

Existence et régularité de densité : une approche basée sur une extension du non-déterminisme local en dehors du cadre gaussien, via le calcul de Malliavin.

Laurent Loosveldt

D'après des travaux conjoints avec Yassine Nachit (Université de Lille), Ivan Nourdin (Université du Luxembourg) et Ciprian Tudor (Université de Lille).

Tout au long de l'exposé, nous fixons un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, suffisamment "riche" pour supporter les quantités que nous allons considérer.

En probabilités, lorsqu'on considère un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)^T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, la première question naturelle est de savoir si la loi de ce vecteur est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue : existe-il une fonction positive $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty[$, intégrable, telle que, pour tout borélien $A \subseteq \mathbb{R}^d$, on a

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} \in A) = \int_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} ?$$

Nous allons commencer par analyser cette question dans le cas gaussien, qui admet une réponse très satisfaisante.

Définition 1. Un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)^T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ est *gaussien* si toute combinaison linéaire de ses composantes est gaussienne : pour tous $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R}$, il existe $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$ tels que $\sum_{j=1}^d \alpha_j X_j \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

La question de l'absolue continuité de la loi d'un vecteur gaussien se règle en considérant sa matrice de variance-covariance.

Définition 2. Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)^T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ un vecteur aléatoire gaussien, la matrice de variance-covariance de $\mathbf{X}$ est donnée par la matrice carrée de dimension d

$$\mathbb{V}(\mathbf{X}) = (\text{Cov}[X_j, X_k])_{1 \leq j, k \leq d}.$$

Si $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)^T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ un vecteur aléatoire gaussien, il est connu que la loi de $\mathbf{X}$ est entièrement déterminée par sa matrice de variance-covariance $\mathbb{V}$ et son vecteur moyenne $\mu = (\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_d])^T$, on note alors $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \mathbb{V})$. En particulier, dans le cours de bachelier, on montre le résultat suivant.

Proposition 3. La loi d'un vecteur aléatoire gaussien $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)^T \sim \mathcal{N}(\mu, \mathbb{V})$ est absolument continue si et seulement si $\det(\mathbb{V}) \neq 0$. Dans ce cas, la densité de $\mathbf{X}$ est donnée, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, par

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \sqrt{\det(\mathbb{V})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^T \mathbb{V}^{-1}(\mathbf{x} - \mu)\right).$$

Dans le cadre de cet exposé, on s'intéressera à la situation des processus stochastiques.

Définition 4. Un *processus stochastique* $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille indicée de variables aléatoires à valeurs réelles sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

En particulier, nous nous intéresserons aux lois fini-dimensionnelles d'un tel processus.

Définition 5. Les lois fini-dimensionnelles d'un processus stochastique $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ sont données par la collection des lois des vecteurs aléatoires

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_d}),$$

avec $d \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}$.

Ces lois fini-dimensionnelles sont de première importance dans l'étude d'un processus stochastique puisque le théorème de consistance de Kolmogorov montre que ces dernières suffisent pour caractériser la loi d'un processus stochastique. La question naturelle qui surgit alors est : comment déterminer si toutes les lois fini-dimensionnelles d'un processus stochastique sont absolument continues. Au vu de ce qui précède, nous commençons par présenter une stratégie efficace dans le cas des processus gaussiens.

Définition 6. Un processus stochastique $\{X_t\}_{t \geq 0}$ est *gaussien* si toutes ses lois fini-dimensionnelles sont gaussiennes.

Au regard de ce qui précède, la loi d'un processus gaussien est entièrement déterminée par la fonction de moyenne

$$m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \mathbb{E}[X_t]$$

ainsi que l'opérateur de covariance

$$K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (t, s) \mapsto \text{Cov}[X_t, X_s]. \quad (1)$$

De plus, la Proposition 3 nous affirme que pour montrer que la loi fini-dimensionnelle du processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ associée au temps distincts $t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}$ est absolument continue, il faut et il suffit de vérifier que le déterminant de la matrice

$$\mathbb{V}[X_{t_1}, \dots, X_{t_d}] = (K(t_j, t_k))_{1 \leq j, k \leq d}$$

est non nul.

Exemple 7. Un processus gaussien $\{B_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ est un mouvement brownien si sa fonction moyenne est nulle, son opérateur de covariance est donné par

$$K : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty[: (s, t) \mapsto \frac{1}{2} (|t| + |s| - |t - s|).$$

et si ses trajectoires sont presque sûrement continues. Remarquons que, pour tous $s, t \geq 0$, on a $K(s, t) = \min\{s, t\}$.

Montrons que, pour tous $d \in \mathbb{N}^*$ et $0 < t_1 < \dots < t_d$, la loi du vecteur aléatoire $(B_{t_1}, \dots, B_{t_d})^T$ est absolument continue. Pour ce faire, on remarque que

$$\mathbb{V}(B_{t_1}, \dots, B_{t_d}) = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_d \end{pmatrix}$$

et on calcule alors

$$\det \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 & \cdots & t_2 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t_1 & t_2 - t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ t_1 & t_2 - t_1 & t_3 - t_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ t_1 & t_2 - t_1 & t_3 - t_2 & \cdots & t_d - t_{d-1} \end{pmatrix}$$

$$= t_1(t_2 - t_1) \cdots (t_d - t_{d-1}).$$

Cette dernière égalité nous garantit alors que toutes les lois fini-dimensionnelles du mouvement Brownien obtenues en considérant des temps strictement positifs sont absolument continues.

Par soucis de simplicité, nous supposons à présent considérer un processus centré¹. Dans ce cas, pour étudier la déterminant des matrices de variance-covariance de vecteurs gaussiens, nous allons faire appel à la variance conditionnelle. Rappelons que, si $X_1, \dots, X_d$ sont des variables aléatoires $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, l'espérance conditionnelle

$$\mathbb{E}[X_d | X_1, \dots, X_{d-1}]$$

peut être interprété par la meilleure approximation, dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, de X_d étant donné l'information disponible via $X_1, \dots, X_{d-1}$: c'est la projection orthogonale de X_d sur le sous-espace $L^2(\Omega, \sigma(X_1, \dots, X_{d-1}), \mathbb{P})$. Dans ce cas, la variance conditionnelle

$$\mathbb{V}[X_d | X_1, \dots, X_{d-1}] = \mathbb{E}[(X_d - \mathbb{E}[X_d | X_1, \dots, X_{d-1}])^2 | X_1, \dots, X_{d-1}]$$

doit mesurer l'incertitude restante lorsqu'on approche X_d à partir de $X_1, \dots, X_{d-1}$.

Rappelons également que si $(X_1, \dots, X_d)^T$ est un vecteur gaussien centré alors

- $\mathbb{E}[X_d | X_1, \dots, X_{d-1}]$ est une combinaison linéaire de $X_1, \dots, X_{d-1}$,
- $X_d - \mathbb{E}[X_d | X_1, \dots, X_{d-1}]$ est indépendant de $X_1, \dots, X_{d-1}$,
- $\mathbb{V}[X_d | X_1, \dots, X_{d-1}]$ est déterministe.

Ces faits permettent d'établir le résultat suivant.

Proposition 8. *Soit un naturel $d \geq 2$ et $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur gaussien centré. On a*

$$\det(\mathbb{V}[\mathbf{X}]) = \mathbb{V}[X_1] \prod_{j=2}^d \mathbb{V}[X_j | X_1, \dots, X_{j-1}] \quad (2)$$

Démonstration. Posons $\tilde{\mathbf{X}} = (X_1, \dots, X_{d-1})^T$ et considérons le vecteur ligne (déterministe) R de taille $d-1$ telle que

$$\mathbb{E}[X_d | \tilde{\mathbf{X}}] = R\tilde{\mathbf{X}}.$$

Posons alors

$$Q = \begin{pmatrix} I_{d-1} & 0 \\ -R & 1 \end{pmatrix}$$

et notons que

$$\mathbb{V}[Q\mathbf{X}] = \mathbb{E}[Q\mathbf{X}(Q\mathbf{X})^T] = Q\mathbb{E}[\mathbf{X}\mathbf{X}^T]Q^* = Q\mathbb{V}[\mathbf{X}]Q^T.$$

1. C'est à dire que sa fonction moyenne est nulle.

En remarquant

$$Q\mathbf{X} = (\tilde{\mathbf{X}}, X_d - \mathbb{E}[X_d|\tilde{\mathbf{X}}])^T,$$

on obtient, en exploitant l'indépendance de $\tilde{\mathbf{X}}$ et $X_d - \mathbb{E}[X_d|\tilde{\mathbf{X}}]$,

$$\mathbb{V}[Q\mathbf{X}] = \begin{pmatrix} \mathbb{V}[\tilde{\mathbf{X}}] & 0 \\ 0 & \mathbb{V}[X_d|\tilde{\mathbf{X}}] \end{pmatrix}.$$

Ainsi, puisque $\det Q = 1$, on tire

$$\det(\mathbb{V}[\mathbf{X}]) = \det(\mathbb{V}[Q\mathbf{X}]) = \mathbb{V}[X_d|X_1, \dots, X_{d-1}] \det(\mathbb{V}[\tilde{\mathbf{X}}]).$$

Une simple récurrence permet alors de conclure. $\square$

Au regard de ce dernier résultat, l'étude de l'existence d'une densité pour toutes les lois fini-dimensionnelles d'un processus stochastique nous amène à nous intéresser à la définition suivante.

Définition 9. Soit une fonction ϕ , continue et croissante, satisfaisant $\phi(0) = 0$. On dit qu'un processus gaussien centré $\{X_t\}_{t \geq 0}$ est ϕ -localement *non-déterministe* sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ s'il existe $c, r_0 > 0$ tels que

1. $\mathbb{V}[X_t - X_s] > 0$, pour tous $s, t \in I$ tels que $0 \leq |s - t| \leq r_0$;
2. $\mathbb{V}[X_t] > 0$, pour tout $t \in I$;
3. pour tous $t \in I$ et $0 < r < \min\{|t|, r_0\}$, on a

$$\mathbb{V}[X_t|X_s, s \in I, r \leq |s - t| \leq r_0] \geq c\phi(r). \quad (3)$$

Le non-déterminisme local a été introduit principalement pour l'étude du temps local des processus stochastiques. Initialement, cette notion a été définie en requérant la condition

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{\substack{u < s \leq t \\ t - u \leq \varepsilon}} \frac{\mathbb{V}[X_t - X_s|X_u, u \leq u \leq s]}{\mathbb{V}[X_t - X_s]} > 0. \quad (4)$$

Avec cette dernière, on mesure à quel point l'accroissement $X_t - X_s$ est prévisible en fonction de l'information donné par le processus en des temps légèrement antérieurs à cet accroissement. En pratique, on vérifie cependant plus généralement la condition (3) qui donne des résultats plus fins tout en étant plus forte que la condition (4) pour les processus que nous considérons.

Afin de traiter des exemples plus généraux, nous allons exploiter l'intégrale de Wiener-Itô. Pour ce faire, on considère un mouvement Brownien $\{B_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ et on note que l'expression (1) nous donne, pour tous $s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ satisfaisant $s_1 < t_1; s_2 < t_2$

$$\mathbb{E}[(B_{t_1} - B_{s_1})(B_{t_2} - B_{s_2})] = \langle \mathbb{1}_{[s_1, t_1[}; \mathbb{1}_{[s_2, t_2[} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Par linéarité, on construit une isométrie entre le sous-espace de $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions étagées et $L^2(\Omega)$. Par densité des fonctions étagées, on définit finalement une isométrie

$$I_1 : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\Omega) : h \mapsto I_1(h) := \int h(x) dB(x).$$

De par cette construction, on vérifie que, pour tout $h \in L^2(\mathbb{R})$, $I_1(h) \sim \mathcal{N}(0, \|h\|_{L^2(\mathbb{R})}^2)$. En exploitant cette intégrale, pour tout $H \in (0, 1)$, on définit le processus gaussien centré

$$\left\{ B_t^H := \frac{1}{c_H} \int \left((t-x)^{H-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{\{x < t\}} - (-u)^{H-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{\{x < 0\}} \right) dB(x) \right\}_{t \in \mathbb{R}},$$

où c_H est une constante de normalisation choisie telle que $\mathbb{E}[B_1^H] = 1$. Ce processus est connu sous le nom de mouvement Brownien fractionnaire d'indice de Hurst H . Son opérateur de covariance est donné par

$$K^H : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty[: (s, t) \mapsto \frac{1}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}).$$

De plus, $\{B_t^H\}_{t \in \mathbb{R}}$ satisfait aux propriétés fondamentales :

- **auto-similarité** : pour tout $c > 0$, $\{B_{ct}^H\}_{t \in \mathbb{R}} \stackrel{\text{d.f.d.}}{=} \{c^H B_t^H\}_{t \in \mathbb{R}}$,
- **accroissements stationnaires** : pour tout $h \in \mathbb{R}$, $\{B_{t+h}^H - B_h^H\}_{t \geq 0} \stackrel{\text{d.f.d.}}{=} \{B_t^H\}_{t \in \mathbb{R}}$,

où $\stackrel{\text{d.f.d.}}{=}$ désigne l'égalité des lois fini-dimensionnelles. Afin de suivre la stratégie explicitée ci-dessus, tentons de minorer, pour tout $t \neq 0$ et $0 < r \leq |t|$,

$$\mathbb{V}[B_t^H | B_s^H : |s-t| \geq r].$$

En considérant $h = r \frac{t}{|t|}$, on a

$$\mathbb{V}[B_t^H | B_s^H : |s-t| \geq r] = \mathbb{V}[B_t^H - B_{t-h}^H | B_s^H - B_u^H : |s-t| \geq r \text{ et } |u-t| \geq r].$$

On exploite alors la stationnarité des accroissements puis l'auto-similarité pour avoir

$$\begin{aligned} & \mathbb{V}[B_t^H - B_{t-h}^H | B_s^H - B_u^H : |s-t| \geq r \text{ et } |u-t| \geq r] \\ &= \mathbb{V}[B_h^H - B_0^H | B_s^H - B_u^H : |s-h| \geq r \text{ et } |u-h| \geq r] \\ &= \mathbb{V}[B_h^H | B_s^H : |s-h| \geq r = |h|] \\ &= r^{2H} \mathbb{V}[B_{|h|^{-1}}^H | B_s^H : |s-h||h|^{-1}| \geq 1]. \end{aligned}$$

Un raisonnement, basé sur une convergence de transformée de Fourier, que nous ne détaillerons pas ici, donne alors, pour tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\mathbb{V}[B_{|h|^{-1}}^H | B_s^H : |s-h||h|^{-1}| \geq 1] > 0$$

et on tire que $\{B_t^H\}_{t \in \mathbb{R}}$ est $(r \mapsto r^{2H})$ -localement non-déterministe. En particulier, on déduit le résultat suivant.

Proposition 10. *Pour tous $d \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, \dots, t_d$ temps positifs distincts, la loi de $(B_{t_1}^H, \dots, B_{t_d}^H)^T$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Démonstration. A un changement de variable près, on peut supposer $t_1 < t_2 < \dots$

$\dots < t_d$. On calcule alors, via la Proposition 8,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(B_{t_1}^H, \dots, B_{t_d}^H) &= \mathbb{V}[B_{t_1}^H] \prod_{j=2}^d \mathbb{V}[B_{t_j}^H | B_{t_1}^H, \dots, B_{t_{j-1}}^H] \\ &\geq t_1^{2H} \prod_{j=2}^d \mathbb{V}[B_{t_j}^H | B_s^H : |s - t_j| \geq |t_j - t_{j-1}|] \\ &\geq ct_1^{2H} \prod_{n=2}^d |t_j - t_{j-1}|^{2H} \\ &> 0. \end{aligned}$$

On conclut alors via la Proposition 3. $\square$

L'objectif principal de cet exposé est de mettre en place une telle stratégie dans le cadre général des chaos de Wiener, que nous allons définir. Pour ce faire, on commence par présenter une extension multidimensionnelle de l'intégrale stochastique que nous avons définie ci-dessus.

Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, on note $L_S^2(\mathbb{R}^d)$ le sous-espace des fonctions symétriques de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Si $h \in L_S^2(\mathbb{R}^d)$ est de la forme

$$h = \sum_{j_1, \dots, j_d=1}^p a_{j_1, \dots, j_d} \mathbb{1}_{[s_{j_1}, t_{j_1}[} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}_{[s_{j_d}, t_{j_d}[}, \quad (5)$$

où $\otimes$ est le produit tensoriel, $a_{j_1, \dots, j_d}$ sont tels que, pour toute permutation σ , $a_{\sigma(j_1), \dots, \sigma(j_d)} = a_{j_1, \dots, j_d}$ et $a_{j_1, \dots, j_d} = 0$ dès que deux indices $j_1, \dots, j_d$ sont égaux et, pour tout $1 \leq \ell \neq \ell' \leq d$, $[s_{j_\ell}, t_{j_\ell}[\cap [s_{j_{\ell'}}, t_{j_{\ell'}}[= \emptyset$, alors l'intégrale de Wiener-Itô d'ordre d de h par rapport au mouvement brownien $\{B_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ sur l'espace probabiliste $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est donnée par

$$I_d(h) := \sum_{j_1, \dots, j_d=1}^p a_{j_1, \dots, j_d} (B_{t_{j_1}} - B_{s_{j_1}}) \times \dots (B_{t_{j_d}} - B_{s_{j_d}}). \quad (6)$$

Les conditions de construction assure que nous obtenons l'isométrie

$$\mathbb{E}[I_d(g)I_{d'}(h)] = \delta_{d,d'} d! \langle g, h \rangle \quad (7)$$

L'intégrale d'une fonction symétrique générale dans $L_S^2(\mathbb{R}^d)$ se définit alors en tirant profit de la densité des fonctions de la forme (5) dans $L_S^2(\mathbb{R}^d)$. On définit également l'intégrale d'ordre d d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ en considérant l'intégrale de la fonction symétrisée donnée par

$$\tilde{f} : \mathbf{x} \mapsto \frac{1}{d!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_d} f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(d)}),$$

où $\mathcal{S}_d$ est l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, d\}$.

Définition 11. On appelle *chaos de Wiener d'ordre d* le sous-espace fermé de $L^2(\Omega)$ engendré par les variables aléatoires s'écrivant comme une intégrale de Wiener-Itô d'ordre d .

Remarque 12. Il est intéressant de noter qu'alors que le chaos de Wiener d'ordre 1 n'est constitué que de variables aléatoires gaussiennes, les chaos d'ordre supérieur ne contiennent pas de variable aléatoire gaussienne.

Remarque 13. Désignons par $\mathcal{H}_d$ le chaos de Wiener d'ordre $d \in \mathbb{N}^*$, avec $\mathcal{H}_0 = \mathbb{R}$. On a la décomposition

$$L^2(\Omega) = \bigoplus_{d=0}^{+\infty} \mathcal{H}_d.$$

Nous allons à présent donner une extension à la Proposition 3 dans le cadre de la théorie des chaos de Wiener. Pour ce faire, nous définissons la dérivée de Malliavin.

Définition 14. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des variables aléatoires qui ont la forme

$$F = f(I_1(h_1), \dots, I_1(h_n)) \quad (8)$$

avec $n \geq 1$, $h_j \in L^2(\mathbb{R})$ et f infiniment continûment dérivable et dont toutes les dérivées sont à croissance polynomiale. Si $F \in \mathcal{S}$ s'écrit sous la forme (8), la *dérivée de Malliavin* de F est le processus stochastique

$$D_r F = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(B(h_1), \dots, B(h_n)) h_j(r), \quad r \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $p \geq 1$, on considère alors l'espace, de type Sobolev $\mathbb{D}^{1,p}$ qui est la fermeture de $\mathcal{S}$ par rapport à la norme

$$\|\cdot\|_{1,p} : F \mapsto \left(\mathbb{E}[|F|^p] + \mathbb{E}[\|DF\|_{L^2(\mathbb{R})}^p] \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En particulier, la dérivée de Malliavin d'une variable aléatoire $F \in \mathbb{D}^{1,p}$ est définie via cette fermeture.

Remarque 15. On peut définir de façon analogue la dérivée de Malliavin d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$, $D^k F$ et les espaces $\mathbb{D}^{k,p}$ ($p \geq 1$) correspondant. On pose également $\mathbb{D}^{\infty,p} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbb{D}^{k,p}$. Notons que, si $h \in L_S^2(\mathbb{R}^d)$ alors, pour tout $p \geq 1$, $I_d(h) \in D^{\infty,p}$ et

$$D^k I_d(h) = \begin{cases} \frac{d!}{(d-k)!} I_{d-k}(h) & \text{si } k \leq d \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (9)$$

où dans $I_{d-m}(h)$ l'intégrale de Wiener-Itô est uniquement calculée par rapport aux $d-m$ premières variables. Cette dernière formule donne donc une sorte de réciprocity entre l'intégrale de Wiener-Itô et les dérivées de Malliavin.

Le résultat suivant, connu sous le nom de critère de Bouleau-Hirsch (1986), est central dans notre approche. Il s'agit d'une extension de la Proposition 3.

Théorème 16. Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)^T$ un vecteur aléatoire pour lequel il existe $p > 1$ tel que chaque $X_j \in \mathbb{D}^{1,p}$. Si la matrice de Malliavin

$$\Gamma_{\mathbf{X}} = (\langle DX_j, DX_k \rangle_{L^2(\mathbb{R})})_{1 \leq j, k \leq d}$$

est presque sûrement inversible alors la loi de $\mathbf{X}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Remarque 17. Nourdin, Nualart et Poly (2013) ont montré que si toutes les composantes de $\mathbf{X}$ sont dans un même chaos de Wiener alors l'inversibilité presque sûre de la matrice de Malliavin est **équivalente** à l'absolue continuité de la loi de $\mathbf{X}$.

Remarque 18. Si $\mathbf{X} = (I_1(h_1), \dots, I_1(h_d))^T$ est un vecteur aléatoire gaussien du chaos de Wiener d'ordre 1 alors, pour tous $1 \leq j, k \leq d$, on a, par isométrie de I_1 ,

$$\langle DI_1(h_j), DI_1(h_k) \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle h_j, h_k \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \mathbb{E}[I_1(h_j)I_1(h_k)].$$

On tire alors l'égalité

$$\Gamma_{\mathbf{X}} = \mathbb{V}[\mathbf{X}] \quad (10)$$

L'analogie entre la Proposition 3 et le Théorème 16, accentuée par la correspondance exacte (10) dans le cas gaussien pousse à établir une notion de non-déterminisme local adaptée au calcul de Malliavin. Pour ce faire, nous allons commencer par établir une formule de factorisation du déterminant de la matrice de Malliavin qui doit étendre la Proposition 8.

Lemme 19. Si $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d) \in (\mathbb{D}^{1,2})^d$ alors, presque sûrement,

$$\det(\Gamma_{\mathbf{X}}) = \|DX_1\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \prod_{j=2}^d \|DX_j - \text{proj}_{E_{j-1}}(DX_j)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \quad (11)$$

où E_{j-1} est le sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$ engendré par $\{DX_1, \dots, DX_{j-1}\}$, et $\text{proj}_{E_{j-1}}$ est la projection orthogonale sur E_{j-1} .

Remarque 20. Avant de se plonger dans la démonstration du Lemme 19, analysons la correspondance entre les identités (2) et (11).

- Si $\mathbf{X} = (I_1(h_1), \dots, I_1(h_d))^T$ est un vecteur aléatoire gaussien du chaos de Wiener d'ordre 1, l'isométrie de Wiener-Itô et un calcul de variance conditionnelle dans le cas gaussien assure que les membres de droite des identités (2) et (11) sont égaux.
- Avec $\mathbb{V}[X_j | X_1, \dots, X_{j-1}]$ on mesure l'incertitude restante lorsqu'on approxime X_j par $\mathbb{E}[X_j | X_1, \dots, X_{j-1}]$ qui est la projection de X_j sur le sous-espace $L^2(\Omega, \sigma(X_1, \dots, X_{j-1}), \mathbb{P})$. Avec $\|DX_j - \text{proj}_{E_{j-1}}(DX_j)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$, on juge la qualité de l'approximation dans $L^2(\mathbb{R})$ de DX_j par sa projection sur le sous-espace engendré par $\{DX_1, \dots, DX_{j-1}\}$.

Démonstration du Lemme 19. Pour tout $1 \leq j \leq d$, on a

$$\begin{aligned} \langle DX_j, DX_d \rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \langle DX_j, \text{proj}_{E_{d-1}}(DX_d) \rangle_{L^2(\mathbb{R})} + \langle DX_j, DX_d - \text{proj}_{E_{d-1}}(DX_d) \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &=: A_{j,d} + B_{j,d}. \end{aligned}$$

Or, par définition, $DX_d - \text{proj}_{E_{d-1}}(DX_d)$ est orthogonal à E_{d-1} , ce qui donne, pour tout $1 \leq j \leq d-1$,

$$B_{j,d} = 0.$$

tandis que

$$B_{d,d} = \|DX_d - \text{proj}_{E_{d-1}}(DX_d)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \quad (12)$$

Exploitions alors la multilinéarité du déterminant pour écrire

$$\det(\Gamma_{\mathbf{X}}) = \det(A_{\mathbf{X}}) + \det(B_{\mathbf{X}}),$$

où $\det(A_{\mathbf{X}})$ est obtenu en remplaçant la dernière colonne de $\Gamma_{\mathbf{X}}$ par $(A_{1,d}, \dots, A_{d,d})^T$, et $\det(B_{\mathbf{Z}})$ par $(B_{1,d}, \dots, B_{d,d})^T$. En remarquant alors que la dernière colonne $A_{\mathbf{X}}$ est une combinaison linéaire des $d - 1$ premières, on tire $\det(A_{\mathbf{Z}}) = 0$.

Ainsi, on calcule

$$\begin{aligned} \det(\Gamma_{\mathbf{X}}) = \det(B_{\mathbf{X}}) &= \det \begin{pmatrix} (\langle DX_j, DX_k \rangle_{L^2(\mathbb{R})})_{1 \leq i, j \leq d-1} & 0 \\ * & B_{d,d} \end{pmatrix} \\ &= B_{d,d} \det (\langle DX_j, DX_k \rangle_{L^2(\mathbb{R})})_{1 \leq j, k \leq d-1} \end{aligned}$$

et, de (12), on tire

$$\det(\Gamma_{\mathbf{X}}) = \|DX_d - \text{proj}_{E_{d-1}}(DX_d)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \det (\langle DX_j, DX_k \rangle_{L^2(\mathbb{R})})_{1 \leq j, k \leq d-1}.$$

La factorisation désirée (11) suit alors par récurrence sur d . $\square$

Dans la suite de cet exposé, nous souhaitons appliquer une propriété de non-déterminisme local au niveau du terme $\|DX_j - \text{proj}_{E_{j-1}}(DX_j)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$ dans (11) afin de pouvoir imiter l'approche qui est suivie dans le cas gaussien. Afin de rester dans un cadre proche de celui que nous avons mis en œuvre pour démontrer la Proposition 10, nous allons considérer les processus de Hermite.

Définition 21. Étant donné $d \in \mathbb{N}^*$ et $H \in (\frac{1}{2}, 1)$, on considère, pour tout $s \in \mathbb{R}$, la fonction définie, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, par

$$f_H(s, \mathbf{x}) = c(H, d) \prod_{\ell=1}^d (s - x_\ell)_+^{\frac{H-1}{d} - \frac{1}{2}},$$

où $c(H, d)$ est une constante de normalisation pour obtenir un processus de variance 1 au temps 1. Il est alors facile de montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $\int_0^t f_H(s, \bullet) ds$ appartient à $L_S^2(\mathbb{R}^d)$. Le processus

$$\left\{ Z_t^{H,d} = I_d \left(\int_0^t f_H(s, \bullet) ds \right) \right\}_{t \in \mathbb{R}}$$

est appelé *processus d'Hermite d'ordre d et d'indice de Hurst H* .

Les processus d'Hermite offrent une extension naturelle du mouvement brownien fractionnaire puisque celui-ci est en fait le processus d'ordre 1. Par contre, au vu de la Remarque 12, le processus d'Hermite d'ordre $d > 1$ est non gaussien. L'analogie avec le mouvement brownien fractionnaire est maintenu dans les propriétés fondamentales des processus de Hermite :

— **auto-similarité** : pour tout $c > 0$,

$$\{Z_{ct}^{H,d}\}_{t \in \mathbb{R}} \stackrel{\text{d.f.d.}}{=} \{c^H Z_t^{H,d}\}_{t \in \mathbb{R}};$$

— **accroissement stationnaires** : pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\{Z_{t+h}^{H,d} - Z_h^{H,d}\}_{t \in \mathbb{R}} \stackrel{\text{d.f.d.}}{=} \{Z_t^{H,d}\}_{t \in \mathbb{R}};$$

— **fonction de covariance** : pour tout $s, t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[Z_t^{H,d} Z_s^{H,d}] = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}).$$

On souhaite montrer que, pour tous $d \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, \dots, t_d$ temps positifs distincts, la loi de $(Z_{t_1}^{H,d}, \dots, Z_{t_d}^{H,d})^T$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Au regard de ces dernières propriétés et afin d'imiter le cheminement suivi pour démontrer la Proposition 10, on souhaiterait, si on ordonne $t_1 < \dots < t_d$, vérifier que, pour tout $2 \leq j \leq d$, on peut minorer

$$\|DZ_{t_j}^{H,d} - \text{proj}_{E_{j-1}}(DZ_{t_j}^{H,d})\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \quad (13)$$

par un multiple de

$$|t_j - t_{j-1}|^{2H}.$$

Notons toutefois que, ici, le terme (13) est aléatoire, ce qui n'était pas le cas de $\mathbb{V}[B_{t_j}^H | B_{t_1}^H, \dots, B_{t_{j-1}}^H]$. Ainsi, une minoration *non stochastique* semble trop forte. Pour cette raison, nous proposons d'établir le résultat suivant.

Théorème 22. *Soit $Z^{H,d} = \{Z_t^{H,d}\}_{t \in \mathbb{R}}$ le processus d'Hermite d'ordre $d \geq 1$ d'indice de Hurst $H \in (\frac{1}{2}, 1)$. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et toute grille $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{j-1} < t_j$, on a*

$$\|DZ_{t_j}^{H,d} - \text{proj}_{E_{j-1}}(DZ_{t_j}^{H,d})\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \stackrel{\mathcal{L}}{\geq} (t_j - t_{j-1})^{2H} \|DZ_1^{H,d}\|_{L^2([0,1])}^2, \quad (14)$$

où la notation $X \stackrel{\mathcal{L}}{\geq} Y$ signifie que

$$\mathbb{E}[f(X)] \geq \mathbb{E}[f(Y)] \quad (15)$$

pour toute fonction croissante et bornée $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$.

Nous allons d'abord montrer pourquoi le Théorème 22 nous est effectivement suffisant pour démontrer que les lois fini-dimensionnelles issues d'un processus de Hermite sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour ce faire, nous établirons d'abord le résultat suivant.

Lemme 23. *Soit $Z^{H,d} = \{Z_t^{H,d}\}_{t \in \mathbb{R}}$ le processus d'Hermite d'ordre $d \geq 1$ d'indice de Hurst $H \in (\frac{1}{2}, 1)$. On a*

$$\|DZ_1^{H,d}\|_{L^2([0,1])}^2 > 0 \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} \quad (16)$$

La démonstration de ce lemme repose sur le résultat suivant, qui a son propre intérêt.

Lemme 24. *Soit F une variable aléatoire positive qui appartient à une somme finie de chaos de Wiener. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $\mathbb{E}[F] > 0$;
- (ii) $F > 0$ $\mathbb{P}$ -p.s.

Démonstration. Il suffit évidemment de démontrer l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $F \in \sum_{d=0}^N \mathcal{H}_d$. La définition des chaos de Wiener et de l'intégrale stochastique assure qu'il existe une suite $(F_j)_j$ de variables aléatoires telle que $F_j \rightarrow F$ dans $L^2(\Omega)$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$F_j = P_j(I_1(e_1), \dots, I_1(e_{k(j)}))$$

avec

- $(e_k)_k$ une base orthornormée de $L^2(\mathbb{R})$;
- P_j un polynôme de degré au plus N .

On exploite alors l'inégalité de Carbery-Wright pour garantir qu'il existe une constante universelle $c > 0$ telle que, pour tout $x > 0$ et $j \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(|P_j(I_1(e_1), \dots, I_1(e_{k(j)}))| \leq x) \leq cNx^{\frac{1}{N}} (\mathbb{E}[P_j(I_1(e_1), \dots, I_1(e_{k(j)}))^2])^{\frac{-1}{2N}}.$$

Une application du Lemme de Fatou puis de l'inégalité de Cauchy-Schwarz donnent alors, pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}(F \leq x) \leq cNx^{\frac{1}{N}} \mathbb{E}[F^2]^{\frac{-1}{2N}} \leq cNx^{\frac{1}{N}} \mathbb{E}[F]^{\frac{-1}{N}}.$$

Un passage à la limite $x \rightarrow 0^+$ permet de conclure $\mathbb{P}(F = 0) = 0$. □

Le Lemme 23 est une conséquence immédiate du Lemma 24.

Démonstration du Lemma 23. Il suffit de remarquer que $\|DZ_1^{H,d}\|_{L^2([0,1])}^2 \in \bigoplus_{k=0}^{2(d-1)} \mathcal{H}_k$ et, en exploitant les identités (9) et (7) on tire

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\|DZ_1^{H,d}\|_{L^2([0,1])}^2 \right] \\ &= c(H,d)^2 d^2 (d-1)! \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^{q-1}} \left\{ \int_0^1 \prod_{k=1}^d (s - x_k)_+^{\frac{H-1}{d} - \frac{1}{2}} ds \right\}^2 \prod_{\ell=2}^d dx_\ell dx_1 > 0. \end{aligned}$$

□

En exploitant les résultats énoncés au Théorème (22) et au Lemme 23, on peut établir une extension de la Proposition 10 à toute la classe des processus de Hermite.

Théorème 25. *Pour tous $d \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, \dots, t_d$ temps positifs distincts, la loi de $\mathbf{Z} = (Z_{t_1}^{H,d}, \dots, Z_{t_d}^{H,d})^T$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Démonstration. A un changement de variable près, on peut supposer $t_1 < t_2 < \dots < t_d$. Par le critère de Bouleau-Hirsch, on doit montrer

$$\mathbb{P}(\det(\Gamma_{\mathbf{Z}}) > 0) = 1. \quad (17)$$

Pour ce faire, on exploite la factorisation

$$\det(\Gamma_{\mathbf{Z}}) = \|DZ_{t_1}^{H,d}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \prod_{j=2}^n \|DZ_{t_j}^{H,d} - \text{proj}_{E_{j-1}}(DZ_{t_j}^{H,d})\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \quad (18)$$

Un raisonnement analogue à la démonstration du Lemme 23 assure que, presque sûrement, $\|DZ_{t_1}^{H,d}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 > 0$. Par ailleurs, le Théorème 22 assure

$$\|DZ_{t_j}^{H,d} - \text{proj}_{E_{j-1}}(DZ_{t_j}^{H,d})\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \stackrel{\mathcal{L}}{\geq} (t_j - t_{j-1})^{2H} \|DZ_1^{H,d}\|_{L^2([0,1])}^2.$$

En considérant alors $f = \mathbb{1}_{(0,\infty)}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\|DZ_{t_j}^{H,d} - \text{proj}_{E_{j-1}}(DZ_{t_j}^{H,d})\|_{L^2(\mathbb{R})} > 0 \right) &= \mathbb{E} \left[f(\|DZ_{t_j}^{H,d} - \text{proj}_{E_{j-1}}(DZ_{t_j}^{H,d})\|_{L^2(\mathbb{R})}^2) \right] \\ &\geq \mathbb{E} \left[f(\|DZ_1^{H,d}\|_{L^2([0,1])}) \right] \\ &= \mathbb{P} \left(\|DZ_1^{H,d}\|_{L^2([0,1])}^2 > 0 \right). \end{aligned}$$

on conclut alors, via le Lemme 23 que les deux termes du membre de droite de (18) sont presque sûrement positif, ce qui donne bien (17). $\square$

Nous n'explicitons pas ici la démonstration du Théorème 22. Il est toutefois intéressant que l'analogie avec le raisonnement suivi dans le cas du mouvement brownien fractionnaire se poursuit ici. En effet, pour établir la propriété de non-déterminisme local de ce processus, on a principalement exploité ses propriétés d'auto-similarité et de stationnarité des accroissements. La démonstration du Théorème 22 repose principalement sur une extension de ces propriétés au niveau de la dérivée de Malliavin.

Proposition 26. *Soit $Z^{H,d} = \{Z_t^{H,d}\}_{t \in \mathbb{R}}$ le processus d'Hermite d'ordre $d \geq 1$ et indice de Hurst $H \in (\frac{1}{2}, 1)$. La dérivée de Malliavin $Z^{H,d}$ hérite des propriétés d'auto-similarité et de stationnarité des accroissements de ce processus : pour tout $h \in \mathbb{R}$ et $c > 0$,*

$$\left(\langle DZ_{s+h}^{H,d} - DZ_h^{H,d}, DZ_{t+h}^{H,d} - DZ_h^{H,d} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \right)_{s,t \in \mathbb{R}} \stackrel{\text{d.f.d.}}{=} \left(\langle DZ_s^{H,d}, DZ_t^{H,d} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \right)_{s,t \in \mathbb{R}},$$

et

$$\left(\langle DZ_{cs}^{H,d}, DZ_{ct}^{H,d} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \right)_{s,t \in \mathbb{R}} \stackrel{\text{d.f.d.}}{=} c^{2H} \left(\langle DZ_s^{H,d}, DZ_t^{H,d} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \right)_{s,t \in \mathbb{R}}.$$

Finalement, maintenant que nous savons que les lois fini-dimensionnelles issues d'un processus de Hermite admettent une densité, on peut légitimement s'intéresser à la régularité de cette densité. Pour étudier cette propriété, on dispose à nouveau d'un critère puissant dans le contexte du calcul de Malliavin : un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)^T$ pour lequel il existe $p > 1$ tel que chaque $X_j \in \mathbb{D}^{1,p}$ admet une densité qui est dans la classe de Schwarz, des fonctions C^∞ dont toutes les dérivées sont à décroissance rapide, dès lors que

$$(\det \Gamma_{\mathbf{X}})^{-1} \in \bigcap_{p \geq 1} L^p(\Omega).$$

On dit alors que la matrice de Malliavin de $\mathbf{X}$ est non dégénérée. Au regard du Lemme 19 et du Théorème 22, si on souhaite exploiter notre nouvelle stratégie pour démontrer la propriété de non-dégénérescence pour le processus de Hermite, il nous faudrait établir la conjecture suivante.

Conjecture 27. *Soit $Z^{H,d} = \{Z_t^{H,d}\}_{t \in \mathbb{R}}$ le processus d'Hermite d'ordre $d \geq 1$ et indice de Hurst $H \in (\frac{1}{2}, 1)$. Pour tout $p \geq 1$, on a*

$$\mathbb{E} \left[\|DZ_1^{H,d}\|_{L^2([0,1])}^{-2p} \right] < \infty.$$

Malheureusement, il semble que résoudre cette conjecture est un problème particulièrement hardu. Cependant, dans le cadre du chaos d'ordre $d = 2$, où le processus de Hermite est mieux connu sous le nom de processus de Rosenblatt, nous sommes parvenus à démontrer cette conjecture.

Démonstration de la Conjecture 27 dans la cas $d = 2$. Nous savons que nous avons $Z_1 = I_2(L_1)$ pour une fonction symétrique $L_1 \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Pour tout $s \in [0, 1]$, on définit

$$g_s(\cdot) := L_1(s, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}), \quad Y_s := I_1(g_s).$$

Alors $(Y_s)_{s \in [0, 1]}$ est un processus gaussien centré du premier chaos de Wiener dont l'opérateur de covariance est donnée par

$$K(s, t) = \mathbb{E}[Y_s Y_t] = \langle g_s, g_t \rangle_{L^2(\mathbb{R})}, \quad s, t \in [0, 1].$$

Étape 1 : Décomposition spectrale de l'opérateur de covariance. Considérons l'opérateur d'Hilbert–Schmidt $T : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ défini par

$$(T\varphi)(s) := \int_0^1 K(s, t) \varphi(t) dt.$$

L'opérateur T est auto-adjoint, positif et compact. Ainsi, il existe une base orthonormée $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ of $L^2([0, 1])$ composée de vecteurs propres de T , associé à une suite de valeurs propres positives $(\lambda_j)_{j \geq 1}$ qui satisfait $\lambda_j \rightarrow 0$ as $j \rightarrow \infty$. En particulier,

$$K = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \varphi_j \otimes \varphi_j. \quad (19)$$

On vérifie facilement l'égalité $T = B^*B$, pour

$$B : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad Bf = \int_0^1 L_1(t, \cdot) f(t) dt,$$

et

$$B^* : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2([0, 1]), \quad B^*f = \int_{\mathbb{R}} L_1(s, \cdot) f(s) ds.$$

Zintout (2013) a montré que $\text{rang}(B|_{L^2(\mathbb{R})}) = \infty$. Ainsi, puisque

$$\text{rang}(B|_{L^2(\mathbb{R})}) \leq \text{rang}(B) = \text{rang}(B^*B) = \text{rang}(T),$$

on déduit que $\text{rang}(T) = \infty$. par conséquent, l'ensemble

$$S := \{j \geq 1 : \lambda_j > 0\}$$

est infini.

Étape 2 : Construction d'une famille gaussienne orthogonale. Pour tout $j \in S$, on définit

$$h_j := \int_0^1 \varphi_j(s) g_s ds \in L^2(\mathbb{R}), \quad \xi_j := I_1(h_j), \quad \zeta_j := \frac{\xi_j}{\sqrt{\lambda_j}}.$$

On calcule facilement, pour tout $j, k \in S$,

$$\mathbb{E}[\xi_j \xi_k] = \langle h_j, h_k \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_0^1 \int_0^1 \varphi_j(s) \varphi_k(t) K(s, t) ds dt = \langle \varphi_j, T \varphi_k \rangle_{L^2([0,1])} = \lambda_k \delta_{j,k}.$$

Ainsi, $(\xi_j)_{j \in S}$ sont des variables gaussiennes centrées indépendantes avec $\text{Var}(\xi_j) = \lambda_j$, et, par conséquent, $(\zeta_j)_{j \in S}$ sont i.i.d. selon une loi normale centrée réduite.

En exploitant le développement de Karhunen–Loève associé à K , on tire

$$Y_s = \sum_{j \in S} \sqrt{\lambda_j} \zeta_j \varphi_j(s), \quad s \in [0, 1],$$

avec convergence dans $L^2(\Omega \times [0, 1])$.

Étape 3 : Expression de la dérivée de Malliavin. Puisque $D_s Z_1 = 2 I_1(L_1(s, \cdot)) = 2 Y_s$, on obtient

$$D_s Z_1 = 2 \sum_{j \in S} \sqrt{\lambda_j} \zeta_j \varphi_j(s), \quad s \in [0, 1].$$

Par orthogonalité de (φ_j) dans $L^2([0, 1])$, on tire

$$\|DZ_1\|_{L^2([0,1])}^2 = \int_0^1 (D_s Z_1)^2 ds = 4 \sum_{j \in S} \lambda_j \zeta_j^2. \quad (20)$$

Étape 4 : Moments négatifs finis pour $\|DZ_1\|_{L^2([0,1])}$. Fixons $p \geq 1$, et notons $j_1, j_2, \dots$ l'énumération de S . Puisque S est infini et que chaque $\lambda_{j_k} > 0$, pour tout $N \geq 1$, on a

$$\|DZ_1\|_{L^2([0,1])}^2 \geq 4 \sum_{k=1}^N \lambda_{j_k} \zeta_{j_k}^2 \geq 4 \lambda_{j_N} \sum_{k=1}^N \zeta_{j_k}^2.$$

Par conséquent,

$$\|DZ_1\|_{L^2([0,1])}^{-2p} \leq (4 \lambda_{j_N})^{-p} \left(\sum_{k=1}^N \zeta_{j_k}^2 \right)^{-p}.$$

Puisque $\sum_{k=1}^N \zeta_{j_k}^2 \sim \chi^2(N)$, ces moments négatifs d'ordre p sont finis dès lors que $N > 2p$. Choisir $N := 2p + 1$ assure cette condition et donc

$$\mathbb{E} \left[\|DZ_1\|_{L^2([0,1])}^{-2p} \right] < \infty, \quad \forall p \geq 1.$$

□