

Les tartes de Tante Ursule, suite

Pascal Dupont

Mots clés : Bissections d'un triangle, coordonnées barycentriques.

Résumé. Vous vous en souvenez, Tante Ursule cuisine de délicieuses tartes aux pommes... mais a la curieuse habitude de leur donner des formes triangulaires (quelconques), n'ayant jamais jugé utile de se procurer des platines circulaires.

La forme de ses tartes embarrasse sa nièce Mathilde et son neveu Mathieu, qui veulent évidemment des parts égales, non seulement en aire de tarte mais aussi en longueur de croute, celle-ci étant aussi bonne que le milieu couvert de pommes. La forme de la tarte variant d'une fois à l'autre, leur perplexité se renouvelle à chaque gouter.

Dans [1], nous avons expliqué à M. & M. comment, d'un seul coup rectiligne de couteau, réaliser le partage ; selon les proportions du triangle, il y a une, deux ou trois solutions.

Cependant, ce premier article se terminait, si l'on peut dire, en queue de poisson ; en effet, nous avons constaté que, dans tous les cas où trois droites convenaient, celles-ci étaient concourantes ; mais nous en étions resté à ce stade : une observation, sans justification ; insupportable, pour un mathématicien. Mais nous sommes persévérant : et, après 16 ans de réflexion, nous avons fini par faire céder l'énigme. Youpie.

État des lieux

Rappelons d'abord ce qui est déjà acquis.

Soit ABC le triangle, $a \geq b \geq c$ les longueurs de ses côtés et $p := (a + b + c)/2$ son demi-périmètre.

- Si le triangle est équilatéral ($a = b = c$), il y a trois solutions distinctes : les trois axes de symétrie du triangle (fig. 1) ;
- Si $a = b > c$, le triangle est isocèle et a deux grands côtés (mais un seul petit) ;
 - Si $c > 2(\sqrt{2} - 1)a$, il y a trois solutions : l'axe de symétrie du triangle et deux autres, sécantes, s'appuyant sur les côtés de même longueur (fig. 2) ;
 - Si $c = 2(\sqrt{2} - 1)a$, il y a deux solutions : l'axe de symétrie du triangle et une parallèle à la base (fig. 3) ;
 - Si $c < 2(\sqrt{2} - 1)a$, il y a une seule solution : l'axe de symétrie du triangle (fig. 4) ;
- Si $a > b = c$, il est isocèle et a deux petits côtés (mais un seul grand) ; il y a trois solutions distinctes : l'axe de symétrie du triangle et deux autres, s'appuyant sur la base et l'un des autres côtés (fig. 5) ;
- Si le triangle est scalène ($a > b > c$),
 - Si $c > \sqrt{8ab} - a - b$, il y a trois solutions (fig. 6) ;
 - Si $c = \sqrt{8ab} - a - b$, il y a deux solutions (fig. 7) ;
 - Si $c < \sqrt{8ab} - a - b$, il y a une seule solution (fig. 8).

Les tartes de Tante Ursule, suite

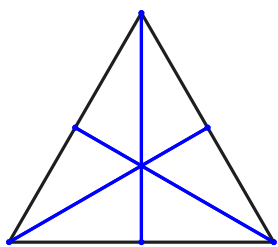


Fig. 1 : Triangle
(10, 10, 10)

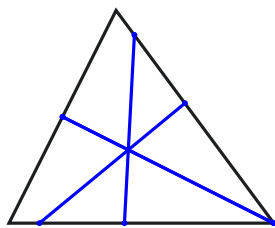


Fig. 2 : Triangle
(10, 10, 9)

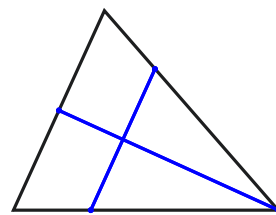


Fig. 3 : Triangle
(10, 10, $20(\sqrt{2} - 1)$)

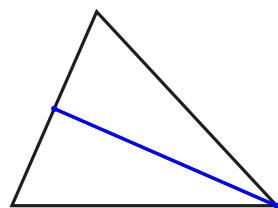


Fig. 4 : Triangle
(10, 10, 8)

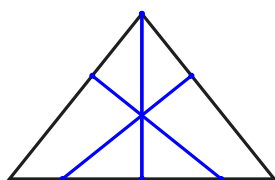


Fig. 5 : Triangle (10, 8, 8)

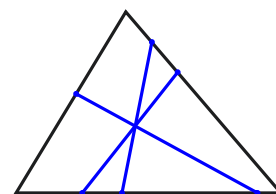


Fig. 6 : Triangle (10, 9, 8)

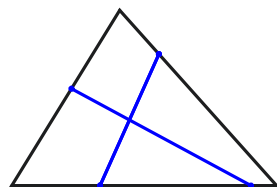


Fig. 7 : Triangle (9, 8, 7)

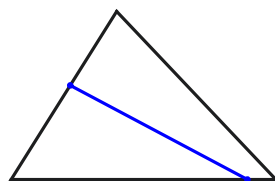


Fig. 8 : Triangle (8, 7, 6)

En construisant les fig. 1, 2, 5 et 6 correspondant aux cas où trois solutions existent, nous observons que les trois droites obtenues sont concourantes.

Dans les cas où le triangle est isocèle (et, en particulier, équilatéral), cette propriété est évidente, par symétrie. Il nous reste donc à faire la démonstration dans le cas où le triangle est scalène, c'est-à-dire lorsque

$$a > b > c > \sqrt{8ab} - a - b ;$$

la dernière inégalité s'écrit encore $p^2 > 2ab$.

Nous n'avons pas pu imaginer de démonstration synthétique ; la preuve ci-dessous est analytique ; encore faut-il maîtriser les calculs, *a priori* fort décourageants.

Comme cela a été établi dans le premier article, les trois solutions sont alors

1. La droite A_3B_1 , où A_3 est le point de $[CB]$ situé à distance $x_c := \frac{1}{2} \left(p + \sqrt{p^2 - 2ab} \right)$ de C et B_1 le point de $[CA]$ situé à distance $y_c := \frac{1}{2} \left(p - \sqrt{p^2 - 2ab} \right)$ de C ;
2. La droite A_4B_2 , où A_4 est le point de $[CB]$ situé à distance y_c de C et B_2 le point de $[CA]$ situé à distance x_c de C ;
3. La droite A_2C_4 , où A_2 est le point de $[BC]$ situé à distance $x_b := \frac{1}{2} \left(p + \sqrt{p^2 - 2ac} \right)$ de B et C_4 le point de $[BA]$ situé à distance $y_b := \frac{1}{2} \left(p - \sqrt{p^2 - 2ac} \right)$ de C .

(V. la fig. 9.)

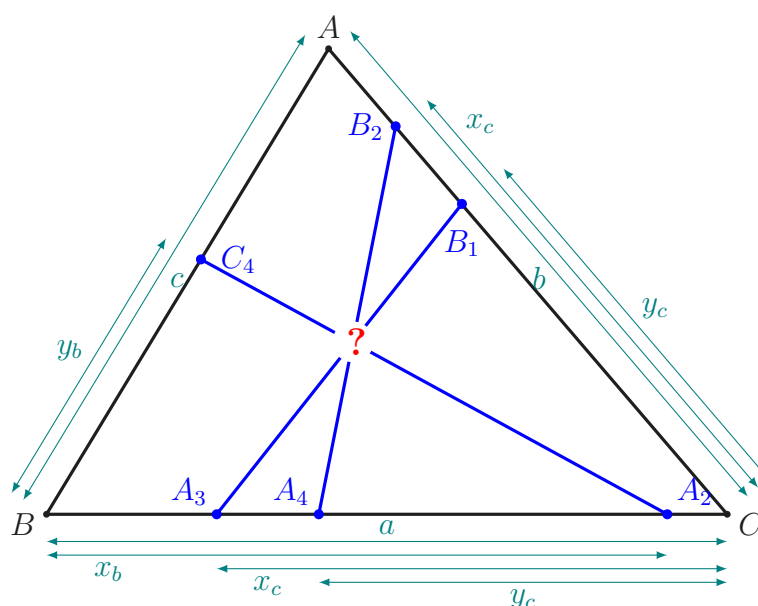


Fig. 9

La propriété à établir, le concours de trois droites, est une propriété affine (même si, bien sûr, des notions métriques sont intervenues pour les construire) ; de plus, un repère affine est naturellement présent dans le problème : le triangle. Il semble donc intéressant de travailler en coordonnées barycentriques. Mais pour cela, quelques petits rappels s'imposent peut-être.

Coordonnées barycentriques

Les *coordonnées barycentriques* d'un point P du plan par rapport à un repère affine (A, B, C) (c'est-à-dire un triplet de points non alignés) sont les nombres w, x, y tels que

$$\begin{cases} w + x + y = 1, \\ w\overrightarrow{PA} + x\overrightarrow{PB} + y\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}. \end{cases}$$

Par exemple, les coordonnées barycentriques de A sont $(1, 0, 0)$, celles de B , $(0, 1, 0)$ et celles de C , $(0, 0, 1)$; celles du centre de gravité du triangle sont $(1/3, 1/3, 1/3)$.

Ces coordonnées, puisqu'elles sont au nombre de trois, sont redondantes ; la première des égalités ci-dessus permet de calculer n'importe laquelle d'entre elles à partir des deux autres ; mais cette redondance introduit une symétrie qui est souvent bienvenue.

En fait, les deuxième et troisième coordonnées barycentriques, x et y , sont tout simplement l'abscisse et l'ordonnée de P dans le repère cartésien $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$; et la première, w , s'en déduit par soustraction.

On vérifie encore sans trop de peine que

$$w = \frac{\mathcal{A}_{\text{or}}(PBC)}{\mathcal{A}_{\text{or}}(ABC)}, x = \frac{\mathcal{A}_{\text{or}}(APC)}{\mathcal{A}_{\text{or}}(ABC)} \text{ et } y = \frac{\mathcal{A}_{\text{or}}(ABP)}{\mathcal{A}_{\text{or}}(ABC)},$$

où $\mathcal{A}_{\text{or}}(PQR)$ désigne l'*aire orientée* d'un triangle PQR , c'est-à-dire son aire (géométrique) si le contour PQR est parcouru dans le sens direct, et l'opposé de cette aire si ce contour est parcouru dans le sens rétrograde.

En utilisant cette caractérisation (ou...), on calcule les coordonnées barycentriques du point P de $[AB]$ situé à distance d de A : $(1 - d/c, d/c, 0)$, où c désigne la longueur de $[AB]$, etc.

Les tartes de Tante Ursule, suite

Les droites sont caractérisées par des équations homogènes du premier degré en w , x et y , du type $kw + lx + my = 0$ donc, avec des coefficients qui ne sont pas tous les trois égaux (puisque la somme des trois coordonnées barycentrique est égale à 1, l'équation $kw + kx + ky = 0$ n'a pas de solution lorsque k n'est pas nul). Si P_1 et P_2 ont pour coordonnées homogènes (w_1, x_1, y_1) et (w_2, x_2, y_2) respectivement, une équation de la droite P_1P_2 est

$$\det \begin{pmatrix} w & x & y \\ w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \end{pmatrix} = 0,$$

puisque ceci est une équation homogène du premier degré, et qu'elle est manifestement satisfaite lorsqu'on y substitue les coordonnées de l'un des points.

Pour calculer le point d'intersection de d_1 , d'équation barycentrique $k_1w + l_1x + m_1y = 0$ et d_2 , d'équation barycentrique $k_2w + l_2x + m_2y = 0$, on résout le système

$$\begin{cases} k_1w + l_1x + m_1y = 0 \\ k_2w + l_2x + m_2y = 0 \\ w + x + y = 1. \end{cases}$$

S'il est incompatible, les deux droites sont parallèles distinctes et s'il est indéterminé, elles sont confondues.

Ce petit bagage devrait suffire.

Une preuve

Commençons par calculer les coordonnées barycentriques des six extrémités des segments dont nous voulons prouver le concours, en utilisant les longueurs de $[CB]$ et de $[CA_3]$, etc. :

$$\begin{aligned} A_3 : & \quad (0, \quad x_c/a, \quad 1 - x_c/a), \\ B_1 : & \quad (y_c/b, \quad 0, \quad 1 - y_c/b), \\ A_4 : & \quad (0, \quad y_c/a, \quad 1 - y_c/a), \\ B_2 : & \quad (x_c/b, \quad 0, \quad 1 - x_c/b), \\ A_2 : & \quad (0, \quad 1 - x_b/a, \quad x_b/a), \\ C_4 : & \quad (y_b/c, \quad 1 - y_b/c, \quad 0). \end{aligned}$$

Avant d'aller plus loin, observons que $x_c y_c = \frac{p + \sqrt{p^2 - 2ab}}{2} \cdot \frac{p - \sqrt{p^2 - 2ab}}{2} = \frac{p^2 - (p^2 - 2ab)}{4} = \frac{ab}{2}$ et que, de même, $x_b y_b = ac/2$.

Nous pouvons maintenant écrire des équations des droites qui nous intéressent :

$$\begin{aligned} A_3 B_1 & \equiv \det \begin{pmatrix} w & x & y \\ 0 & x_c/a & (a - x_c)/a \\ y_c/b & 0 & (b - y_c)/b \end{pmatrix} = 0 \\ & \equiv \frac{x_c(b - y_c)}{ab}w + \frac{y_c(a - x_c)}{ab}x - \frac{x_c y_c}{ab}y = 0 \\ & \equiv \left(\frac{x_c}{a} - \frac{1}{2}\right)w + \left(\frac{y_c}{b} - \frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{2}y = 0 \\ & \equiv b(2x_c - a)w + a(2y_c - b)x - aby = 0 \\ & \equiv b(p - a + \sqrt{p^2 - 2ab})w + a(p - b - \sqrt{p^2 - 2ab})x - aby = 0 ; \end{aligned}$$

Les tartes de Tante Ursule, suite

$$\begin{aligned}
 A_4B_2 &\equiv \det \begin{pmatrix} w & x & y \\ 0 & y_c/a & (a-y_c)/a \\ x_c/b & 0 & (b-x_c)/b \end{pmatrix} = 0 \\
 &\equiv \frac{y_c(b-x_c)}{ab}w + \frac{x_c(a-y_c)}{ab}x - \frac{x_c y_c}{ab}y = 0 \\
 &\equiv \left(\frac{y_c}{a} - \frac{1}{2}\right)w + \left(\frac{x_c}{b} - \frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{2}y = 0 \\
 &\equiv b(2y_c - a)w + a(2x_c - b)x - aby = 0 \\
 &\equiv b\left(p - a - \sqrt{p^2 - 2ab}\right)w + a\left(p - b + \sqrt{p^2 - 2ab}\right)x - aby = 0 ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2C_4 &\equiv \det \begin{pmatrix} w & x & y \\ 0 & (a-x_b)/a & x_b/a \\ y_b/c & (c-y_b)/c & 0 \end{pmatrix} = 0 \\
 &\equiv -\frac{x_b(c-y_b)}{ac}w + \frac{x_b y_b}{ac}x - \frac{y_b(a-x_b)}{ac}y = 0 \\
 &\equiv \left(\frac{x_b}{a} - \frac{1}{2}\right)w - \frac{1}{2}x + \left(\frac{y_b}{c} - \frac{1}{2}\right)y = 0 \\
 &\equiv c(2x_b - a)w - acx + a(2y_b - c)y = 0 \\
 &\equiv c\left(p - a + \sqrt{p^2 - 2ac}\right)w - acx + a\left(p - c - \sqrt{p^2 - 2ac}\right)y = 0.
 \end{aligned}$$

Les coordonnées du point d'intersection, P , de A_3B_1 et A_4B_2 sont les solutions du système suivant — dans lequel nous commençons par remplacer les deux premières équations par leur demi-différence et leur demi-somme :

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} b\left(p - a + \sqrt{p^2 - 2ab}\right)w + a\left(p - b - \sqrt{p^2 - 2ab}\right)x - aby = 0 \\ b\left(p - a - \sqrt{p^2 - 2ab}\right)w + a\left(p - b + \sqrt{p^2 - 2ab}\right)x - aby = 0 \\ w + x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} b\sqrt{p^2 - 2ab}w - a\sqrt{p^2 - 2ab}x = 0 \\ b(p-a)w + a(p-b)x - aby = 0 \\ w + x + y = 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} bw = ax \\ b(2p - a - b)w = aby \\ w + x + y = 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} w/a = x/b = y/c \\ w + x + y = 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} w = a/(a+b+c) \\ x = b/(a+b+c) \\ y = c/(a+b+c). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Il nous reste à voir que ce point commun P se trouve aussi sur la droite A_2C_4 , c'est-à-dire que ses coordonnées satisfont à l'équation de cette droite, ou, plus simplement, que le triplet (a, b, c)

Les tartes de Tante Ursule, suite

satisfait à l'équation en question, puisque celle-ci est homogène. Or,

$$\begin{aligned} c(p - a + \sqrt{p^2 - 2ac}) \cdot a - ac \cdot b + a(p - c - \sqrt{p^2 - 2ac}) \cdot c = \\ = ac(p - a + \sqrt{p^2 - 2ac} - b + p - c - \sqrt{p^2 - 2ac}) = ac(2p - a - b - c) = 0. \end{aligned}$$

Remarques supplémentaires

Le point P obtenu est en fait bien connu de nos services : à ses coordonnées barycentriques

$$\left(\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c} \right),$$

nous reconnaissons le centre I du cercle inscrit. En effet (fig. 10), l'aire du triangle IBC vaut $\frac{1}{2}ra$; de même, celles de ICA et IAB valent respectivement $\frac{1}{2}rb$ et $\frac{1}{2}rc$. En les additionnant, nous obtenons l'aire de ABC : $\frac{1}{2}r(a+b+c) = rp$. Comme ces quatre triangles sont orientés dans le sens direct, leurs aires orientées coïncident avec leurs aires, et

$$w = \frac{\mathcal{A}_{\text{or}}(IBC)}{\mathcal{A}_{\text{or}}(ABC)} = \frac{\frac{1}{2}ra}{\frac{1}{2}r(a+b+c)} = \frac{a}{a+b+c} ;$$

de même pour x et y .

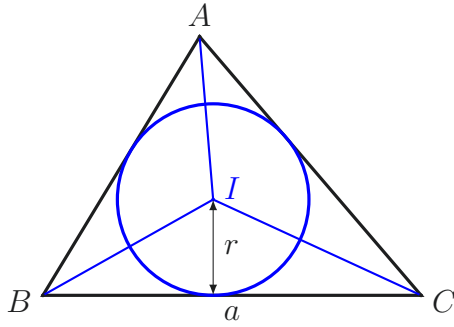


Fig. 10

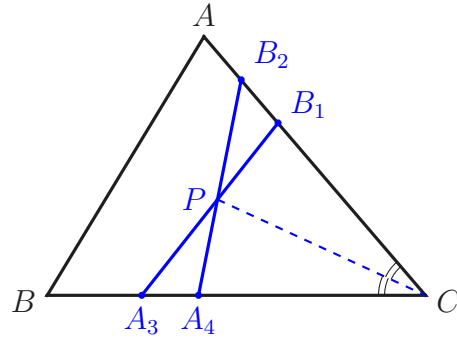


Fig. 11

Enfin, sans faire appel à la géométrie analytique, nous savons prouver que le point d'intersection P de A_3B_1 et A_4B_2 est sur la bissectrice de l'angle C (fig. 11). En effet,

- Les triangles CA_3B_1 et CB_2A_4 sont isométriques, puisqu'ils ont l'angle C en commun, que $\overline{CA_3} = x_c = \overline{CB_2}$ et que $\overline{CB_1} = y_c = \overline{CA_4}$;
- Les triangles A_3A_4P et B_2B_1P sont isométriques, car $\widehat{PA_3A_4} = \widehat{PB_2B_1}$, $\widehat{PA_4A_3} = \widehat{PB_1B_2}$ et $\overline{A_3A_4} = x_c - y_c = \overline{B_2B_1}$;
- Les triangles PA_4C et PB_1C sont isométriques car leurs côtés correspondants sont de mêmes longueurs.

Ainsi, $\widehat{ACP} = \widehat{B_1CP} = \widehat{A_4CP} = \widehat{BCP}$.

Nous n'avons pas trouvé d'argument, par contre, pour justifier que P est également sur les autres bissectrices. (Bien sûr, il suffirait de le prouver pour l'une des deux.)

Pour en savoir plus

- [1] DUPONT, P. Les tartes de Tante Ursule, *Losanges*, n°4, pp. 30–33, 2009.