



PhD day 2026

Théorie des espaces d'interpolation généralisée
par un paramètre fonctionnel

Hugo Bertrand

Soit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ et soit X un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel; une norme sur X est une application

$$\| \cdot \|_X : X \rightarrow \mathbb{R}^+$$

qui vérifie

- $\|x\|_X = 0$ si et seulement si $x = 0$,
- $\|\lambda \cdot x\|_X = |\lambda| \cdot \|x\|_X$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour tout $x \in X$,
- $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$ pour tout $x, y \in X$.

Un espace normé est un espace muni d'une norme.

On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des espaces normés.

Exemple :

Soit $p \geq 1$; l'espace $L_p(\mathbb{R})$ est constitué des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ dont la puissance p est intégrable. Si $f \in L_p(\mathbb{R})$, on pose

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Théorème

Soient $X, Y \in \mathcal{N}$; une application linéaire $T : X \rightarrow Y$ est continue si et seulement si il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|T(x)\|_Y \leq C \cdot \|x\|_X \quad (1)$$

pour tout $x \in X$.

On note $T : X \rightsquigarrow Y$ si $X, Y \in \mathcal{N}$ et si $T : X \rightarrow Y$ est une application linéaire continue

Définition

Soit $T : X \rightsquigarrow Y$; la norme opérateur de T est la plus petite constante $C > 0$ satisfaisant (1). Elle est notée $\|T\|_{X,Y}$.

Considérons l'application transformée de Fourier dans $L_1(\mathbb{R})$

$$\mathcal{F}^+ : L_1(\mathbb{R}) \rightarrow L_\infty(\mathbb{R}) : f \mapsto \left(x \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(t) dt \right).$$

On peut également la définir dans $L_2(\mathbb{R})$

$$\mathbb{F}^+ : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}).$$

Ces deux applications sont linéaires. Elles sont également continues car on a

$$\|\mathcal{F}^+(f)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L_1(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \|\mathbb{F}^+(f)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \sqrt{2\pi} \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

On peut facilement étendre la notion de transformée de Fourier à l'espace somme

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^+ : L_1(\mathbb{R}) + L_2(\mathbb{R}) &\rightarrow L_\infty(\mathbb{R}) + L_2(\mathbb{R}) \\ : f_0 + f_1 &\mapsto \mathcal{F}^+(f_0) + \mathbb{F}^+(f_1) \end{aligned}$$

Cette application est bien définie et linéaire.

Théorème d'interpolation de Riesz-Thorin

Soient X et Y deux espaces mesurés et soient $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, +\infty]$ tels que $p_0 \neq p_1$ et $q_0 \neq q_1$; si $T : L_{p_0}(X) + L_{p_1}(X) \rightarrow L_{q_0}(Y) + L_{q_1}(Y)$ est une application linéaire qui vérifie

- $T|_{L_{p_0}(X)} : L_{p_0}(X) \rightarrow L_{q_0}(Y)$ est continu de norme opérateur M_0 ,
- $T|_{L_{p_1}(X)} : L_{p_1}(X) \rightarrow L_{q_1}(Y)$ est continu de norme opérateur M_1 ,

alors pour tout $\theta \in [0, 1]$, l'application $T|_{L_p(X)} : L_p(X) \rightarrow L_q(Y)$ est continue et vérifie

$$\|T\|_{L_p(X), L_q(Y)} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$$

avec $\frac{1}{p} = (1 - \theta) \frac{1}{p_0} + \theta \frac{1}{p_1}$ et $\frac{1}{q} = (1 - \theta) \frac{1}{q_0} + \theta \frac{1}{q_1}$.

Pour $\theta = 1/2$, on a par exemple

$$\mathfrak{F}^+|_{L_{4/3}(\mathbb{R})} : L_{4/3}(\mathbb{R}) \rightarrow L_4(\mathbb{R})$$

linéaire et continu avec $\|\mathfrak{F}^+|_{L_{4/3}(\mathbb{R})}\|_{L_{4/3}(\mathbb{R}), L_4(\mathbb{R})} \leq \sqrt[4]{2\pi}$.

Définition

Soit $\mathbf{A}$ un couple d'espaces normés; ces espaces sont dits compatibles si il existe un espace normé $\mathcal{X}$ pour lequel A_0 et A_1 sont des sous espaces vectoriels tels que

$$A_0 \hookrightarrow \mathcal{X} \text{ et } A_1 \hookrightarrow \mathcal{X}$$

Soit $\mathbf{A}$ un couple d'espaces normés compatibles; on note $\Delta(\mathbf{A})$ l'espace $A_0 \cap A_1$ muni de la norme

$$\|a\|_{\Delta(\mathbf{A})} = \max(\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}).$$

Et on note $\Sigma(\mathbf{A})$ l'espace $A_0 + A_1$ muni de la norme

$$\|a\|_{\Sigma(\mathbf{A})} = \inf \left\{ \|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1} \mid (a_0, a_1) \in A_0 \times A_1, a_0 + a_1 = a \right\}.$$

On note

- $\mathcal{N}$ l'ensemble des espaces normés,
- $T : A \rightsquigarrow B$ si $A, B \in \mathcal{N}$ et si $T : A \rightarrow B$ est une application linéaire continue
- $\overline{\mathcal{N}}$ l'ensemble des couples d'espaces normés compatibles,
- $T : \mathbf{A} \rightsquigarrow \mathbf{B}$ si $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \overline{\mathcal{N}}$ et si $T : \Sigma(\mathbf{A}) \rightarrow \Sigma(\mathbf{B})$ est une application linéaire telle que $T|_{A_k} : A_k \rightsquigarrow B_k$ pour tout $k \in \{0, 1\}$.

Définition

Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \overline{\mathcal{N}}$; l'espace $A \in \mathcal{N}$ est un espace intermédiaire de $\mathbf{A}$ si on a

$$\Delta(\mathbf{A}) \hookrightarrow A \hookrightarrow \Sigma(\mathbf{A}).$$

Les espaces $A \in \mathcal{N}$ et $B \in \mathcal{N}$ sont des espaces d'interpolation par rapport à $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ respectivement si ce sont des espaces intermédiaires de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ respectivement et si de plus

$$T : \mathbf{A} \rightsquigarrow \mathbf{B} \Rightarrow T|_A : A \rightsquigarrow B.$$

Définition

Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \overline{\mathcal{N}}$; si $A, B \in \mathcal{N}$ sont des espaces d'interpolation par rapport à $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ respectivement, alors ils sont dits exactement d'exposant θ si pour tout $T : \mathbf{A} \rightsquigarrow \mathbf{B}$, on a

$$\|T\|_{A,B} \leq \|T\|_{A_0,B_0}^{1-\theta} \|T\|_{A_1,B_1}^{\theta}.$$

Définition

Une fonction $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ est une fonction de Boyd si elle est continue, si $\varphi(1) = 1$, et si pour tout $x \in \mathbb{R}_0^+$, on a

$$\overline{\varphi}(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}_0^+} \frac{\varphi(xy)}{\varphi(y)} < +\infty.$$

Exemple : les fonction

$$\psi_\alpha : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto x^\alpha$$

$$\psi : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto x^\alpha (|\ln(x)| + 1)$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On a

$$\overline{\psi_\alpha} = \psi_\alpha.$$

Définition

Soit φ une fonction de Boyd ; on définit les indices inférieur et supérieur de Boyd par les quantités

$$\underline{b}(\varphi) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\overline{\varphi}(x))}{\ln(x)},$$

$$\overline{b}(\varphi) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\overline{\varphi}(x))}{\ln(x)}$$

respectivement.

Soit φ une fonction de Boyd ; on a

$$-\infty < \underline{b}(\varphi) \leq \overline{b}(\varphi) < +\infty.$$

Exemple : $\underline{b}(\psi_\alpha) = \overline{b}(\psi_\alpha) = \alpha$.

Proposition

Si φ est une fonction de Boyd, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $R_1, R_2 > 0$ tels que

$$\begin{cases} x^{\bar{b}(\varphi)+\varepsilon} < \varphi(x) < x^{\underline{b}(\varphi)-\varepsilon} & \text{si } x \in]0, R_1[\\ x^{\underline{b}(\varphi)-\varepsilon} < \varphi(x) < x^{\bar{b}(\varphi)+\varepsilon} & \text{si } x \in]R_2, +\infty[\end{cases} .$$

Définition

Soit φ une fonction de Boyd ; le complémentaire de φ est la fonction

$$\varphi_* : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto x\varphi\left(\frac{1}{x}\right).$$

La fonction φ_* est une fonction de Boyd et on a

$$\underline{b}(\varphi_*) = 1 - \overline{b}(\varphi) \quad \text{et} \quad \overline{b}(\varphi_*) = 1 - \underline{b}(\varphi).$$

Définition

Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \overline{\mathcal{N}}$; si $A, B \in \mathcal{N}$ sont des espaces d'interpolation par rapport à $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ respectivement, alors ils sont dits exactement d'exposant φ si pour tout $T : \mathbf{A} \rightsquigarrow \mathbf{B}$, on a

$$\|T\|_{A,B} \leq \overline{\varphi_*}(\|T\|_{A_0,B_0}) \overline{\varphi}(\|T\|_{A_1,B_1})$$

Soit $\mathbf{A} \in \overline{\mathcal{N}}$; si $a \in \Sigma(\mathbf{A})$ et si $t \in \mathbb{R}_0^+$, on définit la valeur

$$K(t, a) = \inf \left\{ \|a_0\|_{A_0} + t \|a_1\|_{A_1} \mid (a_0, a_1) \in A_0 \times A_1, a_0 + a_1 = a \right\}.$$

Définition

Soient φ une fonction de Boyd, $q \in [1, +\infty[$ et soit $\mathbf{A} \in \overline{\mathcal{N}}$; on définit l'espace $K_{\varphi, q}(\mathbf{A})$ comme le plus grand sous espace de $\Sigma(\mathbf{A})$ tel que si $a \in K_{\varphi, q}(\mathbf{A})$, alors

$$\|a\|_{K_{\varphi, q}(\mathbf{A})} = \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{K(t, a)}{\varphi(t)} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < +\infty.$$

On muni l'espace $K_{\varphi, q}(\mathbf{A})$ de la norme $\|\cdot\|_{K_{\varphi, q}(\mathbf{A})}$

Théorème

Soit φ une fonction de Boyd telle que $0 < \underline{b}(\varphi) \leq \overline{b}(\varphi) < 1$ et soit $q \in [1, +\infty[$; si $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \overline{\mathcal{N}}$, alors $K_{\varphi,q}(\mathbf{A})$ et $K_{\varphi,q}(\mathbf{B})$ sont des espaces d'interpolation exactement d'exposant φ par rapport à $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ respectivement.

On définit l'espace $K_{\varphi,\infty}(\mathbf{A})$ comme le plus grand sous espace de $\Sigma(\mathbf{A})$ tel que si $a \in K_{\varphi,\infty}(\mathbf{A})$, alors

$$\|a\|_{K_{\varphi,\infty}(\mathbf{A})} = \sup_{t>0} \frac{K(t,a)}{\varphi(t)} < +\infty.$$

Théorème de réitération

Soient $\mathbf{A} \in \overline{\mathcal{N}}$ un couple d'espaces de Banach, $\varphi_0, \varphi_1, \varphi$ des fonctions de Boyd dont les indices inférieurs et supérieurs sont strictement compris entre 0 et 1 et $q, q_0, q_1 \in [1, +\infty]$;

si $\underline{b}(\theta) > 0$ ou $\overline{b}(\theta) < 0$ avec $\theta = \varphi_1/\varphi_0$, alors, en posant $\psi = (\varphi \circ \theta) \cdot \varphi_0$, on a

$$K_{\varphi, q}(K_{\varphi_0, q_0}(\mathbf{A}), K_{\varphi_1, q_1}(\mathbf{A})) = K_{\psi, q}(\mathbf{A}).$$

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable; on définit le réarrangement décroissant de f comme la fonction

$$f^* : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : t \mapsto \inf \{ s > 0 \mid d_f(s) \leq t \}$$

où $d_f(s) = \mu(\{ x \in X \mid |f(x)| > s \})$.

Définition

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré; si φ est une fonction de Boyd telle que $0 < \underline{b}(\varphi) \leq \overline{b}(\varphi) < 1$ et si $q \in [1, +\infty]$, alors on définit l'espace $L_{\varphi,q}(X, \mathcal{A}, \mu)$ comme le l'espace des fonctions mesurables $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ pour lesquelles on a

$$\|f\|_{L_{\varphi,q}(X, \mathcal{A}, \mu)} = \left(\int_0^{+\infty} (\varphi(t) \cdot f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < +\infty.$$

On muni cet espace de la quasi-norme $\|\cdot\|_{L_{\varphi,q}(X, \mathcal{A}, \mu)}$.

On a $L_p(\mathbb{R}) = L_{\psi_{1/p}, p}(\mathbb{R})$ pour tout $p \geq 1$.

Théorème

Soit φ une fonction de Boyd telle que $0 < \underline{b}(\varphi) \leq \overline{b}(\varphi) < 1$ et soit $q \in [1, +\infty]$; on a

$$K_{\varphi,q}(L_1, L_\infty) = L_{\varphi^*,q}$$

où $\varphi^* : t \mapsto t/\varphi(t)$ et où l'égalité signifie que les deux espaces possèdent les mêmes éléments et des normes équivalentes.

Corollaire

Soient $\varphi_0, \varphi_1, \varphi$ des fonctions de Boyd dont les indices inférieurs et supérieurs sont strictement compris entre 0 et 1 et soient $q_0, q_1, q \in [1, +\infty]$; si $\underline{b}(\theta) > 0$ ou $\overline{b}(\theta) < 0$ avec $\theta = \varphi_1/\varphi_0$, alors pour $\psi = \varphi_0/(\varphi \circ \frac{1}{\theta})$ on a

$$K_{\varphi,q}(L_{\varphi_0,q_0}, L_{\varphi_1,q_1}) = L_{\psi,q}.$$

Un mot sur les espaces métriques

Soit M un ensemble; une distance sur M est une application

$$d_M : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$$

qui vérifie

- $d_M(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$,
- $d_M(x, y) = d_M(y, x)$ pour tout $x, y \in M$
- $d_M(x, z) \leq d_M(x, y) + d_M(y, z)$ pour tout $x, y, z \in M$.

Un espace métrique est un ensemble muni d'une distance.



Hugo Bertrand, *Théorie des espaces d'interpolation généralisée par un paramètre fonctionnel*, *mém. de mast.*, Université de Liège, 2025.



Jan Gustavsson, *Interpolation of metric spaces*, *eng*, Lund, 1971.



Robledo Mak's Miranda Sette, Dicesar Lass Fernandez et Eduardo Brandani da Silva, *A theory for interpolation of metric spaces*, *Axioms* **13** (2024), n° 7, p. 439-.