L'émergence récurrente du nombre trois en didactique des mathématiques

par Jacques BAIR

Résumé. L'examen de certains cadres théoriques mobilisés en didactique des mathématiques révèle une présence abondante du nombre trois dans la manière de conceptualiser les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage. Cette structuration ternaire apparaît aussi bien dans les modèles fondateurs, tels que le triangle didactique, que dans l'organisation institutionnelle des systèmes éducatifs, structurés en trois niveaux principaux. Elle se retrouve également dans des approches plus récentes ou plus cognitives, comme dans le développement des objets mathématiques, les « mondes » de pensée mathématique qui offrent une lecture progressive de la construction des connaissances, ou encore les étapes identifiées dans l'évolution de la carrière d'un mathématicien.
L'objectif de cet article est d'examiner différentes occurrences afin de comprendre ce que révèle cette présence du nombre trois : s'agit-il d'un simple motif descriptif, d'un outil conceptuel particulièrement efficace pour modéliser la complexité, ou d'un schème plus profond structurant la pensée didactique elle-même ?
En parcourant cinq cadres emblématiques, nous cherchons à mettre en lumière des raisons possibles de cette convergence et à interroger ce qu'elle nous apprend sur la manière dont se construisent, se transmettent et s'organisent les savoirs mathématiques.

Mots-clés. Triangle didactique (ou pédagogique) ; niveaux d'enseignement ; phases de Sfard dans la formation d'un concept mathématique ; mondes de la pensée mathématique selon Tall ; étapes dans la carrière d'un mathématicien par Tao.

Introduction

Depuis longtemps, le nombre trois semble exercer une force d'attraction singulière sur la pensée humaine. Bien au-delà de sa simplicité arithmétique, il apparaît comme une structure organisatrice, un schème récurrent qui façonne nos manières de comprendre, d'apprendre et de représenter le monde. Qu'il s'agisse des trois moments élémentaires de toute activité, c'est-à-dire « un début, un milieu et une fin », ou des grandes constructions conceptuelles de la philosophie et des sciences humaines, ou encore de la trinité divine dans le christianisme, la triade s'impose comme un motif universel. Notamment, en épistémologie, la dialectique hégélienne [1] articule la pensée en « thèse, antithèse et synthèse », donnant au mouvement de l'esprit une dynamique ternaire. En sémiotique, Peirce [2] a fondé son analyse sur la triade

[1] Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770–1831) a été un philosophe allemand dont l'œuvre s'est inscrite dans la continuité de Kant et a marqué l'apogée de la philosophie classique allemande. Il a développé un système philosophique global (appelé « idéalisme absolu ») visant à montrer que la réalité est un processus unifié où l'esprit (« *Geist* ») se réalise progressivement. Sa méthode, la « dialectique », analyse les idées comme évoluant par tensions internes (thèse, antithèse, synthèse) vers une compréhension plus riche.

[2] Charles Sanders Peirce (1839–1914) fut un philosophe et logicien américain. Il a été l'un des deux « pères » de la sémiotique, avec le linguiste suisse Ferdinand de Saussure (1857-1913). Il concevait le signe comme un processus triadique impliquant un « signe », un « objet » et un « interprétant ». Sa sémiotique repose sur trois

« signe, objet, interprétant », qui éclaire la manière dont le sens se construit. En psychologie de l'apprentissage, le modèle de Donald Norman [3], qui distingue trois niveaux de traitement dans l'action humaine, s'appuie lui aussi sur une structuration en trois temps, « viscéral, comportemental et réflexif », révélant la profondeur anthropologique de ce schéma.

Explorer l'émergence du nombre trois, c'est donc interroger la manière dont les humains organisent leurs expériences, leurs raisonnements et leurs apprentissages. C'est aussi se demander pourquoi cette structure, à la fois simple et subtile, semble si naturellement s'imposer dans la modélisation des processus cognitifs et didactiques.

Nous allons nous intéresser particulièrement à la didactique des mathématiques qui n'échappe pas à ce mystérieux phénomène relatif à la présence foisonnante du nombre trois.
Les différentes questions qui seront abordées, mais dont la liste ne cherche pas à être exhaustive, sont issues de traditions théoriques différentes, visent divers objectifs mais convergent vers une même intuition : la pensée mathématique se déploie souvent selon un rythme ternaire.

1. Triangle didactique ou pédagogique

L'apparition fréquente de structures ternaires dans les sciences de l'éducation et, plus spécifiquement, en didactique des mathématiques, témoigne d'un effort constant pour modéliser la complexité des situations d'enseignement. Parmi ces figures, le « triangle didactique » et le « triangle pédagogique » occupent une place de premier plan. Leur proximité formelle, avec trois pôles organisés en relation, explique qu'ils soient souvent confondus, alors même qu'ils relèvent de traditions théoriques distinctes et poursuivent des finalités différentes.

1.1. Une confusion fréquente : trois pôles identiques, trois savoirs issus de la transposition didactique

Les deux triangles mobilisent les mêmes pôles fondamentaux ; ceux-ci sont représentés par les sommets d'un triangle qui se rapportent à l'enseignant, l'élève et le savoir. Cette identité structurelle favorise l'assimilation des deux modèles, d'autant plus que, dans le champ de la didactique, le savoir lui-même n'est pas un bloc homogène. La théorie de la transposition didactique a en effet montré que le savoir construit par les spécialistes des mathématiques subit une série de transformations pour devenir un savoir enseignable et enseigné. On distingue ainsi trois types de savoirs provenant du travail, parfois appelé le « savoir savant » et souvent ancien, de mathématiciens professionnels et transformé (par ce qu'on appelle la transposition) pour être adapté au monde de l'enseignement :

---

catégories fondamentales : « priméité », **«** secondéité » et « tiercéité », qui structurent toute expérience et tout fonctionnement du signe.

[3] Né en 1935**,** Donald A. Norman est un chercheur américain en sciences cognitives, ingénieur et auteur. Il est professeur émérite en sciences cognitives à l'Université de Californie à San Diego et cofondateur du « *Nielsen Norman Group* », un cabinet de référence en ergonomie et UX (les lettres UX signifiant « *User Experience* »**,** ou « expérience utilisateur » en français). Il est l'un des penseurs les plus influents du « design centré sur l'humain » (en anglais « *human-centered design* »).

- le « savoir à enseigner », produit de la transposition externe, sélectionné et institutionnalisé dans les programmes (par ce que l'on appelle la « noosphère [4] ») ;
- le « savoir enseigné », tel qu'il est effectivement mis en œuvre par l'enseignant dans la classe ;
- le « savoir appris », construit par l'élève au terme de son activité cognitive.

Cette pluralité interne du pôle « savoir » renforce l'impression que les deux triangles décrivent une même réalité, simplement sous des angles légèrement différents. Pourtant, une analyse plus fine révèle des divergences significatives.

1.2. Des distinctions essentielles : rôle des côtés, origine disciplinaire, temporalité et finalité

Si les pôles sont identiques, les côtés, c'est-à-dire les relations entre ces pôles, ne jouent pas le même rôle dans les deux modèles.

Dans le triangle pédagogique, issu de la tradition des sciences de l'éducation, les côtés représentent les interactions humaines et institutionnelles : relation éducative entre enseignant et élève, relation d'apprentissage entre élève et savoir, relation d'enseignement entre enseignant et savoir. L'accent est mis sur les dynamiques relationnelles, les postures, les médiations et les conditions de l'acte d'enseigner.

Dans le triangle didactique, élaboré dans le champ de la didactique des disciplines à partir des années 1970-1980, les côtés renvoient à des rapports au savoir spécifiques, structurés par les contraintes épistémologiques de la discipline. Le modèle vise à comprendre comment un savoir mathématique se transforme, circule et se reconstruit dans la situation didactique.

Les champs d'origine diffèrent donc nettement : le triangle pédagogique s'inscrit dans une réflexion générale sur l'éducation, tandis que le triangle didactique est ancré dans l'analyse des contenus disciplinaires et de leur capacité à être enseignés.

La période d'apparition contribue également à les distinguer. Le triangle pédagogique s'enracine dans des conceptualisations plus anciennes de la relation éducative, tandis que le triangle didactique émerge avec la constitution de la didactique des mathématiques comme champ scientifique autonome.

Les figures-clés associées à chaque modèle reflètent ces ancrages.

Pour le triangle pédagogique, on retrouve des auteurs issus de la pédagogie générale et de la psychologie de l'éducation. Quelques auteurs ont posé les bases de la relation éducative tripolaire, souvent avant même que la figure du triangle ne soit formalisée. Citons notamment

---

[4] Dans la théorie des situations didactiques, la « noosphère » désigne l'ensemble des acteurs et institutions qui décident, de manière plus ou moins explicite, de ce qui doit être enseigné. Elle regroupe, par exemple, les autorités éducatives (ministère, programmes, inspections), les experts, chercheurs, concepteurs de manuels ainsi que les traditions disciplinaires et les normes scolaires. C'est elle qui définit généralement les contenus légitimes, fixe les attentes et influence les choix du professeur (dans l'enseignement primaire ou secondaire). C'est donc une instance « au-dessus » de la classe, qui oriente le contrat didactique et les savoirs enseignés.

Jean Houssaye [5], probablement la référence la plus directement associée au triangle pédagogique, a écrit « Le triangle pédagogique » (1988) qui est la formalisation la plus connue ; Johann Heinrich Pestalozzi [6] fut un précurseur de la pédagogie moderne et mit en avant la relation entre maître, élève et objet d'apprentissage ; John Dewey [7] conçut l'apprentissage comme une interaction entre l'apprenant, l'enseignant et l'expérience/savoir ; Célestin Freinet [8] proposa une approche centrée sur l'activité de l'élève, mais toujours articulée à un savoir et à un cadre pédagogique ; Maria Montessori [9] modélisa la relation éducative autour de l'enfant, de l'adulte et de l'environnement préparé (équivalent fonctionnel du savoir).

Pour le triangle didactique, les références majeures sont celles de la didactique disciplinaire, de l'épistémologie et de la transposition didactique. Les didacticiens des mathématiques qui sont des pionniers directement associés au triangle didactique sont les suivants. Guy Brousseau [10], figure fondatrice de la didactique française des mathématiques, a formalisé la relation « enseignant – apprenant – savoir » comme structure fondamentale de la situation didactique et fit apparaître le triangle didactique dans ses travaux (années 1970-1980) ; Yves Chevallard [11], connu pour la théorie de la transposition didactique (1985), a contribué à préciser le rôle du pôle « savoir » (et de ses transformations qui le traversent) et son approche TAD a renforcé la nécessité de modéliser les relations entre les trois pôles. De plus, certains auteurs ont contribué à la conceptualisation initiale du triangle didactique. Citons-en quelques-uns parmi les plus connus. Gérard Vergnaud [12] , avec sa théorie des champs conceptuels, a fourni une analyse fine du rapport entre sujet, situation et concept ; Michèle Artigue [13], par ses travaux sur l'ingénierie didactique et l'analyse des pratiques d'enseignement, a contribué à l'usage du triangle comme outil d'analyse des interactions didactiques ; Régine Douady [14], grâce à ses travaux sur les cadres et les dialectiques outil-objet, a construit une approche qui éclaire les relations entre savoir mathématique, activité de l'élève et interventions de l'enseignant ; Colette Laborde [15], par ses recherches sur les représentations et les outils (notamment technologiques), s'est intéressée aux interactions entre les trois pôles dans des environnements instrumentés. Mentionnons encore Jean-Marie Laborde [16], Luc Trouche [17], Marie-Jeanne Perrin-Glorian [18] qui sont des auteurs pouvant être associés à l'élargissement ou à la stabilisation du modèle : leurs travaux prolongent la réflexion sur les interactions entre enseignant, élève et savoir, notamment dans des contextes instrumentés ou institutionnels.

---

[5] Jean Houssaye est un pédagogue français, né en 1947, qui a été professeur en sciences de l'éducation, notamment à l'Université de Rouen. Spécialiste de la pédagogie, il a consacré sa carrière à l'analyse de pratiques éducatives, en articulant théorie et pratique.

[6] Johann Heinrich Pestalozzi (1746–1827) était un pédagogue suisse considéré comme l'un des pères de la pédagogie moderne, célèbre pour son approche humaniste centrée sur le développement global de l'enfant.

[7] John Dewey (1859–1952) était un philosophe et pédagogue américain, figure centrale du pragmatisme et père de l'éducation progressive. Il a profondément influencé les systèmes éducatifs modernes.

[8] Célestin Freinet (1896–1966) était un éminent pédagogue français, fondateur d'une pédagogie active centrée sur l'expression libre, la coopération et l'apprentissage par l'expérience.

[9] Maria Montessori (1870–1952) était une pédagogue et médecin italienne, pionnière d'une célèbre méthode éducative fondée sur l'autonomie, l'expérimentation et le respect du rythme naturel de l'enfant.

[10] Guy Brousseau (1933 – 2024) fut l'un des pionniers de la didactique française des mathématiques. Il a développé la « Théorie des Situations Didactiques » (TSD en abrégé) dès les années 1970, un modèle qui

Enfin, la finalité des deux triangles diverge.
Le triangle pédagogique vise à comprendre et optimiser les interactions éducatives.
Le triangle didactique permet d'analyser les conditions de diffusion, de transformation et d'appropriation des savoirs disciplinaires. Pour certains, son histoire se veut celle de la didac-

---

analyse comment les élèves construisent des connaissances mathématiques à travers des situations spécialement conçues. Son travail a été à l'origine de la didactique des mathématiques en France.

[11] Yves Chevallard, (1946 – 2026) fut l'une des figures importantes de la recherche francophone et internationale en didactique des mathématiques. Il a d'abord développé, dans les années 1980, la « théorie de la transposition didactique », qui analyse comment un savoir savant se transforme. Il a ensuite élaboré la « Théorie Anthropologique du Didactique » (TAD en abrégé), un cadre puissant qui étudie les pratiques d'enseignement comme des phénomènes institutionnels.

[12] Gérard Vergnaud (1933 -2021), élève de Jean Piaget (1896 – 1980), directeur de recherche au CNRS, a marqué la didactique des mathématiques et la psychologie du développement. Sa théorie des champs conceptuels (1990) explique comment les élèves construisent des connaissances complexes, notamment dans les structures additives et multiplicatives. Il est également cofondateur du groupe international PME et de la revue « *Recherches en didactique des mathématiques* ».

[13] Michèle Artigue est une didacticienne française de renommée internationale, née en 1946. Professeure émérite à l'Université Paris-Diderot, elle a particulièrement travaillé sur l'intégration des technologies dans l'enseignement des mathématiques (notamment les logiciels de calcul formel), la modélisation des pratiques enseignantes et l'analyse des situations d'apprentissage, ainsi que sur les cadres théoriques en didactique. Elle a également joué un rôle de premier plan dans la structuration internationale du domaine, notamment comme présidente de l'ICMI (*International Commission on Mathematical Instruction*).

[14] Régine Douady (1942–2019) a joué un rôle important en didactique des mathématiques par ses travaux sur les situations-problèmes et sur la dialectique outil–objet, ainsi que par sa théorie des jeux de cadres, qui analyse la manière dont les élèves naviguent entre différents registres (géométrique, numérique, graphique, physique) pour construire des connaissances. Ses recherches ont contribué à structurer l'ingénierie didactique et à renouveler l'enseignement des mathématiques, notamment autour de la proportionnalité, des grandeurs, des aires et des nombres décimaux.

[15] Colette Laborde est une didacticienne française, née en 1946, connue pour ses travaux pionniers sur l'usage des technologies dans l'enseignement des mathématiques, en particulier les logiciels de géométrie dynamique comme « Cabri-Géomètre ». Professeure à l'Université Joseph-Fourier de Grenoble, elle a étudié la manière dont les outils numériques transforment les pratiques d'enseignement, les modes de raisonnement et les processus d'apprentissage en géométrie. Ses recherches ont contribué à développer l'approche instrumentale, qui analyse comment un outil devient un instrument pour l'élève, et à mieux comprendre les interactions entre représentations, gestes techniques et conceptualisation.

[16] Jean-Marie Laborde est un mathématicien et informaticien français, né en 1945, principalement connu comme le créateur du logiciel « Cabri-Géomètre », l'un des premiers et des plus influents logiciels de géométrie dynamique. Chercheur à l'Université Joseph-Fourier de Grenoble, il a joué un rôle déterminant dans l'introduction des environnements numériques interactifs dans l'enseignement des mathématiques. Son travail a transformé la manière d'enseigner et d'apprendre la géométrie, en permettant aux élèves de manipuler des figures dynamiques et d'explorer des propriétés géométriques de façon expérimentale. Cabri a eu un impact international, tant dans la recherche en didactique que dans la formation des enseignants.

[17] Luc Trouche, né en 1953, est un professeur émérite de l'ENS de Lyon, spécialiste reconnu de la didactique des mathématiques et des usages des ressources numériques dans l'enseignement. Il a joué un rôle majeur dans le développement de l'« approche documentaire du didactique » et dans l'étude du travail collectif des enseignants.

[18] Marie-Jeanne Perrin-Glorian est une professeure émérite en didactique des mathématiques de l'Université d'Artois. Elle a été responsable de l'équipe DIDIREM (qui était une équipe de recherche en didactique des mathématiques de l'Université Paris-Diderot (Paris 7), active pendant environ 25 ans, avant d'être intégrée en 2009 dans le Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR)) ; elle a aussi été vice-présidente de l'ARDM, (Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques).Travaillant particulièrement dans les domaines de la géométrie, des grandeurs et des nombres à l'école primaire et au collège, elle a joué un rôle important dans le développement de ressources pour les enseignants, dans l'analyse des pratiques de classe et dans la réflexion sur la continuité des apprentissages en mathématiques.

tique comme science, cherchant à comprendre comment un savoir se transforme en objet d'enseignement.

1.3. Une évolution historique vers des modèles plus complexes

Au fil du temps, les deux triangles ont connu des enrichissements conceptuels. Le triangle pédagogique a été complété par des modèles intégrant les dimensions institutionnelles, sociales ou technologiques. Le triangle didactique, quant à lui, a été prolongé par des dispositifs plus élaborés, tels que le « triangle didactique élargi [19] », les « situations adidactiques [20]» ou encore les analyses praxéologiques [21] issues de la théorie anthropologique du didactique.

En définitive, si le triangle didactique et le triangle pédagogique partagent une structure ternaire similaire qui explique leur confusion fréquente, ils se distinguent par leur origine, leur fonction, leur temporalité et leur manière de concevoir les relations entre enseignant, élève et savoir. Leur coexistence témoigne de la richesse des approches visant à comprendre l'acte d'enseigner et d'apprendre, et de la fécondité du nombre trois comme outil de modélisation dans les sciences de l'éducation.

2. Niveaux d'enseignement

Dans la Fédération Wallonie-Bruxelles, l'analyse de l'émergence du nombre trois en didactique des mathématiques trouve un terrain particulièrement fécond si l'on articule les trois grands niveaux d'enseignement - le fondamental (avec principalement le primaire), le secondaire et le supérieur - au triangle didactique, c'est-à-dire aux relations entre apprenants, enseignants et savoirs. Le système éducatif s'inscrit dans un cadre de scolarité en principe obligatoire de 5 à 18 ans, couvrant l'enseignement fondamental et secondaire, tandis que l'enseignement supérieur relève d'un choix facultatif, bien que fortement encouragé dans les politiques de démocratisation de l'accès aux études.

2.1. Le primaire

Au niveau primaire, les apprenants sont des enfants de 6 à 12 ans, ayant suivi le plus souvent un parcours en maternelle dès 2 ans et demi, désormais partiellement obligatoire à partir de 5 ans. Ils sont inscrits dans un tronc commun qui vise la construction d'un socle de compétences partagé, notamment en mathématiques, dans une perspective de réduction des inégalités et de lutte contre les mécanismes de sélection précoce. Les enseignants du primaire sont formés principalement dans les hautes écoles pédagogiques, via des cursus professionnalisants

---

[19] Le « triangle didactique élargi » (ou « triangle pédagogique élargi ») ajoute un quatrième pôle (aux trois traditions du triangle correspondant) pour mieux rendre compte de la réalité de l'enseignement ; cet ajout varie selon le contexte (ou, selon les auteurs) et peut être l'environnement, l'institution, la société.

[20] Par « situation adidactique » on entend une situation d'apprentissage dans laquelle l'élève peut apprendre sans dépendre directement de l'enseignant, grâce à un « milieu » (problème, matériel, règles, feedbacks) qui réagit à ses actions.

[21] Par « axe praxéologique », on entend la partie pratique d'une praxéologie (sachant que, dans la TAD, une praxéologie est une unité d'analyse de l'activité humaine qui se compose de quatre éléments, à savoir **T** une « tâche », **τ** une « technique » pour accomplir cette tâche, **θ** une « technologie » c'est-à-dire le discours qui justifie la technique et **Θ** une « théorie » qui fonde et organise la technologie). Cet axe comprend les tâches et les techniques permettant de les accomplir. Il s'oppose à l'axe théorique (technologie + théorie). Cette distinction aide à analyser la nature des savoirs enseignés et appris.

de type bachelier, qui articulent didactique disciplinaire, stages et réflexion sur les pratiques. Leur identité professionnelle se construit à l'intersection d'exigences multiples : maîtrise des contenus mathématiques de base, capacité à les transposer didactiquement pour de jeunes enfants, prise en compte de la diversité linguistique et socioculturelle des publics. Du côté des savoirs, les mathématiques du primaire sont organisées autour de domaines tels que les nombres et opérations, la géométrie, les grandeurs et mesures, la résolution de problèmes et, de plus en plus, l'initiation au raisonnement et au langage mathématiques. Les référentiels de compétences interréseaux, élaborés dans le cadre du Pacte pour un enseignement d'excellence, structurent ces contenus en progressions et en attendus de fin de cycle, ce qui renforce la dimension curriculaire du sommet « savoirs » du triangle didactique.

2.2. Le secondaire

Dans l'enseignement secondaire, les apprenants sont des adolescents de 12 à 18 ans, toujours soumis à l'obligation scolaire, mais engagés dans des parcours plus différenciés : général, technique, professionnel ou artistique. Le rapport au savoir mathématique se complexifie : les mathématiques deviennent à la fois discipline de formation générale, outil pour d'autres champs (sciences, technologies, économie) et filtre d'orientation. Les enseignants de mathématiques du secondaire sont issus de formations supérieures universitaires ou de hautes écoles (agrégations, masters à finalité didactique), qui visent une double compétence : expertise disciplinaire plus poussée (algèbre, analyse, géométrie, probabilités, statistiques) et maîtrise de la didactique spécifique du secondaire, notamment en termes de gestion de l'hétérogénéité, d'évaluation certificative et de préparation aux études supérieures. Les savoirs mathématiques enseignés se déploient en cycles, avec une montée en abstraction (fonctions, démonstration, modélisation) et une articulation plus explicite aux compétences transversales (raisonnement, communication, résolution de problèmes complexes). Dans le triangle didactique, la relation apprenant / savoir est fortement médiatisée par les enjeux d'orientation et de certification, tandis que la relation enseignant / savoir est marquée par la tension entre programmes officiels, référentiels de compétences et exigences des examens externes ou des filières ultérieures.

2.3. Le supérieur

L'enseignement supérieur, enfin, constitue le troisième niveau, non obligatoire, fréquenté par de jeunes adultes (en général à partir de 18 ans) qui choisissent d'entrer dans des hautes écoles, universités ou établissements de promotion sociale. Les apprenants y sont engagés dans des projets de formation professionnelle ou académique, avec des degrés de spécialisation très variables : futurs enseignants, ingénieurs, économistes, chercheurs, etc. Les enseignants du supérieur sont majoritairement titulaires de diplômes de master ou de doctorat, et leur formation pédagogique est plus hétérogène : très structurée dans les filières de formation des maîtres, plus implicite ou complémentaire (formations continues, certificats en pédagogie universitaire) dans les filières disciplinaires classiques. Les savoirs mathématiques, à ce niveau, se déclinent en deux grandes orientations : d'une part, des mathématiques « de service » (statistiques pour les sciences sociales, mathématiques appliquées pour les ingénieurs, mathématiques financières, etc.), d'autre part, des mathématiques « fondamentales » pour les étudiants en sciences ou en mathématiques pures. Le triangle didactique se reconfigure : la relation enseignant / savoir est souvent dominée par la logique de la recherche et de la spécialisation, tandis que la relation apprenant / savoir est marquée par la nécessité d'appropriation autonome et de construction d'une identité professionnelle ou scientifique.

2.4. Au-delà de notre région

La comparaison avec les systèmes des régions et pays voisins met en évidence à la fois des convergences structurelles et des spécificités. En Communauté flamande et en Communauté germanophone de Belgique, la scolarité obligatoire couvre également la tranche 5–18 ans, avec une organisation en maternel, primaire, secondaire et supérieur largement similaire, mais des référentiels, des cultures d'évaluation et des politiques de pilotage propres à chaque communauté. Le Luxembourg et les Pays-Bas partagent une structure en trois grands niveaux (primaire, secondaire, tertiaire), avec une forte place accordée aux compétences et à l'évaluation standardisée, notamment en mathématiques, et une différenciation précoce des parcours au secondaire (filières générales, techniques, professionnelles). La France et l'Allemagne, quant à elles, présentent également une tripartition, mais avec des traditions différentes : en France, un socle commun de connaissances, de compétences et de culture structurant l'école et le collège, puis une diversification au lycée ; en Allemagne, une segmentation plus marquée du secondaire (*Hauptschule*, *Realschule*, *Gymnasium*, etc.), qui influe fortement sur les trajectoires mathématiques des élèves. Dans l'ensemble de ces systèmes, la formation des enseignants de mathématiques se situe au niveau supérieur (universités, hautes écoles, instituts de formation), mais la place de la didactique des mathématiques dans les cursus varie sensiblement, ce qui modifie la manière dont le triangle didactique est pensé et mis en œuvre.

2.5. En résumé

Ainsi, l'émergence du nombre trois en didactique des mathématiques, avec trois niveaux d'enseignement, trois pôles du triangle didactique, mais aussi, en filigrane, trois grandes fonctions du savoir mathématique (culturelle, instrumentale, certificative), trouve une résonance particulière dans la Fédération Wallonie-Bruxelles. L'articulation entre apprenants, enseignants et savoirs se reconfigure à chaque niveau, ce qui peut partiellement expliquer les difficultés existant souvent lors des transitions entre niveaux. De fait, l'apprenant passe de la construction des premiers concepts numériques au primaire à la spécialisation scientifique ou professionnelle dans le supérieur, en transitant par les enjeux d'orientation du secondaire.
La comparaison avec les systèmes voisins montre que, malgré des structures tripartites largement partagées, les choix des programmes, les dispositifs de formation des enseignants et les modes de régulation des apprentissages mathématiques confèrent à chaque contexte une physionomie propre du triangle didactique, invitant à des analyses didactiques fines qui doivent tenir compte du contexte spécifique dans lequel l'enseignement se déroule.

3. Trois phases dans la formation d'un concept mathématique

3.1. Généralités fondamentales : processus, concept, procept, outil-objet

L'étude de l'émergence du nombre trois en didactique des mathématiques s'inscrit dans un ensemble de notions fondamentales qui permettent de comprendre comment les savoirs mathématiques se construisent, se transforment et se stabilisent. Parmi ces notions, celles de « processus », « concept », « procept » et « outil-objet » occupent une place centrale.

Le processus renvoie à l’ensemble des actions, souvent d’abord concrètes ou opératoires, par lesquelles un sujet traite une situation mathématique. Il s’agit d’une activité orientée vers un but, mobilisant des procédures et des opérations qui, dans un premier temps, demeurent liées à l’action.
Le concept, quant à lui, désigne une entité cognitive stabilisée, abstraite, permettant de penser une classe de situations indépendamment des actions particulières qui ont permis de l’appréhender. La tension entre processus et concept constitue l’un des moteurs de la conceptualisation en mathématiques.
Le terme « procept », introduit par Tall [22] et Gray [23], est un néologisme constitué à partir des deux mots précédents. Il vise précisément à rendre compte de cette dualité constitutive des objets mathématiques. Un procept est une entité cognitive qui réunit un processus (par exemple, « additionner 3 et 4 ») et un concept (le résultat 7, ou l’idée même d’addition) sous une même représentation symbolique (comme « 3 + 4 »). Cette articulation permet d’expliquer comment un même symbole peut être interprété soit comme une action à effectuer, soit comme un objet déjà constitué.

Enfin, la distinction outil / objet, issue notamment de la théorie anthropologique du didactique, souligne qu’un élément mathématique peut être utilisé comme un instrument opératoire dans une tâche donnée, ou être considéré comme un objet théorique doté de propriétés propres. Le passage de l’outil à l’objet constitue un moment essentiel de la construction des connaissances mathématiques, et il s’inscrit souvent dans des dynamiques tripartites, comme celles que l’on retrouve dans les modèles de Sfard [24] ou de Tall.

3.2. Trois éminents didacticiens anglophones : A. Sfard, D. Tall et E. Gray

Anna Sfard, mathématicienne et didacticienne d’origine israélienne, est l’une des figures majeures de la recherche contemporaine en éducation mathématique. Formée en mathématiques pures, elle s’est progressivement tournée vers l’étude des processus de conceptualisation. Son apport principal réside dans la distinction entre deux métaphores de l’apprentissage : la métaphore « acquisition » et la métaphore « participation ». Elle est

---

[22] David Tall (1941–2024) est l’un des didacticiens des mathématiques les plus influents, notamment pour ses travaux sur la pensée mathématique avancée et les processus cognitifs liés à l’apprentissage des concepts. Ses notions clés — *concept image*, *procept* et *Three Worlds of Mathematics* — ont marqué en profondeur la recherche internationale en didactique.

[23] Eddie Gray était un didacticien britannique reconnu pour ses travaux sur les processus cognitifs en mathématiques, en particulier l’articulation entre procédures et concepts chez les apprenants. Il a travaillé avec David Tall. Leurs recherches ont mis en lumière les différences de flexibilité cognitive entre élèves, expliquant pourquoi certains développent plus facilement une pensée mathématique fluide et symbolique. Il a ainsi fortement influencé la compréhension des difficultés et des réussites en mathématiques, notamment dans l’apprentissage du calcul et de l’algèbre.

[24] Anna B. Sfard est une chercheuse israélienne, née en 1949, professeure émérite (à l’Université de Haïfa) en en éducation mathématique. Elle est l’autrice de travaux fondateurs sur la « dualité processus/objet » dans les concepts mathématiques, notamment avec un article (de 1991) devenu classique et intitulé « *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin* ». (publié dans « *Educational Studies in Mathematics* », *22(*1), pp. 1–36). Elle a développé la théorie « commognitive » (mot-valise qu’elle a formé à partir des deux termes « communication + cognition »), qui considère la pensée comme une forme de communication et l’apprentissage comme une transformation du discours mathématique. Son ouvrage majeur, intitulé « *Thinking as Communicating* » (2008), propose une vision discursive du développement humain et de la mathématisation.

également connue pour son modèle en trois phases qui sera présenté ci-après et qui décrit la formation des concepts mathématiques. Ses travaux ont profondément influencé la compréhension des transitions entre actions, processus et objets mathématiques.

David Tall, qui fut professeur à l'Université de Warwick, est un didacticien britannique dont les recherches portent sur la pensée mathématique avancée, la visualisation, les représentations symboliques et la théorie des trois mondes de la pensée mathématique qui sera développée ci-dessous. Il a collaboré étroitement avec Eddie Gray pour introduire la notion de procept, concept clé pour comprendre la flexibilité cognitive nécessaire à la maîtrise des symboles mathématiques. Tall a également mis en lumière le rôle de la compression des idées dans la construction des concepts, notamment à travers la formation d'images mentales et la coordination entre représentations.

Eddie Gray, collègue et collaborateur de Tall, a contribué de manière décisive à l'élaboration de l'idée de procept. Ses travaux empiriques sur les élèves ont montré que la réussite en mathématiques dépend en grande partie de la capacité à passer aisément d'une interprétation procédurale à une interprétation conceptuelle d'un même symbole. Gray a ainsi mis en évidence les différences de stratégies entre élèves dits « proceptuels » et élèves davantage centrés sur les procédures. Ses recherches ont nourri les réflexions de Tall et ont établi un lien fort entre flexibilité cognitive, symbolisme et conceptualisation.

Ces trois chercheurs Sfard, Tall et Gray partagent une préoccupation commune : comprendre comment les objets mathématiques émergent de l'activité humaine. Tous trois s'intéressent aux transitions entre actions, processus et objets, et proposent des modèles tripartites pour décrire ces évolutions. Le modèle de Sfard et la notion de procept de Tall et Gray se répondent étroitement : ils décrivent, chacun à leur manière, la manière dont un symbole peut simultanément représenter une action et un objet. Leurs travaux constituent ainsi un socle théorique cohérent pour analyser l'émergence du nombre trois dans les modèles didactiques.

3.3. Le modèle en trois phases de Sfard : intériorisation, condensation, réification

Le modèle de Sfard décrit la formation d'un concept mathématique comme un processus en trois phases successives. La première phase, « l'intériorisation », correspond au moment où l'apprenant exécute des actions sur des objets concrets ou symboliques. Ces actions sont d'abord extérieures, puis progressivement intériorisées sous forme de procédures mentales. Par exemple, l'enfant qui additionne 3 et 4 en comptant sur ses doigts intériorise peu à peu cette action pour la réaliser mentalement.

La deuxième phase, « la condensation », consiste à percevoir l'ensemble du processus comme une unité globale. L'apprenant n'a plus besoin de dérouler chaque étape de manière séquentielle : il peut considérer le processus comme un tout. Ainsi, l'addition n'est plus vécue comme une suite d'opérations élémentaires, mais comme une opération unique, mobilisable rapidement et sans effort conscient.

La troisième phase, « la réification », marque un changement qualitatif : le processus devient un objet conceptuel à part entière. L'apprenant peut désormais manipuler cet objet comme une entité abstraite, dotée de propriétés propres. Par exemple, l'addition devient un objet mathématique sur lequel on peut raisonner (en faisant appel à des propriétés telles que commutativité, associativité, neutralité du zéro). La réification permet également de construire des objets plus sophistiqués, comme des nombres algébriques ou transcendants, ou bien des fonctions.

Ce modèle éclaire la manière dont les concepts mathématiques se construisent par paliers successifs, chacun impliquant une forme de compression cognitive et une transformation du statut des objets manipulés.

3.4. Trois points importants sur la compression des idées : images mentales, symbolisme, mémoire

Conformément à diverses études de didactique telles que celles présentées sommairement ci-dessus, il ressort que l'apprentissage des mathématiques s'organise, pour chaque domaine étudié, selon un parcours qui conduit l'élève du procédural au structural. Au stade procédural, l'apprenant mobilise des actions et des techniques opératoires, souvent séquentielles, pour résoudre des tâches spécifiques. Ces procédures constituent une première forme de maîtrise, mais elles demeurent liées à l'exécution d'actions particulières. Le passage au stade structural correspond à une compréhension plus profonde : les procédures se transforment en structures organisées, dotées de relations internes, permettant de percevoir les objets mathématiques comme des entités cohérentes et interconnectées. L'élève ne se contente plus d'appliquer des règles ; il comprend pourquoi elles fonctionnent et comment elles s'articulent dans un système conceptuel plus large.

Le passage du structural au conceptuel repose sur un phénomène central : « la compression des idées ». Celle-ci désigne le processus par lequel des actions complexes, des relations multiples ou des structures étendues sont progressivement condensées en unités cognitives simples, manipulables comme des objets uniques. Elle permet de traiter mentalement des ensembles d'opérations comme s'ils formaient une seule entité, ouvrant ainsi la voie à la réification des concepts. Par exemple, la suite d'opérations qui définit une fonction peut être compressée en un objet mathématique autonome, sur lequel il devient possible de raisonner (par exemple, composer, inverser, comparer). La compression des idées constitue ainsi le moteur de la conceptualisation : elle transforme des processus en objets, des actions en concepts, et rend possible l'abstraction caractéristique de la pensée mathématique avancée.

Comme le soulignent certains auteurs belges [25] à la suite de Gray ou Tall, on peut relever trois points-clés relatifs au phénomène de compression des idées.

a) La « formation d'images mentales » désigne la capacité à se représenter mentalement des objets ou des processus mathématiques. Ces images peuvent être visuelles, kinesthésiques ou symboliques. Elles jouent un rôle crucial dans la compréhension, car elles permettent de donner une forme perceptible à des entités abstraites. Par exemple, la droite numérique constitue une image mentale puissante pour comprendre les entiers, les rationnels ou les opérations. Les images mentales facilitent l'apprentissage et soutiennent la condensation des processus.

b) Le « symbolisme » occupe une place centrale dans la compression des idées. Les symboles mathématiques permettent de représenter des actions complexes sous une forme condensée,

---

[25] D'après le livre « *Structurer l'enseignement des mathématiques par des problèmes. Guide méthodologique et cd-rom* », par J.-P. Cazzaro, G. Noël, F. Pourbaix et P. Tilleuil ; Edition De Boeck & Larcier, 2021, 413 pages, voir tout particulièrement pp. 45 – 47.

manipulable et communicable. Par exemple, l'écriture « 3 + 4 » condense à la fois une opération, un résultat et un concept. Le symbolisme permet également de généraliser : l'expression « a + b », ce qui ouvre la voie à un raisonnement sur des classes entières de situations. Toutefois, cette puissance symbolique exige une flexibilité cognitive importante, car un même symbole peut renvoyer à des significations multiples selon le contexte.

c) La « mémoire » joue un rôle ambivalent dans la conceptualisation. D'un côté, elle soutient la condensation en permettant de stocker des procédures, des images mentales et des relations entre concepts. Une mémoire bien organisée facilite l'accès rapide aux connaissances et libère des ressources cognitives pour le raisonnement. D'un autre côté, elle peut constituer un frein lorsque les connaissances mémorisées sont rigides ou mal structurées. Par exemple, un élève qui mémorise des procédures sans comprendre leur portée conceptuelle peut rencontrer des difficultés à réifier les objets mathématiques. La mémoire doit donc être envisagée comme un outil à double tranchant, dont l'efficacité dépend de la qualité des liens conceptuels construits.

4. Trois mondes de la pensée mathématique

L'œuvre de David Tall occupe une place singulière dans le paysage de la didactique des mathématiques. En proposant le modèle des « trois mondes de la pensée mathématique », à savoir le monde de « l'incarnation conceptuelle », le monde du « symbolisme procédural » et le monde du « formalisme axiomatique », D. Tall offre un cadre théorique riche pour comprendre la diversité des activités mathématiques et les difficultés rencontrées par les apprenants. Ce modèle est d'autant plus précieux qu'il articule des dimensions cognitives, sémiotiques et épistémologiques, tout en permettant de relier des approches didactiques parfois considérées comme disjointes. L'importance du travail de Tall tient ainsi à sa capacité à proposer une vision unifiée de la pensée mathématique, vision qui éclaire aussi bien l'apprentissage des élèves que la structure même de la discipline.

4.1. Le monde incarné

Le premier monde, celui de l'incarnation conceptuelle encore plus simplement appelé « monde incarné », repose sur l'idée que la pensée mathématique s'enracine dans l'expérience perceptive, motrice et imagée. Les concepts y émergent à partir d'actions sur des objets concrets ou imaginés, et se stabilisent grâce à des schématisations visuelles ou analogiques. Par exemple, la notion de fonction peut être appréhendée à travers le mouvement d'un point sur un écran, la déformation d'un élastique ou la croissance d'une plante. De même, la compréhension intuitive de la continuité s'appuie souvent sur des gestes ou des images : tracer une courbe sans lever le crayon, imaginer un fluide qui s'écoule sans rupture. Ce monde incarné constitue le socle de l'expérience mathématique, car il permet aux apprenants de donner sens aux objets avant même de les formaliser.

4.2. Le monde symbolique

Le deuxième monde, celui du symbolisme procédural encore appelé « monde symbolique », correspond à l'entrée dans la manipulation de symboles et de procédures opératoires. Les objets mathématiques y sont traités comme des entités manipulables selon des règles syntaxiques, indépendamment de leur ancrage perceptif initial. Ainsi, la fonction devient une expression algébrique que l'on transforme, dérive ou compose ; les équations deviennent des structures symboliques que l'on résout par des techniques standardisées. Un exemple typique est la résolution d'une équation quadratique : l'apprenant peut appliquer la formule générale sans nécessairement mobiliser une image géométrique de la parabole. Ce monde symbolique est essentiel pour l'efficacité opératoire et la généralisation, mais il peut aussi devenir source de difficultés lorsque les symboles sont manipulés sans compréhension conceptuelle sous-jacente.

4.3. Le monde formel

Le troisième monde, celui du formalisme axiomatique ou encore nommé simplement le « monde formel », renvoie à la structuration déductive des mathématiques. Les objets y sont définis par des axiomes, et les propriétés sont établies par démonstration. Dans ce monde, la notion de fonction est définie comme un ensemble de couples vérifiant une condition d'unicité ; la continuité est caractérisée par la définition ε–δ ; les nombres réels sont construits à partir de coupures de Dedekind ou de suites de Cauchy. Ce monde formel est celui de la mathématique universitaire avancée, où la rigueur logique prime sur l'intuition ou la manipulation symbolique. Il permet de garantir la cohérence interne de la discipline, mais son abstraction peut constituer un obstacle majeur pour certains étudiants.

4.4. Relation entre les trois mondes

Ces trois mondes ne doivent pas être compris comme des étapes successives ou exclusives, mais comme des modes de pensée complémentaires. Tall insiste sur le fait que les mathématiciens naviguent constamment entre eux : une intuition visuelle peut guider une manipulation symbolique, qui elle-même peut être justifiée par un raisonnement formel. De même, l'apprentissage gagne en profondeur lorsque les apprenants peuvent articuler ces mondes plutôt que de s'enfermer dans l'un d'eux. La richesse du modèle réside précisément dans cette dynamique d'interaction, qui reflète la complexité réelle de l'activité mathématique.

4.5. Une comparaison avec trois cadres majeurs de la didactique, de Dubinsky, Vergnaud et Duval

On peut comparer le modèle de Tall avec diverses théories didactiques importantes ; nous en retenons ici trois.

a) Le modèle APOS [26] de Dubinsky [27], fondé sur les notions d'action, de processus, d'objet et de schéma, présente des analogies fortes avec les mondes de Tall. L'action et le processus correspondent largement au monde symbolique, tandis que la construction d'un objet mathématique rejoint la transition vers une compréhension plus conceptuelle, proche du monde incarné ou du passage vers le formel. Toutefois, APOS met davantage l'accent sur les mécanismes internes de construction mentale, alors que Tall insiste sur la diversité des registres cognitifs et sémiotiques mobilisés.

b) La théorie des champs conceptuels de Vergnaud, quant à elle, partage avec Tall l'idée que les concepts se construisent dans l'action et l'expérience. Le monde incarné trouve ici un écho

[26] A<<<POS est un acronyme formé à partir de la première lettre des mots anglais : *Action*, *Process*, *Object*, *Schema*.

[27] Ed Dubinsky (1935–2022) était un mathématicien et didacticien américain reconnu pour avoir influencé la recherche en enseignement des mathématiques, notamment grâce à la théorie APOS.

direct dans les situations et les invariants opératoires qui structurent l'activité de l'apprenant. Cependant, Vergnaud ne distingue pas explicitement un monde formel séparé : la formalisation y apparaît comme une extension progressive des schèmes, alors que Tall en fait un monde à part entière, caractérisé par une rupture épistémologique.

c) Enfin, les registres de représentations sémiotiques de Duval [28] offrent un autre point de comparaison essentiel. Le monde symbolique de Tall correspond clairement au registre algébrique, tandis que le monde incarné renvoie aux registres graphiques ou figuralisés [29]. Duval insiste sur la nécessité de conversions entre registres pour accéder à la compréhension, ce qui rejoint la dynamique d'articulation entre mondes chez Tall. Toutefois, Duval ne propose pas de monde formel comparable : le registre discursif déductif n'est qu'un registre parmi d'autres, alors que Tall en fait un univers cognitif distinct.

4.6. En résumé

Ainsi, le modèle des trois mondes de Tall se distingue par sa capacité à articuler intuition, symbolisme et formalisme dans une vision cohérente de la pensée mathématique. En le confrontant à APOS, à la théorie des champs conceptuels et aux registres sémiotiques, on mesure à la fois sa compatibilité avec les cadres existants et sa contribution originale : celle d'offrir une lecture unifiée de la diversité des activités mathématiques, tout en mettant en lumière les transitions et les ruptures qui jalonnent l'apprentissage. Ce modèle constitue ainsi un outil précieux pour comprendre l'émergence du nombre trois dans les théories didactiques contemporaines, et plus largement pour penser la complexité de la cognition mathématique.

5. La carrière du mathématicien professionnel en trois étapes selon Terence Tao : une lecture didactique

5.1. Terence Tao et son blog *What's New* : un regard rare sur la formation mathématique

Terence Tao [30], qui a obtenu une médaille Fields en 2006, occupe une place de choix dans le paysage scientifique. Il est réputé non seulement par l'étendue de ses contributions, allant de l'analyse harmonique à la combinatoire additive, mais aussi par sa volonté de rendre explicite sa vision du travail mathématique. Son blog, « *What's New* », constitue à cet égard une ressource exceptionnelle. Parmi ses billets les plus influents figure celui intitulé « *There's more to mathematics than rigour and proofs* » ; il y propose une description tripartite du développement d'un mathématicien : l'étape pré-rigoureuse, l'étape rigoureuse et l'étape post-rigoureuse.

---

[28] Raymond Duval est un didacticien français, né en 1936, connu pour avoir renouvelé la compréhension de l'apprentissage des mathématiques grâce à sa théorie des « registres de représentations sémiotiques ». Ses travaux montrent que la pensée mathématique repose sur la capacité à changer de registre, par exemple en passant du langage naturel à l'algèbre, ou d'une figure géométrique à un graphique, et que ces conversions constituent un obstacle central pour les élèves.

[29] Le terme « figuralisé » désigne une forme particulière de représentation sémiotique, située entre l'image perceptive et la figure géométrique au sens mathématique strict. C'est un concept clé pour comprendre comment les élèves interprètent, et parfois sur-interprètent, les dessins en mathématiques.

[30] A propos de ce mathématicien génial, voir mon article intitulé « Pensées (mathématiques) de Tao », *Losanges*, n° 23, 2013, pp. 33 – 41.

L'intérêt didactique de ce texte est considérable. Il est rare qu'un mathématicien de ce niveau explicite les transformations cognitives, culturelles et professionnelles qui jalonnent la formation mathématique. Tao offre ainsi un témoignage de première main sur les manières d'apprendre, de comprendre et de pratiquer les mathématiques, témoignage qui éclaire les débats en didactique sur la nature de l'activité mathématique et sur les transitions entre niveaux d'enseignement.

Passons en revue ces trois étapes en les décrivant sommairement puis en dégageant trois objectifs et trois bénéfices pour chacune d'entre elles.

5.2. L'étape pré-rigoureuse : l'intuition comme moteur de l'entrée dans les mathématiques

Selon Tao, l'étape pré-rigoureuse correspond essentiellement à l'enseignement primaire et au début du secondaire. L'élève y découvre les mathématiques à travers des exemples concrets, des manipulations, des analogies et des raisonnements informels. Les concepts sont abordés de manière intuitive, souvent sans justification formelle, et l'accent porte sur la compréhension pratique plutôt que sur la démonstration.

<u>Objectifs</u>

- Développer une familiarité avec les objets mathématiques élémentaires.
- Construire des intuitions opératoires permettant de résoudre des problèmes simples.
- Favoriser l'engagement et la curiosité par des approches concrètes et accessibles.

<u>Bénéfices</u>

- L'élève acquiert une première image des mathématiques comme activité de recherche de solutions plutôt que comme système formel.
- Les intuitions construites à ce stade servent de base cognitive pour les étapes ultérieures, même si elles devront être ultérieurement révisées ou raffinées.
- Cette phase permet d'installer un rapport positif au savoir, essentiel pour la poursuite d'études plus abstraites.

5.3. L'étape rigoureuse : la structuration formelle du raisonnement

La seconde étape, que Tao qualifie de rigoureuse, correspond au secondaire supérieur et aux premières années universitaires (bachelier et maîtrise). C'est le moment où l'étudiant apprend à raisonner de manière formelle, à rédiger des démonstrations et à manipuler des définitions abstraites. La rigueur devient un critère central de validité.

<u>Objectifs</u>

- Introduire les fondements logiques et structurels des mathématiques.
- Développer la capacité à produire et comprendre des démonstrations.
- Apprendre à travailler dans des cadres axiomatiques et à manier des concepts généraux.

<u>Bénéfices</u>

- L'étudiant acquiert une autonomie intellectuelle dans la résolution de problèmes théoriques.
- La rigueur permet de dépasser les limites des intuitions pré-rigoureuses, parfois trompeuses.

- Cette étape forme la « grammaire » du discours mathématique, indispensable pour participer à la communauté scientifique.

5.4. L'étape post-rigoureuse : la maîtrise experte et la flexibilité conceptuelle

La troisième étape, dite post-rigoureuse, correspond au doctorat et au post-doctorat. Tao la décrit comme un retour à une forme d'intuition, mais cette fois fondée sur une maîtrise profonde des structures mathématiques. Le mathématicien expérimenté sait quand la rigueur est nécessaire et quand elle peut être momentanément mise entre parenthèses pour laisser place à l'exploration heuristique.

<u>Objectifs</u>

- Développer une vision globale des théories et de leurs interconnexions.
- Cultiver des heuristiques avancées permettant d'orienter la recherche.
- Apprendre à naviguer entre intuition, rigueur et créativité.

<u>Bénéfices</u>

- Le mathématicien devient capable de produire des idées nouvelles, de formuler des conjectures et d'ouvrir des pistes de recherche.
- La flexibilité cognitive permet de mobiliser simultanément intuition, formalisme et expérience.
- Cette étape marque l'entrée dans la communauté des chercheurs capables de contribuer à l'avancement du savoir.

5.5. Liens avec les modèles didactiques de Sfard et de Tall

La tripartition proposée par Tao trouve des échos dans d'autres modèles didactiques.

On trouve en effet des liens étroits avec la théorie de Anna Sfard qui distingue deux métaphores de l'apprentissage, celle de l'acquisition centrée sur l'appropriation de connaissances et celle de la participation axée sur l'intégration dans une communauté de pratiques. Ainsi, l'étape pré-rigoureuse de Tao correspond largement à une logique d'acquisition intuitive. L'étape rigoureuse marque l'entrée dans les pratiques discursives de la communauté mathématique. L'étape post-rigoureuse, quant à elle, illustre pleinement la participation experte, où l'individu contribue activement à la production collective du savoir.

La correspondance avec le modèle en trois mondes de Tall est aussi frappante. De fait, l'étape pré-rigoureuse de Tao renvoie au monde incarné (en anglais « *embodied* ») qui est lié à l'expérience perceptive et intuitive ; l'étape rigoureuse correspond au monde symbolique et formel qui concerne des manipulations formelles ; l'étape post-rigoureuse dépasse le formalisme strict pour intégrer une vision synthétique, proche de ce que Tall décrit comme la maîtrise experte du monde axiomatique, et se réfère donc au monde formel-axiomatique des structures abstraites

Ainsi, la description en trois étapes de la carrière mathématique proposée par Terence Tao constitue un apport précieux pour la didactique des mathématiques. Elle offre un regard interne, fourni par un scientifique extrêmement compétent, sur les transformations cognitives et culturelles qui jalonnent la formation d'un mathématicien. De plus, elle résonne fortement avec d'autres modèles théoriques fondés eux aussi sur une structuration ternaire. L'émergence récurrente du nombre trois dans ces approches n'est donc sans doute pas fortuite : elle reflète la nécessité de penser les apprentissages mathématiques comme un processus évolutif, marqué par des ruptures, des transitions et des réorganisations.

6. Conclusion

Notre examen de différentes occurrences du nombre trois en didactique des mathématiques révèle une convergence assez remarquable entre des cadres théoriques pourtant issus d'horizons variés. Qu'il s'agisse du triangle didactique, des trois niveaux institutionnels d'enseignement, des phases de développement des objets mathématiques décrites par Sfard, des trois mondes de Tall ou encore des étapes identifiées par Tao dans l'évolution de l'apprentissage, chacun de ces dispositifs mobilise une structuration ternaire pour rendre intelligible la complexité des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage. Cette récurrence ne relève ni du hasard ni d'un simple effet de style : elle témoigne assurément d'une nécessité conceptuelle.

En effet, le nombre trois semble offrir un équilibre fécond entre simplicité et richesse. Là où une dichotomie tend à rigidifier les analyses en oppositions binaires, la triade introduit une dynamique, un espace intermédiaire, une articulation possible entre pôles complémentaires. Elle permet de penser simultanément la stabilité et la transformation, l'individuel et le collectif, le concret et l'abstrait. Ainsi, le triangle didactique articule les interactions entre enseignant, apprenant et savoir ; les trois niveaux d'enseignement structurent la progression institutionnelle des apprentissages ; les modèles de Sfard, Tall et Tao décrivent chacun une montée en complexité cognitive où l'apprenant passe d'une appréhension intuitive à une conceptualisation plus formelle. Ce qui relie ces approches, au-delà de leur diversité, est la volonté de saisir des processus évolutifs, multidimensionnels et souvent non linéaires, en leur donnant une forme intelligible et opératoire.

Cette étude, centrée sur quelques cas emblématiques, ouvre plusieurs pistes de prolongement. Il serait d'abord pertinent d'élargir l'enquête à d'autres cadres théoriques en didactique ou en psychologie de l'éducation afin de vérifier si cette structuration ternaire constitue une tendance encore plus générale. Une analyse historique pourrait également éclairer l'origine et la diffusion de ces modèles tripartites dans la pensée éducative. Enfin, une exploration empirique pourrait examiner si cette organisation en trois temps, trois niveaux ou trois mondes correspond à des réalités observables dans les pratiques d'enseignement ou s'il s'agit avant tout d'outils conceptuels destinés à structurer la réflexion.

En définitive, la présence fréquente du nombre trois en didactique des mathématiques apparaît comme un révélateur de la manière dont les chercheurs tentent de modéliser la complexité des apprentissages. Elle invite à poursuivre la réflexion sur les formes que prennent les théories, sur ce qu'elles rendent visible et sur ce qu'elles laissent dans l'ombre, afin de mieux comprendre les processus par lesquels les connaissances mathématiques se construisent, se transforment et se transmettent.