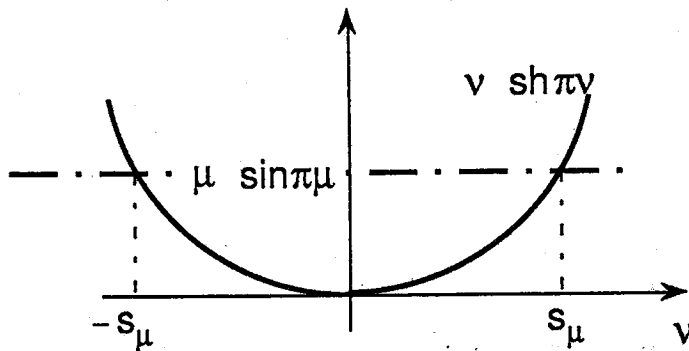


Figure 3

Construction des solutions  $v = \pm s_\mu$

$s_\mu$  n'existe que si le produit  $\mu \sin(\pi \mu) \geq 0$ , sinon il n'y a pas de solution possible pour  $\mu$ . En introduisant  $s_\mu$  dans la seconde équation de (32), nous obtenons :

$$F(\mu) = \frac{\mu \operatorname{sh}(\pi s_\mu) + s_\mu \sin(\pi\mu)}{2 (\operatorname{ch}(\pi s_\mu) + \cos(\pi\mu))} = h \quad (33)$$

Etudions cette fonction  $F(\mu)$  dans l'intervalle de  $\mu$   $[2i, 2i + 1]$ , "i" entier positif ou nul. Notons que dans l'intervalle  $]2i + 1, 2i + 2[$ ,  $\mu \sin(\pi\mu)$  est négatif et il n'y a pas de solution pour (32).

•) en  $\mu = 2i$ ,  $\sin(2\pi i) = 0 \Rightarrow s_\mu = 0$  et  $F(\mu) = 0$ ;

•) pour  $\mu \neq 0$ ,  $\sin(\pi\mu) = \frac{s_\mu \operatorname{sh}(\pi s_\mu)}{\mu}$  et

$$F(\mu) = \left( \frac{\mu^2 + s_\mu^2}{2\mu} \right) \frac{\operatorname{sh}(\pi s_\mu)}{\operatorname{ch}(\pi s_\mu) + \cos(\pi\mu)} \quad (34)$$

d'où :  $F(\mu) > 0$  si  $s_\mu > 0$  ( $\mu \neq 0$ )  
 $F(\mu) < 0$  si  $s_\mu < 0$  ( $\mu \neq 0$ )

•) en  $\mu = 2i + 1$ ,  $\sin(2\pi i + \pi) = 0 \Rightarrow s_\mu = 0$  et  $F(\mu) = \frac{0}{0}$  ?

l'indétermination est levée en annexe 3 :  $F(2i + 1)$  tend vers l'infini.

•) la dérivée  $F'(\mu) > 0$  si  $s_\mu > 0$  et  $F'(\mu) < 0$  si  $s_\mu < 0$ , pour toute valeur de  $\mu$  telle que :  $2i < \mu < 2i + 1$  (cfr. annexe 3).

La figure 4 illustre l'allure générale de la fonction  $F(\mu)$ , pour  $\mu \geq 0$ . Remarquons que le cas  $\mu < 0$  ne doit pas être examiné. En effet,  $\mu$  est proportionnel à la partie imaginaire de "g", donc à la partie réelle de "Im" (d'après l'éq. 30). Or, cette dernière est elle-même positive par (11).

La résolution de  $F(\mu) = h$  à l'équation (33) revient donc à prendre la racine  $s_\mu$  positive si  $h > 0$  et inversement.

Une propriété importante est que la fonction  $F(\mu)$  ne reprend pas périodiquement la même valeur, mais une valeur de plus en plus grande au fur et à mesure que le numéro de l'intervalle "i" augmente :

$$|F(\mu + 2i)| > |F(\mu)| \quad (35)$$

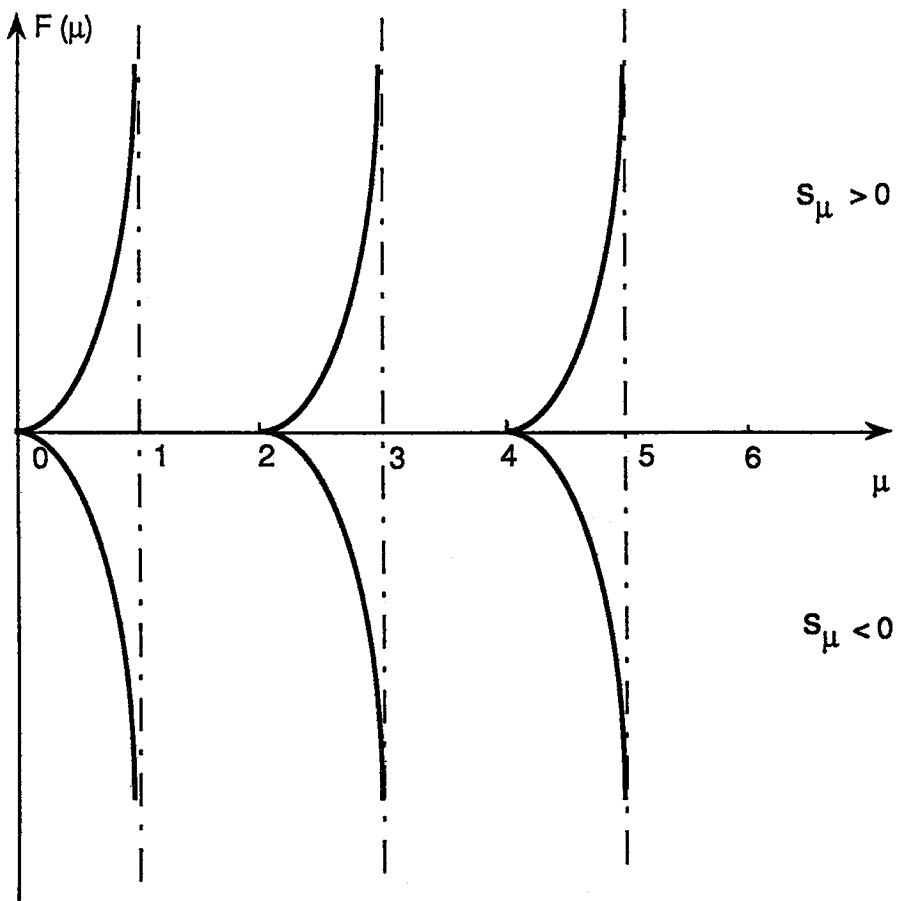


Figure 4

Allure générale de la fonction  $F(\mu)$ , correspondant à la solution de l'équation (29).

En effet, mettons la fonction  $F(\mu)$  sous la forme suivante (cfr. A.3.5) :

$$F(\mu) = \frac{s_\mu}{2 \sin(\pi\mu)} (\text{ch}(\pi s_\mu) - \cos(\pi\mu)) \quad (36)$$

Un bref coup d'oeil à la figure 3 montre que  $(\mu + 2i) \sin(\pi\mu)$  conduit à une racine  $s_\mu$  plus grande, en valeur absolue, que  $\mu \sin(\pi\mu)$ . Donc,  $|s_\mu|$  et  $\text{ch}(\pi s_\mu)$  augmentent, alors que  $\sin(\pi\mu)$  et  $\cos(\pi\mu)$  restent inchangés dans (36), par périodicité. La relation (35) est donc démontrée.

## Conséquences

- ) les valeurs propres  $\frac{a l_m}{2}$  tendent vers "m $\pi$ " quand l'ordre "m" tend vers l'infini :  
pour h fixé,  $\mu$  tend vers "2m" et  $s_\mu$  vers 0; d'où g tend vers  $j \frac{\mu}{2} = jm$  et  $\left(\frac{a l_m}{2}\right)$  vers "m $\pi$ " (cfr. éq. 30);
- ) les valeurs propres  $k_m$  tendent vers  $\sqrt{k^2 - l_m^2} = -j |l_m| = -j \frac{2\pi m}{a}$ ;
- )  $s_{m,p}$  tend vers 0 pour p fixé, comme la fonction  $\frac{1}{l_m}$ , proportionnellement à  $\frac{1}{m}$ ;
- ) les termes de la somme  $\left(\sum_m\right)$  à l'équation (27) tendent vers 0 en  $\frac{1}{m}$ .

La deuxième équation aux valeurs propres (10) est la suivante :

$$a_m \cotg(a_m) = -N$$

$$g \coth(\pi g) = j h \quad , h = \frac{a k \eta_1}{2\pi}$$

$$g = \frac{1}{2} (v + j \mu) \quad (37)$$

Une étude similaire montrerait que l'équation  $F(\mu) = h$  à résoudre serait, dans ce cas, représentée par les traits gras de la figure 5.

La recherche des valeurs propres, pour "h" réel positif, consiste donc à trouver une valeur propre dans chaque intervalle de  $\mu : [i, i+1]$ . Si "i" est pair, l'équation (30) est résolue. Si "i" est impair, l'équation (37) est résolue. "h" étant positif, la valeur de  $v = s_\mu$  recherchée est donc elle-aussi positive.

Algorithme de recherche de la valeur propre numéro "m" :  $\frac{1}{2} (v_m + j \mu_m)$

- )  $\mu_a = m$  ;  $f_a = F(\mu_a) = 0$  ;
- ) recherche d'une valeur  $\mu_b$  telle que  $|f_b = F(\mu_b)| \geq |h| \Rightarrow \mu_a \leq \mu_m \leq \mu_b$ ;
- ) répéter :  $\mu = \mu_a + (\mu_b - \mu_a) \left(\frac{h - f_a}{f_b - f_a}\right)$

$$f_\mu = F(\mu, s_\mu)$$

si  $|f_\mu - h| < 0.1 |h|$  alors {au moins trois pas de type "Newton"}

$$\mu_d = \mu; \quad f_d = f_\mu;$$

répéter trois fois :  $\mu = \mu + \frac{h - f_\mu}{F'(\mu)}$

$$f_\mu = F(\mu, s_\mu)$$

si  $|f_\mu - h| < 10^{-4} |h|$  et  $|\Delta\mu| < \mu 10^{-4}$

alors  $\mu_m = \mu$  ;  $v_m = s_\mu$  ; stop.

si  $\mu \in [\mu_a, \mu_b]$  , recommencer trois pas "Newton"; sinon :

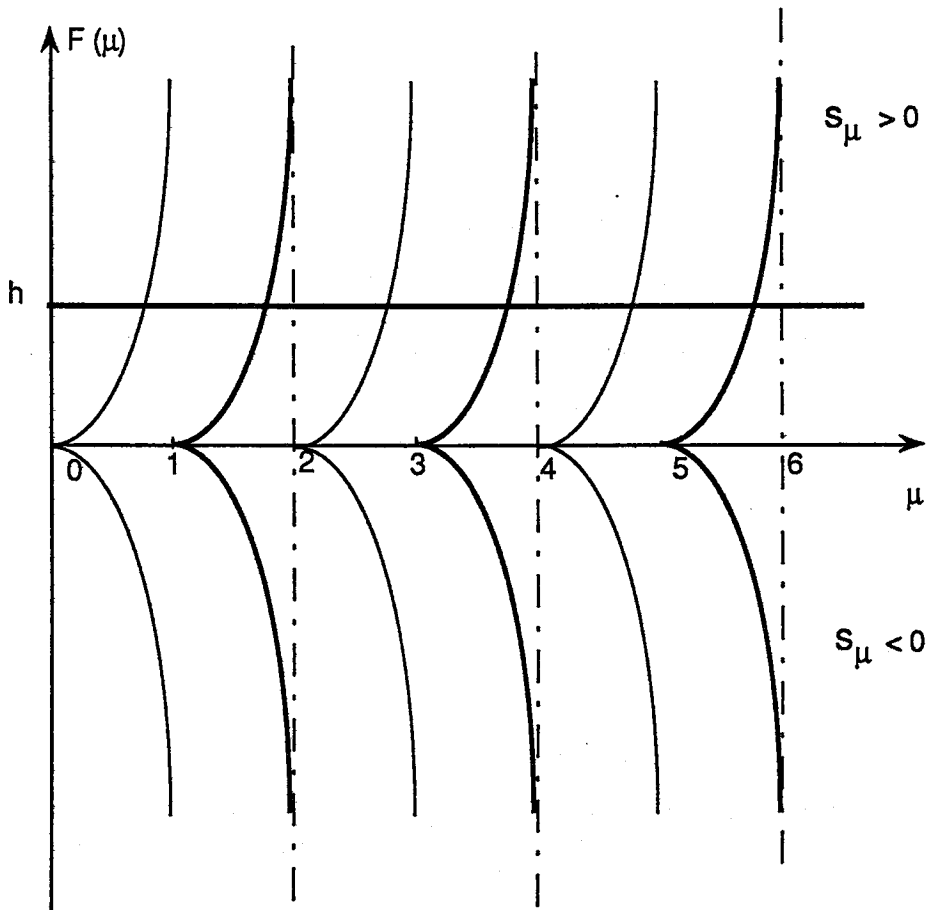


Figure 5

Allure générale de la fonction  $F(\mu)$ , correspondant à la solution de l'équation (29) en trait fin et de l'équation (37) en trait gras.

restaurer :  $\mu = \mu_d$  ;  $f_\mu = f_d$  ;

si  $|f_\mu| < |h|$       alors  $\mu_a = \mu$  ;       $f_a = f_\mu$  ;  
sinon  $\mu_b = \mu$  ;       $f_b = f_\mu$  ;

•) sous - routine : calcul de  $F(\mu, s_\mu)$

$$fsh = \mu | \sin(\pi\mu) |$$

$$v_a = 0 ; \quad f_a = 0 ;$$

recherche d'une valeur  $v_b$  telle que  $f_b = v_b \operatorname{sh}(\pi v_b) > fsh \quad \Rightarrow \quad v_a \leq s_\mu \leq v_b$  ;

répéter :  $v = v_a + (v_b - v_a) \left( \frac{fsh - f_a}{f_b - f_a} \right)$

$$f_v = v \operatorname{sh}(\pi v)$$

si  $|f_v - fsh| < 0.1 |fsh|$       alors  
{au moins trois pas de type "Newton" :  
voir la procédure exposée ci-dessus}

sortie possible :  $s_\mu = v$  ; sortir de la boucle "répéter".

si  $f_v \leq fsh$       alors  $v_a = v$  ;       $f_a = f_v$  ;  
sinon  $v_b = v$  ;       $f_b = f_v$  .

si  $h < 0$  :  $s_\mu = -s_\mu$  ;

$$F(\mu, s_\mu) = \frac{1}{2} \left( \mu \operatorname{coth}(\pi s_\mu) - s_\mu \operatorname{cotg}(\pi\mu) \right)$$

return.

### 3.2. Résolution de l'équation (27)

Pour résoudre ce système d'équations donnant les amplitudes  $A_n$ , on se fixe au départ un nombre maximum d'équations, soit  $(2 N_{\max} + 1)$  pour les valeurs d'indice "n" comprises entre  $-N_{\max}$  et  $+N_{\max}$ .

L'algorithme de calcul est le suivant :



- ) répéter, pour  $m = 0$  à  $\text{Max}_m$

N.B. :  $\text{Max}_m$  est une sécurité fixée à une très grande valeur (10000) pour assurer que l'algorithme se termine.

calcul de la valeur propre numéro "m" :  $g = \frac{1}{2} (v_m + j \mu_m)$  : cfr. section précédente;

$$a_m = \frac{a \cdot l_m}{2} = \frac{\pi}{2} (\mu_m - j v_m) : \text{cfr. (30);}$$

$Z_{\text{temp}} = \sqrt{k^2 - l_m^2}$  : racine complexe dont il faut prendre la solution à partie réelle positive : cfr. (13).

si  $\text{re}(z_{\text{temp}}) = 0$  :  $k_m = -j |z_{\text{temp}}|$ ;

sinon :  $k_m = z_{\text{temp}}$  et vérifier que  $\text{im}(k_m)$  soit négative : cfr. (13);

calcul de  $J_m$  : cfr. (25);

calcul du vecteur  $s_m(i) = s_{m,i}$  ( cfr. 23), pour toutes valeurs de "i" comprises entre  $-N_{\text{max}}$  et  $N_{\text{max}}$  ;

iflag=0

pour toutes valeurs de "i" et "j" comprises entre  $-N_{\text{max}}$  et  $+N_{\text{max}}$ , répéter :

$$\text{calcul de } zz = \frac{k_m}{j \cdot k} \text{tg}(k_m t) \frac{s_m(i) s_m(j)}{J_m}$$

$$\text{amat}(i,j) = \begin{matrix} zz & \text{si } m=0 \\ zz + \text{amat}(i,j) & \text{si } m \neq 0; \end{matrix}$$

$$\text{si } |zz| > 10^{-4} |\text{amat}(i,j)| \quad \text{alors iflag}=1$$

si iflag = 0, toutes les sommes  $\text{amat}(i,j)$  sont calculées à  $10^{-4}$  près et on sort de la boucle sur m

- ) résolution par élimination de Gauss du système matriciel :

$$(\text{amat}) \cdot (A_n) = (\text{vect})$$

avec :

$$\text{vect}(i) = -\text{amat}(i,0) \cdot \frac{a}{L} - \delta_i \cos \theta$$

$$\text{amat}(i,j) = \text{amat}(i,j) \cdot \frac{a}{L} - \frac{\gamma_i}{j \cdot k} \cdot \delta_{i-j}$$

### 3.3. Calcul du facteur d'absorption équivalent

Les amplitudes  $A_n$  étant connues, il reste à calculer la relation (28), pour toutes les valeurs de  $n$  comprises entre  $-N_{\max}$  et  $+N_{\max}$ , telles que  $\gamma_n^2$  soit négatif.

### 3.4 Valeur de l'admittance

Le paramètre demandé pour l'exécution du programme est le facteur d'absorption du baffle sous incidence normale  $\alpha_0$ . Rappelons qu'une de nos hypothèses était d'avoir une admittance  $\eta_1$ , donc une impédance  $z_1$ , réelle. Dans ce cas, le facteur d'absorption  $\alpha_0$  s'écrit [4]:

$$\alpha_0 = 1 - \left( \frac{z_1 - 1}{z_1 + 1} \right)^2 \quad (38)$$

Cette équation donne deux solutions pour  $z_1$ . Nous retiendrons celle préconisée par A. London [5]:

$$\eta_1 = -\frac{1}{z_1} = \frac{1 - \sqrt{1 - \alpha_0}}{1 + \sqrt{1 - \alpha_0}} \quad (39)$$

N.B. :  $\eta_1$  est du signe contraire de  $z_1$  car elle a été définie suivant la normale intérieure au matériau : cfr. (7).

## 4. Exécution du programme de calcul : résultats

Les calculs de facteurs d'absorption équivalents ont été réalisés avec la méthode décrite précédemment. Les paramètres de la structure de baffles ont été choisis comme suit :

- )  $N_{\max} = 50$  (cfr. section 3.2) : il a été remarqué que la valeur calculée du facteur d'absorption équivalent était inchangée (au pourcent près) lorsque l'on passait de  $N_{\max} = 20$  à  $N_{\max} = 50$ ;
- ) période spatiale :  $\frac{L}{\lambda} = 0.1, 1, 10$  et  $100$ ;
- ) rapport de la hauteur des baffles à l'interdistance  $\frac{t}{L} = 0.2, 0.5, 1.0$  et  $2.0$ ;
- ) facteur d'absorption sous incidence normale  $\alpha_0 = 0.5, 0.7$  et  $0.9$ ;
- ) angle d'incidence de l'onde plane  $\theta = 0, 10, 30$  et  $50$  degrés;
- ) épaisseur de la tranche négligeable :  $e=0$  (rappel : tranche rigide).

Figure 6

Exemple de feuille de résultats

STRUCTURE DE BAFFLES - Dimensions relatives à lambda :

\*\*\*\*\*

période : 10.000  
 épaisseur du baffle : .000  
 hauteur du baffle : 2.000  
 absorption normale du baffle : .500

ANGLE D'INCIDENCE (degres) : 10.000

FACTEUR D'ABSORPTION CALCULE : .091 iinf, isup= -11 8

COEFFICIENTS An : Ao= 0.867E+00 0.348E+00

n	re An	im An	n	re An	im An
1	0.558E-01	0.527E-01	-1	0.553E-01	0.569E-02
2	-0.298E-01	-0.793E-01	-2	-0.472E-01	0.542E-02
3	-0.156E-01	0.817E-01	-3	0.403E-01	-0.104E-01
4	0.465E-01	-0.435E-01	-4	-0.349E-01	0.110E-01
5	-0.232E-01	0.783E-02	-5	0.291E-01	-0.853E-02
6	0.779E-02	-0.332E-01	-6	-0.204E-01	0.718E-02
7	-0.308E-01	0.126E-01	-7	0.132E-01	-0.141E-01
8	0.571E-01	-0.331E-01	-8	-0.216E-01	0.213E-01
9	-0.141E-01	-0.141E-01	-9	0.222E-01	-0.572E-02
10	0.988E-02	0.503E-02	-10	-0.128E-01	0.282E-01
11	-0.802E-02	-0.237E-02	-11	0.663E-02	-0.171E-01
12	0.684E-02	0.119E-02	-12	-0.312E-01	-0.440E-01
13	-0.599E-02	-0.564E-03	-13	0.143E-01	0.141E-01
14	0.534E-02	0.210E-03	-14	-0.106E-01	-0.880E-02
15	-0.481E-02	0.730E-06	-15	0.858E-02	0.634E-02
16	0.437E-02	-0.130E-03	-16	-0.729E-02	-0.489E-02
17	-0.400E-02	0.210E-03	-17	0.635E-02	0.392E-02
18	0.369E-02	-0.258E-03	-18	-0.562E-02	-0.324E-02
19	-0.341E-02	0.287E-03	-19	0.504E-02	0.273E-02
20	0.317E-02	-0.303E-03	-20	-0.456E-02	-0.234E-02
21	-0.295E-02	0.309E-03	-21	0.416E-02	0.203E-02
22	0.276E-02	-0.310E-03	-22	-0.382E-02	-0.178E-02
23	-0.259E-02	0.307E-03	-23	0.352E-02	0.157E-02
24	0.244E-02	-0.302E-03	-24	-0.326E-02	-0.140E-02
25	-0.230E-02	0.294E-03	-25	0.303E-02	0.126E-02
26	0.217E-02	-0.286E-03	-26	-0.283E-02	-0.113E-02
27	-0.206E-02	0.277E-03	-27	0.265E-02	0.103E-02
28	0.195E-02	-0.268E-03	-28	-0.249E-02	-0.937E-03
29	-0.186E-02	0.259E-03	-29	0.234E-02	0.858E-03
30	0.177E-02	-0.249E-03	-30	-0.221E-02	-0.788E-03
31	-0.169E-02	0.240E-03	-31	0.209E-02	0.727E-03
32	0.161E-02	-0.231E-03	-32	-0.198E-02	-0.672E-03
33	-0.154E-02	0.223E-03	-33	0.188E-02	0.623E-03
34	0.147E-02	-0.215E-03	-34	-0.179E-02	-0.580E-03
35	-0.141E-02	0.207E-03	-35	0.171E-02	0.541E-03
36	0.135E-02	-0.199E-03	-36	-0.163E-02	-0.505E-03
37	-0.130E-02	0.192E-03	-37	0.155E-02	0.473E-03
38	0.125E-02	-0.185E-03	-38	-0.149E-02	-0.444E-03
39	-0.120E-02	0.178E-03	-39	0.142E-02	0.418E-03
40	0.116E-02	-0.172E-03	-40	-0.136E-02	-0.394E-03

La figure 6 montre un exemple de feuille de résultats. Y sont rappelés les paramètres de la structure de baffles, exprimés relativement à la longueur d'onde  $\lambda$ . Vient ensuite le facteur d'absorption équivalent de la structure. Les entiers "inif" et "isup" indiquent les limites entre lesquelles le numéro de mode "n" correspond à un mode rayonnant. Enfin, les amplitudes  $A_n$  sont données (dans ce cas pour "n" allant de -50 à +50).

Les tableaux 1 à 9 indiquent les résultats obtenus pour des incidences de 0, 10 et 50 degrés. Ces résultats apparaissent également aux figures 7 et 8.

Les résultats notés "rayons" correspondent à l'application de l'approche géométrique, développée notamment dans l'article [4].

Tableau 1

Facteur d'absorption équivalent de la structure de baffles pour une incidence de 0 degré (facteur d'absorption du baffle sous incidence normale : 0.5).

$\frac{L}{\lambda}$	$\frac{t}{L} = 0.2$	$\frac{t}{L} = 0.5$	$\frac{t}{L} = 1$	$\frac{t}{L} = 2$
0.1	0.239	0.488	0.706	0.782
1	0.012	0.283	0.485	0.736
10	0.076	0.138	0.203	0.287
100	0.028	0.038	0.046	0.055
rays	0	0	0	0

Tableau 2

Facteur d'absorption équivalent de la structure de baffles pour une incidence de 0 degré (facteur d'absorption du baffle sous incidence normale : 0.7).

$\frac{L}{\lambda}$	$\frac{t}{L} = 0.2$	$\frac{t}{L} = 0.5$	$\frac{t}{L} = 1$	$\frac{t}{L} = 2$
0.1	0.373	0.687	0.882	0.866
1	0.020	0.413	0.656	0.882
10	0.089	0.142	0.191	0.253
100	0.023	0.030	0.035	0.040
rays	0	0	0	0

Tableau 3

Facteur d'absorption équivalent de la structure de baffles pour une incidence de 0 degré (facteur d'absorption du baffle sous incidence normale : 0.9).

$\frac{L}{\lambda}$	$\frac{t}{L} = 0.2$	$\frac{t}{L} = 0.5$	$\frac{t}{L} = 1$	$\frac{t}{L} = 2$
0.1	0.568	0.889	0.967	0.842
1	0.035	0.544	0.792	0.956
10	0.088	0.124	0.157	0.203
100	0.018	0.022	0.025	0.029
rays	0	0	0	0

Tableau 4

Facteur d'absorption équivalent de la structure de baffles pour une incidence de 10 degrés (facteur d'absorption du baffle sous incidence normale : 0.5).

$\frac{L}{\lambda}$	$\frac{t}{L} = 0.2$	$\frac{t}{L} = 0.5$	$\frac{t}{L} = 1$	$\frac{t}{L} = 2$
0.1	0.242	0.493	0.709	0.777
1	0.206	0.299	0.510	0.763
10	0.091	0.202	0.385	0.804
rays	0.071	0.176	0.353	0.705

Tableau 5

Facteur d'absorption équivalent de la structure de baffles pour une incidence de 10 degrés (facteur d'absorption du baffle sous incidence normale : 0.7).

$\frac{L}{\lambda}$	$\frac{t}{L} = 0.2$	$\frac{t}{L} = 0.5$	$\frac{t}{L} = 1$	$\frac{t}{L} = 2$
0.1	0.378	0.692	0.883	0.861
1	0.298	0.424	0.675	0.895
10	0.106	0.206	0.368	0.771
rays	0.066	0.165	0.330	0.660

Tableau 6

Facteur d'absorption équivalent de la structure de baffles pour une incidence de 10 degrés (facteur d'absorption du baffle sous incidence normale : 0.9).

$\frac{L}{\lambda}$	$\frac{t}{L} = 0.2$	$\frac{t}{L} = 0.5$	$\frac{t}{L} = 1$	$\frac{t}{L} = 2$
0.1	0.573	0.893	0.966	0.837
1	0.383	0.543	0.805	0.960
10	0.106	0.181	0.308	0.650
rays	0.053	0.132	0.265	0.530

Tableau 7

Facteur d'absorption équivalent de la structure de baffles pour une incidence de 50 degrés (facteur d'absorption du baffle sous incidence normale : 0.5).

$\frac{L}{\lambda}$	$\frac{t}{L} = 0.2$	$\frac{t}{L} = 0.5$	$\frac{t}{L} = 1$	$\frac{t}{L} = 2$
0.1	0.347	0.633	0.750	0.634
1	0.356	0.671	0.728	0.926
10	0.285	0.604	0.862	0.981
rays	0.285	0.644	0.838	0.838

Tableau 8

Facteur d'absorption équivalent de la structure de baffles pour une incidence de 50 degrés (facteur d'absorption du baffle sous incidence normale : 0.7).

$\frac{L}{\lambda}$	$\frac{t}{L} = 0.2$	$\frac{t}{L} = 0.5$	$\frac{t}{L} = 1$	$\frac{t}{L} = 2$
0.1	0.518	0.829	0.879	0.709
1	0.510	0.746	0.831	0.963
10	0.365	0.778	0.960	0.996
rays	0.381	0.831	0.960	0.960

Tableau 9

Facteur d'absorption équivalent de la structure de baffles pour une incidence de 50 degrés (facteur d'absorption du baffle sous incidence normale : 0.9).

$\frac{L}{\lambda}$	$\frac{t}{L} = 0.2$	$\frac{t}{L} = 0.5$	$\frac{t}{L} = 1$	$\frac{t}{L} = 2$
0.1	0.736	0.969	0.885	0.684
1	0.672	0.761	0.901	0.964
10	0.439	0.934	0.992	0.996
rays	0.459	0.970	0.999	0.999

## 5. Conclusions

Les conclusions suivantes peuvent être tirées de l'analyse des résultats exposés aux tableaux 1 à 9 et aux figures 7 et 8 :

- ) Les facteurs d'absorption calculés par l'approche géométrique sont retrouvés pour une période spatiale "L" supérieure à 10 fois la longueur d'onde;
- ) Cette limite semble diminuer lorsque l'angle d'incidence augmente;
- ) Aux angles d'incidence faibles (fig. 7), l'absorption prévue par la théorie des rayons ( correspondant à  $L \gg \lambda$  ) est sous-estimée, c'est-à-dire inférieure à celle tenant compte de la valeur exacte de  $\frac{L}{\lambda}$ ;
- ) Aux angles d'incidence supérieurs à 30 degrés (fig.8), l'absorption prévue par la théorie des rayons est sous-estimée si  $\frac{t}{L}$  est faible et surestimée sinon.

Dans tous les cas, et principalement aux basses fréquences (longueurs d'onde élevées), la technique exposée dans cet article met en évidence des écarts significatifs avec la théorie de l'acoustique géométrique, tout au moins en ce qui concerne le facteur d'absorption équivalent de la structure de baffles.

Figure 7

Facteurs d'absorption équivalents calculés pour une incidence de 10 degrés

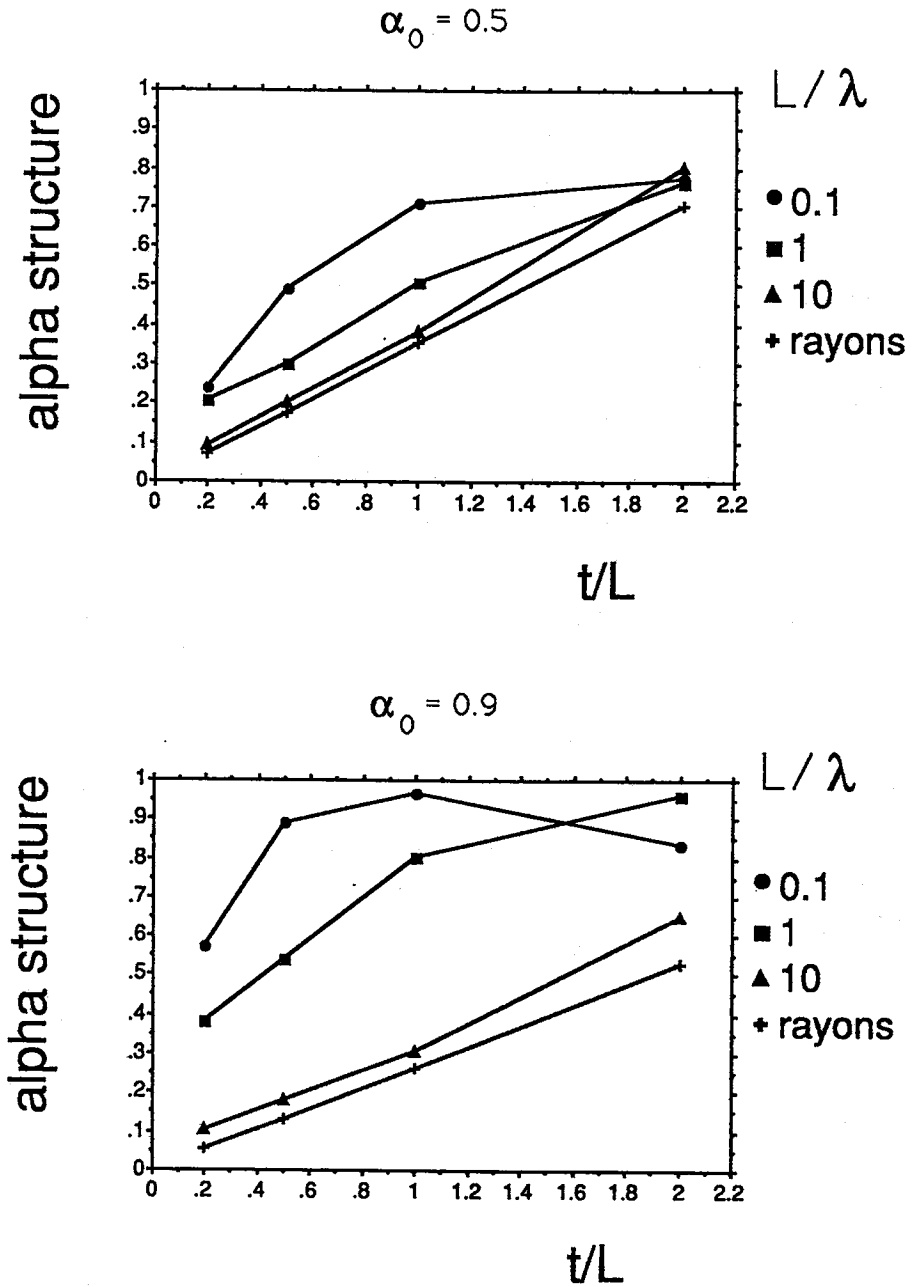
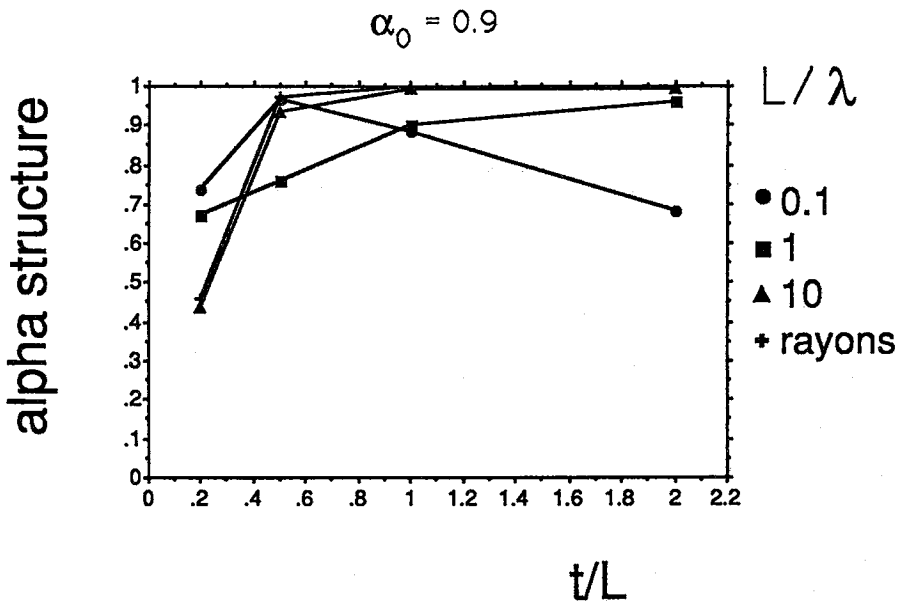
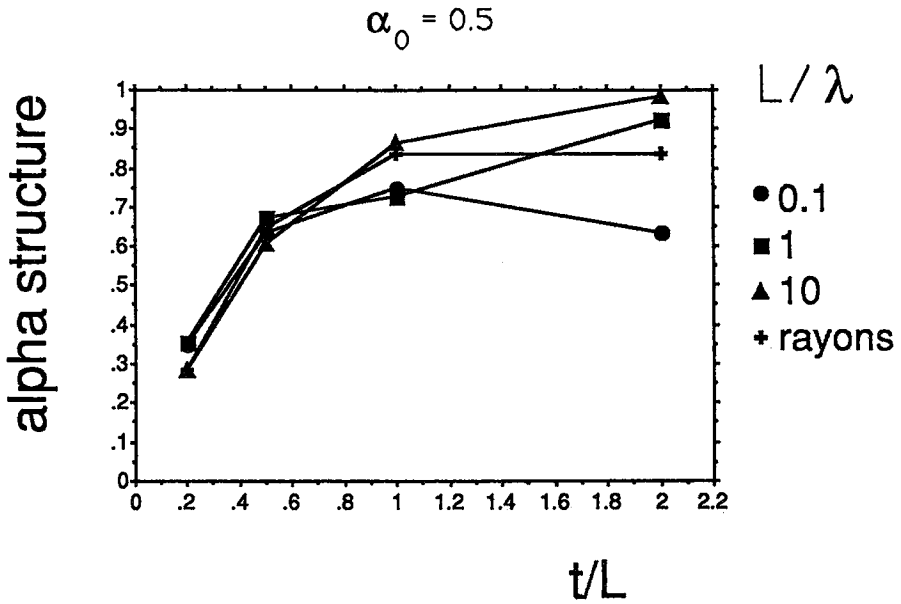




Figure 8

Facteurs d'absorption équivalents calculés pour une incidence de 50 degrés



## 6. Références

- [1] HOLFORD, R.L., Scattering of sound waves at a periodic, pressure-release surface : An exact solution, *Jnl. of the Acoust.Soc.Amer.*, 70(4), 1981, pp. 1116-1128.
- [2] MECHEL, F.P., Sound fields at periodic absorbers, *Jnl. of Sound and Vibration.*, 136(3), 1990, pp.379-412.
- [3] ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I.A., Handbook of mathematical functions, Dover publications (New-York), 1964.
- [4] EMBRECHTS, J.J. et NEMERLIN, J. Facteurs d'absorption équivalents des structures de baffles parallèles suspendus. Approche géométrique considérant la direction des ondes incidentes, *Bulletin d'Acoustique*, n°7 (1989), pp.7-36.
- [5] LONDON, A., The Determination of Reverberant Sound Absorption Coefficients from Acoustic Impedance Measurements, *Jnl. of the Acoust.Soc.Amer.*, 22(2), 1950, pp. 263-269.

### Annexe 1 : Démonstration de l'équation (23)

$$\frac{1}{2a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{j\beta_p v} \left( e^{j(l_m v + \delta_m)} + e^{-j(l_m v + \delta_m)} \right) dv =$$

$$\frac{e^{j\delta_m}}{2a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{jv(\beta_p + l_m)} dv + \frac{e^{-j\delta_m}}{2a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{jv(\beta_p - l_m)} dv$$

La première intégrale a pour solution :

$$\frac{2}{\beta_p + l_m} \sin \left( \frac{(\beta_p + l_m) a}{2} \right) = a \operatorname{sinc} \left( \frac{(\beta_p + l_m) a}{2} \right) \quad \text{où } \operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

ce qui donne finalement :

$$\frac{e^{j\delta_m}}{2} \left( \operatorname{sinc} \left( \frac{(\beta_p + l_m) a}{2} \right) + e^{-2j\delta_m} \operatorname{sinc} \left( \frac{(\beta_p - l_m) a}{2} \right) \right)$$

## Annexe 2 : Démonstration de l'équation (25)

Réolvons tout d'abord :

$$CC(m,\mu) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos(l_m v + \delta_m) \cos(l_\mu v + \delta_\mu) dv \quad (A.2.1)$$

Premier cas :  $l_m \neq l_\mu$

$$CC(m,\mu) =$$

$$\left( \frac{l_m \sin(l_m v + \delta_m) \cos(l_\mu v + \delta_\mu) - l_\mu \cos(l_m v + \delta_m) \sin(l_\mu v + \delta_\mu)}{l_m^2 - l_\mu^2} \right)_{v=-a/2}^{v=+a/2} \quad (A.2.2)$$

Remarquons que  $l_m \neq l_\mu$ , par hypothèse, et que  $l_m \neq -l_\mu$ , vu les impositions faites sur  $l_m$  en (11). Le dénominateur de (A.2.2) est donc différent de 0. D'autre part, l'équation aux valeurs propres  $l_m$  (9,10) peut s'écrire :

$$\frac{a l_m}{2} \sin\left(\frac{a l_m}{2} + \delta_m\right) = -\frac{a}{2} j k \eta_1 \cos\left(\frac{a l_m}{2} + \delta_m\right)$$

$$\text{et} \quad \frac{a l_m}{2} \sin\left(-\frac{a l_m}{2} + \delta_m\right) = \frac{a}{2} j k \eta_1 \cos\left(-\frac{a l_m}{2} + \delta_m\right) \quad (A.2.3)$$

ce qui annule le numérateur de (A.2.2), pour  $v = \pm \frac{a}{2}$ . D'où :

$$CC(m,\mu) = 0 \quad (A.2.4)$$

Second cas :  $l_m = l_\mu \neq 0$

$$CC(m,\mu) = \left( \frac{v}{2} + \frac{\sin(l_m v + \delta_m) \cos(l_m v + \delta_m)}{2 l_m} \right)_{v=-a/2}^{v=+a/2} \quad (A.2.5)$$

ce qui donne, en utilisant (A.2.3) :

$$\begin{aligned} CC(m,\mu) &= \frac{a}{2} - \frac{j k \eta_1}{l_m^2} \cos^2\left(\frac{a l_m}{2} + \delta_m\right) \\ &= \frac{a}{2} + \frac{j}{k \eta_1} \sin^2\left(\frac{a l_m}{2} + \delta_m\right) \end{aligned} \quad (A.2.6)$$

Troisième cas :  $l_m = l_\mu = 0$

Dans ce cas, la seule possibilité est (cfr. éq. 12)  $\delta_m = \delta_\mu = 0$ , ce qui donne, d'après (A.2.1) :

$$CC(m, \mu) = a \quad (\text{A.2.7})$$

Revenons à présent à l'équation (24) que l'on multiplie membre à membre par  $\cos(l_\mu v + \delta_\mu)$  et que l'on intègre de  $v = -\frac{a}{2}$  à  $\frac{a}{2}$  :

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left( e^{-j\beta_0 v} + \sum_n A_n e^{-j\beta_n v} \right) \cos(l_\mu v + \delta_\mu) dv = \sum_m H_m \cos(k_m t) CC(m, \mu)$$

$$= H_\mu \cos(k_\mu t) \begin{cases} a & \text{si } l_\mu = 0 \\ \frac{a}{2} + \frac{j}{k\eta_1} \sin^2\left(\frac{a l_\mu}{2} + \delta_\mu\right) & \text{si } l_\mu \neq 0 \end{cases}$$

(A.2.8)

Afin de résoudre le premier membre, utilisons la relation (23) :

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-j\beta_n v} \cos(l_\mu v + \delta_\mu) dv$$

$$= a \frac{e^{j\delta_\mu}}{2} \left( \text{sinc}\left(\frac{(l_\mu - \beta_n) a}{2}\right) + e^{-2j\delta_\mu} \text{sinc}\left(\frac{(-\beta_n - l_\mu) a}{2}\right) \right)$$

$$= a e^{-2j\delta_\mu} s_{\mu, n}$$

(A.2.9)

D'où, l'expression finale tirée de (A.2.8) :

$$s_{\mu,0} + \sum_n A_n s_{\mu,n} = J_{\mu} H_{\mu} \cos(k_{\mu}t)$$

$$J_{\mu} = e^{2j\delta_{\mu}} \quad \text{si } l_{\mu} = 0 ;$$

$$J_{\mu} = e^{2j\delta_{\mu}} \left( \frac{1}{2} + \frac{j}{ak\eta_1} \sin^2(l_{\mu} \frac{a}{2} + \delta_{\mu}) \right) \quad \text{si } l_{\mu} \neq 0 \quad (\text{A.2.10})$$

### Annexe 3 : Etude de $F(\mu)$ à l'équation (33)

Rappel :

$$F(\mu) = \left( \frac{\mu^2 + s_{\mu}^2}{2\mu} \right) \frac{\text{sh}(\pi s_{\mu})}{\text{ch}(\pi s_{\mu}) + \cos(\pi\mu)} \quad (\text{A.3.1})$$

Lorsque  $\mu = (2i + 1)$ ,  $s_{\mu} = 0$  et la fonction  $F(\mu)$  est indéterminée. Le premier facteur tend vers  $\frac{\mu}{2} \neq 0$ . Le second facteur ( $\frac{0}{0}$  ?) est évalué par la règle de l'Hospital :

$$\frac{\text{ch}(\pi s_{\mu}) \pi s'_{\mu}}{\pi s'_{\mu} \text{sh}(\pi s_{\mu}) - \pi \sin(\pi\mu)} \quad (\text{A.3.2})$$

La dérivée  $s'_{\mu}$  de  $s_{\mu}$  par rapport à  $\mu$  est donnée par (cfr. 34) :

$$s'_{\mu} \text{sh}(\pi s_{\mu}) + \pi s_{\mu} \text{ch}(\pi s_{\mu}) s'_{\mu} = \sin(\pi\mu) + \pi\mu \cos(\pi\mu)$$

$$s'_{\mu} = \frac{\sin(\pi\mu) + \pi\mu \cos(\pi\mu)}{\text{sh}(\pi s_{\mu}) + \pi s_{\mu} \text{ch}(\pi s_{\mu})} = \frac{N_{\mu}}{D_{\mu}} \quad (\text{A.3.3})$$

(A.3.2) devient, quand  $\mu$  tend vers  $(2i + 1)$  :

$$\frac{\text{ch}(\pi s_{\mu}) \pi N_{\mu}}{\pi N_{\mu} \text{sh}(\pi s_{\mu}) - \pi D_{\mu} \sin(\pi\mu)} \rightarrow \frac{-\pi^2 \mu}{0} \rightarrow \pm \infty \quad (\text{A.3.4})$$

Avant de dériver  $F(\mu)$ , multiplions le numérateur et le dénominateur de (A.3.1) par  $(\text{ch}(\pi s_{\mu}) - \cos(\pi\mu))$ , ce qui donne :

$$F(\mu) = \frac{1}{2} \left( \mu \coth(\pi s_{\mu}) - s_{\mu} \cotg(\pi\mu) \right) \quad (\text{A.3.5})$$

car :

$$\operatorname{ch}^2(\pi s_\mu) - \cos^2(\pi\mu) = \operatorname{sh}^2(\pi s_\mu) + \sin^2(\pi\mu) = \left( \frac{\mu^2 + s_\mu^2}{\mu^2} \right) \operatorname{sh}^2(\pi s_\mu) \quad (\text{A.3.6})$$

Dérivons (A.3.5) par rapport à  $\mu$  :

$$\begin{aligned} F'(\mu) &= \frac{1}{2} \left( \operatorname{coth}(\pi s_\mu) - \frac{\mu}{\operatorname{sh}^2(\pi s_\mu)} \pi s'_\mu - s'_\mu \operatorname{cotg}(\pi\mu) + \frac{\pi s_\mu}{\sin^2(\pi\mu)} \right) \\ &= \frac{D_\mu \operatorname{ch}(\pi s_\mu) \operatorname{sh}(\pi s_\mu) \sin^2(\pi\mu) - (\pi\mu) \sin^2(\pi\mu) N_\mu - \dots}{\dots - N_\mu \sin(\pi\mu) \cos(\pi\mu) \operatorname{sh}^2(\pi s_\mu) + D_\mu (\pi s_\mu) \operatorname{sh}^2(\pi s_\mu)} \\ &\quad \frac{2 D_\mu \operatorname{sh}^2(\pi s_\mu) \sin^2(\pi\mu)}{\dots} \end{aligned} \quad (\text{A.3.7})$$

Le dénominateur est du signe de  $D_\mu$ , donc de  $s_\mu$  (cfr. A.3.3). Quant au numérateur, on trouve après quelques développements :

$$\begin{aligned} &\operatorname{sh}^2(\pi s_\mu) (\operatorname{ch}(\pi s_\mu) - \cos(\pi\mu)) ((\pi s_\mu)^2 + \sin^2(\pi\mu)) + \dots \\ &\dots + \pi \sin^2(\pi\mu) \operatorname{sh}^2(\pi s_\mu) (\mu \sin(\pi\mu) + s_\mu \operatorname{sh}(\pi s_\mu)) \end{aligned} \quad (\text{A.3.8})$$

Tous les termes sont strictement positifs pour  $\mu$  appartenant à  $]2i, 2i + 1[$ . D'où, la dérivée  $F'(\mu)$  est du signe de  $s_\mu$ .