

Pixels, Pinceaux et Probabilités

S. Nicolay

Université de Liège

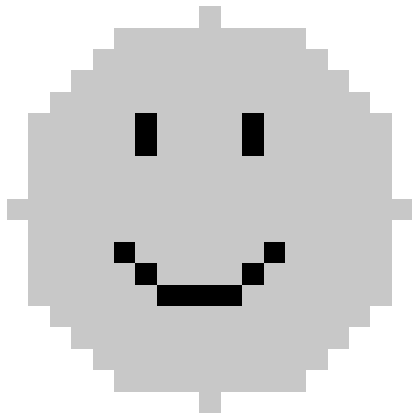
St Louis, le 23 avril 2026



Plan

1. Représentation d'une image
2. Représentations temps-fréquence
3. Arbre de Markov caché
4. La régularité au sens de Hölder
5. Conclusion

Représentation d'une image



Illustrons le principe de compression sans filtre.

Pour la compression de type « codage par plages » (RLE, Run-Length Encoding),

- au lieu d'écrire les 576 ($=24 \times 24$) valeurs une par une,
- on code chaque séquence consécutive identique par une paire.

Par exemple,

255 255 255 255 200 200 255

devient

(255, 4) (200, 2) (255, 1)


```

255 24
255 24
255 24
255 12 200 1 255 11
255 8 200 9 255 7
255 7 200 11 255 6
255 6 200 13 255 5
255 5 200 15 255 4
255 4 200 5 0 1 200 4 0 1 200 6 255 3
255 4 200 5 0 1 200 4 0 1 200 6 255 3
255 4 200 17 255 3
255 4 200 17 255 3
255 3 200 19 255 2
255 4 200 17 255 3
255 4 200 4 0 1 200 6 0 1 200 5 255 3
255 4 200 5 0 1 200 4 0 1 200 6 255 3
255 4 200 6 0 4 200 7 255 3
255 5 200 15 255 4
255 6 200 13 255 5
255 7 200 11 255 6
255 8 200 9 255 7
255 12 200 1 255 11
255 24
255 24

```

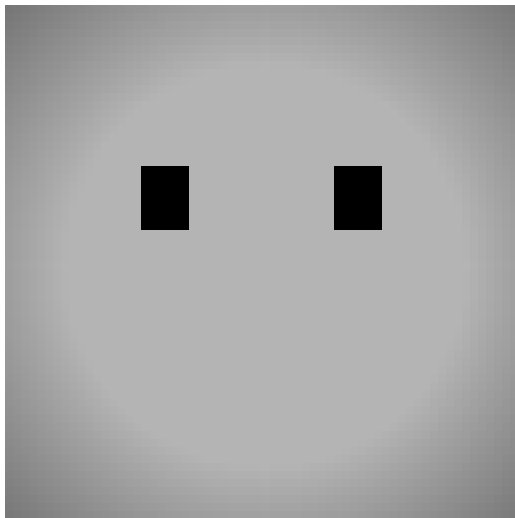
Dans la compression sans perte, on retrouve exactement l'image d'origine.

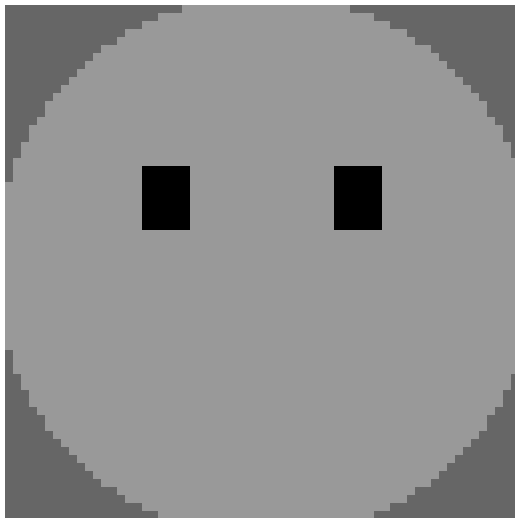
Dans la compression avec perte, on accepte de perdre une partie de l'information (souvent celle que l'œil humain perçoit moins) pour obtenir un fichier beaucoup plus petit.

On peut appliquer une quantification, qui consiste à remplacer chaque pixel par la valeur la plus proche parmi un petit nombre de niveaux autorisés.

Exemple :

- $0 - 85 \rightarrow 0$,
- $86 - 170 \rightarrow 128$,
- $171 - 255 \rightarrow 255$,

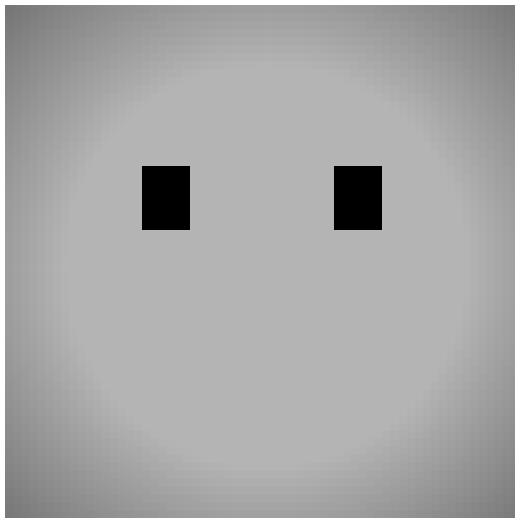


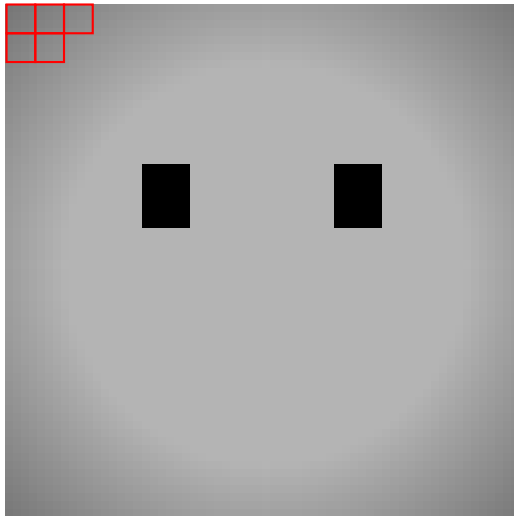


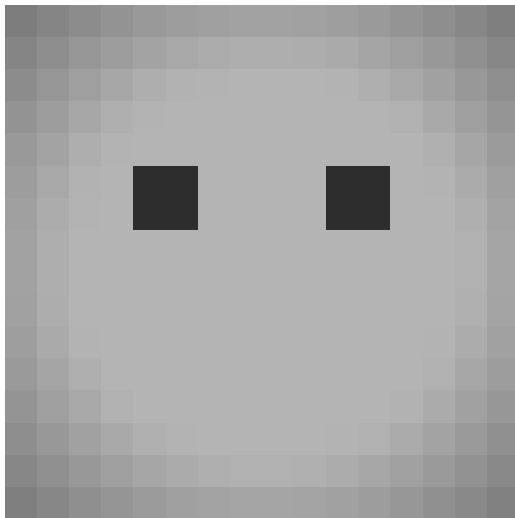
Il existe de nombreuses autres méthodes pour compresser une image.

Par exemple, pour l'approximation locale, on découpe l'image en petits carrés (par ex. 4×4) et on remplace chaque carré par sa moyenne.

Cette méthode s'appelle la pixelisation ou la quantification (qui est plus générale).







Il existe de nombreuses méthodes de représentation des couleurs.

La plus naturelle est la représentation RVB (modèle de couleur utilisé en informatique et en photographie numérique), où chaque couleur d'un pixel est obtenue en combinant le rouge, le vert et le bleu¹

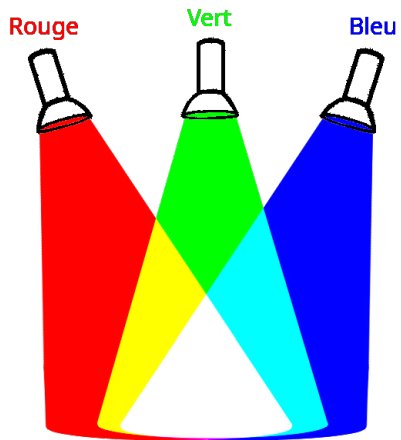
Le modèle HSL (Hue, Saturation, Lightness) représente les couleurs de façon plus intuitive que le RVB en séparant la teinte (H), l'intensité de la couleur (S) et la luminosité (L).

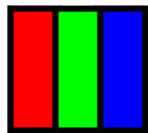
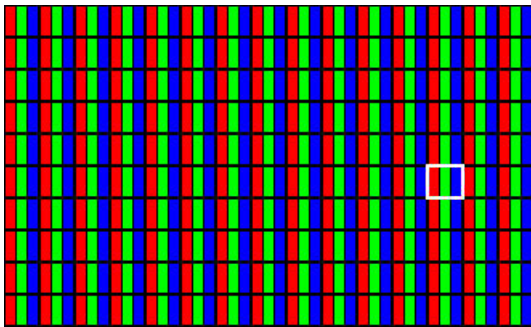
Cette approche permet de modifier facilement la clarté ou la saturation d'une couleur sans altérer sa teinte.

HSL reflète mieux la perception humaine des couleurs.

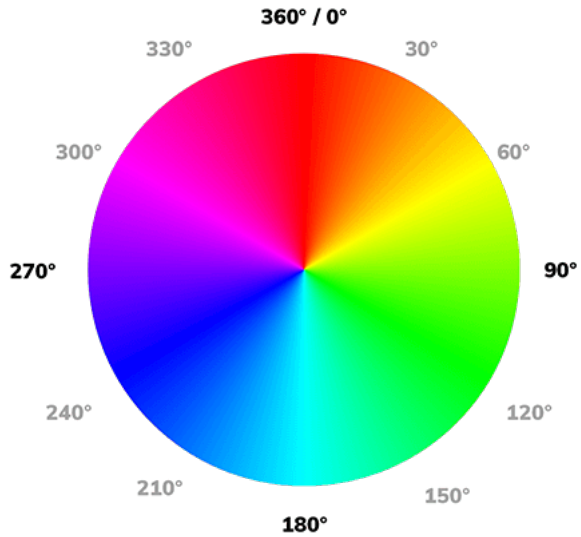
Il existe des méthodes de représentation alternatives au RVB et au HSL, mettant en avant d'autres propriétés de l'image.

¹Nos yeux ont trois types de cônes sensibles au rouge (~ 560 nm), vert (~ 530) et bleu (~ 420).





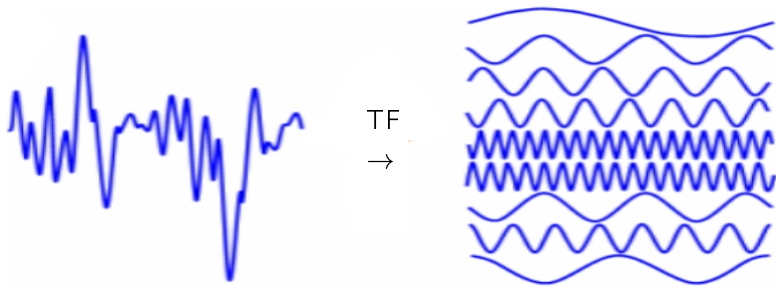
1 pixel



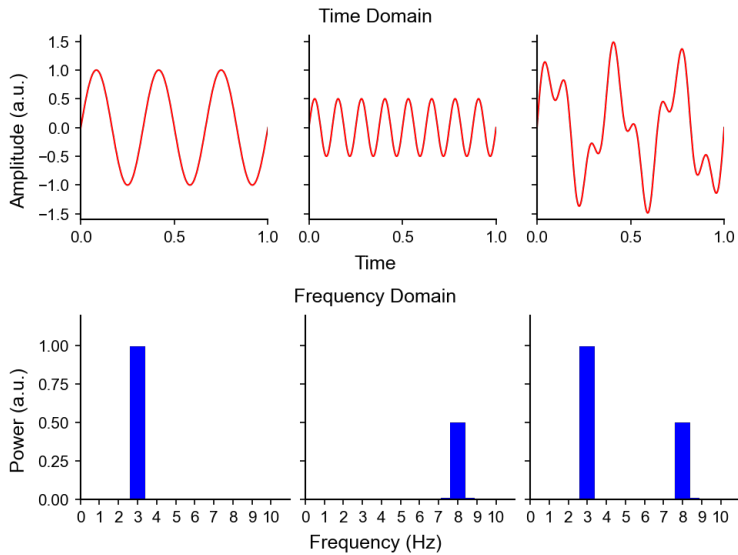
Représentations temps-fréquence

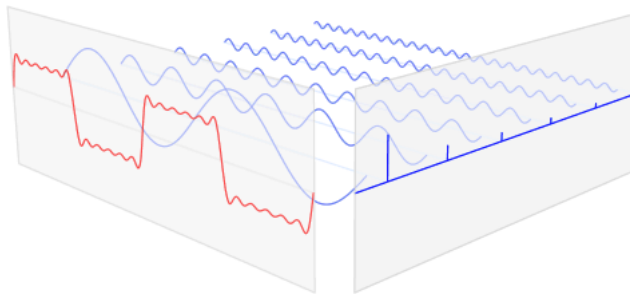
À un signal f on peut associer sa transformée de Fourier $\hat{f}$: $f \leftrightarrow \hat{f}$.

La transformée de Fourier permet d'exprimer ce signal comme une superposition d'ondes de fréquences élémentaires.



Le problème est que l'information temporelle relative à $\hat{f}$ n'est pas directement accessible.





Mathématiquement, tout signal² peut s'écrire comme suit :

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cos(jt) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(jt)$$

²mesurable, de carré intégrable et de période 2π .

Mathématiquement, tout signal² peut s'écrire comme suit :

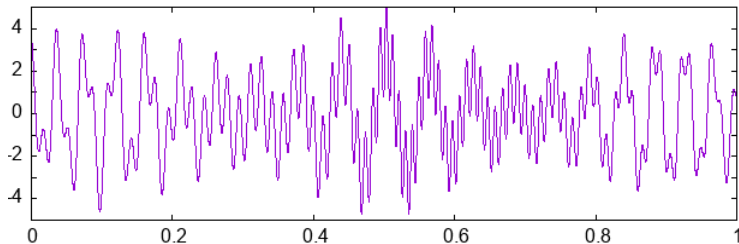
$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cos(jt) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(jt)$$

représentation temporelle

représentation fréquentielle

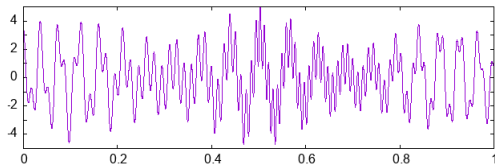
²mesurable, de carré intégrable et de période 2π .

Contrairement à la transformée de Fourier qui donne des fréquences globales sans localisation temporelle, la transformée en ondelettes contient une information fréquentielle pour une fenêtre temporelle donnée.

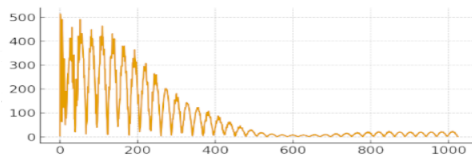


Contrairement à la transformée de Fourier qui donne des fréquences globales sans localisation temporelle, la transformée en ondelettes contient une information fréquentielle pour une fenêtre temporelle donnée.

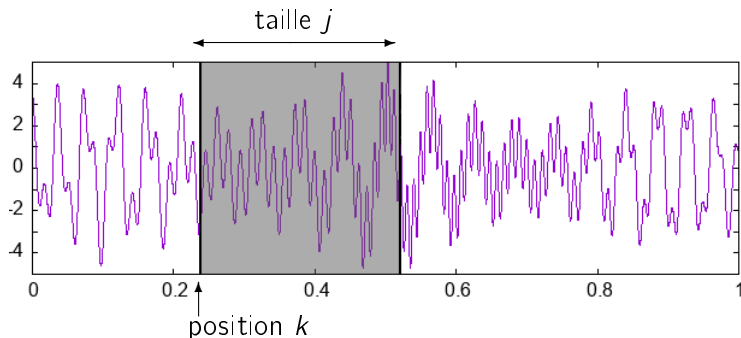
représentation temporelle



représentation fréquentielle



Contrairement à la transformée de Fourier qui donne des fréquences globales sans localisation temporelle, la transformée en ondelettes contient une information fréquentielle pour une fenêtre temporelle donnée.



Contrairement à la transformée de Fourier qui donne des fréquences globales sans localisation temporelle, la transformée en ondelettes contient une information fréquentielle pour une fenêtre temporelle donnée.

$$f(t) = \sum_{j,k} c_{j,k} 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k).$$

Contrairement à la transformée de Fourier qui donne des fréquences globales sans localisation temporelle, la transformée en ondelettes contient une information fréquentielle pour une fenêtre temporelle donnée.

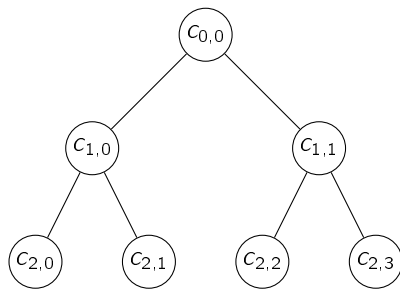
$$f(t) = \sum_{j,k} c_{j,k} 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k).$$

The diagram illustrates the components of the wavelet transform equation. A blue circle highlights the coefficient $c_{j,k}$ in the summation. A blue line points from the text "contribution de la fenêtre" to this circle. A red arc underlines the term $2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k)$, with the red text "fenêtre" positioned below it.

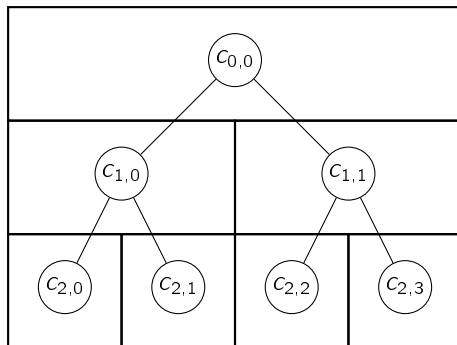
contribution de la fenêtre

fenêtre

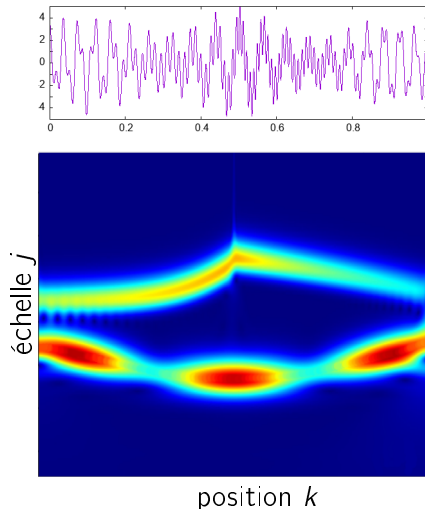
Contrairement à la transformée de Fourier qui donne des fréquences globales sans localisation temporelle, la transformée en ondelettes contient une information fréquentielle pour une fenêtre temporelle donnée.



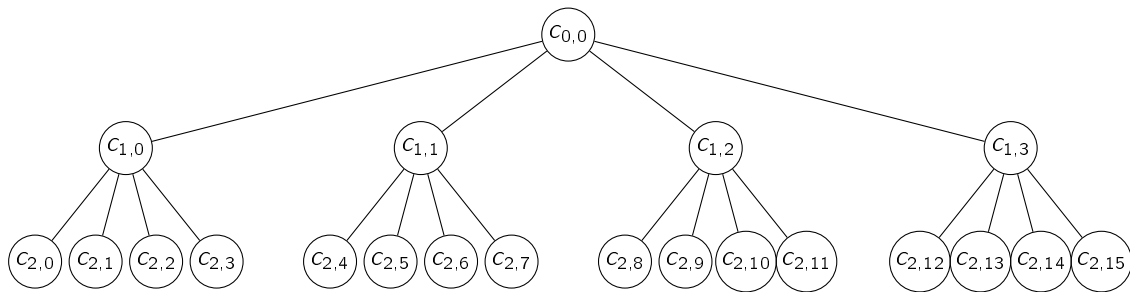
Contrairement à la transformée de Fourier qui donne des fréquences globales sans localisation temporelle, la transformée en ondelettes contient une information fréquentielle pour une fenêtre temporelle donnée.



Contrairement à la transformée de Fourier qui donne des fréquences globales sans localisation temporelle, la transformée en ondelettes contient une information fréquentielle pour une fenêtre temporelle donnée.

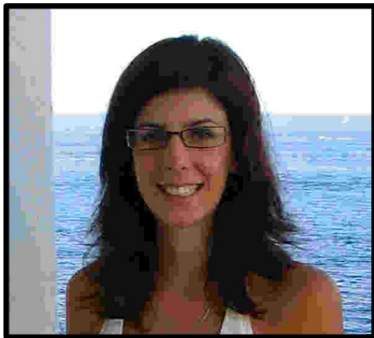


Contrairement à la transformée de Fourier qui donne des fréquences globales sans localisation temporelle, la transformée en ondelettes contient une information fréquentielle pour une fenêtre temporelle donnée.



Appliquer les méthode de compression directement sur les coefficients $c_{j,k}$ donne de très bons résultats, car beaucoup de coefficients sont nuls ou faibles.

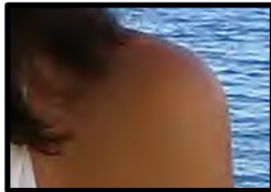
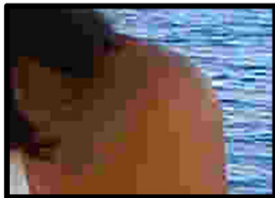
Au lieu de compresser de petits blocs de 8×8 pixels (64 bits), comme dans JPEG et MPEG, les algorithmes basés sur les ondelettes compressent l'image entière avec des taux pouvant atteindre 300 :1 en couleur et 50 : 1 en niveaux de gris.



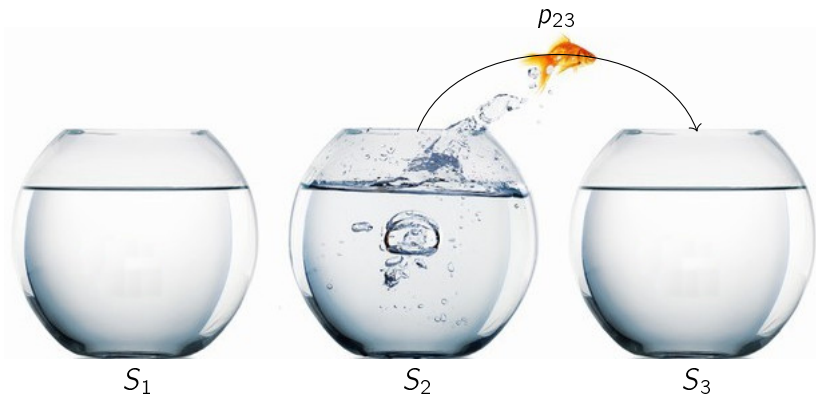
Jpeg



Jpeg 2000

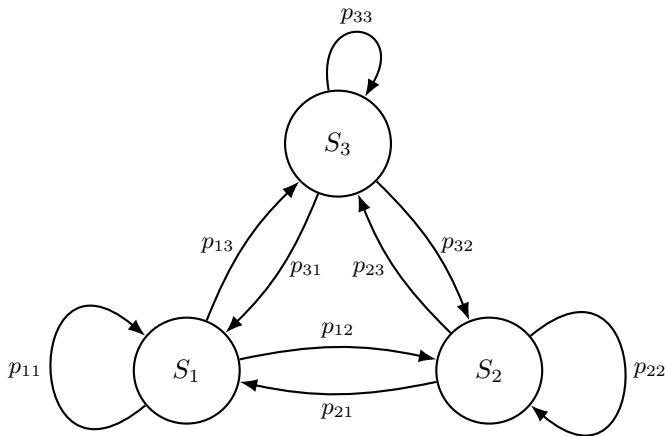


Arbre de Markov caché



Une chaîne de Markov classique décrit un système qui évolue entre plusieurs états $S_1, \dots, S_n$ avec la propriété de Markov :

$$P(X_{t+1} = S_j | X_t = S_i, X_{t-1} = S_{l_{t-1}}, \dots, X_1 = S_{l_1}) = P(X_{t+1} = S_j | X_t = S_i) = p_{ij}$$



Problème, on ne connaît pas directement dans quel état on se trouve.
On n'a accès qu'à des mesures indirectes.



Dans une chaîne de Markov cachée, les états X_t ne sont pas observables directement.

On observe à la place des symboles ou mesures Y_t , dont la distribution dépend de l'état caché.

Chaque état caché S_i émet une observation avec une certaine probabilité d'émission : $P(Y_t = y | X_t = S_i)$.

Pour les ondelettes :

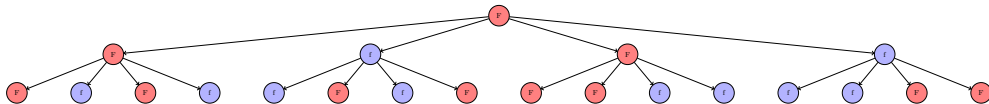
- Chaque coefficient à l'échelle $j + 1$ est le parent de plusieurs coefficients à l'échelle suivante j .
- Les coefficients sont corrélés entre échelles ($j + 1 \rightarrow j$) : un gros coefficient à une échelle fine tend à être sous un gros coefficient à l'échelle immédiatement supérieure (propriété de persistance).

L'idée : introduire un état caché pour chaque coefficient qui détermine sa « nature » (Fort/faible).

Vu nos hypothèses, si le parent est fort le fils a plus de chance d'être fort (persistance) : F-F-F-F est plus probable que F-F-f-F.

L'algorithme « arbre de Markov caché » (HMT) capture la dépendance d'échelle.

- un coefficient d'ondelette est une observation Y_t ,
- l'état caché est la nature du coefficient $X_t \in \{\text{Fort, faible}\}$,
- la transition est la probabilité qu'un enfant soit fort sachant que le parent l'est.



On peut par exemple identifier un coefficient fort à un coefficient qui contribue à l'image et un coefficient faible à un coefficient qui ne contribue pas.



On peut par exemple identifier un coefficient fort à un coefficient qui contribue à l'image et un coefficient faible à un coefficient qui ne contribue pas.



On peut par exemple identifier un coefficient fort à un coefficient qui contribue à l'image et un coefficient faible à un coefficient qui ne contribue pas.

Original Image



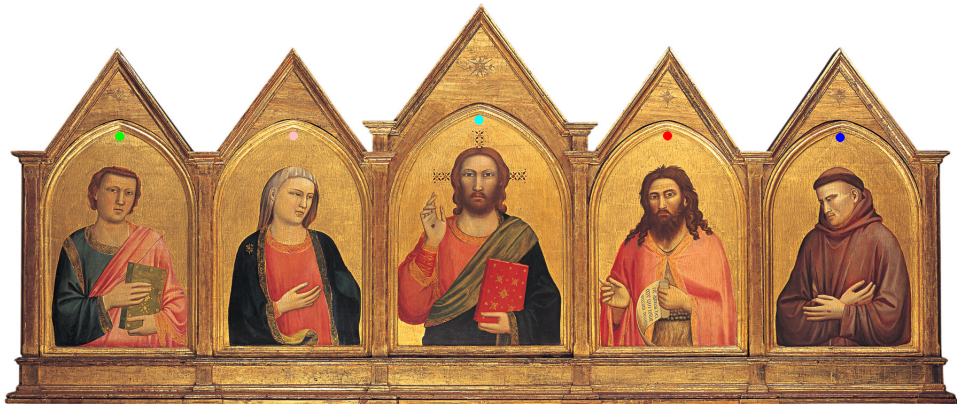
Denoised Image



Le Polyptyque Peruzzi de Giotto

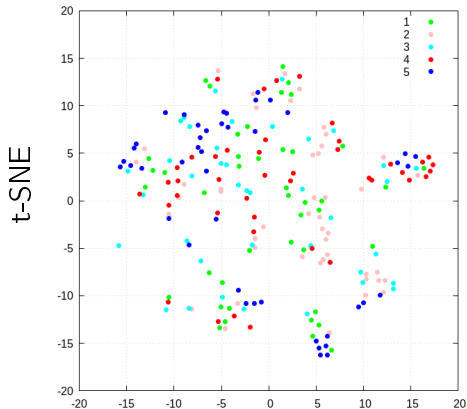


Le Polyptyque Peruzzi de Giotto



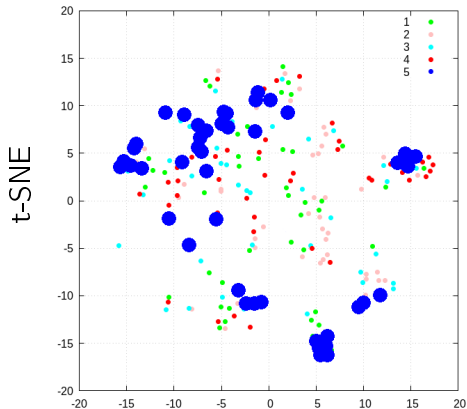
L'analyse en HMT des coefficients d'ondelettes, peuvent être interprétées comme une signature numérique de l'artiste, reflétant son style propre de manière objective et reproductible.

Dans le polyptique, Saint François (●) se distingue des autres figures par une modélisation plus sculpturale et des contours plus affirmés.



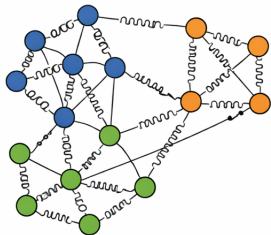
L'analyse en HMT des coefficients d'ondelettes, peuvent être interprétées comme une signature numérique de l'artiste, reflétant son style propre de manière objective et reproductible.

Dans le polyptique, Saint François (●) se distingue des autres figures par une modélisation plus sculpturale et des contours plus affirmés.

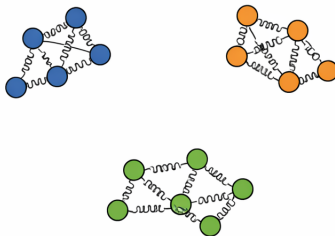


t-SNE consiste à placer des points dans le plan de manière à ce que les points proches au départ restent proches, et les points éloignés restent (plutôt) éloignés.

On relie les points voisins avec des ressorts.



Au départ

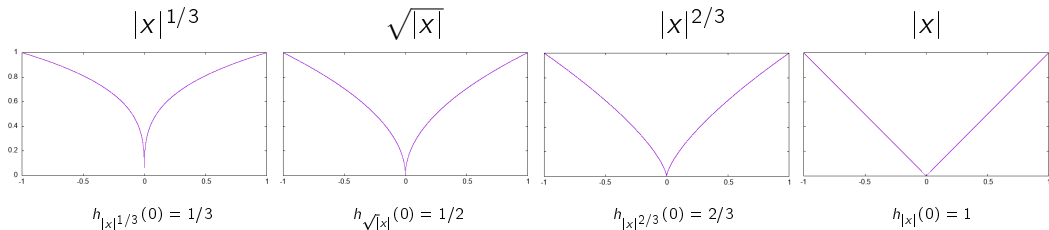


Après t-SNE

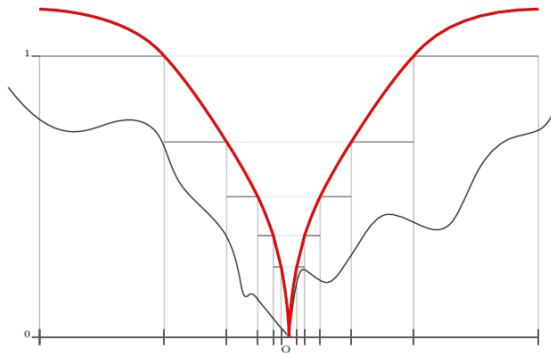
La régularité au sens de Hölder

Une autre manière d'aborder le style d'un artiste consiste à analyser la régularité de ses œuvres.

L'exposant de Hölder associe à un point x_0 un nombre $h_f(x_0)$ qui reflète la régularité de la fonction f en x_0 . C'est une généralisation de la notion « être p fois continûment dérivable ».

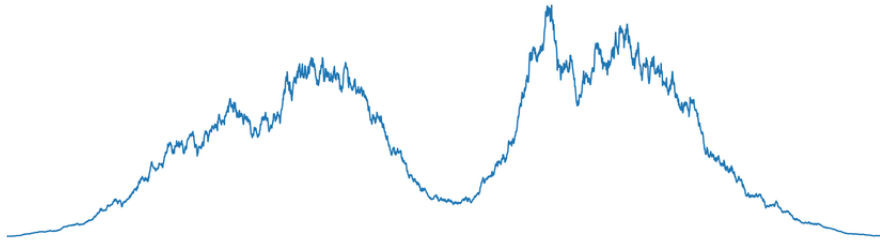


On peut calculer l'exposant de Hölder en un point pour n'importe quelle fonction³.



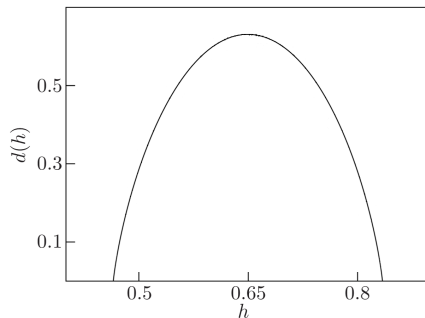
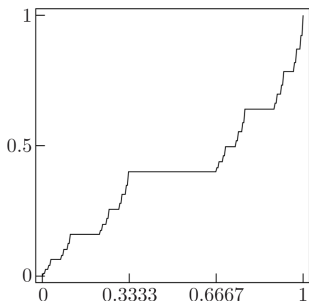
³localement bornée.

Problème : il y a autant d'exposants de Hölder que de points dans un signal.
Trop d'informations à gérer.



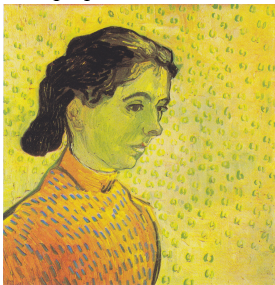
L'exposant de Hölder est une notion ponctuelle. Pour récupérer une notion globale de la régularité, on associe à une fonction f son spectre multifractal, qui associe à H la dimension des points ayant H comme exposant de Hölder :

$$d : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \rightarrow [0, n] \quad H \mapsto \dim(\{x : h_f(x) = H\}).$$



Des tableaux de Van Gogh avec d'autres tableaux impressionnistes ont été mélangés. Certains ne sont pas attribués à Van Gogh avec certitude.

•f518



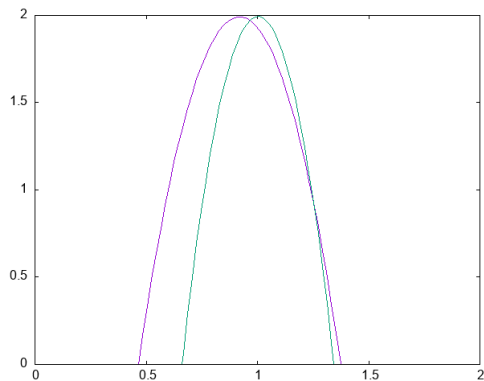
•s457

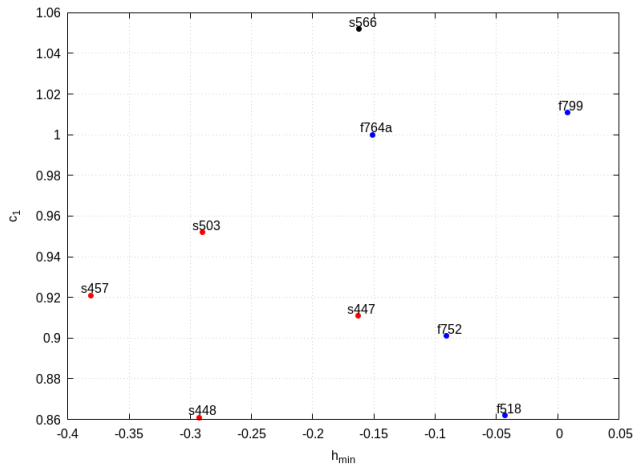


•s566



Le spectre multifractal de chaque tableau a été calculé.





Conclusion

- L'approche temps-fréquence est un standard pour l'étude et l'analyse d'images.
- Ces méthodes seront améliorées grâce :
 - à la multiplication des numérisations,
 - à l'entraînement de l'intelligence artificielle,
 - à l'augmentation de la résolution et des puissances de calcul.



Bibliographie :

- T. Wu, G. Polatkan, D. Steel, W. Brown, I. Daubechies et R. Calderbank, Painting analysis using wavelets and probabilistic topic models, 2013 20th IEEE International Conference on Image Processing (2014).
- P. Abry, H. Wendt et S. Jaffard, When VanGogh meets Mandelbrot: Multifractal classification of painting's texture, *Signal Processing*, 93 (2013), 554–572.