Théorie de la Mesure – MATHF-3001

Céline Esser

Université Libre de Bruxelles, Année académique 2020–2021

Table des matières

1 Mesures **4**

1.1 σ-algèbres . . . 4

1.2 Mesures . . . 7

1.3 Classes de Dynkin et unicité . . . 10

1.4 Mesures extérieures . . . 12

1.5 Mesure de Lebesgue . . . 17

1.6 Complétion de mesures . . . 22

2 Applications mesurables et intégration **25**

2.1 Applications mesurables . . . 25

2.2 Propriétés qui ont lieu presque partout . . . 29

2.3 Intégration des applications simples positives . . . 30

2.4 Intégration des applications positives . . . 32

2.5 Intégration, cas général . . . 33

2.6 Limites et intégrales . . . 38

3 Théorème de Radon-Nikodym **41**

3.1 Densités . . . 41

3.2 Mesures absolument continues et singulières . . . 42

3.3 Décomposition de Lebesgue et Théorème de Radon-Nikodym . . . 44

4 Produit de mesures **53**

4.1 Construction . . . 53

4.2 Théorème de Fubini . . . 57

5 Convergence et espaces L^p **60**

5.1 Modes de convergence . . . 60

5.2 Définition des espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p . . . 63

5.3 Propriétés des espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p . . . 67

Références **72**

Introduction

L'intégrale de Riemann est une méthode simple qui, en analyse réelle, permet de définir l'intégrale d'une fonction sur un intervalle. Cette intégrale peut être interprétée comme l'aire sous la courbe du graphe de la fonction. Le procédé utilisé pour définir l'intégrale de Riemann d'une fonction f sur $[a, b]$ consiste à approcher f par des fonctions en escalier, pour lesquelles la définition de l'aire sous la courbe est aisée, en effectuant des subdivisions successives de l'intervalle $[a, b]$. Les fonctions pour lesquelles cette définition a un sens sont dites Riemann-intégrables.

Néanmoins, cette théorie s'est avérée insuffisante pour les besoins de l'analyse et des probabilités. D'une part, les fonctions Riemann-intégrables doivent vérifier des conditions de régularité qui sont souvent trop restrictives. D'autre part, les techniques de calcul qui résultent de l'intégrale de Riemann sont difficiles à appréhender et les théorèmes de passage à la limite, par exemple, sont compliqués à obtenir.

La théorie de Lebesgue permet d'élargir la classe des fonctions intégrables tout en disposant de techniques de calcul plus faciles. L'idée générale consiste à définir l'intégrale de fonctions simples, via une notion de mesure d'ensembles, ensuite d'étendre cette notion à toute fonction "mesurable".

Chapitre 1

Mesures

Afin de pouvoir définir l'intégrale de Lebesgue, il nous faut au préalable définir la notion de longueur dans $\mathbb{R}$, d'aire dans $\mathbb{R}^2$, de volume dans $\mathbb{R}^3$. Notre but est donc de préciser ce qui peut être considéré comme une "mesure" : on souhaite définir une mesure comme une fonction μ qui associe à un ensemble A un "poids" $\mu(A) \in [0, +\infty]$. Il semble naturel d'imposer au minimum que la mesure μ soit additive : si A et B sont des ensembles disjoints, la mesure de $A \cup B$ est égale à la somme des mesures de A et B. De plus, pour la notion de volume dans $\mathbb{R}^3$ par exemple, il semble également raisonnable d'imposer l'invariance par translation et rotation du volume. Néanmoins, il est en fait impossible de définir une telle application μ. Heureusement, il est possible de trouver une solution à ce problème : au lieu de définir une mesure comme une fonction sur toutes les parties d'un espace, on va la définir sur un sous-ensemble de parties, de manière à ne pas prendre en compte les ensembles posant problème.

1.1 σ-algèbres

Définition 1.1.1 Soit X un ensemble. Une collection $\mathcal{A}$ de sous-ensembles de X est une *σ-algèbre* (ou *tribu*) si

- $X \in \mathcal{A}$,
- pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $A^c \in \mathcal{A}$,
- pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Dans ce cas, on dit que $(X, \mathcal{A})$ est un *espace mesurable*.

Evidemment, les propriétés (a) et (b) impliquent que $\emptyset \in \mathcal{A}$. Par conséquent, en prenant $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \emptyset$ dans (c), on obtient également que $\mathcal{A}$ est stable par unions finies. Enfin, puisque $\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$, les propriétés (b) et (c) impliquent que pour toute suite $(A_n)_n$ (éventuellement finie) d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\bigcap_n A_i \in \mathcal{A}$. Enfin, si $A, B \in \mathcal{A}$, alors $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$.

Remarque 1.1.2 Rappelons que si X est un ensemble, alors une collection $\mathcal{A}$ de sous-ensembles de X est une algèbre si

- $X \in \mathcal{A}$,
- pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $A^c \in \mathcal{A}$,
- pour toute suite finie $A_1, \ldots, A_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{A}$.

Exemple 1.1.3

- La σ-algèbre triviale sur X est $\{\emptyset, X\}$.

— La σ-algèbre discrète sur X est $\mathcal{P}(X)$.
— Si $A \subseteq X$, alors $\{\emptyset, A, A^c, X\}$ est une σ-algèbre.
— Si X est infini, la collection de tous les sous-ensembles A de X tels que A est dénombrable ou A^c est dénombrable est une σ-algèbre. Par contre, la collection de tous les sous-ensembles A de X tels que A est fini ou A^c est fini n'est pas une σ-algèbre (mais il s'agit d'une algèbre).
— La collection de tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ pouvant s'écrire comme une union finie d'intervalles de la forme $]a, b]$, $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$ n'est pas une σ-algèbre (en effet, les intervalles ouverts $]a, b[$ sont des unions dénombrables d'ensembles de $\mathcal{A}$ mais n'appartiennent pas à $\mathcal{A}$).

Au vu du dernier exemple, on pourrait s'intéresser aux σ-algèbres sur $\mathbb{R}$ contenant les intervalles $]a, b]$. De manière plus générale, on considère une collection $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de X : il existe bien sûr une σ-algèbre contenant $\mathcal{F}$ (à savoir $\mathcal{P}(X)$), et le résultat suivant permet de construire la plus petite σ-algèbre contenant $\mathcal{F}$.

Proposition 1.1.4 *Toute intersection non-vide de σ-algèbres sur X est une σ-algèbre sur X.*

Démonstration : Soit $\mathcal{C}$ une collection non-vide de σ-algèbres sur X. Notons $\mathcal{A}$ l'intersection de ces σ-algèbres :
— $X \in \mathcal{A}$ puisque X appartient à toutes les σ-algèbres de $\mathcal{C}$.
— Si $A \in \mathcal{A}$, alors A appartient à toutes les σ-algèbres de $\mathcal{C}$. Toutes ces σ-algèbres contiennent donc A^c, ce qui implique que $A^c \in \mathcal{A}$.
— Enfin, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ appartient à chaque σ-algèbre de $\mathcal{C}$, et donc à $\mathcal{A}$.

■

Mentionnons néanmoins que l'union de σ-algèbres n'est pas nécessairement une σ-algèbre. Il suffit par exemple de considérer les σ-algèbres $\{\emptyset, A, A^c, X\}$ et $\{\emptyset, B, B^c, X\}$ pour $A, B \subseteq X, A \neq B$, dont l'union donne la famille $\{\emptyset, A, A^c, B, B^c, X\}$.

Corollaire 1.1.5 *Si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, il existe une plus petite (au sens de l'inclusion) σ-algèbre sur X qui contient $\mathcal{F}$. On l'appelle la* σ-algèbre engendrée par $\mathcal{F}$ *et on la note $\sigma(\mathcal{F})$.*

Démonstration : Soit $\mathcal{C}$ la collection non-vide de toutes les σ-algèbres sur X contenant $\mathcal{F}$. Par la proposition précédente, l'intersection $\sigma(\mathcal{F})$ de toutes les σ-algèbres de $\mathcal{C}$ est une σ-algèbre. Bien sûr, $\sigma(\mathcal{F})$ contient $\mathcal{F}$. De plus, si $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre sur X qui contient $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ et $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$. ■

Nous allons à présent utiliser le corollaire précédent pour construire une famille importante de σ-algèbres.

Définition 1.1.6 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. La *σ-algèbre de Borel* $\mathcal{B}(X, \mathcal{T})$ de $(X, \mathcal{T})$ est la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{T}$. Un ensemble de $\mathcal{B}(X, \mathcal{T})$ est appelé un *ensemble borélien.*

En particulier, les fermés de $(X, \mathcal{T})$ sont des ensembles boréliens. De plus, les unions dénombrables d'ensembles fermés sont des boréliens : on les appelle les ensembles F_σ (F pour "Fermé" et σ pour le mot allemand "Summe"). De même, les intersections dénombrables d'ensembles ouverts de $(X, \mathcal{T})$ sont des boréliens : on dit que ce sont des ensembles G_δ (G pour le mot allemand "Gebiet" et δ pour "Durchschnitt").

Définition 1.1.7 Soit $d \geq 1$. Si $\mathcal{T}$ est la topologie euclidienne sur $\mathbb{R}^d$, on pose

$$\mathbb{B}^d = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d, \mathcal{T}).$$

Les éléments de $\mathbb{B}^d$ sont appelés les *ensembles boréliens* de $\mathbb{R}^d$.

Si $d = 1$, la σ-algèbre de Borel de $\mathbb{R}$ sera simplement notée $\mathbb{B}$.

Proposition 1.1.8 *La σ-algèbre de Borel $\mathbb{B}$ sur $\mathbb{R}$ est engendrée par chacune de ces collections d'ensembles :*

1. *la collection de tous les ensembles fermés de $\mathbb{R}$,*
2. *la collection de tous les intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $]-\infty, b]$,*
3. *la collection de tous les intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $]a, b]$.*

Démonstration : Soient $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ les σ-algèbres générées par les collections des items 1, 2 et 3 respectivement. On va montrer que

$$\mathcal{B}_3 \subseteq \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}_1 \subseteq \mathbb{B} \subseteq \mathcal{B}_3,$$

d'où l'égalité entre toutes ces σ-algèbres. Pour la première inclusion $\mathcal{B}_3 \subseteq \mathcal{B}_2$, il suffit de remarquer que

$$]a, b] =]-\infty, b] \cap]-\infty, a]^c.$$

Comme un ensemble de la forme $]-\infty, b]$ est un fermé, on a $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}_1$. Bien sûr, puisque $\mathbb{B}$ contient les ensembles ouverts de $\mathbb{R}$, il contient aussi les ensembles fermés, donc $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathbb{B}$. Pour conclure, il reste à montrer que tout ensemble ouvert U de $\mathbb{R}$ appartient à $\mathcal{B}_3$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on a

$$U = \bigcup_{a,b \in \mathbb{Q},\,]a,b] \subseteq U}]a, b]$$

et donc $U \in \mathcal{B}_3$. ■

Ce résultat s'étend aisément au cas d'une dimension supérieure.

Proposition 1.1.9 *La σ-algèbre de Borel $\mathbb{B}^d$ sur $\mathbb{R}^d$ est engendrée par chacune de ces collections d'ensembles :*

1. *la collection de tous les ensembles fermés de $\mathbb{R}^d$,*
2. *la collection de tous les demi-espaces de $\mathbb{R}^d$ de la forme $\prod_{k=1}^d]-\infty, b_k]$,*
3. *la collection de tous les rectangles semi-ouverts de $\mathbb{R}^d$ de la forme $\prod_{k=1}^d]a_k, b_k]$.*

Les applications qui vont particulièrement nous intéresser lorsque nous introduirons la notion d'intégrale sont celles qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. Pour cela, rappelons que la topologie de $\overline{\mathbb{R}}$ est la topologie dont une base d'ouverts est donnée par les intervalles de la forme $]a, +\infty]$, $[-\infty, b[$ et $]a, b[$ où $a, b \in \mathbb{R}$. On ajoute donc aux ouverts de $\mathbb{R}$ les voisinages de $\pm\infty$. En particulier, la topologie induite par $\overline{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}$ est la topologie euclidienne de $\mathbb{R}$.

Lemme 1.1.10 *On a* $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \big\{B \cup C : B \in \mathbb{B}, C \subseteq \{-\infty, +\infty\}\big\}$.

Démonstration : Notons $\mathcal{A} = \big\{B \cup C : B \in \mathbb{B}, C \subseteq \{-\infty, +\infty\}\big\}$. Il est facile de vérifier que $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre. Soit $B \cup C$ un élément de $\mathcal{A}$. Comme les ouverts de $\mathbb{R}$ sont des ouverts de $\overline{\mathbb{R}}$, B est également un élément de $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. De plus, puisque

$$\{-\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} [-\infty, -n[\,, \quad \{+\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0}]n, +\infty],$$

l'ensemble $B \cup C$ appartient bien à la σ-algèbre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. On en tire que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Réciproquement, si $\omega \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ est ouvert, alors on peut écrire

$$\omega = \big(\omega \cap \mathbb{R}\big) \cup \big(\{-\infty, +\infty\} \cap \omega\big)$$

où $\omega \cap \mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Donc ω est bien un élément de $\mathcal{A}$. Par conséquent, $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{A}$. ■

Proposition 1.1.11 *La σ-algèbre de Borel $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ est engendrée par les chacune de ces collections d'ensembles :*

1. *la collection de tous les ensembles de la forme* $[-\infty, b]$,
2. *la collection de tous les ensembles de la forme* $[-\infty, b[$,
3. *la collection de tous les ensembles de la forme* $[a, +\infty]$,
4. *la collection de tous les ensembles de la forme* $]a, +\infty]$.

Démonstration : Il suffit de démontrer les deux premiers points, les deux suivants s'obtiennent par passage au complémentaire. Notons $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ les σ-algèbres engendrées par les collections données en 1 et 2 respectivement. On va montrer que $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{B}_1$. Puisque les ensembles $[-\infty, b[$ sont ouverts dans $\overline{\mathbb{R}}$, on a $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. De plus, puisque

$$[-\infty, b] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} [-\infty, b + 1/n[\in \mathcal{B}_2,$$

on a $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$. Il reste à montrer que $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{B}_1$. Par le Lemme 1.1.10, on sait que tout élément de $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ a la forme $B \cup C$ où B est un borélien de $\mathbb{R}$ et $C \subseteq \{-\infty, +\infty\}$. On a

$$\{-\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} [-\infty, -n] \quad \text{et} \quad \{+\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0}]n, +\infty] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} [-\infty, n]^c,$$

donc $C \in \mathcal{B}_1$. On en tire que

$$]-\infty, b] = [-\infty, b] \setminus \{-\infty\} \in \mathcal{B}_1$$

et donc $\mathbb{B} \subseteq \mathcal{B}_1$ par la Proposition 1.1.8. Ainsi, $B \in \mathcal{B}_1$ et $B \cup C \in \mathcal{B}_1$. ■

1.2 Mesures

Introduisons à présent la notion de mesure, qui sera l'élément central de ce cours.

Définition 1.2.1 Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une application

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$$

est une *mesure* sur $(X, \mathcal{A})$ si

— $\mu(\emptyset) = 0$,

— μ est σ-additif : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints, alors

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

On dit que le triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un *espace mesuré* ou *espace de mesure*.

Bien sûr, la σ-additivité de μ implique que μ est également finiment additive, c'est-à-dire

$$\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n)$$

pour tous $n \in \mathbb{N}_0$ et $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ deux à deux disjoints.

Exemple 1.2.2 Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable.

— Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on pose

$$\mu(A) = \begin{cases} \#A & \text{si } A \text{ est un ensemble fini} \\ +\infty & \text{si } A \text{ est un ensemble infini.} \end{cases}$$

Alors μ est une mesure, appelée *mesure de comptage*.

— Si X est non-vide, on considère $x \in X$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on pose

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors δ_x est une mesure, appelée *mesure de Dirac* en x.

— Si μ est une mesure telle que $\mu(X) = 1$, on parle de *mesure de probabilité*. Le trilplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est alors appelé un espace probabilisé, X est l'univers et les éléments de $\mathcal{A}$ les événements.

— Si $X = \mathbb{R}$ et $\mathcal{A} = \mathbb{B}$, nous construirons une mesure $\mathcal{L}$ qui assigne à tout intervalle de $\mathbb{R}$ sa longueur. Cette mesure est appelée la *mesure de Lebesgue*.

Présentons à présent les propriétés principales des mesures.

Proposition 1.2.3 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Considérons $A, B \in \mathcal{A}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.*

1. *Monotonie : si $A \subseteq B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$. Si de plus $A \subseteq B$ et $\mu(A) < +\infty$, alors on a $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*
2. *Sous-additivité dénombrable : on a*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

3. *Continuité à gauche : si la suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante, alors*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

4. *Continuité à droite : si la suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et s'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *pour lequel* $\mu(A_{n_0}) < +\infty$*, alors*

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

Démonstration : 1. Puisque les ensembles A et $B \setminus A$ sont disjoints et puisque $B = A \cup B \setminus A$, on a

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

Si $\mu(A) < +\infty$, alors cela entraîne aussi que

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

2. Posons $B_0 = A_0$ et pour tout $n \geq 1$, $B_n = A_n \setminus \bigcup_{j=0}^{n-1} A_j$. Alors chaque B_n appartient à $\mathcal{A}$ et $B_n \subseteq A_n$. De plus, ces ensembles B_n sont deux à deux disjoints et donc

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

3. Soit $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Posons également $B_0 = A_0$ et pour tout $n \geq 1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Les ensembles construits appartiennent à $\mathcal{A}$ et sont deux à deux disjoints. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A_n = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ et donc $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$. On en tire que

$$\mu(A_n) = \sum_{j=0}^{n} \mu(B_j) \quad \text{et} \quad \mu(A) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mu(B_j),$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mu(B_j) = \mu(A).$$

4. On peut supposer que $n_0 = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $B_n = A_1 \setminus A_n$. Les éléments ainsi construits appartiennent à $\mathcal{A}$ et la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Vu le point 3, on a

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

D'autre part, on a

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

et la conclusion s'ensuit. ∎

Remarque 1.2.4 Notons que l'hypothèse $\mu(A_{n_0}) < +\infty$ présente dans le point 4 ne peut pas être enlevée. En effet, considérons l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, où μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \{m \in \mathbb{N} : m \geq n\}$. Alors, d'une part, on a $\mu(A_n) = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, puisque $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$, on a $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 0$.

Proposition 1.2.5 (Lemme de Borel-Cantelli) *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$. Si*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < +\infty,$$

alors

$$\mu\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = 0,$$

où $\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$.

Démonstration : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \bigcup_{k\geq n} A_k$. Alors $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'élements de $\mathcal{A}$. De plus

$$\mu(B_0) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < +\infty$$

et la continuité à droite de la mesure μ donne

$$\mu\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) \leq \lim_{n\to+\infty} \sum_{k\geq n} \mu(A_k) = 0.$$

■

Ce résultat est un outil de base de la théorie des probabilités. Dans ce contexte, il se lit de la manière suivante : si la série des probabilités d'une suite d'événements converge, alors la probabilité qu'une infinité d'entre eux se réalise simultanément est nulle.

1.3 Classes de Dynkin et unicité

Les classes de Dynkin fournissent un outil efficace pour tester l'égalité de mesure.

Définition 1.3.1 Soit X un ensemble. Une collection $\mathcal{D}$ de parties de X est une *classe de Dynkin* si
- $X \in \mathcal{D}$,
- pour tout $A \in \mathcal{D}$, on a $A^c \in \mathcal{D}$,
- pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}$ deux à deux disjoints, on a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

Comme dans le cas de σ-algèbres, il est aisé de vérifier que l'intersection de classes de Dynkin est encore une classe de Dynkin. On peut donc définir la plus petite classe de Dynkin qui contient une collection $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de X, définie par l'intersection de toutes les classes de Dynkin qui contiennent $\mathcal{F}$.

Définition 1.3.2 Si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, il existe une plus petite (au sens de l'inclusion) classe de Dynkin sur X qui contient $\mathcal{F}$. On l'appelle la *classe de Dynkin engendrée par* $\mathcal{F}$ et on la note $\lambda(\mathcal{F})$.

Bien sûr, toute σ-algèbre est une classe de Dynkin. Réciproquement, on a le résultat suivant.

Proposition 1.3.3 *Toute classe de Dynkin stable par intersection finie est une σ-algèbre.*

Démonstration : Soit $\mathcal{D}$ une classe de Dynkin sur un ensemble X stable par intersection finie. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{D}$, alors en posant

$$B_0 = A_0 \quad \text{et} \quad B_{n+1} = A_{n+1} \setminus \bigcup_{j=0}^{n} A_j = A_{n+1} \cap \bigcap_{j=0}^{n} A_j^c,$$

on obtient une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}$ deux à deux disjoints dont l'union est égale à $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Par conséquent,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{D},$$

ce qui suffit. ■

Proposition 1.3.4 *Si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ est stable par intersection finie, alors $\lambda(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F})$.*

Démonstration : Comme toute σ-algèbre est une classe de Dynkin, on a $\lambda(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$. Montrons l'autre inclusion. Pour cela, il suffit de montrer que $\lambda(\mathcal{F})$ est stable par intersection finie : ce sera alors une σ-algèbre qui contient $\mathcal{F}$, donc aussi $\sigma(\mathcal{F})$. Pour tout $B \in \lambda(\mathcal{F})$, on pose

$$\mathcal{D}_B = \big\{A \in \lambda(\mathcal{F}) : A \cap B \in \lambda(\mathcal{F})\big\}.$$

Il est clair que $\mathcal{D}_B$ contient X et est stable par union disjointe. De plus, si $A \in \mathcal{D}_B$, on a

$$A^c \cap B = (A \cap B)^c \cap B = \big((A \cap B) \cup B^c\big)^c \in \lambda(\mathcal{F}).$$

Si $B \in \mathcal{F}$, alors $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}_B$ puisque $\mathcal{F}$ est stable par intersection finie. Ainsi, $\lambda(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{D}_B$. Par conséquent, si $A \in \lambda(\mathcal{F})$ et si $B \in \mathcal{F}$, alors $A \cap B \in \lambda(\mathcal{F})$, c'est-à-dire $B \in \mathcal{D}_A$. On en tire que pour tout $A \in \lambda(\mathcal{F})$, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}_A$, d'où $\lambda(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{D}_A$. Au final, on a donc que pour tous $A, B \in \lambda(\mathcal{F})$, $A \cap B \in \lambda(\mathcal{F})$, d'où la conclusion. ■

Les classes de Dynkin permettent d'obtenir des résultats d'unicité des mesures.

Lemme 1.3.5 (de la classe monotone) *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soit $\mathcal{F}$ une collection d'ensembles de X stable par intersection finie telle que $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{A}$. Si μ_1 et μ_2 sont deux mesures finies sur $\mathcal{A}$ qui sont égales sur $\mathcal{F}$, alors $\mu_1 = \mu_2$.*

Démonstration : Soit $\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{A} : \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$. Il est facile de vérifier que $\mathcal{D}$ est une classe de Dynkin. De plus, $\mathcal{F}$ est stable par intersection finie par hypothèse. Par la Proposition 1.3.4, on trouve donc que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{D}$, d'où la conclusion. ■

Définition 1.3.6 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$. On dit que la mesure μ est *σ-finie sur $\mathcal{C}$* s'il existe une suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles de $\mathcal{C}$ telle que

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \quad \text{et} \quad \mu(A_n) < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si $\mathcal{C} = \mathcal{A}$, on dit simplement que μ est *σ-finie*. On dira également que l'espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est *σ-fini*.

Remarquons qu'un espace est σ-fini si et seulement si on peut trouver une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$ tels que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ et $\mu(X_n) < +\infty$. En effet, il suffit de poser $X_n = A_n \setminus \bigcup_{m<n} A_m$.

Proposition 1.3.7 *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soit $\mathcal{F}$ une collection d'ensembles de X stable par intersection finie telle que $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{A}$. Si μ_1 et μ_2 sont deux mesures σ-finies sur $\mathcal{F}$ qui sont égales sur $\mathcal{F}$, alors $\mu_1 = \mu_2$.*

Démonstration : Par hypothèse, nous pouvons considérer une suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles de $\mathcal{F}$ telle que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\mu_1(A_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $A \in \mathcal{A}$, on pose $\mu_{1,n}(A) = \mu_1(A \cap A_n)$ et $\mu_{2,n}(A) = \mu_2(A \cap A_n)$. Par le Lemme 1.3.5, on sait que $\mu_{1,n} = \mu_{2,n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque

$$\mu_1(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu_{1,n}(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu_{2,n}(A) = \mu_2(A),$$

on obtient la conclusion. ∎

1.4 Mesures extérieures

Le but de cette section est de développer un outil classique pour la construction de mesures. Nous l'appliquerons dans la section suivante pour construire la mesure de Lebesgue.

Définition 1.4.1 Soit X un ensemble. Une application

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$$

est une *mesure extérieure* sur X si
- $\mu^*(\emptyset) = 0$,
- μ^* est monotone : si $A \subseteq B$, alors $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$,
- μ^* est dénombrablement sous-additif : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de sous-ensembles de X, alors
$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n).$$

Exemple 1.4.2 Soit X un ensemble.
- On pose $\mu^*(A) = 1$ si $A \neq \emptyset$ et $\mu^*(\emptyset) = 0$. Alors μ^* est une mesure extérieure.
- On pose $\mu^*(A) = 0$ si A est dénombrable et $\mu^*(A) = 1$ si A est non-dénombrable. Alors μ^* est une mesure extérieure.

— On pose $\mu^*(A) = 0$ si A est fini et $\mu^*(A) = 1$ si A est infini. Si X est infini, μ^* n'est pas une mesure extérieure.

La mesure extérieure qui va principalement nous intéresser est la mesure extérieure de Lebesgue. Nous la définirons dans la section suivante. Introduisons maintenant une classe d'ensembles importants pour les mesures extérieures.

Définition 1.4.3 Soient X un ensemble et μ^* une mesure extérieure sur X. Un ensemble $M \subseteq X$ est *μ^*-mesurable* si

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A \cap M^c)$$

pour tout $A \subseteq X$. On note $\mathcal{M}_{\mu^*}$ la collection des ensembles μ^*-mesurables de X.

Par conséquent, un ensemble μ^*-mesurable décompose chaque sous-ensemble de X en deux parties sur lesquelles la mesure extérieure est additive.

Remarque 1.4.4 Puisque μ^* est une mesure extérieure, on a toujours

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A \cap M^c).$$

Ainsi, pour montrer que M est μ^*-mesurable, il suffit de montrer que pour tout $A \subseteq X$, on a

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A \cap M^c).$$

De plus, il suffit évidemment de le vérifier pour les sous-ensembles A tels que $\mu^*(A) < +\infty$.

Proposition 1.4.5 *Soient X un ensemble, μ^* une mesure extérieure sur X et $M \subseteq X$.*

1. *Si M est μ^*-mesurable, alors M^c est μ^*-mesurable.*
2. *Si $\mu^*(M) = 0$ ou $\mu^*(M^c) = 0$, alors M est μ^*-mesurable.*
3. *Les ensembles X et $\emptyset$ sont μ^*-mesurables.*

Démonstration : Le premier point se déduit directement de la Définition 1.4.3. Pour le deuxième point, supposons que $\mu^*(M) = 0$ ou $\mu^*(M^c) = 0$. La Remarque 1.4.4 implique qu'il suffit de montrer que

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A \cap M^c)$$

pour tout $A \subseteq X$. Par monotonie de μ^*, on sait qu'un des termes du membre de droite est nul, et que l'autre vaut au plus $\mu^*(A)$. D'où la conclusion. Le troisième point est une conséquence directe du deuxième. ■

Proposition 1.4.6 *Soient X un ensemble, μ^* une mesure extérieure sur X et $M \subseteq X$. Alors M est μ^*-mesurable si et seulement si*

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

pour tous $A \subseteq M$ et $B \subseteq M^c$.

Démonstration : $\Rightarrow$: Soient $A \subseteq M$ et $B \subseteq M^c$. Alors

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*\big((A \cup B) \cap M\big) + \mu^*\big((A \cup B) \cap M^c\big) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

$\Leftarrow$: Soit $C \subseteq X$. En considérant les ensembles $A = C \cap M$ et $B = C \cap M^c$, on obtient directement que

$$\mu^*(C) = \mu^*(C \cap M) + \mu^*(C \cap M^c).$$

$\blacksquare$

Proposition 1.4.7 *Soient X un ensemble et μ^* une mesure extérieure sur X. Si M et N sont des ensembles μ^*-mesurables, alors $M \setminus N$ est μ^*-mesurable.*

Démonstration : Considérons $A \subseteq M \setminus N$ et $B \subseteq (M \setminus N)^c = M^c \cup N$. Comme N est μ^*-mesurable, on a

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A) + \mu^*(B \cap N) + \mu^*(B \cap N^c).$$

De plus, puisque M est μ^*-mesurable et puisque $A \subseteq M$ et $B \cap N^c \subseteq M^c$, il vient

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) \quad = \quad \mu^*(B \cap N) + \mu^*\big(A \cup (B \cap N^c)\big).$$

Enfin, comme N est μ^*-mesurable et puisque $B \cap N \subseteq N$ et $A \cup (B \cap N^c) \subseteq N^c$, on obtient

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*\big((B \cap N) \cup A \cup (B \cap N^c)\big) = \mu^*(A \cup B),$$

d'où la conclusion. $\blacksquare$

Montrons à présent que $\mathcal{M}_{\mu^*}$ est stable par union dénombrable d'ensembles disjoints.

Proposition 1.4.8 *Soient X un ensemble et μ^* une mesure extérieure sur X. Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles μ^*-mesurables deux à deux disjoints, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ est μ^*-mesurable et*

$$\mu^*(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A \cap M_n) + \mu^*\left(A \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n^c\right)$$

pour tout $A \subseteq X$.

Démonstration : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \bigcup_{k\leq n} M_k$. Montrons par récurrence que A_n est μ^*-mesurable et que

$$\mu^*(A) = \sum_{k\leq n} \mu^*(A \cap M_k) + \mu^*\left(A \cap \bigcap_{k\leq n} M_k^c\right)$$

pour tout $A \subseteq X$. Le cas de base est clair car $A_0 = M_0$ est μ^*-mesurable. Supposons à présent le résultat vérifié pour tout $m \leq n$ et montrons-le pour $n+1$. Soit $A \subseteq X$. On a

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap M_{n+1}) + \mu^*(A \cap M_{n+1}^c) \\
&= \mu^*(A \cap M_{n+1}) + \mu^*(A \cap M_{n+1}^c \cap A_n) + \mu^*(A \cap M_{n+1}^c \cap A_n^c) \\
&= \mu^*(A \cap M_{n+1}) + \mu^*(A \cap M_{n+1}^c \cap A_n) + \mu^*(A \cap A_{n+1}^c)
\end{aligned}$$

puisque M_{n+1} et A_n sont mesurables et puisque $A_{n+1} = M_{n+1} \cup A_n$. Comme A_n et M_{n+1} sont des ensembles disjoints, on a $A_n \subseteq M_{n+1}^c$ et il vient

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap M_{n+1}) + \mu^*(A \cap A_n) + \mu^*(A \cap A_{n+1}^c).$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence avec $A \cap A_n$, il vient

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap A_n) &= \sum_{k \leq n} \mu^*(A \cap A_n \cap M_k) + \mu^*\left(A \cap A_n \cap \bigcap_{k \leq n} M_k^c\right) \\ &= \sum_{k \leq n} \mu^*(A \cap M_k) \end{aligned}$$

puisque $A_n \cap M_k = M_k$ et $\bigcap_{k \leq n} M_k^c = A_n^c$. On obtient donc

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap M_{n+1}) + \sum_{k \leq n} \mu^*(A \cap M_k) + \mu^*(A \cap A_{n+1}^c) \\ &= \sum_{k \leq n+1} \mu^*(A \cap M_k) + \mu^*\left(A \cap \bigcap_{k \leq n+1} M_k^c\right), \end{aligned}$$

d'où la formule souhaitée. Montrons à présent que A_{n+1} est μ^*-mesurable. On a

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \sum_{k \leq n+1} \mu^*(A \cap M_k) + \mu^*(A \cap A_{n+1}^c) \\ &\geq \mu^*(A \cap A_{n+1}) + \mu^*(A \cap A_{n+1}^c) \end{aligned}$$

en utilisant la sous-additivité dénombrable de μ^*.

Pour conclure dans le cas infini, remarquons que $A_n \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k$. On en tire que $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} M_k^c \subseteq A_n^c$ et donc par monotonie

$$\mu^*(A) \geq \sum_{k \leq n} \mu^*(A \cap M_k) + \mu^*\left(A \cap \bigcap_{k \in \mathbb{N}} M_k^c\right).$$

Puisque cette relation est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en tire que

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &\geq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu^*(A \cap M_k) + \mu^*\left(A \cap \bigcap_{k \in \mathbb{N}} M_k^c\right) \\ &\geq \mu^*\left(A \cap \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k\right) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k\right)^c\right) \end{aligned}$$

par sous-additivité dénombrable de μ^*. Ceci montre que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k$ est μ^*-mesurable. ■

Le théorème suivant permet de construire une mesure à partir d'une mesure extérieure.

Théorème 1.4.9 *Soient X un ensemble et μ^* une mesure extérieure sur X.*

1. *La collection $\mathcal{M}_{\mu^*}$ des ensembles μ^*-mesurables est une σ-algèbre.*
2. *La restriction de μ^* à $\mathcal{M}_{\mu^*}$ est une mesure sur $(X, \mathcal{M}_{\mu^*})$. On la note μ.*

Démonstration : 1. Par la Proposition 1.4.6, il suffit de montrer que si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles μ^*-mesurables, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ est μ^*-mesurable. On définit de proche en proche $A_0 = M_0$ et $A_n = M_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j$ pour tout $n \geq 1$. Ces ensembles sont deux à deux disjoints et sont μ^*-mesurables par les Propositions 1.4.7 et 1.4.8. On conclut en remarquant que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$$

et en utilisant la Proposition 1.4.8.

2. Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles μ^*-mesurables deux à deux disjoints, la Proposition 1.4.8 donne

$$\mu^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k \cap M_n\right) + \mu^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k \cap \bigcap_{k\in\mathbb{N}} M_k^c\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(M_k)$$

d'où la conclusion. ■

Le problème de cette construction est qu'en général, on ne sait pas quels sont les ensembles μ^*-mesurables. Le résultat suivant permet de garantir que les boréliens (au moins) sont μ^*-mesurables.

Proposition 1.4.10 *Soient (X, d) un espace métrique et μ^* une mesure extérieure sur X. Si pour tous $A, B \subseteq X$ tels que $d(A, B) > 0$ on a $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$, alors les boréliens de X sont μ^*-mesurables.*

Démonstration : Nous allons montrer que tout fermé de (X, d) est μ^*-mesurable. Comme ces ensembles engendrent la σ-algèbre de Borel $\mathcal{B}(X)$ et puisque la collection $\mathcal{M}_{\mu^*}$ des ensembles μ^*-mesurables est une σ-algèbre, on en déduira que $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$.

Soit F un sous-ensemble fermé de X et $A \subseteq X$. Montrons que

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap F^c).$$

Bien sûr, on peut supposer que $\mu^*(A) < +\infty$ et que $A \cap F \neq \emptyset$, $A \cap F^c \neq \emptyset$. Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, on considère l'ensemble fermé

$$F_k = \left\{x \in X : d(x, F) \leq \frac{1}{k}\right\}.$$

On a

$$d(A \cap F, A \cap F_k^c) \geq 1/k > 0$$

et $(A \cap F) \cup (A \cap F_k^c) \subseteq A$. Par hypothèse et par monotonie de μ^*, on en tire que

$$\mu^*(A) \geq \mu^*\big((A \cap F) \cup (A \cap F_k^c)\big) = \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap F_k^c).$$

Pour conclure, il suffit donc de montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \mu^*(A\cap F_k^c) \geq \mu^*(A\cap F^c).$$

Pour cela, on considère pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, l'ensemble

$$B_k = A \cap \left\{ x \in X : \frac{1}{k+1} < d(x,F) \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Alors

$$A\cap F^c = \big(A\cap F_k^c\big) \cup \bigcup_{j=k}^{+\infty} B_j$$

puisque $x \in F^c$ si et seulement si $d(x,F) > 0$. Par sous-additivité dénombrable de μ^*, il vient

$$\mu^*(A\cap F^c) \leq \mu^*\big(A\cap F_k^c\big) + \sum_{j=k}^{+\infty} \mu^*(B_j).$$

Pour conclure, il suffit à présent de montrer que la série de terme principal $\mu^*(B_j)$ converge. Remarquons que si $j \neq k$, alors $d(B_{2j}, B_{2k}) > 0$ et par hypothèse, on obtient

$$\sum_{k=1}^{K} \mu^*(B_{2k}) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{K} B_{2k}\right) \leq \mu^*(A).$$

De même,

$$\sum_{k=1}^{K} \mu^*(B_{2k-1}) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{K} B_{2k-1}\right) \leq \mu^*(A)$$

et on en tire donc que

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \mu^*(B_j) \leq 2\mu^*(A),$$

d'où la conclusion. ■

1.5 Mesure de Lebesgue

Nous allons définir la mesure de Lebesgue à partir des intervalles compacts (i.e. des rectangles fermés) de $\mathbb{R}^d$

$$I = \prod_{k=1}^{d} [a_k, b_k], \quad a_k < b_k$$

et de leur volume

$$\mathrm{Vol}(I) = \prod_{k=1}^{d} (b_k - a_k).$$

Définition 1.5.1 Si $A \subseteq \mathbb{R}^d$, on note $\mathcal{C}_A$ la collection de toutes les suites $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles compacts de $\mathbb{R}^d$ tels que $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$. La *mesure extérieure de Lebesgue* est définie par

$$\mathcal{L}_d^*(A) = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}(I_n) : (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_A\right\}.$$

Remarque 1.5.2 Lorsque le contexte est clair, on écrira $\mathcal{L}^*$ à la place de $\mathcal{L}_d^*$.

Proposition 1.5.3 *La mesure extérieure de Lebesgue $\mathcal{L}_d^*$ est une mesure extérieure sur $\mathbb{R}^d$.*

Démonstration : Pour tout $\varepsilon > 0$, soit I_ε un intervalle compact de $\mathbb{R}^d$ de volume plus petit que ε. Puisque $\emptyset \subseteq I_\varepsilon$, on a $\mathcal{L}_d^*(\emptyset) \leq \varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en tire que $\mathcal{L}_d^*(\emptyset) = 0$.

Si $A \subseteq B$ et si $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_B$, alors $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_A$ d'où $\mathcal{L}_d^*(A) \leq \mathcal{L}_d^*(B)$.

Enfin, soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles de $\mathbb{R}^d$. Montrons que

$$\mathcal{L}_d^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_d^*(A_n).$$

Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_d^*(A_n) = +\infty$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, soit $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $(I_{n,j})_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_{A_n}$ tel que

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}(I_{n,j}) \leq \mathcal{L}_d^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_{n,j}$, d'où

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_d^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}(I_{n,j}) \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_d^*(A_n) + \varepsilon \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_d^*(A_n) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient la conclusion. ∎

Proposition 1.5.4 *Pour tout intervalle compact $I \subseteq \mathbb{R}^d$, $\mathcal{L}_d^*(I) = \mathrm{Vol}(I)$.*

Démonstration : Puisque $I \in \mathcal{C}_I$, on a $\mathcal{L}_d^*(I) \leq \mathrm{Vol}(I)$. Soit $\varepsilon > 0$. Considérons une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_I$ telle que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}(I_n) \leq \mathcal{L}_d^*(I) + \varepsilon.$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on choisit un intervalle J_n tel que $I_n \subseteq J_n^\circ$ et $\mathrm{Vol}(J_n) \leq \mathrm{Vol}(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Alors $I \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n^\circ$ et comme I est compact, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $I \subseteq \bigcup_{n\leq N} J_n^\circ \subseteq \bigcup_{n\leq N} J_n$. On obtient alors

$$\mathrm{Vol}(I) \leq \sum_{n=0}^{N} \mathrm{Vol}(J_n) \leq \sum_{n=0}^{N} \left(\mathrm{Vol}(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) \leq \mathcal{L}_d^*(I) + 2\varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient la conclusion. ■

Proposition 1.5.5 *Les boréliens de $\mathbb{R}^d$ sont $\mathcal{L}_d^*$-mesurables.*

Démonstration : Par la Proposition 1.4.10, il suffit de montrer que pour tous $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ tels que $d(A, B) > 0$, on a

$$\mathcal{L}_d^*(A \cup B) \geq \mathcal{L}_d^*(A) + \mathcal{L}_d^*(B).$$

On peut supposer que $\mathcal{L}_d^*(A \cup B) < +\infty$. Fixons $\varepsilon > 0$ et considérons $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_{A\cup B}$ tel que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}(I_n) \leq \mathcal{L}_d^*(A \cup B) + \varepsilon.$$

Quitte à subdiviser les intervalles trop grands, on peut supposer que $\mathrm{diam}(I_n) \leq d(A, B)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être décomposée en deux sous-suites $(I'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(I''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $A \cap I''_n = \emptyset$ et $B \cap I'_n = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en tire que

$$\mathcal{L}^*(A) + \mathcal{L}^*(B) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}(I'_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}(I''_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}(I_n) \leq \mathcal{L}_d^*(A \cup B) + \varepsilon.$$

On obtient la conclusion puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire. ■

Définition 1.5.6 La restriction de $\mathcal{L}_d^*$ aux ensembles $\mathcal{L}_d^*$-mesurables est appelée la *mesure de Lebesgue*. On la note $\mathcal{L}_d$ ou $\mathcal{L}$. Les ensembles $\mathcal{L}_d^*$-mesurables sont appelés *Lebesgue-mesurables*.

La restriction de $\mathcal{L}_d^*$ aux ensembles boréliens de $\mathbb{R}^d$ est également appelée la mesure de Lebesgue et notée $\mathcal{L}_d$ ou $\mathcal{L}$.

Remarque 1.5.7 La mesure de Lebesgue assigne à tout intervalle son volume (même s'il n'est pas compact). En effet, puisque $\mathcal{L}$ est une mesure, on a

$$\mathcal{L}\big(]a, b[\big) = \mathcal{L}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} [a + 1/n, b - 1/n]\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{L}\big([a + 1/n, b - 1/n]\big) = b - a.$$

Un raisonnement similaire peut s'appliquer dans $\mathbb{R}^d$.

Signalons qu'il existe des sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$ qui ne sont pas Lebesgue-mesurables. Il existe également des ensembles Lebesgue-mesurables qui ne sont pas des boréliens. Cela sera illustré lors des séances d'exercices.

Présentons à présent quelques propriétés de la mesure de Lebesgue.

Proposition 1.5.8 *Soit $A \subseteq \mathbb{R}^d$ un ensemble Lebesgue-mesurable. Alors*

1. $\mathcal{L}_d(A) = \inf\big\{\mathcal{L}_d(U) : A \subseteq U \text{ et } U \text{ est ouvert}\big\}$,
2. $\mathcal{L}_d(A) = \sup\big\{\mathcal{L}_d(K) : K \subseteq A \text{ et } K \text{ est compact}\big\}$.

Démonstration : 1. Par monotonie, il suffit de montrer que

$$\mathcal{L}_d(A) \geq \inf \big\{ \mathcal{L}_d(U) : A \subseteq U \text{ et } U \text{ est ouvert} \big\}.$$

On peut supposer que $\mathcal{L}_d(A) < +\infty$. Pour $\varepsilon > 0$, on considère $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'intervalles ouverts tels que $A \subseteq U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ et

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}(I_n) \leq \mathcal{L}_d(A) + \varepsilon.$$

Alors

$$\mathcal{L}_d(U) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}(I_n) \leq \mathcal{L}_d(A) + \varepsilon,$$

d'où la première assertion puisque U est ouvert.
2. Par monotonie, il suffit de montrer que $\mathcal{L}_d(A) \leq \sup \big\{ \mathcal{L}_d(K) : K \subseteq A \text{ et } K \text{ est compact} \big\}$ et on peut supposer que $\mathcal{L}_d(A) > 0$. Nous allons distinguer deux cas. Premièrement, supposons que A est borné. Soit C un compact contenant A et $\varepsilon > 0$. Considérons une suite d'intervalles ouverts $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $C \setminus A \subseteq U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ et

$$\mathcal{L}_d(U) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}(I_n) \leq \mathcal{L}_d(C \setminus A) + \varepsilon.$$

Le compact $K = C \setminus U$ est inclus dans A. De plus, $C \subseteq K \cup U$ et donc

$$\mathcal{L}_d(C) \leq \mathcal{L}_d(K) + \mathcal{L}_d(U).$$

On en tire que

$$\mathcal{L}_d(A) = \mathcal{L}_d(C) - \mathcal{L}_d(C \setminus A) \leq \mathcal{L}_d(K) + \mathcal{L}_d(U) - \mathcal{L}_d(C \setminus A) \leq \mathcal{L}_d(K) + \varepsilon.$$

Deuxièmement, on suppose que A n'est pas borné. Soit $c > 0$ tel que $\mathcal{L}_d(A) > c$. On va construire un compact K inclus dans A tel que $\mathcal{L}_d(K) > c$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$A_n = \big\{ x \in A : \|x\| \leq n \big\}.$$

La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et ses éléments sont bornés et Lebesgue-mesurables. De plus, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$. La continuité à gauche de la mesure de Lebesgue implique que

$$\mathcal{L}_d(A) = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{L}_d(A_n).$$

Soit $n_0 > 0$ tel que $\mathcal{L}_d(A_{n_0}) > c$. Le premier cas de la preuve fournit un compact $K \subseteq A_{n_0} \subseteq A$ tel que $\mathcal{L}_d(K) > c$, d'où la conclusion puisque $c < \mathcal{L}_d(A)$ est arbitraire. ■

La proposition suivante donne un premier résultat d'unicité. Commençons pour cela par introduire quelques notions. On s'intéresse à des intervalles particuliers de $\mathbb{R}^d$, appelés *semi-cubes dyadiques*. Ces cubes ont la forme

$$\left\{ (x_1, , \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \frac{k_i}{2^j} \leq x_i < \frac{k_i + 1}{2^j} \ \forall i \in \{1, \ldots, d\} \right\} = \left[\frac{k_1}{2^j}, \frac{k_1 + 1}{2^j} \right[\times \cdots \times \left[\frac{k_d}{2^j}, \frac{k_d + 1}{2^j} \right[$$

pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}^d$. L'entier j est appelé l'*échelle* du semi-cube dyadique. Pour tout j fixé, les semi-cubes dyadiques d'échelle j forment une partition de $\mathbb{R}^d$. De plus, remarquons que tout ouvert de $\mathbb{R}^d$ est une union de semi-cubes dyadiques disjoints. En effet, soit U un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^d$. La famille $\mathcal{F}$ de cubes dyadiques qui recouvre U peut être construite comme suit : on commence par l'ensemble vide et à l'étape j, on ajoute les semi-cubes dyadiques d'échelle j qui sont inclus dans U et qui ne sont inclus dans aucun semi-cube déjà sélectionné. Par construction, on a

$$\bigcup_{C \in \mathcal{F}} C \subseteq U.$$

De plus, si $x \in U$ et si $C_j(x)$ est le semi-cube dyadique d'échelle j qui contient x, alors $C_j(x) \subseteq U$ pour j suffisamment grand puisque U est ouvert. D'où la deuxième inclusion.

Proposition 1.5.9 *La mesure de Lebesgue est l'unique mesure définie sur* $(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}^d)$ *qui associe à chaque semi-cube dyadique son volume.*

Démonstration : Par la Proposition 1.5.4, la mesure de Lebesgue associe bien à chaque semi-cube dyadique son volume. Soit μ une mesure définie sur $(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}^d)$ qui satisfait la même propriété. Supposons que $U \subseteq \mathbb{R}^d$ est ouvert. Alors

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

où les C_n sont des semi-cubes dyadiques disjoints. Par hypothèse, on a

$$\mu(U) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(C_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Vol}(C_n) = \mathcal{L}_d(U).$$

Par conséquent, la mesure μ coïncide avec la mesure de Lebesgue sur les ouverts de $\mathbb{R}^d$. Soit à présent un ensemble borélien A de $\mathbb{R}^d$. Par ce qui précède et en utilisant la Proposition 1.5.8, on a

$$\mu(A) \leq \inf \left\{ \mathcal{L}_d(U) : A \subseteq U \text{ et } U \text{ est ouvert} \right\} = \mathcal{L}_d(A).$$

Si A est borné et si V est un ensemble borné ouvert contenant A, alors on obtient

$$\mu(V) = \mu(A) + \mu(V \setminus A) \leq \mathcal{L}_d(A) + \mathcal{L}_d(V \setminus A) = \mathcal{L}_d(V) = \mu(V).$$

Puisque $\mu(A) \leq \mathcal{L}_d(A)$ et $\mu(V \setminus A) \leq \mathcal{L}_d(V \setminus A)$, on en tire que $\mu(A) = \mathcal{L}_d(A)$.

Si A n'est pas borné, on peut l'écrire comme une union disjointe d'ensembles bornés

$$A_n = \{x \in A : n \leq \|x\| < n+1\}$$

et obtenir

$$\mu(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}_d(A_n) = \mathcal{L}_d(A)$$

par le cas précédent. ■

Présentons un deuxième résultat d'unicité de la mesure de Lebesgue. Pour tout $A \subseteq \mathbb{R}^d$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, on note

$$A + x = \left\{ a + x \ : a \in A \right\}$$

le *translaté* de A. Remarquons que la σ-algèbre de Borel est stable par translation.

Proposition 1.5.10 *Si μ est une mesure définie sur $(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}^d)$ qui est invariante par translation et telle que $\mu([0,1[^d) < +\infty$, alors μ est proportionnelle à $\mathcal{L}_d$.*

Démonstration : Commençons par remarquer que pour tout ensemble borélien $A \subseteq \mathbb{R}^d$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a
$$\mathcal{L}_d(A+x) = \mathcal{L}_d(A).$$
Supposons à présent que μ est une mesure définie sur $(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}^d)$ qui est invariante par translation et telle que $c = \mu([0,1[^d) < +\infty$. Considérons la mesure ν définie sur $(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}^d)$ par $\nu = \frac{\mu}{c}$. Remarquons que $[0,1[^d$ est l'union disjointe de 2^{dj} semi-cubes dyadiques d'échelle j. Comme ν est invariante par translation et $\nu([0,1[^d) = 1$, on obtient
$$1 = \nu([0,1[^d) = 2^{dj}\nu(D)$$
où D est n'importe quel semi-cube dyadique d'échelle j. Par conséquent,
$$\nu(D) = 2^{-dj}$$
et donc ν associe à chaque semi-cube dyadique son volume. Par la Proposition 1.5.9, on a $\nu = \mathcal{L}$.

■

1.6 Complétion de mesures

Dans cette section, nous introduisons la notion de mesure complète et montrons le lien qui existe entre la mesure de Lebesgue définie sur les boréliens et celle définie sur les ensembles $\mathcal{L}^*$-mesurables.

Définition 1.6.1 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Un sous-ensemble N de X est *μ-négligeable* s'il existe un ensemble $A \in \mathcal{A}$ tel que $N \subseteq A$ et $\mu(A) = 0$.

Si le contexte est clair, on parle d'ensemble négligeable, sans faire référence à la mesure μ.

Définition 1.6.2 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. La mesure μ est dite *complète* si tout ensemble μ-négligeable est un élément de $\mathcal{A}$.

Ainsi, une mesure μ est complète si pour tout $A \in \mathcal{A}$
$$\mu(A) = 0, N \subseteq A \Longrightarrow N \in \mathcal{A}.$$
Un exemple de mesure complète est une mesure définie à partir d'une mesure extérieure : en effet, on sait par la Proposition 1.4.5 que tout ensemble dont la mesure extérieure est nulle est mesurable. Cependant, toutes les mesures ne sont pas complètes. Par exemple, la mesure de Lebesgue définie sur les ensembles boréliens ne l'est pas. Néanmoins, on peut toujours étendre une mesure en une mesure complète. Pour cela, il faut commencer par élargir la σ-algèbre $\mathcal{A}$ sur laquelle la mesure μ est définie.

Définition 1.6.3 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. La *complétion* de $\mathcal{A}$ est la collection $\mathcal{A}_\mu$ des sous-ensembles A de X pour lesquels il existe des sous-ensembles E, F de $\mathcal{A}$ tels que
$$E \subseteq A \subseteq F \quad \text{et} \quad \mu(F \setminus E) = 0.$$

Proposition 1.6.4 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. La complétion $\mathcal{A}_\mu$ de $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre qui contient $\mathcal{A}$.*

Démonstration : Il est clair que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\mu$ (en prenant $E = F = A$). En particulier, $X \in \mathcal{A}_\mu$. De plus, si $E \subseteq A \subseteq F$ et $\mu(F \setminus E) = 0$, alors $F^c \subseteq A^c \subseteq E^c$ et $\mu(E^c \setminus F^c) = \mu(F \setminus E) = 0$. Donc $\mathcal{A}_\mu$ est stable par passage au complémentaire. Enfin, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}_\mu$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $E_n, F_n \in \mathcal{A}$ tels que $E_n \subseteq A_n \subseteq F_n$ et $\mu(F_n \setminus E_n) = 0$. Posons $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Clairement, $E, F \in \mathcal{A}$ et $E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq F$. De plus,

$$\mu\left(F \setminus E\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \setminus E_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(F_n \setminus E_n\right) = 0$$

et donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_\mu$. ■

Remarquons que si E et F sont les ensembles de la Définition 1.6.3, on obtient directement que $\mu(E) = \mu(F)$. De plus, si $B \subseteq A$ appartient à $\mathcal{A}$, on a $\mu(B) \leq \mu(F) = \mu(E)$, d'où

$$\mu(E) = \sup\left\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subseteq A\right\}$$

et la valeur commune de $\mu(E)$ et $\mu(F)$ ne dépend donc que de A et μ.

Définition 1.6.5 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. La *complétion* $\overline{\mu}$ de μ est l'application

$$\overline{\mu} : \mathcal{A}_\mu \to [0, +\infty] : A \mapsto \sup\left\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subseteq A\right\}.$$

Proposition 1.6.6 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. La complétion $\overline{\mu}$ de μ est une mesure complète sur $(X, \mathcal{A}_\mu)$ telle que $\overline{\mu}(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.*

Démonstration : Il est clair que $\overline{\mu}$ est une application qui prolonge μ. En particulier, $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{A}_\mu$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $E_n, F_n \in \mathcal{A}$ tels que $E_n \subseteq A_n \subseteq F_n$ et $\mu(F_n \setminus E_n) = 0$. Bien sûr, les ensembles $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints et en procédant comme dans la preuve de la Proposition 1.6.4, on a

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mu}(A_n)$$

puisque μ est une mesure. Enfin, $\overline{\mu}$ est complète par construction. ■

Revenons à la mesure de Lebesgue. Nous avons vu qu'elle pouvait être définie sur $(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}^d)$ et sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_{\mathcal{L}_d^*})$.

Lemme 1.6.7 *Soit $A \subseteq \mathbb{R}^d$ un ensemble Lebesgue-mesurable. Alors il existe des ensembles $E, F \in \mathbb{B}^d$ tels que $E \subseteq A \subseteq F$ et $\mathcal{L}_d(F \setminus E) = 0$.*

Démonstration : Supposons pour commencer que $\mathcal{L}_d(A) < +\infty$. Par la Proposition 1.5.8, il existe des compacts $K_n \subseteq A$ tels que $\mathcal{L}_d(A) \leq \mathcal{L}_d(K_n) + 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, et des ouverts $U_n \supseteq A$ tels que $\mathcal{L}_d(A) \geq \mathcal{L}_d(U_n) - 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. Posons $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ et $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Alors $E, F \in \mathbb{B}^d$ et $E \subseteq A \subseteq F$. De plus,

$$\mathcal{L}_d(F \setminus E) \leq \mathcal{L}_d(U_n \setminus K_n) = \mathcal{L}_d(U_n) - \mathcal{L}_d(K_n) \leq \frac{2}{n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, d'où $\mathcal{L}_d(F \setminus E) = 0$.

Supposons à présent que $\mathcal{L}_d(A) = +\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_n = A \cap \left\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq n\right\}.$$

Alors $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles Lebesgue-mesurables dont l'union donne A, et tels que $\mathcal{L}_d(A_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En appliquant la première partie de la preuve, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des ensembles boréliens E_n, F_n tels que $E_n \subseteq A_n \subseteq F_n$ et $\mathcal{L}_d(F_n \setminus E_n) = 0$. Il suffit alors de prendre $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ et de remarquer que

$$\mathcal{L}_d(F \setminus E) \leq \mathcal{L}_d\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \setminus E_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_d(F_n \setminus E_n) = 0.$$

■

Proposition 1.6.8 *La mesure de Lebesgue sur* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_{\mathcal{L}_d^*})$ *est la complétion de la mesure de Lebesgue sur* $(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}^d)$.

Démonstration : Notons $\mathcal{L}_d$ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}^d)$, $\overline{\mathcal{L}_d}$ sa complétion et m_d la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_{\mathcal{L}_d^*})$. Le Lemme 1.6.7 implique que $\mathcal{M}_{\mathcal{L}_d^*}$ est inclus dans la complétion $\mathbb{B}^d_{\mathcal{L}_d}$ et que m_d est la restriction de $\overline{\mathcal{L}_d}$ à $\mathcal{M}_{\mathcal{L}_d^*}$. Il reste à montrer que tout élément de $\mathbb{B}^d_{\mathcal{L}_d}$ appartient à $\mathcal{M}_{\mathcal{L}_d^*}$. Soit $A \in \mathbb{B}^d_{\mathcal{L}_d}$. Alors il existe des ensembles boréliens E, F tels que $E \subseteq A \subseteq F$ et $\mathcal{L}_d(F \setminus E) = 0$. Alors, on a $A \setminus E \subseteq F \setminus E$ et puisque la mesure de Lebesgue est complète sur $\mathcal{M}_{\mathcal{L}_d^*}$, on en tire que $A \setminus E \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}_d^*}$. Par conséquent, $A = (A \setminus E) \cup E$ est l'union de deux éléments de $\mathcal{M}_{\mathcal{L}_d^*}$, et est donc Lebesgue-mesurable. ■

Chapitre 2

Applications mesurables et intégration

Dans ce chapitre, nous définissons la notion d'intégrale d'une application par rapport à une mesure. Nous commençons par introduire la classe d'applications considérées, ensuite nous définissons l'intégrale de telles applications en trois étapes. Enfin, nous présentons les théorèmes de la convergence monotone, dominée et le Lemme de Fatou.

2.1 Applications mesurables

Dans cette section, nous introduisons la notion de mesurabilité pour les applications. Cette notion joue un rôle central dans la théorie de l'intégration.

Définition 2.1.1 Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{A}')$ deux espaces mesurables et $f : X \to Y$. On dit que f est *mesurable* (par rapport à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$) si $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ pour tout $A \in \mathcal{A}'$.

Remarque 2.1.2 Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{A}')$ deux espaces mesurables. Si $A \in \mathcal{A}$ et si $f : A \to Y$, on dit que f est mesurable si f est mesurable par rapport à $\mathcal{A}_A$ et $\mathcal{A}'$, où

$$\mathcal{A}_A = \big\{C \in \mathcal{A} : C \subseteq A\big\}.$$

Nous allons à présent présenter quelques propriétés des fonctions mesurables.

Proposition 2.1.3 *Soient $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{A}')$ et $(Z, \mathcal{A}'')$ des espaces mesurables. Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont mesurables, alors $g \circ f : X \to Z$ est mesurable.*

Démonstration : Soit $A \in \mathcal{A}''$. Alors $g^{-1}(A) \in \mathcal{A}'$ et donc $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{A}$. ∎

Lemme 2.1.4 *Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{A}')$ deux espaces mesurables et $f : X \to Y$. La famille*

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{A}' : f^{-1}(A) \in \mathcal{A}\}$$

est une σ-algèbre sur Y.

Démonstration : On a $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}$ et si $A \in \mathcal{C}$, $f^{-1}(A^c) = X \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$. Enfin, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{C}$, alors $f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n) \in \mathcal{A}$ d'où la conclusion. ∎

Le résultat suivant peut s'avérer utile pour vérifier la mesurabilité de fonctions. Notons qu'il a été proposé lors des séances d'exercices.

Proposition 2.1.5 *Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{A}')$ deux espaces mesurables et $f : X \to Y$. Supposons que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ est tel que $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{A}'$. Alors f est mesurable si et seulement si $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ pour tout $A \in \mathcal{F}$.*

Démonstration : Si f est mesurable, alors il est clair que $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ pour tout $A \in \mathcal{F}$. Supposons donc que $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ pour tout $A \in \mathcal{F}$, et montrons que f est mesurable. Posons $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{A}' : f^{-1}(A) \in \mathcal{A}\}$. Par le Lemme 2.1.4, $\mathcal{C}$ est une σ-algèbre. Puisque $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$, on en tire que $\mathcal{A}' = \sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{C}$, et la conclusion s'ensuit. ∎

Corollaire 2.1.6 *Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue. Alors f est mesurable par rapport à $\mathcal{B}(X)$ et $\mathcal{B}(Y)$.*

Démonstration : Si f est continue, l'image inverse de tout ouvert est un ouvert. Cela suffit au vu de la Proposition 2.1.5. ∎

Les Propositions 1.1.11 et 2.1.5 nous donnent le critère pratique suivant.

Corollaire 2.1.7 *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une application $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ si et seulement si une des conditions équivalentes suivantes est réalisée :*

- *pour tout $b \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) \leq b\} \in \mathcal{A}$,*
- *pour tout $b \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) < b\} \in \mathcal{A}$,*
- *pour tout $b \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) \geq b\} \in \mathcal{A}$,*
- *pour tout $b \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) > b\} \in \mathcal{A}$.*

Dans ce cas, on dit que f est Borel-mesurable.

Remarque 2.1.8 Si $f : X \to \mathbb{R}$, puisque la σ-algèbre de Borel $\mathbb{B}$ est engendrée par les ensembles $]-\infty, b]$, on a aussi que f est Borel-mesurable si et seulement si une des quatre conditions précédentes est satisfaite.

Proposition 2.1.9 *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ et $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sont des applications Borel-mesurables, alors les ensembles*

$$\big\{x \in X : f(x) < g(x)\big\},\ \big\{x \in X : f(x) \leq g(x)\big\} \text{ et } \big\{x \in X : f(x) = g(x)\big\}$$

appartiennent à $\mathcal{A}$.

Démonstration : On a

$$\big\{x \in X : f(x) < g(x)\big\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \Big(\big\{x \in X : f(x) < r\big\} \cap \big\{x \in X : r < g(x)\big\}\Big) \in \mathcal{A}.$$

De même, $\big\{x \in X : g(x) < f(x)\big\} \in \mathcal{A}$. On en tire que

$$\big\{x \in X : f(x) \leq g(x)\big\} = X \setminus \big\{x \in X : g(x) < f(x)\big\} \in \mathcal{A}.$$

Finalement, on a

$$\big\{x \in X : f(x) = g(x)\big\} = \big\{x \in X : f(x) \leq g(x)\big\} \setminus \big\{x \in X : f(x) < g(x)\big\} \in \mathcal{A}.$$

∎

Proposition 2.1.10 *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ et $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sont des applications Borel-mesurables, alors $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont Borel-mesurables.*

Démonstration : On a

$$\big\{x \in X : \max\big(f(x), g(x)\big) \leq b\big\} = \big\{x \in X : f(x) \leq b\big\} \cap \big\{x \in X : g(x) \leq b\big\}$$

et

$$\big\{x \in X : \min\big(f(x), g(x)\big) \leq b\big\} = \big\{x \in X : f(x) \leq b\big\} \cup \big\{x \in X : g(x) \leq b\big\},$$

ce qui permet de conclure. ■

Proposition 2.1.11 *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'applications Borel-mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors*

1. *$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ et $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ sont Borel-mesurables,*
2. *$\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ et $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ sont Borel-mesurables.*

Démonstration : 1. On a

$$\big\{x \in X : \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \leq b\big\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \big\{x \in X : f_n(x) \leq b\big\}$$

et

$$\big\{x \in X : \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) < b\big\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big\{x \in X : f_n(x) < b\big\}.$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $g_k = \sup_{n\geq k} f_n$ et $h_k = \inf_{n\geq k} f_n$. Par le premier point, on sait que g_k et h_k sont Borel-mesurables. Puisque $\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n = \inf_{k\in\mathbb{N}} g_k$ et $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} h_k$, on obtient la conclusion en appliquant à nouveau le premier point. ■

Proposition 2.1.12 *Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : X \to \mathbb{R}$ sont des applications Borel-mesurables, alors αf, $f + g$, $f - g$ et fg sont Borel-mesurables. De plus, si $A = \{x \in X : g(x) \neq 0\}$, alors $f/g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ est Borel-mesurable.*

Démonstration : Le cas où $\alpha = 0$ est clair. Si $\alpha > 0$, on a

$$\big\{x \in X : \alpha f(x) < b\big\} = \left\{x \in X : f(x) < \frac{b}{\alpha}\right\} \in \mathcal{A}$$

et le cas $\alpha < 0$ se traite de manière similaire. Pour $f + g$, remarquons que

$$\big\{x \in X : f(x) + g(x) < b\big\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \left(\{x \in X : f(x) < r\} \cap \{x \in X : g(x) < b - r\}\right) \in \mathcal{A}.$$

Pour l'application $f - g$, il suffit de noter que $f - g = f + (-g)$. Pour le produit fg, montrons que f^2 et g^2 sont Borel-mesurables. On aura alors que $fg = \frac{1}{2}\big((f+g)^2 - f^2 - g^2\big)$ est Borel-mesurable. Si $b \leq 0$, on a

$$\big\{x \in X : f^2(x) < b\big\} = \emptyset \in \mathcal{A}$$

et si $b > 0$, on a

$$\big\{x \in X : f^2(x) < b\big\} = \big\{x \in X : f(x) < \sqrt{b}\big\} \cap \big\{x \in X : f(x) > -\sqrt{b}\big\} \in \mathcal{A}.$$

Enfin, pour f/g, on commence par remarquer que

$$A = \{x \in X : g(x) \neq 0\} = X \setminus \{x \in X : g(x) = 0\} \in \mathcal{A}$$

et on conclut puisque

$$\begin{aligned}\left\{x \in A : \frac{f(x)}{g(x)} < b\right\} &= \Big(\big\{x \in A : g(x) > 0\big\} \cap \big\{x \in A : f(x) < b\,g(x)\big\}\Big) \\ &\quad \cup \Big(\big\{x \in A : g(x) < 0\big\} \cap \big\{x \in A : f(x) > b\,g(x)\big\}\Big) \in \mathcal{A}.\end{aligned}$$

■

Remarque 2.1.13 Dans le résultat précédent, on se limite aux applications à valeurs réelles pour éviter de devoir définir des opérations sur $\{-\infty, +\infty\}$.

Définition 2.1.14 Soit f une application à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. La *partie positive* de f est définie par $f^+ = \max(f, 0)$. La *partie négative* de f est définie par $f^- = -\min(f, 0)$.

Ces applications sont à valeurs dans $[0, +\infty]$. De plus, $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$. La proposition suivante est immédiate.

Proposition 2.1.15 *Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Alors f est Borel-mesurable si et seulement si f^+ et f^- le sont. Dans ce cas, $|f|$ est Borel-mesurable.*

Proposition 2.1.16 *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Si $f : X \to [0, +\infty]$ est Borel-mesurable, il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ d'applications Borel-mesurables de X dans $[0, +\infty]$ et dont l'image est finie, telles que*

— *la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ est croissante,*

— *$f = \lim_{n \to +\infty} f_n$.*

Démonstration : Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et tout $k \in \{1, \ldots, n2^n\}$, posons

$$A_{n,k} = \left\{x \in X : \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}\right\} \in \mathcal{A}$$

où l'appartenance à $\mathcal{A}$ provient de la mesurabilité de f. On pose ensuite

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^n} & \text{si } x \in A_{n,k}s \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que cette suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ convient. ■

Si l'espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ est muni d'une mesure et si $f : X \to Y$ est une application mesurable, on peut définir une mesure sur $(Y, \mathcal{A}')$.

Proposition 2.1.17 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(Y, \mathcal{A}')$ un espace mesurable et $f : X \to Y$ une application mesurable. Alors l'application*

$$\mu_f : \mathcal{A}' \to [0, \infty] : A \mapsto \mu \circ f^{-1}(B)$$

est une mesure sur $(Y, \mathcal{A}')$. *On l'appelle la* mesure image *de* μ *par* f.

Il s'agit d'une simple vérification qui a été proposée lors des séances d'exercices. Ces mesures images sont largement utilisées en théorie des probabilités. En effet, dans ce contexte, une application mesurable définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs réelles est appelée une *variable aléatoire*, souvent dénotée par X (qui n'est plus l'espace mais l'application). On dit que $\mathbb{P}_X$ est la *loi* ou la *distribution* de X. On retrouve

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}\big).$$

Terminons cette section en mentionnant que les fonctions mesurables permettent de construire des ensembles Lebesgue-mesurables qui ne sont pas des ensembles boréliens. Cela sera illustré lors des séances d'exercices.

2.2 Propriétés qui ont lieu presque partout

Définition 2.2.1 Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $Y \subseteq X$. Une propriété a lieu μ-*presque partout dans* Y (on écrit μ-p.p.) si l'ensemble des points de Y pour lesquels cette propriété n'est pas vérifiée est μ-négligeable.

Lorsque le contexte est clair, on écrira que la propriété est vérifiée presque partout, ou p.p. L'ensemble des points pour lesquels une propriété est vérifiée n'est pas nécessairement un ensemble de $\mathcal{A}$. Cela n'est nécessaire que si la mesure μ est complète.

Exemple 2.2.2 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Soient f et g deux applications définies sur X.
   - On dit que $f = g$ μ-presque partout si l'ensemble $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ est μ-négligeable.
   - On dit que $f \geq g$ μ-presque partout si l'ensemble $\{x \in X : f(x) < g(x)\}$ est μ-négligeable.

   Remarquons que les ensembles $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ et $\{x \in X : f(x) < g(x)\}$ appartiennent à $\mathcal{A}$ si f et g sont mesurables.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications définies sur X et f une application définie sur X. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-p.p. vers f si l'ensemble $\{x \in X : \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \neq f(x)\}$ est μ-négligeable.

Proposition 2.2.3 *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* f, g *deux applications de* X *dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *qui sont égales* μ*-presque partout. Si* μ *est complète et si* f *est mesurable, alors* g *est mesurable.*

Démonstration : Posons $N = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$. Par hypothèse, N est μ-négligeable et comme la mesure est complète, on en tire que $N \in \mathcal{A}$ et $\mu(N) = 0$. Alors pour tout $b \in \mathbb{R}$, il vient

$$\{x \in X : g(x) < b\} = \big(\{x \in X : f(x) < b\} \cap N^c\big) \cup \big(\{x \in X : g(x) < b\} \cap N\big).$$

A nouveau, comme μ est complète, on sait que $\{x \in X : g(x) < b\} \cap N \in \mathcal{A}$, d'où la conclusion.

■

Corollaire 2.2.4 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui converge μ-presque partout vers une application f. Si μ est complète et si f_n est mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est mesurable.*

Démonstration : Par la Proposition 2.1.11, on sait que $\liminf_{n\to+\infty} f_n$ est mesurable. Comme f et $\liminf_{n\to+\infty} f_n$ sont égales μ-presque partout, la Proposition 2.2.3 implique que f est mesurable. ■

Remarquons que les résultats précédents deviennent faux si μ n'est pas une mesure complète. En effet, soit N un ensemble μ-négligeable n'appartenant pas à $\mathcal{A}$. Alors la fonction caractéristique $\mathbf{1}_N$ de N et la fonction constante 0 sont égales μ-presque partout. Néanmoins, la fonction $\mathbf{1}_N$ n'est pas mesurable alors que la fonction constante 0 l'est. De même, si on prend la suite de fonctions dont chaque terme est égal à la fonction 0, cette suite converge μ-p.p. vers la fonction $\mathbf{1}_N$.

2.3 Intégration des applications simples positives

La définition des intégrales se fait en trois étapes. La première consiste à définir l'intégrale pour des applications mesurables pouvant s'écrire comme une somme finie de fonctions caractéristiques. Une application $f : X \to \mathbb{R}$ est *simple* si son image $f(X)$ est un ensemble fini.

Définition 2.3.1 Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On note $\mathcal{S} = \mathcal{S}(X, \mathcal{A})$ la collection des applications $f : X \to \mathbb{R}$ simples et mesurables. On note également $\mathcal{S}^+ = \mathcal{S}^+(X, \mathcal{A})$ la collection des applications de $\mathcal{S}$ à valeurs positives.

Remarquons que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel. De plus, si $A \in \mathcal{A}$, la fonction caractéristique $\mathbf{1}_A$ de A est une fonction de $\mathcal{S}^+$. Si $f \in \mathcal{S}^+$ et si $a_1, \ldots, a_n \in [0, +\infty[$ sont les valeurs disjointes prises par f, alors on peut écrire f sous la forme

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k}$$

où $A_k = f^{-1}(\{a_k\})$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$. Remarquons que s'il existe un a_k égal à 0, on peut l'enlever de cette somme. De plus, les ensembles A_k sont deux à deux disjoints.

Définition 2.3.2 Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{S}^+(X, \mathcal{A})$. L'*intégrale* de f par rapport à μ, notée $\int f d\mu$, est définie par

$$\int f d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k).$$

La proposition suivante montre que l'intégrale est une application linéaire et monotone.

Proposition 2.3.3 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $f, g \in \mathcal{S}^+(X, \mathcal{A})$ et $\alpha \geq 0$. Alors*

1. $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$,
2. $\int f + g \, d\mu = \int f d\mu + \int g \, d\mu$,
3. *si* $f \leq g$ *sur* X, *alors* $\int f d\mu \leq \int g \, d\mu$.

Démonstration : On sait que f et g peuvent s'écrire sous la forme

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k} \quad \text{et} \quad g = \sum_{j=1}^{m} b_j \mathbf{1}_{B_j}$$

avec $f(X) = \{a_1, \ldots, a_n\}$ et $g(X) = \{b_1, \ldots, b_m\}$, et où les A_k sont deux à deux disjoints et les B_j sont deux à deux disjoints. Alors $\alpha f = \sum_{k=1}^{n} \alpha a_k \mathbf{1}_{A_k}$ et

$$\int \alpha f d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha a_k \mu(A_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k) = \alpha \int f d\mu.$$

De même, si $f + g = \sum_{l=1}^{p} c_l \mathbf{1}_{C_l}$, alors

$$\begin{aligned}
\int f + g\, d\mu &= \sum_{l=1}^{p} c_l \mu(C_l) \\
&= \sum_{l=1}^{p} c_l \sum_{a_k + b_j = c_l} \mu\big(\{x \in X : f(x) = a_k, g(x) = b_j\}\big) \\
&= \sum_{l=1}^{p} \sum_{a_k + b_j = c_l} (a_k + b_j) \mu\big(\{x \in X : f(x) = a_k, g(x) = b_j\}\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_k + b_j) \mu\big(\{x \in X : f(x) = a_k, g(x) = b_j\}\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=1}^{m} \mu\big(\{x \in X : f(x) = a_k, g(x) = b_j\}\big) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{k=1}^{n} \mu\big(\{x \in X : f(x) = a_k, g(x) = b_j\}\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k \mu\big(\{x \in X : f(x) = a_k\}\big) + \sum_{j=1}^{m} b_j \mu\big(\{x \in X : g(x) = b_j\}\big) \\
&= \int f d\mu + \int g\, d\mu.
\end{aligned}$$

Enfin, remarquons que si $f \leq g$, alors $g - f \in \mathcal{S}^+$ et donc

$$\int g d\mu = \int (g - f) + f d\mu = \int g - f d\mu + \int f d\mu \geq \int f d\mu.$$

■

Proposition 2.3.4 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'applications de $\mathcal{S}^+$. S'il existe $f \in \mathcal{S}^+$ tel que $f = \lim_{n \to +\infty} f_n$ sur X, alors*

$$\lim_{n \to +\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Démonstration : On a $f_1 \le f_2 \le \cdots \le f$ et par monotonie de l'intégrale, il vient

$$\int f_1 d\mu \le \int f_2 d\mu \le \cdots \le \int f d\mu,$$

d'où la limite $\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu$ existe et

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu \le \int f d\mu.$$

Pour montrer l'autre inégalité, on considère $\varepsilon \in]0,1[$ et on va construire une suite croissante $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications de $\mathcal{S}^+$ telle que $g_n \le f_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \int g_n d\mu = (1-\varepsilon)\int f d\mu$. Cela impliquera que $\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu \ge (1-\varepsilon)\int f d\mu$, d'où le résultat souhaité puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire. Si $f = \sum_{k=1}^N a_k \mathbf{1}_{A_k}$ où les A_k sont deux à deux disjoints, on pose

$$A_{k,n} = \{x \in A_k : f_n(x) \ge (1-\varepsilon)a_k\} \in \mathcal{A}.$$

Pour chaque k fixé, la suite $(A_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{k,n} = A_k$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$g_n = \sum_{k=1}^N (1-\varepsilon)a_k \mathbf{1}_{A_{k,n}}.$$

Alors $g_n \le f_n$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \int g_n d\mu = \sum_{k=1}^N (1-\varepsilon)a_k \lim_{n\to+\infty} \mu(A_{k,n}) = \sum_{k=1}^N (1-\varepsilon)a_k\mu(A_k) = (1-\varepsilon)\int f d\mu$$

en utilisant la continuité à gauche de la mesure. ∎

2.4 Intégration des applications positives

Dans cette section, nous montrons comment définir l'intégrale d'applications mesurables à valeurs dans $[0,+\infty]$ à partir de l'intégrale des applications simples positives.

Définition 2.4.1 Soient $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0,+\infty]$ une application mesurable. L'*intégrale* de f par rapport à μ, notée $\int f d\mu$, est définie par

$$\int f d\mu = \sup\left\{\int g\, d\mu : g \in \mathcal{S}^+(X,\mathcal{A}), g \le f\right\}.$$

En utilisant la monotonie de l'intégrale, il est clair que cette définition coincide sur $\mathcal{S}^+(X,\mathcal{A})$ avec l'intégrale précédemment introduite.

Proposition 2.4.2 *Soient $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0,+\infty]$ une application mesurable. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathcal{S}^+(X,\mathcal{A})$ telle que $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ dans X, alors*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

Avant de démontrer ce résultat, remarquons qu'une telle suite existe toujours par la Proposition 2.1.16. Cette relation est parfois prise comme définition de l'intégrale.

Démonstration : Comme $f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f$, il est clair que

$$\int f_1 d\mu \leq \int f_2 d\mu \leq \cdots \leq \int f d\mu.$$

Par conséquent, la limite $\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu$ existe et

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Pour montrer l'autre inégalité, il suffit de montrer que si $g \in \mathcal{S}^+(X, \mathcal{A})$, $g \leq f$, alors

$$\int g d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

Soit donc une telle application g. Posons $g_n = \min(g, f_n)$. Alors $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathcal{S}^+(X, \mathcal{A})$, et $\lim_{n\to+\infty} g_n = g$ puisque $f \geq g$. Comme $g_n \leq f_n$, la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{S}^+(X, \mathcal{A})$ donne

$$\int g d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int g_n d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu$$

où on a utilisé la Proposition 2.3.4. ■

Proposition 2.4.3 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $f, g : X \to [0, +\infty]$ deux applications mesurables et $\alpha \geq 0$. Alors*

1. $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$,
2. $\int f + g \, d\mu = \int f d\mu + \int g \, d\mu$,
3. *si $f \leq g$ sur X, alors $\int f d\mu \leq \int g \, d\mu$.*

Démonstration : Par la Proposition 2.1.16, il existe des suites croissantes $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}^+(X, \mathcal{A})$ telles que $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ et $g = \lim_{n\to+\infty} g_n$. Les suites $(\alpha f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites croissantes de $\mathcal{S}^+(X, \mathcal{A})$ qui convergent dans X vers αf et $f + g$ respectivement. La proposition précédente et la linéarité de l'intégrale sur $\mathcal{S}^+(X, \mathcal{A})$ (Proposition 2.3.3) donnent alors

$$\int \alpha f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int \alpha f_n d\mu = \alpha \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu = \alpha \int f d\mu$$

et

$$\int f + g \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n + g_n d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu + \lim_{n\to+\infty} \int g_n d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Enfin, si $f \leq g$, alors pour tout $h \in \mathcal{S}^+(X, \mathcal{A})$ tel que $h \leq f$, on a aussi $h \leq g$ et donc

$$\int f d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

■

2.5 Intégration, cas général

Dans cette section, on définit l'intégrale d'une application mesurable $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ arbitraire. Rappelons que les parties positives et négatives de f sont définies par $f^+ = \max(f, 0)$ et par $f^- = -\min(f, 0)$ respectivement. Ces applications sont mesurables si et seulement si f l'est.

Définition 2.5.1 Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une application mesurable. Si les intégrales $\int f^+ d\mu$ et $\int f^- d\mu$ sont finies, alors on dit que f est *intégrable*. Dans ce cas, l'*intégrale* de f par rapport à μ, notée $\int f d\mu$, est définie par

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu. \tag{2.1}$$

On dit que l'intégrale *existe* si $\int f^+ d\mu$ est fini ou si $\int f^- d\mu$ est fini. Dans ce cas, on définit également l'intégrale de f via (2.1).

Remarque 2.5.2

1. On écrit parfois $\int f(x) d\mu(x)$ ou $\int f(x)\mu(dx)$ à la place de $\int f d\mu$.
2. Dans le cas de la mesure de Lebesgue ($X = \mathbb{R}^d$ et $\mu = \mathcal{L}_d$), on écrit souvent $\int f(x) dx$ à la place de $\int f d\mathcal{L}_d$.

Définition 2.5.3 Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une application mesurable. Si $A \in \mathcal{A}$, on dit que f est *intégrable sur* A si $f\mathbf{1}_A$ est intégrable. Dans ce cas, l'*intégrale* de f sur A, notée $\int_A f d\mu$, est définie par

$$\int_A f d\mu = \int f \mathbf{1}_A d\mu.$$

Lemme 2.5.4 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f_1, f_2, g_1, g_2 : X \to [0, +\infty[$ des applications intégrables. Si $f_1 - f_2 = g_1 - g_2$, alors*

$$\int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu = \int g_1 d\mu - \int g_2 d\mu.$$

Démonstration : On a $f_1 + g_2 = g_1 + f_2$ et par linéarité de l'intégrale des applications positives, on a

$$\int f_1 d\mu + \int g_2 d\mu = \int g_1 d\mu + \int f_2 d\mu,$$

d'où la conclusion. ■

Proposition 2.5.5 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux applications intégrables et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors*

1. *αf est intégrable et $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$,*
2. *$f + g$ est intégrable et $\int f + g \, d\mu = \int f d\mu + \int g \, d\mu$,*
3. *si $f \leq g$ sur X, alors $\int f d\mu \leq \int g \, d\mu$.*

Démonstration : Si $\alpha = 0$, alors $\alpha f = 0$ et $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$. Si $\alpha > 0$, alors $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ et $(\alpha f) = \alpha f^-$. Ces deux applications sont donc intégrables, ce qui implique l'intégrabilité de f. De plus,

$$\int \alpha f d\mu = \int \alpha f^+ d\mu - \int \alpha f^- d\mu = \alpha \int f^+ d\mu - \alpha \int f^- d\mu = \alpha \int f d\mu.$$

Si $\alpha < 0$, alors $(\alpha f)^+ = -\alpha f^-$ et $(\alpha f) = -\alpha f^+$, et on procède comme dans le cas précédent.

Puisque $(f+g)^+ \leq f^+ + g^+$ et $(f+g)^- \leq f^- + g^-$, la monotonie de l'intégrale implique que $(f+g)^+$ et $(f+g)^-$ sont intégrables, donc $f+g$ l'est également. On a

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^- = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$$

et le lemme précédent implique que

$$\begin{aligned}
\int f+g\,d\mu &= \int (f+g)^+ d\mu - \int (f+g)^- d\mu \\
&= \int f^+ + g^+ d\mu - \int f^- + g^- d\mu \\
&= \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu - \int f^- d\mu - \int g^- d\mu \\
&= \int f d\mu + \int g\,d\mu.
\end{aligned}$$

Enfin, si $f \leq g$, alors $g - f \geq 0$ et par monotonie de l'intégrale pour les applications positives, on a

$$\int g - f d\mu \geq 0.$$

Vu le point précédent, on en tire que

$$\int g\,d\mu \geq \int f d\mu.$$

■

Proposition 2.5.6 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une application mesurable. Alors f est intégrable si et seulement si $|f|$ est intégrable. Dans ce cas,*

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

Démonstration : Par définition, f est intégrable si et seulement si f^+ et f^- le sont. Puisque $|f| = f^+ + f^-$, la Proposition 2.4.3 donne que $|f|$ est intégrable si et seulement si f^+ et f^- le sont (un sens est dû à la linéarité, l'autre à la monotonie). Dans ce cas, on a

$$\left| \int f d\mu \right| = \left| \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right| \leq \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f| d\mu,$$

ce qui permet de conclure. ■

L'hypothèse de mesurabilité est très importante : il existe des applications non-mesurables (donc non-intégrables) dont la valeur absolue est intégrable. Cela sera illustré lors des séances d'exercices.

Proposition 2.5.7 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ deux applications* *mesurables qui sont égales μ-p.p. Si $\int f d\mu$ existe, alors $\int g\, d\mu$ existe et*

$$\int f d\mu = \int g\, d\mu.$$

Démonstration : Supposons tout d'abord que f et g sont à valeurs dans $[0, +\infty]$. Considérons $N = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ et $A \in \mathcal{A}$ un ensemble tel que $N \subseteq A$ et $\mu(A) = 0$. Posons

$$h(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et pour tout $n \in N$, définissons $h_n = n\mathbf{1}_A$. Alors $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathcal{S}^+(X, \mathcal{A})$ qui converge vers h, d'où

$$\int h d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int h_n d\mu = \lim_{n\to+\infty} n\mu(A) = 0.$$

Puisque $g \leq f + h$, on a

$$\int g\, d\mu \leq \int f d\mu + \int h d\mu = \int f d\mu$$

et l'autre inégalité s'obtient de la même manière en remarquant que $f \leq g + h$.

Dans le cas général, on a

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu = \int g d\mu$$

en utilisant le premier cas, puisque $f^+ = g^+$ μ-p.p et $f^- = g^-$ μ-p.p. ■

Lemme 2.5.8 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0, +\infty]$ une application mesurable. Pour tout $t > 0$, on pose $A_t = \{x \in X : f(x) \geq t\}$. Alors*

$$\mu(A_t) \leq \frac{1}{t} \int_{A_t} f d\mu \leq \frac{1}{t} \int f d\mu.$$

Démonstration : Puisque $0 \leq t\mathbf{1}_{A_t} \leq f\mathbf{1}_{A_t} \leq f$, on a

$$\int t\mathbf{1}_{A_t} d\mu \leq \int_{A_t} f d\mu \leq \int f d\mu.$$

La conclusion s'obtient en remarquant que $\int t\mathbf{1}_{A_t} d\mu = t\mu(A_t)$. ■

Proposition 2.5.9 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une application mesurable telle que $\int |f| d\mu = 0$. Alors $f = 0$ μ-presque partout.*

Démonstration : Remarquons que

$$\{x \in X : f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \{x \in X : |f(x)| \geq 1/n\}.$$

Par le Lemme 2.5.8, on a

$$\mu\big(\{x \in X : |f(x)| \geq 1/n\}\big) \leq n \int |f| d\mu = 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. On conclut en utilisant la sous-additivité dénombrable de μ. ■

Proposition 2.5.10 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une application intégrable. Alors $|f| < +\infty$ μ-presque partout.*

Démonstration : Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, le Lemme 2.5.8 implique que

$$\mu\big(\{x \in X : |f(x)| \geq n\}\big) \leq \frac{1}{n} \int |f| d\mu.$$

On en tire que

$$\mu\big(\{x \in X : |f(x)| = +\infty\}\big) \leq \mu\big(\{x \in X : |f(x)| \geq n\}\big) \leq \frac{1}{n} \int |f| d\mu$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et la conclusion s'obtient en prenant la limite pour $n \to +\infty$. ∎

Corollaire 2.5.11 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une application mesurable. Alors f est intégrable si et seulement si il existe une application intégrable de X dans $\mathbb{R}$ égale à f μ-presque partout.*

Démonstration : Si f est intégrable, prenons $N = \{x \in X : |f(x)| = +\infty\}$. Alors par la Proposition 2.5.10, on sait que $\mu(N) = 0$ et donc la fonction $g = f\mathbf{1}_{N^c}$ convient par la Proposition 2.5.7. Réciproquement, il suffit d'appliquer à nouveau la Proposition 2.5.7. ∎

Définition 2.5.12 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Une application $f : X \to \mathbb{C}$ est *intégrable* si ses parties réelles et imaginaires le sont. Dans ce cas, l'intégrale de f est définie par

$$\int f d\mu = \int \mathfrak{Re} f d\mu + i \int \mathfrak{Im} f d\mu.$$

Il est facile de vérifier la linéarité de l'intégrale d'une application à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Proposition 2.5.13 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{C}$ une application mesurable par rapport à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{C})$. Alors f est intégrable si et seulement si $|f|$ est intégrable. Dans ce cas,*

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

Démonstration : Il est facile de voir que $|f|$ est mesurable. Puisque $|f| \leq |\mathfrak{Re} f| + |\mathfrak{Im} f|$, il est clair que $|f|$ est intégrable si f l'est. De plus, si $|f|$ est intégrable, alors f l'est également puisque $|\mathfrak{Re} f| \leq |f|$ et $|\mathfrak{Im} f| \leq |f|$.

Enfin, dans ce cas, en supposant que $\int f d\mu \neq 0$ (sinon le résultat est évident), soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, tel que $\int f d\mu = \alpha \left|\int f d\mu\right|$. On a

$$\left| \int f d\mu \right| = \frac{1}{\alpha} \int f d\mu = \int \frac{f}{\alpha} d\mu = \int \mathfrak{Re} \frac{f}{\alpha} d\mu + i \int \mathfrak{Im} \frac{f}{\alpha} d\mu$$

d'où $\int \mathfrak{Im} \frac{f}{\alpha} d\mu = 0$ et $\int \mathfrak{Re} \frac{f}{\alpha} d\mu > 0$. Il s'ensuit que

$$\left| \int f d\mu \right| = \left| \int \mathfrak{Re} \frac{f}{\alpha} d\mu \right| \leq \int \left| \mathfrak{Re} \frac{f}{\alpha} \right| d\mu \leq \int |f| d\mu.$$

∎

2.6 Limites et intégrales

Dans cette section, nous étudions les résultats classiques de la théorie de l'intégration concernant les limites.

Théorème 2.6.1 (Convergence monotone) *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'applications mesurables de X dans $[0, +\infty]$ et f une application mesurable de X dans $[0, +\infty]$. Si $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$, alors*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

Démonstration : Puisque l'intégrale est monotone et puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a

$$\int f_1 d\mu \le \int f_2 d\mu \le \cdots \le \int f d\mu.$$

Par conséquent, la limite $\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu$ existe et

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu \le \int f d\mu.$$

Pour démontrer l'autre inégalité, par la Proposition 2.1.16, on peut considérer pour tout $n \in \mathbb{N}$ une suite croissante $(g_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{S}^+(X, \mathcal{A})$ qui converge vers f_n. Nous allons construire une suite de fonctions de $\mathcal{S}^+(X, \mathcal{A})$ qui converge vers f. Pour cela, posons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$h_n = \max\{g_{j,n} : 0 \le j \le n\} \in \mathcal{S}^+(X, \mathcal{A}).$$

La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $h_n \le \max\{f_1, \ldots, f_n\} = f_n$. De plus, $\lim_{n\to+\infty} h_n = f$ puisque d'une part

$$\lim_{n\to+\infty} h_n \ge \lim_{n\to+\infty} g_{j,n} = f_j$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$, d'où $\lim_{n\to+\infty} h_n \ge \lim_{j\to+\infty} f_j = f$, et d'autre part

$$\lim_{n\to+\infty} h_n \le \lim_{n\to+\infty} f_n = f.$$

Par conséquent, en utilisant la Proposition 2.4.2, on obtient

$$\int f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int h_n \, d\mu \le \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu,$$

d'où la conclusion. ■

Remarque 2.6.2 Si les relations $f_n \le f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ n'ont lieu que μ-presque partout, alors la conclusion du théorème précédent reste valide. En effet, si N est un ensemble de mesure nulle contenant les points où les relations ne sont pas vérifiées, alors on considère la suite $(f_n \mathbf{1}_{N^c})_{n\in\mathbb{N}}$ et la limite $f \mathbf{1}_{N^c}$ et on applique le résultat précédent.

Corollaire 2.6.3 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications mesurables de X dans $[0, +\infty]$. Alors*

$$\int \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu.$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer le théorème de la convergence monotone à la suite croissante $(\sum_{j=0}^{n} f_j)_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Théorème 2.6.4 (Lemme de Fatou) *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications mesurables de X dans $[0, +\infty]$. Alors*

$$\int \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

Démonstration : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$. Alors chaque fonction g_n est mesurable et la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. De plus, par définition, $\liminf_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} g_n$. Le théorème de la convergence monotone donne

$$\int \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu = \int \lim_{n\to+\infty} g_n d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int g_n d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n d\mu$$

par monotonie de l'intégrale, puisque $g_n \leq f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

Théorème 2.6.5 (Convergence dominée, de Lebesgue) *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ et f une application mesurable de X dans $\mathbb{R}$ telle que $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$. S'il existe une application intégrable $g : X \to [0, +\infty]$ telle que $|f_n| \leq g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors les applications f_n, $n \in \mathbb{N}$, et f sont intégrables et*

$$\lim_{n\to+\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0.$$

En particulier,

$$\int f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

Démonstration : Puisque les parties positives et négatives des fonctions f_n et f sont toutes majorées par g, les applications sont bien intégrables. En particulier, par la Proposition 2.5.10, elles sont à valeurs réelles μ-presque partout. Soit N un ensemble de mesure nulle contenant l'ensemble des points où les fonctions prennent des valeurs infinies. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$h_n(x) = 2g(x) - |f_n(x) - f(x)|\mathbf{1}_{N^c}(x) = \begin{cases} 2g(x) - |f_n(x) - f(x)| & \text{si } x \notin N \\ 2g(x) & \text{si } x \in N. \end{cases}$$

Alors $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'applications mesurables à valeurs dans $[0, +\infty]$. De plus, on a $\lim_{n\to+\infty} h_n = 2g$. Le lemme de Fatou implique que

$$\begin{aligned} \int 2g d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int h_n \, d\mu &= \liminf_{n\to+\infty} \int 2g(x) - |f_n(x) - f(x)| \, d\mu \\ &= \int 2g \, d\mu - \limsup_{n\to+\infty} \int |f_n(x) - f(x)| \, d\mu, \end{aligned}$$

d'où

$$\limsup_{n\to+\infty}\int |f_n(x)-f(x)|\,d\mu = 0$$

et la limite vaut donc également 0. Puisque

$$\left|\int f_n d\mu - \int f d\mu\right| = \left|\int f - f_n d\mu\right| \leq \int |f-f_n| d\mu,$$

on obtient également que

$$\lim_{n\to+\infty}\int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

■

Remarque 2.6.6 Si les relations $|f_n| \leq g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ n'ont lieu que μ-presque partout, alors le résultat reste valide.

Chapitre 3

Théorème de Radon-Nikodym

Le Théorème de Radon-Nikodym est un outil indispensable de la théorie des probabilités. Il permet notamment de démontrer l'existence de l'espérance d'une variable aléatoire conditionnellement à une autre.

3.1 Densités

Commençons par remarquer que le Corollaire 2.6.3 du Théorème de la convergence monotone permet de construire une large classe de mesures.

Proposition 3.1.1 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0, +\infty]$ une application mesurable. On définit l'application*

$$\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty] : A \mapsto \int_A f d\mu.$$

Alors ν est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$ et on dit que f est une densité *de ν par rapport à μ. On note $\nu = f \cdot \mu$.*

Démonstration : Bien sûr, $\nu(\emptyset) = 0$. De plus, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints, alors

$$\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \int_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} f d\mu = \int \sum_{n\in\mathbb{N}} f \mathbf{1}_{A_n} d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n)$$

par le Corollaire 2.6.3. ■

En théorie des probabilités, les lois de variables aléatoires $\mathbb{P}_X$ sont souvent définies comme des densités par rapport à la mesure de Lebesgue. Par exemple, pour la loi normale, on a

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Proposition 3.1.2 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, g une application mesurable de X dans $[0, +\infty]$ et f une application mesurable de X dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors f est $g \cdot \mu$-intégrable si et* *seulement si fg est μ-intégrable et dans ce cas,*

$$\int f d(g \cdot \mu) = \int fg \, d\mu.$$

Démonstration : Supposons tout d'abord que $f = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k}$ est une application de $\mathcal{S}^+(X, \mathcal{A})$. Alors

$$\int f d(g \cdot \mu) = \sum_{k=1}^{n} a_k g \cdot \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \int_{A_k} g \, d\mu = \int fg \, d\mu$$

par linéarité de l'intégrale.

Si f est à valeurs dans $[0, +\infty]$, par la Proposition 2.1.16, on peut considérer une suite croissante $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}^+(X, \mathcal{A})$ qui converge vers f. Par la Proposition 2.4.2 et la première partie de la preuve, il vient

$$\int f d(g \cdot \mu) = \lim_{n \to +\infty} \int f_n d(g \cdot \mu) = \lim_{n \to +\infty} \int f_n g \, d\mu$$

et le théorème de la convergence monotone permet de conclure.

Enfin, dans le cas général, il suffit de décomposer f en f^+ et f^-. ∎

Si X est une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de loi $\mathbb{P}_X$, on définit l'espérance de X par

$$\mathbb{E}[X] = \int \mathrm{id} \, d\,\mathbb{P}_X.$$

Si $\mathbb{P}_X$ est définie par une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue, alors on retrouve

$$\mathbb{E}[X] = \int \mathrm{id} \, d\,\mathbb{P}_X = \int \mathrm{id} \, d(f \cdot \mathcal{L}) = \int \mathrm{id} f d\mathcal{L} = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx.$$

3.2 Mesures absolument continues et singulières

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0, +\infty]$ une application mesurable. On a vu dans la Proposition 3.1.1 que l'application $\nu = f \cdot \mu$ définie par

$$\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty] : A \mapsto \int_A f d\mu$$

est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$. Remarquons que dans ce cas, si $A \in \mathcal{A}$ est tel que $\mu(A) = 0$, alors $g\mathbf{1}_A = 0$ μ-presque partout, d'où $\nu(A) = 0$.

Définition 3.2.1 Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soient μ, ν deux mesures sur $(X, \mathcal{A})$. On dit que ν est *absolument continue* par rapport à μ si pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) = 0$, on a $\nu(A) = 0$. Dans ce cas, on écrit

$$\nu \ll \mu\,.$$

Une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}^d)$ est *absolument continue* si elle est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Le but du Théorème de Radon-Nikodym est de démontrer que si ν est une mesure σ-finie absolument continue par rapport à μ, alors ν est de la forme $f \cdot \mu$. Il donne donc une réciproque au résultat présenté en début de section. Nous allons en outre montrer une décomposition de toute mesure σ-finie, appelée la décomposition de Lebesgue. Afin de présenter ce résultat, nous allons nous intéresser à la notion de singularité.

Définition 3.2.2 Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soient μ, ν deux mesures sur $(X, \mathcal{A})$. On dit que μ et ν sont *mutuellement singulières* s'il existe un ensemble $A \in \mathcal{A}$ tel que

$$\mu(A) = 0 \quad \text{et} \quad \nu(A^c) = 0.$$

Dans ce cas, on écrit

$$\mu \perp \nu\,.$$

Une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}^d)$ est *singulière* si elle est mutuellement singulière avec la mesure de Lebesgue.

Exemple 3.2.3 Si μ est une mesure finie discrète sur $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, c'est-à-dire il existe D dénombrable tel que $\mu(D^c) = 0$, alors μ est singulière puisque $\mathcal{L}(D) = 0$.

Remarquons que dans ce cas, si $B \in \mathcal{A}$ est tel que $\nu(B) > 0$, alors $B \cap A \neq \emptyset$. Ainsi, ν concentre son effet sur l'ensemble A qui est de μ mesure nulle. A l'opposé, si $\nu \ll \mu$, alors ν n'a aucun effet sur les ensembles de μ mesure nulle. Il s'agit donc de deux notions qui s'excluent.

Proposition 3.2.4 *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soient μ, ν deux mesures sur $(X, \mathcal{A})$. Si $\nu \ll \mu$ et $\nu \perp \mu$, alors $\nu = 0$.*

Démonstration : Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) = 0$ et $\nu(A^c) = 0$. Si $B \in \mathcal{A}$ est un sous-ensemble de A, on a $\mu(B) \leq \mu(A) = 0$ et donc puisque $\nu \ll \mu$, $\nu(B) = 0$. Si $B \in \mathcal{A}$ est un sous-ensemble de A^c, on a $\nu(B) \leq \nu(A^c) = 0$ et donc $\nu(B) = 0$. Ainsi, pour tout $B \in \mathcal{A}$, on trouve

$$\nu(B) = \nu(A \cap B) + \nu(A^c \cap B) = 0.$$

■

La proposition suivante donne quelques relations supplémentaires entre les notions d'absolue continuité et de singularité.

Proposition 3.2.5 *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soient μ, ν_1, ν_2 des mesures sur $(X, \mathcal{A})$.*

1. *Si $\nu_1 \perp \mu$ et $\nu_2 \perp \mu$, alors $\nu_1 + \nu_2 \perp \mu$.*
2. *Si $\nu_1 \ll \mu$ et $\nu_2 \perp \mu$, alors $\nu_1 \perp \nu_2$.*

Démonstration : 1. Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ tels que $\mu(A_1) = 0$, $\nu_1(A_1^c) = 0$ et $\mu(A_2) = 0$, $\nu_2(A_2^c) = 0$. Alors $A_1 \cup A_2$ est tel que

$$\mu(A_1 \cup A_2) = 0$$

et

$$(\nu_1 + \nu_2)\big((A_1 \cup A_2)^c\big) = \nu_1\big(A_1^c \cap A_2^c\big) + \nu_2\big(A_1^c \cap A_2^c\big) \leq \nu_1\big(A_1^c\big) + \nu_2\big(A_2^c\big) = 0.$$

2. Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) = 0$ et $\nu_2(A^c) = 0$. Alors puisque $\nu_1 \ll \mu$, on a aussi $\nu_1(A) = 0$, ce qui suffit. ■

3.3 Décomposition de Lebesgue et Théorème de Radon-Nikodym

L'objectif de cette section est de démontrer que toute mesure σ-finie se décompose en la somme d'une mesure absolument continue et d'une mesure singulière par rapport à une autre mesure σ-finie donnée.

Commençons par montrer un résultat pour deux mesures finies et ordonnées.

Lemme 3.3.1 *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soient μ, ν deux mesures finies sur $(X, \mathcal{A})$ telles que $\nu \leq \mu$. Il existe une application mesurable $f : X \to [0, 1]$ telle que pour tout $A \in \mathcal{A}$*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu\,.$$

Démonstration : Considérons l'ensemble $\mathcal{H}$ des applications mesurables $h : X \to [0, +\infty]$ telles que

$$\int_A h\, d\mu \leq \nu(A)$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$. Montrons qu'il existe une application $f \in \mathcal{H}$ à valeurs dans $[0, 1]$ telle que

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int h\, d\mu : h \in \mathcal{H} \right\}.$$

Nous montrerons ensuite que cette application satisfait la thèse.

Bien sûr, $\mathcal{H} \neq \emptyset$ puisqu'il contient la fonction nulle. De plus, $\mathcal{H}$ est stable par passage au maximum : en effet, soient $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ et $A \in \mathcal{A}$. Si $A_1 = \{x \in A : h_1(x) > h_2(x)\}$, alors

$$\int_A \max\{h_1, h_2\} d\mu = \int_{A_1} h_1 d\mu + \int_{A \setminus A_1} h_2 d\mu \leq \nu(A_1) + \nu(A \setminus A_1) = \nu(A).$$

Ainsi, $\max\{h_1, h_2\} \in \mathcal{H}$.

Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{H}$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \int h_n d\mu = \sup \left\{ \int h\, d\mu : h \in \mathcal{H} \right\}.$$

Quitte à remplacer h_n par $\max\{h_1, \ldots, h_n\} \in \mathcal{H}$, on peut supposer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En particulier, on peut considérer $f = \lim_{n\to+\infty} h_n$. Le théorème de la convergence monotone donne

$$\int_A f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_A h_n d\mu \leq \nu(A)$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$. Par conséquent, $f \in \mathcal{H}$. En prenant $A = X$, on a également

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int h\, d\mu : h \in \mathcal{H} \right\}.$$

Remarquons de plus que $f \leq 1$ μ-presque partout. En effet, par le Lemme 2.5.8, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$,

$$(1+1/n)\mu(A_n) \leq \int_{A_n} f d\mu \leq \nu(A_n) \leq \mu(A_n)$$

si $A_n = \{x \in X : f(x) \geq 1 + 1/n\}$. Par conséquent, $\mu(A_n) = 0$ et donc

$$\mu\big(\{x \in X : f(x) > 1\}\big) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \mu(A_n) = 0.$$

Ainsi, quitte à remplacer f par une application égale à f μ-presque partout, on peut supposer que $f \leq 1$.

Remarquons à présent que si $h : X \to [0, +\infty]$ est une application mesurable pour laquelle il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que

$$\int_B h\, d\mu \leq \nu(B)$$

pour tout $B \in \mathcal{A}$, $B \subseteq A$, alors $h \leq f$ μ-presque partout sur A. En effet, considérons l'ensemble $B = \{x \in A : h(x) > f(x)\}$. Alors, on a $h\mathbf{1}_A \in \mathcal{H}$ et donc $\max\{h\mathbf{1}_A, f\} \in \mathcal{H}$. Il s'ensuit que

$$\int \max\{h\mathbf{1}_A, f\} d\mu \leq \int f d\mu = \int_B f d\mu + \int_{X \setminus B} f d\mu.$$

D'autre part, on a également

$$\int \max\{h\mathbf{1}_A, f\} d\mu = \int_B h\, d\mu + \int_{X \setminus B} f d\mu.$$

Par conséquent, on obtient

$$\int_B f d\mu \geq \int_B h\, d\mu$$

et on en tire que

$$\int_B f - h\, d\mu \geq 0.$$

Comme on a $f - h < 0$ sur B, cela n'est possible que si $\mu(B) = 0$, d'où $h \leq f$ μ-presque partout sur A.

Montrons à présent que f convient, c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a

$$\nu(A) = \int_A f d\mu\,.$$

Par définition, on sait déjà que

$$\nu(A) \geq \int_A f d\mu$$

et il suffit de montrer l'autre inégalité. Bien sûr, puisque $\nu \leq \mu$, il suffit de le montrer pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Posons

$$P_\varepsilon = \left\{ A \in \mathcal{A} : \int_A (f + \varepsilon) d\mu > \nu(A) \right\}.$$

Remarquons que si $A \in \mathcal{A}$ est tel que $\mu(A) > 0$, alors il existe $B \subseteq A$ tel que $B \in P_\varepsilon$ (et donc $\mu(B) > 0$). En effet, sinon, on aurait

$$\int_B (f + \varepsilon) d\mu \leq \nu(B)$$

pour tout $B \subseteq A$, et donc par ce qui précède, on en tirerait que $f + \varepsilon \leq f$ μ-presque partout sur A. Cela n'est possible que si $\mu(A) = 0$, d'où une contradiction.

Fixons $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) > 0$ et posons

$$\alpha_0 = \sup\{\mu(B) \,:\, B \in P_\varepsilon, B \subseteq A\}.$$

On peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}_0$ et $B_0 \in P_\varepsilon$, $B_0 \subseteq A$, tels que

$$\frac{1}{n_0} < \alpha_0 \leq \frac{1}{n_0 - 1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n_0} < \mu(B_0)$$

(si $n_0 = 1$, on utilise la convention que $\frac{1}{n_0 - 1} = +\infty$). Soit à présent $A_1 = A \setminus B_0$. Si $\mu(A_1) = 0$, on s'arrête. Sinon, soit

$$\alpha_1 = \sup\{\mu(B) \,:\, B \in P_\varepsilon,\ B \subseteq A_1\},$$

et $n_1 \in \mathbb{N}_0$, $B_1 \in P_\varepsilon, B_1 \subseteq A_1$, tels que

$$\frac{1}{n_1} < \alpha_1 \leq \frac{1}{n_1 - 1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n_1} < \mu(B_1).$$

On pose alors $A_2 = A_1 \backslash B_1$. Par induction, on construit ainsi des suites $(A_i)_{i\in\{1,\ldots,J\}}$, $(B_i)_{i\in\{0,\ldots,J\}}$, $(n_i)_{i\in\{0,\ldots,J\}}$ et $(\alpha_i)_{i\in\{0,\ldots,J\}}$ avec $J \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ (le procédé peut ne jamais s'arrêter). Posons

$$A_\infty = A \setminus \bigcup_{i\in\{0,\ldots,J\}} B_i$$

et montrons que cet ensemble est μ-négligeable.

Si la récurrence s'est terminée en un temps fini, on a $A_\infty = A_k$ pour le premier k tel que $\mu(A_k) = 0$.

Sinon, puisque les B_i sont des sous-ensembles de A deux à deux disjoints, on a

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{n_i} \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(B_i) \leq \mu(A) < +\infty$$

et donc $\lim_{i\to+\infty} n_i = +\infty$. Par conséquent, on a également $\lim_{i\to+\infty} \alpha_i = 0$. Soient $B \subseteq A_\infty$ et $B \in P_\varepsilon$. Puisque pour tout entier $i \in \mathbb{N}$, on a aussi $B \subset A_i$, on en tire que donc $\mu(B) \leq \alpha_i$. Par passage à la limite, on conclut que $\mu(B) = 0$. Par conséquent, les sous-ensembles de A_∞ qui appartiennent à P_ε sont μ-négligeables. Cela n'est possible que si $\mu(A_\infty) = 0$.

Dans les deux cas, puisque $A = \bigcup_i B_i \cup A_\infty$ et que les ensembles sont deux à deux disjoints, on en déduit que

$$\int_A (f + \varepsilon) d\mu = \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{B_i} (f + \varepsilon) d\mu > \sum_{k\in\mathbb{N}} \nu(B_k) = \nu(A).$$

Cela signifie que $A \in P_\varepsilon$.

En conclusion, pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\int_A (f+\varepsilon)d\mu > \nu(A)$$

et comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, il vient

$$\int_A f d\mu \geq \nu(A),$$

ce qui conclut la preuve. ■

Théorème 3.3.2 *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soient μ, ν deux mesures σ-finies sur $(X, \mathcal{A})$. Il existe un ensemble $D \in \mathcal{A}$ et une application mesurable $f : X \to [0, +\infty]$ tels que*

$$\mu(D) = 0 \quad \text{et} \quad \forall A \in \mathcal{A}\,, \quad \nu(A) = \nu(A \cap D) + \int_A f d\mu\,.$$

Démonstration : Démontrons tout d'abord le théorème dans le cas où μ et ν sont deux mesures finies. Considérons la mesure $\lambda = \nu + \mu$. Alors $\nu \leq \lambda$ et le Lemme 3.3.1 nous donne une application mesurable $g : X \to [0, 1]$ telle que

$$\nu(A) = \int_A g\, d\lambda = \int_A g\, d\nu + \int_A g\, d\mu$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$.

D'une part, puisque $\nu(A) = \int_A 1\, d\nu$, on en tire que

$$\int_A (1-g)\, d\nu = \int_A g\, d\mu$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$. Par linéarité, on en tire que pour toute application $h \in \mathcal{S}^+(X, \mathcal{A})$, on a

$$\int (1-g)h\, d\nu = \int gh\, d\mu\,.$$

En utilisant le théorème de la convergence monotone, l'égalité précédente est vérifiée également pour toute fonction mesurable positive h.

D'autre part, on a aussi

$$\mu(A) = \lambda(A) - \nu(A) = \int_A 1\, d\lambda - \int_A g\, d\lambda = \int_A (1-g)\, d\lambda.$$

Posons $D = \{x \in X : g(x) = 1\}$. Alors $D \in \mathcal{A}$ et l'égalité précédente implique que $\mu(D) = 0$. Notons $C = X \setminus D$ et posons

$$h = \mathbf{1}_C \frac{1}{1-g}.$$

C'est une application mesurable positive. Si $A \in \mathcal{A}$, on a alors

$$\nu(A \cap C) = \int_{A\cap C} (1-g)h\, d\nu = \int_{A\cap C} gh\, d\mu\,.$$

Pour conclure, il suffit donc de prendre $f = gh = \mathbf{1}_C \frac{g}{1-g}$.

Considérons à présent le cas de deux mesures σ-finies. On considère une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$ telle que

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\,, \quad \mu(A_n) < +\infty \quad \text{et} \quad \nu(A_n) < +\infty$$

(Remarquons que ceci est toujours possible : en effet, si $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ et $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ avec $\mu(X_n) < +\infty$, $\nu(Y_n) < +\infty$, alors $X = \bigcup_{m,n} X_n \cap Y_m$). On considère ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les mesures μ_n et ν_n définies par

$$\mu_n(A) = \mu(A \cap A_n) \quad \text{et} \quad \nu_n(A) = \nu(A \cap A_n)$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$. Comme les mesures μ_n et ν_n sont finies, la première partie de la preuve nous donne un ensemble $D_n \in \mathcal{A}$ et une application mesurable positive f_n tels que

$$\mu_n(D_n) = 0 \quad \text{et} \quad \forall A \in \mathcal{A}\,, \quad \nu_n(A) = \nu_n(A \cap D_n) + \int_A f_n d\mu_n\,.$$

Posons $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \mathbf{1}_{A_n}$. Alors f est une application mesurable positive et comme les A_n sont deux à deux disjoints, on a

$$\begin{aligned}
\nu(A) = \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A \cap A_n\right) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A \cap A_n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\nu_n(A \cap D_n) + \int_A f_n d\mu_n\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A \cap D_n \cap A_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_A f_n \mathbf{1}_{A_n} d\mu \\
&= \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A \cap D_n \cap A_n\right) + \int_A \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \mathbf{1}_{A_n} d\mu \\
&= \nu\left(A \cap \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \cap A_n\Big)\right) + \int_A f d\mu
\end{aligned}$$

en utilisant le Corollaire 2.6.3. Pour conclure, il suffit de poser $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \cap A_n$ et de remarquer que

$$\mu(D) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(D_n \cap A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(D_n) = 0.$$

■

Présentons à présent les deux corollaires importants du théorème précédent.

Théorème 3.3.3 (Théorème de Radon-Nikodym) *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soient μ, ν deux mesures σ-finies sur $(X, \mathcal{A})$. Alors $\nu \ll \mu$ si et seulement si il existe une application mesurable $f : X \to [0, +\infty]$ telle que*

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$, c'est-à-dire $\nu = f \cdot \mu$. De plus, si g est une autre application telle que $\nu = g \cdot \mu$, alors $f = g$ μ-presque partout.

Démonstration : On sait que si $\nu = f \cdot \mu$, alors $\nu \ll \mu$. Réciproquement, supposons que $\nu \ll \mu$. Par le Théorème 3.3.2, il existe $D \in \mathcal{A}$ et $f : X \to [0, +\infty]$ mesurable tels que

$$\mu(D) = 0 \quad \text{et} \quad \forall A \in \mathcal{A}, \quad \nu(A) = \nu(A \cap D) + \int_A f d\mu\,.$$

Alors on a aussi $\nu(D) = 0$, et donc

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \cdot$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$.

Soit g une autre application mesurable telle que $\nu = g \cdot \mu$. Supposons dans un premier temps que ν est finie. Alors les applications f et g sont μ-intégrables et donc finies μ-presque partout. Soit $N \in \mathcal{A}$ un ensemble μ-négligeable en dehors duquel f et g sont finies. Considérons l'application mesurable h définie par

$$h(x) = \big(f(x) - g(x)\big)\mathbf{1}_{N^c}.$$

On a

$$\int_A h\, d\mu = 0$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$. Soit $A = \{x \in X : h(x) > 0\}$. La relation précédente nous donne que $\mu(A) = 0$. De même, $\mu(\{x \in X : h(x) < 0\}) = 0$. Par conséquent, $h = 0$ μ-presque partout, d'où $f = g$ μ-presque partout.

Si ν est σ-fini, soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$ telle que

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \quad \text{et} \quad \nu(A_n) < +\infty\,.$$

L'argument précédent montre que $f = g$ μ-presque partout sur chaque ensemble A_n. Puisqu'une union dénombrable d'ensembles μ-négligeables est μ-négligeable, on obtient la conclusion. ■

Définition 3.3.4 La fonction f intervenant dans le théorème précédent est appelée une *densité* ou une *dérivée de Radon-Nikodym* de ν par rapport à μ. Comme elle est unique à un ensemble μ-négligeable près, on parle aussi de la dérivée de Radon-Nikodym de ν par rapport à μ et on la note

$$f = \frac{d\nu}{d\mu}.$$

Ainsi, avec les notations précédemment introduites, on a

$$\nu = \frac{d\nu}{d\mu} \cdot \mu\,.$$

Théorème 3.3.5 (Décomposition de Lebesgue) *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soient μ, ν deux mesures σ-finies sur $(X, \mathcal{A})$. Il existe un unique couple (ν_a, ν_s) de mesures sur $(X, \mathcal{A})$ telles que*

$$\nu_a \ll \mu \;, \quad \nu_s \perp \mu \quad \text{et} \quad \nu = \nu_a + \nu_s.$$

On appelle le couple (ν_a, ν_s) *la* décomposition de Lebesgue *de* ν *par rapport à* μ. *On dit que* ν_a *est la* partie absolument continue *de* ν *par rapport à* μ, *et que* ν_s *est la* partie singulière *de* ν *par rapport à* μ.

Démonstration : Par le Théorème 3.3.2, il existe $D \in \mathcal{A}$ et $f : X \to [0, +\infty]$ mesurable tels que

$$\mu(D) = 0 \quad \text{et} \quad \forall A \in \mathcal{A}\,, \quad \nu(A) = \nu(A \cap D) + \int_A f d\mu\,.$$

Posons

$$\nu_s(A) = \nu(A \cap D) \quad \text{et} \quad \nu_a(A) = \int_A f d\mu.$$

Bien sûr, on a $\nu = \nu_s + \nu_a$. Par définition, on a aussi $\nu_s(D^c) = 0$ et donc $\nu_s \perp \mu$. Enfin, on sait que $\nu_a \ll \mu$.

Il reste à montrer l'unicité de la décomposition. Supposons que les couples (ν_a, ν_s) et (ν'_a, ν'_s) satisfont l'hypothèse. Alors $\nu_a + \nu_s = \nu'_a + \nu'_s$, d'où

$$\nu_a - \nu'_a = \nu'_s - \nu_s.$$

Posons $\lambda = \nu_a - \nu'_a = \nu'_s - \nu_s$. On procède comme dans les Propositions 3.2.4 et 3.2.5 pour montrer qu'alors $\lambda = 0$ (on ne s'y ramène pas directement car λ n'est pas nécessairement positive). Soient $D, D' \in \mathcal{A}$ tels que $\mu(D) = \mu(D') = 0$ et $\nu_s(D^c) = \nu'_s(D'^c) = 0$. Posons $B = D \cup D'$. Ainsi, $\mu(B) = 0$ et donc pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $\nu_a(A \cap B) = 0$ puisque $\nu_a \ll \mu$. Par conséquent,

$$\nu_a(A) = \nu_a(A \cap B) + \nu_a(A \cap B^c) = \nu_a(A \cap B^c).$$

On procède de même pour ν'_a. Il vient alors

$$\begin{aligned} \lambda(A) = \nu_a(A) - \nu'_a(A) &= \nu_a(A \cap B^c) - \nu'_a(A \cap B^c) \\ &= \nu_s(A \cap B^c) - \nu'_s(A \cap B^c) \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque $A \cap B^c = A \cap D^c \cap D'^c$ qui est un sous-ensemble de D^c et de D'^c. ■

Terminons ce chapitre par un raffinement de la décomposition de Lebesgue d'une mesure finie définie sur $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$.

Définition 3.3.6 Soit μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$. On dit que $x \in \mathbb{R}$ est un *atome* de μ si $\mu(\{x\}) > 0$. La mesure μ est *purement atomique* s'il existe $S \in \mathbb{B}$ tel que $\mu(S^c) = 0$ et tout $x \in S$ est un atome de μ.

Par exemple, toute mesure de Dirac est purement atomique.

Proposition 3.3.7 *Soit* μ *une mesure finie sur* $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$. *Alors l'ensemble des atomes de* μ *est au plus dénombrable.*

Démonstration : Soit $S = \{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) > 0\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un nombre fini de $x \in E$ tels que $\mu(\{x\}) \geq 1/n$ (sinon la mesure de cet ensemble serait infinie). Puisque

$$S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) \geq 1/n\},$$

on en tire que S est au plus dénombrable. ■

Corollaire 3.3.8 *Soit μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$. Alors μ est purement atomique si et seulement si μ est de la forme*

$$\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \delta_{x_n}$$

où $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs ou nuls, et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels.

Démonstration : Supposons que μ est purement atomique. Alors l'ensemble S des atomes de μ est au plus dénombrable et $\mu(S^c) = 0$. Clairement,

$$\mu(A) = \mu(A \cap S) + \mu(A \cap S^c) = \sum_{x \in S} \mu(A \cap \{x\}) = \sum_{x \in X} \mu(\{x\}) \delta_x(A).$$

La réciproque est triviale. ■

Ainsi, les mesures purement atomiques sont les mesures discrètes. A l'opposé, on a la définition suivante.

Définition 3.3.9 Soit μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$. On dit que μ est *diffuse* si elle ne possède pas d'atome, c'est-à-dire $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Par exemple, la mesure de Lebesgue est diffuse. Toute mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue est également diffuse.

Remarque 3.3.10 Les mesures diffuses sont parfois appelées *mesures continues* car on peut montrer que si μ est diffuse, alors pour tout $\alpha \in [0, \mu(\mathbb{R})]$, il existe $A \in \mathbb{B}$ tel que $\mu(A) = \alpha$.

Bien sûr, toute mesure μ purement atomique et diffuse est identiquement nulle : en effet, si μ est purement atomique, il existe $S \in \mathbb{B}$ tel que $\mu(S^c) = 0$ et tout $x \in S$ est un atome de μ. Mais comme μ est diffuse, $S = \emptyset$ et donc $S^c = \mathbb{R}$.

Remarquons également que si μ est une mesure diffuse, alors $\mu \perp \delta_x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En effet, $\mu(\{x\}) = 0$ et $\delta_x(\mathbb{R} \setminus \{x\}) = 0$. En fait, en utilisant le Corollaire 3.3.8, on a que toute mesure diffuse est singulière par rapport à une mesure purement atomique.

Proposition 3.3.11 *Soit μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$. Alors il existe un triplet (μ_d, μ_s, μ_a) de mesures sur $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ telles que μ_d est une mesure discrète, μ_s est une mesure diffuse singulière par rapport à la mesure de Lebesgue, μ_a est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et*

$$\mu = \mu_d + \mu_s + \mu_a.$$

Démonstration : Soit S l'ensemble des atomes de μ. Comme S est au plus dénombrable, la mesure μ_d définie par

$$\mu_d(A) = \mu(A \cap S)$$

est discrète. Considérons à présent la décomposition de Lebesgue (μ_s, μ_a) de la mesure définie par $A \mapsto \mu(A \cap S^c)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors

$$\mu = \mu_d + \mu_s + \mu_a$$

et il reste à montrer que la mesure μ_s est diffuse. C'est évident puisque $\mu_s(\{x\}) \leq \mu(\{x\} \cap S^c) = 0$.

■

Cette dernière décomposition est beaucoup utilisée en probabilités. On distingue trois types disjoints de lois :

— les lois discrètes : ce sont les lois purement atomiques,

— les lois absolument continues : ce sont les lois qui admettent une densité par rapport à la mesure de Lebesgue,

— les lois continues singulières : ce sont les lois diffuses, donc qui ne possèdent pas d'atomes, qui sont singulières par rapport à la mesure de Lebesgue.

Toute loi absolument continue est diffuse, mais l'implication inverse est fausse : la loi de Cantor est un exemple de loi continue qui est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue.

De manière générale, la proposition précédente montre que toute loi de probabilité est une loi mixte donnée par la somme d'une loi discrète, d'une loi continue singulière et d'une loi absolument continue.

Chapitre 4

Produit de mesures

L'objectif de ce chapitre est de définir la notion d'intégrale sur des produits d'espaces mesurés, et d'obtenir le Théorème de Fubini.

4.1 Construction

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{A}', \nu)$ deux espaces mesurés. On souhaite munir le produit cartésien $X \times Y$ d'une mesure $\mu \times \nu$ telle que

$$\mu \times \nu(A \times A') = \mu(A)\nu(A')$$

pour tous $A \in \mathcal{A}$, $A' \in \mathcal{A}'$.

Définition 4.1.1 Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{A}')$ deux espaces mesurables. Tout ensemble de la forme $A \times A'$ avec $A \in \mathcal{A}$, $A' \in \mathcal{A}'$ est appelé un *rectangle mesurable.* La *σ-algèbre produit* sur $X \times Y$ est la σ-algèbre engendrée par les rectangles mesurables. On la note $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$.

Proposition 4.1.2 *Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{A}')$ deux espaces mesurables. La σ-algèbre produit $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ est la plus petite σ-algèbre sur $X \times Y$ rendant les projections*

$$\pi_1 : X \times Y \to X : (x, y) \mapsto x \quad \text{et} \quad \pi_2 : X \times Y \to Y : (x, y) \mapsto y$$

mesurables.

Démonstration : Si $A \in \mathcal{A}$, alors $\pi_1^{-1}(A) = A \times Y \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ ce qui montre que $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ rend π_1 mesurable. De même, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ rend π_2 mesurable. Soit à présent $\mathcal{C}$ une σ-algèbre sur $X \times Y$ rendant π_1 et π_2 mesurables. Alors pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $A' \in \mathcal{A}'$, on a

$$\pi_1^{-1}(A) \cap \pi_2^{-1}(A') = A \times A' \in \mathcal{C}.$$

Par conséquent, $\mathcal{C}$ est une σ-algèbre qui contient les rectangles mesurables et on en tire que $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{C}$. ■

Mentionnons que cette proposition sert de base pour la définition d'un produit infini de σ-algèbres.

Proposition 4.1.3 *On a* $\mathbb{B}^2 = \mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$.

Démonstration : On sait que $\mathbb{B}^2 = \sigma(\{\,]a,b]\times]c,d] : a < b, c < d\})$. Comme on a $]a,b]\times]c,d] \in \mathbb{B}\otimes\mathbb{B}$, on obtient $\mathbb{B}^2 \subseteq \mathbb{B}\otimes\mathbb{B}$. De plus, $\mathbb{B}^2$ rend les projections mesurables puisqu'elles sont continues sur $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie euclidienne. Par la Proposition 4.1.2, on obtient l'autre inclusion. ■

Etant donné un ensemble $E \subseteq X \times Y$, on va s'intéresser aux sections définies par

$$E_x = \{y \in Y : (x,y) \in E\}$$

et

$$E^y = \{x \in X : (x,y) \in E\}$$

pour tous $x \in X, y \in Y$. En effet, intuitivement, pour définir la mesure d'un ensemble de $X \times Y$, on souhaiterait prendre

$$\int_X \nu(E_x)d\mu(x) \quad \text{ou} \quad \int_Y \mu(E^y)d\nu(y).$$

Dans le cas particulier d'un rectangle mesurable $A \times A'$, puisqu'on a $(A \times A')_x = A'\mathbf{1}_A(x)$ et $(A \times A')^y = A\mathbf{1}_{A'}(y)$, on retrouverait bien

$$\int_X \nu\big((A\times A')_x\big)d\mu(x) = \int_X \nu(A')\mathbf{1}_A(x)d\mu(x) = \mu(A)\nu(A')$$

et

$$\int_Y \mu\big((A\times A')^y\big)d\nu(y) = \int_Y \mu(A)\mathbf{1}_{A'}(y)d\nu(y) = \mu(A)\nu(A').$$

Il reste à montrer que les ensembles E_x et E^y appartiennent à $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}$ respectivement, que les applications $x \mapsto \nu(E_x)$ et $y \mapsto \mu(E^y)$ sont mesurables et enfin que les intégrales donnent bien des mesures qui coïncident.

Proposition 4.1.4 *Soient $(X,\mathcal{A})$ et $(Y,\mathcal{A}')$ deux espaces mesurables. Si $E \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}'$, alors pour tout $x \in X$ et tout $y \in Y$, on a $E_x \in \mathcal{A}'$ et $E^y \in \mathcal{A}$.*

Démonstration : Fixons $x \in X$ et notons $\mathcal{F}$ la collection des ensembles $E \subseteq X \times Y$ tels que $E_x \in \mathcal{A}'$. Montrons que $\mathcal{F}$ est une σ-algèbre qui contient les rectangles mesurables. La conclusion s'ensuivra. Soient donc $A \in \mathcal{A}$ et $A' \in \mathcal{A}'$. On a

$$(A\times A')_x = \{y \in Y : (x,y) \in A \times A'\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \notin A \\ A' & \text{si } x \in A \end{cases}$$

et donc $(A\times A')_x \in \mathcal{A}'$. Il reste à montrer que $\mathcal{F}$ est une σ-algèbre. Comme $X\times Y$ est un rectangle mesurable, on a $X \times Y \in \mathcal{F}$. Si $E \in \mathcal{F}$, alors $E_x \in \mathcal{A}'$ et en remarquant que $(E_x)^c = (E^c)_x$, on obtient $(E_x)^c \in \mathcal{A}'$. Enfin, puisque $\big(\bigcup_n E_n\big)_x = \bigcup_n (E_n)_x$, il est facile de voir que $\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable.

Le résultat s'obtient de manière similaire pour E^y. ■

Proposition 4.1.5 *Soient $(X,\mathcal{A},\mu)$ et $(Y,\mathcal{A}',\nu)$ deux espaces mesurés finis. Pour tout $E \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}'$, les applications*

$$x \mapsto \nu(E_x) \quad \text{et} \quad y \mapsto \mu(E^y)$$

sont mesurables.

Démonstration : Par la Proposition 4.1.4, les deux applications considérées ont bien du sens. Notons $\mathcal{D}$ la collection des ensembles $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ pour lesquels l'application $x \mapsto \nu(E_x)$ est mesurable. Alors si $A \in \mathcal{A}$ et $A' \in \mathcal{A}'$, on a

$$\nu((A \times A')_x) = \nu(A')\mathbf{1}_A(x)$$

qui est bien une application mesurable. Donc $A \times A' \in \mathcal{D}$.

Montrons que $\mathcal{D}$ est une classe de Dynkin.

— Vu ce qui précède, $X \times Y \in \mathcal{D}$.

— Soit $E \in \mathcal{D}$. Puisque ν est fini, on a $\nu((E^c)_x) = \nu(Y) - \nu(E_x)$ et donc $E^c \in \mathcal{D}$.

— Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles deux à deux disjoints de $\mathcal{D}$. Alors

$$\nu\left(\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\big)_x\right) = \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_n)_x\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu((E_n)_x)$$

qui est une application mesurable comme limite d'applications mesurables.

Par conséquent,

$$\lambda\big(\{A \times A' : A \in \mathcal{A}, A' \in \mathcal{A}'\}\big) \subseteq \mathcal{D}.$$

De plus, l'ensemble $\{A \times A' : A \in \mathcal{A}, A' \in \mathcal{A}'\}$ est stable par intersection finie puisque si $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, $A_1', A_2' \in \mathcal{A}'$, alors

$$(A_1 \times A_1') \cap (A_2 \times A_2') = (A_1 \cap A_2) \times (A_1' \cap A_2').$$

Par la Proposition 1.3.4, on obtient

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}' = \sigma\big(\{A \times A' : A \in \mathcal{A}, A' \in \mathcal{A}'\}\big) \subseteq \mathcal{D}.$$

■

Corollaire 4.1.6 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{A}', \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. Pour tout $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$, les applications*

$$x \mapsto \nu(E_x) \quad \text{et} \quad y \mapsto \mu(E^y)$$

sont mesurables.

Démonstration : Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles de Y tels que

$$Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n \quad \text{et} \quad \nu(Y_n) < +\infty\,, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Bien sûr, on peut supposer que les Y_n sont deux à deux disjoints. On pose $\nu_n(A') = \nu(A' \cap Y_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors ν_n est une mesure finie et par la Proposition 4.1.5, l'application $x \mapsto \nu_n(E_x)$ est mesurable pour tout $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$. Il s'ensuit que

$$\nu(E_x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_n(E_x)$$

est également mesurable. ■

Théorème 4.1.7 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{A}', \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. Il existe une unique mesure $\mu \times \nu$ sur l'espace mesurable $(X \times Y, A \otimes \mathcal{A}')$ telle que*

$$\mu \times \nu(A \times A') = \mu(A)\nu(A')$$

pour tous $A \in \mathcal{A}$, $A' \in \mathcal{A}'$. Pour tout $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$, on a

$$\mu \times \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y).$$

On dit que $\mu \times \nu$ est le produit *des mesures μ et ν sur $A \otimes \mathcal{A}'$.*

Démonstration : Posons

$$\xi_1(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) \quad \text{et} \quad \xi_2(E) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y).$$

Par le Corollaire 4.1.6, ces applications sont bien définies. Montrons qu'il s'agit bien de mesures (on fait le raisonnement pour ξ_1, celui pour ξ_2 est similaire). On a $\xi_1(\emptyset) = 0$. De plus, si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles deux à deux disjoints de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$, alors

$$\begin{aligned}
\xi_1\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) &= \int_X \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_n)_x\right) d\mu(x) \\
&= \int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu\left((E_n)_x\right) d\mu(x) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X \nu\left((E_n)_x\right) d\mu(x) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \xi_1(E_n)
\end{aligned}$$

par le Corollaire 2.6.3.

De plus, si $A \in \mathcal{A}$ et $A' \in \mathcal{A}'$, on a

$$\xi_1(A \times A') = \int_X \nu\big((A \times A')_x\big) d\mu(x) = \int_X \nu(A')\mathbf{1}_A(x) d\mu(x) = \mu(A)\nu(A').$$

Pour l'unicité, il suffit d'appliquer le Lemme 1.3.7 puisque la mesure est définie sur les rectangles mesurables. ■

Remarquons que si $\mathcal{L}_2$ est la mesure de Lebesgue définie sur $\mathbb{B}^2$, alors

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L} \times \mathcal{L}$$

puisque chacune de ces deux mesures associe à un rectangle de $\mathbb{R}^2$ son volume. Cela nous donne une construction alternative de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

4.2 Théorème de Fubini

Le Théorème de Fubini présenté dans cette section permet de calculer des intégrales par rapport à une mesure produit grâce à des intégrales itérées.

Proposition 4.2.1 *Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{A}')$ deux espaces mesurables et $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ une application mesurable par rapport à $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Alors pour tous $x \in X$, $y \in Y$, les applications*

$$f_x : Y \to \overline{\mathbb{R}} : z \mapsto f(x, z)$$

et

$$f^y : X \to \overline{\mathbb{R}} : z \mapsto f(z, y)$$

sont mesurables.

Démonstration : Pour tout $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, on a

$$(f_x)^{-1}(B) = \{z \in Y : f(x, z) \in B\} = \{z \in Y : (x, z) \in f^{-1}(B)\} = (f^{-1}(B))_x.$$

Puisque f est mesurable, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ et la conclusion s'obtient en utilisant la Proposition 4.1.4. Le résultat s'obtient de manière similaire pour f^y. ■

Proposition 4.2.2 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{A}', \nu)$ des espaces mesurés σ-finis. Considérons une applications mesurable $f : X \times Y \to [0, +\infty]$. Alors, les applications*

$$x \in X \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y) \quad \text{et} \quad y \in Y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$$

sont mesurables et de plus,

$$\int_{X \times Y} f d\mu \times \nu = \int_Y \int_X f(x, y) d\mu(x) d\nu(y) = \int_X \int_Y f(x, y) d\nu(y) d\mu(x).$$

Démonstration : Par la Proposition 4.2.1, les intégrales d'applications positives $\int_Y f(x, y) d\nu(y)$ et $\int_X f(x, y) d\mu(x)$ sont bien définies. Considérons tout d'abord le cas où $f = \mathbf{1}_E$ avec $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$. Alors $f_x = \mathbf{1}_{E_x}$ et $f^y = \mathbf{1}_{E^y}$, et les applications

$$\int_Y f(x, y) d\nu(y) = \int_Y \mathbf{1}_{E_x}(y) d\nu(y) = \nu(E_x) \quad \text{et} \quad \int_X f(x, y) d\mu(x) = \int_X \mathbf{1}_{E^y}(x) d\mu(x) = \mu(E^y)$$

sont mesurables par le Corollaire 4.1.6. De plus,

$$\int_Y \int_X f(x, y) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y) = \mu \times \nu(E)$$

et

$$\int_X \int_Y f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \mu \times \nu(E).$$

Le résultat est donc vérifié pour $f = \mathbf{1}_E$. Par linéarité de l'intégrale, le résultat reste vrai pour toute fonction de $\mathcal{S}^+(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}')$. Pour le cas général, il suffit d'approcher la fonction par une suite croissante de fonctions simples et d'utiliser le théorème de la convergence monotone. ■

Remarque 4.2.3 On peut vérifier l'intégrabilité d'une fonction $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurable par rapport à $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ en appliquant la proposition précédente à $|f|$: si $|f|$ est intégrable sur X et si $\int_X |f(x,y)|d\mu(x)$ est intégrable sur Y, alors $|f|$ et f sont intégrables sur $X \times Y$.

Théorème 4.2.4 (Fubini) *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{A}', \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis et soit $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ une application $\mu \times \nu$-intégrable.*

1. *L'application f_x est ν-intégrable pour μ-presque tout $x \in X$ et l'application f^y est μ-intégrable pour ν-presque tout $y \in Y$.*
2. *L'application*
$$g(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_Y f(x,y)d\nu(y) & \text{si } f_x \text{ est } \nu\text{-intégrable} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
est μ-intégrable et l'application
$$h(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_X f(x,y)d\mu(x) & \text{si } f^y \text{ est } \mu\text{-intégrable} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
est ν-intégrable.
3. *On a*
$$\int_{X\times Y} fd\mu \times \nu = \int_X gd\mu = \int_Y hd\nu.$$

Démonstration : On va démontrer le résultat pour l'application f_x, l'autre cas se traitant de manière semblable. Par la Proposition 4.2.1, les applications $(f^+)_x$ et $(f^-)_x$ sont mesurables et la Proposition 4.2.2 implique que les applications

$$x \mapsto \int_Y f^+(x,y)d\nu(y) \quad \text{et} \quad x \mapsto \int_Y f^-(x,y)d\nu(y)$$

sont mesurables et μ-intégrables. Par conséquent, elles sont finies μ-presque partout et il s'ensuit que f_x est intégrable pour μ-presque tout $x \in X$. Soit N l'ensemble des points $x \in X$ tel que

$$\int_Y f^+(x,y)d\nu(y) = +\infty \quad \text{ou} \quad \int_Y f^-(x,y)d\nu(y) = +\infty.$$

Par mesurabilité des applications, on a $N \in \mathcal{A}$ et on sait que N est μ-négligeable. Par la Proposition 2.5.7, on en tire que g est μ-intégrable (puisque g est égal μ-presque partout à une fonction intégrable). Enfin, la Proposition 4.2.2 donne

$$\begin{aligned}
\int_{X\times Y} fd\mu \times \nu &= \int_{X\times Y} f^+d\mu \times \nu - \int_{X\times Y} f^-d\mu \times \nu \\
&= \int_X \int_Y f^+(x,y)d\nu(y)d\mu(x) - \int_X \int_Y f^-(x,y)d\nu(y)d\mu(x) \\
&= \int_X \left(\int_Y f^+(x,y)d\nu(y) - \int_Y f^-(x,y)d\nu(y) \right) d\mu(x) \\
&= \int_X gd\mu,
\end{aligned}$$

ce qui donne la conclusion. ■

Chapitre 5

Convergence et espaces L^p

L'objectif de ce chapitre est d'introduire diverses notions de convergence pour les suites d'applications mesurables. Ensuite, nous présentons les espaces L^p et leurs premières propriétés.

5.1 Modes de convergence

Dans cette section, nous introduisons et étudions quelques modes de convergence pour des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications mesurables. Nous allons travailler avec des applications à valeurs réelles : les résultats s'étendent facilement au cas d'applications à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ finies presque partout en considérant la suite $(f_n \mathbf{1}_{N^c})_{n\in\mathbb{N}}$, où N est un ensemble de mesure nulle contenant l'ensemble des points où les f_n ne sont pas finies.

Définition 5.1.1 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications mesurables de X dans $\mathbb{R}$ et f une application mesurable de X dans $\mathbb{R}$. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en mesure* vers f si

$$\lim_{n\to+\infty} \mu\big(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\big) = 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Rappelons également qu'on dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-presque partout vers f si on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ pour μ-presque tout $x \in X$. En général, il n'existe pas de relation entre ces deux modes de convergence, comme illustré dans les exemples suivants.

Exemple 5.1.2 Considérons l'espace $(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \mathcal{L})$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n = \mathbf{1}_{[n,+\infty[}$. Cette suite converge presque partout vers 0 (même partout), mais ne converge pas en mesure puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{L}\big(\{x \in X : |f_n(x)| > \varepsilon\}\big) = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{L}([n, +\infty[\,) = +\infty.$$

Exemple 5.1.3 Considérons l'espace $([0,1[, \mathcal{B}([0,1[), \mathcal{L}|_{[0,1[})$ ainsi que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ définie par $f_1 = \mathbf{1}_{[0,1[}$, $f_2 = \mathbf{1}_{[0,1/2[}$, $f_3 = \mathbf{1}_{[1/2,1[}$, et de manière générale, si $n = 2^j + k$ avec $k \in \{0, \ldots, 2^j - 1\}$, $f_n = \mathbf{1}_{[k/2^j,(k+1)/2^j[}$. Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge en mesure vers 0 puisque si $n = 2^j + k$, on a

$$\mathcal{L}\big(\{x \in [0,1[: |f_n(x)| > \varepsilon\}\big) = \mathcal{L}([k/2^j, (k+1)/2^j[\,) = 2^{-j}$$

qui tend vers 0 lorsque n (et donc j) tend vers l'infini. Par contre, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ne converge pas presque partout vers 0 car pour tout $x \in [0,1[$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ prend une infinité de fois la valeur 0 et une infinité de fois la valeur 1.

Néanmoins, il y a quelques relations utiles, données dans les deux résultats suivants.

Proposition 5.1.4 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications mesurables de X dans $\mathbb{R}$ et f une application mesurable de X dans $\mathbb{R}$. Si μ est une mesure finie et si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f μ-presque partout, alors elle converge aussi vers f en mesure.*

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Posons

$$A_n = \big\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\big\}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $B_n = \bigcup_{j\geq n} A_j$. Alors la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{A}$ et

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \subseteq \{x \in X : (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pas vers } f(x)\}.$$

Par conséquent, $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = 0$ et la continuité à droite de la mesure implique que

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = 0.$$

Puisque $A_n \subseteq B_n$, on obtient également $\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = 0$, d'où la conclusion. ■

Proposition 5.1.5 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications mesurables de X dans $\mathbb{R}$ et f une application mesurable de X dans $\mathbb{R}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f, alors il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f μ-presque partout.*

Démonstration : Puisque la suite converge en mesure, il existe un entier n_1 tel que

$$\mu\big(\{x \in X : |f_{n_1}(x) - f(x)| > 1\}\big) \leq \frac{1}{2}.$$

Par induction, si l'entier n_{k-1} a été défini, on peut trouver un indice $n_k > n_{k-1}$ tel que que

$$\mu\big(\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\}\big) \leq \frac{1}{2^k}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit ensuite l'ensemble

$$A_k = \{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\}.$$

Si $x \notin \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq j} A_k$, alors il existe un indice j tel que

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}$$

pour tout $k \geq j$. Par conséquent, la suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers f hors de $\bigcap_{j\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geq j} A_k$. De plus, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\mu\left(\bigcup_{k\geq j} A_k\right) \leq \sum_{k\geq j} \mu(A_k) \leq \sum_{k\geq j} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{j-1}}$$

et on en tire que $\mu\left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geq j} A_k\right) = 0$. ■

Définissons un troisième mode de convergence.

Définition 5.1.6 Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications intégrables de X dans $\mathbb{R}$ et f une application intégrable de X dans $\mathbb{R}$. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en moyenne* (ou *en norme* L^1) vers f si

$$\lim_{n\to+\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0.$$

Proposition 5.1.7 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications intégrables de X dans $\mathbb{R}$ et f une application intégrable de X dans $\mathbb{R}$. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne vers f, alors elle converge en mesure vers f.*

Démonstration : Par le Lemme 2.5.8, on sait que

$$\mu\big(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\big) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int |f_n - f| d\mu,$$

d'où la conclusion. ■

Par la Proposition 5.1.5, si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne vers f, alors il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f μ-presque partout. Néanmoins, la convergence en moyenne n'implique pas la convergence μ-presque partout : il suffit de considérer la suite donnée dans l'Exemple 5.1.3 puisqu'on a pour $n = 2^j + k$,

$$\int |f_n| d\mathcal{L}|_{[0,1[} = \mathcal{L}([k/2^j, (k+1)/2^j[) = 2^{-j}.$$

De plus, la convergence μ-presque partout et la convergence en mesure n'impliquent pas la convergence en moyenne.

Exemple 5.1.8 Considérons l'espace $(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \mathcal{L})$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ définie par $f_n = n\mathbf{1}_{[0,1/n]}$. Cette suite converge presque partout vers 0 et elle converge en mesure vers 0 puisque

$$\mathcal{L}\big(\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x)| > \varepsilon\}\big) = \mathcal{L}\big([0, 1/n]\big) = \frac{1}{n}$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Néanmoins, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ne converge pas vers 0 en moyenne puisque

$$\int |f_n| d\mu = n\mathcal{L}\big([0, 1/n]\big) = 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

Cependant, il existe des hypothèses supplémentaires sous lesquelles les convergences presque partout ou en mesure impliquent la convergence en moyenne.

Proposition 5.1.9 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications intégrables de X dans $\mathbb{R}$ et f une application intégrable de X dans $\mathbb{R}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f μ-presque partout ou en mesure et s'il existe une application intégrable $g : X \to [0, +\infty]$ telle que μ-presque partout, on a $|f_n| \le g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $|f| \le g$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne vers f.*

Démonstration : Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-presque partout vers f, le théorème de la convergence dominée permet d'avoir la convergence en moyenne.

Supposons donc que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas en moyenne vers f, alors il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\int |f_{n_k} - f| d\mu \ge \varepsilon$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. Remarquons que la sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f et par la Proposition 5.1.5, cette sous-suite possède une sous-suite qui converge vers f μ-presque partout. Par la première partie de la preuve, elle converge également en moyenne vers f, ce qui est impossible vu le choix de la suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. ■

5.2 Définition des espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p

Définition 5.2.1 Soit $p \in [1, +\infty[$ et soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. L'espace $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ est l'ensemble des applications mesurables $f : X \to \mathbb{R}$ telles que $|f|^p$ est intégrable.

Cette définition s'étend au cas des applications à valeurs complexes : l'espace $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ est l'ensemble des applications mesurables $f : X \to \mathbb{C}$ telles que $|f|^p$ est intégrable.

Proposition 5.2.2 *L'espace $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$).*

Démonstration : Soient $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, on a $\alpha f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$. De plus,

$$|f(x) + g(x)|^p \le \big(|f(x)| + |g(x)|\big)^p \le \big(2 \max\{|f(x)|, |g(x)|\}\big)^p \le 2^p|f(x)|^p + 2^p|g(x)|^p$$

pour tout $x \in X$, et donc $f + g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$. ■

Nous allons à présent introduire l'espace $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ dans le cas où $p = +\infty$. Pour cela, nous devons définir quelques notions préliminaires.

Définition 5.2.3 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Un sous-ensemble N de X est *localement μ-négligeable* si pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < +\infty$, l'ensemble $A \cap N$ est μ-négligeable. Une propriété est vérifiée *localement μ-presque partout* si l'ensemble des points pour lesquels cette propriété n'est pas vérifiée est localement μ-négligeable.

Il est facile de vérifier que tout ensemble μ-négligeable est localement μ-négligeable et que toute union dénombrable d'ensembles localement μ-négligeables est localement μ-négligeable. Enfin, si

X est σ-fini, alors tout ensemble localement μ-négligeable est μ-négligeable : en effet, dans ce cas, on a $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ où chaque $A_n \in \mathcal{A}$ est de mesure finie, et il s'ensuit que $N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap N$ est une union dénombrable d'ensembles μ-négligeables.

Définition 5.2.4 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Une application mesurable $f : X \to \mathbb{R}$ est *essentiellement bornée* s'il existe $C > 0$ tel que

$$\{x \in X : |f(x)| > C\}$$

est localement μ-négligeable. L'espace $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ est l'ensemble des applications mesurables $f : X \to \mathbb{R}$ essentiellement bornées.

Cette définition s'étend également au cas des applications à valeurs complexes : on définit l'espace $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ par l'ensemble des applications mesurables $f : X \to \mathbb{C}$ essentiellement bornées. Le résultat suivant est immédiat.

Proposition 5.2.5 *L'espace $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$).*

Dans la suite, nous utiliserons la notation $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ pour désigner indifféremment les espaces $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ et $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$.

Définition 5.2.6 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Si $p \in [1, +\infty[$, on pose

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

pour tout $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dans le cas où $p = +\infty$, on définit pour tout $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$,

$$\|f\|_\infty = \inf\{C \geq 0 : \{x \in X : |f(x)| > C\} \text{ est localement } \mu\text{-négligeable}\}.$$

Remarquons que si $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$, alors $\{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty\}$ est localement μ-négligeable. En effet, si $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante telle que $\|f\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} C_n$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble $\{x \in X : |f(x)| > C_n\}$ est localement μ-négligeable, alors l'ensemble

$$\{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : |f(x)| > C_n\}$$

est localement μ-négligeable.

Nous allons à présent montrer que les applications $\|\cdot\|_p$ définissent des semi-normes. Commençons par introduire l'exposant conjugué de p.

Définition 5.2.7 Soit $p \in]1, +\infty[$. Alors $\frac{1}{p} \in]0, 1[$ et il existe un nombre réel q tel que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Les nombres p et q sont appelés des *exposants conjugués*. On étend cette définition en imposant que les nombres 1 et $+\infty$ sont des exposants conjugués.

Remarquons que si p et q sont des exposants conjugués, alors

$$p + q = pq$$

et si p et q sont finis,

$$p = q(p-1) \quad \text{et} \quad q = p(q-1).$$

Lemme 5.2.8 *Soit $p \in]1, +\infty[$ et q son exposant conjugué. Alors*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

pour tous $x, y \geq 0$.

Démonstration : Bien sûr, on peut supposer que x et y sont non-nuls. En posant $u = x^p$ et $v = y^q$, il suffit de prouver que

$$u^{1/p} v^{1/q} \leq \frac{u}{p} + \frac{v}{q}$$

pour tous $u, v > 0$. En posant $t = \frac{u}{v}$, il suffit de montrer que

$$t^{1/p} \leq \frac{t}{p} + \frac{1}{q}$$

pour tout $t > 0$. Il suffit alors de remarquer que la fonction

$$t > 0 \mapsto \frac{t}{p} + \frac{1}{q} - t^{1/p}$$

atteint son minimum en $t = 1$ et que ce minimum vaut 0. ■

Proposition 5.2.9 (Inégalité de Hölder) *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $p \in [1, +\infty]$ et q son exposant conjugué. Si $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $g \in \mathcal{L}^q(X, \mathcal{A}, \mu)$, alors $fg \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ et*

$$\int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Démonstration : Supposons tout d'abord que $p = 1$ et $q = +\infty$. Remarquons que puisque $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, on a

$$\{x \in X : f(x) \neq 0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \{x \in X : |f(x)| \geq 1/n\}$$

et chaque ensemble apparaissant dans l'union est de mesure finie puisque par le Lemme 2.5.8,

$$\mu\big(\{x \in X : |f(x)| \geq 1/n\}\big) \leq n \int |f| d\mu.$$

De plus, puisque $g \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$, l'ensemble $\{x \in X : |g(x)| > \|g\|_\infty\}$ est localement μ-négligeable. L'intersection de ces deux ensembles est donc un ensemble μ-négligeable. Par conséquent, μ-presque partout, on a

$$|f(x)g(x)| \leq \|g\|_\infty |f(x)|.$$

On en tire que $fg \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ et

$$\int |fg| d\mu \leq \int \|g\|_\infty |f| d\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1.$$

Supposons à présent que $p, q \in]1, +\infty[$. Si $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$, alors $fg = 0$ presque partout et le résultat est démontré. Sinon, on pose $\widetilde{f} = \frac{f}{\|f\|_p}$ et $\widetilde{g} = \frac{g}{\|g\|_q}$. Par le Lemme 5.2.8, on a

$$|\widetilde{f}(x)\widetilde{g}(x)| \leq \frac{|\widetilde{f}(x)|^p}{p} + \frac{|\widetilde{g}(x)|^q}{q}$$

pour tout $x \in X$. Par conséquent, $\widetilde{f}\widetilde{g} \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ et

$$\int |\widetilde{f}\widetilde{g}| d\mu \leq \frac{1}{p} \int |\widetilde{f}|^p d\mu + \frac{1}{q} \int |\widetilde{g}|^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

On en tire que $fg \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$ et que

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int |fg| d\mu \leq 1.$$

■

Proposition 5.2.10 (Inégalité de Minkowski) *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $p \in [1, +\infty]$. Si $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, alors*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Démonstration : Supposons d'abord que $p = +\infty$. Soit $N_1 = \{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty\}$ et $N_2 = \{x \in X : |g(x)| > \|g\|_\infty\}$. Alors $N_1 \cup N_2$ est localement μ-négligeable et on a

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

pour tout $x \notin N_1 \cup N_2$. On en tire que $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
Supposons à présent que $p = 1$. Puisque $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ pour tout $x \in X$, on a

$$\|f + g\|_1 = \int |f + g| d\mu \leq \int |f| d\mu + \int |g| d\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

Supposons finalement que $p \in]1, +\infty[$. Si $\|f+g\|_p = 0$, le résultat est clair. Sinon, soit q l'exposant conjugué de p. Alors $p = q(p-1)$ et par conséquent,

$$|f + g|^p = \left(|f + g|^{p-1}\right)^q.$$

On en tire que $|f + g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q(X, \mathcal{A}, \mu)$. En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_p^p = \int |f + g|^p d\mu &\leq \int |f + g|^{p-1}(|f| + |g|) d\mu \\
&= \int |f + g|^{p-1}|f| d\mu + \int |f + g|^{p-1}|g| d\mu \\
&\leq \left\| |f + g|^{p-1} \right\|_q \|f\|_p + \left\| |f + g|^{p-1} \right\|_q \|g\|_p \\
&= \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \left\| |f + g|^{p-1} \right\|_q \\
&= \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \left(\int |f + g|^p d\mu\right)^{1-1/p}
\end{aligned}$$

puisque $q(p-1) = p$ et $1/q = 1 - 1/p$. En divisant par $\left(\int |f + g|^p d\mu\right)^{1-1/p}$, cette inégalité se réécrit

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

■

Par conséquent, il est facile de vérifier que $\|\cdot\|_p$ définit bien une semi-norme sur l'espace $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Néanmoins, il peut exister $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ non-nul tel que $\|f\|_p = 0$. L'espace $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ n'est donc pas normé (cela arrive s'il existe $A \in \mathcal{A}$ non-vide tel que $\mu(A) = 0$).

Définition 5.2.11 Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, +\infty]$. On note $\mathcal{N}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ le sous-espace de $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ formé des applications f pour lesquelles $\|f\|_p = 0$.

Remarquons que si $p < +\infty$, $\mathcal{N}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est l'ensemble des applications mesurables s'annulant μ-presque partout. Si $p = +\infty$, $\mathcal{N}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ est l'ensemble des applications mesurables qui s'annulent localement μ-presque partout. Dans les deux cas, on a un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Définition 5.2.12 Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, +\infty]$. L'espace $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est le quotient de l'espace $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ par l'espace $\mathcal{N}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

En d'autres mots, $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est le quotient de l'espace $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ par la relation d'équivalence

$$f \sim g \Longleftrightarrow f - g \in \mathcal{N}^p(X, \mathcal{A}, \mu).$$

Dans le cas $p < +\infty$, on identifie donc les applications qui sont égales μ-presque partout. Si $p = +\infty$, on identifie les applications qui sont égales localement μ-presque partout.

Remarquons que si $f \sim g$ sont deux applications de $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, alors $\|f\|_p = \|g\|_p$. La définition suivante a donc du sens.

Définition 5.2.13 Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, +\infty]$. On définit

$$\|\cdot\|_p : L^p(X, \mathcal{A}, \mu) \to [0, +\infty[\, : [f] \mapsto \|f\|_p,$$

où $[f]$ désigne la classe d'équivalence de f.

Grâce à ce quotient, la semi-norme $\|\cdot\|_p$ sur $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ devient une norme sur $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$: en effet, si f est tel que $\|f\|_p = 0$, alors f est nul (localement) μ-presque partout et $[f] = [0]$.

En général, pour alléger les notations, on identifie la classe $[f]$ et son représentant f.

Enfin, terminons cette section par une nouvelle notion de convergence liée à l'introduction des espaces $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Définition 5.2.14 Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $p \in [1, +\infty]$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en norme L^p* vers f si

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Pour $p = 1$, on retrouve la convergence en moyenne. Notons qu'il existe des liens entre ces types de convergence, la convergence en mesure et la convergence presque partout. Ces relations sont laissées à titre d'exercices.

5.3 Propriétés des espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p

L'espace $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ a été muni d'une norme : celle-ci définit naturellement une distance associée, donnée par

$$d_p(f, g) = \|f - g\|_p.$$

Dans un espace métrique, la limite de toute suite convergente est unique, et toute suite convergente est de Cauchy. Nous allons montrer que dans le cas des espaces $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, toute suite de Cauchy est également convergente. On dit que l'espace est complet.

Théorème 5.3.1 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, +\infty]$. Muni de la norme $\|\cdot\|_p$, l'espace $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace normé complet, c'est-à-dire un espace de Banach.*

Démonstration : Nous allons travailler en confondant les classes d'équivalence et leurs représentants.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|f_n - f_m\|_p \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

Supposons tout d'abord que $p < +\infty$. Puisque la suite est de Cauchy, on peut construire de proche en proche une suite croissante $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p \leq 2^{-j} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Montrons que cette sous-suite $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Posons

$$g_k = \sum_{j=1}^{k} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \quad \text{et} \quad g = \sum_{j=1}^{+\infty} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|.$$

En utilisant l'inégalité de Minkowski, on a

$$\|g_k\|_p \leq \sum_{j=1}^{k} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p \leq \sum_{j=1}^{k} 2^{-j} \leq 1.$$

Par le Lemme de Fatou, on a

$$\int \liminf_{k\to+\infty} |g_k|^p d\mu \leq \liminf_{k\to+\infty} \int |g_k|^p d\mu \leq 1$$

et donc $g \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. En particulier, g est fini μ-presque partout. Soit N un ensemble de mesure nulle contenant l'ensemble des points où g est infini. Posons

$$f(x) = \begin{cases} f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{+\infty} \left(f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)\right) & \text{si } x \notin N \\ 0 & \text{si } x \in N. \end{cases}$$

Puisque $f_{n_k} = f_{n_1} + \sum_{j=1}^{k-1} \left(f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\right)$, la sous-suite $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers f. Montrons que f est également la limite dans $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soient $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $\|f_n - f_m\|_p \leq \varepsilon$ pour tout $n, m \geq N$. Par le lemme de Fatou, pour tout $m \geq N$, on a alors

$$\int |f_m - f|^p d\mu = \int \liminf_{j\to+\infty} |f_n - f_{n_j}|^p d\mu \leq \liminf_{j\to+\infty} \int |f_n - f_{n_j}|^p d\mu \leq \varepsilon^p.$$

De plus, on en tire également que $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ puisque $f = (f - f_m) + f_m$ qui est la somme de deux applications de $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Passons à présent au cas où $p = +\infty$. Posons

$$A_n = \{x \in X : |f_n(x)| > \|f_n\|_\infty\}$$

et

$$B_{m,n} = \{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}.$$

On considère

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} B_{m,n}\,.$$

Alors E est localement μ-négligeable. En dehors de E, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy et converge donc vers une fonction bornée f. Posons $f(x) = 0$ pour tout $x \in E$. Alors $f \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ est la limite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$. ■

Intéressons-nous à présent aux sous-espaces denses de $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Proposition 5.3.2 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, +\infty]$. Les applications simples de l'espace $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ forment un sous-espace dense de $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ et définissent donc également un sous-espace dense de $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.*

Démonstration : Supposons pour commencer que $p < +\infty$. On va démontrer le résultat pour le cas des fonctions $f \geq 0$. On se ramène au cas général en considérant f^+ et f^- (resp. $\mathfrak{Re} f$ et $\mathfrak{Im} f$). Par la Proposition 2.1.16, il existe une suite croissante $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions simples telles que $\lim_{n\to+\infty} f_n - f = 0$. Puisque $|f_n|^p \leq |f|^p$, on a $|f_n - f|^p \leq 2^p|f|^p$ et le théorème de la convergence dominée donne

$$\lim_{n\to+\infty} \int |f_n - f|^p d\mu = 0.$$

Traitons à présent le cas $p = +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons des réels $x_0 < \cdots < x_N$ formant un recouvrement de $[-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$ et pour lesquels $x_n - x_{n-1} \leq \varepsilon$. Posons $A_n = f^{-1}(]x_{n-1}, x_n])$ pour tout $n \in \{1, \ldots, N\}$ et considérons

$$f_\varepsilon = \sum_{n=1}^{N} x_n \mathbf{1}_{A_n}.$$

Alors f_ε est une application simple telle que $\|f - f_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$. En effet, si $x \in X$ est tel que $f(x) \in [-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$, alors il existe $n \in \{1, \ldots, N\}$ tel que $x \in A_n$ et donc

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| = |x_n - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Cela suffit puisque l'ensemble $\{x \in X : x \notin [-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]\}$ est localement μ-négligeable. ■

Nous allons à présenter étudier la séparabilité des espaces $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Nous allons être amenés à étudier des fonctions de la forme

$$|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B| = \mathbf{1}_{A\triangle B}$$

où $A\triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Commençons par démontrer deux lemmes. Le premier lemme montre que lorsque la mesure est finie, on peut approcher tout ensemble de $\mathcal{A}$ par des ensembles de toute partie génératrice de $\mathcal{A}$ qui est une algèbre. Rappelons qu'une collection de parties de X est une *algèbre* si elle contient X et si elle est stable par passage au complémentaire et par union finie.

Lemme 5.3.3 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ une algèbre telle que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$. Si μ est fini, alors pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $C \in \mathcal{C}$ tel que $\mu(A \triangle C) < \varepsilon$.*

Démonstration : Soit $\mathcal{F}$ la collection des ensembles A de $\mathcal{A}$ satisfaisant que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C \in \mathcal{C}$ tel que $\mu(A \triangle C) < \varepsilon$. Bien sûr, on a $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ et il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ est une σ-algèbre pour obtenir la conclusion.

Puisque $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$, on a $X \in \mathcal{F}$. De plus,

$$A^c \triangle C^c = A \triangle C$$

et donc $\mathcal{F}$ est stable par passage au complémentaire. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$. Fixons $\varepsilon > 0$. Si $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A_n$, la continuité de la mesure implique qu'il existe $N \in \mathbb{N}_0$ pour lequel

$$\mu\left(A \setminus \bigcup_{n \leq N} A_n\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout $n \leq N$, choisissons $C_n \in \mathcal{C}$ tel que $\mu(A_n \triangle C_n) < \frac{\varepsilon}{2N}$. Posons $C = \bigcup_{n \leq N} C_n \in \mathcal{C}$. On a

$$\begin{aligned} \mu(A \triangle C) &\leq \mu\left(A \setminus \bigcup_{n \leq N} A_n\right) + \mu\left(\bigcup_{n \leq N} A_n \triangle C\right) \\ &\leq \mu\left(A \setminus \bigcup_{n \leq N} A_n\right) + \sum_{n \leq N} \mu(A_n \triangle C_n) < \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui suffit. ■

Le lemme suivant étend le premier lemme au cas σ-fini.

Lemme 5.3.4 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ une algèbre telle que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$. Si μ est σ-fini sur $\mathcal{C}$, alors pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < +\infty$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $C \in \mathcal{C}$ tel que $\mu(A \triangle C) < \varepsilon$.*

Démonstration : Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et $\mu(A_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < +\infty$ et soit $\varepsilon > 0$. La continuité de la mesure donne l'existence d'un indice $N \in \mathbb{N}$ pour lequel $\mu(A \cap A_N) > \mu(A) - \varepsilon/2$. La mesure

$$B \in \mathcal{A} \mapsto \mu(B \cap A_N)$$

est finie et par le lemme précédent, il existe $C \in \mathcal{C}$ tel que $\mu\big((A \triangle C) \cap A_N\big) < \varepsilon/2$. Alors $C \cap A_N \in \mathcal{C}$ et

$$\begin{aligned} \mu\big(A \triangle (C \cap A_N)\big) &\leq \mu\big(A \setminus (A \cap A_N)\big) + \mu\big((A \cap A_N) \triangle (C \cap A_N)\big) \\ &= \mu(A \setminus (A \cap A_N)) + \mu\big((A \triangle C) \cap A_N\big) < \varepsilon, \end{aligned}$$

d'où la conclusion. ■

Le résultat principal est le suivant.

Proposition 5.3.5 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, +\infty[$. Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ est une famille dénombrable telle que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$ et si $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ où chaque $A_n \in \mathcal{C}$ est de mesure finie, alors l'espace $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est séparable.*

Démonstration : Soit $\widetilde{\mathcal{C}}$ la collection formée des ensembles de $\mathcal{C}$, de leurs complémentaires, de leurs unions finies, de X et de $\emptyset$. Alors $\widetilde{\mathcal{C}}$ est une algèbre dénombrable qui contient $\mathcal{C}$ et bien sûr, on a $\sigma(\widetilde{\mathcal{C}}) = \mathcal{A}$.

Soit $\mathcal{U}$ la collection des sommes finies $\sum_{j=1}^{l} c_j \mathbf{1}_{C_j}$ où $c_j \in \mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$) et $C_j \in \widetilde{\mathcal{C}}$ avec $\mu(C_j) < +\infty$ pour tout j. Alors $\mathcal{U}$ est un ensemble dénombrable et $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Montrons qu'il forme un sous-ensemble dense de $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Vu la Proposition 5.3.2, il suffit de montrer que cet espace est dense dans l'espace des applications simples de $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Soit $g = \sum_{j=1}^{l} a_j \mathbf{1}_{A_j}$ une telle application, avec $A_j \in \mathcal{A}$ et $\mu(A_j) < +\infty$, et soit $\varepsilon > 0$. Par densité, il existe des rationnels c_j tels que

$$\left\| \sum_{j=1}^{l} a_j \mathbf{1}_{A_j} - \sum_{j=1}^{l} c_j \mathbf{1}_{A_j} \right\|_p \leq \sum_{j=1}^{l} |a_j - c_j| \|\mathbf{1}_{A_j}\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus, le lemme précédent nous donne des ensembles C_j tels que

$$\left\| \sum_{j=1}^{l} c_j \mathbf{1}_{A_j} - \sum_{j=1}^{l} c_j \mathbf{1}_{C_j} \right\|_p \leq \sum_{j=1}^{l} |c_j| \|\mathbf{1}_{A_j} - \mathbf{1}_{C_j}\|_p = \sum_{j=1}^{l} |c_j| \mu(A_j \triangle C_j)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors $\sum_{j=1}^{l} c_j \mathbf{1}_{C_j}$ appartient à $\mathcal{U}$ et satisfait par Minkowski

$$\left\| \sum_{j=1}^{l} a_j \mathbf{1}_{A_j} - \sum_{j=1}^{l} c_j \mathbf{1}_{C_j} \right\|_p \leq \left\| \sum_{j=1}^{l} a_j \mathbf{1}_{A_j} - \sum_{j=1}^{l} c_j \mathbf{1}_{A_j} \right\|_p + \left\| \sum_{j=1}^{l} c_j \mathbf{1}_{A_j} - \sum_{j=1}^{l} c_j \mathbf{1}_{C_j} \right\|_p < \varepsilon,$$

ce qui termine la preuve. ■

Bibliographie

[1] Bogachev, V.I. (2007) *Measure Theory*. Springer, Berlin.

[2] Cohn, S. L. (1980) *Measure Theory*. Birkhäuser, Boston.

[3] Nicolay, S. (2011–2012) *Théorie de la mesure*. Université de Liège.

[4] Rudin, W. (1987) *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, International Edition, Singapore, Third Edition.