

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Analyse fonctionnelle

Notes de cours

Céline Esser

Année académique 2026–2027

Table des matières

Introduction	iv
I Espaces normés et espaces de Banach	1
1 Espaces normés, espaces de Banach et opérateurs linéaires	2
1.1 Normes, boules et topologie	2
1.1.1 Exemples fondamentaux	3
1.1.2 Normes équivalentes	4
1.2 Complétude et espaces de Banach	5
1.2.1 Critère des séries absolument convergentes	5
1.2.2 Sous-espaces et produits	6
1.2.3 Espaces quotients	6
1.3 Espaces de dimension finie	7
1.4 Continuité et norme d'opérateur	8
1.4.1 Applications minorées	12
1.5 L'espace des opérateurs continus	12
1.6 Prolongement d'un opérateur par densité	13
1.7 Le théorème de Banach–Steinhaus	14
1.8 Le théorème de l'opérateur ouvert	16
1.9 Le théorème du graphe fermé	20
1.10 Théorème de Stone–Weierstrass	21
1.11 Exercices	23
2 Compacité dans les espaces normés	26
2.1 Ensembles bornés, précompacts et compacts	26
2.2 Théorème d'Arzelà–Ascoli	29
2.3 Exercices	32
3 Dualité dans les espaces normés et espaces de Hilbert	34
3.1 Dual d'un espace normé et norme opérateur	37
3.2 Théorème de Hahn–Banach	38
3.2.1 Une forme réelle sous-linéaire de Hahn–Banach	41

3.3	Séparation des ensembles convexes	42
3.4	Bidual et réflexivité	45
3.5	Transposée d'un opérateur	47
3.6	Espaces de Hilbert, projection et représentation de Riesz	49
3.6.1	Adjoint hilbertien	51
3.6.2	Théorèmes de Hellinger–Toeplitz	51
3.7	Dual des espaces ℓ^p	52
3.8	Topologies faible et faible-* dans le cadre normé	56
3.9	Théorème de Banach–Alaoglu	58
3.10	Exercices	59
4	Opérateurs compacts et opérateurs de Hilbert–Schmidt	61
4.1	Opérateurs compacts entre espaces normés	61
4.2	Opérateurs de Hilbert–Schmidt	63
4.3	Perturbations compactes de l'identité	66
4.4	Exercices	70
II	Espaces localement convexes	72
5	Espaces localement convexes	73
5.1	Semi-normes, semi-boules et topologie associée	73
5.2	Espaces vectoriels topologiques	77
5.3	Espaces localement convexes et équivalence	80
5.4	Espaces séparés, normés et métrisables	85
5.5	Opérateurs linéaires continus et relativement ouverts	90
5.6	Exercices	93
6	Constructions d'espaces localement convexes	96
6.1	Sous-espaces	96
6.2	Espaces produits	97
6.3	Espaces quotients	98
6.4	Limites projectives	101
6.5	Limites inductives	103
7	Complétude et espaces de Fréchet	111
7.1	Suites, filtres et convergence	111

7.2	Filtres de Cauchy et espaces complets	114
7.2.1	Complétude des produits	117
7.3	Espaces de Fréchet	117
7.3.1	Critère des séries dans un espace à semi-normes dénombrables	118
7.4	Stabilité des espaces de Fréchet	120
7.5	Banach–Steinhaus dans les espaces de Fréchet	123
7.6	Opérateur ouvert et graphe fermé	125
7.7	Sommes directes topologiques	129
7.8	Exercices	131
8	Bornitude, précompacité et compacité	134
8.1	Parties bornées	134
8.2	Parties précompactes	137
8.3	Parties compactes et extractables	140
8.4	Généralisation des opérateurs compacts aux espaces localement convexes	143
8.5	Exercices	143
9	Dualité dans les espaces localement convexes	145
9.1	Dual topologique et conséquences de Hahn–Banach	145
9.1.1	L’espace des distributions	150
9.2	Topologies faible et faible-*	150
9.3	Opérateurs et topologies faibles	155
9.4	Théorème d’Alaoglu	156
9.5	Exercices	157
	Références	158

Introduction

L'analyse fonctionnelle est une branche des mathématiques qui étudie les espaces fonctionnels, c'est-à-dire les espaces vectoriels constitués de fonctions (ou de suites) et munis d'une topologie naturellement associée. Les espaces vectoriels normés constituent un exemple basique de tels espaces. Par exemple, la topologie naturelle de l'espace $L^1(\mathbb{R})$ peut être définie à partir de la norme

$$\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$$

pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$. Une base de voisinages de f est donnée par les boules ouvertes

$$b(f, r) := \left\{ g \in L^1(\mathbb{R}) : \|f - g\|_1 < r \right\}, \quad r > 0.$$

On retrouve bien qu'une suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de $L^1(\mathbb{R})$ converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$ si et seulement si pour tout $r > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $f_m \in b(f, r)$ pour tout $m \geq M$, c'est-à-dire si et seulement si

$$\|f_m - f\|_1 \longrightarrow 0$$

lorsque $m \rightarrow +\infty$.

Sur l'espace $C^0(K)$ des fonctions continues sur un compact $K \subseteq \mathbb{R}$, la notion de convergence naturelle est donnée par la convergence uniforme. Notons en effet qu'une limite ponctuelle de fonctions continues ne donne pas nécessairement une fonction continue. Cette notion de convergence uniforme est donnée par la norme

$$\|f\|_K := \sup_{x \in K} |f(x)|$$

et par les systèmes de voisinages

$$b(f, r) := \left\{ g \in C^0(K) : \|f - g\|_K < r \right\}, \quad r > 0.$$

C'est la topologie la moins fine qui permet de conserver la continuité par passage à la limite.

Remarquons à présent que si l'on considère l'espace $C^0(\Omega)$ des fonctions continues sur un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, il suffit d'imposer la convergence uniforme sur tous les compacts de Ω pour conserver la continuité par passage à la limite. Autrement dit, une suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de $C^0(\Omega)$ converge vers f dans $C^0(\Omega)$ si et seulement si pour tout compact $K \subseteq \Omega$,

$$\|f_m - f\|_K \longrightarrow 0$$

lorsque $m \rightarrow +\infty$. On se retrouve ici avec toute une famille $\|\cdot\|_K$ de "semi-normes" qui définissent la topologie de $C^0(\Omega)$. Le but de ce cours est de formaliser cette constatation et d'étudier de manière plus générale les espaces fonctionnels dont la topologie peut être définie par une famille de semi-normes.

Les notes sont organisées en deux parties nettement séparées. La première développe le cadre des espaces normés et des espaces de Banach. Après les opérateurs linéaires continus et les grands théorèmes associés, nous étudions la bornitude, la précompacité et la compacité dans le cadre métrique, ce qui conduit au théorème d'Arzelà–Ascoli. Nous abordons ensuite la dualité, le théorème de Hahn–Banach et les espaces de Hilbert. La réflexivité est introduite avant les topologies faible et faible-* ; le théorème de Banach–Alaoglu permet alors d'en tirer une conséquence importante : dans un espace de Banach réflexif, la boule unité est faiblement compacte. La partie se termine par les opérateurs compacts et les opérateurs de Hilbert–Schmidt, qui utilisent directement les critères de compacité établis auparavant.

La seconde partie est consacrée aux espaces localement convexes. Les espaces $C^\infty(\Omega)$, $\mathcal{D}^K(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$ serviront régulièrement de fil conducteur pour relier constructions, complétude, bornitude et dualité. Nous commençons par leur définition et leurs propriétés élémentaires, puis nous montrons comment en construire naturellement par sous-espaces, produits, quotients et limites projectives ou inductives. Nous introduisons ensuite la complétude dans le cadre général ; ce n'est qu'après cette définition que sont introduits les espaces de Fréchet et les résultats qui leur sont propres. Nous revenons alors sur les constructions précédentes afin d'étudier la stabilité de la complétude. La bornitude, la précompacité et la compacité sont ensuite généralisées au cadre localement convexe, en indiquant explicitement ce qui change par rapport au cas normé. Enfin, la dualité topologique est reprise dans ce cadre général. Le théorème de Hahn–Banach n'y est pas redémontré : sa forme semi-normée, établie dans la première partie, est simplement réutilisée pour obtenir les conséquences propres aux espaces localement convexes. Les topologies faible et faible-* conduisent enfin à la forme générale du théorème d'Alaoglu.

Partie I

Espaces normés et espaces de Banach

1 Espaces normés, espaces de Banach et opérateurs linéaires

Ce chapitre fixe le cadre normé qui servira de point de départ à tout le cours. Nous commençons par les semi-normes et les normes, puis nous introduisons la complétude et les espaces de Banach. Nous étudions ensuite les applications linéaires continues, leur norme d'opérateur et les trois grands théorèmes de l'analyse fonctionnelle dans le cadre de Banach.

Les semi-normes sont introduites dès maintenant, bien que leur rôle systématique n'apparaisse que dans la seconde partie. Ce choix permettra notamment d'énoncer le théorème de Hahn–Banach sous sa forme originale dans le chapitre consacré à la dualité, sans utiliser de notion qui n'aurait pas encore été définie.

1.1 Normes, boules et topologie

Nous commençons par fixer le langage du cadre normé. La norme fournit à la fois une notion de taille, une distance et donc une topologie ; elle permet ainsi de parler de convergence et de continuité dans un espace vectoriel.

Dans tout le cours, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.1. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une application $p : X \rightarrow [0, +\infty[$ est une *semi-norme* sur X si

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$,
2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$

pour tous $x, y \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Une *norme* sur X est une semi-norme p sur X pour laquelle

3. $p(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Notons que la condition 2 implique que $p(0) = 0$. Ainsi la condition 3 peut aussi s'écrire

$$p(x) = 0 \implies x = 0.$$

Lorsqu'il s'agit d'une norme, on utilise en général la notation $\|\cdot\|$. Naturellement, on introduit la notion de boules ouvertes et fermées.

Définition 1.1.2. Pour $x \in X$ et $r > 0$, on note

$$b_X(x, r) = \{y \in X : \|y - x\| < r\}, \quad B_X(x, r) = \{y \in X : \|y - x\| \leq r\}.$$

Lorsque $x = 0$ et $r = 1$, on écrit simplement b_X et B_X .

La distance $d(x, y) = \|x - y\|$ fait de X un espace métrique. L'inégalité triangulaire entraîne l'inégalité triangulaire inverse

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|,$$

qui montre notamment que l'application $x \mapsto \|x\|$ est continue.

La topologie associée à la distance est invariante par translation et compatible avec les opérations vectorielles.

Proposition 1.1.3. *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé.*

1. Une suite (x_n) converge vers x si et seulement si $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.
2. Une suite (x_n) est de Cauchy si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ pour tous $m, n \geq N$.
3. L'addition $X \times X \rightarrow X$ et la multiplication scalaire $\mathbb{K} \times X \rightarrow X$ sont continues.

Démonstration. Les deux premiers points sont les traductions métriques des définitions. Pour le troisième, on utilise

$$\|(x + y) - (x' + y')\| \leq \|x - x'\| + \|y - y'\|$$

et

$$\|\lambda x - \mu y\| \leq |\lambda| \|x - y\| + |\lambda - \mu| \|y\|.$$

■

1.1.1 Exemples fondamentaux

Exemples 1.1.4.

▷ Sur $\mathbb{K}^d$, les applications

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^d |x_j|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^d |x_j|^2 \right)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq d} |x_j|$$

sont des normes.

▷ Si K est un espace compact et si $C(K)$ désigne l'espace des fonctions continues de K dans $\mathbb{K}$, alors

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$$

est une norme.

▷ Pour $1 \leq p < +\infty$,

$$\ell^p = \left\{ x = (x_n)_{n \geq 0} : \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}$$

est muni de la norme

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

On munit

$$\ell^\infty = \{x = (x_n) : \sup_n |x_n| < +\infty\}$$

de la norme $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$.

▷ Le sous-espace

$$c_0 = \{x = (x_n) \in \ell^\infty : x_n \rightarrow 0\}$$

est muni de la norme induite par ℓ^∞ .

▷ Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré et $1 \leq p < +\infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est muni de

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Pour $p = \infty$, on utilise la norme du supremum essentiel.

▷ Pour $0 < \alpha \leq 1$, l'espace de Hölder $C^\alpha([a, b])$ est muni de

$$\|f\|_{C^\alpha} = \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

1.1.2 Normes équivalentes

Définition 1.1.5. Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur un même espace vectoriel X sont *équivalentes* s'il existe des constantes $c, C > 0$ telles que

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \quad (x \in X).$$

Proposition 1.1.6. Deux normes sont équivalentes si et seulement si elles définissent la même topologie sur X .

Démonstration. Les inégalités donnent immédiatement des inclusions entre les boules et donc l'égalité des topologies. Réciproquement, si les topologies coïncident, la boule unité pour la première norme est un voisinage de 0 pour la seconde. Il existe donc $r > 0$ tel que $b_{\|\cdot\|_2}(0, r) \subseteq b_{\|\cdot\|_1}(0, 1)$, ce qui implique $\|x\|_1 \leq r^{-1}\|x\|_2$. On échange ensuite les rôles des deux normes. ■

1.2 Complétude et espaces de Banach

La complétude exprime la stabilité de l'espace par passage à la limite. Elle est au cœur de la plupart des grands théorèmes de l'analyse fonctionnelle et justifie le rôle privilégié des espaces de Banach.

Définition 1.2.1. Un espace normé est *complet* si toute suite de Cauchy y converge. Un *espace de Banach* est un espace normé complet.

Exemples 1.2.2.

- ▷ Les espaces $\mathbb{K}^d$, ℓ^p pour $1 \leq p \leq \infty$, c_0 et $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p \leq \infty$ sont des espaces de Banach.
- ▷ Si K est compact, $C(K)$ muni de la norme uniforme est un espace de Banach.

Donnons, à titre d'exemple, la preuve pour $C(K)$.

Proposition 1.2.3. Si K est compact, l'espace $C(K)$ muni de la norme uniforme est complet.

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy pour la norme uniforme. Pour tout $x \in K$, la suite scalaire $(f_n(x))$ est de Cauchy ; on pose $f(x) = \lim_n f_n(x)$. Le caractère de Cauchy uniforme donne $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$. La limite uniforme d'une suite de fonctions continues étant continue, on a $f \in C(K)$. ■

1.2.1 Critère des séries absolument convergentes

Définition 1.2.4. Une série $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ dans un espace normé X est *absolument convergente* si

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\| < +\infty.$$

Théorème 1.2.5. Un espace normé X est complet si et seulement si toute série absolument convergente dans X est convergente.

Démonstration. Supposons X complet. Les sommes partielles d'une série absolument convergente forment une suite de Cauchy, car

$$\left\| \sum_{k=m}^n x_k \right\| \leq \sum_{k=m}^n \|x_k\|.$$

Elles convergent donc.

Réciproquement, soit (x_n) une suite de Cauchy. On peut extraire une sous-suite (x_{n_k}) telle que

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq 2^{-k}.$$

La série

$$x_{n_0} + \sum_{k=0}^{+\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$$

est absolument convergente et converge par hypothèse. Ses sommes partielles sont les x_{n_k} ; la suite de Cauchy $(x_n)_n$ possède donc une sous-suite convergente, et converge elle-même vers la même limite. ■

1.2.2 Sous-espaces et produits

Proposition 1.2.6. *Soit Y un sous-espace vectoriel d'un espace normé X .*

1. *Si Y est fermé et si X est complet, alors Y est complet.*
2. *Si Y est complet pour la norme induite, alors Y est fermé dans X .*

Démonstration. Pour le premier point, une suite de Cauchy de Y converge dans X , et sa limite appartient à Y puisque Y est fermé. Pour le second, si une suite de Y converge dans X , elle est de Cauchy dans Y et y converge ; l'unicité de la limite conclut. ■

Proposition 1.2.7. *Si $X_1, \dots, X_m$ sont des espaces de Banach, alors leur produit muni de la norme*

$$\|(x_1, \dots, x_m)\| = \max_{1 \leq j \leq m} \|x_j\|_{X_j},$$

est un espace de Banach.

1.2.3 Espaces quotients

La construction d'un quotient permet d'identifier les vecteurs qui diffèrent d'un élément d'un sous-espace donné. Nous verrons comment cette construction algébrique se combine avec la norme et dans quelles conditions elle préserve la complétude.

Soit M un sous-espace vectoriel d'un espace normé X . On note $[x] = x + M$ la classe de x dans le quotient algébrique X/M .

Définition 1.2.8. On définit

$$\|[x]\|_{X/M} = \inf_{m \in M} \|x + m\| = \text{dist}(x, M).$$

Il s'agit toujours d'une semi-norme sur X/M . C'est une norme si et seulement si M est fermé.

Démonstration. Les propriétés d'homogénéité et d'inégalité triangulaire sont immédiates. De plus, $\|[x]\|_{X/M} = 0$ équivaut à $x \in \overline{M}$. La séparation est donc équivalente à la fermeture de M . ■

Proposition 1.2.9. *Si M est fermé, la projection canonique*

$$\pi_M : X \rightarrow X/M, \quad x \mapsto [x],$$

est linéaire, continue, surjective et ouverte. Plus précisément,

$$\pi_M(b_X(x, r)) = b_{X/M}([x], r).$$

Démonstration. On a $\|\pi_M(x)\|_{X/M} \leq \|x\|$, donc π_M est continue. Si $[y] \in b_{X/M}([x], r)$, il existe $m \in M$ tel que $\|y - x + m\| < r$; le représentant $y + m$ appartient alors à $b_X(x, r)$. L'inclusion réciproque est immédiate. ■

Théorème 1.2.10. *Si X est un espace de Banach et si M est un sous-espace fermé, alors X/M est un espace de Banach.*

Démonstration. Utilisons le critère des séries. Soit $\sum_{n \geq 0} [x_n]$ une série absolument convergente dans X/M . Pour chaque n , choisissons $y_n \in [x_n]$ tel que

$$\|y_n\| \leq \|[x_n]\|_{X/M} + 2^{-n}.$$

La série $\sum_n y_n$ est absolument convergente dans X et converge donc. Par continuité de π_M , la série $\sum_n [x_n] = \sum \pi_M(y_n)$ converge dans X/M . Le Théorème 1.2.5 conclut. ■

1.3 Espaces de dimension finie

En dimension finie, toutes les normes conduisent à la même notion de convergence. Cette rigidité contraste fortement avec le cas de dimension infinie et explique pourquoi plusieurs difficultés propres à l'analyse fonctionnelle n'apparaissent qu'en dimension infinie.

Théorème 1.3.1. *Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_d)$ une base de X et posons

$$\left\| \sum_{j=1}^d \lambda_j e_j \right\|_{\infty} = \max_{1 \leq j \leq d} |\lambda_j|.$$

Si N est une norme quelconque sur X , alors

$$N \left(\sum_{j=1}^d \lambda_j e_j \right) \leq \sum_{j=1}^d |\lambda_j| N(e_j) \leq C \max_j |\lambda_j|$$

avec $C = \sum_j N(e_j)$. Ainsi N est continue pour la norme $\|\cdot\|_{\infty}$. Sur la sphère compacte

$$S = \{x \in X : \|x\|_{\infty} = 1\},$$

la fonction N atteint un minimum $m > 0$. Par homogénéité,

$$m\|x\|_{\infty} \leq N(x) \leq C\|x\|_{\infty}$$

pour tout $x \in X$. Toute norme est donc équivalente à $\|\cdot\|_{\infty}$. ■

Corollaire 1.3.2. *Tout espace normé de dimension finie est complet. Toute partie fermée et bornée d'un tel espace est compacte.*

Démonstration. Après identification linéaire avec $\mathbb{K}^d$, la première assertion découle de la complétude de $\mathbb{K}^d$ et la seconde du théorème de Heine–Borel. Les normes étant équivalentes, ces propriétés ne dépendent pas de la norme choisie. ■

Au Chapitre 2, nous préciserons ce contraste entre dimension finie et dimension infinie en caractérisant la dimension finie par la précompacité de la boule unité.

Corollaire 1.3.3. *Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé est fermé.*

Démonstration. Soit E un tel sous-espace et soit $(x_n)_n$ une suite de E qui converge dans l'espace ambiant. Elle est de Cauchy dans E . Le Corollaire 1.3.2 montre qu'elle converge dans E . L'unicité de la limite donne que sa limite ambiante appartient à E . ■

1.4 Continuité et norme d'opérateur

Pour une application linéaire entre espaces normés, la continuité se traduit par une estimation très simple. La norme d'opérateur quantifie cette continuité et permet de considérer les applications linéaires continues comme les éléments d'un nouvel espace normé.

Théorème 1.4.1. Soient X et Y deux espaces normés et $T : X \rightarrow Y$ une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. T est continue ;
2. T est continue en 0 ;
3. il existe $C \geq 0$ tel que

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X \quad (x \in X);$$

4. T est bornée sur la boule unité de X .

Démonstration. L'implication $1 \Rightarrow 2$ est immédiate. Si T est continue en 0, il existe $r > 0$ tel que $\|x\|_X < r$ implique $\|Tx\|_Y < 1$. Pour $x \neq 0$, on applique cette propriété à $rx/(2\|x\|_X)$ et on obtient

$$\|Tx\|_Y \leq \frac{2}{r}\|x\|_X.$$

Ainsi 2 implique 3. Les implications $3 \Rightarrow 4$ et $3 \Rightarrow 1$ sont immédiates. Enfin, si T est bornée sur la boule unité, l'homogénéité donne l'estimation du point 3. ■

Définition 1.4.2. Soient X et Y deux espaces normés. L'espace des applications linéaires continues de X dans Y est noté $L(X, Y)$.

Pour $T \in L(X, Y)$, on définit la *norme d'opérateur* de T par

$$\|T\| = \inf \{C \geq 0 : \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X \text{ pour tout } x \in X\}.$$

Proposition 1.4.3. Soient X et Y deux espaces normés et $T \in L(X, Y)$. Alors

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y.$$

Si $X \neq \{0\}$, on a également

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y.$$

En particulier,

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\| \|x\|_X \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Démonstration. Posons

$$M = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y.$$

Montrons d'abord que $\|T\| = M$. Soit $C \geq 0$ tel que

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Pour tout x tel que $\|x\|_X \leq 1$, on a alors

$$\|Tx\|_Y \leq C.$$

Par conséquent, on a $M \leq C$. Cette inégalité étant vraie pour toute constante admissible C , on obtient

$$M \leq \|T\|.$$

Réciproquement, soit $x \in X$. Si $x = 0$, alors

$$\|Tx\|_Y = 0.$$

Si $x \neq 0$, on écrit

$$x = \|x\|_X \frac{x}{\|x\|_X},$$

avec

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_X} \right\|_X = 1.$$

Par linéarité de T ,

$$\|Tx\|_Y = \|x\|_X \left\| T \left(\frac{x}{\|x\|_X} \right) \right\|_Y \leq M \|x\|_X.$$

Ainsi, M est lui-même une constante admissible dans la définition de $\|T\|$. On en déduit

$$\|T\| \leq M.$$

Finalement,

$$\|T\| = M = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y.$$

Supposons maintenant $X \neq \{0\}$ et posons

$$M_1 = \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y.$$

Comme la sphère unité est contenue dans la boule unité, on a $M_1 \leq M$. D'autre part, si $\|x\|_X \leq 1$ et $x \neq 0$, alors

$$\|Tx\|_Y = \|x\|_X \left\| T \left(\frac{x}{\|x\|_X} \right) \right\|_Y \leq M_1 \|x\|_X \leq M_1.$$

Le cas $x = 0$ est immédiat. Par conséquent, $M \leq M_1$ et au total, on obtient

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y = \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y.$$

Enfin, l'estimation

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\| \|x\|_X$$

résulte directement de l'égalité précédente. ■

Proposition 1.4.4. *La norme d'opérateur est une norme sur $L(X, Y)$. De plus, si $S \in L(Y, Z)$, alors*

$$\|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\|.$$

Démonstration. Soient $S, T \in L(X, Y)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

La positivité est immédiate :

$$\|T\| \geq 0.$$

Montrons ensuite que

$$\|T\| = 0 \iff T = 0.$$

Si $T = 0$, alors clairement $\|T\| = 0$. Réciproquement, si $\|T\| = 0$, alors, pour tout $x \in X$,

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\| \|x\|_X = 0.$$

Donc $Tx = 0$ pour tout $x \in X$, et ainsi $T = 0$.

Pour l'homogénéité, si $\lambda = 0$, le résultat est immédiat. Supposons $\lambda \neq 0$. Pour tout $x \in X$,

$$\|(\lambda T)x\|_Y = |\lambda| \|Tx\|_Y \leq |\lambda| \|T\| \|x\|_X.$$

On en déduit

$$\|\lambda T\| \leq |\lambda| \|T\|.$$

En appliquant cette inégalité à

$$T = \frac{1}{\lambda}(\lambda T),$$

on obtient

$$\|T\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda T\|,$$

et donc

$$\|\lambda T\| \geq |\lambda| \|T\|.$$

Enfin, pour tout $x \in X$,

$$\|(S + T)x\|_Y \leq \|Sx\|_Y + \|Tx\|_Y \leq (\|S\| + \|T\|) \|x\|_X.$$

La constante $\|S\| + \|T\|$ est donc admissible dans la définition de $\|S + T\|$. Par conséquent,

$$\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|.$$

Pour la composition,

$$\|S(Tx)\|_Z \leq \|S\| \|Tx\|_Y \leq \|S\| \|T\| \|x\|_X.$$

■

Exemples 1.4.5.

▷ La forme coordonnée $\pi_j : \mathbb{K}^d \rightarrow \mathbb{K}$, $\pi_j(x) = x_j$, est continue pour toute norme sur $\mathbb{K}^d$.

▷ L'application d'intégration

$$I : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{K}, \quad I(f) = \int_a^b f(t) dt,$$

vérifie $\|I\| = b - a$.

▷ L'opérateur de dérivation

$$D : C^1([a, b]) \rightarrow C([a, b]), \quad Df = f',$$

est continu lorsque $C^1([a, b])$ est muni de la norme $\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, et $\|D\| = 1$.

▷ Si $a = (a_n) \in \ell^\infty$, l'opérateur diagonal

$$M_a : \ell^p \rightarrow \ell^p, \quad M_a(x_n) = (a_n x_n),$$

vérifie $\|M_a\| = \|a\|_\infty$ pour $1 \leq p \leq \infty$.

1.4.1 Applications minorées

Définition 1.4.6. Un opérateur $T \in L(X, Y)$ est *minoré* s'il existe $c > 0$ tel que

$$\|Tx\|_Y \geq c\|x\|_X \quad (x \in X).$$

Un opérateur minoré est injectif et son inverse algébrique $T^{-1} : \text{im } T \rightarrow X$ est continu.

Proposition 1.4.7. Si X est un espace de Banach et si $T \in L(X, Y)$ est minoré, alors $\text{im } T$ est fermée dans Y .

Démonstration. Soit $Tx_n \rightarrow y$ dans Y . L'estimation inférieure montre que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans X , donc converge vers un élément x . Par continuité, $Tx_n \rightarrow Tx$, d'où $y = Tx$. ■

1.5 L'espace des opérateurs continus

Une fois la norme d'opérateur introduite, il est naturel d'étudier l'espace de tous les opérateurs continus entre deux espaces normés. Sa structure reflète directement celle de l'espace d'arrivée, en particulier pour la complétude.

Théorème 1.5.1. *Si Y est un espace de Banach, alors $L(X, Y)$, muni de la norme d'opérateur, est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit $(T_n)_n$ une suite de Cauchy dans $L(X, Y)$. Pour tout $x \in X$,

$$\|T_n x - T_m x\|_Y \leq \|T_n - T_m\| \|x\|_X,$$

donc $(T_n x)$ est de Cauchy dans Y . Posons $Tx = \lim_n T_n x$. L'application T est linéaire. Pour n fixé et $\|x\|_X \leq 1$, on a, en faisant tendre m vers l'infini,

$$\|(T_n - T)x\|_Y \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \|T_n - T_m\|.$$

Le membre de droite tend vers 0 avec n , uniformément sur la boule unité. Ainsi $T \in L(X, Y)$ et $T_n \rightarrow T$ en norme d'opérateur. ■

Définition 1.5.2. Un opérateur $T \in L(X, Y)$ est un *isomorphisme topologique* s'il est bijectif et si son inverse $T^{-1} : Y \rightarrow X$ est continu.

1.6 Prolongement d'un opérateur par densité

Il est fréquent qu'un opérateur soit d'abord défini sur un sous-espace dense où les calculs sont plus simples. La complétude de l'espace d'arrivée permet alors de prolonger l'opérateur sans perdre ni la linéarité ni la continuité.

Théorème 1.6.1 (Prolongement par densité). *Soient X un espace normé, Y un espace de Banach et E un sous-espace vectoriel dense de X . Si $T : E \rightarrow Y$ est linéaire et continu, alors il existe une unique application linéaire continue $\tilde{T} : X \rightarrow Y$ telle que $\tilde{T}|_E = T$. De plus,*

$$\|\tilde{T}\| = \|T\|.$$

Démonstration. L'unicité découle immédiatement de la densité de E et de la continuité. Soit $x \in X$ et soit (x_n) une suite de E qui converge vers x . Comme

$$\|T(x_n) - T(x_m)\|_Y \leq \|T\| \|x_n - x_m\|_X,$$

la suite $(T(x_n))$ est de Cauchy dans Y et converge puisque Y est complet. Si (y_n) est une autre suite de E convergeant vers x , alors

$$\|T(x_n) - T(y_n)\|_Y \leq \|T\| \|x_n - y_n\|_X \longrightarrow 0,$$

de sorte que les deux limites coïncident. On peut donc poser

$$\tilde{T}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n).$$

La linéarité se déduit de celle de T en passant à la limite. Enfin,

$$\|\tilde{T}(x)\|_Y \leq \|T\| \|x\|_X,$$

donc $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$. L'inégalité inverse vient de la restriction à E . ■

1.7 Le théorème de Banach–Steinhaus

Le théorème de Banach–Steinhaus est le premier des trois grands résultats où la complétude joue un rôle décisif. Il transforme une information de bornitude ponctuelle en une estimation uniforme sur une famille entière d'opérateurs.

Rappelons le théorème de Baire : tant tout espace métrique complet, toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. De manière équivalente, toute réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide. En particulier, un espace de Banach non vide ne peut pas être réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.

Théorème 1.7.1 (Banach–Steinhaus). *Soient X un espace de Banach, Y un espace normé et $(T_i)_{i \in I} \subseteq L(X, Y)$. Si*

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\|_Y < +\infty \quad \text{pour tout } x \in X,$$

alors

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| < +\infty.$$

Démonstration. Pour $n \geq 1$, posons

$$F_n = \left\{ x \in X : \sup_{i \in I} \|T_i x\|_Y \leq n \right\}.$$

Chaque F_n est fermé et, par hypothèse, $X = \bigcup_{n \geq 1} F_n$. Le théorème de Baire fournit $n, x_0 \in X$ et $r > 0$ tels que $b_X(x_0, r) \subseteq F_n$. Si $\|h\|_X < r$, alors $x_0 + h$ et x_0 appartiennent à F_n , donc

$$\|T_i h\|_Y \leq 2n \quad (i \in I).$$

Par homogénéité, pour $x \neq 0$,

$$\|T_i x\|_Y \leq \frac{4n}{r} \|x\|_X.$$

La constante est indépendante de i . ■

Corollaire 1.7.2 (Limite simple d'opérateurs). *Soient X un espace de Banach, Y un espace normé et $(T_n)_n$ une suite de $L(X, Y)$. Si $(T_n x)_n$ converge dans Y pour tout $x \in X$, alors l'application*

$$Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$$

est linéaire continue. De plus, $\sup_n \|T_n\| < +\infty$.

Démonstration. La famille $(T_n)_n$ est ponctuellement bornée. Le théorème de Banach–Steinhaus donne une constante C telle que $\|T_n x\| \leq C\|x\|$. On passe à la limite. ■

Corollaire 1.7.3 (Continuité des applications bilinéaires). *Soient X un espace de Banach, Y et Z des espaces normés et $B : X \times Y \rightarrow Z$ une application bilinéaire séparément continue. Alors B est continue. Plus précisément, il existe $C > 0$ tel que*

$$\|B(x, y)\|_Z \leq C\|x\|_X \|y\|_Y.$$

Démonstration. Pour $y \in B_Y$, posons $T_y(x) = B(x, y)$. Pour tout $x \in X$, la continuité de $y \mapsto B(x, y)$ donne

$$\sup_{\|y\| \leq 1} \|T_y x\|_Z < +\infty.$$

Le théorème de Banach–Steinhaus appliqué à la famille $(T_y)_{y \in B_Y}$ fournit $\sup_{\|y\| \leq 1} \|T_y\| < +\infty$. L'homogénéité en y donne l'estimation annoncée. ■

Présentons une application de ce Théorème aux séries de Fourier. Pour une fonction continue 2π -périodique, notons

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{inx}$$

la N -ième somme partielle de sa série de Fourier et

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^N e^{int} = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)}$$

le noyau de Dirichlet.

Corollaire 1.7.4. *Il existe une fonction continue 2π -périodique f telle que la suite $(S_N f(0))_N$ diverge.*

Démonstration. Soit $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues 2π -périodiques, muni de la norme uniforme, et définissons

$$T_N f = S_N f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_N(t) dt.$$

Chaque T_N est une forme linéaire continue. Supposons par l'absurde que $(T_N f)_N$ converge pour tout f . La famille (T_N) est alors ponctuellement bornée et Banach–Steinhaus donne une constante C telle que $|T_N f| \leq C \|f\|_\infty$ pour tous N et f .

Pour $N, k \geq 1$, posons

$$f_{N,k}(t) = \frac{D_N(t)}{\sqrt{|D_N(t)|^2 + 1/k}}.$$

Alors $\|f_{N,k}\|_\infty \leq 1$ et, par convergence dominée,

$$T_N(f_{N,k}) \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_N(t)| dt \quad (k \rightarrow \infty).$$

On obtiendrait donc une borne uniforme sur les normes L^1 des noyaux de Dirichlet. Or

$$\int_0^{2\pi} |D_N(t)| dt \geq 2 \int_0^{(N+1/2)2\pi} \frac{|\sin u|}{u} du,$$

et le membre de droite tend vers $+\infty$. Contradiction. ■

Une généralisation à venir. Le Théorème 1.7.1 utilise une seule norme dans l'espace de départ et dans l'espace d'arrivée. Plus loin, la même idée sera formulée dans un cadre où la topologie est décrite par une famille de semi-normes ; la borne uniforme sur les normes d'opérateurs sera alors remplacée par une notion de contrôle uniforme adaptée à ce nouveau cadre.

1.8 Le théorème de l'opérateur ouvert

Le théorème de l'opérateur ouvert montre qu'une application linéaire continue surjective entre espaces de Banach possède automatiquement une propriété topologique supplémentaire. Sa conséquence la plus importante est la continuité de l'inverse d'un opérateur bijectif continu.

Lemme 1.8.1. *Soient X et Y des espaces de Banach et $T \in L(X, Y)$ surjectif. Il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\delta b_Y \subseteq \overline{T(B_X)}.$$

Démonstration. La surjectivité donne

$$Y = \bigcup_{n \geq 1} T(nB_X) \subseteq \bigcup_{n \geq 1} \overline{T(nB_X)}.$$

Le théorème de Baire implique que l'un des fermés $\overline{T(nB_X)} = n\overline{T(B_X)}$ est d'intérieur non vide. Ainsi $C = \overline{T(B_X)}$ contient une boule $b_Y(y_0, r)$. Comme C est convexe et équilibré,

$$rb_Y \subseteq C - C \subseteq 2C,$$

d'où $(r/2)b_Y \subseteq C$. ■

Lemme 1.8.2. *Sous les hypothèses du Lemme 1.8.1, si $\delta b_Y \subseteq \overline{T(B_X)}$, alors*

$$\frac{\delta}{2}b_Y \subseteq T(B_X).$$

Démonstration. Soit $y \in (\delta/2)b_Y$. Par récurrence, choisissons $x_n \in X$ tels que

$$\|x_n\|_X < 2^{-n} \quad \text{et} \quad \left\| y - T \left(\sum_{j=1}^n x_j \right) \right\|_Y < \delta 2^{-(n+1)}.$$

Le choix est possible car, après l'étape $n-1$, le résidu appartient à $\delta 2^{-n}b_Y \subseteq \overline{T(2^{-n}B_X)}$. La série $\sum_n x_n$ converge dans X vers un élément x de B_X . Par continuité de T , on a $Tx = y$. ■

Théorème 1.8.3 (Opérateur ouvert). *Toute application linéaire continue et surjective entre deux espaces de Banach est ouverte.*

Démonstration. Les deux lemmes précédents donnent $c > 0$ tel que $cb_Y \subseteq T(B_X)$. Soit U un ouvert de X et $x \in U$. Il existe $r > 0$ tel que $x + rB_X \subseteq U$. Alors

$$Tx + rc b_Y \subseteq T(U),$$

ce qui montre que $T(U)$ est ouvert. ■

Corollaire 1.8.4 (Théorème de l'inverse continu). *Toute bijection linéaire continue entre deux espaces de Banach est un isomorphisme topologique.*

Démonstration. Si T est ouverte, l'image réciproque par T^{-1} d'un ouvert de X est l'image par T de cet ouvert ; elle est donc ouverte. ■

Corollaire 1.8.5. *Soient X, Y des espaces de Banach et $T \in L(X, Y)$ injectif. Alors T est minoré si et seulement si $\text{im } T$ est fermée.*

Démonstration. Le sens direct est la Proposition 1.4.7. Si l'image est fermée, elle est un espace de Banach. L'opérateur $T : X \rightarrow \text{im } T$ est une bijection linéaire continue ; son inverse est continu par le Corollaire 1.8.4, ce qui fournit l'estimation inférieure. ■

Corollaire 1.8.6. Soient X, Y des espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ d'image fermée. L'opérateur induit

$$\tilde{T} : X / \ker T \longrightarrow \operatorname{im} T, \quad \tilde{T}([x]) = Tx,$$

est un isomorphisme topologique.

Démonstration. Le noyau est fermé, donc le quotient est un espace de Banach par le Théorème 1.2.10. L'opérateur induit est une bijection linéaire continue entre espaces de Banach ; on applique le théorème de l'inverse continu. ■

Présentons à présent quelques applications du théorème de l'opérateur ouvert.

Corollaire 1.8.7. La transformée de Fourier de $L^1(\mathbb{R})$ dans

$$C_0^0(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}) : \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \right\}$$

n'est pas surjective.

Démonstration. La transformée de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R})$ est linéaire et continue. Elle est injective par le théorème d'unicité de la transformée de Fourier. Supposons-la surjective. Le théorème de l'opérateur ouvert, appliqué à cette bijection entre espaces de Banach, fournirait une constante $C > 0$ telle que

$$\|f\|_1 \leq C \|\mathcal{F}f\|_\infty \quad \text{pour tout } f \in L^1(\mathbb{R}).$$

Choisissons une fonction non nulle $\varphi \in C_c^\infty((-1/4, 1/4))$, positive, et notons u sa transformée de Fourier inverse. Pour $N \geq 1$, posons

$$g_N(\xi) = \sum_{k=1}^N \varphi(\xi - k).$$

Les supports des termes sont disjoints, donc $\|g_N\|_\infty = \|\varphi\|_\infty$. Sa transformée inverse est, à la constante de normalisation près fixée par la convention choisie,

$$f_N(x) = u(x) \sum_{k=1}^N e^{ikx}.$$

Comme $u(0) > 0$, il existe $c, \eta > 0$ tels que $|u(x)| \geq c$ pour $|x| \leq \eta$. Par conséquent,

$$\|f_N\|_1 \geq c \int_{-\eta}^{\eta} \left| \sum_{k=1}^N e^{ikx} \right| dx.$$

La dernière intégrale tend vers $+\infty$ par l'estimation classique de la norme L^1 du noyau de Dirichlet, utilisée dans la preuve du Corollaire 1.7.4, alors que $\|g_N\|_\infty$ reste constante. On obtient

une contradiction. ■

La preuve du théorème de l'opérateur ouvert donne également le critère de surjectivité suivant.

Corollaire 1.8.8. *Soient X et Y des espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Alors T est surjectif si et seulement s'il existe $R > 0$ tel que*

$$b_Y(0, 1) \subseteq \overline{T(b_X(0, R))}.$$

Démonstration. Si T est surjectif, le Théorème 1.8.3 fournit $r > 0$ tel que $b_Y(0, r) \subseteq T(b_X(0, 1))$. Par homogénéité,

$$b_Y(0, 1) \subseteq T(b_X(0, 1/r)).$$

Réciproquement, supposons qu'il existe $R > 0$ tel que $b_Y(0, 1) \subseteq \overline{T(b_X(0, R))}$. La linéarité donne

$$\frac{1}{R}b_Y(0, 1) \subseteq \overline{T(b_X(0, 1))}.$$

Le Lemme 1.8.2 implique alors que l'image de la boule unité de X contient une boule centrée en 0 dans Y . L'image de T est donc un sous-espace vectoriel de Y qui contient un voisinage de 0 ; elle est égale à Y . ■

Le corollaire précédent montre que ℓ^1 joue un rôle universel parmi les espaces de Banach séparables.

Corollaire 1.8.9. *Si X est un espace de Banach séparable, alors il existe une surjection linéaire continue de ℓ^1 sur X .*

Démonstration. Soit $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ une partie dense de la boule unité de X . Pour $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n x_n$ est absolument convergente, car

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|\lambda_n x_n\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda_n|.$$

Comme X est un espace de Banach, elle converge. On peut donc définir

$$T : \ell^1 \longrightarrow X, \quad T((\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n x_n.$$

L'application T est linéaire et continue, et $x_n = T(e_n)$ pour tout n . Pour tout $R > 1$,

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq T(b_{\ell^1}(0, R)),$$

d'où

$$b_X(0, 1) \subseteq \overline{T(b_{\ell^1}(0, R))}.$$

Le Corollaire 1.8.8 donne la surjectivité de T . ■

Une généralisation à venir. Une version plus générale du théorème de l'opérateur ouvert sera établie plus loin. La norme et les boules normiques seront alors remplacées par une distance invariante par translation construite à partir d'une famille dénombrable de semi-normes.

1.9 Le théorème du graphe fermé

Le théorème du graphe fermé donne un critère de continuité qui ne repose plus sur une estimation directe de l'opérateur. Il suffit de vérifier que la relation $y = T(x)$ est stable par passage à la limite.

Définition 1.9.1. Le *graphe* d'une application linéaire $T : X \rightarrow Y$ est le sous-espace

$$\mathcal{G}(T) = \{(x, Tx) : x \in X\} \subseteq X \times Y.$$

Théorème 1.9.2 (Grphe fermé). *Soient X et Y deux espaces de Banach et $T : X \rightarrow Y$ une application linéaire définie sur tout X . Alors T est continue si et seulement si son graphe est fermé dans $X \times Y$.*

Démonstration. Si T est continue et si $(x_n, Tx_n) \rightarrow (x, y)$, alors $Tx_n \rightarrow Tx$, donc $y = Tx$.

Réciproquement, supposons le graphe fermé. Il est alors un sous-espace fermé du Banach $X \times Y$, donc un espace de Banach. La projection

$$\pi_X : \mathcal{G}(T) \rightarrow X, \quad (x, Tx) \mapsto x,$$

est une bijection linéaire continue. Son inverse est continu par le théorème de l'inverse continu. Comme $T = \pi_Y \circ \pi_X^{-1}$, l'opérateur T est continu. ■

Remarque 1.9.3. L'hypothèse selon laquelle T est défini sur tout X est essentielle. Par exemple, l'opérateur de dérivation

$$D : C^1([0, 1]) \subset C([0, 1]) \longrightarrow C([0, 1])$$

est fermé lorsqu'on considère $C^1([0, 1])$ comme domaine de D , mais il n'est pas borné pour la norme uniforme du domaine ambiant.

Exemple 1.9.4. La complétude des espaces dans le théorème du graphe fermé est également essentielle. Sur $E = C([0, 1])$, considérons les deux normes

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|.$$

L'identité

$$I : (E, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_1)$$

est continue, donc son graphe est fermé. Le graphe de l'application inverse

$$I^{-1} : (E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_\infty)$$

est donc lui aussi fermé. Pourtant I^{-1} n'est pas continue : les deux normes ne sont pas équivalentes sur $C([0, 1])$. Il n'y a pas contradiction avec le théorème précédent, car $(E, \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet.

1.10 Théorème de Stone–Weierstrass

Cette section donne un critère général de densité pour des sous-algèbres de fonctions continues sur un compact.

Lemme 1.10.1. *Soit X un espace topologique compact contenant au moins deux points et D une partie de $C^0(X, \mathbb{R})$. Supposons que*

1. *si $f, g \in D$, alors $\max\{f, g\} \in D$ et $\min\{f, g\} \in D$,*
2. *pour tous $x, y \in X$, $x \neq y$, et tous $r, s \in \mathbb{R}$, il existe $g \in D$ tel que $g(x) = r$ et $g(y) = s$.*

Alors D est dense dans $C^0(X, \mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $f \in C^0(X, \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Fixons $x \in X$. Par la deuxième hypothèse, pour tout $y \in X \setminus \{x\}$, il existe $g \in D$ tel que $g(x) = f(x)$ et $g(y) = f(y)$. En particulier, $g(y) > f(y) - \varepsilon$ et, par continuité de f et g , il existe un voisinage ouvert V de y sur lequel $g > f - \varepsilon$.

Comme X contient au moins deux points, choisissons un point $y_0 \neq x$ et une fonction $g_0 \in D$ telle que $g_0(x) = f(x)$ et $g_0(y_0) = f(y_0)$. Par continuité, $g_0 > f - \varepsilon$ dans un voisinage de x . En utilisant la compacité de X , on obtient donc des ouverts $V_1, \dots, V_n$ de X et des fonctions $g_1, \dots, g_n \in D$ tels que

$$X = V_1 \cup \dots \cup V_n, \quad g_j > f - \varepsilon \text{ sur } V_j, \quad g_j(x) = f(x).$$

Posons $h = \max\{g_1, \dots, g_n\}$. Par la première hypothèse, $h \in D$ et, par construction, $h > f - \varepsilon$ sur X et $h(x) = f(x)$. Par continuité de h et f , il existe donc un voisinage ouvert U de x sur

lequel $h < f + \varepsilon$.

En utilisant à nouveau la compacité de X , on obtient des ouverts $U_1, \dots, U_m$ de X et des fonctions $h_1, \dots, h_m \in D$ tels que

$$X = U_1 \cup \dots \cup U_m, \quad h_j > f - \varepsilon \text{ sur } U_j, \quad h_j < f + \varepsilon \text{ sur } U_j.$$

La fonction $\min\{h_1, \dots, h_m\}$ appartient à D par la première hypothèse et satisfait

$$\sup_{x \in X} |f(x) - \min\{h_1(x), \dots, h_m(x)\}| < \varepsilon.$$

■

Les hypothèses du théorème suivant sont purement algébriques, mais elles impliquent un résultat topologique de densité.

Théorème 1.10.2 (Stone–Weierstrass). *Soit X un espace topologique compact contenant au moins deux points et soit $C^0(X)$ l'espace des fonctions continues sur X à valeurs réelles ou complexes. Supposons que D est une sous-algèbre de $C^0(X)$ telle que*

1. *D est stable par conjugaison complexe,*
2. *D contient les constantes,*
3. *pour tous $x, y \in X$, $x \neq y$, il existe $f \in D$ tel que $f(x) \neq f(y)$.*

Alors D est dense dans $C^0(X)$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que l'adhérence $\overline{D}$ de D est également une sous-algèbre stable par conjugaison complexe qui satisfait les trois hypothèses.

Traisons tout d'abord le cas réel. Fixons $f \in \overline{D}$. Quitte à multiplier f par une constante, on peut supposer que $\sup_{x \in X} |f(x)| < 1$. En utilisant le théorème de Weierstrass, on peut considérer une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients réels qui converge uniformément vers $t \mapsto |t|$ sur $[-1, 1]$. Comme $\overline{D}$ est une sous-algèbre qui contient les constantes, $P_n(f) \in \overline{D}$. De plus, $(P_n(f))$ converge uniformément vers $|f|$, et donc $|f| \in \overline{D}$.

Montrons à présent que $\overline{D}$ satisfait les hypothèses du Lemme 1.10.1. Si $f, g \in \overline{D}$, alors

$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \in \overline{D}, \quad \min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \in \overline{D}.$$

D'autre part, fixons $x \neq y$ dans X et $r, s \in \mathbb{R}$. Par hypothèse, il existe $f \in D$ tel que $f(x) \neq f(y)$. La fonction

$$h(t) = r + \frac{f(t) - f(x)}{f(y) - f(x)}(s - r)$$

appartient à D et satisfait $h(x) = r$ et $h(y) = s$. Le Lemme 1.10.1 donne donc $\overline{D} = C^0(X, \mathbb{R})$.

Dans le cas complexe, si $D' = D \cap C^0(X, \mathbb{R})$, alors la stabilité de D par conjugaison montre que les parties réelle et imaginaire de chaque élément de D appartiennent à D' . Il s'ensuit que D'

contient les constantes et sépare les points. Par la première partie de la preuve, $\overline{D'} = C^0(X, \mathbb{R})$. Si $f \in C^0(X, \mathbb{C})$, il suffit d'écrire $f = \Re f + i\Im f$ et d'approcher chaque morceau par une fonction de D' . ■

Corollaire 1.10.3. *Les polynômes trigonométriques sont denses dans l'espace des fonctions continues 2π -périodiques muni de la norme uniforme.*

Démonstration. On applique le théorème à l'algèbre engendrée par les fonctions $x \mapsto e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, sur le cercle unité. ■

1.11 Exercices

Exercice 1.11.1. Démontrer que les espaces de l'Exemple 1.2.2 sont des espaces de Banach.

Exercice 1.11.2. En utilisant le Théorème 1.2.5, montrer que l'espace $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ est complet pour tout espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Exercice 1.11.3. Montrer que c_0 est un sous-espace fermé de ℓ^∞ . En déduire que c_0 , muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un espace de Banach.

Exercice 1.11.4. On munit $C^1([0, 1])$ de la norme

$$\|f\|_{C^1} = \|f\|_{[0,1]} + \|f'\|_{[0,1]}.$$

Montrer que $C^1([0, 1])$ est un espace de Banach pour cette norme et que l'injection naturelle de $C^1([0, 1])$ dans $C^0([0, 1])$ est continue.

Exercice 1.11.5. Soit $1 \leq p \leq +\infty$. On définit les opérateurs de décalage sur ℓ^p par

$$S(x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots)$$

et

$$L(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Montrer que S et L sont des opérateurs linéaires continus de ℓ^p dans ℓ^p et calculer leurs normes d'opérateur.

Exercice 1.11.6. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}$ telle que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ converge pour toute suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, considérons l'application linéaire

$$T_N : \ell^2 \rightarrow \mathbb{C} : (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^N a_n b_n.$$

1. Montrer que¹

$$\sqrt{\sum_{n=0}^N |a_n|^2} = \inf \{C > 0 : |T_N(b)| \leq C \|b\|_{\ell^2} \ \forall b \in \ell^2\}$$

1. On calcule ce que l'on appellera la norme de l'opérateur T_N .

2. En utilisant le théorème de Banach-Steinhaus, en déduire que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$.

Exercice 1.11.7. Considérons l'espace $L^1(\mathbb{T})$ constitué des fonctions 2π -périodiques intégrables sur $[0, 2\pi]$. Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, on note $\hat{f}(n)$ son $n^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier.

1. Montrer que l'application linéaire

$$T : L^1(\mathbb{T}) \rightarrow c_0(\mathbb{Z}) : f \mapsto (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$$

est continue.

2. En utilisant le théorème classique d'unicité des coefficients de Fourier, qui assure l'injectivité de T , et en procédant par l'absurde, montrer que T n'est pas surjectif.

Exercice 1.11.8. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $C^0([0, 1])$ pour laquelle $C^0([0, 1])$ est un espace de Banach. Supposons que la convergence pour la norme $\|\cdot\|$ implique la convergence ponctuelle. Montrer que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_{[0,1]}$ sont équivalentes.

Exercice 1.11.9. Fixons $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}$ et posons

$$\|x\|_{\mathbf{a}} = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x_n|$$

pour tout $x \in \ell^\infty$.

- Donner une condition nécessaire et suffisante sur la suite $\mathbf{a}$ pour que $\|\cdot\|_{\mathbf{a}}$ soit une norme sur ℓ^∞ .
- Dans ce cas, démontrer que $\|\cdot\|_{\mathbf{a}}$ n'est pas équivalent à la norme usuelle $\|\cdot\|_\infty$ de ℓ^∞ .
- En déduire que $(\ell^\infty, \|\cdot\|_{\mathbf{a}})$ n'est pas complet.

Exercice 1.11.10. 1. Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces de Banach continûment injectés dans un même espace vectoriel topologique séparé E . On peut donc considérer leur somme algébrique $X + Y \subseteq E$. Pour tout $z \in X + Y$, on pose

$$\|z\|_{X+Y} = \inf \{ \|x\|_X + \|y\|_Y : z = x + y, x \in X, y \in Y \}.$$

Identifier $X + Y$ à un quotient de $X \times Y$ et, à l'aide du Théorème 1.2.10, montrer que cette formule définit une norme pour laquelle $X + Y$ est un espace de Banach.

2. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et soient A et B deux sous-espaces vectoriels fermés de X tels que $X = A + B$. En utilisant le point précédent et le théorème du graphe fermé, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in X$, il existe $a \in A$ et $b \in B$ avec

$$x = a + b \quad \text{et} \quad \|a\| + \|b\| \leq C\|x\|.$$

Exercice 1.11.11. Soit $g \in L^2([0, 1])$ tel que $fg \in L^2([0, 1])$ pour tout $f \in L^2([0, 1])$. Considérons l'application

$$\mathcal{M}_g : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1]) : f \mapsto fg.$$

Montrer que $\mathcal{M}_g$ est une application continue

1. en utilisant le théorème de Banach-Steinhaus,
2. en utilisant le théorème du graphe fermé.

2 Compacité dans les espaces normés

Après l'étude des espaces normés et des espaces de Banach, nous introduisons maintenant les notions de bornitude, de précompacité et de compacité dans le cadre métrique. Dans un espace normé, ces notions ont des formulations très concrètes ; elles permettent notamment de comprendre ce qui distingue la dimension finie de la dimension infinie et conduisent rapidement au théorème d'Arzelà–Ascoli.

Pourquoi introduire la compacité ?

Dans de nombreux problèmes d'analyse, on construit d'abord une suite d'approximations et l'on cherche ensuite à en extraire une sous-suite qui converge vers un objet limite. La bornitude seule ne suffit pas en dimension infinie : la suite canonique de ℓ^2 est bornée, mais ne possède aucune sous-suite convergente. La compacité, et plus généralement la précompacité, fournit précisément le mécanisme d'extraction qui manque.

La compacité joue aussi un second rôle fondamental : elle permet souvent de passer d'une information locale ou ponctuelle à une information uniforme. Le principe est simple. Lorsqu'une propriété est vraie dans un voisinage de chaque point d'un compact, on peut recouvrir ce compact par ces voisinages puis en extraire un sous-recouvrement fini. La finitude obtenue permet alors fréquemment de choisir des constantes indépendantes du point considéré. Le théorème classique selon lequel une fonction continue sur un compact est uniformément continue est un exemple élémentaire de ce mécanisme.

Ces deux idées — extraire des objets convergents et obtenir des contrôles uniformes à partir d'informations locales — interviennent constamment dans les méthodes d'approximation, dans l'étude des familles de fonctions et dans les problèmes d'existence. Le théorème d'Arzelà–Ascoli en donnera une illustration importante : un contrôle ponctuel et une équicontinuité permettent, sur un compact, d'obtenir une précompacité pour la norme uniforme.

La seconde partie généralisera ces notions aux espaces localement convexes, en mettant l'accent sur ce qui change lorsque la topologie est décrite par une famille de semi-normes.

2.1 Ensembles bornés, précompacts et compacts

Définition 2.1.1. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé. Une partie $B \subset X$ est dite *bornée* si

$$\sup_{x \in B} \|x\| < +\infty.$$

Elle est dite *précompacte* si, pour tout $\varepsilon > 0$, elle peut être recouverte par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε .

Enfin, la compacité est entendue au sens topologique usuel.

Dans un espace métrique, la précompacité est aussi appelée totale bornitude. Elle est plus forte que la bornitude, mais elle ne suppose pas que l'ensemble soit fermé. Nous dirons qu'un ensemble est *relativement compact* lorsque son adhérence est compacte. Dans un espace de Banach, la Proposition 2.1.3 montrera que précompacité et relative compacité sont équivalentes.

Proposition 2.1.2. *Pour une partie K d'un espace normé X , les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. K est précompacte ;
2. toute suite de K possède une sous-suite de Cauchy.

Démonstration. Supposons K précompacte. Pour chaque $n \geq 1$, recouvrons K par un nombre fini de boules de rayon 2^{-n} . À partir d'une suite $(x_j)_j$ de K , on extrait une sous-suite contenue dans l'une des boules du premier recouvrement, puis une sous-suite de celle-ci contenue dans une boule du deuxième recouvrement, et ainsi de suite. La suite diagonale obtenue est de Cauchy.

Réciproquement, supposons que K ne soit pas précompacte. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel qu'aucune famille finie de boules ouvertes de rayon ε ne recouvre K .

Choisissons $x_1 \in K$. Supposons construits $x_1, \dots, x_n \in K$. Comme

$$K \not\subset \bigcup_{j=1}^n B(x_j, \varepsilon),$$

on peut choisir

$$x_{n+1} \in K \setminus \bigcup_{j=1}^n B(x_j, \varepsilon).$$

Ainsi,

$$\|x_{n+1} - x_j\|_X \geq \varepsilon, \quad j = 1, \dots, n.$$

Par récurrence, on obtient donc une suite $(x_n)_n$ de K telle que

$$\|x_n - x_m\|_X \geq \varepsilon \quad \text{pour } n \neq m.$$

Une telle suite ne possède aucune sous-suite de Cauchy. ■

Proposition 2.1.3. *Si X est un espace de Banach, une partie $K \subset X$ est précompacte si et seulement si son adhérence $\overline{K}$ est compacte.*

Démonstration. Si K est précompacte, son adhérence l'est également. Comme X est complet, $\overline{K}$ est complète. La Proposition 2.1.2 montre alors que toute suite de $\overline{K}$ possède une sous-suite de Cauchy, qui converge dans $\overline{K}$; dans un espace métrique, cela équivaut à la compacité. La réciproque est immédiate, tout compact métrique étant précompact. ■

Dans un espace de Banach, la précompacité est donc exactement la propriété qui précède la compacité : il suffit de prendre l'adhérence. Cette caractérisation utilise la complétude de l'espace ambiant et ne devra pas être transposée sans précaution au cadre localement convexe général.

Proposition 2.1.4. *Soit X un espace normé. La boule unité ouverte $b(0, 1)$ est précompacte si et seulement si X est de dimension finie.*

Démonstration. Si X est de dimension finie, toute partie bornée est précompacte.

Réciproquement, supposons $b(0, 1)$ précompacte et fixons $\varepsilon \in (0, 1)$. Il existe $x_1, \dots, x_N \in b(0, 1)$ tels que

$$b(0, 1) \subseteq \bigcup_{j=1}^N b(x_j, \varepsilon).$$

Posons

$$E = \text{span}\{x_1, \dots, x_N\}.$$

Soit $x \in b(0, 1)$. Il existe j_1 tel que

$$\|x - x_{j_1}\|_X < \varepsilon.$$

On peut donc écrire

$$x = x_{j_1} + \varepsilon y_1, \quad y_1 = \frac{x - x_{j_1}}{\varepsilon} \in b(0, 1).$$

En appliquant le même raisonnement à y_1 , il existe j_2 et $y_2 \in b(0, 1)$ tels que

$$y_1 = x_{j_2} + \varepsilon y_2.$$

En itérant, on obtient, pour tout $m \geq 1$,

$$x = x_{j_1} + \varepsilon x_{j_2} + \dots + \varepsilon^{m-1} x_{j_m} + \varepsilon^m y_m, \quad y_m \in b(0, 1).$$

Comme $\|y_m\|_X < 1$,

$$\|\varepsilon^m y_m\|_X < \varepsilon^m \longrightarrow 0.$$

Les sommes partielles

$$x_{j_1} + \varepsilon x_{j_2} + \dots + \varepsilon^{m-1} x_{j_m}$$

appartiennent à E et convergent vers x . Or E est de dimension finie, donc fermé. Ainsi $x \in E$.

On a donc $b(0, 1) \subseteq E$. Enfin, tout vecteur de X est un multiple scalaire d'un élément de $b(0, 1)$, d'où $X = E$. Par conséquent, X est de dimension finie. ■

Remarque 2.1.5. En dimension finie, les parties fermées et bornées sont compactes. En dimension infinie, la proposition précédente montre en particulier que la boule unité fermée

n'est pas compacte. La précompacité mesure donc précisément une propriété plus forte que la seule bornitude.

Exemple 2.1.6. Dans ℓ^2 , la famille des vecteurs de la base canonique $(e_n)_{n \geq 0}$ est bornée, puisque $\|e_n\|_2 = 1$ pour tout n , mais elle n'est pas précompacte. En effet,

$$\|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2} \quad (n \neq m),$$

de sorte qu'aucune sous-suite de (e_n) n'est de Cauchy. Cet exemple illustre concrètement la différence entre bornitude et précompacité en dimension infinie.

2.2 Théorème d'Arzelà–Ascoli

Le théorème d'Arzelà–Ascoli traduit un problème de compacité dans un espace de fonctions en conditions concrètes de contrôle ponctuel et d'équicontinuité. Il constitue l'un des principaux critères pratiques de compacité du cours.

Le Théorème d'Arzelà–Ascoli permet de caractériser les parties précompactes de $C^0(X)$, muni de la norme uniforme, lorsque X est compact. Cet espace figure déjà parmi les [exemples d'espaces de Banach](#) du premier chapitre. Commençons par un lemme fondé sur un procédé d'extraction diagonale.

Lemme 2.2.1. *Soit D un ensemble dénombrable et $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur D et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Supposons que la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est simplement bornée sur D , c'est-à-dire*

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} |f_m(x)| < +\infty \quad \forall x \in D.$$

Alors il existe une sous-suite de $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ qui converge simplement sur D .

Démonstration. Écrivons $D = \{x^{(0)}, x^{(1)}, \dots\}$. De la suite (f_m) , extrayons une sous-suite $(f_m^{(0)})$ telle que $(f_m^{(0)}(x^{(0)}))$ converge. De cette sous-suite, extrayons une sous-suite $(f_m^{(1)})$ telle que $(f_m^{(1)}(x^{(1)}))$ converge, et poursuivons ainsi. Pour tout k , la suite $(f_m^{(k+1)})$ est une sous-suite de $(f_m^{(k)})$ et converge aux points $x^{(0)}, \dots, x^{(k+1)}$.

La suite diagonale $(f_k^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suite initiale. Pour tout j fixé, sa queue est une sous-suite de $(f_m^{(j)})$; elle converge donc au point $x^{(j)}$. La convergence est ainsi simple sur tout D . ■

Afin d'énoncer le théorème suivant, il est nécessaire de considérer la notion d'équicontinuité dans le cas d'une famille d'applications $\mathcal{F}$ définies sur un espace métrique X et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que $\mathcal{F}$ est *équicontinue* si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $x \in X$, il existe $\eta > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pour tout $f \in \mathcal{F}$ si $d(x, y) < \eta$.

Exemple 2.2.2. Si E et F sont deux espaces normés et si $\mathcal{A}$ est une partie bornée de $L(E, F)$, alors $\mathcal{A}$, vue comme une famille de fonctions sur E , est équicontinue. En effet, si $M = \sup_{T \in \mathcal{A}} \|T\|$, alors

$$\|T(x) - T(y)\| \leq M\|x - y\| \quad (T \in \mathcal{A}).$$

Exemple 2.2.3. La suite $f_n(t) = t^n$ sur $[0, 1]$ n'est pas équicontinue. En effet, $f_n(1) = 1$, tandis que $f_n(1 - 1/n) = (1 - 1/n)^n$ reste éloigné de 1 lorsque n tend vers l'infini, alors que $1/n \rightarrow 0$.

Théorème 2.2.4 (Arzelà-Ascoli). *Soit X un espace métrique compact. Une partie $\mathcal{K}$ de $C^0(X)$ est précompacte si et seulement si elle est simplement bornée et équicontinue.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{K}$ est précompact. Alors $\mathcal{K}$ est bornée et donc il existe $C > 0$ tel que

$$\sup_{f \in \mathcal{K}} \sup_{x \in X} |f(x)| \leq C.$$

En particulier, pour tout $x \in X$, $\sup_{f \in \mathcal{K}} |f(x)| < +\infty$ et $\mathcal{K}$ est donc simplement bornée. Montrons à présent que $\mathcal{K}$ est une partie équicontinue. Soit $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. Comme $\mathcal{K}$ est précompact, il existe $f_1, \dots, f_n \in C^0(X)$ tels que

$$\mathcal{K} \subseteq \bigcup_{j=1}^n b(f_j, \frac{\varepsilon}{3})$$

où les boules sont définies à partir de la norme uniforme sur X . Comme les fonctions $f_1, \dots, f_n$ sont continues, il existe $\eta > 0$ tel que

$$|f_j(x) - f_j(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

pour tout $y \in X$ tel que $d(x, y) \leq \eta$ et pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. Soit $f \in \mathcal{K}$. Alors il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $f \in b(f_j, \frac{\varepsilon}{3})$. On obtient alors que

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_j(x)| + |f_j(x) - f_j(y)| + |f_j(y) - f(y)| \leq \varepsilon$$

pour tout $y \in X$ tel que $d(x, y) \leq \eta$, ce qui suffit.

Supposons à présent que $\mathcal{K}$ est simplement bornée et équicontinue. Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in X$, l'équicontinuité fournit un voisinage ouvert $V_{n,x}$ de x tel que

$$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{3n} \quad \text{pour tous } y \in V_{n,x} \text{ et } f \in \mathcal{K}.$$

Pour chaque n , les ouverts $(V_{n,x})_{x \in X}$ recouvrent X . Par compacité, il existe une partie finie

$X_n \subseteq X$ telle que

$$X = \bigcup_{x \in X_n} V_{n,x}.$$

Considérons l'ensemble dénombrable $X_\infty = \bigcup_{n \geq 1} X_n$. Soit $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{K}$. Comme $\mathcal{K}$ est simplement bornée, le Lemme 2.2.1 donne l'existence d'une sous-suite $(f_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ qui converge simplement dans X_∞ . Soient $y \in X$ et $n \geq 1$. Alors il existe $x \in X_n \subseteq X_\infty$ tel que $y \in V_{n,x}$. On a alors

$$\begin{aligned} |f_{k(m)}(y) - f_{k(l)}(y)| &\leq |f_{k(m)}(y) - f_{k(m)}(x)| + |f_{k(m)}(x) - f_{k(l)}(x)| + |f_{k(l)}(x) - f_{k(l)}(y)| \\ &< \frac{2}{3n} + |f_{k(m)}(x) - f_{k(l)}(x)| \end{aligned}$$

pour tous $m, l \in \mathbb{N}$. Comme $y \in X$ est arbitraire, on en tire que

$$\sup_{y \in X} |f_{k(m)}(y) - f_{k(l)}(y)| \leq \frac{2}{3n} + \sup_{x \in X_n} |f_{k(m)}(x) - f_{k(l)}(x)|$$

pour tous $m, l \in \mathbb{N}$. Comme X_n est fini et comme la suite $(f_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ converge simplement, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{x \in X_n} |f_{k(m)}(x) - f_{k(l)}(x)| \leq \frac{1}{3n}$$

si $m, l \geq N$. Ainsi

$$\sup_{y \in X} |f_{k(m)}(y) - f_{k(l)}(y)| \leq \frac{1}{n}$$

pour tous $l, m \geq N$ et la suite $(f_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ est donc uniformément de Cauchy sur X . Cela suffit par la Proposition 2.1.2. ■

Remarque 2.2.5. L'espace $C^0(X)$ est un espace de Banach. Par conséquent, par la Proposition 2.1.3, le Théorème 2.2.4 fournit également une description des ensembles relativement compacts de $C^0(X)$.

Exemple 2.2.6. Soit K un espace métrique compact. Pour $M, L > 0$, considérons

$$\mathcal{F}_{M,L} = \{f \in C^0(K) : \|f\|_\infty \leq M, |f(x) - f(y)| \leq Ld(x, y) \text{ pour tous } x, y \in K\}.$$

La famille $\mathcal{F}_{M,L}$ est uniformément bornée et équicontinue ; le Théorème d'Arzelà-Ascoli montre donc qu'elle est précompacte dans $C^0(K)$. Comme elle est fermée pour la norme uniforme, elle est même compacte.

2.3 Exercices

Exercice 2.3.1. Soient $\alpha \in]0, 1[$ et $C^\alpha([0, 1])$ l'espace de Hölder formé des fonctions f définies sur $[0, 1]$ telles que

$$|f|_\alpha := \sup_{x, y \in [0, 1]} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty.$$

1. Montrer que

$$\|f\|_{C^\alpha([0, 1])} = \|f\|_{[0, 1]} + |f|_\alpha$$

définit une norme sur $C^\alpha([0, 1])$.

2. Montrer que $(C^\alpha([0, 1]), \|\cdot\|_{C^\alpha([0, 1])})$ est un espace de Banach.
3. Montrer que la boule unité de $C^\alpha([0, 1])$ est un compact de $C^0([0, 1])$ muni de sa norme usuelle.

Exercice 2.3.2. Soit X un espace métrique compact et $\mathcal{F}$ une famille équicontinue d'applications définies sur X et à valeurs complexes. Pour tout $x \in X$, on pose

$$\mathcal{F}(x) = \{f(x) : f \in \mathcal{F}\}.$$

1. Montrer que l'ensemble

$$A = \{x \in X : \mathcal{F}(x) \text{ est borné}\}$$

est ouvert et fermé dans X .

2. En déduire que si X est connexe et $A \neq \emptyset$, alors $\mathcal{F}$ est une partie relativement compacte de $C^0(X)$.

Exercice 2.3.3. Soit X un sous-espace fermé de $C^0([0, 1])$. Supposons que toute fonction f de X est de classe C^1 (c'est-à-dire est la restriction à $[0, 1]$ d'une fonction dérivable sur un voisinage de $[0, 1]$).

1. Considérons l'application

$$D : X \rightarrow C^0([0, 1]) : f \mapsto f'$$

où X est muni de la norme $\|f\|_{C^1} = \max\{\|f\|_{[0, 1]}, \|f'\|_{[0, 1]}\}$. En appliquant le théorème du graphe fermé à D , montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|f'\|_{[0, 1]} \leq C\|f\|_{[0, 1]}.$$

2. Utiliser le Théorème d'Arzela-Ascoli pour en déduire que X est de dimension finie.

Exercice 2.3.4. Soit $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une application continue. On définit l'application $T_K : C^0([0, 1]) \rightarrow C^0([0, 1])$ en posant

$$T_K(f)(x) = \int_0^x K(x, y)f(y)dy.$$

1. Montrer que T_K est une application linéaire continue.

2. Montrer que la famille $\{T_K(f) : \|f\|_{[0,1]} \leq 1\}$ est équicontinue.
3. En utilisant le Théorème d'Arzela-Ascoli, en déduire que l'ensemble

$$\{T_K(f) : \|f\|_{[0,1]} \leq r\}$$

est relativement compact pour tout $r > 0$.

Exercice 2.3.5. Fixons $c \in \ell^2$. Montrer que l'ensemble $\{x \in \ell^2 : |x_n| \leq |c_n| \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}$ est un compact de ℓ^2 .

Exercice 2.3.6. Dans ℓ^2 , on note $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la base canonique. Montrer que

$$K = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n+1} e_n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

est un compact de ℓ^2 .

Exercice 2.3.7. Soit A une partie bornée de c_0 . Montrer que A est précompacte si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \sup_{x \in A} \sup_{n \geq N} |x_n| < \varepsilon.$$

Vers les opérateurs compacts. Le théorème d'Arzelà–Ascoli fournit un critère concret de précompacité dans un espace de fonctions. Au Chapitre 4, nous l'utiliserons immédiatement pour montrer que des opérateurs intégraux, et en particulier l'opérateur de Volterra, sont compacts. La notion d'opérateur compact apparaîtra ainsi comme une traduction opératorielle des propriétés de compacité étudiées dans ce chapitre.

3 Dualité dans les espaces normés et espaces de Hilbert

Pourquoi introduire le dual ?

Avant de tenir compte d'une structure topologique, considérons simplement un espace vectoriel X sur $\mathbb{K}$. Une *forme linéaire* sur X est une application linéaire

$$\ell : X \longrightarrow \mathbb{K}.$$

L'ensemble de toutes les formes linéaires sur X est appelé le *dual algébrique* de X et est généralement noté X^* .

Une forme linéaire peut être vue comme une manière d'extraire une information scalaire d'un vecteur. Le dual rassemble ainsi tous les "observateurs linéaires" de l'espace.

Exemple 3.0.1. Considérons $X = \mathbb{R}^n$. Pour chaque $j \in \{1, \dots, n\}$, l'application

$$e_j^* : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad e_j^*(x_1, \dots, x_n) = x_j,$$

est une forme linéaire : elle extrait la j -ième coordonnée du vecteur.

Plus généralement, toute forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ est de la forme

$$\ell(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

pour certains $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Ainsi, $(\mathbb{R}^n)^*$ peut lui-même être identifié à $\mathbb{R}^n$.

Cette observation se généralise à tout espace vectoriel de dimension finie. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de X , on définit la *base duale* $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ par

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$

Si

$$x = \sum_{j=1}^n x_j e_j,$$

alors $e_i^*(x) = x_i$. Les éléments de la base duale permettent donc de lire les coordonnées d'un vecteur. En particulier,

$$\dim X^* = \dim X$$

lorsque X est de dimension finie.

Exemple 3.0.2. Soit $\mathcal{P}_n$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Pour tout $a \in \mathbb{K}$, les applications

$$P \mapsto P(a), \quad P \mapsto P'(a)$$

sont des formes linéaires sur $\mathcal{P}_n$. On peut également considérer, par exemple,

$$P \mapsto \int_0^1 P(t) dt.$$

Ces formes linéaires correspondent à différentes manières de “tester” un polynôme.

La même idée devient particulièrement utile dans les espaces de fonctions. Une forme linéaire peut extraire une information locale, comme une valeur ponctuelle, ou une information globale, comme une moyenne ou un moment. Par exemple, sur $C([0, 1])$ apparaissent naturellement

$$f \mapsto f(a), \quad f \mapsto \int_0^1 f(t) dt, \quad f \mapsto \int_0^1 t^k f(t) dt.$$

En analyse fonctionnelle, les espaces considérés sont cependant le plus souvent de dimension infinie et munis d'une topologie. Le dual algébrique est alors généralement trop grand pour être utile : il contient des formes linéaires qui ne respectent en rien la notion de convergence choisie sur l'espace. Il est donc naturel de ne conserver que les formes linéaires compatibles avec cette topologie, c'est-à-dire les formes linéaires continues. On obtient ainsi le *dual topologique*

$$X' = \{\ell : X \rightarrow \mathbb{K} : \ell \text{ est linéaire et continue}\}.$$

En dimension finie, cette distinction disparaît : toute forme linéaire est continue. Elle devient en revanche essentielle en dimension infinie.

Exemple 3.0.3. Considérons $C([0, 1])$ muni de la norme uniforme. Pour tout $a \in [0, 1]$, l'évaluation

$$\delta_a(f) = f(a)$$

est une forme linéaire continue puisque

$$|\delta_a(f)| \leq \|f\|_\infty.$$

De même,

$$T(f) = \int_0^1 f(t) dt$$

est linéaire et continue car

$$|T(f)| \leq \int_0^1 |f(t)| dt \leq \|f\|_\infty.$$

Le dual intervient alors de plusieurs manières fondamentales. Il permet de séparer les points et certains ensembles, de définir des convergences plus faibles, de transposer les opérateurs et de

formuler des problèmes dans lesquels les objets ne sont observés qu'à travers leur action sur des fonctions tests. Les distributions en fourniront plus loin un exemple central.

Ainsi, une suite (x_n) converge faiblement vers x lorsque tous les observateurs linéaires continus donnent asymptotiquement la même réponse :

$$\ell(x_n) \longrightarrow \ell(x) \quad \text{pour tout } \ell \in X'.$$

La même philosophie apparaît dans d'autres domaines. En probabilité, si X_n et X sont des variables aléatoires de lois respectives μ_n et μ , la convergence en loi peut être décrite par

$$\int \varphi d\mu_n \longrightarrow \int \varphi d\mu$$

pour toute fonction φ continue bornée. Ce n'est pas une dualité linéaire sur les variables aléatoires elles-mêmes, mais c'est la même idée de convergence par une famille de tests. Lorsque les lois sont vues comme des mesures, l'application

$$\mu \longmapsto \int \varphi d\mu$$

est bien linéaire en μ .

De même, les formulations faibles des équations différentielles reposent sur cette idée de test. Si un objet u n'est pas assez régulier pour posséder une dérivée classique, on peut chercher à définir sa dérivée par son action sur des fonctions tests, par exemple sous la forme

$$\langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle.$$

C'est précisément ce point de vue qui conduit à la théorie des distributions.

Enfin, si $T : X \rightarrow Y$ est un opérateur linéaire continu et si $y' \in Y'$, l'observation de Tx par y' peut être reportée sur x :

$$y'(Tx) = (T'y')(x).$$

La transposée permettra ainsi de transporter les observateurs de Y vers X .

On peut garder en tête le principe suivant :

$$\text{un espace} \quad \longleftrightarrow \quad \text{les observateurs continus qui permettent de le tester.}$$

Le dual topologique n'est donc pas seulement un nouvel espace associé à X : il décrit les observations linéaires de X qui sont compatibles avec sa notion de convergence.

Nous commençons dans le cadre normé, où le dual porte lui-même une norme naturelle. Le théorème de Hahn–Banach fournira ensuite les fonctionnelles nécessaires aux arguments de séparation et de densité ; le bidual conduira à la réflexivité et la transposée décrira l'action naturelle des opérateurs sur les duals. Une seconde étape sera consacrée aux espaces de Hilbert et au théorème de représentation de Riesz. Nous reviendrons enfin aux topologies faible et faible-* et au théorème de Banach–Alaoglu.

3.1 Dual d'un espace normé et norme opérateur

Dans un espace normé, la continuité d'une forme linéaire se traduit par une majoration par la norme. Cette observation permet de définir le dual topologique et de le munir d'une norme d'opérateur.

Définition 3.1.1. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé. L'espace

$$L(X, \mathbb{K})$$

des formes linéaires continues sur X est appelé le *dual topologique* de X et est noté X' .

Exemple 3.1.2. Si $X = C^0(K)$, où K est un compact de $\mathbb{R}^n$, alors, pour tout $a \in K$, l'application

$$\delta_a : f \mapsto f(a)$$

appartient à X' .

Comme

$$X' = L(X, \mathbb{K}),$$

le dual X' est naturellement muni de la norme d'opérateur introduite précédemment. Ainsi, pour tout $T \in X'$,

$$\|T\| = \inf \{C \geq 0 : |T(x)| \leq C\|x\| \text{ pour tout } x \in X\}.$$

D'après les résultats généraux sur la norme d'opérateur, on a directement les résultats suivants.

Proposition 3.1.3. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé.

1. La norme opérateur définit une norme sur X' .
2. Pour tout $T \in X'$, on a

$$\|T\| = \sup \{|T(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\} = \sup \{|T(x)| : x \in X, \|x\| = 1\}.$$

3. Pour tout $T \in X'$ et tout $x \in X$, on a

$$|T(x)| \leq \|T\| \|x\|.$$

En pratique, pour montrer qu'une forme linéaire $T : X \rightarrow \mathbb{K}$ est continue, il suffit donc de vérifier que

$$\sup_{\|x\| \leq 1} |T(x)| < +\infty.$$

Le résultat suivant est en revanche spécifique au dual : contrairement à l'espace X lui-même, qui

n'est pas nécessairement complet, son dual topologique l'est toujours.

Proposition 3.1.4. *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé. Muni de la norme d'opérateur, le dual X' est un espace de Banach.*

3.2 Théorème de Hahn–Banach

Le théorème de Hahn–Banach permet de prolonger une forme linéaire définie sur un sous-espace tout en conservant une majoration prescrite. Nous gardons ici la formulation de départ du cours, valable pour une semi-norme ; la notion de semi-norme a été introduite au Chapitre 1 précisément pour pouvoir énoncer ce résultat dès maintenant.

Lemme 3.2.1 (Hahn-Banach réel). *Soient X un espace vectoriel réel, p une semi-norme sur X et Y un sous-espace vectoriel de X . Supposons que $T : Y \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme $\mathbb{R}$ -linéaire telle que*

$$|T(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in Y.$$

Alors il existe une forme $\mathbb{R}$ -linéaire $\tilde{T} : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\tilde{T}|_Y = T$ et

$$|\tilde{T}(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des couples (T^*, Z) où Z est un sous-espace vectoriel de X qui contient Y et où $T^* : Z \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire qui prolonge T et telle que $|T^*(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in Z$. Remarquons que $(T, Y) \in \mathcal{E}$ et donc $\mathcal{E} \neq \emptyset$. On munit $\mathcal{E}$ de la relation d'ordre définie par

$$(T_1^*, Z_1) \leq (T_2^*, Z_2) \iff Z_1 \subseteq Z_2 \text{ et } T_2^*|_{Z_1} = T_1^*.$$

Montrons que $\mathcal{E}$ est inductif. Soit $\mathcal{C}$ une chaîne de $\mathcal{E}$. Alors,

$$Z_0 = \bigcup_{(T^*, Z) \in \mathcal{C}} Z$$

est un sous-espace vectoriel de X . De plus, l'application T_0^* définie par

$$T_0^*(x) = T^*(x)$$

où $(T^*, Z) \in \mathcal{C}$ est tel que $x \in Z$, est bien définie, linéaire et majorée par p sur Z puisque les éléments de $\mathcal{C}$ sont totalement ordonnés. On en tire que $(T_0^*, Z_0) \in \mathcal{E}$ majore $\mathcal{C}$. En appliquant le Lemme de Zorn, on obtient donc l'existence d'un élément maximal $(\tilde{T}, Z)$ dans $\mathcal{E}$. Pour conclure, il suffit de montrer que $Z = X$.

Supposons qu'il existe $x_0 \in X \setminus Z$. Nous allons alors construire un couple $(T^*, Z + \langle x_0 \rangle)$ appartenant à $\mathcal{E}$ tel que $T^*|_Z = \tilde{T}$. Cela contredira alors le caractère maximal de $(\tilde{T}, Z)$. Si $x \in Z + \langle x_0 \rangle$,

alors x admet une décomposition unique sous la forme

$$x = z + \lambda x_0 \quad \text{où} \quad z \in Z, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on pose alors

$$T_s(x) = \tilde{T}(z) + \lambda s.$$

Il est clair que T_s est une extension linéaire de $\tilde{T}$ sur $Z + \langle x_0 \rangle$. Il reste à trouver $s \in \mathbb{R}$ tel que $|T_s(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in Z + \langle x_0 \rangle$. Remarquons que

$$\tilde{T}(z_1) + \tilde{T}(z_2) = \tilde{T}(z_1 + z_2) \leq p(z_1 + z_2) \leq p(z_1 - x_0) + p(z_2 + x_0)$$

pour tous $z_1, z_2 \in Z$, d'où

$$\tilde{T}(z_1) - p(z_1 - x_0) \leq p(z_2 + x_0) - \tilde{T}(z_2).$$

En particulier, on obtient

$$s_0 := \sup \{ \tilde{T}(z_1) - p(z_1 - x_0) : z_1 \in Z \} \leq p(z_2 + x_0) - \tilde{T}(z_2) < +\infty$$

pour tout $z_2 \in Z$. On en tire que pour tout $z_1 \in Z$, on a

$$\tilde{T}(z_1) - s_0 \leq p(z_1 - x_0)$$

et

$$\tilde{T}(z_1) + s_0 \leq p(z_1 + x_0)$$

où la deuxième relation est obtenue en prenant $z_2 = z_1$. Ainsi, si $\lambda > 0$, on a

$$|T_{s_0}(z + \lambda x_0)| = \lambda |\tilde{T}(\frac{z}{\lambda}) + s_0| \leq \lambda p(\frac{z}{\lambda} + x_0) = p(z + \lambda x_0),$$

si $\lambda < 0$, on a

$$|T_{s_0}(z + \lambda x_0)| = -\lambda |\tilde{T}(\frac{-z}{\lambda}) - s_0| \leq -\lambda p(\frac{-z}{\lambda} - x_0) = p(z + \lambda x_0)$$

et si $\lambda = 0$, on a $|T_{s_0}(z)| \leq p(z)$, ce qui suffit. ■

Théorème 3.2.2 (Hahn-Banach). *Soient X un espace vectoriel, p une semi-norme sur X et Y un sous-espace vectoriel de X . Supposons que $T : Y \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire telle que*

$$|T(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in Y.$$

Alors il existe une forme linéaire $\tilde{T} : X \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $\tilde{T}|_Y = T$ et

$$|\tilde{T}(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X.$$

Démonstration. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il s'agit du résultat démontré dans le Lemme 3.2.1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, considérons l'application

$$\Re T : Y \mapsto \mathbb{R} : x \mapsto \Re T(x).$$

Il est clair que $\Re T$ est une forme $\mathbb{R}$ -linéaire sur l'espace Y muni d'une structure de $\mathbb{R}$ -vectoriel. Clairement, on a également $|\Re T(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in Y$. Par le Lemme 3.2.1, il existe donc une forme $\mathbb{R}$ -linéaire $\widetilde{\Re T} : X \rightarrow \mathbb{R}$ qui prolonge $\Re T$ et telle que $|\widetilde{\Re T}(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in X$. Remarquons que

$$T(y) = \Re T(y) + i\Im T(y) = \Re T(y) - i\Re(iT(y)) = \Re T(y) - i\Re T(iy)$$

pour tout $y \in Y$. Ainsi, l'application

$$\widetilde{T} : X \rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto \widetilde{\Re T}(x) - i\widetilde{\Re T}(ix)$$

est une extension de T à X . Vérifions qu'elle convient. Il s'agit d'une forme linéaire puisque pour tous $x, y \in X$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} \widetilde{T}(\lambda x) &= \widetilde{\Re T}(\lambda x) - i\widetilde{\Re T}(i\lambda x) \\ &= \Re \lambda \widetilde{\Re T}(x) + \Im \lambda \widetilde{\Re T}(ix) - i\Re \lambda \widetilde{\Re T}(ix) + i\Im \lambda \widetilde{\Re T}(x) \\ &= \Re \lambda \widetilde{T}(x) + i\Im \lambda \widetilde{T}(x) \\ &= \lambda \widetilde{T}(x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \widetilde{T}(x+y) &= \widetilde{\Re T}(x+y) - i\widetilde{\Re T}(ix+iy) \\ &= \widetilde{\Re T}(x) - i\widetilde{\Re T}(ix) + \widetilde{\Re T}(y) - i\widetilde{\Re T}(iy) \\ &= \widetilde{T}(x) + \widetilde{T}(y). \end{aligned}$$

De plus, $\widetilde{T}$ est majorée par p puisque si $x \in X$ est tel que $\widetilde{T}(x) \neq 0$, on a

$$|\widetilde{T}(x)| = e^{-i \arg(\widetilde{T}(x))} \widetilde{T}(x) = \widetilde{T}(e^{-i \arg(\widetilde{T}(x))} x)$$

et puisqu'il s'agit d'un nombre réel, on a

$$|\widetilde{T}(x)| = \Re(\widetilde{T}(e^{-i \arg(\widetilde{T}(x))} x)) = \widetilde{\Re T}(e^{-i \arg(\widetilde{T}(x))} x) \leq p(e^{-i \arg(\widetilde{T}(x))} x) = p(x).$$

Cela conclut la preuve. ■

Corollaire 3.2.3. *Soient X un espace normé et Y un sous-espace vectoriel de X . Toute forme linéaire continue $T : Y \rightarrow \mathbb{K}$ admet un prolongement linéaire continu $\widetilde{T} : X \rightarrow \mathbb{K}$ tel que $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Théorème 3.2.2 à la semi-norme $p = \|T\| \|\cdot\|$. La majoration obtenue donne $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$, tandis que l'inégalité inverse vient du fait que $\tilde{T}$ prolonge T . ■

Corollaire 3.2.4. *Soit X un espace normé. Pour tout $x \in X$, il existe $T \in X'$ tel que $\|T\| \leq 1$ et $T(x) = \|x\|$. En particulier,*

$$\|x\| = \sup\{|S(x)| : S \in X', \|S\| \leq 1\}.$$

Démonstration. Si $x = 0$, on prend $T = 0$. Sinon, sur le sous-espace $\langle x \rangle$, on pose $T_0(\lambda x) = \lambda\|x\|$. Alors $|T_0(y)| = \|y\|$ sur $\langle x \rangle$. Le Corollaire 3.2.3 fournit un prolongement T de norme 1. La formule de représentation en découle avec l'inégalité $|S(x)| \leq \|S\| \|x\|$. ■

Corollaire 3.2.5. *Le dual d'un espace normé sépare les points : si $x \neq y$, il existe $T \in X'$ tel que $T(x) \neq T(y)$.*

Démonstration. On applique le Corollaire 3.2.4 à $x - y$. ■

Remarque 3.2.6. Le corollaire précédent montre que l'application canonique $J_X : X \rightarrow (X')^*$ définie par $J_X(x)(T) = T(x)$ est injective.

Corollaire 3.2.7. *Soit Y un sous-espace vectoriel d'un espace normé X . Alors Y est dense dans X si et seulement si la seule forme $T \in X'$ qui s'annule sur Y est la forme nulle.*

Démonstration. Si Y est dense, la continuité donne immédiatement le résultat. Réciproquement, si $\bar{Y} \neq X$, choisissons $x \notin \bar{Y}$. La forme linéaire définie sur $\bar{Y} + \langle x \rangle$ par $S(y + \lambda x) = \lambda$ est continue ; le Corollaire 3.2.3 la prolonge en une forme non nulle de X' qui s'annule sur Y , contradiction. ■

3.2.1 Une forme réelle sous-linéaire de Hahn–Banach

La séparation de convexes exige une version légèrement plus générale du théorème précédent. Une application $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ sur un espace vectoriel réel est dite *sous-linéaire* si $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ et $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pour tout $\lambda \geq 0$.

Théorème 3.2.8 (Hahn–Banach, forme sous-linéaire). *Soient E un espace vectoriel réel, $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle sous-linéaire, V un sous-espace vectoriel et $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que $f(v) \leq p(v)$ pour tout $v \in V$. Alors f admet un prolongement linéaire $\tilde{f} : E \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration. On reprend l'argument de Zorn utilisé dans la preuve du Lemme 3.2.1. Il suffit donc de traiter le prolongement de f de V à $V + \langle x_0 \rangle$, avec $x_0 \notin V$. On cherche $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\tilde{f}(v + \lambda x_0) = f(v) + \lambda a$$

reste majorée par p . Pour $v, w \in V$, la sous-linéarité donne

$$f(v) + f(w) = f(v + w) \leq p(v + w) \leq p(v - x_0) + p(w + x_0),$$

donc

$$\sup_{v \in V} (f(v) - p(v - x_0)) \leq \inf_{w \in V} (p(w + x_0) - f(w)).$$

On choisit a entre ces deux nombres et on définit

$$\tilde{f}(v + \lambda x_0) = f(v) + \lambda a.$$

Vérifions que $\tilde{f} \leq p$. Si $\lambda > 0$, en appliquant la borne supérieure au vecteur v/λ , on obtient

$$a \leq p(v/\lambda + x_0) - f(v/\lambda),$$

et donc, par homogénéité positive de p ,

$$f(v) + \lambda a \leq \lambda p(v/\lambda + x_0) = p(v + \lambda x_0).$$

Si $\lambda < 0$, posons $\mu = -\lambda > 0$. En appliquant la borne inférieure au vecteur v/μ , on obtient

$$a \geq f(v/\mu) - p(v/\mu - x_0),$$

d'où

$$f(v) + \lambda a = f(v) - \mu a \leq \mu p(v/\mu - x_0) = p(v - \mu x_0) = p(v + \lambda x_0).$$

Le cas $\lambda = 0$ est exactement l'hypothèse $f \leq p$ sur V . Ainsi, $\tilde{f}$ est bien un prolongement de f dominé par p sur $V + \langle x_0 \rangle$.

On reprend alors sans changement l'argument de Zorn de la preuve du Lemme 3.2.1 : l'ensemble des prolongements dominés par p , ordonné par extension, est inductif ; un élément maximal ne peut avoir un domaine strictement contenu dans E grâce à l'étape précédente. Son domaine est donc E tout entier. ■

3.3 Séparation des ensembles convexes

Définition 3.3.1. Une partie A de X est *convexe* si pour tous $x, y \in A$ et tous $\lambda, \mu \in [0, 1]$

tels que $\lambda + \mu = 1$, on a

$$\lambda x + \mu y \in A,$$

autrement dit si le segment joignant x à y est inclus dans A .

La forme géométrique de Hahn–Banach affirme que deux convexes disjoints peuvent être séparés par un hyperplan continu lorsque l'un est compact et l'autre fermé. Ce résultat sera également utile pour interpréter la dualité et les topologies faibles.

Lemme 3.3.2. *Soit C un convexe de l'espace normé réel X tel que $0 \in C$ et tel qu'il existe $r > 0$ pour lequel $B_X(0, r) \subseteq C$. Posons*

$$p_C(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda C\}.$$

Alors p_C est sous-linéaire et

$$0 \leq p_C(x) \leq \frac{\|x\|}{r} \quad (x \in X).$$

En particulier, p_C est continue. Si de plus C est fermé, alors

$$C = \{x \in X : p_C(x) \leq 1\}.$$

Démonstration. Comme $B_X(0, r) \subseteq C$, l'ensemble C est absorbant et p_C est bien définie. Pour $\lambda \geq 0$, on obtient directement $p_C(\lambda x) = \lambda p_C(x)$. Si $x \in aC$ et $y \in bC$, avec $a, b > 0$, la convexité de C donne

$$\frac{x+y}{a+b} = \frac{a}{a+b} \frac{x}{a} + \frac{b}{a+b} \frac{y}{b} \in C,$$

donc $p_C(x+y) \leq a+b$. En prenant les bornes inférieures, on obtient

$$p_C(x+y) \leq p_C(x) + p_C(y).$$

Ainsi p_C est sous-linéaire. Comme $B_X(0, r) \subseteq C$, on a $p_C(x) \leq \|x\|/r$ pour tout $x \in X$. En utilisant la sous-additivité pour $x = y + (x - y)$ puis pour $y = x + (y - x)$, on obtient

$$|p_C(x) - p_C(y)| \leq \max\{p_C(x - y), p_C(y - x)\} \leq \frac{\|x - y\|}{r},$$

ce qui montre la continuité.

Enfin, $C \subseteq \{p_C \leq 1\}$ est immédiat. Réciproquement, si $p_C(x) \leq 1$, alors, pour tout n , il existe $\lambda_n < 1 + 1/n$ tel que $x \in \lambda_n C$. On peut choisir $\lambda_n \rightarrow 1$ et donc $x/\lambda_n \in C$ avec $x/\lambda_n \rightarrow x$. Si C est fermé, on en déduit $x \in C$. ■

Remarque 3.3.3. La construction précédente est la fonctionnelle de Minkowski d'un convexe absorbant. Lorsque nous étudierons les espaces localement convexes, nous retrouvons

rons le cas particulier du cours initial où l'ensemble est absolument convexe et absorbant ; la fonctionnelle de Minkowski est alors une semi-norme.

Théorème 3.3.4 (Séparation des convexes). *Soit X un espace normé réel. Soient $A, B \subset X$ deux ensembles convexes non vides tels que A est compact, B est fermé et $A \cap B = \emptyset$. Alors il existe $T \in X'$ tel que*

$$\inf_{a \in A} T(a) > \sup_{b \in B} T(b).$$

Démonstration. Commençons par le cas où $A = \{a\}$. Par translation, on peut supposer $0 \in B$. Comme $a \notin B$ et B est fermé, $d(a, B) > 0$. Choisissons $0 < r < d(a, B)$ et posons

$$C = \{x \in X : d(x, B) \leq r\}.$$

L'ensemble C est fermé, convexe, contient la boule fermée $B_X(0, r)$ et ne contient pas a . La fonctionnelle p_C du Lemme 3.3.2 est sous-linéaire et continue. Comme C est fermé, on a $C = \{p_C \leq 1\}$; ainsi $p_C(c) \leq 1$ pour $c \in C$ et $p_C(a) > 1$. Sur $\langle a \rangle$, définissons $f(\lambda a) = \lambda p_C(a)$. On a $f \leq p_C$, et le Théorème 3.2.8 fournit une forme linéaire $T : X \rightarrow \mathbb{R}$ qui prolonge f et vérifie $T \leq p_C$. Comme $T(x) \leq p_C(x) \leq \|x\|/r$ et $-T(x) = T(-x) \leq p_C(-x) \leq \|x\|/r$, on a $|T(x)| \leq \|x\|/r$ pour tout x ; ainsi $T \in X'$. Enfin, $T(a) = p_C(a) > 1$, tandis que $T(b) \leq p_C(b) \leq 1$ pour tout $b \in B \subset C$. Le point a et B sont donc strictement séparés.

Dans le cas général, considérons le convexe fermé

$$C = A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}.$$

Il est fermé : si $a_n - b_n \rightarrow x$, on extrait de (a_n) une sous-suite convergeant vers $a \in A$; alors $b_n \rightarrow a - x \in B$ le long de cette sous-suite. De plus $0 \notin C$. Le cas précédent, appliqué au point 0 et à C , fournit une forme $S \in X'$ telle que

$$0 = S(0) > \sup_{c \in C} S(c).$$

Donc

$$\sup_{a \in A, b \in B} S(a - b) < 0,$$

ce qui équivaut à $\sup_A S < \inf_B S$. En prenant $T = -S$, on obtient la conclusion. ■

Remarque 3.3.5. Si X est complexe, on obtient de même une forme $T \in X'$ telle que

$$\inf_{a \in A} \Re T(a) > \sup_{b \in B} \Re T(b).$$

On applique le théorème réel à l'espace sous-jacent puis, si $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ est la forme réelle obtenue, on pose $T(x) = \Phi(x) - i\Phi(ix)$.

3.4 Bidual et réflexivité

Le dual étant lui-même un espace de Banach, on peut dualiser une seconde fois. Le plongement canonique dans le bidual conduit à la notion de réflexivité, qui mesure dans quelle mesure l'espace est entièrement retrouvé à partir de son dual.

La réflexivité est introduite avant les topologies faibles parce qu'elle est d'abord une propriété du plongement canonique $X \rightarrow X''$. Après l'introduction de la topologie faible-* et du théorème de Banach–Alaoglu, nous reviendrons sur cette notion pour en déduire la compacité faible de la boule unité d'un espace réflexif.

Le résultat suivant est une réécriture du Corollaire 3.2.4 dans le cas d'un espace normé.

Proposition 3.4.1. *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé. Pour tout $x \in X$, on a*

$$\|x\| = \sup\{|T(x)| : T \in X', \|T\| \leq 1\}.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que

$$|T(x)| \leq \|x\| \quad \forall x \in X$$

est équivalent à $\|T\| \leq 1$, et ensuite d'utiliser le Corollaire 3.2.4. ■

On sait par la Remarque 3.2.6 qu'à tout $x \in X$ peut être associé naturellement une forme linéaire sur X' , définie par

$$\langle \cdot, x \rangle : X' \rightarrow \mathbb{K} : T \mapsto T(x).$$

Cette forme linéaire est continue sur X' muni de la norme opérateur puisque par la Proposition 3.1.3

$$|T(x)| \leq C\|T\|$$

pour tout $T \in X'$, où $C = \|x\|$. Ainsi, elle appartient au dual topologique X'' de X' . On appelle cet espace l'espace *bidual* de X . La proposition précédente peut s'interpréter de la manière suivante : le plongement linéaire canonique

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \rightarrow X'' : x \mapsto \langle \cdot, x \rangle$$

préserve la norme, c'est-à-dire $\|x\| = \|\langle \cdot, x \rangle\|$ puisque par la Proposition 3.1.3, on sait que $\sup\{|T(x)| : T \in X', \|T\| \leq 1\} = \|\langle \cdot, x \rangle\|$. En particulier, X peut être identifié à un sous-espace fermé de X'' .

Définition 3.4.2. Un espace normé $(X, \|\cdot\|)$ est *réflexif* si le plongement canonique

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \rightarrow X'' : x \mapsto \langle \cdot, x \rangle$$

est surjectif. Il s'agit alors d'une isométrie.

Par la Proposition 3.1.4, tout espace réflexif est un espace de Banach.

Exemples 3.4.3.

- ▷ Il est facile de vérifier que tout espace normé de dimension finie est réflexif.
- ▷ On verra que tout espace de Hilbert est réflexif.
- ▷ On verra que les espaces ℓ^p , $1 < p < +\infty$ sont réflexifs et que les espaces ℓ^1 , ℓ^∞ et c_0 ne le sont pas.

Proposition 3.4.4. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé. Si X' est séparable, alors X est séparable.

Démonstration. Soit $D = \{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ une partie dense de X' . Par la Proposition 3.1.3, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in X$ tel que $\|x_n\| = 1$ et $|T_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|T_n\|$. Soit Y le sous-espace vectoriel de X engendré par $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Montrons que Y est dense dans X . Pour cela, considérons $T \in X'$ tel que $T|_Y = 0$ et montrons que $T = 0$, ce qui suffit par le Corollaire 3.2.7. Soit $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une sous-suite telle que $(T_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers T dans X' . Remarquons que, vu le choix de x_{n_k} , on a

$$\|T_{n_k} - T\| \geq |T_{n_k}(x_{n_k}) - T(x_{n_k})| = |T_{n_k}(x_{n_k})| \geq \frac{1}{2}\|T_{n_k}\|.$$

Puisque $\|T_{n_k} - T\|$ tend vers 0, on en tire que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|T_{n_k}\| = 0$. Cela implique que $T = 0$.

Pour conclure que X est séparable, il suffit alors de remarquer que les éléments de Y peuvent être approchés par des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dans $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, des éléments de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Cet ensemble dénombrable est donc dense dans X . ■

Remarque 3.4.5. La réciproque de ce résultat est fausse. En effet, considérons l'espace normé $C^0([0, 1])$. Puisque les polynômes à coefficients rationnels sont denses dans $C^0([0, 1])$ par le Théorème de Weierstrass, l'espace est séparable. On vérifie facilement que les formes linéaires $\delta_x : f \in C^0([0, 1]) \mapsto f(x)$ sont continues pour tout $x \in [0, 1]$ et que

$$\|\delta_x - \delta_y\| = \sup \{|f(x) - f(y)| : f \in C^0([0, 1]), \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| \leq 1\} = 2$$

si $x \neq y$. Comme $[0, 1]$ n'est pas dénombrable, on ne peut pas approcher les formes δ_x , $x \in [0, 1]$, par une famille dénombrable. Il s'ensuit que le dual de $C^0([0, 1])$ n'est pas

séparable.

Un autre exemple est donné par l'espace ℓ^1 dont on montrera que le dual est ℓ^∞ , qui n'est pas séparable.

Proposition 3.4.6. *Soit X un espace de Banach. Alors X est réflexif si et seulement si son espace dual X' est réflexif.*

Démonstration. $\Rightarrow$ Si X est réflexif, alors $X = X''$ et donc $X' = X'''$.

$\Leftarrow$ Supposons que X' est réflexif. Comme X est identifié à un sous-espace vectoriel fermé de X'' , on va montrer que $X = X''$ en utilisant le Corollaire 3.2.7. Supposons donc que $x''' \in X'''$ est tel que $x'''|_X = 0$. Comme X' est réflexif, il existe $x' \in X'$ tel que $x'''(T) = T(x')$ pour tout $T \in X''$. Comme x''' s'annule sur X , on a

$$0 = x'''(\langle \cdot, x \rangle) = \langle x', x \rangle = x'(x)$$

pour tout $x \in X$, et donc la forme x' est nulle. On en tire que $x'''(T) = 0$ pour tout $T \in X''$, c'est-à-dire $x''' = 0$. Le Corollaire 3.2.7 permet d'affirmer que X est dense dans X'' , d'où $X = X''$ puisque X est fermé. ■

Remarque 3.4.7. L'hypothèse de complétude dans la réciproque est nécessaire. Par exemple, c_{00} muni de la norme de ℓ^2 a pour dual ℓ^2 , qui est réflexif, alors que c_{00} n'est pas complet et n'est donc pas réflexif.

Pour tout espace normé X , on obtient les inclusions canoniques

$$X \subseteq X'' \subseteq X^{(4)} \subseteq X^{(6)} \subseteq \dots$$

et

$$X' \subseteq X''' \subseteq X^{(5)} \subseteq X^{(7)} \subseteq \dots$$

Si X est de Banach, la Proposition 3.4.6 implique que ces suites sont soit constantes, soit strictement croissantes.

3.5 Transposée d'un opérateur

La dualité transforme naturellement un opérateur $T : X \rightarrow Y$ en un opérateur agissant dans le sens opposé entre les duaux. Nous utiliserons la notation T' pour cette transposée, afin de réserver T^* à l'adjoint hilbertien.

Définition 3.5.1. Soient X, Y deux espaces normés et $T \in L(X, Y)$. Comme T est continue, la composée $y' \circ T$ est continue pour tout $y' \in Y'$. La *transposée* de T est donc l'application

$$T' : Y' \longrightarrow X', \quad T'(y') = y' \circ T.$$

Elle est caractérisée par

$$\langle T'y', x \rangle = \langle y', Tx \rangle.$$

Remarque 3.5.2. Si $T : X \rightarrow Y$ est seulement linéaire, sa transposée algébrique est toujours définie entre les duals algébriques par $y^* \mapsto y^* \circ T$. En revanche, pour obtenir une application $T' : Y' \rightarrow X'$ entre les duals topologiques, il faut assurer la continuité des composées. Dans le cadre du cours, cette condition est garantie par l'hypothèse $T \in L(X, Y)$.

Proposition 3.5.3. La transposée T' est linéaire continue et $\|T'\| = \|T\|$.

Démonstration. Pour $y' \in Y'$ et $x \in X$,

$$|T'y'(x)| = |y'(Tx)| \leq \|y'\| \|T\| \|x\|,$$

donc $\|T'\| \leq \|T\|$. Réciproquement, pour $x \in X$, le Corollaire 3.2.4 appliqué à Tx donne

$$\|Tx\| = \sup_{\|y'\| \leq 1} |y'(Tx)| \leq \|T'\| \|x\|.$$

On prend le supremum sur la boule unité de X . ■

Proposition 3.5.4. Si $S \in L(X, Y)$ et $T \in L(Y, Z)$, alors $(T \circ S)' = S' \circ T'$.

Démonstration. Pour $z' \in Z'$, on a $(T \circ S)'z' = z' \circ T \circ S = S'(T'z')$. ■

Proposition 3.5.5. Si $T \in L(X, Y)$, alors

$$\ker T' = (\operatorname{im} T)^\perp.$$

En particulier, T' est injective si et seulement si $\operatorname{im} T$ est dense dans Y .

Démonstration. La première identité découle directement de la définition. La seconde est alors le critère de densité du Corollaire 3.2.7 appliqué au sous-espace $\operatorname{im} T$ de Y . ■

Passage au cadre hilbertien. Jusqu'ici, les résultats ne font intervenir que la structure normée et son dual. Nous exploitons maintenant une structure supplémentaire, le produit scalaire, qui permet d'identifier le dual d'un espace de Hilbert à l'espace lui-même par le théorème de Riesz.

3.6 Espaces de Hilbert, projection et représentation de Riesz

Les espaces de Hilbert sont des espaces de Banach dont la norme provient d'un produit scalaire. Leur géométrie permet de définir des projections orthogonales et conduit à une description complète du dual par le théorème de représentation de Riesz.

Définition 3.6.1. Un *espace de Hilbert* est un espace de Banach dont la norme provient d'un produit scalaire,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Dans tout le cours, le produit scalaire est linéaire par rapport à sa première variable.

Théorème 3.6.2 (Projection sur un convexe fermé). *Soit H un espace de Hilbert et soit $C \subset H$ un convexe fermé non vide. Pour tout $x \in H$, il existe un unique point $P_C x \in C$ tel que*

$$\|x - P_C x\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

Démonstration. Posons $d = \inf_{y \in C} \|x - y\|$ et choisissons une suite (y_n) de C telle que $\|x - y_n\| \rightarrow d$. L'identité du parallélogramme donne

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2.$$

Comme C est convexe, $(y_n + y_m)/2 \in C$, donc le dernier terme est au moins $4d^2$. Ainsi (y_n) est de Cauchy. La complétude de H et la fermeture de C donnent $y_n \rightarrow y \in C$, et $\|x - y\| = d$.

Si $y, z \in C$ réalisent tous deux la distance d , la même identité appliquée à y, z donne

$$\|y - z\|^2 \leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0,$$

d'où $y = z$. ■

Corollaire 3.6.3. *Si F est un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H , alors*

$$H = F \oplus F^\perp.$$

Pour tout $x \in H$, le vecteur $P_F x$ est caractérisé par $P_F x \in F$ et $x - P_F x \in F^\perp$. L'application $P_F : H \rightarrow F$ est linéaire continue et $\|P_F\| \leq 1$.

Démonstration. Soit $y = P_F x$. Pour $h \in F$ et $t \in \mathbb{K}$, la minimalité de y donne $\|x - y\|^2 \leq \|x - y - th\|^2$. En faisant varier t réel puis, dans le cas complexe, t imaginaire, on obtient $\langle x - y, h \rangle = 0$. L'unicité de la décomposition orthogonale donne alors la linéarité de P_F . Enfin, le théorème de Pythagore donne $\|P_F x\| \leq \|x\|$. ■

Lemme 3.6.4. Soient H un espace de Hilbert et $a \in H$. L'application $\Phi_a : H \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $\Phi_a(x) = \langle x, a \rangle$ appartient à H' et $\|\Phi_a\| = \|a\|$.

Démonstration. On peut bien sûr supposer que $a \neq 0$. Il est facile de vérifier que Φ_a est linéaire. De plus, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|\Phi_a(x)| = |\langle x, a \rangle| \leq \|x\| \|a\| \quad \forall x \in H,$$

ce qui montre que Φ_a est continu et satisfait $\|\Phi_a\| \leq \|a\|$. Enfin, si $x = \frac{a}{\|a\|}$, on a $\|x\| = 1$ et $|\Phi_a(x)| = \|a\|$, d'où $\|\Phi_a\| \geq \|a\|$ par la Proposition 3.1.3. ■

Théorème 3.6.5 (Représentation de Riesz). Soient H un espace de Hilbert et $T \in H'$. Alors il existe $a \in H$ tel que $T = \Phi_a$.

Démonstration. Soit $T \in H'$. Si $T = 0$, alors $T = \Phi_0$. Si $T \neq 0$, alors $\ker(T)$ est un sous-espace vectoriel propre fermé de H . Soit $z \notin \ker(T)$ et $x = z - P_{\ker(T)}(z)$. Alors $x \perp y$ pour tout $y \in \ker(T)$. Par linéarité, on peut supposer que $\|x\| = 1$. Remarquons que

$$T(x)y - T(y)x \in \ker T$$

pour tout $y \in H$. Par conséquent, on a

$$0 = \langle T(x)y - T(y)x, x \rangle = T(x)\langle y, x \rangle - T(y)\|x\|^2 = T(x)\langle y, x \rangle - T(y)$$

et on en tire que $T(y) = \langle y, \overline{T(x)}x \rangle$ pour tout $y \in H$. Ainsi, $a = \overline{T(x)}x$ convient. ■

Proposition 3.6.6. Tout espace de Hilbert est réflexif.

Démonstration. Soient H un espace de Hilbert et $S \in H''$. On vérifie directement que l'application $T_0 : H \rightarrow \mathbb{K} : x \mapsto \overline{S(\Phi_x)}$ est une forme linéaire sur H . Elle est également continue comme composée d'applications continues. Par le Théorème 3.6.5, il existe $a \in H$ tel que $T_0 = \Phi_a$. Pour

conclure, il suffit de montrer que $S(T) = T(a)$ pour tout $T \in H'$. Si $T \in H'$, alors le Théorème 3.6.5 donne à nouveau $b \in H$ tel que $T = \Phi_b$, d'où

$$S(T) = S(\Phi_b) = \overline{\Phi_a(b)} = \overline{\langle b, a \rangle} = \langle a, b \rangle = \Phi_b(a) = T(a).$$

■

3.6.1 Adjoint hilbertien

La représentation de Riesz transforme la transposée en un opérateur entre les espaces de Hilbert eux-mêmes.

Définition 3.6.7. Soient H et K deux espaces de Hilbert et $T \in L(H, K)$. L'*adjoint hilbertien* de T est l'unique opérateur $T^* \in L(K, H)$ tel que

$$\langle Tx, y \rangle_K = \langle x, T^*y \rangle_H \quad (x \in H, y \in K).$$

Proposition 3.6.8. L'adjoint existe, est unique et vérifie $\|T^*\| = \|T\|$. De plus, $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$ lorsque les compositions ont un sens.

Démonstration. Fixons $y \in K$. L'application $x \mapsto \langle Tx, y \rangle_K$ appartient à H' . Le Théorème 3.6.5 fournit donc un unique vecteur $T^*y \in H$ tel que

$$\langle Tx, y \rangle_K = \langle x, T^*y \rangle_H.$$

L'unicité entraîne immédiatement la linéarité de $y \mapsto T^*y$. De plus,

$$\|T^*y\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, T^*y \rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, y \rangle| \leq \|T\| \|y\|,$$

donc T^* est continu et $\|T^*\| \leq \|T\|$. Réciproquement, pour $x \in H$,

$$\|Tx\| = \sup_{\|y\| \leq 1} |\langle Tx, y \rangle_K| = \sup_{\|y\| \leq 1} |\langle x, T^*y \rangle_H| \leq \|T^*\| \|x\|.$$

Ainsi $\|T\| \leq \|T^*\|$, d'où l'égalité. L'identité pour la composition découle de la caractérisation par le produit scalaire. ■

3.6.2 Théorèmes de Hellinger–Toeplitz

Le théorème du graphe fermé du Chapitre 1 permet de déduire la continuité de certaines applications linéaires à partir d'identités portant uniquement sur le produit scalaire.

Corollaire 3.6.9 (Théorèmes de Hellinger–Toeplitz). *Soit H un espace de Hilbert.*

1. *Soient $S, T : H \rightarrow H$ deux applications linéaires telles que*

$$\langle S(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle$$

pour tous $x, y \in H$. Alors S et T sont continus.

2. *Si H est réel et si $T : H \rightarrow H$ est une application linéaire telle que $\langle T(x), x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$, alors T est continu.*

Démonstration. Pour le premier point, soit $x_n \rightarrow x$ et supposons $T(x_n) \rightarrow y$. Pour tout $z \in H$,

$$\langle z, y \rangle = \lim_n \langle z, T(x_n) \rangle = \lim_n \langle S(z), x_n \rangle = \langle S(z), x \rangle = \langle z, T(x) \rangle.$$

En prenant $z = y - T(x)$, on obtient $y = T(x)$. Le graphe de T est fermé ; le Théorème 1.9.2 donne sa continuité. Le même argument s'applique à S .

Pour le second point, soit $x_n \rightarrow 0$ et $T(x_n) \rightarrow y$. Pour tout $h \in H$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \langle T(x_n + \lambda h), x_n + \lambda h \rangle.$$

En développant et en faisant tendre n vers l'infini,

$$\lambda \langle y, h \rangle + \lambda^2 \langle T(h), h \rangle \geq 0.$$

Comme cette inégalité vaut pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\langle y, h \rangle = 0$ pour tout h , donc $y = 0$. Le graphe de T est fermé et le théorème du graphe fermé conclut. ■

3.7 Dual des espaces ℓ^p

Le cas $p = 2$ découle directement du théorème de représentation de Riesz ; les autres valeurs de p conduisent à la dualité ℓ^p – ℓ^q .

Les espaces de suites fournissent des exemples fondamentaux où le dual peut être calculé explicitement. Nous retrouvons ici, avec les preuves du cours initial, les identifications de $(\ell^p)'$ et de ℓ^q .

Dans cette section, nous nous intéressons aux espaces ℓ^p et nous donnons une caractérisation complète de leur dual. Commençons par rappeler que si $p \in]1, +\infty[$, alors $\frac{1}{p} \in]0, 1[$ et il existe un nombre réel q tel que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Les nombres p et q sont appelés des *exposants conjugués*. On étend cette définition en imposant que les nombres 1 et $+\infty$ sont des exposants conjugués. Rappelons également les inégalités de Hölder.

Proposition 3.7.1. *Si $p, q \in [1, +\infty]$ sont des exposants conjugués, alors pour tout $x \in \ell^p$ et tout $y \in \ell^q$, on a $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Il est donc légitime de considérer, pour $y \in \ell^q$, l'application linéaire

$$T_y : \ell^p \rightarrow \mathbb{K} : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n.$$

Les inégalités de Hölder impliquent que T_y est continu et tel que $\|T_y\| \leq \|y\|_q$. Dans le cas où $p = q = 2$, l'espace ℓ^2 est de Hilbert et on a $T_y = \Phi_{\bar{y}}$. On sait par le Théorème 3.6.5 de représentation de Riesz que ces formes linéaires permettent d'obtenir une description complète de l'espace dual. Montrons que c'est également le cas pour les espaces ℓ^p .

Lemme 3.7.2. *Soit $p \in [1, +\infty[$ et soit q son exposant conjugué.*

Pour tout $y \in \ell^q$, on a

$$\|y\|_q = \sup \left\{ \left| \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n \right| : x \in \ell^p, \|x\|_p \leq 1 \right\},$$

c'est-à-dire $\|y\|_q = \|T_y\|$.

Démonstration. Par les inégalités de Hölder, on sait déjà que $\|y\|_q \geq \|T_y\|$. Il suffit donc de montrer que $\|y\|_q \leq \|T_y\|$.

Supposons tout d'abord que $p = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit e_n la suite canonique définie par $e_{n,m} = \delta_{n,m}$. On a $\|e_n\|_1 = 1$ et $|T(e_n)| = |y_n|$. Ainsi, $\|T_y\| \geq |y_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où $\|T_y\| \geq \|y\|_\infty$.

Supposons à présent que $p > 1$. On peut bien sûr supposer que $y \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, fixons $\lambda_n \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda_n| = 1$ et $\lambda_n y_n = |y_n|$. Si N est suffisamment grand, on peut considérer $A_N := \left(\sum_{n=0}^N |y_n|^q \right)^{-1/p}$. On définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $x_n = A_N \lambda_n |y_n|^{q/p}$ si $n \leq N$, et $x_n = 0$ si $n > N$. On obtient alors

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^N A_N^p |\lambda_n|^p |y_n|^q \right)^{1/p} = A_N \left(\sum_{n=0}^N |y_n|^q \right)^{1/p} = 1.$$

Puisque $q = 1 + \frac{q}{p}$, il vient

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n \right| = A_N \sum_{n=0}^N |y_n|^{1+\frac{q}{p}} = A_N \sum_{n=0}^N |y_n|^q = \left(\sum_{n=0}^N |y_n|^q \right)^{1-1/p} = \left(\sum_{n=0}^N |y_n|^q \right)^{1/q},$$

d'où

$$\sup \left\{ \left| \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n \right| : x \in \ell^p, \|x\|_p \leq 1 \right\} \geq \left(\sum_{n=0}^N |y_n|^q \right)^{1/q}.$$

Comme N peut être choisi arbitrairement grand, on obtient la conclusion. $\blacksquare$

Remarque 3.7.3. Dans la deuxième partie de la preuve précédente, on a montré que

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |y_n|^q \right)^{1/q} \leq \sup \left\{ \left| \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n \right| : x \in \ell^p, \|x\|_p \leq 1 \right\}$$

quelle que soit la suite y . Ainsi, $y \in \ell^q$ si et seulement si

$$\sup \left\{ \left| \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n \right| : x \in \ell^p, \|x\|_p \leq 1 \right\} < +\infty.$$

On a construit une injection continue naturelle

$$\ell^q \rightarrow (\ell^p)' : y \mapsto T_y$$

qui préserve la norme. Le résultat suivant montre que cette injection est également surjective et par conséquent, il s'agit d'une isométrie entre le dual de l'espace ℓ^p et l'espace ℓ^q .

Proposition 3.7.4. Soit $p \in [1, +\infty[$ et soit q son exposant conjugué. Pour tout $T \in (\ell^p)'$, il existe $y \in \ell^q$ tel que $T = T_y$. En particulier, $(\ell^p)' \simeq \ell^q$ topologiquement.

Démonstration. Supposons que $p = 1$. Vu ce qui précède, il suffit de montrer que si $T \in (\ell^1)'$, alors il existe $y \in \ell^\infty$ tel que $T = T_y$. Considérons la suite y définie par $y_n = T(e_n)$. On a $|y_n| \leq \|T\|$ et donc $y \in \ell^\infty$. Puisque $x = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N x_n e_n$ pour tout $x \in \ell^1$, où la limite a lieu dans ℓ^1 , la linéarité et la continuité de T permettent d'obtenir le résultat.

Supposons à présent que $p > 1$. Soit $T \in (\ell^p)'$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit e_n la suite définie par $e_{n,m} = \delta_{n,m}$. Pour tout $x \in \ell^p$, on a $x = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N x_n e_n$, où la limite a lieu dans ℓ^p . Par continuité et linéarité de T , on a donc

$$T(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} T \left(\sum_{n=0}^N x_n e_n \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N x_n T(e_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n T(e_n).$$

En utilisant la Remarque 3.7.3, on en tire que la suite $(T(e_n))_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à ℓ^q car

$$\sup \left\{ \left| \sum_{n=0}^{+\infty} x_n T(e_n) \right| : x \in \ell^p, \|x\|_p \leq 1 \right\} = \|T\| < +\infty.$$

Ainsi, $T = T_y$ si y est la suite définie par $y_n = T(e_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'égalité $(\ell^p)' \simeq \ell^q$ provient alors du Lemme 3.7.2.

Par le Corollaire 1.8.4 du théorème de l'opérateur ouvert, la bijection linéaire continue

$$\ell^q \rightarrow (\ell^p)' : y \mapsto T_y$$

entre espaces de Banach est un homéomorphisme. ■

Le résultat suivant est immédiat.

Corollaire 3.7.5. *Si $p \in]1, +\infty[$, alors l'espace ℓ^p est réflexif.*

Terminons cette section par le calcul du dual de l'espace c_0 .

Proposition 3.7.6. *On a $(c_0)' \simeq \ell^1$ topologiquement.*

Démonstration. Si $y \in \ell^1$, on peut considérer l'application linéaire

$$T_y : c_0 \rightarrow \mathbb{K} : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n.$$

Elle est continue puisque

$$|T_y(x)| \leq \|y\|_1 \|x\|_\infty \quad \forall x \in c_0$$

et en particulier, $\|T_y\| \leq \|y\|_1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, fixons $\lambda_n \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda_n| = 1$ et $\lambda_n y_n = |y_n|$. Soit $N \in \mathbb{N}$ et soit x la suite définie par $x_n = \lambda_n$ pour tout $n \leq N$ et $x_n = 0$ pour $n > N$. Alors, $x \in c_0$ et on a $\|x\|_\infty = 1$, d'où

$$\|T_y\| \geq |T_y(x)| = \left| \sum_{n=0}^N \lambda_n y_n \right| = \sum_{n=0}^N |y_n|.$$

Comme $N \in \mathbb{N}$ est arbitraire, on en tire que $\|T_y\| \geq \|y\|_1$.

Enfin, si $T \in (c_0)'$, vérifions comme précédemment que la suite $(T(e_n))_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à ℓ^1 . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\lambda_n \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda_n| = 1$ et $\lambda_n T(e_n) = |T(e_n)|$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{n=0}^N \lambda_n e_n \in c_0$ et

$$\left| T\left(\sum_{n=0}^N \lambda_n e_n\right) \right| = \left| \sum_{n=0}^N \lambda_n T(e_n) \right| = \sum_{n=0}^N |T(e_n)|.$$

En utilisant la continuité de T , il vient

$$\sum_{n=0}^N |T(e_n)| \leq \|T\| \left\| \sum_{n=0}^N \lambda_n e_n \right\|_\infty = \|T\|.$$

Comme $N \in \mathbb{N}$ est arbitraire, on en tire que $(T(e_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ et $\|(T(e_n))_{n \in \mathbb{N}}\|_1 \leq \|T\|$. Comme T satisfait $T = T_y$, on obtient la conclusion. ■

Remarque 3.7.7. Le cas de l'espace ℓ^∞ est plus délicat à traiter. En effet, la suite $(\sum_{n=0}^N x_n e_n)_{N \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans ℓ^∞ . Les arguments précédents ne peuvent donc plus s'appliquer dans cette situation.

Corollaire 3.7.8. *Les espaces ℓ^1, ℓ^∞ et c_0 ne sont pas réflexifs.*

Démonstration. Puisque $(c_0)' \simeq \ell^1$ et $(\ell^1)' \simeq \ell^\infty$, l'espace c_0 n'est pas réflexif. On obtient alors que ℓ^1 et ℓ^∞ ne sont pas réflexifs en utilisant la Proposition 3.4.6. ■

Retour à la dualité générale. Les résultats hilbertiens et les calculs explicites de duals fournissent des exemples privilégiés, mais les notions qui suivent ne dépendent plus d'un produit scalaire. Nous revenons maintenant à un espace normé quelconque et aux topologies naturellement engendrées par son dual.

3.8 Topologies faible et faible-* dans le cadre normé

Les éléments du dual peuvent servir non seulement à tester les vecteurs, mais aussi à définir des topologies plus faibles que la topologie de la norme. Nous introduisons ici les deux topologies naturelles associées au dual ; elles seront reformulées dans le cadre localement convexe dans la seconde partie.

Soit X un espace normé. Pour $T_1, \dots, T_n \in X'$ et $r > 0$, posons

$$U(T_1, \dots, T_n; r) = \{x \in X : |T_k(x)| < r \text{ pour } k = 1, \dots, n\}.$$

Définition 3.8.1. La *topologie faible* $\sigma(X, X')$ est la topologie dont une base de voisinages de 0 est formée par les ensembles $U(T_1, \dots, T_n; r)$. On note X_a l'espace X muni de cette topologie.

Cette définition ne fait intervenir que les formes linéaires continues. Elle peut aussi être décrite à l'aide des semi-normes

$$x \mapsto \max_{1 \leq k \leq n} |T_k(x)|,$$

ce qui préparera sa formulation localement convexe.

C'est la topologie la moins fine pour laquelle toutes les applications de X' sont continues. Elle est moins fine que la topologie de la norme. Une suite (x_n) converge faiblement vers x si et seulement si $T(x_n) \rightarrow T(x)$ pour tout $T \in X'$.

Exemple 3.8.2. Dans ℓ^2 , la suite canonique (e_n) converge faiblement vers 0 mais ne converge pas en norme, puisque $\|e_n\|_2 = 1$ pour tout n .

Pour $x_1, \dots, x_n \in X$ et $r > 0$, posons

$$V(x_1, \dots, x_n; r) = \{T \in X' : |T(x_k)| < r \text{ pour } k = 1, \dots, n\}.$$

Définition 3.8.3. La topologie dont une base de voisinages de 0 est formée par les ensembles $V(x_1, \dots, x_n; r)$ est appelée la *topologie simple* (ou *faible-**) sur X' ; elle est notée $\sigma(X', X)$. On note X'_s le dual X' muni de cette topologie.

De manière équivalente, cette topologie est engendrée par les semi-normes

$$T \mapsto \max_{1 \leq k \leq n} |T(x_k)|.$$

La convergence faible-* est donc la convergence ponctuelle sur X . Sur X' , on dispose ainsi de la topologie forte donnée par la norme, de la topologie faible $\sigma(X', X'')$ et de la topologie faible-* $\sigma(X', X)$.

Une même idée : définir une convergence par des tests. La convergence faible et la convergence faible-* illustrent un principe que l'on rencontre dans de nombreux domaines : au lieu de comparer directement les objets, on compare leur action sur une famille de tests. Pour la convergence faible dans X , les tests sont les éléments de X' :

$$x_n \rightharpoonup x \iff \ell(x_n) \rightarrow \ell(x) \quad \forall \ell \in X'.$$

Pour la convergence faible-* dans X' , on teste au contraire sur les points de X :

$$\ell_n \xrightarrow{*} \ell \iff \ell_n(x) \rightarrow \ell(x) \quad \forall x \in X.$$

Un parallèle utile vient de la probabilité. Si μ_n et μ sont des mesures de probabilité sur un espace métrique, leur convergence faible est caractérisée par

$$\int \varphi d\mu_n \longrightarrow \int \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in C_b.$$

Si X_n et X ont pour lois μ_n et μ , cette convergence des mesures est exactement la convergence en loi $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. Les fonctions φ ne sont pas des formes linéaires en la variable aléatoire, mais, vues comme fonctions tests sur les mesures, les applications $\mu \mapsto \int \varphi d\mu$ sont linéaires.

Nous retrouverons encore la même idée pour les distributions : la convergence d'une suite

(T_n) de distributions vers T se lit par

$$\langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad \text{pour toute fonction test } \varphi.$$

Remarque 3.8.4. Si X est réflexif, les topologies faible et faible-* sur X' coïncident. En dimension infinie, elles sont en général strictement plus faibles que la topologie de la norme.

Exemple 3.8.5. Prenons $X = c_0$. Comme $X' \simeq \ell^1$, la suite canonique (e_n) de ℓ^1 converge vers 0 pour la topologie faible-* $\sigma(\ell^1, c_0)$: pour tout $x = (x_k) \in c_0$,

$$\langle e_n, x \rangle = x_n \longrightarrow 0.$$

En revanche, (e_n) ne converge pas faiblement vers 0 dans ℓ^1 , car l'élément $(1, 1, \dots) \in (\ell^1)' = \ell^\infty$ prend la valeur 1 sur chaque e_n . Cet exemple montre concrètement que les topologies faible et faible-* sur un dual peuvent être différentes lorsque l'espace de départ n'est pas réflexif.

3.9 Théorème de Banach–Alaoglu

Nous utiliserons le théorème de Tychonoff sous la forme suivante : tout produit d'espaces compacts est compact pour la topologie produit. Ce résultat de topologie générale sera admis.

La topologie faible-* vient d'être définie comme topologie de convergence ponctuelle sur X . Le théorème suivant montre pourquoi elle est particulièrement importante : la boule unité du dual, qui n'est en général pas compacte pour la norme, devient compacte pour cette topologie.

Théorème 3.9.1 (Banach–Alaoglu). *Soit X un espace normé. La boule unité fermée*

$$B_{X'} = \{T \in X' : \|T\| \leq 1\}$$

est compacte pour la topologie faible- $\sigma(X', X)$.*

Démonstration. Identifions chaque $T \in X'$ à la famille $(T(x))_{x \in X} \in \mathbb{K}^X$. Si $T \in B_{X'}$, alors $|T(x)| \leq \|x\|$ pour tout $x \in X$. Ainsi

$$B_{X'} \subseteq \prod_{x \in X} \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq \|x\|\}.$$

Le produit du membre de droite est compact pour la topologie produit par le théorème de Tychonoff. La topologie induite sur $B_{X'}$ est précisément la topologie faible-*.

Il reste à vérifier que $B_{X'}$ est fermé dans ce produit. Une limite ponctuelle de formes linéaires est

linéaire, et les inégalités $|T(x)| \leq \|x\|$ sont préservées par passage à la limite ponctuelle. La limite appartient donc encore à $B_{X'}$. Ainsi $B_{X'}$ est un fermé d'un compact, donc est compact. ■

Corollaire 3.9.2. *Soit X un espace de Banach réflexif. Alors sa boule unité fermée B_X est compacte pour la topologie faible $\sigma(X, X')$.*

Démonstration. Le plongement canonique $J : X \rightarrow X''$ est une isométrie surjective et envoie B_X sur $B_{X''}$. Par le Théorème de Banach–Alaoglu appliqué à X' , la boule $B_{X''}$ est compacte pour $\sigma(X'', X')$. Sous l'identification donnée par J , cette topologie correspond exactement à $\sigma(X, X')$. La boule B_X est donc faiblement compacte. ■

Remarque 3.9.3. Lorsque X est de dimension infinie, la boule unité de X' n'est pas compacte pour la norme. Le théorème de Banach–Alaoglu montre qu'elle l'est néanmoins pour $\sigma(X', X)$. Le corollaire précédent explique aussi le rôle de la réflexivité : elle permet de transformer cette compacité faible-* dans le bidual en compacité faible dans l'espace initial. La version localement convexe sera formulée, dans la seconde partie, à l'aide des polaires.

3.10 Exercices

Les exercices ci-dessous regroupent les exercices du cours initial qui ne nécessitent que le cadre normé, la dualité ou la géométrie hilbertienne. Les exercices faisant intervenir les constructions générales d'espaces localement convexes sont reportés aux chapitres correspondants.

Exercice 3.10.1. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé et soient $x_1, \dots, x_n$ des éléments linéairement indépendants de X . Si $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$, montrer qu'il existe $f \in X'$ tel que $f(x_k) = c_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

Exercice 3.10.2. Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces normés. Soit $L(X, Y)$ l'espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y . On définit la *norme opérateur* de T par

$$\|T\| := \inf \{C > 0 : \|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X \ \forall x \in X\}.$$

Montrer que

1. la norme opérateur définit une norme sur $L(X, Y)$,
2. pour tout $T \in L(X, Y)$, on a

$$\|T\| = \sup \{\|T(x)\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1\} = \sup \{\|T(x)\|_Y : x \in X, \|x\|_X = 1\},$$

3. pour tout $T \in X'$ et tout $x \in X$, on a

$$\|T(x)\|_Y \leq \|T\| \|x\|_X.$$

Exercice 3.10.3. On munit l'espace $L^{1/2}([0, 1])$ de la distance définie par

$$d(f, g) = \int_0^1 \sqrt{|f(x) - g(x)|} dx.$$

Montrer que la seule forme linéaire continue sur $L^{1/2}([0, 1])$ est la forme linéaire nulle. Une interprétation de cet exemple en termes de convexité locale sera donnée dans la seconde partie, après l'introduction des espaces localement convexes.

Exercice 3.10.4. On munit l'espace $\mathbb{C}[x]$ des polynômes à coefficients complexes de la norme $\|P\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |P(x)|$. Si $a \in \mathbb{R}$, on considère la forme linéaire

$$T_a : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C} : P \mapsto P(a).$$

1. A quelle(s) condition(s) sur a la forme T_a est-elle continue ?
2. Dans ce cas, calculer $\|T_a\|$.

Exercice 3.10.5. Soit $\varphi \in C^0([0, \pi], \mathbb{R})$. Considérons l'application

$$T : C^0([0, \pi], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \int_0^\pi \varphi(x) f(x) dx.$$

1. Montrer que T appartient au dual de $C^0([0, \pi], \mathbb{R})$.
2. Si $\varphi \geq 0$, calculer $\|T\|$.
3. Si $\varphi(x) = \cos(x)$, calculer $\|T\|$.

Exercice 3.10.6. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite formant une partie dense de $[0, 1]$. On considère l'application

$$T : C^0([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} f(a_n).$$

1. Montrer que T appartient au dual de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$.
2. Montrer que $\|T\| = 1$.

4 Opérateurs compacts et opérateurs de Hilbert–Schmidt

Le théorème d’Arzelà–Ascoli fournit un premier critère concret de précompacité. Il est donc naturel d’introduire immédiatement les opérateurs compacts.

Pourquoi introduire les opérateurs compacts ?

En dimension infinie, la boule unité n’est plus compacte. Un opérateur compact compense en partie cette perte : il transforme les ensembles bornés en ensembles relativement compacts. Il réintroduit ainsi, après application de l’opérateur, un comportement proche de celui de la dimension finie et permet à nouveau d’extraire des sous-suites convergentes.

Dans de nombreux exemples, cette compacité traduit aussi un effet de régularisation. L’opérateur transforme un simple contrôle de taille en une information plus uniforme sur les images. Pour un opérateur intégral, par exemple, une famille bornée peut être envoyée sur une famille uniformément bornée et équicontinue ; le théorème d’Arzelà–Ascoli permet alors de conclure à la précompacité. On retrouve ainsi, au niveau des opérateurs, l’un des rôles essentiels de la compacité : transformer un contrôle local ou faible en un contrôle global suffisamment uniforme pour obtenir de la convergence.

Cette propriété explique pourquoi les opérateurs compacts jouent un rôle important dans les problèmes d’approximation et dans l’étude des équations fonctionnelles. Dans le cadre normé, leur compacité se lit entièrement sur l’image de la boule unité. Nous étudions ensuite les opérateurs de Hilbert–Schmidt et les perturbations compactes de l’identité, sans faire appel à la théorie spectrale.

4.1 Opérateurs compacts entre espaces normés

Définition 4.1.1. Soient X et Y deux espaces normés. Un opérateur linéaire continu $T : X \rightarrow Y$ est dit *compact* si $T(B_X)$ est relativement compact dans Y , où

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}.$$

On note $K(X, Y)$ l’ensemble des opérateurs compacts de X dans Y .

Comme tout ensemble borné de X est contenu dans un multiple de B_X , cette définition est équivalente à demander que T transforme toute partie bornée de X en une partie relativement compacte de Y .

Proposition 4.1.2. Soient X, Y, Z des espaces normés.

1. Si $K \in \mathcal{K}(X, Y)$ et $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$, alors $S \circ K \in \mathcal{K}(X, Z)$.
2. Si $K \in \mathcal{K}(Y, Z)$ et $S \in \mathcal{L}(X, Y)$, alors $K \circ S \in \mathcal{K}(X, Z)$.

Démonstration. Pour le premier point, $\overline{K(B_X)}$ est compact et son image par S est compacte ; elle contient $(S \circ K)(B_X)$. Pour le second, la continuité de S donne $S(B_X) \subseteq CB_Y$ pour un certain $C > 0$, et $(K \circ S)(B_X) \subseteq CK(B_Y)$ est relativement compact. ■

Corollaire 4.1.3. Si X est de dimension infinie, l'identité de X n'est pas compacte.

Démonstration. Si l'identité était compacte, la boule unité serait précompacte, ce qui contredirait la Proposition 2.1.4. ■

Exemple 4.1.4. Soient $K \subset \mathbb{R}$ compact et $k \in C^0(K \times K)$. L'opérateur

$$T : C^0(K) \rightarrow C^0(K), \quad T(f)(x) = \int_K f(y)k(x, y) dy,$$

est compact.

Démonstration. Si B est la boule unité de $C^0(K)$, la famille $T(B)$ est simplement bornée. De plus, l'uniforme continuité de k sur $K \times K$ donne, uniformément pour $f \in B$,

$$|T(f)(x) - T(f)(z)| \leq \mathcal{L}(K) \sup_{y \in K} |k(x, y) - k(z, y)|,$$

qui tend vers 0 lorsque $z \rightarrow x$. La famille $T(B)$ est donc équicontinue. Le théorème d'Arzelà–Ascoli (Théorème 2.2.4) montre qu'elle est précompacte. ■

Exemple 4.1.5. L'opérateur de Volterra

$$V : C^0([0, 1]) \longrightarrow C^0([0, 1]), \quad Vf(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

est compact. En effet, si $\|f\|_\infty \leq 1$, alors $\|Vf\|_\infty \leq 1$ et

$$|Vf(x) - Vf(y)| \leq |x - y|.$$

L'image de la boule unité est donc uniformément bornée et équicontinue ; sa précompacité résulte directement du Théorème d'Arzelà–Ascoli.

Proposition 4.1.6. *Tout opérateur de rang fini entre espaces normés est compact.*

Démonstration. L'image de la boule unité est une partie bornée d'un espace de dimension finie ; son adhérence y est compacte. ■

Proposition 4.1.7. *Soient X un espace normé et Y un espace de Banach. L'espace $K(X, Y)$ est fermé dans $L(X, Y)$ pour la norme d'opérateur.*

Démonstration. Soit (T_n) une suite d'opérateurs compacts telle que $\|T_n - T\| \rightarrow 0$. Pour montrer que T est compact, il suffit de montrer que $T(B_X)$ est précompact. Soit $\varepsilon > 0$ et choisissons n tel que $\|T - T_n\| < \varepsilon/3$. Comme $T_n(B_X)$ est relativement compact, donc précompact, il existe $y_1, \dots, y_m \in Y$ tels que

$$T_n(B_X) \subseteq \bigcup_{j=1}^m B_Y(y_j, \varepsilon/3).$$

Pour $x \in B_X$, choisissons j tel que $\|T_n x - y_j\| < \varepsilon/3$. Alors

$$\|Tx - y_j\| \leq \|(T - T_n)x\| + \|T_n x - y_j\| < 2\varepsilon/3.$$

Ainsi $T(B_X)$ est précompact. Comme Y est complet, la Proposition 2.1.3 montre que son adhérence est compacte. ■

4.2 Opérateurs de Hilbert–Schmidt

Dans les espaces de Hilbert, les opérateurs de Hilbert–Schmidt fournissent une classe très concrète d'opérateurs compacts. La définition utilise une base hilbertienne, mais la quantité obtenue ne dépend pas du choix de cette base.

Dans cette section, H et K sont des espaces de Hilbert séparables.

Lemme 4.2.1. *Soit $T \in L(H, K)$. Si (e_n) et (f_n) sont deux bases hilbertiennes de H , alors*

$$\sum_n \|Te_n\|^2 = \sum_n \|Tf_n\|^2,$$

avec la convention que les deux membres peuvent valoir $+\infty$.

Démonstration. Soit (u_j) une base hilbertienne de K . Par Parseval et par la définition de l'adjoint hilbertien,

$$\sum_n \|Te_n\|^2 = \sum_{n,j} |\langle Te_n, u_j \rangle|^2 = \sum_j \sum_n |\langle e_n, T^* u_j \rangle|^2 = \sum_j \|T^* u_j\|^2.$$

Le dernier membre ne dépend pas de la base (e_n) de H ; le même calcul avec (f_n) donne la conclusion. Les séries étant à termes positifs, les permutations des sommes sont légitimes dans $[0, +\infty]$. ■

Définition 4.2.2. Un opérateur $T \in L(H, K)$ est un *opérateur de Hilbert–Schmidt* si, pour une – et donc pour toute – base hilbertienne (e_n) de H ,

$$\|T\|_{HS}^2 := \sum_n \|Te_n\|^2 < +\infty.$$

Exemple 4.2.3. Soit H un espace de Hilbert séparable muni d’une base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 0}$, et soit (λ_n) une suite bornée de scalaires. On définit l’opérateur diagonal

$$T \left(\sum_{n \geq 0} x_n e_n \right) = \sum_{n \geq 0} \lambda_n x_n e_n.$$

Alors $T \in L(H)$ et

$$\|T\| = \sup_n |\lambda_n|.$$

De plus,

$$\|T\|_{HS}^2 = \sum_{n \geq 0} |\lambda_n|^2.$$

Ainsi T est de Hilbert–Schmidt si et seulement si $(\lambda_n) \in \ell^2$. Cet exemple montre concrètement que la condition de Hilbert–Schmidt impose une décroissance quadratiquement sommable des coefficients diagonaux.

Proposition 4.2.4. *Tout opérateur de rang fini entre espaces de Hilbert est de Hilbert–Schmidt. De plus,*

$$\|T\| \leq \|T\|_{HS}$$

pour tout opérateur de Hilbert–Schmidt T .

Démonstration. Si T est de rang fini, alors $(\ker T)^\perp$ est de dimension finie. En choisissant une base hilbertienne adaptée à la décomposition $H = \ker T \oplus (\ker T)^\perp$, seuls un nombre fini de termes de la somme définissant $\|T\|_{HS}$ sont non nuls.

Pour la seconde assertion, si (e_n) est une base hilbertienne et $x = \sum_n x_n e_n$ avec $\|x\| = 1$, alors, pour tout $y \in K$ de norme 1,

$$|\langle Tx, y \rangle| = \left| \sum_n x_n \langle Te_n, y \rangle \right| \leq \left(\sum_n |x_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_n |\langle Te_n, y \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq \|T\|_{HS}.$$

On prend le supremum sur y , puis sur x . ■

Proposition 4.2.5. *Tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact.*

Démonstration. Soit (e_n) une base hilbertienne de H et soit P_N la projection orthogonale sur $\text{span}\{e_0, \dots, e_N\}$. Alors $T_N = T \circ P_N$ est de rang fini. De plus,

$$\|T - T_N\|^2 \leq \|T - T_N\|_{HS}^2 = \sum_{n>N} \|Te_n\|^2 \longrightarrow 0.$$

Les opérateurs de rang fini sont compacts et, lorsque l'espace d'arrivée est Banach, l'ensemble des opérateurs compacts est fermé pour la norme d'opérateur. Ainsi T est compact. ■

Proposition 4.2.6 (Opérateurs intégraux). *Soit $k \in L^2([0, 1]^2)$ et définissons*

$$T_k : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1]), \quad T_k f(x) = \int_0^1 k(x, y) f(y) dy.$$

Alors T_k est de Hilbert-Schmidt et

$$\|T_k\|_{HS} = \|k\|_{L^2([0, 1]^2)}.$$

En particulier, T_k est compact.

Démonstration. Commençons par vérifier que T_k est bien défini et continu. Pour $f \in L^2([0, 1])$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne, pour presque tout x ,

$$|T_k f(x)|^2 \leq \left(\int_0^1 |k(x, y)|^2 dy \right) \|f\|_2^2.$$

En intégrant par rapport à x , on obtient

$$\|T_k f\|_2^2 \leq \|k\|_{L^2([0, 1]^2)}^2 \|f\|_2^2,$$

de sorte que $T_k \in L(L^2([0, 1]), L^2([0, 1]))$.

Soit maintenant (e_n) une base hilbertienne de $L^2([0, 1])$. Pour presque tout x , la fonction $y \mapsto k(x, y)$ appartient à $L^2([0, 1])$. Avec la convention adoptée dans le cours, le produit scalaire est linéaire dans sa première variable. Ainsi, pour presque tout x ,

$$T_k e_n(x) = \left\langle e_n, \overline{k(x, \cdot)} \right\rangle_{L^2}.$$

Par Parseval,

$$\sum_n |T_k e_n(x)|^2 = \sum_n \left| \left\langle e_n, \overline{k(x, \cdot)} \right\rangle \right|^2 = \int_0^1 |k(x, y)|^2 dy.$$

En intégrant et en utilisant Tonelli,

$$\sum_n \|T_k e_n\|_2^2 = \int_0^1 \int_0^1 |k(x, y)|^2 dy dx.$$

La conclusion découle de la définition et de la Proposition 4.2.5. ■

4.3 Perturbations compactes de l'identité

Dans cette section, étant donné un opérateur compact continu $K : X \rightarrow X$ sur un espace de Banach X , on s'intéresse aux propriétés de l'opérateur $K - I$. L'objectif est de montrer qu'une perturbation compacte de l'identité conserve, à un défaut de dimension finie près, plusieurs propriétés d'un isomorphisme. Cette étude est menée ici indépendamment de toute théorie spectrale.

Proposition 4.3.1. *Soient X un espace de Banach et $K \in \mathcal{K}(X, X)$. Alors le noyau de $K - I$ est un sous-espace de dimension finie et l'image de $K - I$ est fermée.*

Démonstration. Soit b_X la boule unité de X . Comme K est un opérateur compact, sa restriction au noyau de $K - I$ est compacte par la Proposition 4.1.2. On en tire que $K(b_X \cap \ker(K - I)) = b_X \cap \ker(K - I)$ est relativement compact, et la Proposition 2.1.4 implique que la dimension de $\ker(K - I)$ est finie.

Montrons à présent que $\text{im}(K - I)$ est fermé. Posons $T = K - I$ et considérons l'application induite

$$\hat{T} : X / \ker T \longrightarrow X, \quad \hat{T}([x]) = T(x).$$

Comme T est continu, $\ker T$ est fermé; le quotient $X / \ker T$ est donc un espace de Banach par le résultat du Chapitre 1 sur les quotients d'espaces de Banach. L'image de $\hat{T}$ est exactement $\text{im } T$. Par la Proposition 1.4.7, il suffit donc de montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\|T(x)\| = \|\hat{T}(\pi_{\ker T}(x))\| \geq C \|\pi_{\ker T}(x)\|$$

pour tout $x \in X$. Procédons par l'absurde et supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, il existe $x_n \in X$ tel que $\|\pi_{\ker(T)}(x_n)\| = 1$ et $\|T(x_n)\| < \frac{1}{n}$. Par définition de la norme quotient, on peut choisir un représentant x_n tel que $\|x_n\| < 2$. Comme K est un opérateur compact et comme la suite $(K(x_n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ appartient à l'image de la boule $b_X(2)$, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $(K(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ converge. Notons y sa limite. Comme $\|T(x_{n_k})\| = \|K(x_{n_k}) - x_{n_k}\| < \frac{1}{n_k}$, on obtient que la suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge également vers y . Par continuité de K , on a $K(y) = y$ et donc $y \in \ker(T)$. En utilisant la définition de la norme quotient, il vient

$$1 = \|\pi_{\ker(T)}(x_{n_k})\| \leq \|x_{n_k} - y\| \rightarrow 0,$$

d'où une contradiction. ■

Si X est un espace de Banach, $K : X \rightarrow X$ est un opérateur compact et $T = K - I$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}_0^*$, posons

$$K_n = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \binom{n}{j} K^j.$$

Comme les opérateurs compacts forment un sous-espace vectoriel et sont stables par composition avec un opérateur continu, K_n est compact. La formule du binôme donne

$$(K - I)^n = (-1)^n (I - K_n) = (-1)^{n+1} (K_n - I).$$

La multiplication par le scalaire non nul $(-1)^{n+1}$ ne change ni le noyau ni l'image. On peut donc appliquer le résultat précédent à l'opérateur K_n pour obtenir que

▷ $\ker(K - I)^n$ est de dimension finie,

▷ $\operatorname{im}(K - I)^n$ est fermé.

De plus, il est clair que la suite de sous-espaces $(\ker(K - I)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et la suite de sous-espaces $(\operatorname{im}(K - I)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Nous allons montrer que ces deux suites se stabilisent au même cran.

Lemme 4.3.2 (Lemme de stabilisation). *Soient X un espace de Banach et $K \in \mathcal{K}(X, X)$. Soit $(L_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite croissante (resp. décroissante) de sous-espaces vectoriels fermés de X . Supposons que*

$$(K - I)(L_{m+1}) \subseteq L_m \quad (\text{resp. } (K - I)(L_m) \subseteq L_{m+1})$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$. Alors il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $L_m = L_{m_0}$ pour tout $m \geq m_0$.

Démonstration. Supposons par l'absurde que les sous-espaces considérés forment une suite strictement croissante. Pour chaque m , le quotient normé L_{m+1}/L_m est non nul. Choisissons-y une classe de norme 1 et un représentant $y_{m+1} \in L_{m+1}$ de norme strictement inférieure à 2. Par définition de la norme quotient,

$$\operatorname{dist}(y_{m+1}, L_m) = 1.$$

Si $p \leq q$, alors $(K - I)y_{q+1} \in L_q$ et $Ky_{p+1} \in L_{p+1} \subseteq L_q$. Par conséquent,

$$\|Ky_{q+1} - Ky_{p+1}\| = \|y_{q+1} + (K - I)y_{q+1} - Ky_{p+1}\| \geq \operatorname{dist}(y_{q+1}, L_q) = 1.$$

La suite (y_m) est bornée, mais (Ky_m) ne possède donc aucune sous-suite de Cauchy, ce qui contredit la compacité de K .

Supposons maintenant que (L_m) soit strictement décroissante. Pour chaque m , le quotient normé L_m/L_{m+1} est non nul. Choisissons-y une classe de norme 1 et un représentant $y_m \in L_m$ de norme strictement inférieure à 2. Alors

$$\operatorname{dist}(y_m, L_{m+1}) = 1.$$

Si $p < q$, alors $(K - I)y_p \in L_{p+1}$ et, puisque $y_q \in L_q \subseteq L_{p+1}$ et $(K - I)y_q \in L_{q+1} \subseteq L_{p+1}$, on a aussi $Ky_q \in L_{p+1}$. Par conséquent,

$$\|Ky_p - Ky_q\| = \|y_p + (K - I)y_p - Ky_q\| \geq \text{dist}(y_p, L_{p+1}) = 1.$$

On obtient à nouveau une suite bornée (y_m) telle que (Ky_m) ne possède aucune sous-suite de Cauchy, contradiction. Les deux cas sont donc établis. ■

Posons $L_m = \ker(K - I)^m$ pour tout entier $m \geq 1$. Alors la suite $(L_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est croissante et il est clair que $(K - I)(L_{m+1}) \subseteq L_m$. Le résultat précédent implique donc que la suite des noyaux se stabilise. De plus, si $L_m = L_{m+1}$, alors pour tout $x \in L_{m+2}$, on a $(K - I)^{m+1}((K - I)(x)) = 0$, et donc $(K - I)(x) \in L_{m+1} = L_m$. On en tire que $(K - I)^{m+1}(x) = (K - I)^m((K - I)(x)) = 0$, d'où $L_{m+2} = L_{m+1}$. Ainsi, l'indice m_0 de stabilisation est le premier naturel m pour lequel $L_m = L_{m+1}$. On a donc

$$\ker(K - I) \subsetneq \ker(K - I)^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \ker(K - I)^{m_0} = \ker(K - I)^{m_0+1} = \dots$$

Posons à présent $L_m = \text{im}(K - I)^m$ pour tout entier $m \geq 1$. Cette fois-ci, la suite $(L_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est décroissante et il est clair que $(K - I)(L_m) \subseteq L_{m+1}$. A nouveau, la suite $(L_m)_{m \in \mathbb{N}}$ se stabilise et la stabilisation a lieu au premier naturel m pour lequel $L_m = L_{m+1}$. En effet, supposons que $L_m = L_{m+1}$ et fixons $x = (K - I)^{m+1}(y) \in L_{m+1}$. Alors, on a $(K - I)^m(y) \in L_m = L_{m+1}$ et donc il existe un élément z tel que $(K - I)^m(y) = (K - I)^{m+1}(z)$. Ainsi, $x = (K - I)^{m+2}(z) \in L_{m+2}$ et on en tire que $L_{m+2} = L_{m+1}$. Par conséquent, on vient de montrer qu'il existait un entier m_1 pour lequel

$$\text{im}(K - I) \supsetneq \text{im}(K - I)^2 \supsetneq \cdots \supsetneq \text{im}(K - I)^{m_1} = \text{im}(K - I)^{m_1+1} = \dots$$

Nous allons à présent montrer que $m_0 = m_1$, c'est-à-dire que les deux suites se stabilisent au même cran.

Supposons tout d'abord que $m_0 > m_1$. Soit $x \in \ker(K - I)^{m_0}$. Comme on a $(K - I)^{m_0-1}(x) \in \text{im}(K - I)^{m_0-1} = \text{im}(K - I)^{m_0}$, il existe y tel que $(K - I)^{m_0-1}(x) = (K - I)^{m_0}(y)$. Par conséquent, $0 = (K - I)^{m_0}(x) = (K - I)^{m_0+1}(y)$ et donc $y \in \ker(K - I)^{m_0+1} = \ker(K - I)^{m_0}$. On en tire que $x \in \ker(K - I)^{m_0-1}$, d'où $\ker(K - I)^{m_0} = \ker(K - I)^{m_0-1}$. C'est impossible vu le choix de m_0 .

Supposons à présent que $m_1 > m_0$. Soit $x = (K - I)^{m_1-1}(y) \in \text{im}(K - I)^{m_1-1}$. Puisque $\text{im}(K - I)^{m_1} = \text{im}(K - I)^{m_1+1}$, il existe z tel que $(K - I)^{m_1}(y) = (K - I)^{m_1+1}(z)$. En réécrivant cette relation sous la forme $(K - I)^{m_1}(y - (K - I)(z)) = 0$, on trouve que $y - (K - I)(z) \in \ker(K - I)^{m_1} = \ker(K - I)^{m_1-1}$ puisque $m_1 > m_0$. Ainsi, $(K - I)^{m_1-1}(y) = (K - I)^{m_1}(z)$ et donc $x \in \text{im}(K - I)^{m_1}$. On en tire donc que $\text{im}(K - I)^{m_1} = \text{im}(K - I)^{m_1-1}$, ce qui contredit la définition de m_1 .

Proposition 4.3.3. *Soient X un espace de Banach, $K \in \mathcal{K}(X, X)$ et m_0 l'indice commun*

de stabilisation des images et noyaux de $(K - I)$. Alors

$$X = \ker(K - I)^{m_0} \oplus \operatorname{im}(K - I)^{m_0}$$

où la somme directe est topologique.

Démonstration. Montrons tout d'abord que X est la somme directe d'un point de vue algébrique. Soit $x \in \ker(K - I)^{m_0} \cap \operatorname{im}(K - I)^{m_0}$. Alors d'une part, il existe $y \in X$ pour lequel $x = (K - I)^{m_0}(y)$. D'autre part, on a $(K - I)^{m_0}(x) = 0$. Il vient donc $(K - I)^{2m_0}(y) = 0$, d'où $y \in \ker(K - I)^{2m_0} = \ker(K - I)^{m_0}$ par définition de m_0 . Ainsi $x = (K - I)^{m_0}(y) = 0$. Considérons à présent $x \in X$. Alors $(K - I)^{m_0}(x) \in \operatorname{im}(K - I)^{m_0} = \operatorname{im}(K - I)^{2m_0}$ et donc on peut trouver $y \in X$ tel que $(K - I)^{m_0}(x) = (K - I)^{2m_0}(y)$. En réécrivant cette relation sous la forme $(K - I)^{m_0}(x - (K - I)^{m_0}(y)) = 0$, on obtient que $x - (K - I)^{m_0}(y) \in \ker(K - I)^{m_0}$, ce qui implique que

$$x = (x - (K - I)^{m_0}(y)) + (K - I)^{m_0}(y) \in \ker(K - I)^{m_0} + \operatorname{im}(K - I)^{m_0}.$$

Enfin, les deux sous-espaces $\ker(K - I)^{m_0}$ et $\operatorname{im}(K - I)^{m_0}$ sont fermés dans le Banach X . Ils sont donc eux-mêmes des espaces de Banach. L'application

$$\Phi : \ker(K - I)^{m_0} \times \operatorname{im}(K - I)^{m_0} \longrightarrow X, \quad (u, v) \longmapsto u + v,$$

est linéaire continue et bijective. Le théorème de l'opérateur ouvert, établi au Chapitre 1, montre que Φ^{-1} est continue. La somme directe est donc topologique. ■

Le résultat suivant montre que chaque perturbation compacte de l'unité est un homéomorphisme, à un espace de dimension finie près.

Théorème 4.3.4. *Soient X un espace de Banach, $K \in \mathcal{K}(X, X)$ et m_0 l'indice commun de stabilisation des images et des noyaux de $K - I$. Si $L = \ker(K - I)^{m_0}$ et $H = \operatorname{im}(K - I)^{m_0}$, alors*

1. $X = L \oplus H$ topologiquement,
2. $\dim L < +\infty$,
3. $(K - I)|_H : H \rightarrow H$ est un homéomorphisme,
4. $(K - I)|_L : L \rightarrow L$ est nilpotent.

Démonstration. Le premier point est la Proposition 4.3.3. Le second résulte du fait, établi ci-dessus, que $\ker(K - I)^m$ est de dimension finie pour tout $m \geq 1$.

Posons $T = K - I$. Comme $H = \operatorname{im} T^{m_0} = \operatorname{im} T^{m_0+1}$, on a $T(H) = H$. D'autre part,

$$\ker(T|_H) = H \cap \ker T \subseteq H \cap L = \{0\},$$

car $\ker T \subseteq L$. Ainsi $T|_H : H \rightarrow H$ est bijectif. Le sous-espace H est fermé dans X , donc c'est un espace de Banach ; le Corollaire 1.8.4 donne que $(T|_H)^{-1}$ est continu. Enfin, par définition de $L = \ker T^{m_0}$, on a $(T|_L)^{m_0} = 0$, donc $T|_L$ est nilpotent. ■

On en tire le résultat suivant que l'on peut mettre en parallèle avec le Théorème de la dimension : si X est de dimension finie, alors pour toute application linéaire $T : X \rightarrow X$, on a $\dim X = \dim \ker T + \dim \operatorname{im} T$. En particulier, T est injectif si et seulement si il est surjectif.

Corollaire 4.3.5. *Soit X un espace de Banach et $K : X \rightarrow X$ un opérateur compact. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $K - I$ est injectif,
2. $K - I$ est surjectif,
3. $K - I$ est bijectif,
4. $K - I$ est un homéomorphisme.

Démonstration. Montrons tout d'abord que $1 \Leftrightarrow 2$. Soit m_0 l'indice de stabilisation des images et des noyaux de T . Supposons que $T = K - I$ est injectif. Si T n'est pas surjectif, il existe $x \notin \operatorname{im} T$. Comme $T^{m_0}(x) \in \operatorname{im} T^{m_0} = \operatorname{im} T^{m_0+1}$, il existe $y \in X$ tel que $T^{m_0}(x) = T^{m_0+1}(y)$. En réécrivant cette relation sous la forme $T(T^{m_0-1}(x) - T^{m_0}(y)) = 0$ et en utilisant l'injectivité de T , il vient que $T^{m_0-1}(x) = T^{m_0}(y)$. En continuant ainsi de proche en proche, on obtient finalement $x = T(y)$, d'où une contradiction.

Supposons à présent que T est surjectif. Supposons que $m_0 \geq 2$. Soit $x \in \ker T^{m_0} \setminus \ker T^{m_0-1}$. Comme T est surjectif, il existe $y \in X$ tel que $x = T(y)$. On a alors $T^{m_0}(x) = T^{m_0+1}(y) = 0$ et $T^{m_0-1}(x) = T^{m_0}(y) \neq 0$. Donc $y \in \ker T^{m_0+1} \setminus \ker T^{m_0}$, ce qui est impossible par définition de m_0 . On en tire que $m_0 = 1$ et en utilisant la Proposition 4.3.3 et la surjectivité de T , il vient que $\ker T = \{0\}$. Ainsi T est injectif.

Il reste à montrer que la bijectivité de T implique que T est d'inverse continu. Il s'agit d'une application directe du Corollaire 1.8.4 du théorème de l'opérateur ouvert dans les espaces de Banach. ■

4.4 Exercices

Exercice 4.4.1. Soient X et Y deux espaces normés et $T : X \rightarrow Y$ compact.

1. Retrouver que si X est de dimension infinie, l'identité de X n'est pas compacte.
2. Soient $K \subset \mathbb{R}$ compact et $k \in C^0(K \times K)$. Montrer que l'opérateur à noyau associé est compact sur $C^0(K)$.
3. Montrer que l'opérateur de Volterra $V : L^2([0, 1]) \rightarrow C^0([0, 1])$, $V(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$, est compact.

Exercice 4.4.2. Soient X et Y deux espaces de Banach. Montrer que si X est de dimension infinie et si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est bijectif, alors T n'est pas compact.

Exercice 4.4.3. Soit (λ_n) une suite bornée de nombres complexes. Montrer que l'opérateur $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ défini par $T((x_n)) = (\lambda_n x_n)$ est compact si et seulement si $\lambda_n \rightarrow 0$.

Partie II

Espaces localement convexes

5 Espaces localement convexes

Le cadre normé étudié au Chapitre 1 est particulièrement efficace, mais il ne couvre pas toutes les topologies naturelles rencontrées en analyse.

Pourquoi quitter le cadre normé ?

Une norme impose un contrôle global unique. Or, pour beaucoup d'espaces de fonctions, la convergence naturelle demande plusieurs contrôles simultanés, souvent localisés. Sur $C^0(\Omega)$, lorsque Ω n'est pas compact, la convergence uniforme sur tout compact est décrite par

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)|, \quad K \subseteq \Omega \text{ compact.}$$

Sur $C^\infty(\Omega)$, il faut en outre contrôler toutes les dérivées, compact par compact. Il n'est alors ni naturel ni toujours possible de résumer ces informations par une norme unique.

Les espaces localement convexes permettent de conserver la structure linéaire et la notion de continuité tout en remplaçant la norme par une famille de semi-normes. Le cadre normé n'est donc pas abandonné : il apparaît comme le cas particulier où une seule norme suffit. Les notions déjà étudiées dans la première partie serviront systématiquement de point de comparaison.

D'une norme à une famille de semi-normes. Le cadre normé n'est pas abandonné : il correspond au cas particulier où la topologie est décrite par une seule norme. Les notions déjà introduites dans le cadre normé restent donc notre point de référence. Elles seront retrouvées comme cas particuliers, et des renvois cliquables permettront de comparer les deux cadres.

Nous construisons d'abord la topologie associée à une famille de semi-normes, puis nous caractérisons les espaces localement convexes et la continuité des opérateurs dans ce nouveau langage.

5.1 Semi-normes, semi-boules et topologie associée

Nous remplaçons maintenant la norme unique par une famille de semi-normes. Cette souplesse permet de décrire naturellement des convergences où plusieurs types de contrôle doivent intervenir simultanément.

Dans ce qui suit, X désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

La notion de semi-norme a été introduite dans la Définition 1.1.1. Nous la reprenons ici comme point de départ de la construction topologique ; aucune nouvelle définition n'est introduite.

Exemples 5.1.1.

▷ Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et si $K \subseteq \Omega$ est compact, alors

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)|$$

est une semi-norme sur $C^0(\Omega)$.

▷ Si $m \leq l$ et si $K \subseteq \Omega$ est compact, alors

$$p_{K,m}(f) = \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha f(x)|$$

est une semi-norme sur $C^l(\Omega)$.

▷ Si $m \in \mathbb{N}$, alors

$$p_m(x) = \max_{k \leq m} |x_k|$$

est une semi-norme sur l'espace de suites $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Les normes présentées dans les [exemples fondamentaux du Chapitre 1](#) sont bien sûr aussi des semi-normes. Elles ne sont pas répétées ici.

Une (semi-)norme p sur X définit naturellement une (semi-)métrique

$$(x, y) \mapsto p(x - y)$$

et les notions classiques de (semi-)boules.

Définition 5.1.2. Si p est une semi-norme sur X , les ensembles

$$b_p(x, r) = \{y \in X : p(x - y) < r\} \quad \text{et} \quad B_p(x, r) = \{y \in X : p(x - y) \leq r\}$$

pour $x \in X$ et $r > 0$, sont appelés les *semi-boules de centre x et de rayon r associées à p* .

Si $x = 0$, on écrit en général $b_p(r) := b_p(0, r)$ et $B_p(r) := B_p(0, r)$.

Le résultat suivant est immédiat. Il montre que l'on peut se ramener à l'étude de la boule unité centrée en 0.

Proposition 5.1.3. Soit p une semi-norme sur X . Pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, on a

1. $b_p(x, r) = x + b_p(r)$ et $B_p(x, r) = x + B_p(r)$,
2. $b_p(r) = r b_p(1)$ et $B_p(r) = r B_p(1)$.

Démonstration. Il suffit d'écrire $y = x + (y - x)$ et $y = r \frac{y}{r}$. ■

Afin de pouvoir définir une topologie sur X à partir d'un ensemble de semi-normes, il faut s'assurer que les semi-boules associées forment un système de voisinages. Cette condition se traduit en une condition sur les semi-normes.

Définition 5.1.4. Soient p et q deux semi-normes sur X . On dit que p est *plus faible* que q , ce que l'on note $p \preceq q$, s'il existe $C > 0$ tel que $p \leq Cq$.

Si $p \preceq q$ et $q \preceq p$, on dit que p et q sont *équivalents* et on note $p \approx q$.

La relation $p \preceq q$ se traduit facilement en termes d'inclusions entre les semi-boules associées.

Proposition 5.1.5. Soient p, q deux semi-normes sur X . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $p \preceq q$,
2. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $b_q(\eta) \subseteq b_p(\varepsilon)$,
3. il existe $C > 0$ tel que $b_q(1) \subseteq Cb_p(1)$.

De plus, on a les mêmes équivalences pour les semi-boules $B_p(s)$ et $B_q(s)$, ainsi que pour les semi-boules centrées en $x \in X$.

Démonstration. $1 \Rightarrow 2$. Par définition, il existe $C > 0$ tel que $p \leq Cq$. Si $\varepsilon > 0$ est fixé, il suffit alors de prendre $\eta = \frac{\varepsilon}{C}$.

$2 \Rightarrow 3$. Pour $\varepsilon = 1$, il existe $\eta > 0$ tel que $b_q(\eta) \subseteq b_p(1)$. Par la Proposition 5.1.3, il suffit de prendre $C = \frac{1}{\eta}$.

$3 \Rightarrow 1$. Soit $x \in X$. Fixons $\lambda > q(x)$. Alors $\frac{x}{\lambda} \in b_q(1)$ et par hypothèse, on obtient donc que $p(\frac{x}{\lambda}) = \frac{1}{C\lambda}p(x) < 1$. Par conséquent, $p(x) < C\lambda$, et comme $\lambda > q(x)$ est arbitraire, la conclusion s'ensuit. ■

Définition 5.1.6. Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de semi-normes sur X . On dit que $\mathcal{P}$ est *filtrant* si pour tous $p, q \in \mathcal{P}$, il existe $r \in \mathcal{P}$ tel que

$$\max\{p, q\} \preceq r.$$

Lemme 5.1.7. Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de semi-normes sur X . Alors $\mathcal{P}$ est filtrant si et seulement si toute intersection finie de semi-boules associées à des semi-normes de $\mathcal{P}$ et de même centre contient une semi-boule du même type.

Démonstration. On se ramène au cas de semi-boules centrées en 0 par la Proposition 5.1.3. Le résultat est alors immédiat au vu de la Proposition 5.1.5. ■

Comme vu au cours de topologie, une topologie peut être définie via les systèmes de voisinages de chaque point. En effet, rappelons que si pour tout $x \in X$, $\mathcal{V}_x$ est une partie de $\mathcal{P}(X)$ telle que

- (V1) si $V \in \mathcal{V}_x$, alors $x \in V$,
- (V2) si $V, W \in \mathcal{V}_x$, alors $V \cap W \in \mathcal{V}_x$,
- (V3) $X \in \mathcal{V}_x$,
- (V4) si $V \in \mathcal{V}_x$ et $V \subseteq W$, alors $W \in \mathcal{V}_x$,
- (V5) si $V \in \mathcal{V}_x$, il existe $W \in \mathcal{V}_x$ tel que pour tout $y \in W$, on a $V \in \mathcal{V}_y$,

alors l'ensemble

$$\mathcal{T} = \{\Omega \subseteq X : \forall x \in \Omega, \Omega \in \mathcal{V}_x\}$$

est une topologie pour laquelle $\mathcal{V}_x$ forme le système de voisinages de x pour tout $x \in X$.

Proposition 5.1.8. Soit $\mathcal{P}$ un ensemble filtrant de semi-normes sur X . Pour tout $x \in X$, notons $\mathcal{V}_x$ l'ensemble des parties de X qui contiennent une semi-boule $b_p(x, r)$ avec $p \in \mathcal{P}$ et $r > 0$. Il existe une unique topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ sur X telle que, pour tout $x \in X$, $\mathcal{V}_x$ forme le système de voisinages de x . En particulier, les semi-boules $b_p(x, r)$ avec $p \in \mathcal{P}$ et $r > 0$ forment une base de voisinages de x pour tout $x \in X$.

Démonstration. Pour tout $x \in X$, on considère

$$\mathcal{V}_x = \{V \subseteq X : \exists r > 0 \exists p \in \mathcal{P} \text{ tels que } b_p(x, r) \subseteq V\}.$$

Les conditions (V1), (V3) et (V4) sont trivialement vérifiées. Puisque $\mathcal{P}$ est un ensemble filtrant, la condition (V2) est également satisfaite. Enfin, pour (V5), il suffit de prendre $W = b_p(x, r)$. ■

Lorsque $\mathcal{P} = \{\|\cdot\|\}$ contient une seule norme, les semi-boules de la Proposition 5.1.8 sont exactement les boules du [cadre normé](#). La topologie obtenue est donc celle déjà étudiée au Chapitre 1.

La définition suivante permet de comparer les topologies définies à partir de semi-normes.

Définition 5.1.9. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux ensembles de semi-normes sur X . On dit que $\mathcal{P}$ est *plus faible* que $\mathcal{Q}$, ce que l'on note $\mathcal{P} \preceq \mathcal{Q}$, si pour tout $p \in \mathcal{P}$, il existe $q \in \mathcal{Q}$ tel que $p \preceq q$. Si $\mathcal{P} \preceq \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \preceq \mathcal{P}$, on dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont *équivalents* et on note $\mathcal{P} \approx \mathcal{Q}$.

Proposition 5.1.10. *Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont deux ensembles filtrants de semi-normes sur X , alors $\mathcal{P} \preceq \mathcal{Q}$ si et seulement si $\mathcal{T}_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{Q}}$.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{P} \preceq \mathcal{Q}$ et considérons $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$. Soit $x \in U$. Par définition de la topologie associée à $\mathcal{P}$, il existe $p \in \mathcal{P}$ et $r > 0$ tels que $b_p(x, r) \subseteq U$. Par hypothèse, il existe $q \in \mathcal{Q}$ tel que $p \preceq q$. La Proposition 5.1.5 implique que $b_q(x, \eta) \subseteq b_p(x, r) \subseteq U$ pour un $\eta > 0$. Par conséquent, U est un voisinage de x pour $\mathcal{T}_{\mathcal{Q}}$, ce qui suffit.

Supposons à présent que $\mathcal{T}_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{Q}}$. Soit $p \in \mathcal{P}$. Alors $b_p(1)$ est un voisinage de 0 pour $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ et donc pour $\mathcal{T}_{\mathcal{Q}}$. Il existe donc $q \in \mathcal{Q}$ et $r > 0$ tels que $b_q(r) \subseteq b_p(1)$. En utilisant à nouveau la Proposition 5.1.5, on obtient $p \preceq q$. ■

Remarque 5.1.11. Par conséquent, $\mathcal{P}$ est plus faible que $\mathcal{Q}$ si et seulement si $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ est moins fin que $\mathcal{T}_{\mathcal{Q}}$.

5.2 Espaces vectoriels topologiques

La topologie doit rester compatible avec la structure vectorielle. La notion d'espace vectoriel topologique formalise cette exigence en imposant la continuité de l'addition et de la multiplication par un scalaire.

La topologie considérée doit être compatible avec les opérations vectorielles. Cette compatibilité conduit à la notion d'espace vectoriel topologique, qui fournit le cadre minimal dans lequel addition et multiplication scalaire restent continues.

Si $\mathcal{P}$ est un ensemble filtrant de semi-normes sur X , l'espace topologique $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ que nous venons de construire est un espace topologique qui rend les applications liées à la structure de l'espace vectoriel continues.

Définition 5.2.1. Un *espace vectoriel topologique* est un espace vectoriel X muni d'une topologie pour laquelle les applications

$$+ : X \times X \rightarrow X : (x, y) \mapsto x + y$$

et

$$\cdot : \mathbb{K} \times X \rightarrow X : (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

sont continues.

Proposition 5.2.2. *Soit $\mathcal{P}$ un ensemble filtrant de semi-normes sur X . L'espace $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ est un espace vectoriel topologique.*

Démonstration. Pour la continuité de l'addition, considérons un voisinage W de $z = x + y$. Alors, il existe $p \in \mathcal{P}$ et $r > 0$ tels que $b_p(z, r) \subseteq W$. Il suffit alors de remarquer que

$$b_p\left(x, \frac{r}{2}\right) + b_p\left(y, \frac{r}{2}\right) \subseteq b_p(z, r).$$

Pour la multiplication par un scalaire, soient W un voisinage de $z = \lambda x$, $p \in \mathcal{P}$ et $r > 0$ tels que $b_p(z, r) \subseteq W$. Choisissons $r_2 > 0$ de sorte que $|\lambda|r_2 < r/2$, puis $r_1 > 0$ de sorte que $r_1(p(x) + r_2) < r/2$. Si $|\mu - \lambda| < r_1$ et $p(y - x) < r_2$, alors

$$\begin{aligned} p(\mu y - \lambda x) &\leq |\mu - \lambda| p(y) + |\lambda| p(y - x) \\ &\leq |\mu - \lambda| (p(x) + p(y - x)) + |\lambda| p(y - x) \\ &< r_1(p(x) + r_2) + |\lambda| r_2 < r. \end{aligned}$$

Ainsi, la multiplication scalaire est continue. ■

La proposition suivante montre que la topologie d'un espace vectoriel topologique est entièrement déterminée par les voisinages de 0.

Proposition 5.2.3. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique, $x \in X$ et $V \subseteq X$. Alors V est un voisinage de x si et seulement si $V - x$ est un voisinage de 0.*

Démonstration. Supposons que V est un voisinage de x . En utilisant la continuité de l'addition en $(x, 0)$, on trouve un voisinage V' de x et un voisinage W de 0 tels que $V' + W \subseteq V$. En particulier, $x + W \subseteq V$, d'où $W \subseteq V - x$. Ainsi $V - x$ est bien un voisinage de 0. On procède de même pour la seconde implication. ■

Ainsi, grâce à la continuité de l'addition, les ouverts d'un espace vectoriel topologique sont obtenus en translatant les ouverts contenant 0. De même, la continuité de la multiplication par un scalaire permet d'obtenir que tout multiple non nul d'un voisinage de 0 est également un voisinage de 0.

Proposition 5.2.4. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique. Si $U \in \mathcal{T}$ et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, alors $\lambda U \in \mathcal{T}$.*

Démonstration. Puisque $(X, \mathcal{T})$ est un espace vectoriel topologique, l'application

$$f_\lambda : X \rightarrow X : x \mapsto \frac{1}{\lambda}x$$

est continue. Par conséquent, $f_\lambda^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. On conclut en remarquant que $f_\lambda^{-1}(U) = \lambda U$. ■

Terminons cette section en présentant quelques propriétés supplémentaires des voisinages de 0 d'un espace vectoriel topologique (et donc de tout espace à semi-normes). Pour cela, nous

introduisons deux notions que des parties d'un espace vectoriel peuvent vérifier.

Définition 5.2.5. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une partie A de X est *équilibrée* si $\lambda A \subseteq A$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \leq 1$.

En particulier, toute partie équilibrée non vide contient 0.

Exemples 5.2.6.

- ▷ Dans un espace normé, il est facile de voir que toute boule centrée en 0 est équilibrée.
- ▷ Dans $\mathbb{R}^2$, la boule unité centrée en $(1/2, 0)$ n'est pas équilibrée. En effet, il suffit de prendre $x = (1, 0)$ et $\lambda = -1$.
- ▷ Les polynômes forment un sous-ensemble équilibré de $C^0([0, 1])$. En effet, tout multiple d'un polynôme est encore un polynôme.

Lemme 5.2.7. Dans un espace vectoriel topologique $(X, \mathcal{T})$, tout voisinage de 0 contient un voisinage de 0 équilibré.

Démonstration. Soit U un voisinage de $0 = 0 \cdot 0$. Par continuité de la multiplication par un scalaire, il existe un voisinage V de 0 et $\varepsilon > 0$ tels que

$$W := b(0, \varepsilon) \cdot V = \{\lambda x : x \in V, |\lambda| < \varepsilon\} \subseteq U.$$

Alors W est un voisinage de 0 car il contient $\frac{\varepsilon}{2}V$ qui est un voisinage de 0 par la Proposition 5.2.4, et on vérifie immédiatement qu'il est équilibré. ■

Définition 5.2.8. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une partie A de X est *absorbante* si pour tout $x \in X$, il existe $C > 0$ tel que $x \in \lambda A$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \geq C$.

Exemples 5.2.9.

- ▷ Dans un espace normé, il est facile de voir que toute boule centrée en 0 est absorbante.
- ▷ Dans $\mathbb{R}^2$, la boule unité centrée en $(1/2, 0)$ est absorbante (puisque'elle contient une boule centrée en 0).
- ▷ Les polynômes forment un sous-ensemble de $C^0([0, 1])$ qui n'est pas absorbant puisqu'on ne peut pas écrire toute fonction continue comme multiple d'un polynôme.

Lemme 5.2.10. *Dans un espace vectoriel topologique $(X, \mathcal{T})$, tout voisinage de 0 est absorbant.*

Démonstration. Fixons $x \in X$ et un voisinage V de 0. Par continuité de l'application $\lambda \mapsto \lambda x$ en 0, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda x \in V$ dès que $|\lambda| < \varepsilon$. Si $|\mu| > 1/\varepsilon$, alors $|1/\mu| < \varepsilon$ et $(1/\mu)x \in V$, donc $x \in \mu V$. Ainsi V est absorbant. ■

Au total, les Lemmes 5.2.7 et 5.2.10 donnent directement le résultat suivant.

Proposition 5.2.11. *Tout espace vectoriel topologique $(X, \mathcal{T})$ possède une base de voisinages de 0 équilibrés et absorbants.*

5.3 Espaces localement convexes et équivalence

Les espaces localement convexes sont précisément les espaces vectoriels topologiques dont la topologie peut être décrite par des semi-normes. Nous allons relier la description par voisinages convexes à celle par familles de semi-normes et comparer les familles qui engendrent une même topologie.

Nous avons vu que tout espace vectoriel muni d'un ensemble filtrant de semi-normes définissait un espace vectoriel topologique. Néanmoins, tout espace vectoriel topologique n'est pas nécessairement lié à un ensemble filtrant de semi-normes. Dans cette section, nous ajoutons une hypothèse, la convexité locale, qui nous permettra d'obtenir une équivalence. Commençons par étudier certaines parties remarquables d'un espace vectoriel.

Rappelons la Définition 3.3.1 : une partie A de X est convexe lorsque le segment joignant deux points quelconques de A est contenu dans A .

En procédant par induction, on a bien sûr que

$$\sum_{j=1}^J \lambda_j x_j \in A$$

pour tous $x_1, \dots, x_J \in A$ et tous $\lambda_1, \dots, \lambda_J \in [0, 1]$ tels que $\sum_{j=1}^J \lambda_j = 1$.

Proposition 5.3.1. *L'intersection d'une famille non vide de parties convexes de X est convexe. Pour toute partie non vide A de X , son enveloppe convexe $\text{co}(A)$ est la plus petite partie convexe qui contient A et*

$$\text{co}(A) = \left\{ \sum_{j=1}^J \lambda_j a_j : J \geq 1, a_j \in A, \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^J \lambda_j = 1 \right\}.$$

Démonstration. L'intersection d'une famille non vide de parties convexes est convexe. L'ensemble affiché contient A et est convexe. Enfin, toute partie convexe contenant A contient toutes les combinaisons convexes finies d'éléments de A ; elle contient donc l'ensemble affiché. ■

Définition 5.3.2. Une partie A de X est *absolument convexe* si pour tous $x, y \in A$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que $|\lambda| + |\mu| \leq 1$, on a

$$\lambda x + \mu y \in A.$$

En procédant par induction, on a bien sûr que

$$\sum_{j=1}^J \lambda_j x_j \in A$$

pour tous $x_1, \dots, x_J \in A$ et tous $\lambda_1, \dots, \lambda_J \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{j=1}^J |\lambda_j| \leq 1$.

Comme dans le cas des ensembles convexes, on a le résultat suivant (laissé à titre d'exercice).

Proposition 5.3.3. *L'intersection d'une famille non vide de parties absolument convexes de X est absolument convexe. Pour toute partie non vide A de X , son enveloppe absolument convexe $\Gamma(A)$ est la plus petite partie absolument convexe qui contient A et*

$$\Gamma(A) = \left\{ \sum_{j=1}^J \lambda_j a_j : J \geq 1, a_j \in A, \lambda_j \in \mathbb{K}, \sum_{j=1}^J |\lambda_j| \leq 1 \right\}.$$

La proposition suivante donne le lien existant entre les ensembles convexes et absolument convexes.

Proposition 5.3.4. *Une partie non vide A de X est absolument convexe si et seulement si elle est convexe et équilibrée.*

Démonstration. Toute partie absolument convexe est convexe et équilibrée. Réciproquement, supposons A convexe et équilibrée. Soient $x, y \in A$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que $|\lambda| + |\mu| \leq 1$. En posant $u = (\lambda/|\lambda|)x$ lorsque $\lambda \neq 0$ et $u = 0$ sinon, et en définissant v de façon analogue, on a $u, v, 0 \in A$. Par convexité,

$$\lambda x + \mu y = |\lambda|u + |\mu|v + (1 - |\lambda| - |\mu|)0 \in A.$$

■

Proposition 5.3.5. *Soit A une partie non vide de X .*

1. *Si A est absorbante, alors son enveloppe linéaire est X .*

2. Si A est absolument convexe, alors son enveloppe linéaire est $\bigcup_{c>0} cA$.

Démonstration. 1. Si $x \in X$, l'absorbance fournit $c > 0$ tel que $x \in cA$, donc x appartient à l'enveloppe linéaire de A .

2. L'inclusion $\bigcup_{c>0} cA \subseteq \text{span}(A)$ est immédiate. Réciproquement, soit $x = \sum_{j=1}^J \lambda_j x_j$ avec $x_j \in A$. Si tous les λ_j sont nuls, alors $x = 0 \in A$. Sinon, en posant $c = \sum_{j=1}^J |\lambda_j| > 0$, on obtient

$$\frac{x}{c} = \sum_{j=1}^J \frac{\lambda_j}{c} x_j \in A,$$

par absolue convexité. Ainsi $x \in cA$. ■

Corollaire 5.3.6. Une partie absolument convexe A de X est absorbante si et seulement si $X = \bigcup_{c>0} cA$.

Démonstration. $\Rightarrow$ C'est immédiat par définition des ensembles absorbants.

$\Leftarrow$ Supposons que $X = \bigcup_{c>0} cA$ et soit $x \in X$. Il existe $c > 0$ et $a \in A$ tels que $x = ca$. Pour tout scalaire λ tel que $|\lambda| \geq c$, on a

$$x = \lambda \left(\frac{c}{\lambda} a \right) \in \lambda A,$$

car A est équilibrée et $|c/\lambda| \leq 1$. Ainsi, A est absorbante. ■

Définition 5.3.7. Un espace vectoriel topologique est *localement convexe* si tout point admet une base de voisinages constituée d'ensembles convexes.

En général, on parle alors d'*espace localement convexe*, en omettant les termes "vectoriel" et "topologique". Nous allons voir que tout espace vectoriel muni d'un ensemble filtrant de semi-normes est localement convexe. Réciproquement, pour tout espace localement convexe, nous allons construire une famille filtrante de semi-normes qui définit de manière équivalente la topologie de l'espace. Ainsi, on aura démontré l'équivalence entre les deux notions.

La proposition suivante montre que pour vérifier qu'un espace vectoriel topologique est localement convexe, il suffit d'examiner ce qui se passe au voisinage de 0. De plus, on peut imposer aux éléments de la base de voisinages de 0 d'être absolument convexes et absorbants.

Proposition 5.3.8. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $(X, \mathcal{T})$ est localement convexe,
2. 0 admet une base de voisinages convexes,

3. 0 admet une base de voisinages absolument convexes,
 4. 0 admet une base de voisinages absolument convexes et absorbants.

Démonstration. 1 $\Rightarrow$ 2. C'est immédiat.

2 $\Rightarrow$ 3. Soit $\mathcal{B}$ une base de voisinages convexes de 0. Pour tout $V \in \mathcal{B}$, par le Lemme 5.2.7, on peut considérer un ensemble équilibré $W_V \subseteq V$. Alors on a également $\text{co}(W_V) \subseteq V$ et on vérifie facilement que

$$\{\text{co}(W_V) : V \in \mathcal{B}\}$$

est une base de voisinages de 0 formée d'ensembles convexes. De plus, ces ensembles sont équilibrés car les ensembles W_V le sont (il suffit d'utiliser la caractérisation de l'enveloppe convexe). On conclut par la Proposition 5.3.4.

3 $\Rightarrow$ 4. Par le Lemme 5.2.10, on sait que tout voisinage de 0 est absorbant, ce qui suffit.

4 $\Rightarrow$ 1. Il est clair que le translaté d'un ensemble convexe est convexe. On utilise alors la Proposition 5.2.3 pour conclure. ■

Lemme 5.3.9. *Soit p une semi-norme sur X . Alors les semi-boules $b_p(r)$ associées à p et centrées en 0 sont des parties absolument convexes et absorbantes.*

Démonstration. Soit $r > 0$. Si $x, y \in b_p(r)$ et si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ sont tels que $|\lambda| + |\mu| \leq 1$, alors

$$p(\lambda x + \mu y) \leq |\lambda|p(x) + |\mu|p(y) < r(|\lambda| + |\mu|) \leq r,$$

ce qui montre que $b_p(r)$ est absolument convexe. De plus, si $x \in X$, on a

$$x \in b_p(p(x) + 1) = \frac{p(x) + 1}{r} b_p(r),$$

ce qui suffit par le Corollaire 5.3.6. ■

Théorème 5.3.10. *Si $\mathcal{P}$ est un ensemble filtrant de semi-normes sur X , alors $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ est un espace localement convexe.*

Démonstration. Il suffit de combiner la Proposition 5.3.8 et le Lemme 5.3.9. ■

Montrons à présent que la topologie d'un espace localement convexe peut être définie à partir d'un ensemble filtrant de semi-normes. Pour cela, commençons par construire une famille de semi-normes. Au vu du Corollaire 5.3.6, la définition suivante est légitime.

Définition 5.3.11. Soit A une partie absolument convexe et absorbante de X . La *jauge*

de Minkowski de A est définie par

$$P_A : X \rightarrow [0, +\infty[: x \mapsto \inf\{c > 0 : x \in cA\}.$$

Nous allons montrer que P_A définit une semi-norme et que celle-ci donne des semi-boules unitaires qui encadrent A .

Proposition 5.3.12. *Soit A une partie absolument convexe et absorbante de X . Alors P_A est une semi-norme sur X telle que*

$$b_{P_A}(1) \subseteq A \subseteq B_{P_A}(1).$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que P_A est une semi-norme. Soient $x, y \in X$ et soient $c_1, c_2 > 0$ tels que $x \in c_1A$ et $y \in c_2A$. Comme A est absolument convexe, on a

$$x + y \in c_1A + c_2A = (c_1 + c_2) \left(\frac{c_1}{c_1 + c_2}A + \frac{c_2}{c_1 + c_2}A \right) \subseteq (c_1 + c_2)A,$$

d'où $P_A(x + y) \leq c_1 + c_2$. En prenant les deux bornes inférieures, on obtient donc

$$P_A(x + y) \leq P_A(x) + P_A(y).$$

De même, si $\lambda \in \mathbb{K}$ est non nul, alors $\frac{\lambda x}{|\lambda|} \in c_1A$ puisque A est équilibrée. On en tire que

$$\lambda x = |\lambda| \frac{\lambda x}{|\lambda|} \in |\lambda|c_1A,$$

d'où $P_A(\lambda x) \leq |\lambda|c_1$. Par conséquent, $P_A(\lambda x) \leq |\lambda|P_A(x)$. De plus, en appliquant l'égalité précédente au scalaire $1/\lambda$ et au vecteur λx , on obtient

$$|\lambda|P_A(x) = |\lambda|P_A\left(\frac{\lambda}{\lambda}x\right) \leq P_A(\lambda x),$$

d'où l'égalité.

Enfin, il est clair que $P_A(0) = 0$.

Montrons à présent l'inclusion des boules. Si $x \in b_{P_A}(1)$, on a $P_A(x) < 1$ et il existe donc $c \in]0, 1[$ tel que $x \in cA$. Comme A est équilibré, il vient $x \in A$.

Enfin, si $x \in A$, il est clair que $P_A(x) \leq 1$, c'est-à-dire $x \in B_{P_A}(1)$.

■

Le théorème suivant montre qu'il y a équivalence entre les notions d'espace localement convexe et d'espace muni d'un ensemble filtrant de semi-normes.

Théorème 5.3.13. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique localement convexe. Si $\mathcal{B}$ est une base de voisinages absolument convexes et absorbants de 0, alors la topologie $\mathcal{T}$ est définie à partir de l'ensemble filtrant de semi-normes*

$$\mathcal{P} = \{P_V : V \in \mathcal{B}\}.$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que $\mathcal{P}$ est filtrant. Soient $U, V \in \mathcal{B}$. Alors $U \cap V$ est un voisinage de 0 et il existe $W \in \mathcal{B}$ tel que $W \subseteq U \cap V$. On a alors $P_U \leq P_{U \cap V} \leq P_W$ et $P_V \leq P_{U \cap V} \leq P_W$.

Notons $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ la topologie associée à l'ensemble filtrant de semi-normes $\mathcal{P}$. Par la Proposition 5.2.2, on sait que $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ est un espace vectoriel topologique. Afin de montrer que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$, il suffit donc d'analyser les voisinages de 0.

Soit U un voisinage de 0 pour $\mathcal{T}$. Alors il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \subseteq U$. Par la Proposition 5.3.12, on a $b_{P_B}(1) \subseteq B$. On en tire que B , et donc U , est un voisinage de 0 pour la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$.

Soit maintenant U un voisinage de 0 pour $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$. Alors il existe $V \in \mathcal{B}$ et $\varepsilon > 0$ tels que $b_{P_V}(\varepsilon) \subseteq U$. Par la Proposition 5.3.12, on a $V \subseteq B_{P_V}(1) \subseteq b_{P_V}(2)$. Par conséquent, $\frac{\varepsilon}{2}V \subseteq b_{P_V}(\varepsilon) \subseteq U$ et on obtient la conclusion car $\frac{\varepsilon}{2}V$ est un voisinage de 0 pour $\mathcal{T}$, par continuité de la multiplication par un scalaire. ■

Le Théorème 5.3.13 permet donc de reformuler la notion d'espace localement convexe dans le langage des semi-normes.

Définition 5.3.14 (Définition équivalente). Un *espace localement convexe* $(X, \mathcal{P})$ est un espace vectoriel X muni d'un ensemble filtrant $\mathcal{P}$ de semi-normes.

Lorsqu'on parlera de la topologie d'un espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$, on parlera toujours de la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$.

5.4 Espaces séparés, normés et métrisables

Une topologie définie par des semi-normes peut être plus ou moins proche du cadre normé. Nous étudions ici trois questions naturelles : sépare-t-elle les points, peut-elle être définie par une norme, et peut-elle être décrite par une distance ?

Dans cette section, nous montrons que les propriétés d'espace séparé, d'espace normé et de métrisabilité peuvent se traduire à partir de l'ensemble filtrant de semi-normes.

Rappelons tout d'abord qu'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est séparé si pour tous $x, y \in X$, il existe un voisinage U de x et un voisinage V de y tels que $U \cap V = \emptyset$. Si un espace est séparé, alors la limite d'une suite convergente est unique.

Proposition 5.4.1. *Un espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$ est séparé si et seulement si pour tout $x \in X \setminus \{0\}$, il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $p(x) \neq 0$.*

Démonstration. Supposons que la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ est séparée. Soit $x \neq 0$. Alors il existe $p, q \in \mathcal{P}$ et $r, s > 0$ tels que

$$b_p(x, r) \cap b_q(0, s) = \emptyset.$$

Par conséquent, $q(x) \geq s > 0$, ce qui suffit.

Pour la réciproque, soient $x, y \in X$ tels que $x \neq y$. Alors $x - y \neq 0$ et il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $p(x - y) > 0$. Si on pose $r = \frac{p(x-y)}{2} > 0$, on a

$$b_p(x, r) \cap b_p(y, r) = \emptyset,$$

ce qui suffit. ■

Exemple 5.4.2. L'espace $C^0(\Omega)$ muni des semi-normes $p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)|$ pour tous les compacts K de Ω est séparé. Si on le munit d'une seule de ces semi-normes, ce n'est plus un espace séparé.

Remarque 5.4.3. Si $\mathcal{P} = \{p\}$ contient une seule semi-norme, alors $(X, \mathcal{P})$ est séparé si et seulement si p est une norme.

Définition 5.4.4. On dit que l'espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$ est

- ▷ *normé* si $\mathcal{P}$ est équivalent à une norme, c'est-à-dire à un système de la forme $\{\|\cdot\|\}$;
- ▷ *à semi-normes dénombrables* si $\mathcal{P}$ est équivalent à un ensemble filtrant et dénombrable de semi-normes sur X .

Exemple 5.4.5. Si $\mathcal{P}$ est un ensemble filtrant de semi-normes fini, alors il est équivalent à l'un de ses éléments. En particulier, si $(X, \mathcal{P})$ est séparé, alors il est normé.

Exemple 5.4.6. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Sur $C^\infty(\Omega)$, on considère la suite des semi-normes

$$p_m(f) = \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K_m} |\partial^\alpha f(x)|$$

où

$$K_m = \{x \in \Omega : |x| \leq m \text{ et } \text{dist}(x, \Omega^c) \geq 1/m\}, \quad m \geq 1.$$

Cet ensemble de semi-normes est équivalent à celui présenté dans l'Exemple 5.1.1. Ainsi, $C^\infty(\Omega)$ est un espace à semi-normes dénombrables.

La proposition suivante montre que tout espace localement convexe séparé de dimension finie n est homéomorphe à l'espace $\mathbb{K}^n$ muni de sa topologie usuelle.

Proposition 5.4.7. *Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe séparé. Si X est de dimension finie n , alors $(X, \mathcal{P})$ est normé. Plus précisément, si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de X , alors $\mathcal{P} \approx \|\cdot\|$, où*

$$\left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \right\| = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} |\lambda_j|.$$

Démonstration. Commençons par montrer que $\mathcal{P} \preceq \|\cdot\|$. Si $p \in \mathcal{P}$ et si $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$, alors

$$p(x) \leq \sum_{j=1}^n |\lambda_j| p(e_j) \leq C \|x\|$$

si $C = \sum_{j=1}^n p(e_j)$.

Pour montrer que $\|\cdot\| \preceq \mathcal{P}$, commençons par montrer que $\mathcal{P}$ contient une norme. Soit $x_1 \neq 0$. Comme l'espace est séparé, il existe $p_1 \in \mathcal{P}$ tel que $p_1(x_1) \neq 0$. Le sous-espace vectoriel L_1 défini par $L_1 := \{x \in X : p_1(x) = 0\}$ est de dimension $\leq n - 1$. Si $\dim L_1 = 0$, alors p_1 est une norme. Sinon, il existe $x_2 \in L_1 \setminus \{0\}$ et une semi-norme $p_2 \in \mathcal{P}$ telle que $p_2(x_2) \neq 0$. Le sous-espace vectoriel $L_2 = \{x \in X : p_1(x) = p_2(x) = 0\}$ est de dimension $\leq \dim(L_1) - 1$. On continue alors de proche en proche et on obtient un nombre fini de semi-normes $p_1, \dots, p_L$, avec $L \leq n$, telles que

$$\{x \in X : p_l(x) = 0 \ \forall l \in \{1, \dots, L\}\} = \{0\}.$$

Comme $\mathcal{P}$ est filtrant, il existe $p_0 \in \mathcal{P}$ tel que $p_l \preceq p_0$ pour tout $l \in \{1, \dots, L\}$. Il est clair que $p_0(x) = 0$ implique que $x = 0$, et donc que p_0 est une norme. Montrons pour conclure que $\|\cdot\| \preceq p_0$. Considérons l'application

$$T : \mathbb{K}^n \rightarrow [0, +\infty[: (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto p_0 \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \right).$$

Par l'inégalité triangulaire inverse pour la norme p_0 , on a

$$\begin{aligned} |T(\lambda_1, \dots, \lambda_n) - T(\mu_1, \dots, \mu_n)| &\leq p_0 \left(\sum_{j=1}^n (\lambda_j - \mu_j) e_j \right) \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j - \mu_j| \sum_{j=1}^n p_0(e_j). \end{aligned}$$

On en tire que T est une application continue et il s'ensuit que sa borne inférieure r sur le compact $S = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : \max_{j \in \{1, \dots, n\}} |\lambda_j| = 1\}$ de $\mathbb{K}^n$ est réalisée en un point de S .

Comme p_0 est une norme, on sait que $r > 0$. Pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$, on a donc

$$r \leq T \left(\frac{(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}{\max_{j \in \{1, \dots, n\}} |\lambda_j|} \right),$$

d'où

$$\max_{j \in \{1, \dots, n\}} |\lambda_j| \leq \frac{1}{r} p_0 \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \right),$$

ce qui suffit. ■

Le corollaire suivant est alors immédiat.

Corollaire 5.4.8. *Si $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont deux normes sur un espace vectoriel de dimension finie, alors elles sont équivalentes.*

Intéressons-nous à présent aux espaces à semi-normes dénombrables. Ils occupent une place très importante dans l'étude des espaces localement convexes car ils permettent d'obtenir des espaces métrisables.

Lemme 5.4.9. *Si $\mathcal{P}$ est un ensemble filtrant et dénombrable de semi-normes sur X , alors $\mathcal{P}$ est équivalent à un ensemble croissant de semi-normes sur X , c'est-à-dire de la forme*

$$\{p_m : m \in \mathbb{N}\} \quad \text{avec} \quad p_m \leq p_{m+1} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. Si $\mathcal{P} = \{q_m : m \in \mathbb{N}\}$, il suffit de prendre $p_m = \max\{q_1, \dots, q_m\}$. ■

Théorème 5.4.10. *Un espace localement convexe séparé $(X, \mathcal{P})$ est à semi-normes dénombrables si et seulement s'il est métrisable.*

Démonstration. Supposons que $\{p_m : m \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble croissant de semi-normes équivalent à $\mathcal{P}$. Posons

$$d(x, y) = \sum_{m=0}^{+\infty} 2^{-m} \frac{p_m(x - y)}{1 + p_m(x - y)}$$

pour tous $x, y \in X$. Remarquons que la série converge car son terme général est majoré par 2^{-m} . De plus, d définit bien une distance sur X car :

- ▷ $d(x, y) \geq 0$ pour tous $x, y \in X$,
- ▷ si $d(x, y) = 0$, alors $p_m(x - y) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, d'où $x = y$ par la Proposition 5.4.1, puisque l'espace est séparé,
- ▷ $d(x, y) = d(y, x)$ pour tous $x, y \in X$,

▷ l'inégalité triangulaire résulte directement de la relation

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} = \frac{a+2ab+b}{1+a+b+ab} \geq \frac{a+ab+b}{1+a+b+ab} \geq \frac{a+b}{1+a+b}$$

pour tous $a, b \geq 0$, où la dernière inégalité provient de la croissance de la fonction $t \mapsto \frac{t}{1+t}$.

Montrons à présent l'équivalence des topologies. Soient $x \in X$ et $r > 0$. Alors il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{m=M+1}^{+\infty} 2^{-m} < \frac{r}{2}$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $2\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < \frac{r}{2}$. Ainsi, si $p_M(x-y) < \varepsilon$, on a

$$d(x, y) < \sum_{m=0}^M 2^{-m} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{r}{2} < 2\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{r}{2} < r,$$

d'où

$$\{y \in X : p_M(x-y) < \varepsilon\} \subseteq \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

Ainsi, la topologie engendrée par d est moins fine que $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$.

De plus, si $x \in X$ et $r > 0$, alors

$$\left\{y \in X : d(x, y) < 2^{-m} \frac{r}{1+r}\right\} \subseteq \{y \in X : p_m(x-y) < r\}$$

et la topologie engendrée par d est plus fine que $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$.

Réciproquement, supposons que la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ peut être définie par une métrique d . Alors pour tout $m \geq 1$, il existe $p_m \in \mathcal{P}$ et $r_m > 0$ tels que

$$\{x \in X : p_m(x) < r_m\} \subseteq \left\{x \in X : d(x, 0) < \frac{1}{m}\right\}.$$

L'ensemble dénombrable $\mathcal{Q} = \{p_m : m \geq 1\}$ est un ensemble de semi-normes plus faible que $\mathcal{P}$. Montrons qu'on a aussi $\mathcal{P} \preceq \mathcal{Q}$. Pour tout $p \in \mathcal{P}$, il existe $m \geq 1$ tel que

$$\left\{x \in X : d(x, 0) < \frac{1}{m}\right\} \subseteq \{x \in X : p(x) < 1\}$$

puisque d définit la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$. Par définition de p_m , on obtient que $b_{p_m}(r_m) \subseteq b_p(1)$ et donc $p \preceq p_m$ par la Proposition 5.1.5. ■

Corollaire 5.4.11. *Un espace localement convexe séparé $(X, \mathcal{P})$ est métrisable si et seulement si 0 possède une base dénombrable de voisinages pour $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$. En particulier, dans ce cas, il existe une suite décroissante $(V_n)_{n \geq 1}$ formant une base de voisinages de 0 pour $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$.*

Démonstration. Supposons que $(X, \mathcal{P})$ est métrisable. Soit d une distance définissant la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$. Alors, il suffit de poser

$$V_n = \left\{x \in X : d(x, 0) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Réciproquement, supposons que $(V_n)_{n \geq 1}$ soit une suite décroissante formant une base de voisinages

de 0 pour $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$. Pour tout $n \geq 1$, choisissons $s_n \in \mathcal{P}$ et $r_n > 0$ tels que

$$b_{s_n}(r_n) \subseteq V_n,$$

et posons

$$q_n = \max_{1 \leq j \leq n} \frac{s_j}{r_j}.$$

La suite $(q_n)_{n \geq 1}$ est croissante. Posons $\mathcal{Q} = \{q_n : n \geq 1\}$. Chaque q_n est le maximum d'un nombre fini de multiples de semi-normes de $\mathcal{P}$; comme $\mathcal{P}$ est filtrant, on a $\mathcal{Q} \preceq \mathcal{P}$.

Réciproquement, soit $p \in \mathcal{P}$. Il existe $n \geq 1$ tel que $V_n \subseteq b_p(1)$. Or

$$b_{q_n}(1) \subseteq b_{s_n}(r_n) \subseteq V_n \subseteq b_p(1).$$

La Proposition 5.1.5 donne $p \preceq q_n$. Ainsi $\mathcal{P} \approx \mathcal{Q}$, et le Théorème 5.4.10 montre que $(X, \mathcal{P})$ est métrisable. ■

Remarque 5.4.12. Par translation des voisinages, on a en fait obtenu qu'un espace localement convexe séparé est métrisable si et seulement s'il est à base dénombrable de voisinages.

Le cours initial reliait ensuite cette propriété à la séparabilité. Rappelons qu'un espace topologique est *séparable* s'il possède une partie dénombrable dense; cette notion et le théorème de Stone–Weierstrass ont déjà été étudiés dans le cadre normé.

Proposition 5.4.13. *Un espace localement convexe séparé $(X, \mathcal{P})$ est à base dénombrable si et seulement s'il est métrisable et séparable.*

Démonstration. Si $(X, \mathcal{P})$ est à base dénombrable, il est en particulier à base dénombrable de voisinages; le Corollaire 5.4.11 montre qu'il est métrisable. Tout espace à base dénombrable est séparable.

Réciproquement, un espace métrisable séparable est à base dénombrable : si D est une partie dénombrable dense et si d est une distance définissant la topologie, les boules $b_d(x, r)$, avec $x \in D$ et $r \in \mathbb{Q}_{>0}$, forment une base dénombrable. ■

5.5 Opérateurs linéaires continus et relativement ouverts

La continuité des opérateurs linéaires doit maintenant être formulée sans utiliser une norme unique. Les estimations entre semi-normes remplacent alors l'inégalité classique $\|Tx\| \leq C\|x\|$ du cadre normé.

Dans les espaces normés, la continuité d'un opérateur linéaire se traduit par une seule estimation

$$\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X;$$

voir le [Théorème 1.4.1](#). Dans un espace localement convexe, il faut contrôler chaque semi-norme de l'espace d'arrivée à l'aide d'une semi-norme de l'espace de départ. Si $T : X \rightarrow Y$ est linéaire et si q est une semi-norme sur Y , alors $q \circ T$ est une semi-norme sur X . La proposition suivante donne la forme exacte de la majoration de continuité.

Proposition 5.5.1. *Soient $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ deux espaces localement convexes et $T : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. T est continu,
2. T est continu en 0,
3. pour tout $q \in \mathcal{Q}$, il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $q \circ T \preceq p$.

Démonstration. $1 \Rightarrow 2$. Cette implication est évidente.

$2 \Rightarrow 3$. Soit $q \in \mathcal{Q}$. Comme $b_q(1)$ est un voisinage de $0 = T(0)$, il existe $p \in \mathcal{P}$ et $\varepsilon > 0$ tels que $b_p(\varepsilon) \subseteq T^{-1}(b_q(1)) = b_{q \circ T}(1)$. On conclut alors par la Proposition [5.1.5](#).

$3 \Rightarrow 1$. Soient $x \in X$ et $b_q(T(x), \varepsilon)$ un voisinage de $T(x)$. Par hypothèse, il existe $C > 0$ tel que $q \circ T \leq Cp$. La Proposition [5.1.5](#) donne l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que

$$b_p(x, \eta) \subseteq b_{q \circ T}(x, \varepsilon) = T^{-1}(b_q(T(x), \varepsilon)),$$

ce qui suffit. ■

Si $\mathcal{P} = \{\|\cdot\|_X\}$ et $\mathcal{Q} = \{\|\cdot\|_Y\}$, le point 3 de la Proposition [5.5.1](#) devient

$$\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X.$$

On retrouve exactement le critère de continuité du [cadre normé](#).

Remarque 5.5.2. La Proposition [5.1.10](#) est une conséquence directe de la continuité de l'opérateur $id : (X, \mathcal{Q}) \rightarrow (X, \mathcal{P})$.

Corollaire 5.5.3. *Soient $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ deux espaces localement convexes et $T : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire. Si T est continu, alors T est uniformément continu.*

Démonstration. Puisque T est continu, pour tout $q \in \mathcal{Q}$, il existe $p \in \mathcal{P}$ et $C > 0$ tels que

$q \circ T \leq Cp$. Soit $\varepsilon > 0$. On a donc $q(T(x) - T(y)) < \varepsilon$ si $p(x - y) < \frac{\varepsilon}{C}$. ■

Définition 5.5.4. Si $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ sont deux espaces localement convexes, l'espace vectoriel des opérateurs linéaires continus de X dans Y est noté

$$L(X, Y) = L((X, \mathcal{P}), (Y, \mathcal{Q})).$$

Cette notation prolonge celle introduite à la [Section 1.5](#). Dans le cas normé, l'espace $L(X, Y)$ est en outre muni de la norme d'opérateur ; dans le cadre localement convexe général, aucune norme unique n'est imposée ici.

Le résultat suivant montre qu'une application linéaire définie sur un espace de dimension finie est toujours continue.

Corollaire 5.5.5. *Soient $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ deux espaces localement convexes. Si X est séparé et de dimension finie et si $T : X \rightarrow Y$ est une application linéaire, alors T est continue.*

Démonstration. Comme X est de dimension finie, on sait par la Proposition [5.4.7](#) que $\mathcal{P} \approx \|\cdot\|$ où

$$\left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \right\| = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} |\lambda_j|$$

et où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de X . Soit $q \in \mathcal{Q}$. Si $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$, on a

$$q(T(x)) \leq \sum_{j=1}^n |\lambda_j| q(T(e_j)) \leq \max_{j \in \{1, \dots, n\}} |\lambda_j| \underbrace{\sum_{j=1}^n q(T(e_j))}_{:=C} = C\|x\|,$$

ce qui suffit par la Proposition [5.5.1](#). ■

Terminons par un mot sur les applications ouvertes. La définition qui suit sera réutilisée plus loin pour généraliser le [théorème de l'opérateur ouvert déjà démontré dans les espaces de Banach](#).

Définition 5.5.6. Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques. Une application $T : X \rightarrow Y$ est *relativement ouverte* si l'image de tout ouvert de X est un ouvert de $\text{im}(T)$. Elle est *ouverte* si elle est relativement ouverte et surjective.

Dans le cas d'opérateurs linéaires entre espaces localement convexes, on a la caractérisation suivante.

Proposition 5.5.7. Soient $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ deux espaces localement convexes et $T : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire. Alors T est relativement ouvert si et seulement si pour tout $p \in \mathcal{P}$, il existe $q \in \mathcal{Q}$ et $r > 0$ tels que $b_q(r) \cap \text{im}(T) \subseteq T(b_p(1))$.

Démonstration. Supposons que T est relativement ouvert. Alors pour tout $p \in \mathcal{P}$, $T(b_p(1))$ est ouvert dans $\text{im}(T)$. Comme $0 = T(0) \in T(b_p(1))$, on sait qu'il existe $q \in \mathcal{Q}$ et $r > 0$ tels que $b_q(r) \cap \text{im}(T) \subseteq T(b_p(1))$, ce qui suffit.

Réciproquement, soient Ω un ouvert de $(X, \mathcal{P})$, $y \in T(\Omega)$ et $x \in \Omega$ tel que $y = T(x)$. Alors il existe $p \in \mathcal{P}$ et $\varepsilon > 0$ tels que $b_p(x, \varepsilon) \subseteq \Omega$. Par hypothèse, il existe $q \in \mathcal{Q}$ et $r > 0$ tels que $b_q(r) \cap \text{im}(T) \subseteq T(b_p(1))$. Alors on a

$$y \in b_q(y, \varepsilon r) \cap \text{im}(T) \subseteq T(b_p(x, \varepsilon)) \subseteq T(\Omega),$$

d'où la conclusion. ■

Remarque 5.5.8. Si on travaille dans des espaces séparés à semi-normes dénombrables, on peut travailler avec les distances invariantes par translation données dans le Théorème 5.4.10. On obtient alors que T est relativement ouvert si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que

$$b(0, r) \cap \text{im}(T) \subseteq T(b(0, \varepsilon))$$

où les boules sont définies dans leurs espaces respectifs avec les distances associées.

5.6 Exercices

Exercice 5.6.1. Si p et q sont des semi-normes sur X et si $r > 0$, montrer que $p + q$, rp et $\max\{p, q\}$ sont des semi-normes sur X .

Exercice 5.6.2. Si p est une semi-norme sur X , alors $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$ pour tous $x, y \in X$.

Exercice 5.6.3. Soient $\mathcal{P}$ un ensemble filtrant de semi-normes sur X , $p \in \mathcal{P}$, $x \in X$ et $r > 0$. Montrer que l'adhérence pour la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ de la semi-boule ouverte $b_p(x, r)$ est la semi-boule fermée $B_p(x, r)$.

Exercice 5.6.4. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique et soit U un voisinage de 0. Alors il existe un voisinage V de 0 tel que $V + V \subseteq U$.

Exercice 5.6.5. Montrer que $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ n'est pas un espace vectoriel topologique.

Exercice 5.6.6. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique muni d'une distance d invariante par translation et compatible avec la topologie. Montrer que

1. pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in X$, $d(nx, 0) \leq nd(x, 0)$,

2. pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X qui converge vers 0, il existe une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels qui tend vers l'infini et telle que $(\lambda_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 dans X .

Exercice 5.6.7. Si $f, g \in C^0(\mathbb{R})$, on pose

$$d(f, g) = \min \{1, \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|\}.$$

1. Montrer que d est une distance sur $C^0(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $(C^0(\mathbb{R}), d)$ n'est pas un espace vectoriel topologique.

Exercice 5.6.8. Démontrer la Proposition 5.3.3.

Exercice 5.6.9. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique. Montrer que

1. l'adhérence d'un sous-espace vectoriel de X est un sous-espace vectoriel de X ,
2. l'adhérence d'une partie convexe de X est convexe,
3. l'adhérence d'une partie absolument convexe de X est absolument convexe,
4. l'intérieur de tout sous-espace vectoriel propre de X est vide,
5. l'intérieur d'une partie convexe de X est convexe,
6. l'intérieur d'une partie absolument convexe de X est absolument convexe.

Exercice 5.6.10. Soit X un espace vectoriel. Montrer que

1. une partie A de X est convexe si et seulement si $(s+t)A = sA + tA$ pour tous $s, t \geq 0$,
2. si A et B sont deux parties convexes de X , alors $A + B$ est convexe,
3. si A et B sont deux parties équilibrées de X , alors $A + B$ est équilibrée.

Exercice 5.6.11. Soit $B = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| \leq |z_2|\}$. Montrer que B est équilibré mais que son intérieur ne l'est pas.

Exercice 5.6.12. Soient X et Y deux espaces topologiques compacts métrisables. Montrer que si D est l'espace engendré par l'ensemble

$$\{(x, y) \mapsto f(x)g(y) : f \in C^0(X), g \in C^0(Y)\}$$

des fonctions continues à variables séparées, alors D est dense dans $C^0(X \times Y)$. En déduire que $C^0(X \times Y)$ est séparable.

Exercice 5.6.13. Montrer que toute fonction continue, 1-périodique et à valeurs complexes est la limite uniforme dans $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes trigonométriques 1-périodiques.

Exercice 5.6.14. Soit $p \in]0, 1[$. On désigne par $L^p([0, 1])$ l'espace des fonctions mesurables sur $[0, 1]$ telles que $|f|^p$ est intégrable, quotienté par la relation $=_{pp}$. On pose

$$\delta_p(f) = \int_0^1 |f(t)|^p dt$$

pour tout $f \in L^p([0, 1])$.

1. Montrer que l'application d_p définie par

$$d_p(f, g) = \delta_p(f - g), \quad \forall f, g \in L^p([0, 1])$$

est une distance sur $L^p([0, 1])$.

2. Soit $f \in L^p([0, 1])$ et $\varepsilon > 0$. En utilisant la continuité de l'application $x \mapsto \int_0^x |f(t)|^p dt$, montrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ et des fonctions $f_1, \dots, f_n \in L^p([0, 1])$ qui satisfont $\delta_p(f_j) \leq \varepsilon$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ et $f = \frac{1}{n}(f_1 + \dots + f_n)$.
3. En déduire que le seul voisinage convexe de 0 dans $L^p([0, 1])$ est $L^p([0, 1])$ et que ce n'est pas un espace localement convexe.

Exercice 5.6.15. Soit $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ une partie dénombrable de $[0, 1]$ telle que $a_p \neq a_q$ pour $p \neq q$. Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n < +\infty$. Si $f \in C^0([0, 1])$, on pose

$$\|f\|_{A, \alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n |f(a_n)|.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_{A, \alpha}$ est une semi-norme sur $C^0([0, 1])$ et qu'il s'agit d'une norme si et seulement si A est dense dans $[0, 1]$.
2. Montrer que la topologie définie par $\|\cdot\|_{A, \alpha}$ est moins fine que celle de la convergence uniforme.
3. Supposons que $A = A'$ avec la même numérotation, c'est-à-dire $a_n = a'_n$ pour tout n . Montrer que, s'il existe $c, C > 0$ tels que

$$c\alpha_n \leq \alpha'_n \leq C\alpha_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

alors $\|\cdot\|_{A, \alpha}$ et $\|\cdot\|_{A', \alpha'}$ définissent la même topologie sur $C^0([0, 1])$.

6 Constructions d'espaces localement convexes

Après la définition générale des espaces localement convexes, nous étudions maintenant les constructions qui permettent d'en fabriquer de nouveaux. À ce stade, aucune hypothèse de complétude n'est imposée : nous construisons d'abord les espaces et leur topologie.

Pourquoi étudier ces constructions ?

Les espaces fonctionnels que l'on rencontre en analyse ne sont pas toujours donnés directement par une norme ou par une famille de semi-normes évidente. Ils apparaissent souvent à partir d'espaces plus simples par passage à un sous-espace, à un produit, à un quotient ou à une limite. Comprendre ces opérations permet donc de construire leur topologie de manière naturelle plutôt que de la deviner.

Deux exemples guideront particulièrement la suite. L'espace $C^\infty(\Omega)$ peut être décrit à partir de contrôles sur des compacts et sur un nombre fini de dérivées, ce qui conduit naturellement à une construction de type projectif. À l'inverse, l'espace des fonctions tests $\mathcal{D}(\Omega)$ est obtenu en réunissant les espaces de fonctions lisses à support dans un compact fixé, ce qui mène à une limite inductive.

Le chapitre suivant introduira la complétude et reviendra sur ces constructions pour déterminer dans quelle mesure cette propriété est préservée.

Les sous-espaces, les produits et les quotients ont déjà été rencontrés dans le cadre normé : voir notamment les [sous-espaces fermés de Banach](#), les [produits finis de Banach](#) et les [espaces quotients normés](#). Nous reprenons ici ces constructions avec des familles de semi-normes. Le principe topologique reste le même ; seule la description des voisinages change.

Les limites projectives et inductives constituent ensuite des constructions propres au cadre plus général. Elles jouent un rôle essentiel pour les espaces de fonctions lisses et de fonctions test et conduisent notamment à la topologie usuelle de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Lecture comparative. Dans les trois premières sections, chaque construction localement convexe retrouve la construction normée lorsque les familles de semi-normes sont réduites à une norme. Les renvois vers le cadre normé permettent de ne pas répéter les définitions ni les preuves déjà données.

6.1 Sous-espaces

La première construction consiste à munir un sous-espace de la topologie induite par l'espace ambiant. Dans le cadre localement convexe, cette topologie se décrit simplement en restreignant

les semi-normes.

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Rappelons que si Y est un sous-ensemble de X , alors on peut munir Y de la topologie la moins fine rendant l'inclusion $i : Y \rightarrow X$ continue. C'est la topologie induite par X sur Y . En particulier, les ouverts de Y sont de la forme $\Omega \cap Y$ où $\Omega \in \mathcal{T}$. Dans le cas où X est un espace localement convexe et Y est un sous-espace vectoriel, cette topologie peut également être définie via les restrictions des semi-normes de X .

Définition 6.1.1. Soient $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe et Y un sous-espace vectoriel de X . Notons $\mathcal{P}|_Y$ la restriction des semi-normes de $\mathcal{P}$ à Y . Alors $\mathcal{P}|_Y$ est un ensemble filtrant de semi-normes sur Y et l'espace $(Y, \mathcal{P}|_Y)$ est un *sous-espace* (localement convexe) de $(X, \mathcal{P})$. Pour simplifier les notations, on le note également $(Y, \mathcal{P})$.

Il est clair que l'injection canonique $i : (Y, \mathcal{P}|_Y) \rightarrow (X, \mathcal{P})$ est continue. De plus, les boules de Y sont de la forme $b_p(y, \varepsilon) \cap Y$ où $b_p(x, \varepsilon)$ est une boule de X . Ainsi, la topologie de $(Y, \mathcal{P}|_Y)$ correspond à la topologie induite par X sur Y .

Lorsque X est normé, cette construction consiste simplement à restreindre la norme à Y .

6.2 Espaces produits

Les produits permettent de réunir plusieurs espaces sans privilégier l'une des composantes. La topologie produit est celle qui rend continues toutes les projections coordonnées et elle se décrit naturellement par des familles de semi-normes.

Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, une famille d'espaces topologiques. On considère le produit

$$\prod_{i \in I} X_i = \{(x_i)_{i \in I} : x_i \in X_i \ \forall i \in I\}.$$

On peut munir ce produit de la topologie la moins fine rendant les projections

$$\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j : (x_i)_{i \in I} \mapsto x_j$$

continues pour tout $j \in I$. C'est la topologie produit et une base de cette topologie est donnée par les produits d'ouverts qui n'ont qu'un nombre fini de termes propres. De plus, si $(Y, \mathcal{T})$ est un espace topologique et si $f : Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$, alors f est continue si et seulement si les applications $\pi_j \circ f$ sont continues pour tout $j \in I$.

Si les X_i , $i \in I$, sont des espaces vectoriels, on munit le produit de l'addition et de la multiplication scalaire définies composante à composante.

Définition 6.2.1. Soit $(X_i, \mathcal{P}_i)$, $i \in I$, une famille d'espaces localement convexes. On

considère

$$\mathcal{P} = \left\{ \sup_{j \in J} p_j \circ \pi_j : \emptyset \neq J \subseteq I \text{ fini}, p_j \in \mathcal{P}_j \right\}.$$

Il est clair qu'il s'agit d'un ensemble filtrant de semi-normes sur $X = \prod_{i \in I} X_i$. L'espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$ est appelé le *produit* (localement convexe) des espaces $(X_i, \mathcal{P}_i)$, $i \in I$.

Remarquons que les boules de cette topologie sont données par les produits de la forme

$$\prod_{i \in I} B_i \quad \text{où} \quad B_i = \begin{cases} b_{p_i}(x_i, \varepsilon) & \text{si } i \in J \\ X_i & \text{si } i \notin J \end{cases}$$

avec $\emptyset \neq J \subseteq I$ fini, $p_i \in \mathcal{P}_i$, $x_i \in X_i$ et $\varepsilon > 0$. La topologie définie via la Définition 6.2.1 correspond donc à la topologie produit.

Pour un produit fini d'espaces normés, on retrouve la topologie définie par la norme produit de la Proposition 1.2.7. Le produit arbitraire est en revanche naturellement décrit par une famille de semi-normes ne portant que sur un nombre fini de composantes.

La question de la complétude d'un produit sera étudiée après l'introduction de la complétude dans le cadre localement convexe.

6.3 Espaces quotients

Comme dans le cadre normé, le quotient permet de négliger un sous-espace. Il faut toutefois définir la topologie localement convexe naturelle sur le quotient et préciser quand elle est séparée.

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\sim$ une relation d'équivalence sur X . Le quotient $X/\sim$ est l'espace formé des classes d'équivalences de X pour $\sim$. On peut munir cet espace de la topologie la plus fine rendant le passage au quotient

$$\pi : X \rightarrow X/\sim : x \mapsto [x]_\sim$$

continu. On l'appelle la topologie quotient. Rappelons qu'un sous-ensemble U de $X/\sim$ est ouvert pour la topologie quotient si et seulement si $\pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. De plus, pour tout espace topologique Y , une application $f : X/\sim \rightarrow Y$ est continue si et seulement si $f \circ \pi : X \rightarrow Y$ est continue.

Considérons un espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$ et L un sous-espace vectoriel de X . On s'intéresse à l'espace quotient X/L formé des classes d'équivalences de X pour la relation $\sim_L$ définie par

$$x \sim_L y \iff x - y \in L.$$

Ainsi, on a $[x]_L = x + L$. Par conséquent,

$$\inf_{l \in L} p(x + l) = \inf_{y \in [x]_L} p(y)$$

et la définition suivante est légitime.

Définition 6.3.1. Soit $p \in \mathcal{P}$. On définit

$$p_L : X/L \rightarrow [0, +\infty[: [x]_L \mapsto \inf_{l \in L} p(x + l).$$

Notons que si p est une norme, $p_L([x]_L)$ est exactement la norme quotient introduite à la Section 1.2.3, c'est-à-dire la distance de x au sous-espace L . La famille $\{p_L : p \in \mathcal{P}\}$ généralise cette construction et permet de définir la topologie quotient de X/L .

Proposition 6.3.2. Soient $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe et L un sous-espace vectoriel de X .

1. Pour tout $p \in \mathcal{P}$, l'application p_L est une semi-norme sur X/L .
2. L'ensemble de semi-normes $\mathcal{P}_L = \{p_L : p \in \mathcal{P}\}$ est filtrant.
3. La topologie de $(X/L, \mathcal{P}_L)$ est la topologie quotient de X/L .

Démonstration. 1. Soient $[x], [y] \in X/L$. On a

$$p_L([x] + [y]) = p_L([x + y]) = \inf_{l \in L} p(x + y + l).$$

Si $l_1, l_2 \in L$, on a $l_1 + l_2 \in L$ et donc

$$\inf_{l \in L} p(x + y + l) = \inf_{l_1, l_2 \in L} p(x + y + l_1 + l_2) \leq \inf_{l_1 \in L} p(x + l_1) + \inf_{l_2 \in L} p(y + l_2).$$

On en tire que $p_L([x] + [y]) \leq p_L([x]) + p_L([y])$. De plus, si $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, on a

$$L = \left\{ \frac{l}{\lambda} : l \in L \right\}$$

puisque L est un sous-espace vectoriel. Par conséquent, on obtient

$$p_L([\lambda x]) = \inf_{l \in L} p(\lambda x + l) = |\lambda| \inf_{l \in L} p(x + \frac{l}{\lambda}) = |\lambda| \inf_{l' \in L} p(x + l').$$

Le cas $\lambda = 0$ est trivial.

2. C'est immédiat puisque $\mathcal{P}$ est filtrant.

3. Notons $\mathcal{T}_{X/L}$ la topologie quotient de X/L . Pour tout $p \in \mathcal{P}$, il est clair que $p_L \circ \pi_L \leq p$ et donc la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{P}_L}$ rend la projection π_L continue. Ainsi, $\mathcal{T}_{\mathcal{P}_L} \subseteq \mathcal{T}_{X/L}$. Pour démontrer l'autre inclusion, considérons $U \in \mathcal{T}_{X/L}$ et $[x] \in U$. Alors $\pi_L^{-1}(U)$ est un ouvert de X qui contient x , et il existe $p \in \mathcal{P}$ et $r > 0$ tels que $b_p(x, r) \subseteq \pi_L^{-1}(U)$. Montrons que $b_{p_L}([x], r) \subseteq U$, d'où la conclusion. Soit donc $y \in X$ tel que

$$p_L([y] - [x]) = \inf_{l \in L} p(y - x + l) < r.$$

Il existe $l \in L$ tel que $p(y + l - x) < r$. Le représentant $y + l$ appartient alors à $b_p(x, r) \subseteq \pi_L^{-1}(U)$, et donc $[y] = [y + l] \in U$. ■

Proposition 6.3.3. *Soient $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe et L un sous-espace vectoriel de X . L'espace $(X/L, \mathcal{P}_L)$ est séparé si et seulement si L est fermé dans X .*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} p_L([x]) = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P} &\iff \inf_{l \in L} p(x + l) = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P} \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \forall p \in \mathcal{P}, b_p(x, \varepsilon) \cap L \neq \emptyset \\ &\iff x \in \overline{L}. \end{aligned}$$

Par conséquent, si $(X/L, \mathcal{P}_L)$ est séparé, alors $x \in \overline{L}$ implique que $[x] = 0$, c'est-à-dire $x \in L$.

Réciproquement, si L est fermé, alors l'équivalence précédente se réécrit

$$p_L([x]) = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P} \iff x \in L \iff [x] = [0],$$

ce qui suffit. ■

Terminons cette section par la construction du séparé d'un espace localement convexe. Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe. Par la Proposition 5.4.1, si $(X, \mathcal{P})$ n'est pas séparé, alors l'ensemble N défini par

$$N = \bigcap_{p \in \mathcal{P}} \{x \in X : p(x) = 0\}$$

est différent de $\{0\}$.

Lemme 6.3.4. *L'ensemble N est un sous-espace vectoriel fermé de X .*

Démonstration. Soient $x, y \in N$. Alors pour tout $p \in \mathcal{P}$, on a $p(x) = p(y) = 0$. Puisque $0 \leq p(x + y) \leq p(x) + p(y) = 0$, on obtient que $p(x + y) = 0$. Ainsi $x + y \in N$. De même, si $x \in N$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $p(\lambda x) = |\lambda|p(x) = 0$ pour tout $p \in \mathcal{P}$, d'où $\lambda x \in N$.

De plus, si $x \notin N$, alors il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $p(x) > 0$. Ainsi $b_p(x, r) \subseteq X \setminus N$ si $r = \frac{p(x)}{2}$, ce qui montre que N est une partie fermée de X . ■

Définition 6.3.5. Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe. L'espace quotient $(X/N, \mathcal{P}_N)$ est un espace localement convexe séparé. On le note $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{P}})$ et on l'appelle le *séparé* de $(X, \mathcal{P})$.

Le résultat suivant donne une description des semi-normes du séparé d'un espace localement convexe.

Proposition 6.3.6. *Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe. Pour tout $x \in X$ et tout $p \in \mathcal{P}$, on a*

$$p_N([x]_N) = p(x).$$

Démonstration. Soient $x \in X$ et $p \in \mathcal{P}$. Pour tout $y \in N$, on a

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) = p(x) \quad \text{et} \quad p(x) = |p(x) - p(y)| \leq p(x + y),$$

ce qui suffit. ■

Exemple 6.3.7. Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré et $1 \leq p < +\infty$, l'espace $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est l'ensemble des applications $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$ -mesurables telles que $|f|^p$ est intégrable. On le munit de la semi-norme

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Cet espace n'est pas séparé puisque $\|f\|_p = 0$ lorsque $f = 0$ μ -presque partout. En notant $\mathcal{N}(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace des applications $\mathcal{A}$ -mesurables de X dans $\mathbb{R}$ qui s'annulent presque partout, l'espace $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est défini par le quotient de $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ par $\mathcal{N}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Il s'agit d'un espace séparé pour la norme

$$\|[f]\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Les sous-espaces, produits et quotients ci-dessus prolongent des constructions déjà connues. Les limites projectives et inductives qui suivent permettent, elles, d'assembler toute une famille d'espaces et d'opérateurs.

6.4 Limites projectives

Les limites projectives décrivent des espaces déterminés par une famille de conditions compatibles. Elles apparaissent naturellement lorsqu'un objet doit satisfaire simultanément des contraintes à plusieurs niveaux.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel. Bien sûr, l'espace $X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$ est un espace vectoriel. On suppose que chaque espace X_n est muni d'un ensemble filtrant de semi-normes $\mathcal{P}_n$. L'objectif est de munir X d'une structure d'espace localement convexe. Naturellement, on va considérer la famille de semi-normes obtenues en "filtrant" l'ensemble de semi-normes $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n$.

Définition 6.4.1. On considère l'ensemble filtrant de semi-normes

$$\mathcal{P} = \left\{ \sup_{n \in J} p_n : J \subseteq \mathbb{N} \text{ fini}, p_n \in \mathcal{P}_n \right\}$$

sur X . L'espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$ est appelé la *limite projective* de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et est noté

$$\varprojlim_n X_n.$$

Notons qu'une base de voisinages de 0 dans X est donnée par les intersections finies de la forme

$$\bigcap_{n \in J} b_{p_n}(\varepsilon)$$

où $J \subseteq \mathbb{N}$ est fini, $p_n \in \mathcal{P}_n$ pour tout $n \in J$ et $\varepsilon > 0$.

Le résultat suivant justifie l'introduction de cet ensemble de semi-normes sur X .

Proposition 6.4.2. *La topologie de la limite projective est la topologie localement convexe la plus faible qui rend les inclusions*

$$i_n : X \rightarrow X_n$$

continues pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Il est clair que la topologie de la limite projective rend les inclusions $i_n : X \rightarrow X_n$ continues puisque $\mathcal{P}_n \subseteq \mathcal{P}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, si $\mathcal{Q}$ est un ensemble filtrant de semi-normes sur X rendant les inclusions continues, montrons que $\mathcal{P} \preceq \mathcal{Q}$. Soit donc $J \subseteq \mathbb{N}$ fini et $p_n \in \mathcal{P}_n$ pour tout $n \in J$. Pour tout $n \in J$, la continuité de i_n sur $(X, \mathcal{Q})$ permet de trouver $q_n \in \mathcal{Q}$ tel que $p_n \preceq q_n$. Comme $\mathcal{Q}$ est filtrant et que J est fini, il existe $q \in \mathcal{Q}$ tel que $\sup_{n \in J} q_n \preceq q$. Par conséquent, $\sup_{n \in J} p_n \preceq q$, ce qui suffit. ■

Les propriétés des espaces localement convexes $(X_n, \mathcal{P}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, se transfèrent facilement à leur limite projective. Par exemple, si les espaces $(X_n, \mathcal{P}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, sont séparés, alors $\varprojlim_n X_n$ est séparé.

Exemple 6.4.3. Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe à semi-normes dénombrables. Après avoir remplacé la famille initiale par une famille équivalente, on peut supposer que

$$\mathcal{P} = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}, \quad p_n \leq p_{n+1}.$$

Pour chaque n , notons X_n l'espace vectoriel X muni de la semi-norme p_n . Alors l'identité

de X_{n+1} dans X_n est continue et l'identification canonique

$$X \simeq \varprojlim_n X_n$$

est un isomorphisme d'espaces localement convexes. En effet, la topologie de la limite projective est précisément celle engendrée par toutes les semi-normes p_n .

Exemple 6.4.4. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une exhaustion croissante de Ω par des compacts telle que $K_n \subset K_{n+1}^\circ$. La topologie usuelle de $C^\infty(\Omega)$ est engendrée par les semi-normes

$$p_{n,m}(f) = \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K_n} |\partial^\alpha f(x)|, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, $C^\infty(\Omega)$ peut être décrit comme un espace défini par une famille dénombrable de conditions compatibles sur les compacts K_n . Cette lecture projective met en évidence la structure localement convexe de $C^\infty(\Omega)$ à partir de données compatibles sur les compacts K_n .

Exemple 6.4.5. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une exhaustion croissante de Ω par des compacts, avec $K_n \subseteq K_{n+1}$. Les restrictions définissent un isomorphisme localement convexe

$$C^0(\Omega) \cong \left\{ (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} C^0(K_n) : f_{n+1}|_{K_n} = f_n \text{ pour tout } n \right\}.$$

Il s'agit de la formulation correcte de $C^0(\Omega)$ comme limite projective des espaces $C^0(K_n)$ et des applications de restriction.

6.5 Limites inductives

Les limites inductives correspondent à la situation où l'espace est obtenu comme réunion croissante de sous-espaces. Le choix de la topologie est alors guidé par la continuité des inclusions et par la volonté de conserver la structure localement convexe.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel. On suppose que chaque espace X_n est muni d'un ensemble filtrant de semi-normes $\mathcal{P}_n$ rendant les inclusions

$$i_n : X_n \rightarrow X_{n+1}$$

continues. L'espace $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ est un espace vectoriel et on souhaite le munir d'une structure d'espace localement convexe.

Définition 6.5.1. Si $\pi = (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $p_n \in \mathcal{P}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $\gamma = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs, on pose

$$p_{\pi, \gamma}(x) = \inf \left\{ \sum_{n \in J} c_n p_n(x_n) : J \subseteq \mathbb{N} \text{ fini}, x = \sum_{n \in J} x_n \text{ avec } x_n \in X_n \right\}.$$

On vérifie facilement que $p_{\pi, \gamma}$ est une semi-norme sur X et que l'ensemble formé des semi-normes de la forme $p_{\pi, \gamma}$ est filtrant. On peut donc considérer la définition suivante.

Définition 6.5.2. L'espace localement convexe $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ muni de l'ensemble filtrant des semi-normes de la forme $p_{\pi, \gamma}$ est appelé la *limite inductive* de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On la note

$$\varinjlim_n X_n.$$

Le lemme suivant donne une description des semi-boules de la limite inductive.

Lemme 6.5.3. Si $\pi = (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $p_n \in \mathcal{P}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $\gamma = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs, on a

$$b_{p_{\pi, \gamma}}(1) = \Gamma \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} b_{p_n} \left(\frac{1}{c_n} \right) \right)$$

Démonstration. D'une part, si $p_n(x) < \frac{1}{c_n}$, alors $p_{\pi, \gamma}(x) < 1$. Ainsi, $b_{p_n}(\frac{1}{c_n}) \subseteq b_{p_{\pi, \gamma}}(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme les semi-boules sont absolument convexes, on en tire que

$$\Gamma \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} b_{p_n} \left(\frac{1}{c_n} \right) \right) \subseteq b_{p_{\pi, \gamma}}(1).$$

D'autre part, si $x \in b_{p_{\pi, \gamma}}(1)$, il existe une décomposition finie $x = \sum_{n \in J} x_n$ telle que

$$\sum_{n \in J} c_n p_n(x_n) < 1.$$

Fixons $\varepsilon > 0$ tel que

$$\varepsilon \sum_{n \in J} c_n + \sum_{n \in J} c_n p_n(x_n) < 1.$$

Si $\lambda_n = c_n(p_n(x_n) + \varepsilon)$, on peut écrire

$$x = \sum_{n \in J} \lambda_n \frac{x_n}{\lambda_n}$$

avec

$$\sum_{n \in J} |\lambda_n| = \sum_{n \in J} c_n p_n(x_n) + \varepsilon \sum_{n \in J} c_n < 1$$

et

$$p_n \left(\frac{x_n}{\lambda_n} \right) = \frac{1}{c_n(p_n(x_n) + \varepsilon)} p_n(x_n) < \frac{1}{c_n}.$$

■

Remarque 6.5.4. Par conséquent, tout ensemble de la forme

$$\Gamma \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} b_{p_n}(r_n) \right)$$

est un ouvert de la limite inductive X . De plus, si $n_0 \in \mathbb{N}$ est fixé, alors pour tout $n \leq n_0$, la continuité de l'inclusion de X_n dans X_{n_0} nous permet de trouver une semi-boule $b_{p_n}(r_n)$ de X_n telle que $b_{p_n}(r_n) \subseteq b_{p_{n_0}}(r_{n_0})$. On en tire que l'ensemble

$$\Gamma \left(\bigcup_{n \geq n_0} b_{p_n}(r_n) \right)$$

est également ouvert dans X .

Nous allons voir que la topologie de la limite inductive est la topologie localement convexe finale relative à la famille d'applications $I_n : X_n \rightarrow X$.

Proposition 6.5.5. *La limite inductive de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la topologie localement convexe la plus fine rendant les inclusions*

$$I_n : X_n \rightarrow X$$

continues.

Démonstration. Si $\pi = (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $p_n \in \mathcal{P}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $\gamma = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, on a

$$p_{\pi, \gamma} \circ I_n \leq c_n p_n,$$

ce qui montre que la topologie de la limite inductive rend I_n continu.

De plus, soit $\mathcal{Q}$ un ensemble filtrant de semi-normes sur X rendant les inclusions continues. Alors, si $q \in \mathcal{Q}$, il existe p_n et $c_n > 0$ tels que $q \circ I_n \leq c_n p_n$. On en tire que

$$q(f) \leq \sum_{j \in J} q(f_j) \leq \sum_{j \in J} c_j p_j(f_j)$$

pour toute décomposition finie de f en les $f_j \in X_j$. Ainsi, $q \leq p_{\pi, \gamma}$ où $\pi = (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\gamma = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ce qui suffit. ■

Le résultat suivant est naturel.

Corollaire 6.5.6. Soit $X = \varinjlim_n X_n$ et $(Y, \mathcal{Q})$ un espace localement convexe. Une application linéaire $T : X \rightarrow Y$ est continue si et seulement si sa restriction $T|_{X_n}$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Si T est continue, alors l'application $T|_{X_n} = T \circ I_n$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$ par la Proposition 6.5.5. Réciproquement, supposons que $T|_{X_n}$ est continu pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $q \in \mathcal{Q}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p_n \in \mathcal{P}_n$ et $c_n > 0$ tel que $q \circ T|_{X_n} \leq c_n p_n$. Alors,

$$q \circ T(x) \leq \sum_{n \in J} q \circ T(x_n) \leq \sum_{n \in J} c_n p_n(x_n)$$

pour toute décomposition finie de x en les $x_n \in X_n$. Ainsi, $q \circ T \leq p_{\pi, \gamma}$ où $\pi = (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\gamma = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, d'où la conclusion. ■

Par conséquent, la topologie de la limite inductive induit dans chaque espace X_n des semi-normes plus faibles que celles de X_n . Cependant, en général, on n'a pas l'équivalence. Cela implique que les propriétés des limites inductives ne peuvent pas toujours être obtenues à partir des propriétés des espaces $(X_n, \mathcal{P}_n)$. On va se placer dans un cadre plus restreint, mais cependant rencontré régulièrement en pratique.

Définition 6.5.7. Une limite inductive est *stricte* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, les semi-normes induites par X_{n+1} dans X_n sont équivalentes aux semi-normes de X_n . Une limite inductive est *hyperstricte* si elle est stricte et si chaque X_n est fermé dans X_{n+1} .

Ainsi, une limite inductive est stricte si pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'espace $(X_n, \mathcal{P}_n)$ est un sous-espace localement convexe de $(X_{n+1}, \mathcal{P}_{n+1})$.

Exemple 6.5.8. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de $C^\infty(\Omega)$ à support compact. Pour tout compact K de Ω , on pose

$$\mathcal{D}^K(\Omega) = \{f \in \mathcal{D}(\Omega) : \text{supp}(f) \subseteq K\}$$

et on le munit de l'ensemble des semi-normes définies par

$$\|f\|_{K,k} := \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha f(x)|$$

avec $k \in \mathbb{N}$. Alors, si $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de compacts telle que $K_n \subseteq K_{n+1}^\circ$ et dont l'union est égale à Ω , on munit $\mathcal{D}(\Omega)$ de la limite inductive associée aux espaces $\mathcal{D}^{K_n}(\Omega)$, i.e.

$$\mathcal{D}(\Omega) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}^{K_n}(\Omega).$$

De plus, la limite inductive est hyperstricte.

Remarque 6.5.9. Un autre exemple présent dans la version initiale du cours est l'espace des germes de fonctions C^∞ en 0. Si l'on considère les espaces $C^\infty((-1/n, 1/n))$, les applications naturelles d'un étage vers le suivant sont ici des applications de restriction. L'espace des germes s'interprète donc comme la limite inductive de ce système au sens général des limites inductives. Cette situation ne relève toutefois pas directement de la définition adoptée ci-dessus, où les espaces X_n sont identifiés à des sous-espaces croissants d'un même espace vectoriel. Nous ne qualifierons donc pas cette limite de stricte ou d'hyperstricte dans le cadre présent.

Le résultat suivant montre que les espaces $(X_n, \mathcal{P}_n)$ sont des sous-espaces localement convexes de la limite inductive stricte.

Proposition 6.5.10. *Si X est la limite inductive stricte de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors la topologie induite par X sur chaque X_n coïncide avec la topologie initiale de X_n .*

Démonstration. Fixons $n \in \mathbb{N}$. La continuité de l'inclusion $I_n : X_n \rightarrow X$ montre déjà que la topologie induite par X sur X_n est moins fine que la topologie donnée sur X_n . Il reste à établir l'inclusion réciproque.

Soit

$$U_0 = b_{p_n}(1)$$

une semi-boule de X_n . Comme la limite est stricte, la topologie de X_{n+i-1} est, pour tout $i \geq 1$, la topologie induite par X_{n+i} . On peut donc construire par récurrence des semi-boules

$$U_i = b_{p_{n+i}}(r_i) \subseteq X_{n+i}, \quad i \geq 1,$$

telles que

$$U_i \cap X_{n+i-1} \subseteq U_{i-1}.$$

D'après la Remarque 6.5.4, l'ensemble

$$V = \Gamma \left(\bigcup_{i \geq 0} U_i \right)$$

est un voisinage ouvert de 0 dans X . Montrons que $V \cap X_n \subseteq U_0$.

Soit $x \in V \cap X_n$. Il existe des vecteurs $u_1, \dots, u_m$, des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ et des indices $i(1), \dots, i(m)$ tels que

$$u_j \in U_{i(j)}, \quad x = \sum_{j=1}^m \lambda_j u_j, \quad \sum_{j=1}^m |\lambda_j| \leq 1.$$

Posons $N = \max_j i(j)$ et, pour $0 \leq i \leq N$,

$$y_i = \sum_{i(j)=i} \lambda_j u_j, \quad \alpha_i = \sum_{i(j)=i} |\lambda_j|.$$

Comme U_i est absolument convexe, on a $y_i \in \alpha_i U_i$. Posons encore

$$z_i = \sum_{k=i}^N y_k, \quad s_i = \sum_{k=i}^N \alpha_k.$$

Pour $i \geq 1$, le vecteur z_i appartient à X_{n+i-1} , car

$$z_i = x - \sum_{k=0}^{i-1} y_k$$

et tous les termes du membre de droite appartiennent à X_{n+i-1} .

Nous montrons par récurrence descendante que

$$z_i \in s_i U_i \quad (0 \leq i \leq N).$$

C'est vrai pour $i = N$. Supposons le résultat établi à l'indice $i \geq 1$. Si $s_i > 0$, alors

$$\frac{z_i}{s_i} \in U_i \cap X_{n+i-1} \subseteq U_{i-1},$$

donc $z_i \in s_i U_{i-1}$; si $s_i = 0$, la conclusion est immédiate. Comme $y_{i-1} \in \alpha_{i-1} U_{i-1}$ et que U_{i-1} est absolument convexe,

$$z_{i-1} = y_{i-1} + z_i \in (\alpha_{i-1} + s_i) U_{i-1} = s_{i-1} U_{i-1}.$$

À l'indice 0, on obtient

$$x = z_0 \in s_0 U_0 \subseteq U_0,$$

puisque $s_0 = \sum_j |\lambda_j| \leq 1$.

Ainsi, toute semi-boule de X_n contient la trace sur X_n d'un voisinage de 0 dans X . La topologie initiale de X_n est donc moins fine que la topologie induite par X , ce qui achève la preuve. ■

Attention, cette condition ne donne pas une caractérisation de la topologie de la limite inductive. Autrement dit, un ensemble de semi-normes sur X qui induit dans chaque X_n des semi-normes équivalentes à $\mathcal{P}_n$ n'est pas nécessairement équivalent à l'ensemble des semi-normes de la forme $p_{\pi, \gamma}$.

Corollaire 6.5.11. *Si X est la limite inductive stricte de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et si les espaces $(X_n, \mathcal{P}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, sont séparés, alors X est séparé.*

Démonstration. Soit $x \in X$ tel que $p_{\pi, \gamma}(x) = 0$ pour tous π et γ . Comme $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$, il existe

$n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in X_n$. Par la Proposition 6.5.10, $p_n(x) = 0$ pour tout $p_n \in \mathcal{P}_n$, ce qui permet d'obtenir la conclusion. ■

Nous allons à présent nous placer dans le cadre de limites inductives hyperstrictes pour obtenir des propriétés supplémentaires.

Proposition 6.5.12. *Si X est la limite inductive hyperstricte de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors toute partie fermée d'un X_n est fermée dans X .*

Démonstration. Soit $F \subseteq X_n$ fermé dans X_n . Nous montrons d'abord que F est fermé dans chaque X_m pour $m \geq n$. En effet, supposons F fermé dans X_m . Comme la limite est stricte, la topologie de X_m est celle induite par X_{m+1} ; comme elle est hyperstricte, X_m est en outre fermé dans X_{m+1} . Par conséquent, F , fermé dans le sous-espace fermé X_m , est fermé dans X_{m+1} . Une récurrence donne l'affirmation.

Soit maintenant $x \in X \setminus F$. Choisissons $m \geq n$ tel que $x \in X_m$. Puisque F est fermé dans X_m , il existe un ouvert B de X_m contenant x et disjoint de F . D'après la Proposition 6.5.10, la topologie de X_m est la topologie induite par X . Il existe donc un ouvert U de X tel que

$$B = U \cap X_m.$$

Comme $F \subseteq X_m$, on a

$$U \cap F = (U \cap X_m) \cap F = B \cap F = \emptyset.$$

Ainsi, chaque point de $X \setminus F$ possède un voisinage ouvert disjoint de F . Le complémentaire de F est ouvert, donc F est fermé dans X . ■

Corollaire 6.5.13. *Si X est la limite inductive hyperstricte de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et si $A \subseteq X_n$, alors*

$$\overline{A}^X = \overline{A}^{X_m}$$

pour tout $m \geq n$.

Démonstration. Fixons $m \geq n$. Puisque les semi-normes induites par X sur X_m sont équivalentes à celles de X_m par la Proposition 6.5.10, on a

$$\overline{A}^{X_m} \subseteq \overline{A}^X.$$

De plus, la Proposition 6.5.12 implique que $\overline{A}^{X_m}$ est fermé dans X et puisqu'il contient A , on obtient l'autre inclusion. ■

Corollaire 6.5.14. *Si X est la limite inductive stricte de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors la limite inductive est hyperstricte si et seulement si chaque X_n est fermé dans X .*

Démonstration. Supposons que la limite inductive est hyperstricte. Puisque X_n est fermé dans lui-même, il est également fermé dans X par la Proposition 6.5.12. Réciproquement, supposons que chaque X_n soit fermé dans X . Alors $X_n = X_{n+1} \cap X_n$ est fermé dans X_{n+1} pour la topologie induite par X . Cette topologie coïncide avec la topologie initiale de X_{n+1} par la Proposition 6.5.10 ; ainsi X_n est fermé dans X_{n+1} et la limite est hyperstricte. ■

7 Complétude et espaces de Fréchet

Les constructions du chapitre précédent n'exigent aucune hypothèse de complétude. Nous introduisons maintenant cette condition topologique dans le cadre général des espaces localement convexes.

Pourquoi imposer la complétude ?

En analyse, on construit fréquemment un objet comme limite d'approximations successives. Pour que cette démarche reste à l'intérieur de l'espace considéré, il faut que les objets de Cauchy aient effectivement une limite dans cet espace. C'est précisément le rôle de la complétude. Elle intervient également de façon décisive dans les arguments de catégorie de Baire, qui sont à la base de plusieurs grands théorèmes d'analyse fonctionnelle.

Dans le cadre normé, cette exigence conduit aux espaces de Banach. Dans le cadre localement convexe métrisable, l'analogue naturel est celui des espaces de Fréchet : des espaces localement convexes, métrisables et complets. Comme les suites ne suffisent plus toujours à décrire la convergence dans un espace non nécessairement métrisable, nous reprenons d'abord la formulation du cours initial au moyen des filtres.

Ce n'est qu'une fois la complétude définie que nous introduirons les espaces de Fréchet. Nous reviendrons alors sur les constructions déjà étudiées pour déterminer lesquelles préservent cette structure.

7.1 Suites, filtres et convergence

Dans les espaces métrisables, les suites suffisent pour décrire la convergence. Dans un espace topologique plus général, elles ne capturent pas toujours toute la topologie ; les filtres fournissent alors un outil adapté au niveau de généralité considéré ici.

Certains espaces topologiques ne sont pas à base dénombrable de voisinages. Dans ces espaces, on ne peut pas utiliser les suites pour caractériser les différentes notions topologiques. On peut alors utiliser la notion de *filtre* qui permet de généraliser celle de convergence.

Définition 7.1.1. Soit X un ensemble non vide. Un *filtre* sur X est une famille non-vide $\mathcal{F}$ de parties de X qui vérifie les propriétés suivantes :

- (F1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
- (F2) si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, alors $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$,
- (F3) Si $F_1 \in \mathcal{F}$ et $F_1 \subseteq F_2$, alors $F_2 \in \mathcal{F}$.

Exemples 7.1.2.

- ▷ Si $Y \subseteq X$ est non-vide, alors $\mathcal{F}_Y = \{F \subseteq X : Y \subseteq F\}$ est un filtre sur X .
- ▷ Si X est infini, alors l'ensemble $\mathcal{F} = \{F \subseteq X : X \setminus F \text{ est fini}\}$ est un filtre sur X .
- ▷ Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de X , l'ensemble des parties de X qui contiennent une queue de cette suite est un filtre sur X , appelé le *filtre associé à $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$* .
- ▷ Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique et si $x \in X$, l'ensemble $\mathcal{V}_x$ des voisinages de x est un filtre sur X , appelé le *filtre des voisinages de x* .

Définition 7.1.3. Soit $\mathcal{B}$ une famille non-vide de parties non-vides de X telle que pour tous $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \subseteq B_1 \cap B_2$. Alors

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq X : \exists B \in \mathcal{B} \text{ tel que } B \subseteq F\}$$

est un filtre sur X , appelé le *filtre engendré par $\mathcal{B}$* . On dit que $\mathcal{B}$ est la *base* du filtre.

On vérifie directement que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ et en utilisant (F3), que $\mathcal{F}$ est le plus petit filtre contenant $\mathcal{B}$.

Définition 7.1.4. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Un filtre $\mathcal{F}$ sur X *converge* vers $x \in X$ si $\mathcal{F}$ contient le filtre $\mathcal{V}_x$ des voisinages de x . On dit que x est un point *limite* du filtre $\mathcal{F}$.

Remarque 7.1.5. Bien sûr, un filtre $\mathcal{F}$ converge vers x si $\mathcal{F}$ contient une base de voisinages $\mathcal{B}_x$ de x . Il suffit pour cela d'utiliser la propriété (F3).

Remarque 7.1.6. Rappelons qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X *converge* vers $x \in X$ si pour tout $V \in \mathcal{V}_x$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in V$ pour tout $n \geq N$. C'est équivalent à dire que le filtre associé à $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x . La notion de convergence de filtres généralise donc bien celle de convergence de suites.

Comme dans le cas des suites convergentes, l'unicité de la limite est assurée lorsque l'on travaille dans des espaces séparés.

Proposition 7.1.7. Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique séparé et si $\mathcal{F}$ est un filtre sur X qui converge, alors sa limite est unique.

Démonstration. Supposons qu'il existe $x \neq y$ dans X tels que $\mathcal{F}$ converge vers x et vers y . Comme X est séparé, il existe $V \in \mathcal{V}_x$ et $W \in \mathcal{V}_y$ tels que $V \cap W = \emptyset$. Par définition de la

convergence de $\mathcal{F}$, on a $V \in \mathcal{F}$ et $W \in \mathcal{F}$, et donc par la propriété (F2), $\emptyset = V \cap W \in \mathcal{F}$. Ceci est impossible vu (F1). ■

Soit Y un sous-ensemble d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. Si $\mathcal{F}$ est un filtre sur Y , alors c'est la base d'un filtre sur X . Ainsi, lorsque l'on parle d'un filtre $\mathcal{F}$ de Y qui converge dans X , cela signifie que le filtre de X engendré par $\mathcal{F}$ converge.

Proposition 7.1.8. *Une partie Y d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est fermée si et seulement si Y contient la limite de tous ses filtres convergents dans X .*

Démonstration. Supposons que Y est fermé. Soit $\mathcal{F}$ un filtre de Y qui converge vers x dans $(X, \mathcal{T})$. Alors, pour tout $V \in \mathcal{V}_x$, $V \in \mathcal{F}$. En particulier, $V \cap Y \neq \emptyset$ et $x \in \overline{Y} = Y$.

Réciproquement, si $x \in \overline{Y}$, alors $\mathcal{B} = \{V \cap Y : V \in \mathcal{V}_x\}$ est une base de filtre sur Y . Le filtre qu'elle engendre, considéré comme un filtre sur X , est plus fin que le filtre des voisinages $\mathcal{V}_x$; il converge donc vers x . Par hypothèse, on a $x \in Y$, ce qui suffit. ■

Remarque 7.1.9. En fait, nous avons montré qu'un point x est adhérent à un ensemble Y si et seulement si x est la limite dans X d'un filtre de Y .

Les filtres permettent également de donner une caractérisation de la continuité d'une application comme le montre le résultat suivant. Pour cela, nous introduisons la notion de filtre image. Si $f : X \rightarrow Y$ et si $\mathcal{F}$ est un filtre sur X , l'ensemble $\{A \subseteq Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ est un filtre sur Y appelé *filtre image* de $\mathcal{F}$ par f et est noté $f(\mathcal{F})$.

Proposition 7.1.10. *Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques. Une application $f : X \rightarrow Y$ est continue si et seulement si pour tout filtre $\mathcal{F}$ de X qui converge vers $x \in X$, le filtre image $f(\mathcal{F})$ converge vers $f(x)$.*

Démonstration. Supposons que f est continu. Soit $\mathcal{F}$ un filtre de X qui converge vers x . Soit V un voisinage de $f(x)$. Par continuité, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x et donc $f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$. Donc $V \in f(\mathcal{F})$, ce qui suffit.

Réciproquement, soit V un voisinage de $f(x)$. On sait que le filtre $\mathcal{V}_x$ des voisinages de x converge vers x , donc par hypothèse, $f(\mathcal{V}_x)$ converge vers $f(x)$. Ainsi, $V \in f(\mathcal{V}_x)$, d'où $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_x$. ■

Remarque 7.1.11. Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques, et soit $f : X \rightarrow Y$ une application. On dit que f est *séquentiellement continu* si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X qui converge vers x , $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. Si $(X, \mathcal{T})$ est à base dénombrable de

voisinages, alors on sait que f est séquentiellement continu si et seulement si f est continu. En particulier, si X est métrisable, on peut utiliser le “critère par les suites”.

Terminons cette section par le résultat suivant qui caractérise la convergence de filtres dans le cas d’espaces localement convexes. Ce sera le point de départ pour définir les filtres de Cauchy dans la section suivante.

Proposition 7.1.12. *Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur l’espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$. Alors $\mathcal{F}$ converge vers $x \in X$ si et seulement pour tout $p \in \mathcal{P}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que $p(x - y) < \varepsilon$ pour tout $y \in F$.*

Démonstration. $\Rightarrow$ Il suffit de prendre $F = b_p(x, \varepsilon)$.

$\Leftarrow$ On utilise la Remarque 7.1.5. ■

7.2 Filtres de Cauchy et espaces complets

La notion de suite de Cauchy doit elle aussi être généralisée lorsque l’on quitte le cadre métrisable. Les filtres de Cauchy permettent de retrouver l’idée essentielle de la complétude : toute approximation intrinsèquement cohérente doit converger dans l’espace.

Au vu de la Proposition 7.1.12, il semble naturel de généraliser la notion de suite de Cauchy au moyen des filtres dans les espaces localement convexes de la manière suivante.

Définition 7.2.1. Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe. Un filtre $\mathcal{F}$ sur X est de *Cauchy* si pour tout $p \in \mathcal{P}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que

$$p(x - y) < \varepsilon \quad \forall x, y \in F.$$

Remarque 7.2.2. Soit $\mathcal{F}$ le filtre associé à une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de l’espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$. Alors $\mathcal{F}$ est de Cauchy si et seulement si pour tout $p \in \mathcal{P}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$p(x_n - x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

Proposition 7.2.3. *Si $(X, \mathcal{P})$ est un espace localement convexe, alors tout filtre convergent sur X est de Cauchy.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{F}$ est un filtre sur X qui converge vers $x \in X$. Alors par la Proposition 7.1.12, pour tout $p \in \mathcal{P}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que $p(x - y) < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout

$y \in F$. Par conséquent, pour tous $y, z \in F$, on a

$$p(y - z) \leq p(y - x) + p(x - z) < \varepsilon,$$

ce qui suffit. ■

En général, la réciproque de ce résultat est fausse. On introduit donc naturellement la notion suivante.

Définition 7.2.4. Un espace localement convexe séparé $(X, \mathcal{P})$ est *complet* si tout filtre de Cauchy sur X converge. De manière plus générale, une partie Y de X est *complète* si tout filtre de Cauchy sur Y converge dans Y .

Proposition 7.2.5. Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe séparé. Alors toute partie complète Y de X est fermée.

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ un filtre de Y qui converge vers $x \in X$. Comme $\mathcal{F}$ converge, la Proposition 7.2.3 implique que $\mathcal{F}$ est de Cauchy. Comme Y est complet, $\mathcal{F}$ converge dans Y (donc dans X) et on en tire que $x \in Y$. On obtient la conclusion en utilisant la Proposition 7.1.8. ■

Corollaire 7.2.6. Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe séparé. Si Y est un sous-espace vectoriel de X de dimension finie, alors Y est complet et fermé dans X .

Démonstration. La Proposition 5.4.7 implique que la topologie de Y est donnée par la topologie usuelle de $\mathbb{K}^{\dim Y}$. Ainsi, Y est un espace complet et la Proposition 7.2.5 donne que Y est fermé. ■

Proposition 7.2.7. Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe séparé et complet. Alors toute partie fermée de X est complète.

Démonstration. Soit Y une partie fermée de X et soit $\mathcal{F}$ un filtre de Cauchy sur Y . Alors $\mathcal{F}$ est également un filtre de Cauchy de X et comme X est complet, il converge. Comme Y est fermé, le point limite appartient à Y , ce qui suffit. ■

Dans ce qui suit, nous montrons que dans le cas d'un espace à semi-normes dénombrables, on peut se limiter à étudier les convergences des suites.

Définition 7.2.8. Un espace localement convexe séparé $(X, \mathcal{P})$ est *séquentiellement-complet*, ce que l'on note *sq-complet*, si toute suite de Cauchy sur X converge. De manière plus

générale, une partie Y de X est *séquentiellement-complète*, ce que l'on note *sq-complète*, si toute suite de Cauchy sur Y converge dans Y .

Théorème 7.2.9. *Un espace séparé à semi-normes dénombrables $(X, \mathcal{P})$ est complet si et seulement s'il est sq-complet.*

Démonstration. Il est clair que tout espace complet est sq-complet. Réciproquement, supposons que l'espace est sq-complet. Soit $\mathcal{F}$ un filtre de Cauchy sur $(X, \mathcal{P})$ où $\mathcal{P} = \{p_m : m \in \mathbb{N}\}$ avec $p_m \leq p_{m+1}$. Pour tout $m \geq 1$, il existe $F_m \in \mathcal{F}$ tel que

$$p_m(x - y) < \frac{1}{m} \quad \forall x, y \in F_m.$$

Quitte à remplacer F_m par $F_m \cap F_{m-1} \cap \dots \cap F_1$, en utilisant la propriété (F2), on peut supposer que la suite $(F_m)_{m \geq 1}$ est décroissante. Pour tout $m \geq 1$, soit $x_m \in F_m$. La suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy puisque $p_m(x_r - x_s) < \frac{1}{m}$ pour tous $r, s \geq m$. Par hypothèse, elle converge vers $x \in X$. Pour conclure, il reste à montrer que $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{F}$, où $\mathcal{B}_x$ est l'ensemble des boules centrées en x . Fixons $m \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $N \geq m$ tel que $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ et $p_m(x_N - x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Si $y \in F_N$, on a alors

$$p_m(y - x) \leq p_m(y - x_N) + p_m(x_N - x) \leq p_N(y - x_N) + p_m(x_N - x) < \frac{1}{N} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

On en tire que $F_N \subseteq b_{p_m}(x, \varepsilon)$ et par la propriété (F3), on a $b_{p_m}(x, \varepsilon) \in \mathcal{F}$. ■

Corollaire 7.2.10. *Un espace normé est complet si et seulement s'il est sq-complet.*

Ce corollaire reformule, à l'aide des suites, la complétude utilisée dans la [définition des espaces de Banach](#).

Lorsque l'on travaille dans un espace à semi-normes dénombrables, on dispose d'une distance d et donc de la notion usuelle de suites de Cauchy. Notons que la propriété "être de Cauchy" dépend de la distance choisie : si d_1 et d_2 sont deux distances qui définissent la même topologie sur un espace X , alors (X, d_1) peut être complet sans que (X, d_2) le soit. La complétude n'est donc pas une notion topologique. Cette remarque est illustrée par deux exercices placés à la fin du chapitre.

Le résultat suivant montre que les suites de Cauchy d'un espace à semi-normes dénombrables sont les mêmes que les suites de Cauchy définies à partir de la distance introduite dans le Théorème 5.4.10.

Proposition 7.2.11. *Considérons un espace séparé à semi-normes dénombrables $(X, \mathcal{P})$*

avec $\mathcal{P} = \{p_m : m \in \mathbb{N}\}$, où $(p_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est croissant. Si d est la distance définie sur X par

$$d(x, y) = \sum_{m=0}^{+\infty} 2^{-m} \frac{p_m(x - y)}{1 + p_m(x - y)},$$

alors une suite de X est de Cauchy pour $\mathcal{P}$ si et seulement si elle l'est pour d . En particulier, $(X, \mathcal{P})$ est complet si et seulement si (X, d) l'est.

Démonstration. Il suffit d'imiter la preuve du Théorème 5.4.10 et d'utiliser les inclusions qui existent entre les boules définies à partir $\mathcal{P}$ et celles définies à partir de d . ■

7.2.1 Complétude des produits

La construction du produit ayant été définie au Chapitre 6, nous pouvons maintenant examiner son comportement vis-à-vis de la complétude.

Proposition 7.2.12. Soient $(X_i, \mathcal{P}_i)$, $i \in I$, une famille d'espaces localement convexes séparés complets et $\mathcal{F}$ un filtre sur le produit $\prod_{i \in I} X_i$.

1. Le filtre $\mathcal{F}$ converge vers $x \in \prod_{i \in I} X_i$ si et seulement si pour tout $i \in I$, le filtre image $\pi_i(\mathcal{F})$ converge vers $\pi_i(x)$ dans X_i .
2. Le filtre $\mathcal{F}$ est de Cauchy dans $\prod_{i \in I} X_i$ si et seulement si pour tout $i \in I$, le filtre image $\pi_i(\mathcal{F})$ est de Cauchy dans X_i .

En particulier, tout produit d'espaces localement convexes complets est complet.

Démonstration. La topologie produit est engendrée par les semi-normes obtenues à partir d'un nombre fini de coordonnées. Un filtre converge donc dans le produit si et seulement si chacune de ses images par les projections coordonnées converge. De même, la condition de Cauchy pour toute semi-norme du produit équivaut à la condition de Cauchy dans chaque coordonnée. Si tous les X_i sont complets, chaque filtre de Cauchy possède ainsi une limite coordonnée ; le point formé par ces limites est la limite du filtre dans le produit. ■

7.3 Espaces de Fréchet

Les espaces de Fréchet forment le cadre localement convexe où l'on conserve à la fois la métrisabilité et la complétude. Ils généralisent ainsi les espaces de Banach tout en couvrant des espaces de fonctions qui ne se décrivent pas naturellement par une norme unique.

Les espaces de Banach, introduits à la Définition 1.2.1, réunissent les trois propriétés qui ont joué un rôle essentiel dans le cadre de Banach : séparation, métrisabilité et complétude. Nous conservons maintenant ces trois propriétés, mais nous autorisons une famille dénombrable de semi-normes à la place d'une norme unique.

Motivation. Dans le cadre de Banach, la complétude se lit sur la distance associée à la norme. De façon analogue, un espace de Fréchet est un espace localement convexe complet dont la topologie peut être décrite par une distance invariante par translation ; le Théorème 5.4.10 construit précisément cette distance à partir d'une famille dénombrable de semi-normes.

Définition 7.3.1. Un *espace de Fréchet* est un espace séparé à semi-normes dénombrables complet.

Par le Théorème 7.2.9, un espace de Fréchet est un espace séparé à semi-normes dénombrables sq-complet.

Exemples 7.3.2.

- ▷ L'espace de suites ω est un espace de Fréchet.
- ▷ Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}$ et si $l \in \mathbb{N}$, l'espace $C^l(\Omega)$ est un espace de Fréchet.
- ▷ Plus généralement, $C^\infty(\Omega)$, muni des semi-normes

$$p_{n,m}(f) = \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K_n} |\partial^\alpha f(x)|$$

associées à une exhaustion compacte (K_n) de Ω , est un espace de Fréchet. En effet, une suite de Cauchy pour toutes ces semi-normes converge uniformément sur chaque compact, avec chacune de ses dérivées ; les limites obtenues sont compatibles et définissent une fonction de $C^\infty(\Omega)$.

- ▷ Pour tout compact $K \subset \Omega$, l'espace $\mathcal{D}^K(\Omega)$ introduit au Chapitre 6 est un sous-espace fermé de $C^\infty(\Omega)$; il est donc de Fréchet. Ainsi la représentation

$$\mathcal{D}(\Omega) = \varinjlim_n \mathcal{D}^{K_n}(\Omega)$$

du Chapitre 6 fournit un exemple fondamental de limite inductive d'espaces de Fréchet.

7.3.1 Critère des séries dans un espace à semi-normes dénombrables

Comme dans le cas des espaces de Banach, les séries donnent un critère pratique de complétude. Le résultat suivant sera utilisé plus loin dans l'étude de la stabilité des constructions précédentes.

Définition 7.3.3. Soient $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe et $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de X . La suite des sommes partielles $\left(\sum_{m=0}^M x_m\right)_{M \in \mathbb{N}}$ s'appelle la *série* associée à $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$. Si

elle converge dans $(X, \mathcal{P})$, on note

$$\sum_{m=0}^{+\infty} x_m$$

sa limite. On dit que la série est *absolument convergente* dans $(X, \mathcal{P})$ si pour tout $p \in \mathcal{P}$, on a

$$\sum_{m=0}^{+\infty} p(x_m) < +\infty.$$

Il est clair que toute série absolument convergente est de Cauchy : en effet, on a pour tout $p \in \mathcal{P}$

$$p\left(\sum_{m=r}^s x_m\right) \leq \sum_{m=r}^s p(x_m) \longrightarrow 0$$

si $r, s \rightarrow +\infty$. En particulier, dans un espace complet, toute série absolument convergente est convergente. Dans le cadre à semi-normes dénombrables, la réciproque fournit la caractérisation suivante de la complétude. Le cas d'une norme unique a déjà été établi au [Théorème 1.2.5](#).

Proposition 7.3.4. *Si $(X, \mathcal{P})$ est un espace séparé à semi-normes dénombrables et si toute série absolument convergente de $(X, \mathcal{P})$ est convergente, alors $(X, \mathcal{P})$ est complet.*

Démonstration. Soit $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(X, \mathcal{P})$. Supposons que $\mathcal{P}$ est donné par la suite croissante de semi-normes $(p_m)_{m \in \mathbb{N}}$. Par induction, nous pouvons en extraire une sous-suite $(x_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$p_k(x_{m_k} - x_m) \leq 2^{-k} \quad \forall m \geq m_k.$$

Remarquons que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} p_N(x_{m_1}) + \sum_{k=1}^{+\infty} p_N(x_{m_{k+1}} - x_{m_k}) &\leq p_N(x_{m_1}) + \sum_{k=1}^{N-1} p_N(x_{m_{k+1}} - x_{m_k}) + \sum_{k=N}^{+\infty} p_k(x_{m_{k+1}} - x_{m_k}) \\ &\leq p_N(x_{m_1}) + \sum_{k=1}^{N-1} p_N(x_{m_{k+1}} - x_{m_k}) + \sum_{k=N}^{+\infty} 2^{-k} < +\infty. \end{aligned}$$

On en tire que la série $x_{m_1} + \sum_{k=1}^M (x_{m_{k+1}} - x_{m_k})$ est absolument convergente et par hypothèse, elle converge donc. Ainsi, la sous-suite

$$x_{m_{M+1}} = x_{m_1} + \sum_{k=1}^M (x_{m_{k+1}} - x_{m_k})$$

converge vers un élément $x \in X$. On en déduit que la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers la même limite puisque pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $\varepsilon > 0$, on a

$$p_N(x_m - x) \leq p_N(x_m - x_{m_k}) + p_N(x_{m_k} - x) \leq \frac{1}{2^k} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

si k est suffisamment grand et si $m \geq m_k$. ■

Remarque 7.3.5. On vient de montrer que si une suite de Cauchy d'un espace localement convexe admet une sous-suite convergente, alors elle est convergente.

Dans le cas où la topologie est définie par une seule norme, ce critère est exactement le critère des séries du [Théorème 1.2.5](#). Il n'est donc pas réénoncé ici.

7.4 Stabilité des espaces de Fréchet

Nous revenons maintenant, dans le même ordre, sur les constructions du Chapitre 6 : sous-espaces, produits, quotients, limites projectives puis limites inductives. Pour chacune, la question est de savoir si l'ajout de la complétude et de la métrisabilité est stable. Les résultats correspondants pour les espaces de Banach ont déjà été établis au Chapitre 1.

Nous examinons à présent la stabilité des espaces de Fréchet par les constructions du Chapitre 6. Les résultats analogues pour les espaces de Banach ont déjà été traités au Chapitre 1 et sont seulement rappelés par des renvois.

Pour les sous-espaces, la Proposition 7.2.7 donne la version suivante. Son analogue normé a déjà été établi à la Proposition 1.2.6.

Proposition 7.4.1. *Tout sous-espace fermé d'un espace de Fréchet est un espace de Fréchet.*

De même, la Proposition 7.2.12 fournit le résultat suivant. Pour les produits finis d'espaces de Banach, on se reportera à la Proposition 1.2.7.

Proposition 7.4.2. *Tout produit dénombrable d'espaces de Fréchet est un espace de Fréchet.*

Corollaire 7.4.3. *Tout quotient d'un espace de Fréchet par un sous-espace fermé est un espace de Fréchet.*

Démonstration. Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace de Fréchet, où $\mathcal{P} = \{p_k : k \in \mathbb{N}\}$ est une suite croissante de semi-normes, et soit L un sous-espace fermé. Le quotient X/L est séparé par la Proposition 6.3.3 et sa topologie est définie par les semi-normes

$$p_{L,k}([x]) = \inf_{z \in L} p_k(x + z).$$

Il est donc métrisable.

Soit $([x_n])_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans X/L . On construit une sous-suite $([x_{n_k}])_{k \geq 1}$ telle que

$$p_{L,k}([x_{n_{k+1}}] - [x_{n_k}]) < 2^{-k} \quad (k \geq 1).$$

Pour chaque k , choisissons un représentant u_k de $[x_{n_{k+1}}] - [x_{n_k}]$ vérifiant

$$p_k(u_k) < 2^{1-k}.$$

Fixons un représentant y_1 de $[x_{n_1}]$ et posons récursivement $y_{k+1} = y_k + u_k$. On a alors $[y_k] = [x_{n_k}]$ pour tout k .

La suite (y_k) est de Cauchy dans X . En effet, si $m > \ell \geq N$,

$$p_N(y_m - y_\ell) \leq \sum_{k=\ell}^{m-1} p_N(u_k) \leq \sum_{k=\ell}^{m-1} p_k(u_k) < \sum_{k=\ell}^{+\infty} 2^{1-k},$$

et le dernier terme tend vers 0 lorsque ℓ tend vers l'infini. Comme X est complet, il existe $y \in X$ tel que $y_k \rightarrow y$. Par continuité de la projection canonique, la sous-suite $([x_{n_k}]) = ([y_k])$ converge vers $[y]$ dans X/L . Une suite de Cauchy qui possède une sous-suite convergente converge vers la même limite. Le quotient est donc complet et, par conséquent, de Fréchet. ■

La version Banach de ce résultat est le [Théorème 1.2.10](#). La preuve ci-dessus remplace la norme quotient par la famille dénombrable des semi-normes quotient.

Le résultat suivant décrit la stabilité de la classe des espaces de Fréchet par limites projectives dénombrables.

Proposition 7.4.4. *Toute limite projective dénombrable d'espaces de Fréchet, réalisée comme dans la section précédente, est un espace de Fréchet. En particulier, toute limite projective d'espaces de Banach est un espace de Fréchet.*

Démonstration. Une telle limite projective s'identifie à un sous-espace fermé du produit dénombrable des espaces considérés, défini par les relations de compatibilité. Le produit dénombrable d'espaces de Fréchet est métrisable et complet ; son sous-espace fermé est donc encore métrisable et complet. Il est localement convexe par construction, donc de Fréchet. Le cas des espaces de Banach est un cas particulier. ■

Intéressons-nous à présent au cas des limites inductives. Comme on perd en général le caractère dénombrable des semi-normes, une limite inductive d'espaces de Banach ou de Fréchet n'est pas nécessairement un espace de Fréchet. On introduit alors les définitions suivantes.

Définition 7.4.5. Un *espace* (LB) est une limite inductive d'espaces de Banach. Un *espace* (LF) est une limite inductive d'espaces de Fréchet.

Si la limite inductive d'espaces de Banach ou de Fréchet X_n , $n \in \mathbb{N}$, est stricte, alors on a automatiquement que X_n est fermé dans X_{n+1} comme le montre le résultat suivant.

Proposition 7.4.6. *Toute limite inductive stricte d'espaces de Fréchet est hyperstricte.*

Démonstration. Supposons que la limite inductive des X_n , $n \in \mathbb{N}$, est stricte. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les semi-normes induites par X_{n+1} sur X_n sont équivalentes aux semi-normes de X_n . Par conséquent, X_n est un sous-espace complet de X_{n+1} et par la Proposition 7.2.5, il est donc fermé dans X_{n+1} . ■

Ainsi, tout espace (LB) ou (LF) strict est hyperstrict. Le passage à la limite inductive stricte conserve également la complétude. Comme dans la version antérieure du cours, nous admettons le résultat suivant.

Proposition 7.4.7. *Tout espace (LB) ou (LF) strict est complet.*

L'idée du résultat peut être comprise au niveau des suites de Cauchy. Elle repose sur le lemme suivant, que nous admettons également.

Lemme 7.4.8. *Soit X la limite inductive hyperstricte d'espaces X_n , $n \in \mathbb{N}$. Une suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de X converge dans X si et seulement s'il existe n_0 tel que tous les x_m appartiennent à X_{n_0} et que la suite converge dans X_{n_0} .*

Esquissons l'argument séquentiel donné dans la version antérieure. Soit $X = \varinjlim_n X_n$ une limite inductive stricte d'espaces de Fréchet et soit (x_m) une suite de Cauchy de X . Pour toute semi-norme p de X , il existe N tel que $p(x_r - x_s) < 1$ pour tous $r, s \geq N$. Par conséquent,

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} p(x_m) < +\infty.$$

La suite (x_m/m) converge donc vers 0 dans X . Par le Lemme 7.4.8, il existe n_0 tel que (x_m/m) , et donc (x_m) , soit contenue dans X_{n_0} . La Proposition 7.4.6 montre que la topologie de X_{n_0} est la topologie induite par X ; la suite est donc de Cauchy dans X_{n_0} et y converge puisque cet espace est complet.

Remarque 7.4.9. Cet argument explique la complétude séquentielle. La proposition précédente porte sur la complétude au sens des filtres; sa démonstration complète est, comme dans le manuscrit initial, admise ici.

Pourquoi retrouve-t-on les grands théorèmes de Banach ?

La complétude ne sert pas seulement à garantir l'existence de limites. Par le théorème de Baire, elle transforme souvent une information ponctuelle ou algébrique en une propriété uniforme ou topologique beaucoup plus forte. C'est le mécanisme commun derrière les trois résultats que nous

retrouvons maintenant : Banach–Steinhaus transforme un contrôle ponctuel en contrôle uniforme, le théorème de l’opérateur ouvert transforme la surjectivité en une propriété topologique, et le théorème du graphe fermé permet de déduire la continuité d’une information portant seulement sur le graphe.

Dans le cadre de Fréchet, l’argument de Baire subsiste puisque ces espaces sont métrisables et complets. Les énoncés doivent toutefois être reformulés avec des semi-normes et l’équicontinuité.

7.5 Le théorème de Banach–Steinhaus dans les espaces de Fréchet

Dans le cadre de Banach, le théorème de Banach–Steinhaus a été obtenu à partir du théorème de Baire. Nous revenons ici sur ce résultat pour comprendre ce qui subsiste lorsqu’une norme unique est remplacée par la structure d’un espace de Fréchet. Il faut d’abord introduire la notion qui remplacera la borne uniforme sur les normes d’opérateurs.

Définition 7.5.1. Soient $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ des espaces localement convexes. Une famille $(T_i)_{i \in I}$ d’opérateurs de $L(X, Y)$ est *équicontinue* si pour tout $q \in \mathcal{Q}$ il existe $p \in \mathcal{P}$ et $C > 0$ tels que

$$\sup_{i \in I} q \circ T_i \leq Cp.$$

Ce qui change par rapport au cas de Banach. Le théorème démontré au [Chapitre 1](#) contrôle une famille d’opérateurs par une borne uniforme sur leurs normes. Dans un espace localement convexe, il n’y a plus nécessairement de norme d’opérateur unique. La notion d’équicontinuité que nous venons de définir contrôle simultanément la famille pour chaque semi-norme de l’espace d’arrivée. L’argument de Baire, lui, reste le même.

Comme dans la preuve du [Théorème 1.7.1](#), l’outil essentiel est le théorème de Baire. Un espace de Fréchet est métrisable et complet par définition ; il est donc un espace de Baire. Nous pouvons dès lors reprendre la même stratégie, en travaillant cette fois avec une semi-norme fixée de l’espace d’arrivée.

Théorème 7.5.2 (Banach–Steinhaus). Soient $(X, \mathcal{P})$ un espace de Fréchet, $(Y, \mathcal{Q})$ un espace localement convexe et $(T_i)_{i \in I}$ une famille d’opérateurs de $L(X, Y)$. Supposons que, pour tout $q \in \mathcal{Q}$ et tout $x \in X$,

$$\sup_{i \in I} q(T_i(x)) < +\infty.$$

Alors la famille $(T_i)_{i \in I}$ est équicontinue.

Démonstration. Fixons $q \in \mathcal{Q}$. Pour tout entier $n \geq 1$, posons

$$F_n = \left\{ x \in X : \sup_{i \in I} q(T_i(x)) \leq n \right\}.$$

Chaque F_n est fermé, car il est l'intersection des fermés $\{x : q(T_i(x)) \leq n\}$, et l'hypothèse donne $X = \bigcup_{n \geq 1} F_n$. Comme X est un espace de Baire, il existe $n \geq 1$ tel que F_n soit d'intérieur non vide. On peut donc trouver $x_0 \in X$, $p \in \mathcal{P}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$b_p(x_0, \varepsilon) \subseteq F_n.$$

En particulier, $x_0 \in F_n$. Si $u \in b_p(0, \varepsilon)$, alors $x_0 + u \in F_n$ et, pour tout $i \in I$,

$$q(T_i(u)) \leq q(T_i(x_0 + u)) + q(T_i(x_0)) \leq 2n.$$

Soit maintenant $x \in X$. Si $p(x) > 0$, le vecteur $u = \varepsilon x / (2p(x))$ appartient à $b_p(0, \varepsilon)$; ainsi

$$q(T_i(x)) \leq \frac{4n}{\varepsilon} p(x) \quad (i \in I).$$

Si $p(x) = 0$, alors $tx \in b_p(0, \varepsilon)$ pour tout $t > 0$. On a donc $tq(T_i(x)) \leq 2n$ pour tout $t > 0$, d'où $q(T_i(x)) = 0$. Comme q était arbitraire, la famille $(T_i)_{i \in I}$ est équicontinue. ■

Les conséquences suivantes sont les analogues directs de résultats déjà vus dans le cadre normé. Elles sont conservées ici parce qu'elles montrent précisément comment la notion d'équicontinuité remplace la borne uniforme sur les normes d'opérateurs.

Corollaire 7.5.3. *Soient $(X, \mathcal{P})$ un espace de Fréchet, $(Y, \mathcal{Q})$ un espace localement convexe séparé et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs de $L(X, Y)$. Supposons que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est simplement convergente, c'est-à-dire que pour tout $x \in X$, la suite $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans Y vers un élément que l'on note $T(x)$. Alors l'application*

$$T : X \rightarrow Y : x \mapsto T(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x)$$

est un opérateur linéaire continu.

Démonstration. Il est clair que l'opérateur T est linéaire. De plus, comme la suite $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, on a

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} q(T_n(x)) < +\infty$$

pour tout $q \in \mathcal{Q}$. Le Théorème 7.5.2 implique qu'il existe $p \in \mathcal{P}$ et $C > 0$ tels que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} q \circ T_n \leq Cp.$$

En passant à la limite, il vient $q \circ T \leq Cp$ et T est donc continu par la Proposition 5.5.1. ■

Corollaire 7.5.4. Soient $(X, \mathcal{P})$ un espace de Fréchet, $(Y, \mathcal{T})$ un espace vectoriel métrisable, $(Z, \mathcal{Q})$ un espace localement convexe et $B : X \times Y \rightarrow Z$ une application bilinéaire. Supposons que les applications

$$B_x : Y \rightarrow Z : y \mapsto B(x, y) \quad \text{et} \quad B^y : X \rightarrow Z : x \mapsto B(x, y)$$

sont continues pour tout $x \in X$ et tout $y \in Y$. Alors B est continu.

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de X qui converge vers x_0 et soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Y qui converge vers y_0 . Comme l'espace $X \times Y$ est métrisable, il suffit de montrer que $B(x_n, y_n)$ converge vers $B(x_0, y_0)$. Soient $q \in \mathcal{Q}$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in X$, comme l'application B_x est continue, on sait que la suite $(B_x(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $B_x(y_0)$. On en tire que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} q(B(x, y_n)) < +\infty$$

pour tout $x \in X$. Par le Théorème 7.5.2, la famille $(B^{y_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est équicontinue et il existe $p \in \mathcal{P}$ et $C > 0$ tels que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} q \circ B^{y_n} \leq Cp.$$

Puisque $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x_0 et $(B_{x_0}(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $B_{x_0}(y_0)$ par continuité, on trouve $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$p(x_n - x_0) < \frac{\varepsilon}{2C} \quad \text{et} \quad q(B_{x_0}(y_n - y_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout $n \geq N$. Il vient alors

$$\begin{aligned} q(B(x_n, y_n) - B(x_0, y_0)) &\leq q(B(x_n - x_0, y_n)) + q(B(x_0, y_n - y_0)) \\ &\leq Cp(x_n - x_0) + q(B(x_0, y_n - y_0)) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

pour tout $n \geq N$, ce qui suffit. ■

L'application à la divergence ponctuelle d'une série de Fourier ne dépend pas de cette généralisation et a donc été laissée dans le cadre de Banach au Corollaire 1.7.4.

7.6 Les théorèmes de l'opérateur ouvert et du graphe fermé dans les espaces de Fréchet

Les deux autres grands théorèmes du cadre de Banach se prolongent eux aussi aux espaces de Fréchet. Les énoncés restent très proches de ceux du premier chapitre, mais leur formulation met en évidence que la complétude et la métrisabilité, davantage que l'existence d'une norme particulière, sont les hypothèses essentielles.

Les deux derniers résultats fondamentaux du chapitre sont les versions de Fréchet de deux théorèmes déjà démontrés dans les espaces de Banach. Nous ne les réintroduisons donc pas comme des phénomènes nouveaux : nous cherchons à identifier le mécanisme qui subsiste lorsque l'on ne dispose plus d'une norme unique.

Du cas de Banach au cas de Fréchet. Le [théorème de l'opérateur ouvert](#) et le [théorème du graphe fermé](#) restent vrais pour les espaces de Fréchet. Dans la preuve de l'opérateur ouvert, les boules normiques sont remplacées par les boules d'une distance invariante par translation compatible avec la topologie. Pour le graphe fermé, la structure de la preuve ne change pratiquement pas : on utilise encore que le graphe est un sous-espace fermé d'un produit complet, puis le théorème de l'inverse continu.

Théorème 7.6.1 (Opérateur ouvert). *Soient $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ deux espaces de Fréchet et $T \in L(X, Y)$. Si T est surjectif, alors T est ouvert.*

La preuve de ce résultat est basée sur un lemme que nous énonçons ci-dessous.

Lemme 7.6.2. *Soient X un espace de Fréchet, Y un espace séparé à semi-normes dénombrables et $T \in L(X, Y)$. Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que*

$$b_Y(0, \delta_\varepsilon) \subseteq \overline{T(b_X(0, \varepsilon))}$$

où les boules sont définies à partir des distances d_X et d_Y sur X et Y respectivement données par le Théorème 5.4.10. Alors

$$b_Y(0, \delta_\varepsilon) \subseteq T(b_X(0, \varepsilon'))$$

pour tout $\varepsilon' > \varepsilon$.

Démonstration. Fixons $\varepsilon' > \varepsilon > 0$. Choisissons une suite $(\varepsilon_k)_{k \geq 0}$ de réels strictement positifs telle que $\varepsilon_0 = \varepsilon$ et $\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k < \varepsilon'$. Posons $\delta_0 = \delta_\varepsilon$. Pour chaque $k \geq 1$, choisissons d'abord $\tilde{\delta}_k > 0$ tel que

$$b_Y(0, \tilde{\delta}_k) \subseteq \overline{T(b_X(0, \varepsilon_k))},$$

puis posons $\delta_k = \min(\tilde{\delta}_k, 2^{-k})$. Ainsi $\delta_k \rightarrow 0$, et l'inclusion précédente reste vraie avec δ_k .

Soit $y \in b_Y(0, \delta_0)$. Construisons par récurrence des vecteurs $x_k \in b_X(0, \varepsilon_{k-1})$, $k \geq 1$, tels que

$$d_Y\left(y - \sum_{j=1}^k T(x_j), 0\right) < \delta_k.$$

Supposons $x_1, \dots, x_{k-1}$ construits. Le résidu $r_{k-1} = y - \sum_{j=1}^{k-1} T(x_j)$ appartient à $b_Y(0, \delta_{k-1})$, donc à $\overline{T(b_X(0, \varepsilon_{k-1}))}$. On peut alors choisir $x_k \in b_X(0, \varepsilon_{k-1})$ de sorte que $d_Y(r_{k-1} - T(x_k), 0) < \delta_k$.

La série $\sum_{k \geq 1} x_k$ est de Cauchy, car

$$d_X \left(\sum_{k=M}^N x_k, 0 \right) \leq \sum_{k=M}^N d_X(x_k, 0) < \sum_{k=M}^N \varepsilon_{k-1}.$$

La complétude de X fournit donc un $x \in X$ tel que $\sum_{k \geq 1} x_k = x$. De plus, $d_X(x, 0) \leq \sum_{k \geq 0} \varepsilon_k < \varepsilon'$. Comme les résidus tendent vers 0 et que T est continue, on obtient $T(x) = y$. Ainsi $b_Y(0, \delta_0) \subseteq T(b_X(0, \varepsilon'))$. ■

Démonstration du Théorème 7.6.1. Montrons d'abord que, pour tout $\eta > 0$, il existe $r_\eta > 0$ tel que

$$b_Y(0, r_\eta) \subseteq \overline{T(b_X(0, \eta))}.$$

Fixons donc $\eta > 0$. Comme $b_X(0, \eta/2)$ est absorbante et que T est surjectif,

$$Y = \bigcup_{n \geq 1} n T(b_X(0, \eta/2)) \subseteq \bigcup_{n \geq 1} n \overline{T(b_X(0, \eta/2))}.$$

L'espace de Fréchet Y est un espace de Baire. L'un des fermés de la dernière union possède donc un intérieur non vide. Comme la multiplication par un scalaire non nul est un homéomorphisme, $\overline{T(b_X(0, \eta/2))}$ possède lui-même un intérieur non vide. Il existe ainsi $y \in Y$ et $r_\eta > 0$ tels que

$$b_Y(y, r_\eta) \subseteq \overline{T(b_X(0, \eta/2))}.$$

Puisque y appartient au même fermé et que les distances choisies sont invariantes par translation,

$$\begin{aligned} b_Y(0, r_\eta) &\subseteq \overline{T(b_X(0, \eta/2))} - \overline{T(b_X(0, \eta/2))} \\ &\subseteq \overline{T(b_X(0, \eta))}. \end{aligned}$$

La première étape est donc établie pour tout $\eta > 0$.

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$. Le Lemme 7.6.2, appliqué avec $\eta = \varepsilon/2$ et $\varepsilon' = \varepsilon$, fournit

$$b_Y(0, r_{\varepsilon/2}) \subseteq T(b_X(0, \varepsilon)).$$

L'image par T de tout voisinage de 0 contient donc un voisinage de 0 dans Y . La Remarque 5.5.8 montre que T est ouverte. ■

Comme dans le cadre de Banach, le premier corollaire est le théorème de l'inverse continu. Nous n'en redonnons pas la preuve : elle est exactement la même que celle du Corollaire 1.8.4.

Corollaire 7.6.3. *Toute bijection linéaire continue entre espaces de Fréchet est un homéomorphisme.*

Corollaire 7.6.4. *Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux systèmes dénombrables de semi-normes sur X pour lesquels $(X, \mathcal{P})$ et $(X, \mathcal{Q})$ sont des espaces de Fréchet. Si $\mathcal{Q} \preceq \mathcal{P}$, alors $\mathcal{P} \approx \mathcal{Q}$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Théorème 7.6.1 à l'application surjective et continue $\text{id} : (X, \mathcal{P}) \rightarrow (X, \mathcal{Q})$. ■

Les conséquences propres aux espaces de Banach — critère d'image fermée, non-surjectivité de la transformée de Fourier, critère de surjectivité et universalité de ℓ^1 — ont été regroupées à la Section 1.8. Elles ne sont pas répétées dans ce chapitre consacré aux généralisations de Fréchet.

Passons au théorème du graphe fermé. Le graphe d'une application a déjà été défini à la Définition 1.9.1 ; nous conservons la notation $\mathcal{G}(T)$. La proposition suivante est purement topologique et ne dépend donc ni de la structure de Banach ni de celle de Fréchet.

Proposition 7.6.5. *Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques et $T : X \rightarrow Y$ une application. Si T est continu et si $(Y, \mathcal{T}')$ est séparé, alors $\mathcal{G}(T)$ est fermé.*

Démonstration. Si $(x, y) \notin \mathcal{G}(T)$, alors $y \neq T(x)$ et comme $(Y, \mathcal{T}')$ est séparé, il existe des ouverts disjoints $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{T}'$ tels que $T(x) \in \Omega_1$ et $y \in \Omega_2$. Par continuité de T , $T^{-1}(\Omega_1)$ est un ouvert de $(X, \mathcal{T})$ qui contient x . On obtient donc que $T^{-1}(\Omega_1) \times \Omega_2$ est un ouvert de $X \times Y$ qui contient (x, y) et tel que $(T^{-1}(\Omega_1) \times \Omega_2) \cap \mathcal{G}(T) = \emptyset$. ■

La réciproque est fausse pour une application quelconque. Pour un opérateur linéaire entre espaces de Fréchet, elle redevient vraie ; c'est exactement la généralisation du résultat démontré au Chapitre 1.

Théorème 7.6.6 (Graphe fermé). *Soient $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ deux espaces de Fréchet et $T : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire. Si $\mathcal{G}(T)$ est fermé, alors T est continu.*

Démonstration. Par la Proposition 7.2.12, on sait que $X \times Y$ muni de la famille de semi-normes $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ est un espace de Fréchet. Comme $\mathcal{G}(T)$ est un sous-espace fermé de $X \times Y$, il s'agit également d'un espace de Fréchet. Considérons la projection $\pi_X : X \times Y \rightarrow X : (x, y) \mapsto x$. Par définition de la topologie produit, il s'agit d'une application continue. Sa restriction $\pi_X|_{\mathcal{G}(T)}$ à $\mathcal{G}(T)$ est injective, et donne donc une bijection continue de $\mathcal{G}(T)$ dans X . Par le Corollaire 7.6.3, $(\pi_X|_{\mathcal{G}(T)})^{-1}$ est continu. Pour conclure, il suffit de remarquer que $T = \pi_Y \circ i \circ (\pi_X|_{\mathcal{G}(T)})^{-1}$ où

$i : \mathcal{G}(T) \rightarrow X \times Y$ est l'inclusion et $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y : (x, y) \mapsto y$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(T) & \xrightarrow{i} & X \times Y \\ (\pi_X|_{\mathcal{G}(T)})^{-1} \uparrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi_Y \\ X & \xrightarrow{T} & Y \end{array}$$

■

Remarque 7.6.7. Puisqu'on travaille avec des espaces métrisables, afin de vérifier que $\mathcal{G}(T)$ est fermé, il suffit de montrer que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x dans X et $(T(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers y dans Y , alors $T(x) = y$.

L'application du théorème du graphe fermé aux opérateurs sur les espaces de Hilbert, connue sous le nom de théorèmes de Hellinger–Toeplitz, a été présentée au [Corollaire 3.6.9](#) dans le cadre de Banach. Le théorème de Fréchet montre que le mécanisme de la preuve est plus général que ce seul exemple.

7.7 Sommes directes topologiques

La notion de somme directe topologique complète la décomposition algébrique $X = Y \oplus Z$ en demandant que les projections associées soient continues. Dans les espaces de Fréchet, le théorème de l'opérateur ouvert fournit un critère particulièrement simple pour obtenir cette propriété.

Soient Y et Z deux sous-espace d'un espace vectoriel X tels que $Y \cap Z = \{0\}$. Si $Y + Z = X$, on rappelle que X est la somme directe de Y et Z , ce que l'on note $X = Y \oplus Z$. On dit également que Y et Z sont des sous-espaces vectoriels *supplémentaires*. Dans ce cas, pour tout $x \in X$, il existe une décomposition unique de la forme $x = y + z$ avec $y \in Y$ et $z \in Z$. On peut donc considérer les projecteurs

$$P_Y : X \rightarrow Y \quad \text{et} \quad P_Z : X \rightarrow Z$$

telles que si $x = y + z$, alors $P_Y(x) = y$ et $P_Z(x) = z$.

Définition 7.7.1. Soient Y et Z deux sous-espace d'un espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$. Si $X = Y \oplus Z$, alors pour tout $p \in \mathcal{P}$,

$$q_p = p \circ P_Y + p \circ P_Z$$

est une semi-norme sur X telle que $p \preceq q_p$. Dès lors,

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{P}} := \{q_p : p \in \mathcal{P}\}$$

est un système de semi-normes sur X telles que $\mathcal{P} \preceq \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}$. L'application

$$\text{id} : (X, \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}) \rightarrow (X, \mathcal{P})$$

est donc une bijection linéaire continue. S'il s'agit d'un isomorphisme, c'est-à-dire si $\mathcal{Q}_{\mathcal{P}} \preceq \mathcal{P}$, on dit que $(X, \mathcal{P})$ est *somme directe topologique* de Y et Z . On dit également que Z est un *complément topologique* de Y dans $(X, \mathcal{P})$.

Cette définition se traduit directement en termes de continuité des opérateurs de projection.

Proposition 7.7.2. *Soient Y et Z deux sous-espaces d'un espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$. Si $X = Y \oplus Z$, alors la somme directe est topologique si et seulement si les projecteurs P_Y et P_Z sont continus.*

Démonstration. Supposons qu'il s'agit d'une somme directe topologique. Alors la topologie de X est donnée par le système $\mathcal{Q}_{\mathcal{P}}$. Si $p \in \mathcal{P}$, on remarque que pour tout $x \in X$

$$p(P_Y(x)) \leq p(P_Y(x)) + p(P_Z(x)) = q(x)$$

ce qui suffit donc.

Réciproquement, si les projecteurs sont continus, pour tout $p_1 \in \mathcal{P}$, il existe $p_2 \in \mathcal{P}$ et une constante $C > 0$ tels que

$$p_1(P_Y(x)) \leq Cp_2(x) \quad \text{et} \quad p_1(P_Z(x)) \leq Cp_2(x)$$

pour tout $x \in X$. Il s'ensuit que

$$q_{p_1}(x) = p_1(P_Y(x)) + p_1(P_Z(x)) \leq 2Cp_2(x)$$

pour tout $x \in X$, et donc $\mathcal{Q}_{\mathcal{P}} \preceq \mathcal{P}$. ■

Corollaire 7.7.3. *Si P est un projecteur linéaire continu de l'espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$, alors X est la somme directe topologique de $\text{im } P$ et $\text{ker } P$.*

Si Y est un sous-espace vectoriel de $(X, \mathcal{P})$ qui admet un complément topologique Z , alors c'est le noyau d'un projecteur continu, à savoir P_Z . On en tire que Y est nécessairement fermé. Néanmoins, il existe des sous-espaces vectoriels fermés qui n'admettent pas de complément topologiques. Par exemple, on peut montrer que l'espace c_0 n'admet pas de complément topologique dans ℓ^∞ .

Le Théorème de Hahn–Banach nous permet d'obtenir l'existence de compléments topologiques lorsque l'on travaille avec des sous-espaces vectoriels de dimension finie.

Corollaire 7.7.4. *Si Y est un sous-espace de dimension finie de l'espace localement convexe séparé $(X, \mathcal{P})$, alors Y admet un complément topologique dans X .*

Démonstration. Soit $\{y_1, \dots, y_n\}$ une base de Y . Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on définit la forme linéaire

$$u_j : Y \rightarrow \mathbb{K} : \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k \mapsto \lambda_j.$$

Alors, par le Corollaire 5.5.5, u_j est continu sur Y . Soit $\widetilde{u}_j$ son prolongement linéaire continu à X donné par le Théorème 3.2.2 de Hahn-Banach. L'application

$$P : X \rightarrow X : x \mapsto \sum_{j=1}^n \widetilde{u}_j(x) y_j$$

est un projecteur linéaire continu sur X d'image égale à Y . Cela suffit par le Corollaire 7.7.3. ■

Lorsque l'on travaille avec des espaces de Fréchet, toute somme directe entre espaces fermés est automatiquement également une somme directe topologique.

Corollaire 7.7.5. *Si X est un espace de Fréchet et si Y et Z sont deux sous-espaces fermés de X tels que $X = Y \oplus Z$, alors la somme directe est topologique.*

Démonstration. Comme Y et Z sont des sous-espaces fermés de X , ce sont également des espaces de Fréchet. Ainsi, $Y \times Z$ est également un espace de Fréchet. Considérons l'application

$$T : Y \times Z \rightarrow X : (y, z) \mapsto y + z.$$

L'application T est clairement une bijection continue puisque pour toute semi-norme p de X , on a $p(T((y, z))) \leq p(y) + p(z)$. Comme T est surjectif, le Théorème 7.6.1 de l'opérateur ouvert implique que $T^{-1} : X \rightarrow Y \times Z$ est continue. La définition de la topologie produit implique alors que les projections P_Y et P_Z sont également continues. ■

7.8 Exercices

Exercice 7.8.1. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application et soit $\mathcal{F}$ un filtre sur X . Montrer que le filtre image de $\mathcal{F}$ par f est le filtre engendré par $\{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$.

Exercice 7.8.2. 1. Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur un même espace vectoriel X qui définissent la même topologie. Montrer qu'elles définissent les mêmes suites de Cauchy.

2. Soit $X =]0, 1]$. Sur X , on considère la distance euclidienne d_1 et la distance d_2 définie par

$$d_2(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|.$$

- (a) Montrer que (X, d_1) n'est pas complet.
- (b) Montrer que d_2 définit bien une distance sur X et que l'espace (X, d_2) est complet.
- (c) Montrer que les topologies induites sur X par d_1 et d_2 sont équivalentes.

Exercice 7.8.3. Montrer que l'image d'une suite de Cauchy par une application continue n'est pas nécessairement une suite de Cauchy.

Exercice 7.8.4. Démontrer que les espaces de l'Exemple ?? sont des espaces de Fréchet.

Les exercices rassemblent ici les constructions d'espaces localement convexes et les applications des grands théorèmes dans le cadre de Fréchet. Comme dans le reste du cours, ils sont présentés sans cadre graphique.

Les exercices qui suivent permettent de mettre en pratique les notions de cette section du cours et de vérifier leur articulation avec les résultats précédents.

Exercice 7.8.5. Montrer que

1. tout produit fini d'espaces normés est normé,
2. tout produit dénombrable d'espaces à semi-normes dénombrables est à semi-normes dénombrables.

Exercice 7.8.6. Soit $(X_n, \mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces localement convexes. Montrer que les suites du produit $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ n'ayant qu'un nombre fini de composantes non-nulles forment un sous-ensemble dense du produit.

Exercice 7.8.7. Soit $X_i, i \in I$, une famille d'espaces vectoriels. L'ensemble

$$\left\{ (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i : \#\{i \in I : x_i \neq 0\} < +\infty \right\}$$

est un sous-espace vectoriel du produit, appelé *somme directe* des $X_i, i \in I$, et noté

$$\bigoplus_{i \in I} X_i.$$

Soit $(X_i, \mathcal{P}_i), i \in I$, une famille d'espaces localement convexes. On considère

$$\mathcal{P} = \left\{ \sum_{i \in I} c_i p_i \circ \pi_i : c_i \geq 0, p_i \in \mathcal{P}_i \right\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{P}$ est un ensemble filtrant de semi-normes sur $X = \bigoplus_{i \in I} X_i$. L'espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$ est appelé la *somme directe* (localement convexe) des espaces $(X_i, \mathcal{P}_i), i \in I$.
2. Montrer que cette topologie rend les injections canoniques

$$s_j : X_j \rightarrow \bigoplus_{i \in I} X_i : x \mapsto (\delta_{ij}x)_{i \in I}$$

continues.

3. Montrer que si $\mathcal{Q}$ est un ensemble filtrant de semi-normes sur $\bigoplus_{i \in I} X_i$ qui rend les injections canoniques continues, alors $\mathcal{Q} \preceq \mathcal{P}$.
4. Montrer que l'injection canonique

$$I : \bigoplus_{i \in I} X_i \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$$

est continue.

Exercice 7.8.8. Soit $T : X \rightarrow Y$ une application linéaire entre espaces vectoriels. Alors $\ker(T)$ est un sous-espace vectoriel de X et on a la factorisation

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \pi_{\ker(T)} \downarrow & \circlearrowleft & \uparrow i \\ X/\ker(T) & \xrightarrow{T_0} & \text{im}(T) \end{array}$$

où T_0 est un isomorphisme d'espaces vectoriels. C'est le théorème d'isomorphie. On va à présent considérer des espaces localement convexes $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ et s'intéresser à la continuité de T_0 et T_0^{-1} .

1. Montrer que T_0 est continu si et seulement si T est continu.
2. Montrer que T_0^{-1} est continu si et seulement si T est relativement ouvert.

Exercice 7.8.9. Soient $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ deux espaces localement convexes. Montrer qu'une famille $(T_i)_{i \in I}$ d'opérateurs de $L(X, Y)$ est équicontinue si et seulement si pour tout voisinage W de 0 dans Y , il existe un voisinage V de 0 dans X tel que $V \subseteq T_i^{-1}(W)$ pour tout $i \in I$.

8 Bornitude, précompacité et compacité

Nous généralisons maintenant aux espaces localement convexes les notions de bornitude et de précompacité introduites au Chapitre 2. Il ne s'agit pas de recommencer la théorie du cas normé : l'objectif est d'identifier précisément ce qui doit être reformulé lorsque la topologie n'est plus gouvernée par une norme unique. La norme est remplacée par une famille de semi-normes, ou de manière équivalente par les voisinages de l'origine.

La compacité elle-même est une notion purement topologique et ne change pas. En revanche, bornitude et précompacité doivent être exprimées à l'aide de l'ensemble des semi-normes qui décrivent la topologie. Nous signalerons les résultats du cadre normé lorsqu'ils se retrouvent comme cas particuliers. Le théorème d'Arzelà–Ascoli a déjà été établi au Chapitre 2 ; nous ne le répétons pas ici. La dernière section étend la notion d'opérateur compact au cadre localement convexe, tandis que les phénomènes de compacité liés au dual seront traités dans le chapitre suivant.

8.1 Parties bornées

Dans un espace normé, la bornitude se mesure à l'aide d'une seule norme. Dans un espace localement convexe, elle doit être contrôlée simultanément pour toutes les semi-normes qui décrivent la topologie.

Définition 8.1.1. Une partie B de l'espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$ est *bornée* si

$$\sup_{x \in B} p(x) < +\infty \quad \forall p \in \mathcal{P}.$$

Lorsque $\mathcal{P} = \{\|\cdot\|\}$, cette définition devient

$$\sup_{x \in B} \|x\| < +\infty,$$

c'est-à-dire la notion usuelle de partie bornée associée à la [norme d'un espace normé](#). Une famille de semi-normes impose simplement cette condition pour chaque semi-norme.

Exemple 8.1.2. Considérons $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit, construite au Chapitre 6.

Avec les semi-normes

$$p_m(x) = \max_{0 \leq k \leq m} |x_k|,$$

la suite $x^{(n)} = ne_n$ converge vers 0 : pour m fixé, on a $p_m(x^{(n)}) = 0$ dès que $n > m$. En particulier, l'ensemble $\{ne_n : n \geq 0\}$ est borné dans ω . Cet exemple, impossible dans un espace normé avec $\|ne_n\| = n$, montre pourquoi la bornitude doit être reformulée dans le cadre localement convexe.

Exemple 8.1.3. Dans $C^\infty(\Omega)$ muni des semi-normes $p_{n,m}$ du Chapitre 6, une partie B est bornée si et seulement si, pour tout compact K_n de l'exhaustion et tout ordre m , il existe une constante $C_{n,m}$ telle que

$$\max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K_n} |\partial^\alpha f(x)| \leq C_{n,m} \quad \text{pour tout } f \in B.$$

Ainsi, être borné signifie ici contrôler uniformément tous les ordres de dérivation, mais seulement compact par compact.

En d'autres termes, une partie B est bornée si et seulement si pour tout $p \in \mathcal{P}$, il existe $C > 0$ tel que $B \subseteq b_p(C)$. On dit que B est absorbée par les semi-boules centrées en 0. Il est clair que deux systèmes de semi-normes équivalents définissent les mêmes ensembles bornés.

Exemples 8.1.4. On vérifie immédiatement les assertions suivantes.

- ▷ Toute partie finie de X est bornée.
- ▷ Toute union finie d'ensembles bornés est bornée.
- ▷ Tout sous-ensemble d'un ensemble borné est borné.
- ▷ Toute combinaison linéaire de bornés est bornée.
- ▷ Toute suite de Cauchy définit un ensemble borné.
- ▷ L'adhérence d'un ensemble borné est bornée.
- ▷ L'enveloppe absolument convexe d'un ensemble borné est bornée.
- ▷ L'image linéaire continue d'un ensemble borné est bornée.

Proposition 8.1.5. Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe et soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ qui tend vers 0. Une partie B de X est bornée si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de B , la suite $(\lambda_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 dans X .

Démonstration. Supposons que B est bornée. Fixons $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de B , $p \in \mathcal{P}$ et $\varepsilon > 0$.

Comme B est bornée, il existe $C > 0$ tel que $B \subseteq b_p(C)$. Ainsi

$$p(\lambda_n x_n) \leq |\lambda_n| C < \varepsilon$$

si n est suffisamment grand.

Réciproquement, supposons que B n'est pas bornée. Alors il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver $x_n \in B$ tel que $p(x_n) \geq \frac{1}{|\lambda_n|}$. Alors la suite $(\lambda_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 dans X puisque $p(\lambda_n x_n) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

Proposition 8.1.6. *Soient $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe et $p \in \mathcal{P}$. Si une semi-boule associée à p est bornée dans X , alors $\mathcal{P} \approx \{p\}$. Si de plus $(X, \mathcal{P})$ est séparé, alors p est une norme.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une semi-boule $b_p(x, \varepsilon)$ bornée. Par translation et dilatation, il est clair que la semi-boule $b_p(1)$ est également bornée. On en tire que pour tout $q \in \mathcal{P}$, il existe donc $C > 0$ tel que $b_p(1) \subseteq b_q(C)$. D'où la conclusion par la Proposition 5.1.5. ■

Définition 8.1.7. Soient $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ des espaces localement convexes. Un opérateur linéaire $T : X \rightarrow Y$ est *borné* si $T(B)$ est borné dans Y pour tout borné B de X .

Bien sûr, tout opérateur linéaire continu est borné. On a la réciproque partielle suivante.

Proposition 8.1.8. *Soient $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ des espaces localement convexes. Si $(X, \mathcal{P})$ est à semi-normes dénombrables et si $T : X \rightarrow Y$ est un opérateur linéaire borné, alors T est continu.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{P} \approx \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$, où (p_n) est croissante. Si T n'est pas continu, la Proposition 5.5.1 fournit $q \in \mathcal{Q}$ tel que, pour tout $n \geq 1$, il existe $y_n \in X$ avec

$$q(T(y_n)) > n p_n(y_n).$$

Si $p_n(y_n) > 0$, posons $x_n = y_n / p_n(y_n)$; si $p_n(y_n) = 0$, multiplions y_n par un scalaire de façon à avoir $q(T(x_n)) \geq n$. Dans les deux cas,

$$p_n(x_n) \leq 1 \quad \text{et} \quad q(T(x_n)) \geq n.$$

L'ensemble $B = \{x_n : n \geq 1\}$ est borné : si m est fixé, alors $p_m(x_n) \leq p_n(x_n) \leq 1$ pour $n \geq m$, tandis que les termes $n < m$ sont en nombre fini. Mais $T(B)$ n'est pas borné puisque $q(T(x_n)) \geq n$, ce qui contredit l'hypothèse. ■

En particulier, pour des opérateurs linéaires entre espaces normés, les notions d'opérateur borné et continu coïncident. On retrouve ainsi le [critère de continuité du Chapitre 1](#).

8.2 Parties précompactes

La précompacité exprime la possibilité d'approcher un ensemble par un nombre fini de points à toute échelle. Nous reformulons cette idée dans le langage des voisinages et des semi-normes avant de la relier à la compacité.

La définition reprend le recouvrement par un nombre fini de petites boules. Dans le cadre normé, il n'y a qu'une norme à considérer ; dans le cadre localement convexe, le recouvrement doit exister pour chaque semi-norme.

Définition 8.2.1. Une partie K d'un espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$ est *précompacte* pour $p \in \mathcal{P}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_1, \dots, x_n \in X$ tels que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^n b_p(x_j, \varepsilon).$$

On dit que K est *précompacte* si K est précompacte pour tout $p \in \mathcal{P}$.

Ainsi, une partie est précompacte si on peut la recouvrir par un nombre fini de translatés de la boule $b_p(\varepsilon)$, quels que soient $p \in \mathcal{P}$ et $\varepsilon > 0$. De manière équivalente, on écrit que K est précompacte si pour tout $p \in \mathcal{P}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie A de X telle que

$$K \subseteq A + b_p(\varepsilon).$$

Bien sûr, toute partie précompacte est bornée puisque si $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n b_p(x_j, \varepsilon)$, alors

$$\sup_{x \in K} p(x) \leq \sup_{j \in \{1, \dots, n\}} p(x_j) + \varepsilon < +\infty.$$

On vérifie facilement que deux systèmes de semi-normes équivalents définissent les mêmes ensembles précompacts.

Exemples 8.2.2. On vérifie immédiatement les assertions suivantes.

- ▷ Toute partie finie de X est précompacte.
- ▷ Toute union finie d'ensembles précompacts est précompacte.
- ▷ Tout sous-ensemble d'un ensemble précompact est précompact.
- ▷ Toute combinaison linéaire de précompacts est précompacte.
- ▷ Toute suite de Cauchy définit un ensemble précompact.
- ▷ L'adhérence d'un ensemble précompact est précompact.

▷ L'enveloppe absolument convexe d'un ensemble précompact est précompacte.

Le résultat suivant donne une caractérisation utile des précompacts via les suites.

Proposition 8.2.3. *Une partie K de X est précompacte si et seulement si pour tout $p \in \mathcal{P}$ et pour toute suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de K , il existe une sous-suite $(x_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de Cauchy pour p .*

Démonstration. Supposons K précompact et fixons $p \in \mathcal{P}$. Soit (x_m) une suite de K . Pour chaque $k \geq 1$, la précompacité fournit un recouvrement fini de K par des translatés de $b_p(2^{-k})$. En partant de la suite initiale, on choisit récursivement une sous-suite infinie dont tous les termes appartiennent à l'un des translatés du k -ième recouvrement, chaque sous-suite étant extraite de la précédente. Notons $I_k \subseteq \mathbb{N}$ l'ensemble infini des indices conservés à l'étape k ; ainsi $I_{k+1} \subseteq I_k$. Choisissons $m_k \in I_k$ de sorte que $m_1 < m_2 < \dots$. Si $r, s \geq k$, alors $m_r, m_s \in I_k$ et les deux points x_{m_r} et x_{m_s} appartiennent à un même translaté de $b_p(2^{-k})$. Par conséquent,

$$p(x_{m_r} - x_{m_s}) < 2^{1-k}.$$

La sous-suite (x_{m_k}) est donc de Cauchy pour p .

Réciproquement, supposons que K ne soit pas précompact. Il existe $p \in \mathcal{P}$ et $\varepsilon > 0$ tels qu'aucun nombre fini de translatés de $b_p(\varepsilon)$ ne recouvre K . Choisissons $x_1 \in K$. Après avoir construit $x_1, \dots, x_n$, on peut choisir

$$x_{n+1} \in K \setminus \bigcup_{j=1}^n (x_j + b_p(\varepsilon)).$$

Alors $p(x_r - x_s) \geq \varepsilon$ dès que $r \neq s$. Cette suite ne possède donc aucune sous-suite de Cauchy pour p . ■

Corollaire 8.2.4. *Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace à semi-normes dénombrables. Une partie K de X est précompacte si et seulement si de toute suite de K , on peut extraire une sous-suite de Cauchy.*

Démonstration. Supposons que K est précompacte. Soit $(p_m)_{m \geq 1}$ une suite croissante de semi-normes définissant la topologie de X , et soit (x_m) une suite de K . Par extractions successives, on construit une suite de sous-suites emboîtées telle que la k -ième soit de Cauchy pour p_k . La sous-suite diagonale est alors de Cauchy pour chaque p_k , donc pour la topologie de X .

Réciproquement, supposons que toute suite de K possède une sous-suite de Cauchy pour la topologie de X . Pour tout $p \in \mathcal{P}$, cette sous-suite est en particulier de Cauchy pour p . La Proposition 8.2.3 montre donc que K est précompacte. ■

Les ensembles précompacts fournissent une caractérisation des espaces de dimension finie. Dans le cas normé, ce résultat a déjà été établi à la Proposition 2.1.4; le théorème suivant en donne la version localement convexe.

Théorème 8.2.5 (Riesz). *Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe séparé. Alors X est de dimension finie si et seulement si une semi-boule de X est précompacte.*

Démonstration. Si X est de dimension finie, alors par la Proposition 5.4.7, on sait que X est homéomorphe à $\mathbb{K}^n$ et toute boule est clairement précompacte.

Réciproquement, supposons qu'il existe une semi-boule $b_p(x, \varepsilon)$ précompacte. Par translation et dilatation, il est clair que $b_p(1)$ est également précompact. On en tire que $b_p(1)$ est borné et par la Proposition 8.1.6, $\mathcal{P} \approx \{p\}$. Puisque l'espace est séparé, on obtient que p est une norme. Fixons $\varepsilon \in]0, 1[$. Par précompacité, il existe une partie finie $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ de X telle que

$$b_p(1) \subseteq A + b_p(\varepsilon).$$

Montrons que A engendre X . Comme $b_p(1)$ est absorbant, il suffit de montrer que tout élément de $b_p(1)$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des éléments de A . Soit $x \in b_p(1)$. Alors il existe $j_1 \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$x = x_{j_1} + \varepsilon y_1$$

où $y_1 \in b_p(1)$. De même, il existe $j_2 \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$y_1 = x_{j_2} + \varepsilon y_2$$

où $y_2 \in b_p(1)$. Donc

$$x = x_{j_1} + \varepsilon x_{j_2} + \varepsilon^2 y_2.$$

En itérant, on construit une suite $(j_l)_{l \in \mathbb{N}_0}$ de $\{1, \dots, n\}$ et une suite $(y_l)_{l \in \mathbb{N}_0}$ de $b_p(1)$ telles que

$$x = \sum_{l=1}^m x_{j_l} \varepsilon^{l-1} + \varepsilon^m y_m$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$. On en tire que $x = \sum_{l=1}^{+\infty} x_{j_l} \varepsilon^{l-1}$ puisque

$$p \left(x - \sum_{l=1}^m x_{j_l} \varepsilon^{l-1} \right) = \varepsilon^m p(y_m) < \varepsilon^m \rightarrow 0$$

si m tend vers l'infini. On conclut en remarquant que par unicité de la limite, on a également

$$\sum_{l=1}^{+\infty} x_{j_l} \varepsilon^{l-1} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{l: j_l=j} \varepsilon^{l-1} \right) x_j.$$

■

8.3 Parties compactes et extractables

La compacité est une propriété topologique forte qui permet de contrôler les passages à la limite. Dans les espaces métrisables, elle peut être caractérisée à l'aide des sous-suites convergentes, ce qui la rend particulièrement maniable.

Rappelons qu'un espace topologique est *compact* si de tout recouvrement ouvert de X , on peut extraire un recouvrement fini. De manière équivalente, toute famille de fermés de X dont toutes les sous-familles finies sont d'intersection non vide est d'intersection non vide. La compacité peut se traduire à l'aide de la notion de filtre.

Définition 8.3.1. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. Un point $x \in X$ est *adhérent* à $\mathcal{F}$ si x est adhérent à tous les éléments de $\mathcal{F}$.

L'ensemble des points adhérents à $\mathcal{F}$ est donc donné par $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$.

Remarque 8.3.2. Il est clair que si un filtre $\mathcal{F}$ converge vers x dans un espace séparé, alors x est l'unique point adhérent à $\mathcal{F}$.

Proposition 8.3.3. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est compact si et seulement si tout filtre $\mathcal{F}$ sur X a un point d'adhérence.

Démonstration. Supposons tout d'abord que $(X, \mathcal{T})$ est compact. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur X . Alors $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$ est une intersection de fermés de X dont toute intersection finie est non-vide par (F2) et (F3). En utilisant la définition de la compacité via les fermés, on trouve que $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$ est non vide, et tout point de cette intersection est un point d'adhérence au filtre.

Réciproquement, considérons une famille $(F_i)_{i \in I}$ de fermés de X telle que pour tout $J \subseteq I$ fini, l'ensemble $F^J := \bigcap_{i \in J} F_i$ est non-vide. Alors la famille définie par $\mathcal{B} := \{F^J : J \subseteq I \text{ fini}\}$ est la base d'un filtre $\mathcal{F}$. Par hypothèse, $\mathcal{F}$ admet un point d'adhérence. On obtient donc

$$\emptyset \neq \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} \subseteq \bigcap_{i \in I} F_i,$$

ce qui suffit. ■

Définition 8.3.4. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *extractable* s'il est séparé et si de toute suite de X , on peut extraire une sous-suite qui converge.

Bien sûr, en utilisant la topologie induite, on peut étendre directement ces notions pour définir des ensembles compacts et extractables.

Proposition 8.3.5. *Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe et soit K une partie compacte ou extractable de X . Alors*

1. K est sq-complet ;
2. K est précompact ;
3. K est borné.

Démonstration. 1. Soit $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans K . Traitons tout d'abord le cas où K est compact. Si $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ prend un nombre fini de valeurs distinctes, alors elle admet une sous-suite constante ; comme elle est de Cauchy, elle converge vers la même limite. On peut donc supposer qu'elle prend une infinité de valeurs distinctes. Supposons que pour tout $x \in K$, il existe $p_x \in \mathcal{P}$ et $\varepsilon_x > 0$ tel que $x + b_{p_x}(\varepsilon_x)$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments de la suite. Comme K est compact et puisque

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} x + b_{p_x}(\varepsilon_x),$$

on peut en extraire un recouvrement fini. On en tire que $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes, ce qui est impossible. Ainsi, il existe $x \in K$ tel que pour tout $p \in \mathcal{P}$ et tout $\varepsilon > 0$, la semi-boule $x + b_p(\varepsilon)$ contient une infinité d'éléments de la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$. Fixons $p \in \mathcal{P}$ et $\varepsilon > 0$. Puisque la suite est de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$p(x_r - x_s) < \frac{\varepsilon}{2}$$

si $r, s \geq N$. De plus, par construction de x , il existe $n \geq N$ tel que $x_n \in x + b_p(\frac{\varepsilon}{2})$. Alors

$$p(x - x_m) \leq p(x - x_n) + p(x_n - x_m) < \varepsilon$$

si $m \geq N$, ce qui montre que $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers x .

Supposons à présent que K est extractable. Alors $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente dans K et elle converge donc dans K .

2. Il est clair que tout compact K est précompact en utilisant le recouvrement de K par les boules $b_p(x, \varepsilon)$, $x \in K$.

Si K est extractable, alors toute suite de K possède une sous-suite convergente, qui est donc de Cauchy pour p quel que soit $p \in \mathcal{P}$. Cela suffit par la Proposition 8.2.3.

3. C'est immédiat par le point 2 puisque tout précompact est borné. ■

Dans $\mathbb{R}^n$, on sait qu'un ensemble est compact si et seulement si il est extractable. Nous allons montrer que ce résultat reste valide dans le cas d'espaces à semi-normes dénombrables.

Théorème 8.3.6. *Soient $(X, \mathcal{P})$ un espace séparé à semi-normes dénombrables et K une partie de X . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. K est compact,
2. K est extractable,
3. K est précompact et complet.

Démonstration. L'espace X est métrisable par le Théorème 5.4.10 ; fixons une distance d compatible avec sa topologie.

L'implication $1 \Rightarrow 2$ est le théorème métrique classique selon lequel tout espace métrique compact est séquentiellement compact. Si K est extractable, la Proposition 8.3.5 montre qu'il est précompact et sq-complet. Dans un espace à semi-normes dénombrables, la sq-complétude et la complétude coïncident par le Théorème 7.2.9 ; ainsi $2 \Rightarrow 3$.

Supposons maintenant K précompact et complet. Toute suite de K possède, par le Corollaire 8.2.4, une sous-suite de Cauchy. Celle-ci converge dans K par complétude. On obtient donc $3 \Rightarrow 2$.

Il reste à rappeler pourquoi, dans un espace métrique, l'extractabilité implique la compacité. Une partie extractable est totalement bornée pour d : sinon, il existerait $\varepsilon > 0$ et une suite dont deux termes distincts seraient toujours à distance au moins ε , ce qui interdirait toute sous-suite convergente. Soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de K . Montrons qu'il possède un nombre de Lebesgue. En effet, si ce n'était pas le cas, on pourrait choisir $x_n \in K$ tel qu'aucun élément du recouvrement ne contienne la boule $b_d(x_n, 1/n)$. Une sous-suite x_{n_k} convergerait vers un point $x \in K$. En choisissant Ω_i contenant x , puis une boule $b_d(x, r) \subseteq \Omega_i$, on obtiendrait, pour k assez grand, $b_d(x_{n_k}, 1/n_k) \subseteq \Omega_i$, contradiction.

Choisissons donc un nombre de Lebesgue $\lambda > 0$. La totale bornitude fournit un recouvrement fini de K par des boules de rayon $\lambda/2$, et chacune de ces boules est contenue dans un élément du recouvrement initial. On en extrait ainsi un sous-recouvrement fini. Cela établit $2 \Rightarrow 1$ et termine la preuve. ■

En combinant le résultat précédent avec la Proposition 7.2.7, on obtient le corollaire suivant. Comme dans le cadre normé, nous appelons *relativement compact* un ensemble dont l'adhérence est compacte.

Corollaire 8.3.7. *Dans un espace de Fréchet, un ensemble est précompact si et seulement s'il est relativement compact.*

Démonstration. Supposons que K est précompact dans un espace complet. Alors $\overline{K}$ est précompact et complet par la Proposition 7.2.7. On en tire que $\overline{K}$ est compact. Réciproquement, si $\overline{K}$ est compact, il est précompact et donc K l'est également. ■

8.4 Généralisation des opérateurs compacts aux espaces localement convexes

Les opérateurs compacts ont été introduits au Chapitre 4 dans le cadre normé. La définition suivante est celle du cours initial et étend cette notion au cadre localement convexe.

Définition 8.4.1. Soient $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ des espaces localement convexes. Un opérateur linéaire $K : X \rightarrow Y$ est *compact* s'il existe $p \in \mathcal{P}$ et $\varepsilon > 0$ tels que $K(b_p(\varepsilon))$ soit relativement compact dans Y .

Proposition 8.4.2. *Tout opérateur compact entre espaces localement convexes est continu.*

Démonstration. Soit $q \in \mathcal{Q}$. Comme $K(b_p(\varepsilon))$ est relativement compact, il est borné ; il existe donc $M > 0$ tel que $q(Kx) \leq M$ pour $x \in b_p(\varepsilon)$. Par homogénéité, on obtient

$$q(Kx) \leq \frac{M}{\varepsilon} p(x)$$

pour tout $x \in X$ (le cas $p(x) = 0$ s'obtient en appliquant l'inégalité à λx et en faisant tendre λ vers l'infini). Le critère de continuité des applications linéaires entre espaces localement convexes donne la conclusion. ■

Proposition 8.4.3. *Soient X, Y, Z des espaces localement convexes.*

1. *Si $K : X \rightarrow Y$ est compact et $S : Y \rightarrow Z$ est linéaire continu, alors $S \circ K$ est compact.*
2. *Si $K : Y \rightarrow Z$ est compact et $S : X \rightarrow Y$ est linéaire continu, alors $K \circ S$ est compact.*

Démonstration. Pour le premier point, l'image par S de l'adhérence compacte d'un ensemble relativement compact est compacte. Pour le second, la continuité de S fournit un voisinage semi-normé de 0 dans X envoyé dans un voisinage sur lequel K a une image relativement compacte. ■

Remarque 8.4.4. Lorsque X est normé, cette définition est équivalente à celle du Chapitre 4 : il suffit de prendre pour p la norme et d'utiliser l'homogénéité. Ainsi, il ne s'agit pas d'une nouvelle notion mais bien d'une extension du cadre déjà étudié.

8.5 Exercices

Exercice 8.5.1. Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe. Montrer que

1. toute partie finie de X est bornée,
2. toute union finie d'ensembles bornés est bornée,
3. tout sous-ensemble d'un ensemble borné est borné,
4. toute combinaison linéaire de bornés est bornée,
5. toute suite de Cauchy définit un ensemble borné,
6. l'adhérence d'un ensemble borné est bornée,
7. l'enveloppe absolument convexe d'un ensemble borné est bornée,
8. l'image linéaire continue d'un ensemble borné est bornée.

Exercice 8.5.2. Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe. Montrer que

1. toute partie finie de X est précompacte,
2. toute union finie d'ensembles précompacts est précompacte,
3. tout sous-ensemble d'un ensemble précompact est précompact,
4. toute combinaison linéaire de précompacts est précompacte,
5. toute suite de Cauchy définit un ensemble précompact,
6. l'adhérence d'un ensemble précompact est précompacte,
7. l'enveloppe absolument convexe d'un ensemble précompact est précompact.

Exercice 8.5.3. Dans un espace à semi-normes dénombrables, montrer que tout ensemble précompact est séparable.

9 Dualité dans les espaces localement convexes

Nous abordons maintenant la dualité dans le cadre des espaces localement convexes. Le dual topologique se définit comme dans le cas normé, mais sa description fait intervenir les semi-normes qui engendrent la topologie. Les constructions étudiées auparavant permettent notamment d'interpréter naturellement l'espace des distributions. Les topologies faible et faible-* conduisent ensuite à la forme générale du théorème d'Alaoglu.

Le théorème de Hahn–Banach a déjà été démontré dans la première partie sous une forme qui ne requiert qu'une semi-norme. Nous le réutilisons ici pour obtenir les propriétés de séparation par les formes linéaires continues, puis pour étudier les topologies faible et faible-* dans leur cadre naturel.

Le fil conducteur de ce chapitre est donc le suivant : à une topologie localement convexe déjà construite, on associe son dual topologique ; on étudie ensuite les topologies déterminées par ce dual, puis les phénomènes de compacité qu'elles font apparaître. L'exemple de $\mathcal{D}(\Omega)$, construit comme limite inductive puis reconnu comme espace de type (LF), conduit naturellement à son dual $\mathcal{D}'(\Omega)$.

9.1 Dual topologique et conséquences de Hahn–Banach

Le théorème de Hahn–Banach, démontré au Chapitre 3 sous une forme qui ne demande qu'une semi-norme, s'applique directement dans ce cadre. Avec le critère de continuité des applications linéaires, il fournit les conséquences topologiques qui suivent.

Définition 9.1.1. Si $(X, \mathcal{P})$ est un espace localement convexe et si l'espace $\mathbb{K}$ est muni de la valeur absolue $|\cdot|$, alors l'espace $L(X, \mathbb{K})$ est appelé le *dual (topologique)* de X . On le note X' .

La Proposition 5.5.1 permet d'affirmer que le dual de $(X, \mathcal{P})$ est formé des applications linéaires $T : X \rightarrow \mathbb{K}$ pour lesquelles il existe $p \in \mathcal{P}$ et $C > 0$ tels que

$$|T(x)| \leq C p(x) \quad \forall x \in X.$$

Ainsi, il existe un voisinage U de 0 dans $(X, \mathcal{P})$ et une constante $M > 0$ tels que $|T(x)| \leq M$ pour tout $x \in U$.

Exemples 9.1.2.

- ▷ Si $X = C^0(K)$ où K est un compact de $\mathbb{R}^n$, alors $T \in X'$ si et seulement si T est une application linéaire définie sur $C^0(K)$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ pour laquelle il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|T(f)| \leq C \sup_{x \in K} |f(x)|$$

pour tout $f \in C^0(K)$. Par exemple, l'application $\delta_a : f \mapsto f(a)$ appartient à X' pour tout $a \in K$.

Exemple 9.1.3. Considérons à nouveau $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit. Toute forme linéaire continue $T : \omega \rightarrow \mathbb{K}$ ne dépend que d'un nombre fini de coordonnées. En effet, par le critère de continuité du Chapitre 5, il existe m et $C > 0$ tels que

$$|T(x)| \leq C \max_{0 \leq k \leq m} |x_k|.$$

En appliquant cette inégalité à e_n pour $n > m$, on obtient $T(e_n) = 0$. Ainsi

$$T(x) = \sum_{k=0}^m a_k x_k,$$

et réciproquement toute forme de ce type est continue. On a donc

$$\omega' \simeq \mathbb{K}^{(\mathbb{N})},$$

l'espace des suites à support fini. Cet exemple montre concrètement comment une construction topologique du Chapitre 6 détermine son dual topologique.

Remarque 9.1.4. Le dual topologique X' de X est un sous-espace vectoriel du dual algébrique X^* de X . Dans le cas où X est séparé et de dimension finie, le Corollaire 5.5.5 implique que $X' = X^*$. Cette égalité est néanmoins fausse en toute généralité.

Remarque 9.1.5. On peut définir une application bilinéaire sur $X' \times X$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ en posant

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X' \times X \rightarrow \mathbb{K} : (T, x) \mapsto T(x).$$

Dans la littérature, on trouve souvent les notations $\langle T, \cdot \rangle$, $\langle \cdot, x \rangle$ et $\langle T, x \rangle$.

Le résultat suivant donne une condition équivalente pour obtenir la continuité d'une forme linéaire. En particulier, on obtient qu'une forme linéaire est continue si et seulement si son noyau

est fermé.

Proposition 9.1.6. *Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe. Si $T : X \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire non-nulle sur X , alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. T est continu,
2. $\ker(T)$ est fermé,
3. il existe une semi-boule $b_p(x, r)$ de X telle que $T(b_p(x, r)) \subsetneq \mathbb{K}$.

Démonstration. $1 \Rightarrow 2$. Si T est continu, alors $\ker(T) = T^{-1}(\{0\})$ est fermé.

$2 \Rightarrow 3$. Soit x un élément de l'ouvert $X \setminus \ker(T)$. Il existe donc $p \in \mathcal{P}$ et $r > 0$ tel que $b_p(x, r) \cap \ker(T) = \emptyset$. Ainsi $T(b_p(x, r)) \neq \mathbb{K}$.

$3 \Rightarrow 1$. Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus T(b_p(x, r))$. Par linéarité de T , on a alors $\lambda - T(x) \notin T(b_p(r))$. Montrons que

$$|T(y)| \leq \frac{|\lambda - T(x)|}{r} p(y)$$

pour tout $y \in X$, ce qui suffit par la Proposition 5.5.1. Considérons $y \in X$ tel que $p(y) < r$. Alors $\mu y \in b_p(r)$ pour tout $\mu \in [0, 1]$, et donc $T(\mu y) = \mu T(y) \neq \lambda - T(x)$. On en tire que $|T(y)| \neq \frac{|\lambda - T(x)|}{\mu}$ pour tout $\mu \in [0, 1]$ et par conséquent, $|T(y)| < |\lambda - T(x)|$. Si $y \in X$ est quelconque, on se ramène au cas précédent en considérant $(r - \varepsilon) \frac{y}{p(y)}$ et en faisant tendre ensuite ε vers 0. ■

Présentons à présent quelques conséquences du théorème de Hahn-Banach. Commençons par montrer qu'il permet de prouver l'existence de nombreuses formes linéaires continues sur un espace localement convexe séparé donné.

Corollaire 9.1.7. *Soient $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe et Y un sous-espace vectoriel de X . Toute forme linéaire continue sur Y admet un prolongement linéaire continu sur X . En particulier, si $X \neq \{0\}$ est séparé, alors $X' \neq \{0\}$.*

Démonstration. Si $T : Y \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire continue sur Y , alors il existe $p \in \mathcal{P}$ et $C > 0$ tels que $|T(y)| \leq Cp(y)$ pour tout $y \in Y$. En considérant la semi-norme $p' = Cp$, le Théorème 3.2.2 de Hahn-Banach permet de construire le prolongement recherché.

De plus, on sait par le Corollaire 5.5.5 que si $X \neq \{0\}$ est séparé, il existe des formes linéaires continues sur tout sous-espace Y de dimension finie de X . Vu ce qu'on vient de montrer, on peut donc affirmer que $X' \neq \{0\}$. ■

Le corollaire suivant montre que si l'espace X est séparé, on peut également séparer les points de X via une forme linéaire continue. On obtient également une formule de représentation des semi-normes.

Corollaire 9.1.8. *Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe.*

1. *Si $x \in X$ et si $p \in \mathcal{P}$, alors il existe $T \in X'$ tel que $|T| \leq p$ et $T(x) = p(x)$.*
2. *Si $(X, \mathcal{P})$ est séparé, alors X' sépare les points : pour tous $x, y \in X$, $x \neq y$, il existe $T \in X'$ tel que $T(x) \neq T(y)$.*
3. *Si $(X, \mathcal{P})$ est séparé, alors pour tout $x \in X$ et tout $p \in \mathcal{P}$, on a*

$$p(x) = \sup\{|T(x)| : T \in X', |T| \leq p\}.$$

Démonstration. 1. Si $p(x) = 0$, il suffit de poser $T = 0$. Sinon, considérons l'application linéaire continue

$$T : \langle x \rangle \rightarrow \mathbb{K} : \lambda x \mapsto \lambda p(x).$$

Remarquons que $|T(\lambda x)| = |\lambda|p(x) = p(\lambda x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$. Par le Théorème 3.2.2 de Hahn-Banach, on peut étendre T sur X en une forme linéaire continue $\tilde{T}$ telle que $|\tilde{T}(y)| \leq p(y)$ pour tout $y \in X$.

2. Si $x \neq y$, alors $x - y \neq 0$ et puisque l'espace est séparé, il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $p(x - y) \neq 0$ par la Proposition 5.4.1. Le point 1 donne alors l'existence d'une forme linéaire $T \in X'$ telle que $T(x) - T(y) = T(x - y) = p(x - y) \neq 0$, ce qui suffit.

3. D'une part, il est clair que $\sup\{|T(x)| : T \in X', |T| \leq p\} \leq p(x)$. De plus, par le point 1, on sait qu'il existe $T_0 \in X'$ tel que $|T_0| \leq p$ et $T_0(x) = p(x)$. En particulier, on a donc $p(x) \leq \sup\{|T(x)| : T \in X', |T| \leq p\}$, d'où la conclusion. ■

Remarque 9.1.9. Grâce au point 2, dans le cas où X est un espace séparé, nous avons obtenu l'injectivité de l'application linéaire

$$X \rightarrow (X')^* : x \mapsto \langle \cdot, x \rangle$$

définie par $\langle T, x \rangle = T(x)$. Ainsi, X peut être identifié à un sous-espace de $(X')^*$.

Présentons une dernière conséquence du Théorème de Hahn-Banach, qui nous permettra d'obtenir un critère de densité.

Corollaire 9.1.10. *Soit Y un sous-espace fermé de l'espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$. Pour tout $x \in X \setminus Y$, il existe $T \in X'$ tel que $T(x) = 1$ et $T|_Y = 0$.*

Démonstration. Posons $Y_0 = Y + \langle x \rangle$ et considérons l'application $T : Y_0 \rightarrow \mathbb{K} : y + \lambda x \mapsto \lambda$. Alors T est une application linéaire telle que $T|_Y = 0$ et $T(x) = 1$. Elle est de plus continue par la Proposition 9.1.6 car $\ker T = Y$ est fermé. ■

Corollaire 9.1.11. Soient $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe et Y un sous-espace vectoriel de X . Le sous-espace Y est dense dans X si et seulement si 0 est l'unique forme de X' qui s'annule sur Y .

Démonstration. Il est clair que si Y est dense dans X , alors toute forme continue qui s'annule sur Y s'annule sur X . Réciproquement, on vérifie facilement que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel topologique est encore un sous-espace vectoriel¹. Ainsi, $\overline{Y}$ est un sous-espace vectoriel de X et par le Corollaire 9.1.10, si $\overline{Y} \neq X$, alors il existe $T \in X'$, $T \neq 0$, tel que $T|_{\overline{Y}} = 0$. ■

Remarque 9.1.12. Si $A \subseteq X$, on pose

$$A^\perp := \{T \in X' : T(x) = 0 \ \forall x \in A\}.$$

C'est l'orthogonal de A dans le dual X' . Le résultat précédent se réécrit de la manière suivante : un sous-espace vectoriel Y est dense dans X si et seulement si $Y^\perp = \{0\}$.

Exemple 9.1.13. Pour tout $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| > 1$, on définit la fonction $f_a : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$f_a(t) = \frac{1}{a - t}.$$

Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de complexes telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = +\infty$, montrons que l'espace vectoriel engendré par les fonctions f_{a_n} est dense dans $C^0([-1, 1])$. Nous allons appliquer le critère donné par le Corollaire 9.1.11. Soit $T : C^0([-1, 1]) \rightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire continue telle que $T(f_{a_n}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que si $|a| > 1$, on a

$$f_a(t) = \frac{1}{a} \frac{1}{1 - \frac{t}{a}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{a^{n+1}}$$

où la série converge uniformément sur $[-1, 1]$, c'est-à-dire au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$ de $C^0([-1, 1])$. Par continuité et linéarité de T , on en tire que

$$T(f_a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \frac{1}{a^{n+1}} = \varphi\left(\frac{1}{a}\right),$$

où λ_n est égal à T évalué en la fonction $t \mapsto t^n$, et où $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n z^{n+1}$. Remarquons que $|\lambda_n| \leq \|T\| \|t \mapsto t^n\|_\infty = \|T\|$ et donc la série définissant φ définit une fonction holomorphe sur la boule unité $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. De plus, par hypothèse sur T , on a $0 = T(f_{a_n}) = \varphi\left(\frac{1}{a_n}\right)$. En utilisant le principe des zéros isolés, on en tire que $\varphi = 0$, d'où $\lambda_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, T s'annule sur chaque fonction $t \mapsto t^n$, et donc par linéarité de T sur chaque polynôme.

1. Laissé en exercice.

Comme les polynômes forment un ensemble dense de $C^0([-1, 1])$, la continuité de T permet d'affirmer que $T = 0$.

9.1.1 L'espace des distributions

Les limites inductives construites au Chapitre 6 fournissent un exemple fondamental de dual topologique.

Exemple 9.1.14. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions. Par le Corollaire 6.5.6 et par définition de la topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$ comme limite inductive des espaces $\mathcal{D}^K(\Omega)$, une application linéaire $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ est une distribution si, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $C > 0$ et un entier $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$|T(\varphi)| \leq C \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}^K(\Omega)$.

Remarque 9.1.15. La convergence usuelle des distributions est précisément la convergence faible-*, c'est-à-dire la convergence ponctuelle sur $\mathcal{D}(\Omega)$:

$$T_n \longrightarrow T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \iff \langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On retrouve ainsi exactement le principe de *convergence par tests* déjà rencontré pour la convergence faible et faible-*. Il est également proche de la convergence en loi en probabilité : si μ_n et μ sont les lois de variables aléatoires, on teste la convergence par les quantités $\int \varphi d\mu_n$ pour φ continue bornée. Dans le cas des distributions, les tests sont les fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ et l'action est linéaire par définition.

9.2 Topologies faible et faible-*

Dans le Chapitre 3, ces topologies ont été introduites pour les espaces normés. Nous donnons maintenant la même construction dans le cadre d'un espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$. Le principe reste celui d'une convergence décrite par une famille d'observateurs : les éléments du dual testent les vecteurs, tandis que les vecteurs testent les éléments du dual pour la topologie faible-*.

Commençons par remarquer que pour tout $T \in X'$, l'application $|T|$ définit une semi-norme sur X . On peut donc considérer le système filtrant de semi-normes sur X défini par

$$\mathcal{P}_a := \left\{ \max \{ |T| : T \in A' \} : A' \subseteq X', \#A' < +\infty \right\}.$$

Définition 9.2.1. L'espace localement convexe $(X, \mathcal{P}_a)$ est appelé l'*espace faible* et est noté X_a . Sa topologie est notée $\sigma(X, X')$ et appelée la *topologie faible*.

Remarquons que si $A' = \{T_1, \dots, T_n\} \subseteq X'$, alors pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, il existe $p_k \in \mathcal{P}$ tel que $|T_k| \preceq p_k$ par la Proposition 5.5.1. Comme $\mathcal{P}$ est filtrant, il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $p_k \preceq p$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, d'où $\max_{1 \leq k \leq n} |T_k| \preceq p$. Ainsi, $\mathcal{P}_a \preceq \mathcal{P}$ i.e. la topologie faible est plus faible que la topologie associée à $\mathcal{P}$. La topologie faible $\sigma(X, X')$ est donc moins fine que la topologie de X .

Une base de voisinages de 0 de la topologie faible est donnée par les intersections finies du type

$$\bigcap_{T \in A'} T^{-1}(b(0, r))$$

où $A' \subseteq X'$ est fini, $r > 0$ et $b(0, r)$ est la boule ouverte centrée en 0 de rayon r dans $\mathbb{K}$. On en tire que la topologie faible sur X est la topologie initiale relative aux applications de X' . C'est donc la topologie la moins fine pour laquelle toutes les applications de X' sont continues. En particulier, une application $S : (Y, \mathcal{T}) \rightarrow X_a$ est continue si et seulement si $T \circ S : Y \rightarrow \mathbb{K}$ est continue pour tout $T \in X'$.

Remarquons également que si X est séparé, l'espace X_a est séparé par le Corollaire 9.1.8. Nous allons montrer que le dual de l'espace faible est le même que le dual de X . Commençons par un lemme algébrique.

Lemme 9.2.2. Soient $T, T_1, \dots, T_n \in X^*$. Si

$$\bigcap_{k=1}^n \ker T_k \subseteq \ker T,$$

alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $T = \sum_{k=1}^n \lambda_k T_k$.

Démonstration. Considérons l'application linéaire $S : X \rightarrow \mathbb{K}^n : x \mapsto (T_1(x), \dots, T_n(x))$. Remarquons que si $S(x) = S(y)$, alors $x - y \in \bigcap_{k=1}^n \ker T_k$ et donc $T(x - y) = 0$ par hypothèse. Par linéarité, on en tire que $T(x) = T(y)$ et l'application

$$f : \text{im } S \rightarrow \mathbb{K} : S(x) \mapsto T(x)$$

est bien définie. Il est clair que f est linéaire et on peut l'étendre en une application linéaire $\tilde{f} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ en considérant un supplémentaire de $\text{im } S$ dans $\mathbb{K}^n$. Si $\lambda_k = \tilde{f}(e_k)$, on a

$$T(x) = f(S(x)) = \tilde{f}(S(x)) = \tilde{f}(T_1(x), \dots, T_n(x)) = \tilde{f}\left(\sum_{k=1}^n T_k(x) e_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k T_k(x).$$

Ceci permet de conclure que $T = \sum_{k=1}^n \lambda_k T_k$. ■

Proposition 9.2.3. *On a $(X_a)' = X'$.*

Démonstration. On sait que $X' \subseteq (X_a)'$ car chaque $T \in X'$ est continu pour la topologie faible. Soit à présent $T \in (X_a)'$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$, $T_1, \dots, T_n \in X'$ et $C > 0$ tels que

$$|T(x)| \leq C \max_{k \in \{1, \dots, n\}} |T_k(x)|$$

pour tout $x \in X$. En particulier, $\bigcap_{k=1}^n \ker T_k \subseteq \ker T$ et le Lemme 9.2.2 implique que T est une combinaison linéaire de $T_1, \dots, T_n$. Cela implique que $T \in X'$, d'où la conclusion. ■

Néanmoins, en général, les topologies $\mathcal{T}_P$ et $\sigma(X, X')$ sont différentes comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 9.2.4. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé. On sait que la topologie faible est moins fine que la topologie donnée par la norme de X , c'est-à-dire $\mathcal{P}_a \preceq \|\cdot\|$. Montrons que les topologies sont équivalentes si et seulement si X est de dimension finie. Si $\|\cdot\| \preceq \mathcal{P}_a$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$, $T_1, \dots, T_n \in X'$ et $C > 0$ tels que

$$\|x\| \leq C \max_{k \in \{1, \dots, n\}} |T_k(x)| \quad \forall x \in X.$$

Comme $\|\cdot\|$ est une norme, on en tire que

$$\bigcap_{k=1}^n \ker T_k \subseteq \{x \in X : \|x\| = 0\} = \{0\}.$$

Par conséquent, l'application

$$S : X \rightarrow \mathbb{K}^n : x \mapsto (T_1(x), \dots, T_n(x))$$

est linéaire et injective. Par conséquent, X est de dimension finie. La réciproque découle de la Proposition 5.4.7, puisque la topologie faible sur X est séparée.

La notion de convergence liée à la topologie de l'espace faible est appelée la convergence faible : une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers x si et seulement si $(T(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $T(x)$ pour tout $T \in X'$. La convergence en norme et la convergence faible coïncident donc dans les espaces normés de dimension finie. Dans les espaces normés de dimension infinie, la convergence en norme (on parle de *convergence forte*) implique la convergence faible, mais la réciproque est fausse en général, comme illustré dans l'exemple ci-dessous.

Exemple 9.2.5. Plaçons-nous dans l'espace ℓ^2 et considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite canonique e_n définie par $e_{n,k} = \delta_{n,k}$. Si $T \in (\ell^2)'$, on sait par la Proposition 3.7.4 qu'il

existe $x \in \ell^2$ tel que

$$T(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k y_k \quad \forall y \in \ell^2.$$

Ainsi, on a

$$T(e_n) = x_n \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$, et on en tire que la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0. D'autre part, on a $\|e_n\|_2 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge donc pas en norme vers 0 dans ℓ^2 .

Remarque 9.2.6. Il existe néanmoins des espaces normés de dimension infinie pour lesquels les deux notions de convergence coïncident : c'est le cas par exemple de l'espace ℓ^1 .

Intéressons-nous à présent à l'espace dual X' . Dans le cas où X est un espace normé, nous l'avons muni d'une norme naturellement associée. Nous avons donc deux topologies sur X' , à savoir

- ▷ la topologie *forte* associée à la norme de X' ,
- ▷ la topologie *faible* $\sigma(X', X'')$.

Nous savons que la topologie faible sur X' est strictement moins fine que la topologie forte sur X' si X est de dimension infinie. Nous allons à présent munir X' d'une topologie encore plus faible, appelée topologie *simple* ou *faible-**. Son intérêt pour les questions de compacité apparaîtra dans le théorème d'Alaoglu à la fin de ce chapitre.

Nous allons nous placer dans le cas général d'un espace localement convexe. Pour tout $x \in X$, l'application $|\langle \cdot, x \rangle| : T \in X' \mapsto |T(x)| \in \mathbb{K}$ définit une semi-norme sur X' . Remarquons qu'une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X' converge pour cette semi-norme vers T si et seulement si la suite $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $T(x)$. Afin d'obtenir un ensemble filtrant de semi-normes qui traduiront cette convergence ponctuelle, on considère l'ensemble

$$\mathcal{P}_s := \left\{ \max \{ |\langle \cdot, x \rangle| : x \in A \} : A \subseteq X, \#A < +\infty \right\}.$$

Définition 9.2.7. L'espace localement convexe $(X', \mathcal{P}_s)$ est appelé le *dual topologique simple* et est noté X'_s . Sa topologie est notée $\sigma(X', X)$ et appelée la *topologie simple (ou faible-*)* sur X' .

Par définition, la topologie simple est séparée². En transposant ce qui a été fait pour la topologie faible, on montre qu'il s'agit de la topologie la moins fine pour laquelle toutes les applications $T \in X' \mapsto T(x)$ sont continues. En particulier, une application $S : (Y, \mathcal{T}) \rightarrow X'_s$ est continue si et seulement si $\langle \cdot, x \rangle \circ S : Y \rightarrow \mathbb{K} : y \mapsto (S(y))(x)$ est continue pour tout $x \in X$.

2. Si $T \neq S$, il existe $x \in X$ tel que $T(x) \neq S(x)$; la semi-norme $U \mapsto |U(x)|$ sépare alors T et S .

Bien sûr, X' peut être identifié à un sous-espace du produit $\mathbb{K}^X$ via l'application

$$T \in X' \mapsto (T(x))_{x \in X} \in \mathbb{K}^X.$$

La topologie de X'_s est alors la topologie induite par $\mathbb{K}^X$ sur X' : en effet, la topologie de $\mathbb{K}^X$ est la topologie la moins fine telle que les projections $(\lambda_x)_{x \in X} \mapsto \lambda_x$ sont continues.

Dans le résultat suivant, on montre que seules les formes linéaires du type $\langle \cdot, x \rangle : T \in X' \mapsto T(x)$ sont continues pour la topologie simple.

Proposition 9.2.8. *Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe. Alors*

$$(X'_s)' = \{ \langle \cdot, x \rangle : x \in X \}.$$

Démonstration. Bien sûr, il suffit de montrer que $(X'_s)' \subseteq \{ \langle \cdot, x \rangle : x \in X \}$. Soit $\Phi : X' \rightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire continue pour la topologie simple. Alors, il existe $n \in \mathbb{N}_0$, $x_1, \dots, x_n \in X$ et $C > 0$ tels que

$$|\Phi(T)| \leq C \max_{k \in \{1, \dots, n\}} |T(x_k)|$$

pour tout $T \in X'$. Le Lemme 9.2.2 (appliqué avec X') implique qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\Phi = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle \cdot, x_k \rangle = \langle \cdot, \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \rangle,$$

ce qui suffit. ■

Remarque 9.2.9. En fait, nous pourrions déduire toutes les propriétés du dual simple en considérant la topologie faible associée à la paire duale $(X', \delta(X), \delta)$, où $\delta = \langle \cdot, \cdot \rangle : X \rightarrow X''$.

Remarque 9.2.10. La topologie simple $\sigma(X', X)$ est moins fine que la topologie faible $\sigma(X', X'')$ de X' puisque X peut être identifié à un sous-espace de X'' . En général, ces deux topologies sont différentes. Néanmoins, si l'espace X est normé et réflexif, les topologies coïncident. En fait, il s'agit même d'une caractérisation des espaces réflexifs.

Remarque 9.2.11. Si X est un espace normé, nous avons à présent trois topologies sur X' , à savoir

- ▷ la topologie *forte* associée à la norme de X' ,
- ▷ la topologie *faible* $\sigma(X', X'')$,
- ▷ la topologie *simple* ou *faible-** $\sigma(X', X)$.

Comme dans le cas de la topologie faible, on montre que la topologie forte coïncide avec la

topologie simple (et donc avec la topologie faible) si et seulement si $\dim X < +\infty$.

La notion de convergence associée à la topologie simple est la *convergence simple (ou ponctuelle ou faible-*)* : une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X' converge simplement si $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $T(x)$ pour tout $x \in X$.

Remarque 9.2.12. Dans X' , la convergence faible implique la convergence simple. En particulier, les limites sont alors identiques. Par contre, la réciproque est fautive en général. Par exemple, considérons $X = c_0$. Alors, on sait que X' s'identifie à ℓ^1 et X'' à ℓ^∞ . La suite canonique $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ℓ^1 (en fait, les formes T_{e_n} de c_0 associées) définie par $e_{n,k} = \delta_{n,k}$ converge vers 0 simplement dans ℓ^1 puisque pour tout $x \in c_0$, on a

$$T_{e_n}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} e_{n,k} x_k = x_n \rightarrow 0$$

lorsque n tend vers l'infini. Néanmoins, pour la suite $x \in \ell^\infty$ définie par $x_k = 1$ pour tout k , on a

$$T_x(e_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k e_{n,k} = x_n = 1$$

qui ne converge pas vers 0. Ainsi, la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas faiblement.

Comme elle est moins fine que les autres topologies considérées sur X' , on peut espérer que la topologie simple nous fournisse plus d'ensembles compacts. C'est effectivement ce que nous obtenons dans le résultat suivant.

9.3 Opérateurs et topologies faibles

Nous pouvons maintenant compléter l'étude des topologies faibles commencée au Chapitre 3 dans le cadre normé, puis reprise au Chapitre 5 du point de vue des espaces localement convexes. La réciproque ci-dessous s'appuie sur le théorème du graphe fermé dans les espaces de Fréchet, établi au Chapitre 7.

Le résultat suivant montre que toute application linéaire continue donne une application linéaire continue entre les espaces faibles correspondants.

Proposition 9.3.1. Soient $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ des espaces localement convexes. Si une application linéaire $T : X \rightarrow Y$ est continue, alors $T : X_a \rightarrow Y_a$ est continue. La réciproque est vraie si X et Y sont des espaces de Fréchet.

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $T_1, \dots, T_n \in Y'$. On cherche $m \in \mathbb{N}$, $S_1, \dots, S_m \in X'$ et $C > 0$ tels que

$$\max_{k \in \{1, \dots, n\}} |T_k(T(x))| \leq C \max_{k \in \{1, \dots, m\}} |S_k(x)| \quad \forall x \in X.$$

Il suffit de remarquer que $C = 1$, $m = n$ et $S_k = T_k \circ T \in X'$ conviennent.

Réciproquement, si $T : X_a \rightarrow Y_a$ est continue, alors son graphe (vu comme sous-ensemble de $X_a \times Y_a$) est fermé puisque les topologies faibles sont séparées. Comme la topologie produit $X_a \times Y_a$ est plus faible que la topologie produit de $X \times Y$, le graphe de T est également fermé dans $X \times Y$. Par conséquent, si X et Y sont des espaces de Fréchet, le Théorème 7.6.6 du graphe fermé permet de conclure. ■

9.4 Théorème d'Alaoglu

La topologie faible-* est suffisamment faible pour rendre compactes des parties du dual qui ne le sont pas pour la norme. Le théorème suivant, déjà formulé dans le cours initial, constitue l'application principale de cette idée.

Théorème 9.4.1 (Alaoglu). *Soient $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe et U un voisinage de 0. Alors le polaire*

$$U^\Delta = \{T \in X' : |T(x)| \leq 1 \forall x \in U\}$$

est simplement compact, c'est-à-dire compact dans $(X', \sigma(X', X))$.

Démonstration. Soit p une semi-norme sur X telle que $B_p(1) \subseteq U$ (on peut prendre un rayon égal à 1 quitte à multiplier $p \in \mathcal{P}$ par une constante). On a alors

$$U^\Delta \subseteq (B_p(1))^\Delta = \{T \in X' : |T(x)| \leq p(x) \forall x \in X\}.$$

De plus, on a

$$\{T \in X' : |T(x)| \leq p(x) \forall x \in X\} = \left(\prod_{x \in X} \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq p(x)\} \right) \cap X^*$$

où l'on identifie X^* avec un sous-espace du produit $\mathbb{K}^X$. Le produit est compact dans $\mathbb{K}^X$ par le Théorème de Tychonoff (tout produit de compacts est compact). De plus, le dual algébrique X^* est fermé pour la topologie produit puisque

$$X^* = \bigcap_{x, y \in X, \lambda, \mu \in \mathbb{K}} \ker (\langle \cdot, \lambda x + \mu y \rangle - \lambda \langle \cdot, x \rangle - \mu \langle \cdot, y \rangle)$$

et les noyaux d'applications continues sont fermés. Ainsi, $(B_p(1))^\Delta$ est compact dans $\mathbb{K}^X$. Pour conclure, il suffit donc de montrer que U^Δ est fermé pour la topologie simple. C'est évident puisque si $T \notin U^\Delta$, il existe $x \in U$ et $\varepsilon > 0$ tel que $|T(x)| > 1 + \varepsilon$. Alors

$$\{S \in X' : |T(x) - S(x)| < \varepsilon\}$$

est un ouvert de $\sigma(X', X)$ qui ne rencontre pas U^Δ . ■

Dans le cas d'un espace normé X , le polaire de la boule unité fermée B est donné par

$$B^\Delta = \{T \in X' : |T(x)| \leq 1 \ \forall x \in B\} = \{T \in X' : \|T\| \leq 1\}.$$

Il s'agit donc de la boule unité fermée dans X' . On sait par le Théorème 8.2.5 de Riesz que si X (et donc X') est de dimension infinie, cette boule n'est jamais compacte dans l'espace normé X' . Le Théorème d'Alaoglu implique qu'elle est néanmoins simplement compacte. C'est un des intérêts majeurs de la topologie simple sur X' .

9.5 Exercices

Exercice 9.5.1. Montrer que la topologie faible $\sigma(X, X')$ est métrisable si et seulement si X est de dimension finie.

Exercice 9.5.2. Soient $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe et Y un sous-espace de $(X, \mathcal{P})$. On pose

$$Y^\perp = \{T \in X' : T(y) = 0 \ \forall y \in Y\}.$$

1. Montrer que le dual topologique de Y est isomorphe au quotient $X'/Y^\perp$.
2. Montrer que le dual topologique de l'espace quotient X/Y est isomorphe au sous-espace vectoriel $Y^\perp$.

Exercice 9.5.3. Soit $(X_i, \mathcal{P}_i)$, $i \in I$, une famille d'espaces localement convexes.

1. Montrer que le dual topologique du produit $\prod_{i \in I} X_i$ est isomorphe à la somme directe $\bigoplus_{i \in I} X'_i$ (cfr Liste 2).
2. Montrer que le dual topologique de la somme directe $\bigoplus_{i \in I} X_i$ est isomorphe au produit $\prod_{i \in I} X'_i$.

Bibliographie

- [1] Garnir, H. G., De Wilde, M. et Schmets, J. (1968). *Analyse fonctionnelle I*. Birkhäuser, Basel.
- [2] Jarchow, H. (1981). *Locally Convex Spaces*. Teubner, Stuttgart.
- [3] Köthe, G. (1969). *Topological Vector Spaces 1*. Springer, Berlin.
- [4] Matheron, E. *Topologie, Analyse fonctionnelle*. Notes de cours, https://matheron.perso.math.cnrs.fr/enseignement_fichiers/topanafonc.pdf.
- [5] Meise, R. et Vogt, D. (1997). *Introduction to Functional Analysis*. Oxford Graduate Texts in Mathematics 2.
- [6] Rudin, W. (1991). *Functional Analysis*. Second edition, McGraw–Hill.
- [7] Schmets, J. (2004–2005). *Analyse fonctionnelle*. Notes de cours, Université de Liège.
- [8] Schneiders, J.-P. (2010–2011). *Analyse fonctionnelle*. Notes de cours, Université de Liège.
- [9] Wengenroth, J. (2007–2008). *Analyse fonctionnelle*. Notes de cours, Université de Liège.